

Pasantía de investigación

Grafos Tutte-máximos y uniformemente más confiables

Gabriel Kryger Mesa

12 de abril de 2024

Resumen

En este documento se describen los conceptos de grafo Tutte-máximo y de grafo uniformemente más confiable. Primero veremos que todo grafo Tutte-máximo es uniformemente más confiable, y que el recíproco no es cierto. Estudiaremos invariantes que se maximizan en todo grafo Tutte-máximo. Por último, se presentan los programas que fueron desarrollados en el marco de esta pasantía de investigación para obtener grafos Tutte-máximos con n vértices y m aristas, siempre que exista y cuando el esfuerzo de cómputo lo permita.

1. Introducción

El concepto de grafo uniformemente más confiable fue introducido por Boesch en 1986 en la prestigiosa revista *Journal of Graph Theory* [2]. En dicho artículo Boesch conjetura que en cada clase no vacía de grafos conexos con una cantidad preestablecida de vértices y aristas siempre existe al menos un grafo que es uniformemente más confiable. Boesch pocos años después de manera conjunta con un equipo de investigadores [3] muestran que en cada una de las clases de grafos conexos con n vértices y m aristas tales que $n - 1 \leq m \leq n + 2$ existe precisamente un único grafo que es uniformemente más confiable. Más tarde, Myrvold [10], Brown y Cox [4] y Romero y Safe [12] demostraron que en algunas clases de grafos no vacías no existen grafos uniformemente más confiables, brindando contraejemplos a dicha conjetura. Sin embargo, hasta la fecha existen infinitas clases de grafos de las que no se ha logrado decidir la existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables.

En un artículo recientemente publicado en la revista *Discrete Applied Mathematics* [9] los autores Kahl y Luttrell introducen el concepto de grafo Tutte-máximo. Es simple demostrar que todo grafo Tutte-máximo es uniformemente más confiable [8]. El recíproco no es cierto [9].

Este documento se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se definen los conceptos de grafo uniformemente más confiable, grafo Tutte-máximo, y grafo t -óptimo. La Sección 3 describe propiedades fundamentales de los grafos Tutte-máximos, entre ellas, que todo grafo Tutte-máximo es uniformemente más confiable. El funcionamiento de los algoritmos desarrollados para determinar tanto grafos Tutte-máximos como grafos Tutte-maximales se describe en la Sección 4. Como resultado de las ejecuciones de dichos algoritmos, en la Sección 5 se obtiene la lista completa de grafos Tutte-máximos para todas aquellas clases de grafos conexos cuya cantidad de vértices está comprendida entre 6 y 8. Tal como fue evidenciado en [8], no existe grafo Tutte-máximo dentro de la clase de grafos conexos con 7 vértices y 11 aristas. Los resultados obtenidos permiten corroborar la existencia de grafos uniformemente más confiables, y se hallan en armonía con los resultados obtenidos en [11]. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones finales de este trabajo. En el Apéndice se deducen identidades que se obtienen a partir de evaluaciones del polinomio de Tutte. Específicamente, se obtiene tanto el número de árboles recubridores como el polinomio cromático de un grafo utilizando únicamente su polinomio de Tutte.

2. Conceptos básicos

En esta Sección definiremos los conceptos de grafo t -óptimo, grafo uniformemente más confiable y de grafo Tutte-máximo, respectivamente.

2.1. Grafos t -óptimos

Para cada par de enteros positivos n y m tales que $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, denotamos mediante $\mathcal{C}_{n,m}$ a la clase que consiste en todos los grafos simples y conexos con n vértices y m aristas. Para cada grafo G perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ usaremos el símbolo $\tau(G)$ para representar la cantidad de árboles recubridores del grafo G . Diremos que un grafo G perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ es t -óptimo si para cualquier grafo H perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ se cumple que $\tau(G) \geq \tau(H)$.

2.2. Grafos uniformemente más confiables

Para cada grafo G perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ utilizaremos el símbolo $\mathcal{S}(G)$ para representar al conjunto que consiste en todos los subgrafos recubridores de G que son conexos. Denotaremos $\mathcal{S}'(G)$ a la clase que consiste en todos los subgrafos recubridores de G que además son conexos. Sea $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ y $p \in [0, 1]$. La *confiabilidad de G evaluada en p* es la probabilidad de que el subgrafo que resulta de eliminar cada una de las aristas de G con probabilidad $1 - p$ quede conexo. Formalmente,

$$R_G(p) = \sum_{H \in \mathcal{S}'(G)} p^{|E(H)|} (1-p)^{m-|E(H)|}. \quad (1)$$

Un grafo G perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ es *uniformemente más confiable* si para cualquier otro grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y para todo $p \in [0, 1]$ se cumple que $R_G(p) \geq R_H(p)$.

2.3. Grafos Tutte-máximos

Sea G un grafo perteneciente a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. Para cada grafo simple H en $\mathcal{S}(G)$ denotemos mediante $\kappa(H)$ la cantidad de componentes conexas de H . Entonces, el *polinomio de Tutte del grafo G* se denota $T_G(x, y)$ y se define de la siguiente manera:

$$T_G(x, y) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (x-1)^{\kappa(H)-1} (y-1)^{|E(H)|-n+\kappa(H)}. \quad (2)$$

Sean G y G' dos grafos en $\mathcal{C}_{n,m}$. Diremos que G' *precede a G* y lo denotamos $G' \preceq G$, si $T_G(x, y) - T_{G'}(x, y) = (x+y-xy)P(x, y)$ para algún polinomio $P(x, y)$ con coeficientes no negativos. Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es *Tutte-máximo* [9] si para cada grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ se cumple que $H \preceq G$. Siguiendo la terminología habitual inherente a relaciones de orden parcial, diremos que G es *Tutte-maximal* si no existe un grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ distinto de G tal que $G \preceq H$.

Diremos que dos grafos $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ y $H \in \mathcal{C}_{n,m}$ son *Tutte-equivalentes* si $T_G(x, y) = T_H(x, y)$. Esta igualdad entre polinomios de Tutte induce una relación de equivalencia en $\mathcal{C}_{n,m}$. Para cada grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$, su clase de equivalencia es $\hat{G} = \{H : H \in \mathcal{C}_{n,m} : T_H(x, y) = T_G(x, y)\}$. Sea $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ el conjunto cociente, cuyos elementos son todas las clases de equivalencia en $\mathcal{C}_{n,m}$. Dadas dos clases \hat{G} y \hat{H} en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$, denotamos $\hat{G} \preceq \hat{H}$ cuando dados G y H tales que $G \in \hat{G}$ y $H \in \hat{H}$ se cumple que $G \preceq H$.

Los autores en [8] dan por entendida la siguiente afirmación. Por cuestiones de completitud, incluiremos su demostración en el Apéndice.

Afirmación 1. *La relación \preceq definida sobre el conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es de orden parcial.*

Para cada clase \mathcal{G} perteneciente al conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ tomemos un representante G de \mathcal{G} y consideremos el polinomio $p_G(x, y)$ tal que $p_G(x, y) = T_G(x, y)$, es decir que p_G es el polinomio de Tutte de un representante de la clase \mathcal{G} . Sea $\mathcal{P}_{n,m}$ la clase que incluye a cada uno de tales polinomios, es decir que $\mathcal{P}_{n,m} = \{p_G : G \in \mathcal{G}, \mathcal{G} \in \hat{\mathcal{C}}_{n,m}\}$. Dados dos polinomios p_G y $p_{G'}$ de $\mathcal{P}_{n,m}$ consideramos la relación dada por $p_{G'} \preceq_{\mathcal{P}} p_G$ si y sólo si $G' \preceq G$.

Afirmación 2. *El conjunto $\mathcal{P}_{n,m}$ equipado con la relación $\preceq_{\mathcal{P}}$ es una relación de orden parcial.*

La prueba de la Afirmación 2 se incluye en el Apéndice.

3. Propiedades fundamentales de grafos Tutte-máximos

En esta sección veremos algunas propiedades fundamentales del polinomio de Tutte y de grafos Tutte-máximos. Veremos primeramente que si disponemos del polinomio de Tutte $T_G(x, y)$ de un grafo G entonces es posible obtener en particular invariantes del grafo G tales como la cantidad de árboles recubridores de G que denotamos $\tau(G)$, su polinomio cromático $\chi_G(\lambda)$, y su confiabilidad $R_G(p)$. Además, veremos que todo grafo Tutte-máximo es uniformemente más confiable. Puesto que todo grafo uniformemente más confiable es t -óptimo surge como consecuencia que todo grafo Tutte-máximo es t -óptimo. Vamos a obtener en esta sección este conocido resultado de modo directo y a partir de la definición de grafo Tutte-máximo.

Los Lemas 3, 4 y 5 se enuncian por Kahl en el artículo [8] sin incluir sus demostraciones. A modo de completitud incluiremos las demostraciones de los Lemas 3 y 4 en el Apéndice.

Lema 3 (Kahl [8]). *Si $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ entonces $\tau(G) = T_G(1, 1)$.*

Lema 4 (Kahl [8]). *Si $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ entonces $\chi_G(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda T_G(1 - \lambda, 0)$.*

La demostración del Lema 5 se incluye en el cuerpo principal de este informe dada su relevancia para esta pasantía.

Lema 5 (Kahl [8]). *Si $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ y $p \in (0, 1)$ entonces $R_G(p) = p^{n-1}(1-p)^{m-n+1} T_G\left(1, \frac{1}{1-p}\right)$.*

Demostración. Sea G un grafo cualquiera perteneciente a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea p un número perteneciente al conjunto abierto $(0, 1)$. A partir de la evaluación de la expresión (2) en $(x, y) = (1, 1/(1-p))$ se obtiene que

$$T_G(1, 1/(1-p)) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} 0^{\kappa(H)-1} \frac{p^{|E(H)|-n+\kappa(H)}}{(1-p)^{|E(H)|-n+\kappa(H)}}.$$

Los únicos términos no nulos ocurren cuando $\kappa(H) = 1$, es decir, cuando $H \in \mathcal{S}'(G)$. Entonces,

$$T_G(1, 1/(1-p)) = \sum_{H \in \mathcal{S}'(G)} \frac{p^{|E(H)|-n+1}}{(1-p)^{|E(H)|-n+1}}.$$

Multiplicando la anterior cadena de igualdades por el factor $p^{n-1}(1-p)^{m-n+1}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} p^{n-1}(1-p)^{m-n+1} T_G(1, 1/(1-p)) &= p^{n-1}(1-p)^{m-n+1} \sum_{H \in \mathcal{S}'(G)} \frac{p^{|E(H)|-n+1}}{(1-p)^{|E(H)|-n+1}} \\ &= \sum_{H \in \mathcal{S}'(G)} p^{|E(H)|} (1-p)^{m-|E(H)|} = R_G(p), \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por la definición de $R_G(p)$ dada en la expresión (1). \square

El siguiente resultado provee un vínculo directo entre grafos Tutte-máximos y grafos uniformemente más confiables.

Teorema 6. *Si $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ es Tutte-máximo entonces G es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$.*

Demostración. Sea G un grafo Tutte-máximo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea G' un grafo arbitrariamente elegido dentro de $\mathcal{C}_{n,m}$. Es claro que $R_G(0) = R_{G'}(0) = 0$ y que $R_G(1) = R_{G'}(1) = 1$, por lo que es suficiente probar que para todo $p \in (0, 1)$ se cumple que $R_G(p) \geq R_{G'}(p)$. Sea entonces p un número en el conjunto abierto $(0, 1)$. Como G es Tutte-máximo, tenemos que $T_G(x, y) - T_{G'}(x, y) = (x+y-xy)P(x, y)$, donde $P(x, y)$ es un polinomio cuyos coeficientes son no negativos. Como $p \in (0, 1)$, estamos en las hipótesis del Lema 5, que al ser aplicado tanto para el grafo G como para el grafo G' resulta que,

$$\begin{aligned} R_G(p) - R_{G'}(p) &= p^{n-1}(1-p)^{m-n+1} (T_G(1, 1/(1-p)) - T_{G'}(1, 1/(1-p))) \\ &= p^{n-1}(1-p)^{m-n+1} \left(\left(1 + \frac{1}{1-p} - 1 \frac{1}{1-p}\right) P\left(1, \frac{1}{1-p}\right) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

donde se utiliza la definición del polinomio $P(x, y)$ evaluado en $(x, y) = (1, 1/(1-p))$ en la última igualdad y el hecho de que todos sus coeficientes son no negativos en la última desigualdad. \square

Brown y Cox observan que todo grafo uniformemente más confiable es t -óptimo [5]. Como consecuencia del Teorema 6 y de dicha observación se deduce que todo grafo Tutte-máximo es t -óptimo. A modo de completitud incluiremos aquí una prueba elemental de dicha afirmación que utiliza la definición de grafo Tutte-máximo.

Lema 7. *Si G es Tutte-máximo entonces G es τ -óptimo.*

Demostración. Sea G un grafo Tutte-máximo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea G' un grafo cualquiera en $\mathcal{C}_{n,m}$. Como G es Tutte-máximo sabemos que $T_G(x, y) - T_{G'}(x, y) = (x + y - xy)P(x, y)$, donde $P(x, y)$ es un polinomio cuyos coeficientes son no negativos. Aplicando el Lema 3 tanto al grafo G como al grafo G' tenemos que $\tau(G) = T_G(1, 1)$ y $\tau(G') = T_{G'}(1, 1)$, por lo que

$$\tau(G) - \tau(G') = T_G(1, 1) - T_{G'}(1, 1) = (1 + 1 - 1 \times 1)P(1, 1) = P(1, 1) \geq 0,$$

donde hemos utilizado el Lema 3 en la primera igualdad, la definición de grafo Tutte-máximo en la segunda igualdad y el hecho que $P(1, 1)$ es precisamente la suma de todos sus coeficientes, que es una cantidad no negativa por definición de P . Concluimos entonces que $\tau(G) \geq \tau(G')$, y como G' es un grafo arbitrario en $\mathcal{C}_{n,m}$ se sigue que G es t -óptimo, como queríamos demostrar. \square

4. Determinación de grafos Tutte-máximos

Gracias a la Afirmación 1 sabemos que para cada par de enteros positivos n y m tales que $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ la relación de precedencia \preceq definida sobre $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es de orden parcial. Como $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es un conjunto finito, siempre existe algún elemento que es maximal. Además, si existe un elemento máximo \hat{G} en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ entonces cualquier grafo G perteneciente al conjunto $\hat{\mathcal{C}}$ es Tutte-máximo, y por el Teorema 6 es también uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$.

En esta sección se describe un algoritmo que permite construir el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden \preceq definida sobre $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$. Además, se describe un segundo algoritmo que permite determinar si existe un elemento que sea máximo dentro de dicha relación. Cabe aclarar que ambos algoritmos se basan en el cálculo exacto del polinomio de Tutte. Sin embargo, por el Lema 5, la determinación de dicho polinomio es al menos tan difícil como la de la confiabilidad de un grafo, que es un problema \mathcal{NP} -difícil [1]. Consecuentemente, en la Sección 5 se realizan ejecuciones de dichos algoritmos para clases $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ con reducida cantidad de vértices.

Algoritmo 1 $S = \text{Precedencia}(G', G)$

```

1:  $T_{G'} \leftarrow \text{ObtenerPolinomiosDeTutte}(G')$ 
2:  $T_G \leftarrow \text{ObtenerPolinomiosDeTutte}(G)$ 
3:  $P \leftarrow \text{Polynomial} \left( \frac{T_G - T_{G'}}{x + y - xy} \right)$ 
4:  $S \leftarrow 1$ 
5: for Coficiente in  $P$  do
6:   if Coficiente < 0 then
7:      $S \leftarrow 0$ 
8:   break
9:   end if
10: end for
11: return  $S$ 

```

El Algoritmo 1 recibe como entrada a 2 grafos simples G' y G con la misma cantidad de vértices y aristas y retorna una variable booleana S que vale 1 si se cumple que $G' \preceq G$ o 0 en caso contrario. En las líneas 1 y 2 llamamos a la función *ObtenerPolinomiosDeTutte* que recibe un grafo simple y retorna su polinomio de Tutte. Luego, en la línea 3 aplicamos la función *Polynomial* que recibe un polinomio y retorna a la lista P que contiene a todos los coeficientes de dicho polinomio. En la línea 4 asignamos 1 a la variable de salida S ; este será el resultado de salida en caso de que $G' \preceq G$. En el bloque constituido por las líneas 5 a 10 se determina mediante un ciclo *for* si la lista P tiene algún coeficiente real negativo; en tal caso se asigna 0 a la variable S y se corta dicho ciclo. Finalmente, en la línea 11 se retorna la variable S .

Algoritmo 2 $PolinomiosDeTutteDeGrafos = TutteMaximales(n, m)$

```
1:  $Grafos \leftarrow ObtenerGrafos(n, m)$ 
2:  $PolinomiosDeTutteDeGrafos \leftarrow ObtenerPolinomiosDeTutte(Grafos)$ 
3: for  $G \in PolinomiosDeTutteDeGrafos$  do
4:   for  $G' \in PolinomiosDeTutteDeGrafos$  do
5:     if  $G' \preceq G$  then
6:        $PolinomiosDeTutteDeGrafos.remove(G)$ 
7:     end if
8:   end for
9: end for
10: return  $PolinomiosDeTutteDeGrafos$ 
```

El algoritmo 2 recibe como entrada a 2 números enteros n y m tales que $n \geq 2$ y $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ y retorna una lista llamada $PolinomiosDeTutteDeGrafos$ que consiste en todos los polinomios de Tutte asociados a los grafos Tutte-maximales de la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. En la línea 1 se ejecuta la función $ObtenerGrafos(n, m)$ que recibe como entrada a los enteros n y m y retorna una lista con nombre $Grafos$ que incluye a todos los grafos no isomorfos de la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. En la línea 2 se ejecuta a la función $ObtenerPolinomiosDeTutte$ que recibe la lista de $Grafos$ y retorna una lista con todos los polinomios de Tutte diferentes que se pueden realizar a partir de la lista de todos los $Grafos$. Estos polinomios de Tutte se guardan en la lista $PolinomiosDeTutteDeGrafos$. En el bloque constituido por las líneas 3-9 se realiza en un ciclo *for* un proceso de poda o de eliminación de aquellos grafos G' que cumplen que $G' \preceq G$ para otro grafo G dentro de $PolinomiosDeTutteDeGrafos$. Dicha eliminación del grafo G' se ejecuta mediante la operación *remove* en la línea 6 y cada vez que se cumpla que $G' \preceq G$.

Finalmente, en la línea 10 se retorna la lista $PolinomiosDeTutteDeGrafos$ que ahora contiene solamente aquellos polinomios de Tutte asociados a los grafos Tutte-maximales.

Algoritmo 3 $Hasse = HassePolinomios(n, m)$

```
1:  $Grafos \leftarrow ObtenerGrafos(n, m)$ 
2:  $PolinomiosDeTutteDeGrafos \leftarrow ObtenerPolinomiosDeTutte(Grafos)$ 
3:  $Hasse \leftarrow ObtenerGrafoVacio()$ 
4: for  $p_G \in PolinomiosDeTutteDeGrafos$  do
5:    $Hasse.agregarVertice(p_G)$ 
6: end for
7: for  $p_G \in PolinomiosDeTutteDeGrafos$  do
8:   for  $p_{G'} \in PolinomiosDeTutteDeGrafos$  do
9:     if  $G' \preceq G$  then
10:       $Hasse.agregarArista(p_{G'} \leftarrow p_G)$ 
11:    end if
12:   end for
13: end for
14: return  $Hasse$ 
```

El algoritmo 3 recibe como entrada a 2 números enteros n y m tales que $n \geq 2$ y $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ y retorna un grafo dirigido llamado $Hasse$ que es el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden parcial \preceq_P sobre la clase $\mathcal{P}_{n,m}$ de polinomios Tutte-equivalentes. En la línea 1 se ejecuta la función $ObtenerGrafos(n, m)$ que recibe como entrada a los enteros n y m y retorna una lista con nombre $Grafos$ que contiene precisamente a todos los grafos no isomorfos de la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. En la línea 2 se ejecuta a función $ObtenerPolinomiosDeTutte(Grafos)$ que recibe la variable $Grafos$ y retorna una lista con todos los polinomios de Tutte de todos los $Grafos$. Estos polinomios de Tutte se guardan en la variable $PolinomiosDeTutteDeGrafos$. En la línea 3 ejecutamos la función $ObtenerGrafoVacio()$ que retorna un grafo vacío, y lo guardamos en la variable $Hasse$. En el bloque constituido por las líneas 4-13 se construye el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden de todos los polinomios Tutte-equivalentes. En la línea 4 se recorre cada uno de los polinomios de la lista $PolinomiosDeTutteDeGrafos$, llamando p_G al polinomio de Tutte correspondiente a esta iteración. En la línea 5, dentro de la iteración, utilizamos el método $agregarVertice(p_G)$, que recibe al

polinomio p_G y agrega un vértice al diagrama de Hasse correspondiente. Dicho vértice estará asociado al polinomio de Tutte del grafo G . En la línea 7 iteraremos con un ciclo *for* dentro de toda la lista *PolinomiosDeTutteDeGrafos* tomando G como el polinomio de Tutte correspondiente a este paso de la iteración. Dentro de dicho ciclo, en la línea 8 iteraremos con otro ciclo *for* dentro de toda la lista *PolinomiosDeTutteDeGrafos* tomando $p_{G'}$ como el polinomio de Tutte correspondiente a este paso de la iteración. Dentro de ambas iteraciones, en la línea 9 realizaremos la comparación $G' \preceq G$ utilizando el Algoritmo 1. Si dicha precedencia es correcta entonces sabemos que $p_{G'} \preceq_{\mathcal{P}} p_G$, por lo que agregaremos, en la línea 10, una arista desde el vértice $p_{G'}$ hacia el vértice p_G . Por último en la línea 14 retornamos el diagrama de Hasse resultante.

5. Casos de Estudio

5.1. Lenguaje y ambiente de ejecución.

Para la realización de este programa se utilizó Python 3.10.12 y las librerías networkx para el manejo de grafos, numpy para el manejo de matrices, sympy para la operatoria entre polinomios y librerías nativas a Python (os, time, subprocess y sys). Las ejecuciones fueron realizadas en un ordenador con 16 GB y 2400 MHz de memoria (CPU modelo AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor).

Se utilizaron las librerías externas [nauty](#) and [Traces](#) para la generación de los grafos $G_{n,m}$ y [tutteBHKK](#) para la generación de los polinomios de Tutte a partir de los grafos. Se ha generado un envoltorio en Python que quedó publicado en el mismo repositorio. ¹

5.1.1. Constelación de grafos Tutte-máximos

Se ha ejecutado el Algoritmo 2 ingresando en su entrada todos los pares de enteros (n, m) tales que $n \in \{6, 7, 8\}$ y $m \in \{n, \dots, 2n - 1\}$ como también el par $(n, m) = (8, 18)$ para el estudio de grafos Tutte-maximales. Decidimos realizar el experimento solo con 6, 7 y 8 nodos ya que el problema que consiste en determinar el polinomio de Tutte es #P-Completo [7].

La Figura 1 presenta la salida de dichas ejecuciones en un formato de *constelación de grafos*. Concretamente, en las columnas se indica la cantidad de vértices n , las filas indican la cantidad de aristas m , y en cada una de las entradas que se corresponden con la columna n y fila m se ilustran a todos los grafos que son Tutte-maximales pertenecientes a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$.

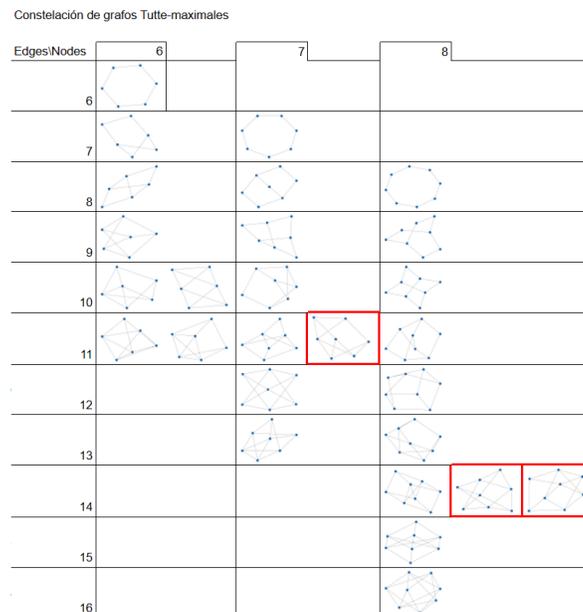


Figura 1: Constelación de grafos Tutte-máximos

¹Los scripts se encuentran disponibles públicamente en el repositorio Github: <https://github.com/Gabito2000/TallerInvestigacion>

Lo primero a observar es que, en aquellas clases de estudio $\mathcal{C}_{n,m}$ que poseen más de un grafo Tutte-maximal, no existe grafo Tutte-máximo. Por lo tanto, en cada una de las clases $\mathcal{C}_{6,10}$, $\mathcal{C}_{6,11}$, $\mathcal{C}_{7,11}$ y $\mathcal{C}_{8,14}$, no existe ningún grafo Tutte-máximo. Por otro lado, en aquellas clases que tienen precisamente un único grafo Tutte-maximal, no solamente es Tutte-máximo sino que, gracias al Teorema 6, dicho grafo es un grafo uniformemente más confiable.

Lo segundo a observar es que el recíproco del Teorema 6 no es cierto. De hecho, en la clase $\mathcal{C}_{7,11}$ ya sabemos que no existe grafo Tutte-máximo. Sin embargo, previos estudios computacionales comprueban que existe un grafo que es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{7,11}$, y es el grafo que se presenta en la Figura 1 en el casillero (7, 11) que no está recuadrado en rojo. Este resultado sobre la clase de grafos $\mathcal{C}_{7,11}$ fue observado anteriormente en [9]. Tras un ajuste en la demostración del Teorema 6, es posible probar que todo grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$ debe ser Tutte-maximal. Cabe acotar que estos resultados se hallan en armonía con la constelación de grafos uniformemente más confiables que se recopila en [12], ya que, como probamos en el Teorema 6, sabemos que todos los grafos Tutte-máximos son uniformemente más confiables.

Tras una revisión exhaustiva de todos los grafos pertenecientes a cada una de las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ de estudio, fue posible identificar a aquellos grafos que alcanzan la máxima cintura en $\mathcal{C}_{n,m}$. Fue posible entonces identificar a cada uno de los grafos Tutte-maximales que no alcanzan la máxima cintura dentro de sus respectivas clases, que se recuadran en rojo en la Figura 1. Este estudio para grafos de pequeño tamaño sugiere que todos los grafos que poseen máxima cintura en $\mathcal{C}_{n,m}$ son Tutte-maximales. En base a los resultados obtenidos y considerando que el cálculo de la cintura es de tiempo polinomial, planteamos las siguientes conjeturas.

Conjetura 1. *Todo grafo con máxima cintura es Tutte-maximal.*

Conjetura 2. *Todo grafo Tutte-máximo tiene máxima cintura.*

5.1.2. Ejemplo de Diagrama de Hasse

A modo ilustrativo se ejecuta el Algoritmo 3 tomando como entrada al par de enteros $(n, m) = (6, 7)$. Se presenta en la Figura 2 el diagrama de Hasse correspondiente a los polinomios Tutte-equivalentes $\mathcal{P}_{6,7}$ inducidos por la relación de orden en $\hat{\mathcal{C}}_{6,7}$. Dentro de dicho diagrama se incluye en cada vértice no solamente al polinomio correspondiente sino también a un grafo representante que tiene a dicho polinomio como su polinomio de Tutte.

6. Conclusiones

En este trabajo nos familiarizamos con el concepto de polinomio de Tutte, su relación con la confiabilidad de redes y con otros invariantes en grafos tales como la cantidad de árboles recubridores de un grafo. Concretamente, nos hemos familiarizado con el concepto de grafos Tutte-máximos introducida por Kahl y Luttrell en un reciente artículo, que brinda condiciones suficientes para la existencia de grafos uniformemente más confiables. Como consecuencia de dicho concepto, hemos presentado aquí una nueva relación de orden parcial entre polinomios que son Tutte equivalentes y hemos estudiado la existencia de grafos Tutte-maximales.

En el transcurso de esta pasantía, además de aprender los conceptos antedichos, se desarrollaron los códigos que permiten ejecutar los algoritmos que permiten determinar la precedencia entre grafos, la existencia de grafos Tutte-maximales, y la representación de polinomios Tutte-equivalentes en un diagrama de Hasse. Dichos scripts se encuentran públicamente disponibles. Las ejecuciones del algoritmo que permite determinar grafos Tutte-maximales sugiere que cada grafo que posee máxima cintura en $\mathcal{C}_{n,m}$ es Tutte-maximal. Esto es una pregunta abierta que se deja para trabajo futuro. En caso de ser afirmativa, tendríamos como consecuencia que todo grafo Tutte-máximo posee máxima cintura.

Agradecimientos

Agradezco a mi orientador, Pablo Romero, por haberme guiado en el desarrollo de esta pasantía de iniciación a la investigación y en la elaboración del presente informe.

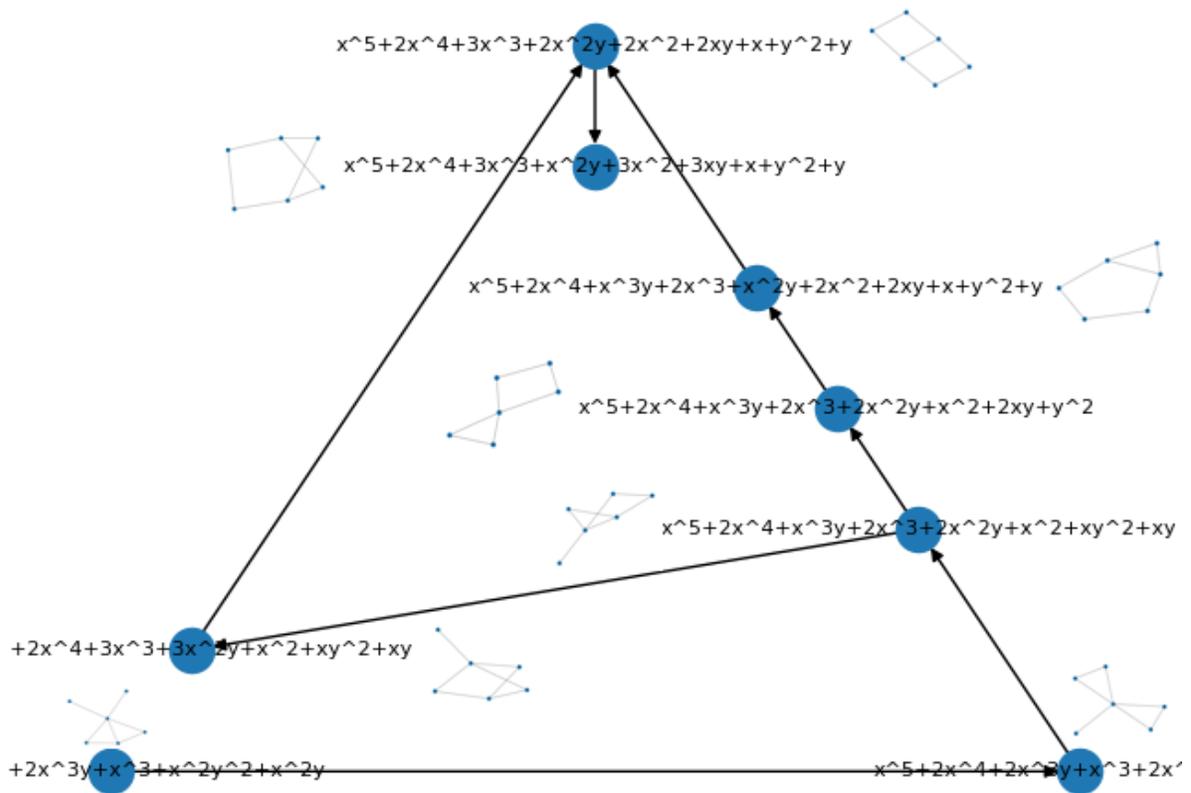


Figura 2: Diagrama de Hasse correspondiente a la clase $C_{6,7}$.

Referencias

- [1] Michael O. Ball and J. Scott Provan. The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected. *SIAM J. Computing*, 12:777–788, 1983.
- [2] F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *J. Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [3] F. T. Boesch, X. Li, and C. Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2):181–194, 1991.
- [4] Jason I. Brown, Charles J. Colbourn, Danielle Cox, Christina Graves, and Lucas Mol. Network reliability: Heading out on the highway. *Networks*, 77(1):146–160, 2021.
- [5] Jason I. Brown and Danielle Cox. Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability. *Networks*, 63(2):146–153, 2014.
- [6] Joanna Ellis-Monaghan and Criel Merino. Graph polynomials and their applications i: The tutte polynomial. *Structural Analysis of Complex Networks*, 04 2008.
- [7] François Jaeger, Dirk L. Vertigan, and Dominic J. A. Welsh. On the computational complexity of the jones and tutte polynomials. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 108:35 – 53, 1990.
- [8] Nathan Kahl. Extremal graphs for the tutte polynomial. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 152:121–152, 2022.
- [9] Nathan Kahl and Kristi Luttrell. On maximum graphs in tutte polynomial posets. *Discrete Applied Mathematics*, 339:78–88, 2023.
- [10] Wendy Myrvold, Kim H. Cheung, Lavon B. Page, and Jo Ellen Perry. Uniformly-most reliable networks do not always exist. *Networks*, 21(4):417–419, 1991.
- [11] Pablo Romero. Uniformly optimally reliable graphs: A survey. *Networks*, 80(4):466–481, 2022.
- [12] Pablo Romero and Martín D. Safe. Least corank for the nonexistence of uniformly most reliable graphs. *Procedia Computer Science*, 223:88–95, 2023.

7. Anexo

Prueba de la Afirmación 1. Probaremos que la relación \preceq definida en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

De hecho, probemos primero que la relación \preceq en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es reflexiva. Sean G_1 y G_2 dos grafos pertenecientes a la misma clase $\hat{\mathcal{G}}$. Por la definición de \preceq sobre el conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ se sigue que $T_{G_1}(x, y) = T_{G_2}(x, y)$. Luego tenemos que $T_{G_2}(x, y) - T_{G_1}(x, y) = 0 = (x + y - xy)N(x, y)$, donde $N(x, y)$ es el polinomio nulo que, en particular, tiene a todos sus coeficientes reales y no negativos. Entonces, $G_1 \preceq G_2$. Como tanto G_1 como G_2 son grafos arbitrarios de la misma clase \mathcal{G} se sigue de la relación \preceq definida en el conjunto cociente que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{G}$, por lo que dicha relación es reflexiva.

En segundo lugar, probemos que la relación \preceq en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es transitiva. Sean ahora \mathcal{G} , \mathcal{H} y \mathcal{J} tres clases dentro del conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ tales que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \preceq \mathcal{J}$. Probemos que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{J}$. De hecho, si tomamos tres grafos G , H y J tales que $G \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{H}$ y $J \in \mathcal{J}$ entonces, por la relación de precedencia en el conjunto cociente, se sigue que $G \preceq H$ y que $H \preceq J$. Luego existen dos polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ con todos sus coeficientes no negativos tales que $T_H(x, y) - T_G(x, y) = (x + y - xy)P(x, y)$ y además $T_J(x, y) - T_H(x, y) = (x + y - xy)Q(x, y)$. Sumando ambas expresiones tenemos que $T_J(x, y) - T_G(x, y) = (x + y - xy)(P(x, y) + Q(x, y))$. Definiendo $R(x, y) = P(x, y) + Q(x, y)$ resulta que $R(x, y)$ es un polinomio cuyos coeficientes son no negativos, puesto que es una suma de polinomios cuyos coeficientes son no negativos. Concluimos entonces que $T_J(x, y) - T_G(x, y) = (x + y - xy)R(x, y)$, por lo que $G \preceq J$. A partir de la definición de precedencia en el conjunto cociente se sigue que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{J}$.

Por último, probemos que la relación \preceq en $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ es antisimétrica. Sean \mathcal{G} y \mathcal{H} dos clases cualesquiera del conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$ tales que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$. Tomemos un grafo G en \mathcal{G} y un grafo H en \mathcal{H} . Usando por un lado que $\mathcal{G} \preceq \mathcal{H}$ tenemos que $G \preceq H$. Esto significa que existe algún polinomio $P_1(x, y)$ cuyos coeficientes son no negativos tal que $T_H(x, y) - T_G(x, y) = (x + y - xy)P_1(x, y)$. Usando por otro lado que $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$ tenemos que $H \preceq G$. Esto significa que existe algún polinomio $P_2(x, y)$ cuyos coeficientes son no negativos tal que $T_G(x, y) - T_H(x, y) = (x + y - xy)P_2(x, y)$, o equivalentemente, $T_H(x, y) - T_G(x, y) = (x + y - xy)(-P_2(x, y))$. Entonces se deduce que $P_1(x, y) = -P_2(x, y)$, o que $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 0$. Como ambos polinomios tienen sus coeficientes reales y no negativos, surge que $P_1(x, y) = P_2(x, y) = 0$. Por lo tanto, $T_G(x, y) = T_H(x, y)$. Esto significa que G y H se encuentran en la misma clase del conjunto cociente $\hat{\mathcal{C}}_{n,m}$, es decir que $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, como queríamos demostrar. \square

Prueba de la Afirmación 2. Probaremos que la relación $\preceq_{\mathcal{P}}$ definida en el conjunto de polinomios $\mathcal{P}_{n,m}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Sea p un polinomio cualquiera en $\mathcal{P}_{n,m}$. Vamos a probar que $p \preceq_{\mathcal{P}} p$. Para ello, tomemos dos grafos cualesquiera G_1 y G_2 tales que sus polinomios de Tutte p_{G_1} y p_{G_2} son iguales a p . Basta con probar que $G_1 \preceq G_2$. Efectivamente, $p_{G_2}(x, y) - p_{G_1}(x, y) = 0 = (x + y - xy)0$, y el polinomio nulo tiene a sus coeficientes no negativos.

Para probar que la relación $\preceq_{\mathcal{P}}$ es transitiva, sean p_1 , p_2 y p_3 tres polinomios en $\mathcal{P}_{n,m}$ tales que $p_1 \preceq_{\mathcal{P}} p_2$ y $p_2 \preceq_{\mathcal{P}} p_3$. Como $p_1 \preceq_{\mathcal{P}} p_2$, existen dos grafos G_1 y G_2 tales que $p_{G_1} = p_1$, $p_{G_2} = p_2$ y además $G_1 \preceq G_2$. Como $p_2 \preceq_{\mathcal{P}} p_3$, existen dos grafos G'_2 y G_3 tales que $p_{G'_2} = p_2$, $p_{G_3} = p_3$ y $G'_2 \preceq G_3$. Es suficiente probar que $G_1 \preceq G_3$. Veamos primero que $G_2 \preceq G'_2$. De hecho, $p_{G'_2}(x, y) - p_{G_2}(x, y) = p_2(x, y) - p_2(x, y) = 0 = (x + y - xy)0$, por lo que efectivamente $G_2 \preceq G'_2$. Como ya sabemos que $G_1 \preceq G_2$ y ahora $G_2 \preceq G'_2$ resulta que $G_1 \preceq G'_2$. Como también $G'_2 \preceq G_3$, tenemos que $G_1 \preceq G_3$, donde $p_{G_1} = p_1$ y $p_{G_3} = p_3$, por lo que $p_1 \preceq_{\mathcal{P}} p_3$.

Por último, sean p_1 y p_2 dos polinomios en $\mathcal{P}_{n,m}$ tales que $p_1 \preceq_{\mathcal{P}} p_2$ y $p_2 \preceq_{\mathcal{P}} p_1$. Como $p_1 \preceq_{\mathcal{P}} p_2$, existen dos grafos G_1 y G_2 tales que $p_{G_1} = p_1$, $p_{G_2} = p_2$ y $G_1 \preceq G_2$. Esto significa que $p_2(x, y) - p_1(x, y) = p_{G_2}(x, y) - p_{G_1}(x, y) = (x + y - xy)P(x, y)$ para algún polinomio $P(x, y)$ con coeficientes no negativos. Como $p_2 \preceq_{\mathcal{P}} p_1$, existen dos grafos G'_2 y G'_1 tales que $p_{G'_2} = p_2$, $p_{G'_1} = p_1$ y $G'_2 \preceq G'_1$. Esto significa que $p_1(x, y) - p_2(x, y) = p_{G'_1}(x, y) - p_{G'_2}(x, y) = (x + y - xy)Q(x, y)$, para algún polinomio $Q(x, y)$ con coeficientes no negativos. Pero entonces hemos probado la siguiente cadena de igualdades:

$$p_2(x, y) - p_1(x, y) = (x + y - xy)P(x, y) = (x + y - xy)(-Q(x, y)),$$

donde $P(x, y)$ tiene a todos sus coeficientes no negativos y $-Q(x, y)$ tiene a todos sus coeficientes no positivos. La única posibilidad es que tanto $P(x, y)$ como $Q(x, y)$ tengan a todos sus coeficientes nulos, es decir que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, y por lo tanto $p_1 = p_2$, como queríamos demostrar. \square

Prueba del Lema 3. Evaluando la expresión (2) en $(x, y) = (1, 1)$ obtenemos que

$$T_G(1, 1) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} 0^{\kappa(H)-1} 0^{|E(H)|-n+\kappa(H)} = \tau(G),$$

donde la última igualdad vale porque los únicos términos que aportan una unidad en la sumatoria se obtienen cuando H es un subgrafo conexo recubridor de G que además cumple que $|E(H)| = n - 1$, es decir, cuando H es un árbol recubridor de G . \square

La expresión que se presenta en el Lema 8 para el polinomio cromático fue obtenida por Birkhoff. Su prueba consiste en la aplicación del principio de inclusión y exclusión y se incluye a continuación puesto que el Lema 8 se utiliza para demostrar el Lema 4

Lema 8 ([6]). *Para cada grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$, el polinomio cromático admite la siguiente expresión:*

$$\chi_G(\lambda) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-1)^{|E(H)|} \lambda^{\kappa(H)}$$

Demostración. Sean S_{ij} ($\overline{S_{ij}}$) el conjunto que consiste en todas las λ -coloraciones del grafo G tales que los vértices v_i y v_j reciben el mismo color (distinto color). Entonces, aplicando el principio de inclusión y exclusión sobre todas las λ -coloraciones posibles del grafo G , se obtiene que

$$\chi_G(\lambda) = \left| \bigcap_{ij:ij \in E(G)} \hat{S}_{ij} \right| = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-1)^{|E(H)|} \left| \bigcap_{ij:ij \in E(H)} S_{ij} \right| = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-1)^{|E(H)|} \lambda^{\kappa(H)},$$

donde en el último paso se utiliza que, en el subgrafo recubridor H de G , la restricción de asignar los mismos colores a cada una de las aristas en $E(H)$ es equivalente a que todos los vértices dentro de cada una de sus componentes conexas de H tengan el mismo color, por lo que hay exactamente $\lambda^{\kappa(H)}$ coloraciones posibles. \square

Prueba del Lema 4. Sea G un grafo cualquiera perteneciente a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. Primeramente, observemos que, si $\lambda = 0$, la identidad se cumple trivialmente, puesto que existen exactamente 0 maneras de colorear el grafo (no vacío) G con 0 colores, mientras que la expresión $(-1)^{n-1} \lambda T_G(1 - \lambda, 0)$ se anula al ser evaluada en $\lambda = 0$.

Sea entonces λ un número real no nulo cualquiera. Tras evaluar el polinomio de Tutte dado en la ecuación (2) en $(x, y) = (1 - \lambda, 0)$, tenemos que

$$T_G(1 - \lambda, 0) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-\lambda)^{\kappa(H)-1} (-1)^{|E(H)|-n+\kappa(H)} = (-\lambda)^{-1} (-1)^{-n} \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-1)^{|E(H)|} \lambda^{\kappa(H)} \quad (3)$$

Multiplicando la expresión (3) por $(-1)^{n-1} \lambda$ se consigue que

$$(-1)^{n-1} \lambda T_G(1 - \lambda, 0) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (-1)^{|E(H)|} \lambda^{\kappa(H)} \quad (4)$$

Por el Lema 8 sabemos que el segundo miembro de la ecuación (4) es igual a $\chi_G(\lambda)$. Por lo tanto, $(-1)^{n-1} \lambda T_G(1 - \lambda, 0) = \chi_G(\lambda)$, como queríamos demostrar. \square