



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Refutación a la conjetura de Boesch para clases de grafos de corango 7

Informe de Proyecto de Grado presentado por

Juan Manuel Rodríguez y Matías Craviotto

en cumplimiento parcial de los requerimientos para la graduación de la carrera
de Ingeniería en Computación de Facultad de Ingeniería de la Universidad de
la República

Supervisor

Pablo Romero

Montevideo, 5 de diciembre de 2024



Refutación a la conjetura de Boesch para clases de grafos de corango 7 por Juan Manuel Rodríguez y Matías Craviotto tiene licencia [CC Atribución 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, contribuyeron al logro de este proyecto. En especial, queremos agradecer profundamente a nuestro tutor de tesis, Pablo Romero, quien nos guió y acompañó en cada etapa de este proceso, brindándonos su conocimiento, paciencia y valiosos consejos. Su apoyo constante ha sido fundamental para el desarrollo y culminación de esta investigación.

A todos aquellos que, con su ayuda, contribuyeron a la realización de este proyecto, nuestro más sincero agradecimiento.

Resumen

Este proyecto de grado se enmarca en el estudio de confiabilidad de redes.

Sea $\mathcal{C}_{n,m}$ la clase de todos los grafos simples y conexos con n vértices y m aristas. Sea G un grafo perteneciente a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ y $\rho \in [0, 1]$. La *confiabilidad del grafo G evaluada en ρ* , que se denota $R_G(\rho)$, es la probabilidad de que el subgrafo que resulta de eliminar a cada una de las aristas de G con probabilidad ρ y de manera independiente sea conexo. Decimos que un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es *uniformemente más confiable* si para todo grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y todo $\rho \in [0, 1]$ se cumple que $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$. En 1986, Boesch conjeturó que en cada una de las clases no vacías $\mathcal{C}_{n,m}$ existe al menos un grafo que es uniformemente más confiable.

El *corango* de la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ y de cada uno de los grafos de dicha clase vale $m - n + 1$. A partir de la literatura clásica de confiabilidad uniforme se concluye que en cada una de las clases no vacías $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango es 4 o menor existe exactamente un grafo que es uniformemente más confiable. Ath y Sobel conjeturaron que cada una de las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango es $c \in \{5, 6, 7, 8\}$ tales que $n \geq 2c - 2$ tiene exactamente un grafo que es uniformemente más confiable. Recientemente se ha demostrado que existen infinitas clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyos corangos son 5 o 6 para las cuales no existe ningún grafo uniformemente más confiable, por lo que las conjeturas de Boesch y Ath y Sobel no son ciertas para corangos 5 ni 6.

El objetivo de este proyecto consiste en determinar si es cierta la conjetura de Ath y Sobel para aquellas clases de grafos $\mathcal{C}_{n,m}$ que poseen corango 7. Como resultado, hemos refutado la conjetura de Ath y Sobel para corango 7, construyendo al mismo tiempo una nueva familia de contraejemplos para la conjetura de Boesch. Concretamente, hemos demostrado que para cada entero s tal que $s \geq 9$ no existe ningún grafo uniformemente confiable en $\mathcal{C}_{18s-6, 18s}$. Nuestros estudios reflejan fuerte evidencia computacional de inexistencia de grafos uniformemente más confiables en otras clases de corango 7.

Palabras clave: Confiabilidad, Grafo uniformemente más confiable, Teoría de grafos, Corango, Conjetura de Boesch, Conjetura de Ath y Sobel.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos Básicos	1
1.2. Problema de Estudio	3
2. Revisión de antecedentes	5
2.1. Teoremas de existencia	5
2.2. Teoremas de inexistencia	8
3. Aportes	11
3.1. Resultados preliminares	12
3.2. Optimalidad local en un entorno de 0	16
3.3. Prueba del resultado principal	19
4. Conjeturas	27
4.1. Optimalidad en un entorno de 0	28
4.2. Suboptimalidad en un entorno de 1	29
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	31
A. Anexo 1	35

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se brindan tanto conceptos básicos relativos a la teoría de grafos como conceptos específicos relativos a confiabilidad de redes. Definiciones más específicas se proporcionarán a lo largo del trabajo.

1.1. Conceptos Básicos

Un *grafo simple* G es un par (V, E) , donde V es un conjunto cuyos elementos se llaman *vértices* y E es una colección de pares de vértices, a los que le llamamos *aristas*. Denotaremos mediante $V(G)$ y $E(G)$ al conjunto de vértices y de aristas de G , respectivamente. Denotamos mediante $\mathcal{C}_{n,m}$ a la clase de todos los grafos simples y conexos con n vértices y m aristas.

Sea G un grafo simple. Decimos que H es un *subgrafo de G* si es un grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Un subgrafo H de G es *subgrafo recubridor* si $V(H) = V(G)$. Dado $S \subseteq V(G)$, denotamos $G - S$ al grafo que surge de G al remover todos los vértices de S , y denotamos $G[S]$ al *subgrafo de G inducido por S* (es decir, el grafo $G - (V(G) - S)$).

Una arista e del grafo G es *incidente a los vértices v_1 y v_2* si $e = \{v_1, v_2\}$. En tal caso diremos que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes y que son los extremos de la arista e . Por brevedad de notación denotaremos a la arista $\{v_1, v_2\}$ mediante v_1v_2 . Un *emparejamiento* es un subconjunto M de aristas de G que no tienen ningún extremo en común. Un *emparejamiento perfecto* es un emparejamiento en el cual todo vértice de G es extremo de una arista en M .

El *grado* de un vértice v de G es la cantidad de aristas incidentes a v . Dado un entero no negativo k , diremos que G es *k -regular* si todos sus vértices tienen grado k . El grafo G es un *grafo cúbico* si es 3-regular.

El grafo *n -camino*, que denotaremos P_n , tiene como conjunto de vértices a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y como conjunto de aristas a $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. El grafo *n -ciclo*, que denotaremos C_n , tiene como conjunto de vértices a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. El

grafo n -completo, que denotaremos K_n , tiene como conjunto de vértices a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y como conjunto de aristas a $E = \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Sea ℓ un entero no negativo. Un *camino de largo ℓ* en el grafo G es una secuencia de vértices $v_0 v_1 v_2 \dots v_\ell$ donde v_0, v_1, \dots, v_ℓ son $\ell + 1$ vértices distintos pertenecientes a $V(G)$ y para cada $i \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ se tiene que $v_i v_{i+1} \in E(G)$. Un *camino trivial* es un camino de largo 0. El grafo G es *conexo* si existe un camino entre cada par de vértices de $V(G)$. Una *componente conexa* de G es un subgrafo de G que es conexo maximal. Un grafo G es *2-conexo* si tiene al menos tres vértices, es conexo, y $G - v$ es conexo para todo $v \in V(G)$.

Sea G un grafo simple 2-conexo con más aristas que vértices. Denominaremos *subdividir k veces* una arista con extremos x e y a reemplazar la arista xy por $k + 1$ aristas $xz_1, z_1 z_2, \dots, z_{k-1} z_k, z_k y$, donde z_1, z_2, \dots, z_k son k nuevos vértices de grado 2 cada uno. Una *cadena γ* de G es el conjunto de aristas de un camino P en G , donde todos los vértices internos de P (si los hay) poseen grado 2 en G y P posee dos extremos diferentes en G cuyos grados son ambos mayores que 2. Los *extremos* de γ son precisamente los extremos de P , y γ es *incidente* a un vértice v si v es uno de sus extremos. Los *vértices internos* de γ son los vértices internos de P . *Remover una cadena γ* de G significa remover las aristas y vértices internos de γ pero no sus extremos.

Un *corte* de G es un subconjunto F de $E(G)$ tal que $G - F$ es no conexo. Un *k-corte* es un corte con exactamente k aristas. Si G tiene más de un vértice, la *arista conectividad* de G , denotada como $\lambda(G)$, se define como el mínimo entero positivo k para el cual G tiene algún k -corte. Sea F un corte de G . Decimos que F *separa* un conjunto S de vértices de G si F contiene todas las aristas con precisamente un extremo en S y ninguna arista con ambos extremos en S . Notar que F puede contener aristas sin extremos en S . Si $S = \{v\}$ para algún vértice v de G , decimos que F *separa v* y que F es *vértice separador* o *vértice trivial*. Si $S = \{u, v\}$ siendo u y v extremos de una arista e de G , decimos que F *separa e* y que F es *arista separador*. Si además, un corte arista separador no es vértice separador, decimos que es *arista trivial*. Un corte es *no trivial* si no es vértice separador ni arista separador. Si S induce un grafo H en G , decimos que F es *H separador*.

Un grafo es un *ciclo* si es un n -ciclo para algún entero n tal que $n \geq 3$. La *cintura* de un grafo es la menor cantidad de vértices que tiene un ciclo contenido en dicho grafo (o es infinita en caso de que el grafo no tenga ciclos). Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. Un subgrafo T de G es un *árbol recubridor de G* si T es un subgrafo recubridor de G y T es un árbol. Denotamos mediante $t(G)$ a la cantidad de árboles recubridores de G .

El concepto de corango de un grafo proviene de la teoría algebraica de grafos y coincide con la dimensión del núcleo de la matriz de incidencia de un grafo [4]. Concretamente, dado un grafo simple G con n vértices, m aristas y κ componentes conexas, su corango es $m - n + \kappa$. Para cada par de enteros n y m tales que $n \geq 3$ y $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, denotamos $\mathcal{C}_{n,m}$ a la clase de todos los grafos conexos con n vértices y m aristas. Notar que el corango de cada uno de los grafos pertenecientes a $\mathcal{C}_{n,m}$ es $m - n + 1$. El corango de la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ es $m - n + 1$. Esta definición es consistente con la adoptada en el artículo [15].

1.2. Problema de Estudio

Dado un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ y $\rho \in [0, 1]$, la *confiabilidad de G evaluada en ρ* , que denotamos $R_G(\rho)$, es la probabilidad de que el subgrafo de G que resulta de eliminar a cada una de las aristas de G de manera independiente con probabilidad ρ sea conexo. Para cada par de enteros positivos n y m tales que $n \geq 3$ y $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ surge la pregunta de si existe un grafo G perteneciente a $\mathcal{C}_{n,m}$ cuya confiabilidad $R_G(\rho)$ sea mayor que o igual a la confiabilidad $R_H(\rho)$ para cualquier grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ y para todo $\rho \in [0, 1]$. A dicho grafo G se le denomina *grafo uniformemente más confiable*, que abreviaremos UMRG por sus siglas en inglés.

Definición 1. Un grafo G perteneciente a la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ es *uniformemente más confiable* si $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$ para todo $\rho \in [0, 1]$ y para todo grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$.

El estudio de la confiabilidad uniforme tiene un inicio preciso en el trabajo seminal de Boesch, quien introduce el concepto de *grafo uniformemente más confiable* o UMRG por sus siglas inglesas en 1986 en la reconocida revista titulada *Journal of Graph Theory* [5]. A partir de trabajos de Boesch et al. [6] y de Wang [17] se deduce que en cada una de las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango es 4 o menor siempre existe exactamente un grafo que es uniformemente más confiable. Una pregunta natural que surge es: ¿existe siempre un grafo uniformemente más confiable en cada una de las clases no vacías de grafos $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango es mayor que 4?

Ath y Sobel [2] conjeturaron que cada una de las clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango es $c \in \{5, 6, 7, 8\}$ tales que $n \geq 2c - 2$ tiene algún grafo uniformemente más confiable. Recientemente nuestro tutor en colaboración con el Dr. Martín Safe [15] han determinado infinitas clases de grafos $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyos corangos son 5 o 6 para las cuales no existen grafos uniformemente más confiables, brindando una refutación a la conjetura de Ath y Sobel para corangos 5 y 6.

El objetivo de este proyecto consiste en determinar si es cierta la conjetura de Ath y Sobel para aquellas clases de grafos $\mathcal{C}_{n,m}$ que poseen corango 7 y 8. El resultado principal de este proyecto es una refutación a la conjetura de Ath y Sobel para corango 7, construyendo al mismo tiempo una nueva familia de contraejemplos para la conjetura de Boesch. Concretamente, aquí se demuestra que para cada entero s tal que $s \geq 9$ no existe ningún grafo uniformemente confiable en $\mathcal{C}_{18s-6, 18s}$. A su vez, se incluyen conjeturas de inexistencia para otras clases de corango 7 sustentadas por fuerte evidencia computacional.

Capítulo 2

Revisión de antecedentes

En este capítulo se presentan los resultados conocidos hasta la fecha relativos a la existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables. La Sección 2.1 lista los resultados clásicos de existencia de grafos uniformemente más confiables que se incluyen en los artículos de Boesch et al. [6] y Wang [17], junto con resultados recientes de existencia en el área [1, 13]. La Sección 2.2 lista los resultados relativos a inexistencia [8, 10, 12, 15]. Dichos resultados de existencia e inexistencia de grafos uniformemente más confiables se brindan para dar un contexto del resultado principal de este proyecto. Quienes gusten profundizar pueden consultar el relevamiento de literatura sobre grafos uniformemente más confiables que se presenta en [14].

2.1. Teoremas de existencia

En 1986, Boesch [5] da nacimiento al estudio de grafos uniformemente más confiables, y propone la siguiente conjetura.

Conjetura 2 (Boesch [5]). *En cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ existe, al menos, un grafo uniformemente más confiable.*

Pocos años después, Boesch en un trabajo colectivo [6] obtiene los primeros grafos uniformemente más confiables. Para definirlos, será conveniente adoptar la terminología que fuese introducida recientemente en [15].

Definición 3 (Romero y Safe [15]). Sea G un grafo cúbico y 2-conexo y sea X un subconjunto cualquiera de $E(G)$. Denotamos $G^s(X)$ al nuevo grafo que se obtiene de G tras subdividir s veces cada arista de X y $s - 1$ veces cada arista de $E(G) - X$.

A continuación definiremos dos clases de grafos que serán utilizadas en el enunciado del teorema de existencia de grafos uniformemente más confiables presentado por Boesch et al. [6].

Definición 4. Para cada terna de enteros ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tales que $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3 \geq 1$ y $\ell_2 \geq 2$, el grafo $\theta_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ consiste en 3 caminos internamente disjuntos de longitudes ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 que comparten los mismos extremos u y v .

Para cada entero n tal que $n \geq 4$, definimos el grafo θ -balanceado, y denotamos $\theta(n)$, como el grafo $\theta_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$, donde $\ell_1 = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$, $\ell_3 = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ y $\ell_2 = n + 1 - \ell_1 - \ell_3$.

Dicho de modo simple, el grafo θ -balanceado tiene exactamente n vértices, $n + 1$ aristas, y las longitudes de cualquier par de caminos que comparten extremos u y v no difieren en más que una unidad.

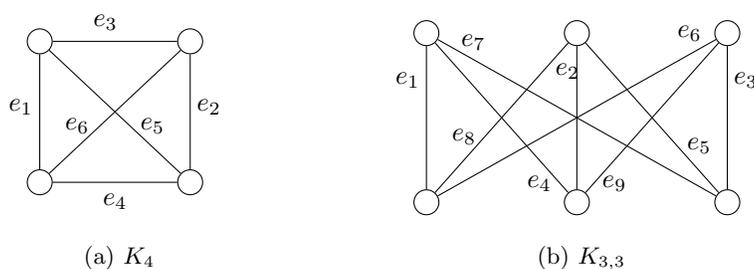


Figura 2.1: Grafos K_4 y $K_{3,3}$.

Definición 5. Sea n un entero tal que $n \geq 4$, y sean r y s los únicos enteros tales que $n = 6s + r$ y $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Llamemos e_1, e_2, \dots, e_6 a las 6 aristas de K_4 tal como se presenta en la Figura 2.1. Para cada $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$ consideramos el conjunto X_r dado por $X_r = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ (notar que, si $r = 0$ entonces X_r es el conjunto vacío). Definimos $K_4(n)$ como el grafo $K_4^s(X_r)$.

Estamos en condiciones de introducir el Teorema de Boesch et al. [6].

Teorema 6 (Boesch et al. [6]). *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- *Los grafos uniformemente más confiables de corango 0 son precisamente los árboles.*
- *Para cada entero n tal que $n \geq 3$, el único grafo uniformemente más confiable de corango 1 y n vértices es el n -ciclo.*
- *Para cada entero n tal que $n \geq 4$, el único grafo uniformemente más confiable de corango 2 y n vértices es $\theta(n)$.*
- *Para cada entero n tal que $n \geq 4$, el único grafo uniformemente más confiable de corango 3 y n vértices es $K_4(n)$.*

En las conclusiones del artículo [6] se incluye la siguiente conjetura.

Conjetura 7 (Boesch et al. [6]). *Sea n un entero tal que $n \geq 6$ y sean r y s los únicos enteros tales que $n = 9r + s$ y $r \in \{0, 1, \dots, 8\}$. Consideremos la lista de aristas $E(K_{3,3}) = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$ presentadas en la Figura 2.1. Entonces, el grafo W_n dado por $K_{3,3}^s(X_r)$ es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n, n+3}$.*

La Conjetura 7 fue demostrada por Wang [17].

Teorema 8 (Wang [17]). *Para cada entero n tal que $n \geq 6$, el grafo W_n es el único grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,n+3}$.*

Curiosamente, Kelmans [10] ha logrado determinar grafos uniformemente más confiables incluso antes de la definición formal presentada por Boesch.

Teorema 9 (Kelmans [10]). *Si M es un emparejamiento cualquiera del grafo completo K_n entonces $K_n - M$ es un grafo uniformemente más confiable.*

Tras un estudio exhaustivo computacional, Myrvold [11] obtiene la lista de todos los grafos uniformemente más confiables con no más de 8 vértices. En la literatura científica moderna se encuentran algunos resultados aislados de existencia. En [13] se prueba que el grafo de Petersen es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{10,15}$. En [16] también se prueba que el grafo de Yutsis es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{12,18}$. La Figura 2.2 ilustra los grafos de Petersen y Yutsis. El Teorema 10 es, hasta lo mejor de nuestro conocimiento, el último aporte relativo a la existencia de grafos uniformemente más confiables.

Teorema 10 (Archer et al. [1]). *Para cada entero impar n tal que $n \geq 5$ existe un único grafo uniformemente más confiable tanto en $\mathcal{C}_{n, \binom{n}{2} - \frac{n+1}{2}}$ como en $\mathcal{C}_{n, \binom{n}{2} - \frac{n+3}{2}}$.*

Es posible apreciar que los resultados de existencia de grafos uniformemente más confiables se concentran en clases de bajo corango, es decir, de corango 4 o menor tal como se expresa en el Teorema 6 o clases de grafos densos y casi completos, tal como lo expresan los Teoremas 9 y 10.

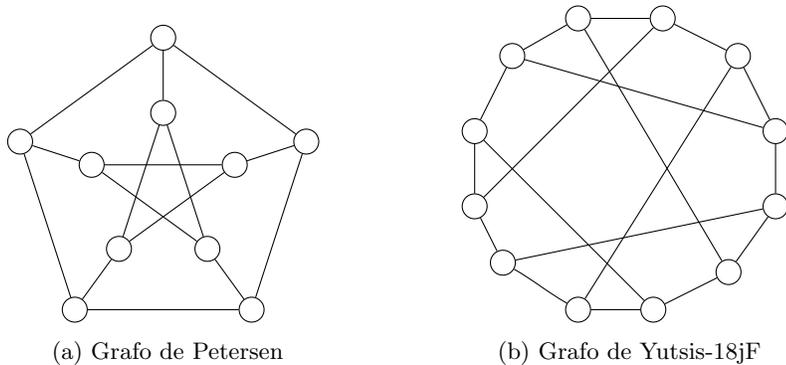


Figura 2.2: UMRG en clases $\mathcal{C}_{10,15}$ y $\mathcal{C}_{12,18}$, respectivamente

2.2. Teoremas de inexistencia

El primer trabajo sobre inexistencia de grafos uniformemente más confiables fue publicado en 1981 por Kelmans [10]. En el mismo, Kelmans presentó infinitos contraejemplos a la conjetura de Boesch. Sin embargo, solamente presentó un bosquejo de la demostración. Años más tarde, en 1991, y sin conocimiento de este resultado previo, Myrvold et al. presentaron y demostraron los mismos teoremas que habían sido presentados por Kelmans.

Teorema 11 (Kelmans [10]; Myrvold [12]). *Para cada entero par n tal que $n \geq 6$, no existe ningún grafo uniformemente más confiable en la clase $\mathcal{C}_{n, \binom{n}{2} - (n+2)/2}$.*

Teorema 12 (Kelmans [10]; Myrvold [12]). *Para cada entero impar n tal que $n \geq 7$, no existe ningún grafo uniformemente más confiable en la clase $\mathcal{C}_{n, \binom{n}{2} - (n+5)/2}$.*

Estos teoremas demuestran la inexistencia de grafos uniformemente más confiables para las clases $\mathcal{C}_{6,11}$ de corango 6, $\mathcal{C}_{7,15}$ de corango 9, $\mathcal{C}_{8,23}$ de corango 16 e infinitas clases $\mathcal{C}_{n,m}$ con $n \geq 9$ y corango al menos 21 (cuyo número de aristas crece asintóticamente como $n^2/2$).

En 2013, Brown y Cox [8] presentaron el siguiente teorema sobre inexistencia.

Teorema 13 (Brown y Cox [8]). *Sea $n \geq 6$ y $m = \binom{n}{2} - (n - k)$, donde $1 \leq k < n/2$. Entonces, no existe UMRG en la clase $\mathcal{C}_{n,m}$ si se cumple alguno de los siguientes enunciados:*

- $k = 1$ y $n \equiv 1 \pmod{3}$;
- $n - 2k \equiv 1 \pmod{3}$, $k \neq 1$, y $k \neq (n - 1)/2$;
- $n - 2k \equiv 2 \pmod{3}$ y $k \neq 1$.

A través de este teorema es posible deducir que no existen grafos uniformemente más confiables en la clase $\mathcal{C}_{8,22}$ de corango 15.

En base a la lista de infinitos contraejemplos para las clases densas de grafos dadas por los Teoremas 11, 12, 13, Ath y Sobel propusieron en el año 2000 una conjetura más conservadora que la de Boesch, enunciada a continuación:

Conjetura 14 (Ath y Sobel [2]). *Si una clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ tiene corango $c \in \{5, 6, 7, 8\}$ y $n \geq 2c - 2$, entonces $\mathcal{C}_{n,m}$ contiene al menos un UMRG.*

Este resultado se mantuvo hasta el año 2023, cuando nuestro tutor en colaboración con el Profesor Martín Safe presentaron el siguiente teorema.

Teorema 15 (Romero y Safe [15]). *Para cada entero positivo s no existe UMRG en la clase $\mathcal{C}_{12s+4, 12s+8}$.*

Este teorema evidencia infinitos contraejemplos a la Conjetura 2. Es a su vez es el primer contraejemplo de la conjetura de Ath y Sobel.

Más recientemente, nuestro tutor ha preparado un artículo que se encuentra bajo referato que incluye los siguientes resultados relativos a clases de grafos de corango 5 y 6 respectivamente.

Teorema 16 (Romero). *Existe una cantidad finita de grafos uniformemente más confiables de corango 5.*

Teorema 17 (Romero). *Para cada entero positivo s no existe ningún grafo uniformemente más confiable en la clase $\mathcal{C}_{15s+4, 15s+9}$.*

La Figura 2.3 resume lo que conocemos hasta la fecha en lo relativo a la existencia e inexistencia de UMRG en cada una de las clases no vacías $\mathcal{C}_{n,m}$. Dicha figura fue preparada inicialmente por el Dr. Eduardo Canale, quien generosamente ha permitido su inclusión en el artículo [14]. Aquí simplemente la hemos actualizado, incluyendo los resultados recientes de inexistencia.

Los puntos verdes representan los pares (n, m) para los cuales se ha confirmado la existencia de UMRG en la clase $\mathcal{C}_{n,m}$, mientras que los puntos rojos indican los pares (n, m) para los que no existe UMRG en la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. En las rectas que incluyen a todos los pares (n, m) correspondientes a clases $\mathcal{C}_{n,m}$ cuyo corango está comprendido entre 1 y 4 se ilustra además el UMRG correspondiente. No se representan aquellos UMRG que son grafos completos o casi completos de los Teoremas 9 y 10 para evitar superposiciones.

Las líneas rojas representan los corangos 5, 6 y 7, para los cuales se han identificado infinitas clases en las que no existe ningún UMRG. Las líneas negras representan los infinitos pares para los que se conjetura la existencia de UMRGs [2, 7]. Notar que la línea roja que aquí se agrega relativa a clases de grafos de corango 7 es el principal aporte de este proyecto.

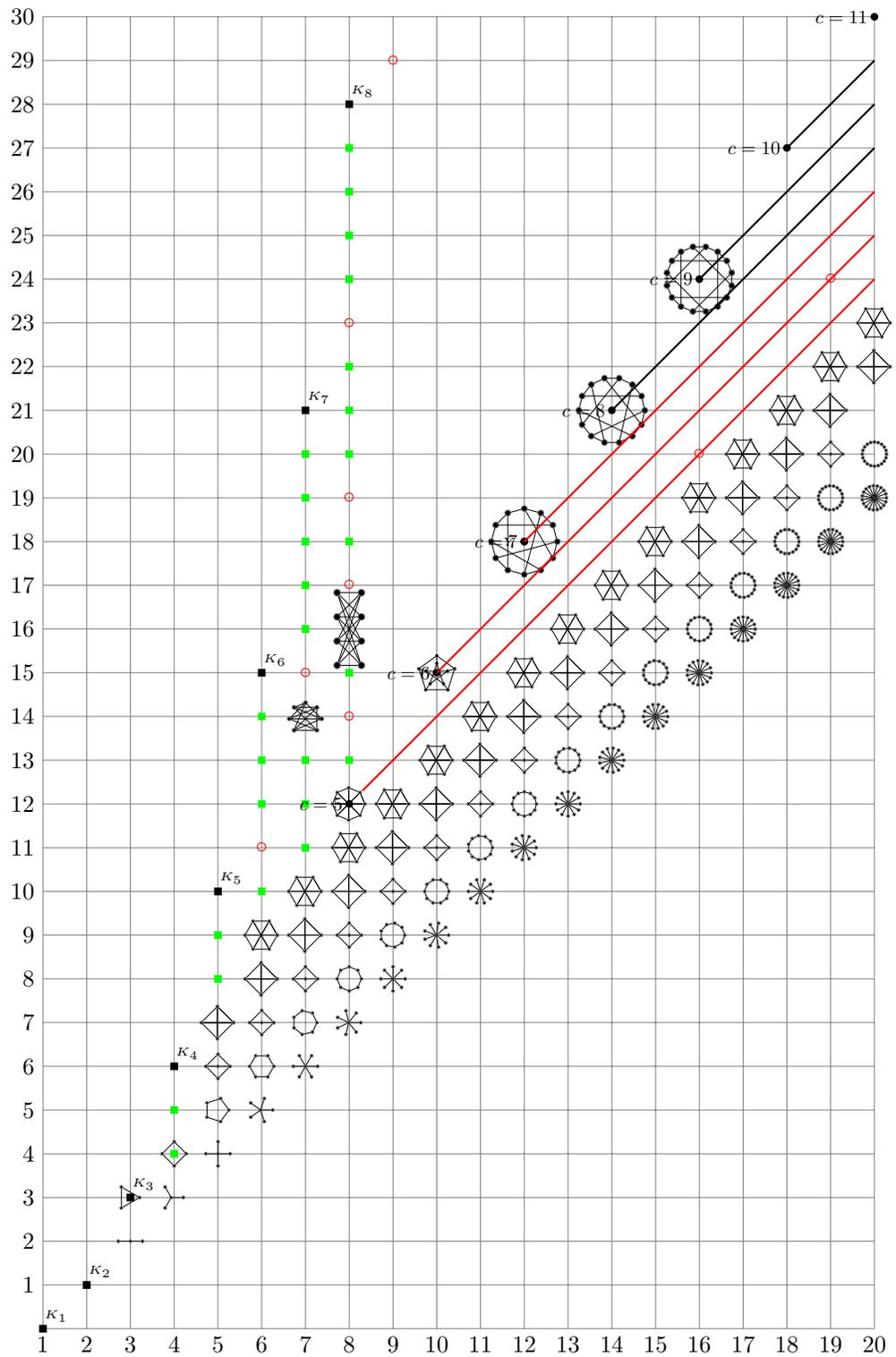


Figura 2.3: Grafos uniformemente más confiables conocidos hasta la fecha, en función de n y m .

Capítulo 3

Aportes

El objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema 18 que se enuncia a continuación.

Teorema 18. *Para cada entero s tal que $s \geq 9$ no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$.*

Observar que cada una de las infinitas clases $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ poseen corango 7. El Teorema 18 brinda infinitos contraejemplos a la Conjetura 2.

La estrategia de la demostración del Teorema 18 sigue la lógica adoptada en trabajos previos [12, 15]. En una primera etapa de la demostración identificaremos, para cada entero positivo s , el único grafo que llamaremos F_s perteneciente a $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ que cumple que para cualquier otro grafo G en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ existe un número real $\delta > 0$ tal que $R_{F_s}(\rho) > R_G(\rho)$ para todo $\rho \in (0, \delta)$. En una segunda etapa de la demostración determinaremos, para cada entero s tal que $s \geq 9$, algún grafo que llamaremos F'_s perteneciente a la misma clase $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ que cumple que $R_{F'_s}(\rho) > R_{F_s}(\rho)$ para todo ρ perteneciente a algún intervalo $(1 - \delta', 1)$. A partir de la definición de grafo uniformemente confiable, la demostración del Teorema 18 se sigue de las dos etapas anteriores.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la Sección 3.1 se introducen conceptos y resultados preliminares que serán utilizados para completar la demostración del Teorema 18. En la Sección 3.2 se obtiene, para cada entero positivo s , el grafo F_s . En la Sección 3.3 se determina, para cada entero s tal que $s \geq 9$, el grafo F'_s . Algunas demostraciones se incluyen en el Apéndice con el fin de ganar fluidez en la lectura de este capítulo. Cabe comentar que el hallazgo de los infinitos grafos F'_s indicados en el párrafo anterior fue una parte desafiante del proyecto desde el punto de vista computacional¹.

¹En el sitio <https://gitlab.fing.edu.uy/juan.manuel.rodriguez.otormin/tesis> se disponen de los scripts necesarios para hallar los grafos F'_s .

3.1. Resultados preliminares

En esta sección se presentan resultados previos relacionados a confiabilidad uniforme que serán de utilidad para la demostración del Teorema 18. Considerando que adoptaremos una lógica similar a la desarrollada en el artículo [15] para la demostración de nuestro teorema principal, esta sección está basada en dicho artículo.

Dado un entero positivo i denotamos mediante $[i]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, i\}$. El cardinal de un conjunto finito S se denota mediante $|S|$. También nos referiremos al cardinal de un conjunto como su *tamaño*. Si k es un entero no negativo, entonces la familia de todos los subconjuntos de S con cardinalidad k lo denotamos como $\binom{S}{k}$.

Denominaremos *colapsar* una cadena γ a remover γ y agregar una arista con los mismos extremos que γ . El largo de γ , denotado $\ell(\gamma)$, refiere al tamaño $|\gamma|$. La *destilación* de G , denotada $D(G)$, es el grafo (o multigrafo) resultante de colapsar todas las cadenas de G . Dos cadenas son *no incidentes*, *incidentes* o *paralelas* si comparten precisamente 0, 1 o 2 extremos, respectivamente. Un *emparejamiento de cadenas* de G es un conjunto de cadenas no incidentes dos a dos en G .

Denotemos $\Gamma(G)$ al conjunto de todas las cadenas de G . Además, si k es un entero no negativo entonces denotamos a $\Gamma^{(k)}(G)$ a la familia de todos los subconjuntos de $\Gamma(G)$ de tamaño k . Más específicamente, $\Gamma^{(k)}(G) = \binom{\Gamma(G)}{k}$. Sea también

$$\Gamma_-^{(k)}(G) = \{H \in \Gamma^{(k)}(G) : G - H \text{ es no conexo}\}.$$

Definición 19. Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es *más confiable en un entorno de 0* (respectivamente, *en un entorno de 1*) que otro grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$ si existe algún número real $\epsilon > 0$ tal que $R_G(\rho) > R_H(\rho)$ para todo $\rho \in (0, \epsilon)$ (respectivamente, para todo $\rho \in (1 - \epsilon, 1)$).

Definición 20. Un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ es *localmente más confiable en un entorno de 0* (respectivamente, *en un entorno de 1*) si es más confiable en un entorno de $\rho = 0$ (respectivamente, $\rho = 1$) que cualquier otro grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$.

Notar que si existe un grafo localmente más confiable en un entorno de $\rho = 0$ (respectivamente, $\rho = 1$) entonces es único.

Sea $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ y $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Si denotamos el número de cortes de tamaño k del grafo G como $\mu_k(G)$, entonces para todo $\rho \in [0, 1]$:

$$R_G(\rho) = 1 - \sum_{k=0}^m \mu_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{m-k}. \quad (3.1)$$

El Teorema 21 permite comparar la confiabilidad de dos grafos G y H pertenecientes a la misma clase $\mathcal{C}_{n,m}$ en entornos de 0 o de 1.

Teorema 21 (Brown y Cox [8]). *Sean G y H dos grafos en $\mathcal{C}_{n,m}$.*

(I) Si existe $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $\mu_k(G) = \mu_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, i-1\}$ y $\mu_i(G) < \mu_i(H)$, entonces G es localmente más confiable que H en un entorno de 0.

(II) Si existe $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $\mu_k(G) = \mu_k(H)$ para todo $k \in \{j+1, j+2, \dots, m\}$ y $\mu_j(G) < \mu_j(H)$, entonces G es localmente más confiable que H en un entorno de 1.

Cabe observar que si un grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ cumple que $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ y todo $H \in \mathcal{C}_{n,m}$, entonces por la Ecuación (3.1) se obtiene que $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$ para todo $H \in \mathcal{C}_{n,m}$ y todo $\rho \in [0, 1]$, por lo que G es UMRG.

Definición 22. Sea G un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea k un entero tal que $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Decimos que G es $\min\text{-}\mu_k$ si se cumple que $\mu_k(G) \leq \mu_k(H)$ para todo grafo H en $\mathcal{C}_{n,m}$.

Observación 23. Sea G en $\mathcal{C}_{n,m}$. Si k es un entero tal que $k > m - n + 1$ entonces $\mu_k(G) = \binom{m}{k}$. De hecho, si eliminamos más que $m - n + 1$ aristas al grafo G entonces el subgrafo resultante tiene menos aristas que un árbol recubridor de G y por lo tanto no es conexo.

Teorema 24 (Wang [17]). Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas tales que $m > n$. Si G es $\min\text{-}\mu_k$ para algún $k \in \{\lambda(G), \lambda(G) + 1, \dots, m - n + 1\}$, entonces G es 2-conexo.

Teorema 25 (Bauer et al. [3]). Sea G un grafo simple 2-conexo con n vértices y m aristas tal que $n + 2 \leq m \leq 3n/2$. Sea c el corango de G y sean r y s los únicos enteros tales que $m = (3c - 3)s + r$ y $r \in \{0, 1, \dots, 3c - 4\}$. Entonces, G es $\min\text{-}\mu_2$ si y sólo si se cumplen simultáneamente las siguientes dos condiciones:

- (I) $D(G)$ es un grafo simple cúbico con $2c - 2$ vértices tal que $\lambda(D(G)) = 3$;
- (II) G tiene r cadenas de largo $s + 1$ y $3c - 3 - r$ cadenas de largo s .

Teorema 26 (Wang [18]). Sea G un grafo simple, 2-conexo con n vértices y m aristas tal que $n + 2 \leq m \leq 3n/2$. Sea c el corango de G y sean r y s los únicos enteros tales que $m = (3c - 3)s + r$ y $r \in \{0, 1, \dots, 3c - 4\}$. Entonces, G es $\min\text{-}\mu_3$ si y sólo si se cumplen simultáneamente todas las condiciones siguientes:

- (I) $D(G)$ es un grafo simple cúbico $\min\text{-}\mu_3$ con $2c - 2$ vértices tal que $\lambda(D(G)) = 3$;
- (II) G tiene r cadenas de largo $s + 1$ y $3c - 3 - r$ cadenas de largo s ;
- (III) si $r \leq c - 1$ (respectivamente, $r \geq 2c - 2$), entonces las cadenas de G de largo $s + 1$ (respectivamente, s) forman un emparejamiento de cadenas; mientras que, si $c - 1 < r < 2c - 2$, entonces, por cada tres cadenas de G que comparten un vértice, al menos una de ellas es de largo s y al menos una de ellas es de largo $s + 1$.

Wang en su artículo [18] observa que las condiciones de caracterización de grafos $\text{min-}\mu_3$ que obtuvo en el Teorema 26 incluyen a las condiciones de caracterización grafos $\text{min-}\mu_2$ dadas en el Teorema 25 y deduce el siguiente corolario.

Corolario 27 (Wang [18]). *Sea G un grafo simple 2-conexo con n vértices y m aristas tal que $n + 2 \leq m < 3n/2$. Si G es $\text{min-}\mu_3$, entonces G es $\text{min-}\mu_2$.*

La lógica para la prueba de inexistencia que se presenta en los artículos [12, 15] consiste en hallar los grafos que son localmente más confiables en un entorno de 0 aprovechando el Teorema 21. Para esto, se buscan los grafos que minimizan μ_0 en una clase dada $\mathcal{C}_{n,m}$, para luego entre los resultantes buscar aquellos que minimizan $\text{min-}\mu_1$, y repetir este procedimiento avanzando en $k \in \{2, 3, 4, \dots, m\}$ hasta obtener un único grafo $G_{n,m}$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ el cual es localmente más confiable en un entorno de 0. Posteriormente, se halla otro grafo $H_{n,m}$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ cuya confiabilidad es mayor que la de $G_{n,m}$ en algún número ρ de $[0, 1]$. Las dos condiciones anteriores son inconsistentes con la existencia de algún grafo uniformemente más confiable, concluyendo la inexistencia de grafos uniformemente más confiables en la clase $\mathcal{C}_{n,m}$. El Teorema 24 permite restringir nuestro estudio a grafos 2-conexos, los cuales son tanto $\text{min-}\mu_0$ como $\text{min-}\mu_1$. Luego, el Teorema 26 provee un punto de partida para la búsqueda de grafos localmente más confiables en un entorno de 0.

El siguiente lema provee una expresión para determinar el número de cortes de tamaño k de cualquier grafo simple 2-conexo en términos de sus cadenas.

Lema 28 (Romero y Safe [15]). *Para cada grafo 2-conexo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ tal que $m > n$ y cada $k \in \{0, 1, \dots, m\}$,*

$$\mu_k(G) = \binom{m}{k} - \sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) + \sum_{H \in \Gamma_{-}^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma). \quad (3.2)$$

Notar que si el grafo G en el Lema 28 tiene precisamente t cadenas y el largo de sus cadenas es $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t$, entonces el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.2) es

$$\sum_{H \in \Gamma^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma) = \sum_{J \in \binom{[t]}{k}} \prod_{i \in J} \ell_i. \quad (3.3)$$

Si $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_t = m$ entonces el lado derecho de (3.3) se maximiza cuando la tupla $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t)$ es justa según la definición 29. Este resultado de maximalidad se establece en el Lema 30.

Definición 29 (Romero y Safe [15]). Una tupla $(x_1, x_2, \dots, x_t) \in \mathbb{Z}_+^t$ es *justa* si $|x_i - x_j| \leq 1$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Un grafo G es *justo* si es un grafo simple 2-conexo con más aristas que vértices tal que la tupla cuyas entradas es el largo de cada una de las cadenas de G es justa.

Lema 30 (Romero y Safe [15]). Sean k y t enteros tales que $2 \leq k \leq t$ y sea

$$\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t) = \sum_{J \in \binom{[t]}{k}} \prod_{i \in J} \ell_i \quad \text{para cada } (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t) \in \mathbb{Z}_+^t.$$

Sea m cualquier entero tal que $m \geq t$ y sea $L_{t,m} = \{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t) \in \mathbb{Z}_+^t : \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_t = m\}$. El máximo de $\phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t)$ cuando $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t)$ pertenece a $L_{t,m}$ se obtiene precisamente en aquellas tuplas que son justas.

Observación 31. Durante la prueba del Lema 30, se obtiene que:

$$\phi_t^{(k)}(\ell_1 - 1, \ell_2, \dots, \ell_t + 1) - \phi_t^{(k)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t) = \sum_{J \in \binom{[t] - \{1, t\}}{k-2}} (\ell_1 - \ell_t - 1) \prod_{i \in J} \ell_i.$$

Definición 32 (Romero y Safe [15]). Sea G un grafo simple 2-conexo con más aristas que vértices. Sea $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ un corte de tamaño k de $D(G)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sea γ_i la cadena de G correspondiente a la arista f_i de $D(G)$. Decimos que un corte $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ de G es inducido por $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ si $e_i \in \gamma_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Además,

- (I) si $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ es vértice separador, entonces el corte de tamaño k $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ se denomina *Tipo-V*;
- (II) si $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ es arista separador pero no vértice separador, entonces el corte $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ se denomina *Tipo-E*;
- (III) si $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ es no trivial, entonces el corte $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ se denomina *Tipo-N*.

El número de cortes tamaño k Tipo-V, Tipo-E, y Tipo-N de G se denota por $\mu_k^V(G)$, $\mu_k^E(G)$, y $\mu_k^N(G)$, respectivamente. El número total de cortes inducidos tamaño k de G se denomina $\mu_k^I(G)$; i.e.,

$$\mu_k^I(G) = \mu_k^V(G) + \mu_k^E(G) + \mu_k^N(G).$$

Notar que $\mu_k^I(G)$ coincide con el tercer término del lado derecho de (3.2),

$$\mu_k^I(G) = \sum_{H \in \Gamma_{-}^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma). \quad (3.4)$$

Este hecho combinado con el Lema 30 permite probar el siguiente resultado.

Proposición 33 (Romero y Safe [15]). Sean k y t enteros positivos tales que $2 \leq k \leq t$ y sea \mathcal{S} un conjunto no vacío de grafos justos con n vértices, m aristas y t cadenas. Entonces, entre los grafos $G \in \mathcal{S}$, el mínimo $\mu_k(G)$ se obtiene precisamente en los mismos grafos G donde se obtiene el mínimo $\mu_k^I(G)$.

3.2. Optimalidad local en un entorno de 0

En esta sección determinaremos, para cada entero positivo s , el único grafo que es localmente más confiable en un entorno de 0 en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$.

Esta sección se organiza de la siguiente manera. En el Lema 34 determinaremos, para cada entero positivo s , las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea $\text{min-}\mu_3$ dentro del conjunto $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Para cada entero positivo s llamemos $\mathcal{L}(s)$ al conjunto de todos los grafos que son $\text{min-}\mu_3$ dentro de $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Recuerdese que, por el Teorema 24, todo grafo $\text{min-}\mu_3$ con más aristas que vértices es a su vez 2-conexo, por lo que también es $\text{min-}\mu_1$ y $\text{min-}\mu_0$. De similar manera, el Corolario 27, nos indica que dichos grafos son también $\text{min-}\mu_2$. Por lo tanto, el único grafo que es localmente más confiable en un entorno de 0 en la clase $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ debe ser un grafo perteneciente a $\mathcal{L}(s)$.

En la Proposición 37 mostraremos que, para cada entero positivo s y cada k en $\{3, 4, \dots, 18\}$, el grafo que minimiza μ_k en $\mathcal{L}(s)$ es precisamente aquel grafo cuya destilación minimiza μ_k en $\mathcal{C}_{12,18}$. En la tesis de maestría de Julián Viera [9] no sólo se demuestra que el grafo Yutis-18jF (llamado F en esta tesis que se ilustra en la Figura 3.1), es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{12,18}$ sino que también se demuestra que es el único grafo $\text{min-}\mu_k$ para todo entero k tal que $k \in \{0, 1, \dots, 18\}$.

Como consecuencia de la Proposición 39 se concluye que, para cada entero positivo s , el grafo F_s que se obtiene de subdividir cada arista de F exactamente $s - 1$ veces, es localmente más confiable en un entorno de 0 en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$.

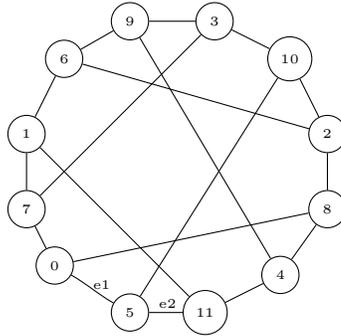


Figura 3.1: Grafo F , UMRG en la clase $\mathcal{C}_{12,18}$. Los vértices de F se numeran para referenciarlos más adelante.

Lema 34. *Sea s un entero positivo. Un grafo G en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ es $\text{min-}\mu_3$ si y sólo si G es 2-conexo con 18 cadenas de largo s y su destilación $D(G)$ es un grafo cúbico en $\mathcal{C}_{12,18}$.*

Demostración. Sea G un grafo $\text{min-}\mu_3$ en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Sean n y m la cantidad de vértices y aristas de G . Claramente, $n = 18s - 6$ y $m = 18s$. Al ser $s > 0$ resulta que $18s - 4 \leq 18s \leq 27s - 9$, por lo que $n + 2 \leq m \leq 3n/2$. Consecuentemente,

por el lema de handshaking, el grado mínimo de G es a lo sumo 3 y $\delta(G) \leq 3$. Como $m > n$, G es $\text{min-}\mu_3$ y $3 \in \{\delta(G), \delta(G) + 1, \dots, m - n + 1\}$, el Teorema 24 asegura que G es 2-conexo. Entonces, el grafo G cumple las hipótesis del Teorema 26 el cual asegura que se cumplen simultáneamente las siguientes afirmaciones:

1. $D(G)$ es un grafo simple cúbico $\text{min-}\mu_3$ con 12 vértices;
2. G tiene sus 18 cadenas de largo s .

La Afirmación 1 implica que $D(G)$ debe ser un grafo cúbico en $\mathcal{C}_{12,18}$. El enunciado se sigue de la Afirmación 2. \square

Como todos los grafos $\text{min-}\mu_3$ en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ son justos con exactamente 18 cadenas y corango 7, la Proposición 37 nos permitirá probar que el grafo F_s es localmente más confiable en un entorno de 0 gracias a que su destilación es un grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{12,18}$.

Definición 35. Dado un grafo simple cúbico 2-conexo G y un entero positivo s , denotaremos G_s al grafo que se obtiene de G tras subdividir $s - 1$ veces cada una de las aristas de G . Diremos que G_s es un *alargamiento* de G .

Notar que G_s es equivalente al grafo $G^s(\emptyset)$ según la Definición 3.

Ahora demostraremos que si G es un grafo $\text{min-}\mu_3$ en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ entonces las cantidades $\mu_k(G)$ para cada $k \in \{0, 1, \dots, 18\}$ dependen únicamente de s y de $\mu_k(D(G))$. Aprovecharemos esto para demostrar que para cada entero positivo s se tiene que F_s es el grafo localmente más confiable en un entorno de 0 dentro de la clase $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$.

Lema 36. Si G es un grafo simple 2-conexo con más aristas que vértices y t cadenas todas de largo s tal que $s \geq 1$ y k es un entero en $\{0, 1, \dots, t\}$, entonces $\mu_k^I(G) = \mu_k(D(G))s^k$.

Demostración. Sea G un grafo simple 2-conexo con más aristas que vértices y t cadenas de largo s . Comencemos recordando la Ecuación (3.4) que nos provee una expresión para $\mu_k^I(G)$ en base al largo de sus cadenas,

$$\mu_k^I(G) = \sum_{H \in \Gamma_-^{(k)}(G)} \prod_{\gamma \in H} \ell(\gamma).$$

Por hipótesis, todas las cadenas de G poseen largo s , por lo que sustituyendo el valor de $\ell(\gamma)$ en la Ecuación (3.4) se deduce que:

$$\mu_k^I(G) = \sum_{H \in \Gamma_-^{(k)}(G)} s^k = |\Gamma_-^{(k)}(G)|s^k. \quad (3.5)$$

Recordemos que $\Gamma_-^{(k)}(G)$ denota el conjunto de conjuntos de tamaño k de cadenas de G tales que al removerlas de G el grafo resultante queda no conexo.

Notar que el mismo posee tantos elementos como $D(G)$ posee cortes de tamaño k . Por lo tanto,

$$|\Gamma_-^{(k)}(G)| = \mu_k(D(G)). \quad (3.6)$$

Reemplazando la Ecuación (3.6) en la Ecuación (3.5) obtenemos:

$$\mu_k^I(G) = \mu_k(D(G))s^k. \quad (3.7)$$

□

Proposición 37. *Sea \mathcal{S} un conjunto no vacío de grafos 2-conexos, justos, con n vértices, m aristas, con $m > n$ y exactamente t cadenas cuyos largos son idénticos e iguales a s . Sea además k un entero en $\{2, 3, \dots, t\}$. Entonces, dentro de los grafos G de \mathcal{S} , el mínimo $\mu_k(G)$ se obtiene precisamente en los mismos grafos G donde se obtiene el mínimo $\mu_k(D(G))$.*

Demostración. Por la Proposición 33, un grafo G de \mathcal{S} minimiza $\mu_k(G)$ si y sólo si minimiza $\mu_k^I(G)$ en \mathcal{S} . Además, por Lema 36 sabemos que para cada grafo G en \mathcal{S} se cumple que $\mu_k^I(G) = \mu_k(D(G))s^k$. Como s es constante para todo grafo en \mathcal{S} , un grafo G perteneciente a \mathcal{S} minimiza $\mu_k(G)$ si y sólo si minimiza $\mu_k(D(G))$, como queríamos demostrar. □

Por el Lema 34, cada uno de los grafos en $\mathcal{L}(s)$ son justos y tienen exactamente 18 cadenas cuyo largo es idéntico e igual a s . Por la Proposición 37, la minimización de $\mu_k(G)$ dentro de $\mathcal{L}(s)$ es equivalente a la minimización de $\mu_k(D(G))$ en $\mathcal{C}_{12,18}$. A continuación utilizaremos esta equivalencia para probar que F_s es el grafo localmente más confiable en un entorno de 0 en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$.

Teorema 38 (Viera [9]). *El grafo F es el único grafo que minimiza μ_k para todo entero k tal que $k \in \{0, 1, \dots, 18\}$ dentro de la clase $\mathcal{C}_{12,18}$.*

Proposición 39. *Para cada entero positivo s , el único grafo localmente más confiable en un entorno de 0 en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ es F_s .*

Demostración. Claramente, F_s es 2-conexo, por lo que $\mu_0(F_s) = \mu_1(F_s) = 0$. Entonces, F_s es $\text{min-}\mu_k$ cuando k es 0 o 1. Por el Lema 34, F_s es $\text{min-}\mu_3$. Razonando como la prueba del Lema 34, vemos que F_s cumple las condiciones del Corolario 27 y consecuentemente, F_s es $\text{min-}\mu_2$. Además, cada grafo de $\mathcal{L}(s)$ es justo y posee 18 cadenas de largo s . Por el Teorema 38, el grafo F minimiza μ_k para todo $k \in \{0, 1, \dots, 18\}$ en la clase $\mathcal{C}_{12,18}$. Entonces, por la Proposición 37 tenemos que F_s es el único grafo que minimiza μ_k para todo $k \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Por lo tanto, para cualquier grafo H en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ no isomorfo a F_s existe algún entero i en $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ tal que $\mu_k(F_s) = \mu_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, i-1\}$ y además $\mu_i(F_s) < \mu_i(H)$. Entonces, la proposición sigue del Teorema 21(I). □

3.3. Prueba del resultado principal

En esta sección probaremos el resultado principal, a saber, el Teorema 18. Encontraremos, para cada entero s tal que $s \geq 9$, un grafo F'_s en $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$ tal que $\mu_7(F'_s) < \mu_7(F_s)$. Luego, aplicando el Teorema 21 con $j = 7$ concluiremos que F'_s es más confiable que F_s en un entorno de 1, y como consecuencia se sigue el Teorema 18.

El grafo F'_s es un alargamiento generalizado de F , como definimos a continuación.

Definición 40. Para cada entero s tal que $s \geq 2$, el grafo F'_s se obtiene de F tras subdividir s veces la arista e_1 de F , $s - 2$ veces la arista e_2 y $s - 1$ veces las aristas restantes de F .

Notar que como F es 2-conexo, F'_s es equivalente a reemplazar a cada una de las aristas de F por cadenas de largo s , excepto por la arista e_1 que se reemplaza por una cadena de largo $s + 1$ y por la arista e_2 que se reemplaza por una cadena de largo $s - 1$.

La búsqueda del grafo F'_s fue realizada mediante cálculos computacionales. Para obtenerlo, se estudió la cantidad de apariciones de cada arista del grafo F en los árboles recubridores del mismo. Esto determinó que existen 3 clases de aristas de F , aquellas que aparecen en 3920 árboles recubridores, aquellas que aparecen en 3815 y aquellas que aparecen en 3780. La arista e_1 del grafo F pertenece a la primera clase, mientras que la arista e_2 a la última. Esto nos dio un indicio de que alargando la cadena de F_s asociada a e_1 y acortando la asociada a e_2 , podríamos obtener un grafo con mayor cantidad de árboles recubridores.

Notemos que F'_s no es un grafo justo. A continuación, probaremos que $\mu_7(F'_s) < \mu_7(F_s)$ para todo entero s tal que $s \geq 9$. Como F'_s y F_s son ambos grafos 2-conexos con más aristas que vértices, por el Lema 28 y las ecuaciones (3.3) y (3.4) sabemos que

$$\mu_7(F_s) = \binom{18s}{7} - \phi_{18}^{(7)}(l_1, l_2, \dots, l_{18}) + \mu_5^I(F_m), \quad (3.8)$$

$$\mu_7(F'_s) = \binom{18s}{7} - \phi_{18}^{(7)}(l'_1, l'_2, \dots, l'_{18}) + \mu_5^I(F'_m). \quad (3.9)$$

Para mostrar que $\mu_7(F'_s) < \mu_7(F_s)$, primero caracterizaremos todos los cortes de tamaño 7 en su destilación común F .

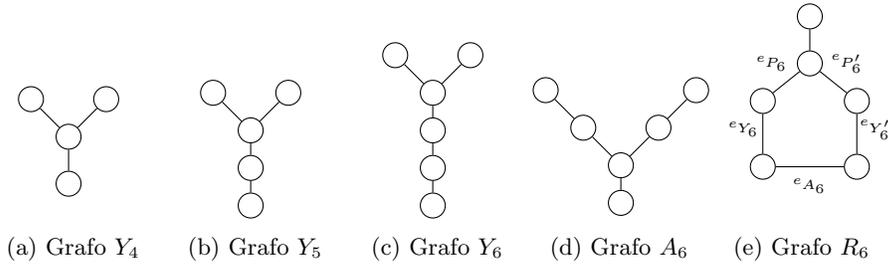


Figura 3.2: Grafos Y_4 , Y_5 , Y_6 , A_6 y R_6 . Los nombres surgen por la forma similar a las letras y el subíndice por la cantidad de vértices de los mismos.

Definición 41. Sea G un grafo simple y conexo. Decimos que un corte F de G *pseudo-separa* un conjunto S de vértices de G si F contiene a todas las aristas con precisamente un extremo en S y además una única arista e con ambos extremos en S . Si H es el grafo $G[S] - e$, decimos que F es un corte H *pseudo-separador*.

Notar que un corte pseudo-separador F de G puede contener una cantidad arbitraria de aristas sin extremos en S .

Lema 42. Sean los grafos Y_4 , Y_5 , Y_6 , A_6 los representados en la Figura 3.2. Cada corte no trivial de tamaño 7 del grafo F pertenece exactamente a una de las siguientes subclases: P_3 -separador, P_4 -separador, Y_4 -separador, P_5 -separador, P_5 -pseudo-separador, C_5 -separador, Y_5 -separador, P_6 -pseudo-separador, Y_6 -pseudo-separador, A_6 -pseudo-separador.

Demostración. Comenzamos la prueba enumerando 12 familias de cortes de tamaño 7 de F que incluyen a las 10 clases de cortes de tamaño 7 no triviales del enunciado además de cortes vértice triviales y arista triviales. Finalmente, completaremos la demostración mostrando que dicha lista es exhaustiva.

- *Cortes vértices triviales.* Sea v un vértice de F . Al ser F un grafo cúbico, cada corte de tamaño 7 que separa v consiste de las 3 aristas incidentes a v más 4 cualesquiera. Como hay 15 aristas no incidentes a v , el número total de cortes de tamaño 7 de F que separan v es $\binom{15}{4}$. Notar que es posible desconectar 2 vértices simultáneamente eligiendo 2 vértices vecinos, desconectando las 5 aristas incidentes a los mismos y dos aristas más que no sean ambas incidentes al mismo vértice grado 2, o eligiendo dos vértices que no sean vecinos y una arista cualquiera (si comparten un vecino, no se puede desconectar su única arista restante). También es posible desconectar 3 vértices simultáneamente eligiendo 3 vértices que inducen un camino P_3 y desconectando todas sus aristas incidentes. Sin embargo, puesto que se trata de un grafo cúbico, no es posible la desconexión de 4 o más vértices simultáneamente. Por el principio de inclusión-exclusión, el número de cortes vértice triviales de F de tamaño

7 es

$$12\binom{15}{4} - (18(\binom{13}{2} - 4) + (\binom{12}{2} - 18 - 36)\binom{12}{1} + 36\binom{11}{1}) - 2(36) = 14436.$$

- *Cortes arista triviales.* Sea e una arista de F . Puesto que F es un grafo cúbico, los cortes de tamaño 7 de F que separan e consisten de las cuatro aristas incidentes a e más 3 aristas cualesquiera diferentes de e .

Notar que debemos contemplar los casos en los cuales también se desconecta un vértice, ya que dichos cortes no son arista triviales. Las Figuras 3.3a y 3.3b ilustran las dos posibles maneras de desconectar un vértice además de e . Por cada arista del grafo, ocurren 50 de estos cortes, 44 provenientes de remover las aristas incidentes a un vértice como en la Figura 3.3a y una arista cualquiera más, y 6 provenientes de remover las 3 aristas incidentes a un vértice como en la Figura 3.3b.

A continuación aplicaremos el principio de inclusión/exclusión para contemplar los casos en los cuales se desconectan dos aristas simultáneamente, dado que en caso contrario estaríamos contando esos cortes dos veces. Por cada arista del grafo, es posible desconectar 8 otras aristas como se ilustra en la Figura 3.3c. Este término se divide entre 2 para contemplar los casos simétricos.

Las aristas punteadas negras son las que es necesario remover para desconectar e ; por otro lado, las rojas representan las que es necesario remover para obtener el corte buscado. Dado que se trata de un grafo cúbico, no es posible la desconexión de 3 o más aristas simultáneamente ni la desconexión de una arista y 2 o más vértices simultáneamente. Por lo tanto, por el principio de inclusión-exclusión, el número de cortes de tamaño 7 separadores de arista de F es $18(\binom{18-5}{3} - 6 - 4 \times 11 - (8/2)) = 4176$.

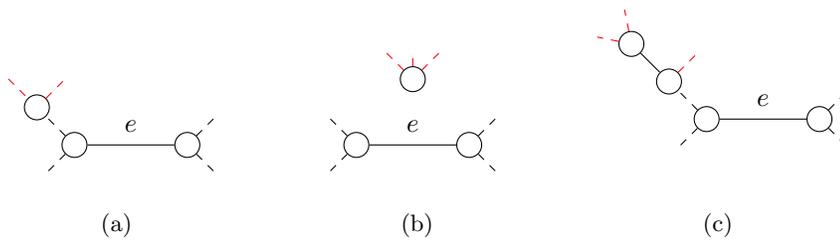


Figura 3.3

- *Cortes P_3 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce P_3 . Como F es cúbico y con cintura 5, los únicos cortes de tamaño 7 de F que separan S son aquellos en los cuales se remueven las 5 aristas incidentes a S más dos cualesquiera. Notar que nuevamente debemos contemplar el

caso en el cual se desconecta un vértice o una arista, ya que se encuentran incluidos en conjuntos previos.

La Figura 3.4a ilustra cómo separar un vértice además de P_3 . Remover P_3 deja 5 vértices con 2 aristas incidentes a los mismos. Entonces, basta con remover todas las aristas incidentes a uno de ellos para obtener un corte vértice trivial. En la Figura 3.4b se ilustra cómo separar una arista en adición a P_3 . Notar que esto solamente ocurre si el camino que incluye P_3 y la nueva arista está contenido en un ciclo C_5 . Como F posee exactamente 8 ciclos de tamaño 5 y en cada ciclo existen 5 caminos de largo 3 a menos de isomorfismo, esto define 40 cortes arista triviales.

Puesto que existen $12 \times \binom{3}{2}$ caminos de largo 3 en F , el número de cortes de tamaño 7 separadores de S es $12 \times \binom{3}{2} \left(\binom{11}{2} - 5 \right) - 40 = 1760$.



Figura 3.4

- *Cortes P_4 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce P_4 . Como F es cúbico y con cintura 5, los únicos cortes de tamaño 7 de F que separan S son aquellos en los cuales se remueven las 6 aristas incidentes a S más una arista cualquiera. Observemos que para cada una de las 18 aristas de F que sea central de P_4 es posible elegir 4 caminos isomorfos a P_4 dentro de F , por lo que F posee 18×4 subgrafos isomorfos a P_4 . Cada subgrafo isomorfo a P_4 en F incluye 3 aristas y además posee exactamente 6 aristas incidentes, por lo que existen $18 - 3 - 6 = 9$ aristas adicionales para elegir y obtener un corte P_4 separador de tamaño 7 en F . Por último, observemos que si P_4 está incluido en un ciclo de tamaño 5 en F entonces ambos extremos de P_4 son adyacentes a un vértice común, y la remoción de una arista más incidente a dicho vértice resultaría en un corte vértice trivial. Puesto que F posee 8 ciclos de tamaño 5, el número de cortes de tamaño 7 separadores de S es $18 \times 4 \times 9 - 8 \times 5 = 608$.
- *Cortes Y_4 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce Y_4 . Dado que F es cúbico, los únicos cortes de tamaño 7 separadores de Y_4 son aquellos en los cuales se remueven las 6 aristas incidentes a S más una cualquiera. Por lo tanto, el número de cortes de tamaño 7 separadores de Y_4 en F es $12 \binom{9}{1} = 108$.

- *Cortes P_5 pseudo-separadores.* Puesto que F es cúbico con cintura 5 los únicos cortes de tamaño 7 de F que pseudo-separan P_5 son aquellos en los cuales remueven las 5 aristas incidentes a un conjunto de vértices S que induce C_5 , una arista cualquiera con ambos extremos en S y una cualquiera con ningún extremo en S . Como F posee 8 ciclos de tamaño 5, el número de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de P_5 es $8 \times 5 \binom{8}{1} = 320$.
- *Cortes P_5 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce P_5 . Dado que F es cúbico con cintura 5, los únicos cortes de tamaño 7 de F que separan S son aquellos en los cuales se remueven las 7 aristas incidentes a S . Notar que si el conjunto S induce C_5 en lugar de P_5 tendremos un corte pseudo-separador. Como F posee 8 ciclos de tamaño 5, el número de cortes de tamaño 7 separadores de S es $12 \times 3 \times 2 \times 2 - 8 \times 5 = 104$.
- *Cortes C_5 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce C_5 . Dado que F es cúbico, los únicos cortes de tamaño 7 de F que separan S son aquellos en los cuales se remueven las 5 aristas incidentes a S más dos cualesquiera. Nuevamente debemos considerar los casos en los cuales se desconecta además un vértice o una arista, ya que se encuentran incluidos en conjuntos previos. La Figura 3.5a ilustra cómo separar un vértice además de C_5 . Puesto que al desconectar un subgrafo C_5 de F deja exactamente 5 vértices con grado 2, basta con remover las 2 aristas adicionales incidentes a uno de los vértices de C_5 para obtener un corte vértice trivial.

Además, existen 16 casos en los cuales es posible remover una arista, como se ilustra en la Figura 3.5b. Esto ocurre exactamente cuando dos ciclos de tamaño 5 comparten un camino de largo 3.

Al ser F un grafo cúbico con cintura 5 no es posible la desconexión de C_5 y más de un vértice, más de una arista o un vértice y una arista simultáneamente. Como F posee exactamente 8 subgrafos isomorfos a C_5 , la cantidad de cortes de tamaño 7 separadores de C_5 es $8 \left(\binom{8}{2} - 5 \right) - 16 = 168$.

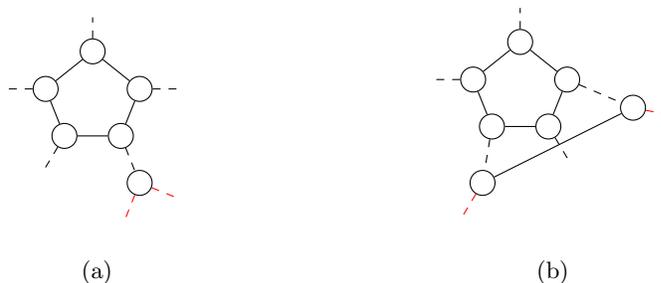


Figura 3.5

- *Cortes Y_5 separadores.* Sea S un conjunto de vértices de F que induce Y_5 . Dado que F es cúbico, el único corte de tamaño 7 de F que separa S es aquel en el cual se remueven las 7 aristas con un extremo en S y otro en S^C . Por lo tanto, el número de cortes de tamaño 7 Y_5 separadores es $12 \times 3 \times 2 = 72$.
- *Cortes P_6 pseudo-separadores.* Puesto que F es cúbico y con cintura 5, existen únicamente dos maneras de obtener cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de P_6 en F . La primera consiste en seleccionar a cada una de las aristas incidentes a un subgrafo de F isomorfo a C_6 más una de las 6 aristas dentro de C_6 . La segunda consiste en seleccionar a cada una de las 6 aristas incidentes a un subgrafo isomorfo a R_6 en F más una de las dos aristas e_{P_6} o $e_{P'_6}$ (ver Figura 3.2). El grafo F posee exactamente 12 subgrafos isomorfos a C_6 . Como F posee exactamente 8 ciclos de tamaño 5, resulta que F posee exactamente $8 \times 5 = 40$ subgrafos isomorfos a R_6 (basta con tomar uno de las 8 subgrafos isomorfos a C_5 más una de sus 5 aristas incidentes). Entonces, el número de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de P_6 es $12 \times 6 + 8 \times 5 \times 2 = 152$.
- *Cortes Y_6 pseudo-separadores.* Puesto que F es cúbico y de cintura 5, los únicos cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de Y_6 en F consiste en 6 aristas incidentes a un subgrafo de F isomorfo a R_6 más una de de las 2 aristas e_{Y_6} o $e_{Y'_6}$ (ver Figura 3.2). Como F posee 40 subgrafos isomorfos a R_6 , la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de Y_6 es $40 \times 2 = 80$.
- *Cortes A_6 pseudo-separadores.* Como F es cúbico y de cintura 5, los únicos cortes de tamaño 7 de F que pseudo-separan A_6 son aquellos en los que se desconecta cada arista con un extremo en un conjunto S que induce R_6 más la arista correspondiente a e_{A_6} . Como F posee exactamente 8 ciclos de tamaño 5, la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de A_6 es $8 \times 5 = 40$.

Notar que ningún corte de tamaño 7 de F pertenece a más de una de las 12 clases mencionadas anteriormente. Por lo tanto, hemos presentado 22024 cortes diferentes de tamaño 7 en F . En [9], se demuestra que la cantidad de cortes de tamaño 7 de F es 22024. Por lo tanto, las 12 clases mencionadas anteriormente abarcan todos los cortes de tamaño 7 de F . Como sólo las últimas 10 clases contienen cortes no triviales, el lema queda probado. \square

Sea G el grafo F_s o F'_s . Recordemos que $\mu_7^V(G)$ y $\mu_7^E(G)$ denotan el número de cortes Tipo-V y Tipo-E, respectivamente. Sea $\mu_7^X(G)$ el número de cortes de tamaño 7 de G inducidos por cortes separadores de X de $D(G)$, y $\mu_7^{X'}(G)$ al número de cortes de tamaño 7 de G inducidos por cortes pseudo-separadores de X de $D(G)$, siendo X isomorfo a cualquiera $P_3, P_4, Y_4, P_5, C_5, Y_5, P_6, Y_6, A_6$.

Entonces, por el lema anterior,

$$\begin{aligned}\mu_7^I(G) &= \mu_7^V(G) + \mu_7^E(G) + \mu_7^{P_3}(G) + \mu_7^{P_4}(G) + \mu_7^{Y_4}(G) + \mu_7^{P'_5}(G) + \mu_7^{P_5}(G) \\ &\quad + \mu_7^{C_5}(G) + \mu_7^{Y_5}(G) + \mu_7^{P'_6}(G) + \mu_7^{Y'_6}(G) + \mu_7^{A'_6}(G).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Ahora, encontraremos la diferencia $\mu_7(F_m) - \mu_7(F'_m)$ reemplazando (3.10) en las Ecuaciones (3.8) y (3.9),

$$\begin{aligned}\mu_7(F_s) - \mu_7(F'_s) &= (\phi_{18}^{(7)}(l'_1, l'_2, \dots, l'_{18}) - \phi_{18}^{(7)}(l_1, l_2, \dots, l_{18})) \\ &\quad + (\mu_7^V(F_s) - \mu_7^V(F'_s)) + (\mu_7^E(F_s) - \mu_7^E(F'_s)) + (\mu_7^{P_3}(F_s) - \mu_7^{P_3}(F'_s)) \\ &\quad + (\mu_7^{P_4}(F_s) - \mu_7^{P_4}(F'_s)) + (\mu_7^{Y_4}(F_s) - \mu_7^{Y_4}(F'_s)) + (\mu_7^{P'_5}(F_s) - \mu_7^{P'_5}(F'_s)) \\ &\quad + (\mu_7^{P_5}(F_s) - \mu_7^{P_5}(F'_s)) + (\mu_7^{C_5}(F_s) - \mu_7^{C_5}(F'_s)) + (\mu_7^{Y_5}(F_s) - \mu_7^{Y_5}(F'_s)) \\ &\quad + (\mu_7^{P'_6}(F_s) - \mu_7^{P'_6}(F'_s)) + (\mu_7^{Y'_6}(F_s) - \mu_7^{Y'_6}(F'_s)) + (\mu_7^{A'_6}(F_s) - \mu_7^{A'_6}(F'_s)).\end{aligned}\quad (3.11)$$

En los lemas 43 a 55 que siguen a continuación determinaremos formas cerradas para cada uno de los 12 términos que aparecen del segundo miembro de la Ecuación (3.11). Las demostraciones de los Lemas 43 a 55 se incluyen en el Apéndice.

Lema 43. *Sea s un entero tal que $s > 1$. Consideremos las tuplas de enteros $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{18})$ y $(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{18})$ tales que $\ell_i = s$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, 18\}$, $\ell'_1 = s + 1$, $\ell'_2 = s - 1$ y $\ell'_i = s$ para cada $i \in \{3, 4, \dots, 18\}$. Entonces,*

$$\phi_{18}^{(7)}(l'_1, l'_2, \dots, l'_{18}) - \phi_{18}^{(7)}(l_1, l_2, \dots, l_{18}) = -4368s^5. \quad (3.12)$$

Lema 44. *Para cada entero s tal que $s > 1$,*

$$\mu_7^V(F_s) - \mu_7^V(F'_s) = 2389s^5. \quad (3.13)$$

Lema 45. *Para cada entero s tal que $s > 1$,*

$$\mu_7^E(F_s) - \mu_7^E(F'_s) = 512s^5. \quad (3.14)$$

Lema 46. *Para cada entero s tal que $s > 1$,*

$$\mu_7^{P_3}(F_s) - \mu_7^{P_3}(F'_s) = -11s^6 + 194s^5. \quad (3.15)$$

Lema 47. *Para cada entero s tal que $s > 1$,*

$$\mu_7^{P_4}(F_s) - \mu_7^{P_4}(F'_s) = -11s^6 + 68s^5. \quad (3.16)$$

Lema 48. *Para cada entero s tal que $s > 1$,*

$$\mu_7^{Y_4}(F_s) - \mu_7^{Y_4}(F'_s) = 13s^5. \quad (3.17)$$

Lema 49. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{P'_5}(F_s) - \mu_7^{P'_5}(F'_s) = 99s^6 + 21s^5. \quad (3.18)$$

Lema 50. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{P_5}(F_s) - \mu_7^{P_5}(F'_s) = -11s^6 + 10s^5. \quad (3.19)$$

Lema 51. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{C_5}(F_s) - \mu_7^{C_5}(F'_s) = 55s^6 + 8s^5. \quad (3.20)$$

Lema 52. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{Y'_5}(F_s) - \mu_7^{Y'_5}(F'_s) = 10s^5. \quad (3.21)$$

Lema 53. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{P'_6}(F_s) - \mu_7^{P'_6}(F'_s) = -8s^6 + 14s^5. \quad (3.22)$$

Lema 54. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{Y'_6}(F_s) - \mu_7^{Y'_6}(F'_s) = 18s^6 + 6s^5. \quad (3.23)$$

Lema 55. Para cada entero s tal que $s > 1$,

$$\mu_7^{A'_6}(F_s) - \mu_7^{A'_6}(F'_s) = 9s^6 + 3s^5. \quad (3.24)$$

Proposición 56. Para cada entero s tal que $s \geq 9$, $\mu_7(F'_s) < \mu_7(F_s)$.

Demostración. Sea s un entero tal que $s \geq 9$. Reemplazando los Lemas 43 a 55 en la Ecuación (3.11), obtenemos que:

$$\mu_7(F_s) - \mu_7(F'_s) = 140s^6 - 1120s^5 = 140s^5(s - 8) > 0,$$

donde la última desigualdad vale puesto que $s \geq 9$. □

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de este trabajo.

Prueba del Teorema 18. Sea s un entero tal que $s \geq 9$. Por la Proposición 39 sabemos que F_s es el grafo localmente más confiable en un entorno de 0 en la clase $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Sea H un grafo arbitrario en $\mathcal{C}_{18s-6,18s} - \{F_s\}$. Probemos primero que H no es UMRG, y finalmente probemos que F_s tampoco es UMRG.

Como F_s es localmente más confiable en un entorno de 0 y $H \in \mathcal{C}_{18s-6,18s} - \{F_s\}$, existe $\delta > 0$ tal que $R_{F_s}(\rho) > R_H(\rho)$ para todo $\rho \in (0, \delta)$. Por lo tanto, H no es UMRG.

Probemos por último que F_s tampoco es UMRG. Como $s \geq 9$, por la Proposición 56 sabemos que $\mu_7(F'_s) < \mu_7(F_s)$. Entonces, aplicando el Teorema 21 con $j = 7$ concluimos que F'_s es más confiable que F_s en un entorno de 1. Esto significa que existe algún número $\delta' > 0$ tal que $R_{F'_s}(\rho) > R_{F_s}(\rho)$ para todo $\rho \in (1 - \delta', 1)$. Luego F_s tampoco es UMRG y por lo tanto no existe UMRG en la clase $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$, como queríamos demostrar. □

Capítulo 4

Conjeturas

En este capítulo se presentan 2 conjeturas obtenidas como resultado de la investigación realizada durante la ejecución de este proyecto de final de carrera. En particular, se aporta fuerte evidencia computacional que respalda las Conjeturas 57 y 58, las cuales indican la inexistencia de grafos uniformemente más confiables en infinitas clases de corango 7 pertenecientes a las familias $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$ y $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$.

Conjetura 57. *Para cada entero s tal que $s \geq 15$ no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$.*

Conjetura 58. *Para cada entero s tal que $s \geq 15$ no existe ningún grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$.*

En este capítulo se exponen los motivos que fundamentan la veracidad de las Conjeturas 57 y 58. Recordemos que la demostración del Teorema 18 presentada en el Capítulo 3 consiste esencialmente en 2 pasos. En el primero se determina el único grafo que es localmente más confiable en un entorno de 0 en cada una de las clases de estudio, y en el segundo paso se obtiene un grafo que es localmente más confiable que el obtenido anteriormente en un entorno de 1.

El lector podrá apreciar que existe una metodología sólida desde el punto de vista matemático para completar el primer paso y determinar el único grafo que es localmente más confiable en un entorno de 0 para aquellas clases no vacías $\mathcal{C}_{n,m}$ tales que $n < m < 3n/2$ (especialmente para dichas aquellas clases de bajo corango). De hecho, en el Capítulo 3 hemos aprendido a combinar el orden lexicográfico dentro de todas las tuplas $\mu(G)$ dadas por $(\mu_0(G), \mu_1(G), \dots, \mu_m(G))$ con la caracterización de grafos que son mín- μ_3 que brinda el Teorema 26. No obstante, la ejecución del segundo paso conlleva un delicado estudio de partición de cortes, tal como hemos comprobado tras la demostración del Lema 42 en el que hemos clasificado cada uno de los 7-cortes del grafo F en exactamente 12 subclases. Luego, fue necesario hallar cortes inducidos correspondientes a cada uno de dichas subclases.

Este capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 4.1 presentaremos de manera esquemática los enunciados a demostrar que permiten obtener, para cada entero positivo s , el único grafo localmente más confiable en $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$ y en $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$ en un entorno de 0, que llamaremos G_s y H_s respectivamente. La Sección 4.2 define, para cada entero s tal que $s \geq 2$, dos grafos G'_s en $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$ y H'_s en $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$. También se brinda fuerte evidencia computacional de que para cada entero s tal que $s \geq 15$ se cumplen las siguientes desigualdades: $\mu_7(G'_s) < \mu_7(G_s)$ y $\mu_7(H'_s) < \mu_7(H_s)$. En tal caso, las demostraciones de las Conjeturas 57 y 58 surgen de manera análoga a la demostración del Teorema principal del Capítulo 3.

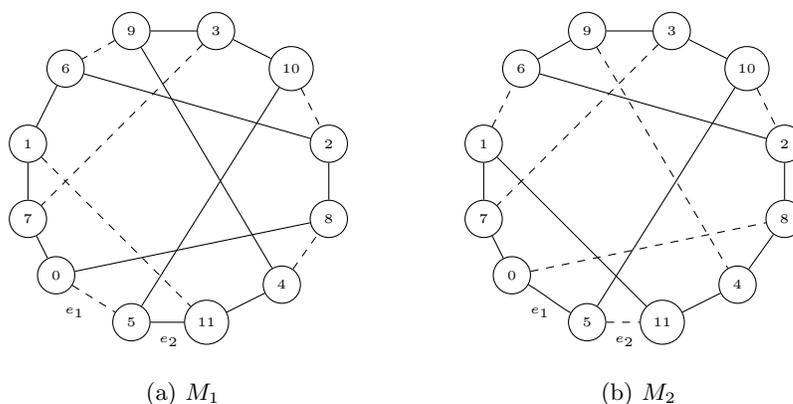


Figura 4.1: Emparejamientos perfectos M_1 y M_2 del grafo F .

4.1. Optimalidad en un entorno de 0

La caracterización de grafos $\min\text{-}\mu_3$ provista por el Teorema 26 es la clave para probar los Lemas 59 y 60. La lógica de la demostración es análoga a la que se encuentra en el Lema 34 del Capítulo 3.

Lema 59. *Sea s un entero positivo. Un grafo G en $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$, es $\min\text{-}\mu_3$ si y sólo si G tiene 6 cadenas de largo $s+1$ que constituyen un emparejamiento perfecto de cadenas, 12 cadenas de largo s y $D(G)$ es un grafo simple cúbico en $\mathcal{C}_{12,18}$.*

Lema 60. *Sea s un entero positivo. Un grafo G en $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$ es $\min\text{-}\mu_3$ si y sólo si G tiene 6 cadenas de largo s que constituyen un emparejamiento perfecto de cadenas, 12 cadenas de largo $s+1$ y $D(G)$ es un grafo simple cúbico en $\mathcal{C}_{12,18}$.*

La Figura 4.1 ilustra 2 emparejamientos perfectos M_1 y M_2 del grafo F , donde las aristas punteadas son las que pertenecen a dichos emparejamientos. Por un lado, definimos el grafo G_s como el que se obtiene del grafo F tras subdividir s veces las aristas pertenecientes a M_1 y $s-1$ veces las restantes aristas de F . Por otro lado, definimos H_s como el grafo obtenido de F tras

subdividir $s - 1$ veces las aristas pertenecientes al emparejamiento M_2 y s veces las aristas restantes.

Observemos que cada uno de los grafos $\text{min-}\mu_3$ dentro de las clases de estudio son justos. Por la Proposición 33, para hallar aquellos grafos que minimizan μ_4 dentro de los grafos que son $\text{min-}\mu_3$ es suficiente determinar aquellos que minimizan la cantidad μ_4^1 . Mediante cálculos computacionales hemos determinado que los únicos grafos que minimizan μ_4^1 dentro de la clase de grafos de estudio tienen como destilación a F o bien a H . Notar que la clase de grafos que son $\text{min-}\mu_4$ dentro de aquellos que son $\text{min-}\mu_3$ es de cardinal reducido, y mediante un análisis similar al desarrollado en el Capítulo 3 es posible demostrar las Proposiciones 61 y 62 que se enuncian a continuación.

Proposición 61. *Para cada entero positivo s el grafo G_s es el grafo localmente más confiable en un entorno de 0 en $C_{18s,18s+6}$.*

Proposición 62. *Para cada entero positivo s el grafo H_s es el grafo localmente más confiable en un entorno de 0 en $C_{18s+6,18s+12}$.*

4.2. Suboptimalidad en un entorno de 1

En esta sección presentaremos evidencia a favor de las Conjeturas 57 y 58. Sea s un entero tal que $s \geq 15$.

Definimos el grafo G'_s obtenido de F tras subdividir s veces las aristas en M_1 y $s - 1$ veces las restantes, exceptuando las aristas e_1 y e_2 que se subdividen $s + 1$ veces y $s - 2$ veces, respectivamente. Definamos el grafo H'_s que se obtiene de F tras subdividir $s - 1$ veces las aristas pertenecientes a M_2 y s veces las restantes, exceptuando las aristas e_1 y e_2 que se subdividen $s + 1$ veces y $s - 2$ veces, respectivamente.

Nuestros estudios computacionales sugieren que valen las siguientes desigualdades $\mu_7(G'_s) < \mu_7(G_s)$ y $\mu_7(H'_s) < \mu_7(H_s)$. De este modo, habremos encontrado grafos con mayor cantidad de árboles recubridores en comparación con aquellos que son localmente más confiables en un entorno de 0. En caso de tener una prueba completa de dichas desigualdades, siguiendo la lógica de demostración del Teorema 18 presentada en el Capítulo 3 obtendríamos respectivas demostraciones para las Conjeturas 57 y 58.

Observemos que tras retirar exactamente 7 aristas de un grafo simple conexo de corango 7 se obtiene un grafo no conexo o bien un árbol recubridor. En consecuencia, si G es un grafo de corango 7 con m aristas y $t(G)$ denota la cantidad de árboles conexos recubridores de G , entonces $\mu_7(G) + t(G) = \binom{m}{7}$. Mediante la ejecución de un programa hemos contado la cantidad de árboles recubridores de cada grafo utilizando la destilación común F y el largo de cada una de las cadenas de los grafos G_s , H_s , G'_s y H'_s . Tenemos entonces fuerte evidencia de que la Afirmación 63 es correcta.

Afirmación 63. *El número de árboles recubridores de los grafos presentados son los siguientes:*

$$(I) t(G_s) = 9800s^7 + 23100s^6 + 21652s^5 + 10092s^4 + 2340s^3 + 216s^2;$$

$$(II) t(H_s) = 9800s^7 + 45850s^6 + 90218s^5 + 96700s^4 + 60934s^3 + 22562s^2 + 4544s + 384;$$

$$(III) t(G'_s) = 9800s^7 + 23240s^6 + 19892s^5 + 6785s^4 + 158s^3 - 409s^2 - 66s;$$

$$(IV) t(H'_s) = 9800s^7 + 45990s^6 + 88848s^5 + 91227s^4 + 53471s^3 + 17754s^2 + 3056s + 206.$$

Si la Afirmación 63 es cierta, surge inmediatamente la veracidad de las Afirmaciones 64 y 65.

Afirmación 64. *Para todo entero s tal que $s \geq 15$, $t(G_s) < t(G'_s)$.*

Afirmación 65. *Para todo entero s tal que $s \geq 15$, $t(H_s) < t(H'_s)$.*

Las Conjeturas 57 y 58 resultarán correctas una vez que se tengan demostraciones de cada una de las afirmaciones presentadas en este capítulo.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Tras más de 3 décadas de investigaciones relativas al estudio de existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables han habido escasos progresos. Solamente conocemos grafos uniformemente más confiables que son árboles, ciclos, grafos θ balanceados, ciertas divisiones de K_4 o de $K_{3,3}$, grafos que provienen de retirar un emparejamiento a K_n , o grafos con especial simetría como el grafo de Wagner, el grafo de Yutsis o el grafo de Petersen. Notar que dichos grafos tienen corango reducido o bien son casi completos.

Recientemente se conjeturó que todos los grafos multipartitos completos regulares son uniformemente más confiables. Cheng demostró que dichos grafos maximizan la cantidad de árboles recubridores, lo que es una condición necesaria para dichos grafos sean uniformemente más confiables pero no suficiente.

Boesch ha postulado diversas conjeturas en su artículo seminal publicado en 1986. Algunas conjeturas propuestas aún permanecen abiertas. En particular, no sabemos si todo grafo uniformemente más confiable minimiza la cantidad de cortes de tamaño k para cualquier elección factible de k . También conjeturó que todo grafo multipartito completo casi-regular maximiza la cantidad de árboles recubridores, lo que es cierto y fue probado por Petingi en su tesis doctoral.

Una célebre conjetura de Boesch postula que en cada una de las clases no vacías de grafos simples y conexos siempre existe al menos un grafo que es uniformemente más confiable. Si bien se han encontrado infinitos contraejemplos a dicha conjetura, su postulación no deja de tener un valor científico superlativo, puesto que ha permitido dar avances al área de confiabilidad uniforme, ya sea para hallar nuevos grafos uniformemente más confiables o para demostrar su inexistencia.

En este proyecto nos concentramos en el estudio de la conjetura de Boesch sobre existencia o inexistencia de grafos uniformemente más confiables. Hemos demostrado la inexistencia de grafos uniformemente más confiables en infinitas

clases de corango 7. Concretamente, establecimos que para cada entero s tal que $s \geq 9$ no existe ningún grafo uniformemente más confiable en las clases $\mathcal{C}_{18s-6,18s}$. Además, presentamos fuerte evidencia computacional de la inexistencia de grafos uniformemente más confiables para las clases $\mathcal{C}_{18s,18s+6}$ y $\mathcal{C}_{18s+6,18s+12}$ para cada entero s tal que $s \geq 15$.

Este trabajo también resalta la complejidad de demostrar la inexistencia de grafos uniformemente más confiables en diferentes clases, sugiriendo que el análisis debe ser más amplio y considerar nuevas técnicas y enfoques para resolver este problema.

Existen varias direcciones para trabajos futuros. En primer lugar, la demostración de la inexistencia de UMRG en las clases conjeturadas, así como en otras clases de corango 7 no abordadas en esta tesis, representa una continuación natural de este estudio. Además, sería valioso explorar métodos alternativos para evaluar la confiabilidad de los grafos, buscando patrones o características que puedan indicar la existencia de UMRG.

En las clases de corango 8 donde únicamente realizamos pruebas computacionalmente, una tarea interesante sería investigar si cada una de las subdivisiones provenientes del grafo de Heawood propuestas por Ath y Sobel resultan en grafos uniformemente más confiables para clases de corango 8, lo que implicaría un estudio más profundo de sus propiedades y aplicaciones prácticas. También sería interesante explorar otras clases de grafos y analizar su confiabilidad en diferentes entornos para obtener una comprensión más completa de este campo.

En términos prácticos, el diseño de redes y sistemas resilientes se beneficiaría de investigaciones adicionales que exploren estas áreas. La colaboración interdisciplinaria y el desarrollo de algoritmos más eficientes podrían ayudar a expandir el alcance de estos estudios y permitir análisis a mayor escala, lo cual es esencial para el futuro del diseño de redes confiables y otros campos relacionados.

Bibliografía

- [1] Kassie Archer, Christina Graves, and David Milan. Classes of uniformly most reliable graphs for all-terminal reliability. *Discrete Appl. Math.*, 267:12–29, 2019.
- [2] Yontha Ath and Milton Sobel. Some conjectured uniformly optimal reliable networks. *Probab. Eng. Inf. Sci.*, 14:375–383, 2000.
- [3] D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, and R. Tindell. Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks. *Networks*, 15(2):257–271, 1985.
- [4] Norman Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1993.
- [5] F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *J. Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [6] F. T. Boesch, X. Li, and C. Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2):181–194, 1991.
- [7] Mathias Bourel, Eduardo Canale, Franco Robledo, Pablo Romero, and Luis Stábile. Building Highly Reliable Networks with GRASP/VND Heuristics. In *2019 15th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN)*, pages 91–98, 2019.
- [8] Jason I. Brown and Danielle Cox. Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability. *Networks*, 63(2):146–153, 2014.
- [9] Julián Viera. Búsqueda de grafos cúbicos de máxima confiabilidad. Tesis de maestría, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2018.
- [10] A. Kelmans. On graphs with randomly deleted edges. *Acta Math. Hung.*, 37(1–3):77–88, 1981.
- [11] Wendy Myrvold. Uniformly-most reliable graphs do not always exist. Technical Report #DCS-120-IR, Department of Computer Science, University of Victoria, Victoria, B.C., Canada, 1990.

- [12] Wendy Myrvold, Kim H. Cheung, Lavon B. Page, and Jo Ellen Perry. Uniformly-most reliable networks do not always exist. *Networks*, 21(4):417–419, 1991.
- [13] Guillermo Rela, Franco Robledo, and Pablo Romero. Petersen graph is uniformly most-reliable. In *Machine Learning, Optimization, and Big Data*, pages 426–435, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [14] Pablo Romero. Uniformly optimally reliable graphs: A survey. *Networks*, 80(4):466–481, 2022.
- [15] Pablo Romero and Martín D. Safe. Least corank for the nonexistence of uniformly most reliable graphs. *Procedia Computer Science*, 223:88–95, 2023.
- [16] Julián Viera. *Búsqueda de grafos cúbicos de máxima confiabilidad*. Tesis de maestría, Universidad de la República, 2018.
- [17] Guifang Wang. A proof of Boesch’s conjecture. *Networks*, 24(5):277–284, 1994.
- [18] Guifang Wang and Lianzhu Zhang. The structure of max λ -min $m_{\lambda+1}$ graphs used in the design of reliable networks. *Networks*, 30(4):231–242, 1997.

Anexo A

Anexo 1

Prueba del Lema 43. Sea s un entero positivo tal que $s \geq 2$. Consideremos las tuplas $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{18})$ y $(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{18})$ definidas en el enunciado. Por la Observación 31 obtenemos:

$$\begin{aligned} & \phi_{18}^{(7)}(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{18}) - \phi_{18}^{(7)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{18}) \\ &= \phi_{18}^{(7)}(\ell_1 + 1, \ell_2 - 1, \dots, \ell_{18}) - \phi_{18}^{(7)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{18}) \\ &= \sum_{J \in \binom{[18]}{5} - \{1,2\}} (\ell_1 - \ell_2 - 1) \prod_{i \in J} \ell_i = \sum_{J \in \binom{[18]}{5} - \{1,2\}} (s - s - 1) \prod_{i \in J} s = -4368s^5. \end{aligned}$$

□

Prueba del Lema 44. Por el Lema 42, existen precisamente 14436 cortes de tamaño 7 vértice triviales de F . Estos cortes se obtienen de remover las 3 aristas incidentes a un vértice fijo v de F , más 4 aristas cualesquiera independientes a v . Sea $I(v)$ el conjunto de aristas incidentes a v y $N(v)$ el conjunto de aristas independientes a v . Observar que $E(F)$ se particiona en dos conjuntos $I(v)$ y $N(v)$. Cada corte de tamaño 7 vértice separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 vértice separadores en F'_s como el producto del largo de las cadenas asociadas en F'_s a las aristas removidas.

A continuación vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión para determinar la cantidad de cortes inducidos de tamaño 7 vértice triviales por F en F'_s . Para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$, sea J_{v_i} la colección de conjuntos vértice separadores de tamaño 7 de F en F'_s que separan el vértice v_i . Definamos el universo \mathcal{U} como la unión de todos los conjuntos J_{v_i} , es decir que $\mathcal{U} = \cup_{i=0}^{11} J_{v_i}$. Puesto que cada elemento perteneciente al universo \mathcal{U} consiste en la remoción de 7 aristas de un grafo cúbico, no es posible la ocurrencia simultánea de 4 o más eventos simultáneos J_{v_i} . Por lo tanto, tras aplicar el principio de inclusión-

exclusión sobre el universo \mathcal{U} , se deduce que

$$|\mathcal{U}| = \left| \bigcup_{i=0}^{11} J_{v_i} \right| = \sum_{i=0}^{11} |J_{v_i}| - \sum_{0 \leq i < j \leq 11} |J_{v_i} \cap J_{v_j}| + \sum_{0 \leq i < j < k \leq 11} |J_{v_i} \cap J_{v_j} \cap J_{v_k}|. \quad (\text{A.1})$$

A continuación calculemos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$, las cantidades $|J_{v_i}|$. Sea l_i el largo de la cadena asociada a e_i .

$$|J_{v_i}| = \prod_{e_j \in I(v_i)} l_j \left(\sum_{\{e_r, e_s, e_t, e_u\} \in N(v_i)} l_r l_s l_t l_u \right). \quad (\text{A.2})$$

$$|J_{v_i} \cap J_{v_j}| = \begin{cases} \prod_{e_j \in I(v_i) \cup I(v_j)} l_j \sum_{\{e_r, e_s\} \in E(F) - I(v_i) \cup I(v_j)} l_r l_s, & \text{si } I(v_i) \cap I(v_j) \neq \emptyset \\ \prod_{e_k \in I(v_i) \cup I(v_j)} l_j \sum_{e_k \in E(F) - I(v_i) \cup I(v_j)} l_k, & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (\text{A.3})$$

$$|J_{v_i} \cap J_{v_j} \cap J_{v_k}| = \begin{cases} \prod_{e_m \in I(v_i) \cup I(v_j) \cup I(v_k)} l_m, & \text{si } F[v_i, v_j, v_k] \cong P_3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando las Ecuaciones (A.2), (A.3) y (A.4) del lado derecho de la Ecuación (A.1) y mediante simple cálculo aritmético obtenemos:

$$|\mathcal{U}| = 14436s^7 - 2389s^5. \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^V(F_s) = \mu_7^V(F)s^7 = 14436s^7$.

Por lo tanto,

$$\mu_7^V(F_s) - \mu_7^V(F'_s) = 2389s^5. \quad (\text{A.6})$$

□

Prueba del Lema 45. Por el Lema 42, existen precisamente 4176 cortes de tamaño 7 arista triviales de F . Estos cortes se obtienen de remover las 4 aristas incidentes a una arista fija e de F más 3 aristas cualesquiera no incidentes a e de forma tal de que no ocurra simultáneamente un corte vértice trivial. Sea $I(e)$ el conjunto de aristas incidentes a e y $N(e)$ el conjunto de aristas independientes a e . Observar que $E(F)$ se particiona en tres conjuntos $I(e)$, $N(e)$ y $\{e\}$. Cada corte de tamaño 7 arista separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 arista separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

A continuación vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión para determinar la cantidad de cortes inducidos de tamaño 7 arista triviales de F en F'_s . Para cada $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$, sea J_{e_i} la colección de conjuntos arista triviales de tamaño 7 inducidos por F en F'_s que separan a la arista e_i . Definamos el universo \mathcal{U} como la unión de todos los conjuntos J_{e_i} , es decir que $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{17} J_{e_i}$. Puesto que cada elemento perteneciente al universo \mathcal{U} consiste en la remoción

de 7 aristas de un grafo cúbico, no es posible la ocurrencia simultánea de 3 o más eventos simultáneos J_{e_i} . Por lo tanto, tras aplicar el principio de inclusión-exclusión sobre el universo \mathcal{U} , se deduce que

$$|\mathcal{U}| = \left| \bigcup_{i=0}^{17} J_{e_i} \right| = \sum_{i=0}^{17} |J_{e_i}| - \sum_{0 \leq i < j \leq 17} |J_{e_i} \cap J_{e_j}|. \quad (\text{A.7})$$

A continuación calculemos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$, las cantidades $|J_{e_i}|$. Recordemos que los cortes arista triviales no pueden ser vértice separadores. Por lo tanto, para determinar $|J_{e_i}|$ nuevamente emplearemos el principio de inclusión y exclusión, de modo de evitar la existencia de cortes que son vértice separadores.

Consideremos el universo \mathcal{U}_i que consiste en la colección de conjuntos de 7 aristas tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a e_i y otras 3 aristas pertenecientes al conjunto $N(e_i)$. Para cada vértice v_i de F definamos $I(v_i)$ como el conjunto de aristas incidentes a v_i y B_{v_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes al vértice v_i . Observemos que, como F tiene cintura 5, ninguno de los elementos del universo \mathcal{U}_i pertenece simultáneamente a dos o más conjuntos B_{v_i} . Por lo tanto, empleando el principio de inclusión y exclusión sobre el universo \mathcal{U}_i resulta que,

$$|J_{e_i}| = |\mathcal{U}_i \cap \bigcap_{i=0}^{11} \overline{B_{v_i}}| = |\mathcal{U}_i| - \sum_{j=0}^{11} |\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}|. \quad (\text{A.8})$$

Ya nos encontramos en condiciones de calcular las cantidades $|J_{e_i}|$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$. Sea l_i el largo de la cadena asociada a e_i . Entonces,

$$|\mathcal{U}_i| = \prod_{e_j \in I(e_i)} l_i \left(\sum_{\{e_r, e_s, e_t\} \in N(v_i)} l_r l_s l_t \right). \quad (\text{A.9})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(e_i) \cup I(v_j)} l_k \left(\sum_{e_m \in E(F) - I(e_i) \cup I(v_j) \cup \{e_m\}} l_m \right), & \text{si } I(e_i) \cap I(v_j) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } e_i \in I(v_j) \\ \prod_{e_k \in I(e_i) \cup I(v_j)} l_k, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Reemplazando las Ecuaciones (A.9) y (A.10) en la Ecuación (A.8) es posible calcular $|J_{e_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|J_{e_i}| &= \prod_{e_j \in I(e_i)} l_i \left(\sum_{\{e_r, e_s, e_t\} \in N(v_i)} l_r l_s l_t \right) \\
&+ \sum_{v_j: I(e_i) \cap I(v_j) \neq \emptyset} \prod_{e_k \in I(e_i) \cup I(v_j)} l_k \left(\sum_{e_m \in E(F) - I(e_i) \cup I(v_j) \cup \{e_m\}} l_m \right) \\
&+ \sum_{v_j: I(e_i) \cap I(v_j) = \emptyset \wedge e_i \notin I(v_j)} \prod_{e_k \in I(e_i) \cup I(v_j)} l_k \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Veamos ahora la ecuación del último término faltante para calcular $|\mathcal{U}|$.

$$|J_{e_i} \cap J_{e_j}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(e_i) \cup I(e_j)} l_k, & \text{si } I(e_i) \cap I(e_j) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Luego, reemplazando la Ecuación (A.12) y los valores de $|J_{e_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$ en la Ecuación (A.7), obtenemos:

$$|\mathcal{U}| = 4176s^7 - 512s^5, \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^E(F_s) = \mu_7^E(F)s^7 = 4176s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^E(F_s) - \mu_7^E(F'_s) = 512s^5. \quad (\text{A.14})$$

□

Prueba del Lema 46. Por el Lema 42, existen precisamente 1760 cortes de tamaño 7 P_3 separadores de F . Estos cortes se obtienen de remover las 5 aristas incidentes a un conjunto S que induce P_3 , más 2 aristas cualesquiera no incidentes ni pertenecientes a S de forma tal de que no se induzca en manera simultánea un corte vértice ni arista trivial. Sea $I(S)$ el conjunto de aristas incidentes a S y $N(S)$ el conjunto de aristas independientes a S . Cada corte de tamaño 7 S separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 P_3 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

A continuación vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión para determinar la cantidad de cortes inducidos de tamaño 7 P_3 separadores de F en F'_s . Para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$, sea J_{v_i} la colección de conjuntos P_3 separadores de tamaño 7 inducidos por F en F'_s que separan el camino P_3 que posee al vértice v_i como único vértice de grado 2. Definamos el universo \mathcal{U} como la unión de todos los conjuntos J_{v_i} , es decir que $\mathcal{U} = \cup_{i=0}^{11} J_{v_i}$. Puesto que cada elemento perteneciente al universo \mathcal{U} consiste en la remoción de 7 aristas de un grafo cúbico, no es posible la ocurrencia simultánea de 2 o más eventos simultáneos J_{v_i} . Por lo tanto, tras aplicar el principio de inclusión-exclusión sobre el universo \mathcal{U} , se deduce que

$$|\mathcal{U}| = |\cup_{i=0}^{11} J_{v_i}| = \sum_{i=0}^{11} |J_{v_i}|. \quad (\text{A.15})$$

A continuación calculemos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$, las cantidades $|J_{v_i}|$. Recordemos que los cortes P_3 separadores no pueden ser vértice ni arista separadores. Por lo tanto, para determinar $|J_{v_i}|$ emplearemos el principio de inclusión y exclusión, de modo de evitar la existencia de cortes que son vértice o arista separadores.

Consideremos el universo \mathcal{U}_i que consiste en la colección de conjuntos de 7 aristas, tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a S y otras 3 aristas pertenecientes al conjunto $N(S)$. Para cada vértice v_i de F definamos $I(v_i)$ como el conjunto de aristas incidentes a v_i , B_{v_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes al vértice v_i y T_{e_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a la arista e_i . Observemos que, como F tiene cintura 5, ninguno de los elementos del universo \mathcal{U}_i pertenece simultáneamente a dos o más conjuntos B_{v_i} ni a dos o más conjuntos T_{e_j} ni a los conjuntos B_{v_i} y T_{e_j} simultáneamente. Por lo tanto, empleando el principio de inclusión y exclusión sobre el universo \mathcal{U}_i resulta que,

$$|J_{v_i}| = |\mathcal{U}_i \cap \bigcap_{i=0}^{11} \overline{B_{v_i}} \cap \bigcap_{j=0}^{17} \overline{T_{e_j}}| = |\mathcal{U}_i| - \sum_{j=0}^{11} |\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| - \sum_{k=0}^{17} |\mathcal{U}_i \cap T_{e_k}|. \quad (\text{A.16})$$

Ya nos encontramos en condiciones de calcular los valores de $|J_{v_i}|$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Sea l_i el largo de la cadena asociada a e_i .

$$|\mathcal{U}_i| = \prod_{e_j \in I(S)} l_i \left(\sum_{\{e_r, e_s\} \in N(S)} l_r l_s \right) \quad (\text{A.17})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(S) \cup I(v_j)} l_k, & \text{si } I(S) \cap I(v_j) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap T_{e_k}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(S) \cup I(e_k)} l_k, & \text{si } |I(S) \cap I(e_k)| = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Es interesante observar que $|I(S) \cap I(e_k)| = 2$ sólo si S y e_k pertenecen a un mismo ciclo C_5 en F . Reemplazando las Ecuaciones (A.17), (A.18) y (A.19) en (A.16) es posible calcular $|J_{v_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Luego, reemplazando los valores de $|J_{v_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$ en la Ecuación (A.15), obtenemos:

$$|\mathcal{U}| = 1760s^7 + 11s^6 - 194s^5 \quad (\text{A.20})$$

Puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{P_3}(F_s) = \mu_7^{P_3}(F)s^7 = 1760s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{P_3}(F_s) - \mu_7^{P_3}(F'_s) = -11s^6 + 194s^5 \quad (\text{A.21})$$

□

Prueba del Lema 47 Por el Lema 42, existen precisamente 608 cortes de tamaño 7 P_4 separadores de F . Estos cortes se obtienen de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto S que induce P_4 , más 1 aristas cualquiera independiente a S de forma tal de que no se induzca en manera simultánea un corte vértice trivial. Sea $I(S)$ el conjunto de aristas incidentes a S y $N(S)$ el conjunto de aristas independientes a S . Cada corte de tamaño 7 S separadores de F induce tantos cortes de tamaño 7 P_4 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

A continuación vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión para determinar la cantidad de cortes inducidos de tamaño 7 P_4 separadores de F en F'_s . Para cada $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$, sea J_{e_i} la colección de conjuntos P_4 separadores de tamaño 7 inducidos por F en F'_s que separan el camino P_4 que posee la arista e_i como arista central. Definamos el universo \mathcal{U} como la unión de todos los conjuntos J_{e_i} , es decir que $\mathcal{U} = \cup_{i=0}^{17} J_{e_i}$. Puesto que cada elemento perteneciente al universo \mathcal{U} consiste en la remoción de 7 aristas de un grafo cúbico, no es posible la ocurrencia simultánea de 2 o más eventos simultáneos J_{e_i} . Por lo tanto, tras aplicar el principio de inclusión-exclusión sobre el universo \mathcal{U} , se deduce que

$$|\mathcal{U}| = |\cup_{i=0}^{17} J_{e_i}| = \sum_{i=0}^{17} |J_{e_i}|. \quad (\text{A.22})$$

A continuación calculemos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$, las cantidades $|J_{v_i}|$. Recordemos que los cortes P_4 separadores no pueden ser vértice separadores. Por lo tanto, para determinar $|J_{e_i}|$ emplearemos el principio de inclusión y exclusión, de modo de evitar la existencia de cortes que son vértice separadores.

Consideremos el universo \mathcal{U}_i que consiste en la colección de conjuntos de 7 aristas, tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a S y otra arista perteneciente al conjunto $N(S)$. Para cada vértice v_i de F definamos $I(v_i)$ como el conjunto de aristas incidentes a v_i , B_{v_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes al vértice v_i . Observemos que, como F tiene cintura 5, ninguno de los elementos del universo \mathcal{U}_i pertenece simultáneamente a dos o más conjuntos B_{v_i} . Por lo tanto, empleando el principio de inclusión y exclusión sobre el universo \mathcal{U}_i resulta que,

$$|J_{e_i}| = |\mathcal{U}_i \cap \bigcap_{j=0}^{11} \overline{B_{v_j}}| = |\mathcal{U}_i| - \sum_{k=0}^{11} |\mathcal{U}_i \cap B_{v_k}|. \quad (\text{A.23})$$

Ya nos encontramos en condiciones de calcular los valores de $|J_{e_i}|$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$. Sea l_i el largo de la cadena asociada a e_i .

Sean v_j, v_k los extremos de la arista e_i .

$$|\mathcal{U}_i| = \sum_{v_r \in NB(v_j) - \{v_k\}} \prod_{e_r \in (I(v_r) - I(v_j)) \cup (I(v_j) - I(v_r) - I(v_k))} l_r \times \sum_{v_s \in NB(v_k) - \{v_j\}} \prod_{e_s \in (I(v_s) - I(v_k)) \cup (I(v_k) - I(v_s) - I(v_j))} l_s \quad (\text{A.24})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(S) \cup I(v_j)} l_k, & \text{si } |I(S) \cap I(v_j)| = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Es interesante observar que, $|I(S) \cap I(v_j)| = 2$ sólo si S y v_j pertenecen a un mismo ciclo C_5 en F . Reemplazando las Ecuaciones (A.24) y (A.25) en (A.23) es posible calcular $|J_{e_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$. Luego, reemplazando los valores de $|J_{e_i}|$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$ en la Ecuación (A.22), obtenemos:

$$|\mathcal{U}| = 608s^7 + 11s^6 - 68s^5 \quad (\text{A.26})$$

Puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{P_4}(F_s) = \mu_7^{P_4}(F)s^7 = 608s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{P_4}(F_s) - \mu_7^{P_4}(F'_s) = -11s^6 + 68s^5$$

□

Prueba del Lema 48 Por el Lema 42, existen precisamente 108 cortes de tamaño 7 Y_4 separadores de F . Estos cortes se obtienen de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto S que induce Y_4 , más 1 aristas cualquiera independiente a S . Sea $I(S)$ el conjunto de aristas incidentes a S y $N(S)$ el conjunto de aristas independientes a S . Cada corte de tamaño 7 S separadores de F induce tantos cortes de tamaño 7 Y_4 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s . Sea p'_i la cantidad, en F'_s , de 7 cortes inducidos Y_4 separadores con v_i como único vértice de grado 3. Claramente

$$\mu_7^{Y_4}(F'_s) = \sum_{i=0}^{11} p'_i. \quad (\text{A.27})$$

Definimos $NB(v_i)$ como el conjunto de vértices vecinos a v_i , y definimos S_i como $S_i = \{v_i\} \cup NB(v_i)$ Definamos a continuación p'_i para todo $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$.

$$p'_i = \prod_{e_k \in I(S_i)} l_k \left(\sum_{e_l \in N(S_i)} l_l \right) \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto, calculando los valores p'_i mediante la Ecuación (A.28) y reemplazándolos en la Ecuación (A.27) obtenemos:

$$\mu_7^{Y_4}(F'_s) = 108s^7 - 13s^5 \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{Y_4}(F_s) = \mu_7^{Y_4}(F)s^7 = 108s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{Y_4}(F_s) - \mu_7^{Y_4}(F'_s) = 13s^5 \quad (\text{A.30})$$

□

Prueba del Lema 49. Por el Lema 42, existen precisamente 320 cortes de tamaño 7 P_5 pseudo-separadores en F . Estos cortes se obtienen de remover las 5 aristas incidentes a un conjunto S que induce C_5 , más una arista cualquiera con ambos extremos en S y una arista con ningún extremo en S . Cada corte de tamaño 7 P_5 pseudo-separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 P_5 pseudo-separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s . Existen 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , para brevedad de notación usaremos un nombre para cada uno:

$$C_a = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_b = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_c = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_d = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_e = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_f = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_g = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_h = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

Llamamos $\mu_7^{P_5^{C_a}}(F'_s)$ a la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de P_5 que son a su vez separadores de C_a . A continuación ejemplificaremos el cálculo del mismo, el resto de los cálculos es análogo y se omite.

$$\mu_7^{P_5^{C_a}}(F'_s) = s^5(5s)(6s + (s + 1) + (s - 1)) = 40s^7. \quad (\text{A.31})$$

Por lo tanto, calculando el resto de los valores obtenemos:

$$\mu_7^{P'_5}(F'_s) = 320s^7 - 99s^6 - 21s^5 \quad (\text{A.32})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{P'_5}(F_s) = \mu_7^{P'_5}(F)s^7 = 320s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{P'_5}(F_s) - \mu_7^{P'_5}(F'_s) = 99s^6 + 21s^5 \quad (\text{A.33})$$

□

Prueba del Lema 50. Por el Lema 42, existen precisamente 104 cortes de tamaño 7 P_5 separadores en F . Estos cortes se obtienen de remover las 7 aristas incidentes a un conjunto S que induce P_5 . Notar que si el conjunto S induciese C_5 , sería un corte pseudo-separador, incluido anteriormente. Cada corte de tamaño 7 P_5 pseudo-separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 P_5 pseudo-separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

Existen 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , para brevedad de notación usaremos un nombre para cada uno:

$$C_a = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_b = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_c = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_d = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_e = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_f = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_g = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_h = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

Sea $J_{r,s,t,u,v}$ el conjunto de cortes de tamaño 7 inducidos en F'_s que separan el camino $v_r v_s v_t v_u v_v$ en F . Entonces,

$$|J_{r,s,t,u,v}| = \begin{cases} 0, & \text{si } F[v_r, v_s, v_t, v_u, v_v] \cong C_5 \\ \prod_{e_t \in (I(v_r) \cup I(v_s) \cup I(v_t) \cup I(v_u) \cup I(v_v)) - \{v_r v_s, v_s v_t, v_t v_u, v_u v_v\}} l_t, & \text{si no} \end{cases}$$

Sea U_i el conjunto de cortes de tamaño 7 inducidos en F'_s que separan el camino $v_a v_b v_i v_c v_d$, entonces:

$$|U_i| = \sum_{\{v_r, v_s\} \in NB(v_i)} \sum_{\substack{v_t \in NB(v_r) - \{v_i\} \\ v_u \in NB(v_s) - \{v_i\}}} |J_{t,r,i,s,u}| \quad (\text{A.34})$$

A continuación ejemplificaremos el cálculo de $|U_5|$. El resto de los cálculos es análogo y se omite.

$$\begin{aligned} |U_5| &= (s^7 + s^7) + (s^6(s-1) + s^6(s-1)) + (s^6(s+1) + s^6(s+1) + s^6(s+1) + s^6(s+1)) \\ &= 2s^7 + 2s^7 - 2s^6 + 4s^7 + 4s^6 = 8s^7 + 2s^6. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Por lo tanto, calculando el resto de los valores obtenemos:

$$\mu_7^{P_5}(F'_s) = 104s^7 + 11s^6 - 10s^5 \quad (\text{A.36})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{P_5}(F_s) = \mu_7^{P_5}(F)s^7 = 104s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{P_5}(F_s) - \mu_7^{P_5}(F'_s) = -11s^6 + 10s^5 \quad (\text{A.37})$$

□

Prueba del Lema 51. Por el Lema 42, existen precisamente 168 cortes de tamaño 7 C_5 separadores de F . Estos cortes se obtienen de remover las 5

aristas incidentes a un conjunto S que induce C_5 , más 2 aristas cualesquiera no incidentes ni pertenecientes a S de forma tal de que no se induzca en manera simultánea un corte vértice ni arista trivial. Sea $I(S)$ el conjunto de aristas incidentes a S y $N(S)$ el conjunto de aristas independientes a S . Cada corte de tamaño 7 S separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 C_5 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

Existen 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , para brevedad de notación, utilizaremos un nombre para cada uno:

$$C_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_2 = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_3 = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_4 = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_5 = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_6 = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_7 = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_8 = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

A continuación vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión para determinar la cantidad de cortes inducidos de tamaño 7 C_5 separadores de F en F'_s . Sea J_i la colección de conjuntos C_5 separadores de tamaño 7 de F en F'_s que separan el ciclo C_i . Definamos el universo \mathcal{U} como la unión de todos los conjuntos J_i , es decir que $\mathcal{U} = \cup_{i=1}^8 J_i$. Puesto que cada elemento perteneciente al universo \mathcal{U} consiste en la remoción de 7 aristas de un grafo cúbico con cintura 5, no es posible la ocurrencia simultánea de 2 o más eventos simultáneos J_i . Por lo tanto, tras aplicar el principio de inclusión-exclusión sobre el universo \mathcal{U} , se deduce que

$$|\mathcal{U}| = |\cup_{i=0}^{11} J_i| = \sum_{i=0}^{11} |J_i|. \quad (\text{A.38})$$

A continuación calculemos, para cada $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, las cantidades $|J_i|$. Recordemos que los cortes C_5 separadores no pueden ser vértice ni arista separadores. Por lo tanto, para determinar $|J_i|$ emplearemos el principio de inclusión y exclusión, de modo de evitar la existencia de cortes que son vértice o arista separadores.

Consideremos el universo \mathcal{U}_i que consiste en la colección de conjuntos de 7 aristas, tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a S y otras 2 aristas pertenecientes al conjunto $N(S)$. Para cada vértice v_i de F definamos $I(v_i)$ como el conjunto de aristas incidentes a v_i , B_{v_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes al vértice v_i y T_{e_i} como el conjunto de 7 aristas de F , tales que incluyen a cada una de las aristas incidentes a la arista e_i . Observemos que, como F es un grafo cúbico con cintura 5, ninguno de los elementos del universo \mathcal{U}_i pertenece simultáneamente

a dos o más conjuntos B_{v_i} ni a dos o más conjuntos T_{e_j} ni a los conjuntos B_{v_i} y T_{e_j} simultáneamente. Por lo tanto, empleando el principio de inclusión y exclusión sobre el universo \mathcal{U}_i resulta que,

$$|J_i| = |\mathcal{U}_i \cap \bigcap_{i=0}^{11} \bar{B}_{v_i} \cap \bigcap_{j=0}^{17} \bar{T}_{e_j}| = |\mathcal{U}_i| - \sum_{j=0}^{11} |\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| - \sum_{k=0}^{17} |\mathcal{U}_i \cap T_{e_k}|. \quad (\text{A.39})$$

Ya nos encontramos en condiciones de calcular los valores de $|J_i|$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Sea l_i el largo de la cadena asociada a e_i .

$$|\mathcal{U}_i| = \prod_{e_j \in I(S)} l_j \left(\sum_{\{e_r, e_s\} \in N(S)} l_r l_s \right) \quad (\text{A.40})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap B_{v_j}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(S) \cup I(v_j)} l_k, & \text{si } I(S) \cap I(v_j) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

$$|\mathcal{U}_i \cap T_{e_k}| = \begin{cases} \prod_{e_k \in I(S) \cup I(e_k)} l_k, & \text{si } |I(S) \cap I(e_k)| = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Reemplazando las Ecuaciones (A.40), (A.41) y (A.42) en la Ecuación (A.39) es posible calcular $|J_i|$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Luego, reemplazando los valores de $|J_{v_i}|$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ en la Ecuación (A.38), obtenemos:

$$|\mathcal{U}| = 168s^7 - 55s^6 - 8s^5 \quad (\text{A.43})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{C_5}(F_s) = \mu_7^{C_5}(F)s^7 = 168s^7$.

Por lo tanto,

$$\mu_7^{C_5}(F_s) - \mu_7^{C_5}(F'_s) = 55s^6 + 8s^5 \quad (\text{A.44})$$

□

Prueba del Lema 52. Por el Lema 42, existen precisamente 72 cortes de tamaño 7 Y_5 separadores de F . Estos cortes se obtienen de remover las 7 aristas incidentes a un conjunto S que induce Y_5 . Cada uno de esos cortes de tamaño 7 S separadores de F induce tantos cortes de tamaño 7 Y_5 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s . Sea p'_i la cantidad, en F'_s , de 7 cortes inducidos Y_5 separadores con v_i como único vértice de grado 3. Claramente

$$\mu_7^{Y_5}(F'_s) = \sum_{i=0}^{11} p'_i. \quad (\text{A.45})$$

Definimos $NB(v)$ como el conjunto de vértices vecinos a un vértice v . Definamos a continuación p'_i para todo $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$.

$$p'_i = \sum_{\substack{v_l \in NB(v_i) \\ \{v_j, v_k\} \in NB(v_i) - \{v_l\}}} \left(\prod_{e_z \in (I(v_j) \cup I(v_k)) - I(v_i)} l_z \left(\sum_{v_r \in NB(v_l) - \{v_i\}} \left(\prod_{e_w \in I(v_r) - I(v_l)} l_w \prod_{e_w \in I(v_l) - I(v_i) - I(v_r)} l_w \right) \right) \right) \quad (\text{A.46})$$

Por lo tanto, calculando los valores p'_i mediante la Ecuación (A.46) y reemplazándolos en la Ecuación (A.45) obtenemos:

$$\mu_7^{Y_5}(F'_s) = 72s^7 - 10s^5 \quad (\text{A.47})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{Y_5}(F_s) = \mu_7^{Y_5}(F)s^7 = 72s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{Y_5}(F_s) - \mu_7^{Y_5}(F'_s) = 10s^5 \quad (\text{A.48})$$

□

Prueba del Lema 53. Por el Lema 42, existen precisamente 152 cortes de tamaño 7 P_6 pseudo-separadores de F . Al F ser un grafo cúbico con cintura 5, estos cortes se obtienen de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto S que induce C_6 más una arista cualquiera con ambos extremos en S , o de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto J que induce R_6 , más una de las aristas correspondientes a e_{p1} o e_{p2} . Cada uno de esos cortes de tamaño 7 P_6 pseudo-separadores de F induce tantos cortes de tamaño 7 P_6 pseudo-separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

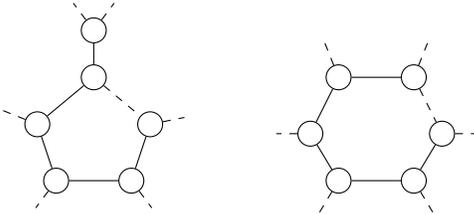


Figura A.1: Desconectar P_6 a partir de R_6 y C_6 . Las líneas punteadas representan las aristas removidas.

Existen 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , para brevedad de notación usaremos un nombre para cada uno:

$$C_a = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_b = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_c = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_d = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_e = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_f = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_g = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_h = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

A su vez existen 12 ciclos de tamaño 6 en el grafo F :

$$C_o = \{v_3, v_4, v_5, v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

$$C_p = \{v_1, v_3, v_4, v_7, v_9, v_{11}\}$$

$$C_q = \{v_0, v_1, v_4, v_7, v_8, v_{11}\}$$

$$C_r = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$$

$$C_s = \{v_2, v_4, v_5, v_8, v_{10}, v_{11}\}$$

$$C_t = \{v_2, v_3, v_4, v_8, v_9, v_{10}\}$$

$$C_u = \{v_0, v_2, v_3, v_7, v_8, v_{10}\}$$

$$C_v = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_{10}\}$$

$$C_w = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_{10}, v_{11}\}$$

$$C_x = \{v_0, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}$$

$$C_y = \{v_0, v_1, v_2, v_6, v_7, v_8\}$$

$$C_z = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}$$

Llamamos $\mu_7^{P_6^{C_a}}(F'_s)$ a la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de P_6 que son a su vez separadores de C_a , y $\mu_7^{P_6^{C_o}}(F'_s)$ a aquellos pseudo-separadores de P_6 y separadores de C_o . A continuación ejemplificaremos el cálculo de los mismos, el resto de los cálculos es análogo y se omite.

$$\mu_7^{P_6^{C_a}}(F'_s) = 2(s+1)s^6 + 2(s-1)s^6 + 2s^7 + 2s^7 + 2s^7 = 10s^7 \quad (\text{A.49})$$

$$\mu_7^{P_6^{C_o}}(F'_s) = (s-1)s^5(5s + (s+1)) = 6s^7 - 5s^6 - s^5 \quad (\text{A.50})$$

Por lo tanto, calculando el resto de los valores obtenemos:

$$\mu_7^{P_6}(F'_s) = 152s^7 + 8s^6 - 14s^5 \quad (\text{A.51})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{P_6}(F_s) = \mu_7^{P_6}(F)s^7 = 152s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{P_6}(F_s) - \mu_7^{P_6}(F'_s) = -8s^6 + 14s^5 \quad (\text{A.52})$$

□

Prueba del Lema 54. Por el Lema 42, existen precisamente 80 cortes de tamaño 7 Y_6 pseudo-separadores en F . Estos cortes se obtienen de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto S que induce R_6 , más una de las aristas correspondientes a e_{y1} o e_{y2} . Cada corte de tamaño 7 Y_6 pseudo-separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 Y_6 pseudo-separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s :

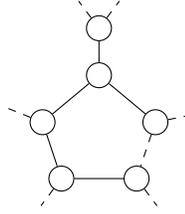


Figura A.2: Desconectar Y_6 a partir de R_6 . Las líneas punteadas representan las aristas removidas.

Existen exactamente 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , a saber:

$$C_a = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_b = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_c = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_d = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_e = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_f = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_g = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_h = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

Llamamos $\mu_7^{Y_6^{C_a}}(F'_s)$ a la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de Y_6 que son a su vez separadores de C_a . A continuación ejemplificaremos el cálculo del mismo, el resto de los cálculos es análogo y se omite.

$$\mu_7^{Y_6^{C_a}}(F'_s) = 2(s+1)s^6 + 2(s-1)s^6 + 2s^7 + 2s^7 + 2s^7 = 10s^7 \quad (\text{A.53})$$

Por lo tanto, calculando el resto de los valores obtenemos:

$$\mu_7^{Y_6}(F'_s) = 80s^7 - 18s^6 - 6s^5 \quad (\text{A.54})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{Y_6}(F_s) = \mu_7^{Y_6}(F)s^7 = 80s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{Y_6}(F_s) - \mu_7^{Y_6}(F'_s) = 18s^6 + 6s^5 \quad (\text{A.55})$$

□

Prueba del Lema 55 Por el Lema 42, existen precisamente 40 cortes de tamaño 7 A_6 pseudo-separadores en F . Estos cortes se obtienen de remover las 6 aristas incidentes a un conjunto S que induce R_6 , más la arista correspondiente a e_a . Cada corte de tamaño 7 A_6 separador de F induce tantos cortes de tamaño 7 A_6 separadores en F'_s como el producto del largo de sus cadenas asociadas en F'_s .

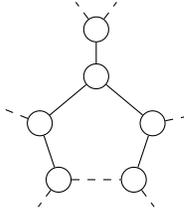


Figura A.3: Desconectar A_6 a partir de R_6 . Las líneas punteadas representan las aristas removidas.

Existen 8 ciclos de tamaño 5 en el grafo F , para brevedad de notación usaremos un nombre para cada uno:

$$C_a = \{v_1, v_3, v_6, v_7, v_9\}$$

$$C_b = \{v_0, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$$

$$C_c = \{v_0, v_1, v_5, v_7, v_{11}\}$$

$$C_d = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$$

$$C_e = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$$

$$C_f = \{v_0, v_3, v_5, v_7, v_{10}\}$$

$$C_g = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$$

$$C_h = \{v_0, v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$$

Llamamos $\mu_7^{A_6^{C_a}}(F'_s)$ a la cantidad de cortes de tamaño 7 pseudo-separadores de A_6 que son a su vez separadores de C_a . A continuación ejemplificaremos el cálculo del mismo, el resto de los cálculos es análogo y se omite.

$$\mu_7^{A_6^{C_a}}(F'_s) = (s+1)s^6 + (s-1)s^6 + s^7 + s^7 + s^7 = 5s^7 \quad (\text{A.56})$$

Por lo tanto, calculando el resto de los valores obtenemos:

$$\mu_7^{A_6}(F'_s) = 40s^7 - 9s^6 - 3s^5 \quad (\text{A.57})$$

Finalmente, obsérvese que puesto que F_s tiene todas sus cadenas de largo s , se cumple que $\mu_7^{A_6}(F_s) = \mu_7^{A_6}(F)s^7 = 40s^7$. Por lo tanto,

$$\mu_7^{A_6}(F_s) - \mu_7^{A_6}(F'_s) = 9s^6 + 3s^5 \quad (\text{A.58})$$

□