



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Límite fluido y aproximación por difusión en el modelado de redes inalámbricas

Valeria Goicoechea Jackson

Maestría en Ingeniería Matemática

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo-Uruguay

Febrero 2016



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Límite fluido y aproximación por difusión en el modelado de redes inalámbricas

Valeria Goicoechea Jackson

Tesis de Maestría presentada al programa de
Posgrado en Ingeniería Matemática,
Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República,
como parte de los requisitos necesarios para la
obtención del título de
Máster en Ingeniería Matemática.

Directora Académica y de Tesis: Dra. Paola Bermolen Romeo.

Montevideo-Uruguay

Febrero 2016

Integrantes del tribunal de defensa de Tesis.

Ernesto Mordecki,
Facultad de Ciencias,
Universidad de la República.

Pablo Belzarena,
Facultad de Ingeniería,
Universidad de la República.

Matthieu Jonckheere,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.

Agradecimientos.

Primeramente, me gustaría agradecer sinceramente a mi tutora y amiga, Paola, por su orientación y motivación. Su conocimiento y continuas correcciones han sido sumamente importantes para mi formación.

Agradezco también al profesor Ernesto Mordecki por haberme recomendado esta Maestría y formado en el campo del cálculo estocástico, que ha sido fundamental en este trabajo.

A la Universidad de la República y, en particular, a la SCAPA por haberme permitido formar parte del programa de la Maestría en Ingeniería Matemática.

A los fondos proporcionados por la beca de maestría de la Agencia Nacional de Investigación e Innovación, bajo el código POS_NAC_2013_1_11798.

Finalmente, agradezco profundamente al tribunal de defensa de tesis por haberse tomado el trabajo de leer y corregir este trabajo.

Resumen.

En esta tesis se presenta una modelización estocástica del protocolo de acceso al medio para redes inalámbricas denominado CSMA/CA (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance*). Para ello, modelaremos las *interferencias* entre los usuarios de la red mediante un grafo aleatorio y el funcionamiento de CSMA/CA mediante un algoritmo de exploración de dicho grafo.

Nuestro principal objetivo será estimar la probabilidad de transmisión de un nodo en una red de este tipo. Este parámetro se asocia a lo que se conoce como la *jamming constant* del grafo.

Asumiremos una hipótesis fuerte de homogeneidad en las interferencias entre los nodos del grafo, de manera tal que dicho algoritmo de exploración resulte en un proceso de Markov. Usaremos entonces herramientas clásicas de *límite fluido* y *aproximación por difusión* cuando el tamaño del grafo tiende a infinito. Esto nos permitirá obtener una ley de los grandes números y un teorema central del límite para el parámetro de interés.

Presentaremos, a modo de ejemplo, el desempeño de CSMA/CA sobre un grafo de Erdős–Rényi. Observaremos entonces que el resultado obtenido coincide con el que se obtiene utilizando técnicas de teoría combinatoria específicas para este grafo. La ventaja de nuestra metodología consiste en que no solo funciona para otros tipos de grafos sino que también permite construir intervalos de confianza para dicho parámetro de interés.

Palabras clave: *Redes inalámbricas; CSMA/CA; procesos de Markov; límite fluido; difusión.*

Abstract.

This thesis presents a stochastic modeling of a medium access protocol for wireless networks called CSMA/CA (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance*). *Interference* between network users will be represented through a random graph, and the operation of CSMA/CA by an exploration algorithm of this graph.

Our main goal is to estimate the probability of transmission for one node in such network. This parameter is associated with what is known as the *jamming constant* of the graph.

A strong hypothesis of homogeneity between the graph nodes is assumed, so that the exploration algorithm can be defined as a Markov process. Then we will use classical tools of *fluid limit* and *diffusion approximation* when the size of the graph tends to infinity. This will allow us to obtain a law of large numbers and a central limit theorem for the parameter of interest.

As an example, we present the performance of CSMA/CA on a Erdős–Rényi’s graph. We observe that the result obtained matches that obtained using techniques of combinatorial theory specific to this graph. The advantage of our approach is that not only works for other graph types but also allows to construct confidence intervals for the parameter of interest.

Keywords: *Wireless Networks; CSMA/CA; Markov processes; fluid limit; diffusion.*

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Modelado de redes inalámbricas.	2
1.2. Objetivo y principales resultados obtenidos.	4
1.3. Organización del documento.	7
2. Preliminares.	9
2.1. Grafo de Erdős–Rényi.	9
2.2. Límite Fluido.	11
2.3. Convergencia en distribución de procesos estocásticos <i>càdlàg</i>	11
2.4. Procesos de Markov con saltos puros y Martingalas.	17
2.5. Algunos resultados del cálculo de <i>Itô</i>	24
2.5.1. Definición de la Integral de <i>Itô</i>	25
2.5.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.	30
3. El modelo discreto.	35
3.1. Límite fluido y aproximación por difusión.	37
3.1.1. Límite fluido.	37
3.1.2. Aproximación por difusión.	45
3.2. <i>Jamming constant</i> del grafo.	52
3.2.1. Estimación de la <i>jamming constant</i> a partir del límite fluido.	53
3.2.2. Teorema Central del Límite para T_N^*	55
3.3. Grafo de Erdős–Rényi.	58
3.3.1. Límite fluido:	59
3.3.2. <i>Jamming constant</i> del grafo.	62
4. El modelo continuo.	67
4.1. Descomposición de $\{Z_t\}_t$ en martingala.	69
4.2. Límite fluido y aproximación por difusión.	71
4.2.1. Límite fluido.	71
4.2.2. Aproximación por difusión.	74
4.3. <i>Jamming constant</i> del grafo.	77
4.4. Grafo de Erdős–Rényi.	91
4.4.1. Límite fluido.	91
4.4.2. <i>Jamming constant</i> del grafo.	94
4.5. Anexo. Condición de <i>tightness</i> de $\{X^N\}_N$	101

5. Conclusiones y trabajos a futuro.

105

Capítulo 1

Introducción.

Las redes de comunicación inalámbricas han experimentado un importante crecimiento en estos últimos años. El uso cotidiano de dispositivos con capacidad de conexión inalámbrica a Internet tales como *smartphones*, *tablets*, *laptops*, *smartTVs*, etcétera intensificó dicho crecimiento. Por esta razón, las infraestructuras basadas en sistemas inalámbricos locales (las WLANs, *Wireless Local Area Networks*) también debieron crecer intensamente en aeropuertos, estaciones, plazas, centros educativos y comerciales, e incluso dentro de nuestros propios hogares, de manera tal de asegurar la conexión de los usuarios en casi cualquier lugar. Incluso en el caso de que las WLANs continúen creciendo hasta cubrir casi cualquier área, también se espera que otro tipo de redes inalámbricas tales como las redes Ad-Hoc: MANET (*Mobile Ad-Hoc Networks*), redes inalámbricas de sensores o redes Mesh, continúen creciendo. Por esta razón, el estudio, modelado y mejoramiento de estas redes (y de las que puedan seguir apareciendo) continuará siendo centro de atención en los próximos años.

Las WLANs funcionan de la siguiente manera: los dispositivos (en este trabajo también les llamaremos usuarios, terminales o nodos) mencionados antes envían y reciben información (paquetes o tramas) de manera inalámbrica hacia y desde un nodo centralizado, denominado AP (*Access Point*, conocido popularmente como “*el aparato del WiFi*”), que generalmente se conecta directamente a una conexión *Ethernet* cableada. Los APs, a su vez, se construyen para soportar un estándar que permita enviar y recibir datos utilizando las frecuencias de radio; esos estándares y las frecuencias que utilizan están definidos por la IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*). La mayoría de los APs del mercado siguen el estándar de comunicación 802.11 de la IEEE [17], conocido comercialmente como WiFi, debido a que su desempeño es razonable y a un bajo costo.

Por otro lado, en las redes Ad-Hoc no hay un AP sino que las transmisiones se dan entre los usuarios de la red y de manera tal que cada nodo puede comportarse a la vez como terminal (*i.e.* como transmisor o receptor de una señal) o como *router* (*i.e.* como intermediario en la transmisión de una trama entre dos nodos), [26]. Esta característica permite la adhesión de nuevos dispositivos con el solo hecho de estar en el rango de alcance de otro dispositivo perteneciente a la red establecida, lo que las hace más eficientes ante situaciones de emergencia pero también hace que su modelado sea mucho más complejo. Las redes Ad-Hoc se utilizan por ejemplo en la transferencia de datos vía *bluetooth* entre dispositivos móviles. El protocolo que las rige también está definido en el estándar IEEE 802.11.

1.1. Modelado de redes inalámbricas.

Para empezar, es importante entender que las redes inalámbricas son muy distintas de las cableadas (las LANs), razón por la cual su modelado también debe ser distinto. Según [16] la primera diferencia importante tiene que ver con la *variabilidad del canal*, ya que tanto la ubicación de los dispositivos como los momentos en que se realizan las transmisiones son variables e inciden en las condiciones del canal.

La segunda diferencia tiene que ver con las *interferencias entre las conexiones*. En las redes cableadas las terminales solo forman enlaces, se comunican y se ven afectadas por las terminales con las que están conectadas mediante cables, es decir que la operación de cada enlace no se ve afectada por la de otros enlaces. En las redes inalámbricas, dado que el medio es compartido, cualquier señal de transmisión es recibida (en mayor o menor medida) por todos los dispositivos de la red. Es decir que la calidad de una transmisión no solo depende del canal en sí mismo sino también de todas las demás transmisiones que se estén llevando a cabo en ese momento, puesto que estas terminan interfiriendo con dicha transmisión.

Es importante desarrollar entonces algoritmos que, teniendo en cuenta estas interferencias, permitan repartir entre varios usuarios el uso de un único canal de comunicación (medio de transmisión o rango de frecuencias asignado a la red) para que puedan realizarse varias transmisiones al mismo tiempo y de manera tal que no se interfieran significativamente entre sí. Estos son los MAC (*Medium Access Control*).

Existen dos tipos de mecanismos de acceso al medio: el *acceso por contención* (llamado también acceso aleatorio) y el *acceso determinístico*. Los métodos de acceso por contención permiten que cualquier usuario empiece a transmitir en cualquier momento siempre que el medio no esté ocupado (en realidad, algunos MAC de contención retrasan la transmisión un tiempo aleatorio una vez que el medio está desocupado con el fin de evitar colisiones). En los métodos determinísticos cada usuario tiene asegurada su oportunidad de transmitir siguiendo un criterio rotativo (*i.e.* “alguien” tiene que determinar cuándo le corresponde transmitir a cada usuario).

Nos interesan en especial los mecanismos por contención descentralizados, es decir, que cada usuario pueda decidir, basándose en información local, cuándo podrá transmitir. Estos MAC se encargan de repartir el canal entre los usuarios tanto de las redes WLANs como de las redes Ad-Hoc.

En [15] se estudian las distintas versiones de 802.11, que han surgido para extenderse y adaptarse a las necesidades del mercado: 802.11 a, b, g, n y ac. También se presentan algunos de los modelos existentes en la literatura y se analiza la validez tanto de dichos modelos como de las hipótesis asumidas en ellos. Todas estas versiones comparten el principal mecanismo de acceso al medio por contención, denominado DCF (*Distributes Coordination Function*). Este es un protocolo descentralizado que utiliza un esquema de acceso aleatorio basado en el protocolo denominado CSMA/CA (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance* o acceso múltiple por detección de portadora con evasión de colisiones).

La idea general de CSMA consiste en programar las transmisiones de manera tal que los nodos que se interfieren de manera significativa no puedan transmitir simultáneamente. La descripción física del mecanismo que permite que los nodos de una red realicen dicha exclusión funciona de

la siguiente manera: se dice que un nodo y está en el *dominio de contención* de otro nodo x si la potencia recibida por x desde y está por encima de cierto umbral fijado a priori. Se puede asumir que la *potencia* recibida por x desde y depende únicamente de la distancia (determinística) entre ellos. Otra posibilidad, más realista, es considerar que existe una variación aleatoria de este valor, para también tener en cuenta el *ruido* producido por las demás transmisiones que se estén llevando a cabo en ese momento, otros ruidos del medio y objetos que puedan encontrarse entre x e y , interfiriendo en la calidad de la transmisión. Decimos que los *vecinos* de un nodo son todos aquellos nodos que están en su dominio de contención.

Luego, antes de tratar de transmitir una trama, cada nodo escucha el canal para saber si está siendo utilizado por alguno de sus vecinos. CSMA establece que un nodo podrá transmitir solo si ninguno de sus vecinos está ocupando el canal. Sin embargo, una estrategia en la cual cada nodo trate de transmitir en el momento en que se desocupa el canal tampoco es buena, ya que dos vecinos podrían escucharlo como desocupado al mismo tiempo. Para prevenir esto se implementa también un mecanismo de *backoff* (CSMA/CA): cada nodo escucha al medio continuamente y a su vez posee un reloj interno, al que se le asigna un tiempo aleatorio. Cuando el nodo percibe el medio como ocupado, entonces congela su reloj hasta que se desocupe. Cuando percibe al medio como desocupado, entonces decreta su reloj y solo cuando este llega a cero comienza a transmitir. Una vez que finaliza su transmisión, dicho reloj es reiniciado aleatoriamente [26].

Son claras las ventajas de CSMA en cuanto a la sencillez de su implementación, pero no está tan claro a priori su desempeño debido a la dificultad que se presenta para modelarlo en distintas situaciones. Está claro que un elemento central a la hora de evaluar dicho desempeño es el correcto modelado de las interferencias entre los usuarios.

Un modelo adecuado para dichas interferencias es sumamente importante desde el punto de vista analítico pero sobre todo para poder diseñar, optimizar y mejorar estas redes. Existe en la literatura una cantidad considerable de modelos para dichas interferencias. Por ejemplo, en [16] se trata de responder justamente a la pregunta de cuál es el mejor modelo (al menos entre algunos de los existentes) para la interferencia de los canales inalámbricos, tanto de manera analítica como mediante simulaciones. Se concluye finalmente que la mayoría de los modelos existentes aún no consideran todas las características de las redes inalámbricas que pretenden modelar y que algunas de las conclusiones a las que se llegan resultan contradictorias bajo las mismas hipótesis.

Un primer enfoque, en el que se trata de considerar la geometría de la red al momento de modelar las interferencias, es el propuesto entre otros por F. Baccelli [25,26]. Para ello, se utilizan técnicas de geometría aleatoria. La ventaja de estos modelos es que brindan fórmulas analíticas explícitas para la probabilidad de transmisión. Sin embargo, son modelos que subestiman dicha probabilidad ya que asumen que todos los nodos que hayan intentado acceder al canal previamente, van a interferir sin importar si la transmisión se realizó efectivamente o no.

Un segundo enfoque, en donde la geometría de la red no es tenida en cuenta, es el propuesto por G. Bianchi [18]. Este es uno de los modelos más sencillos y, sin embargo, más citados en la literatura. Básicamente, se considera una red formada por N estaciones dispuestas alrededor de un AP y tal que un dispositivo percibe el canal como ocupado si cualquier otro está transmitiendo (no

se tiene en cuenta el ruido del canal). Para ello se considera la hipótesis de que, para cada estación, el evento de que al transmitir resulte en una colisión tiene distribución Bernoulli de parámetro p (con el mismo p para todas las estaciones de la red), independiente del resto de la red y de la historia de las colisiones hasta ese momento. Con esta hipótesis se analiza a cada estación *por separado* mediante una cadena de Markov de tiempo discreto y se da una estimación puntual de la probabilidad de transmisión. El problema que presenta este enfoque es que se restringe a un escenario en el que todos los nodos se interfieren con todos, además de que solo da una estimación puntual de la probabilidad de transmisión.

En este trabajo no nos proponemos presentar el *mejor* modelo de interferencia. Al igual que en el modelo de Bianchi, usaremos una abstracción de la geometría de la red, pero utilizaremos un modelo más ajustado de la interferencia mediante el uso de grafos aleatorios. Esto nos permitirá obtener resultados para escenarios más generales que el propuesto por Bianchi. A partir de este grafo aleatorio de interferencias, podremos modelar la dinámica de CSMA/CA sobre una red de este tipo mediante una cadena de Markov, a la que aplicaremos herramientas clásicas de *límite fluido y aproximación por difusión*. La ventaja de nuestro enfoque consiste en que, a partir de estas herramientas, podremos obtener un *intervalo de confianza* para la probabilidad de transmisión.

En lo que sigue, describiremos más en detalle el modelo propuesto y los resultados obtenidos.

1.2. Objetivo y principales resultados obtenidos.

Consideraremos una versión simplificada y *slotada* de CSMA/CA en una red WLAN formada por N nodos dispuestos alrededor de un solo AP con *capacidad infinita*, que tratarán de transmitir/recibir una trama hacia/desde él. Es decir que consideraremos el tiempo dividido en *slot times* de duración T con el fin de no tener que preocuparnos por el tamaño de las tramas que se pretenden transmitir, puesto que asumiremos que un *slot time* será el doble del tiempo que le toma a un pulso electrónico recorrer la máxima distancia teórica entre dos nodos y transmitir una trama. En realidad, existen distintas acepciones para un *slot time*; por ejemplo, podría ser el tiempo que le toma a un nodo decrementar su estado de *backoff* [15], sin embargo durante este trabajo utilizaremos la definición anterior. Consideramos el *doble* de dicho tiempo con el fin de contemplar la necesidad del nodo de recibir un ACK (*acknowledgement*, un acuse de recibo) por parte del AP, una vez que haya recibido la trama. A su vez, supondremos que cada *slot time* se divide en dos periodos, a los que llamaremos *periodo de contención* (T_c) y *periodo de transmisión* (T_t). La siguiente tabla presenta la duración de un *slot time* para distintos anchos de banda:

<i>Speed</i>	Duración de un <i>slot time</i>
10 Mbit/s	51.2 microsegundos
1000 Mbit/s	5.12 microsegundos
1 Gbit/s	4.096 microsegundos

Al inicio ($t = 0$) del periodo de contención (que coincide con el inicio de un *slot time*), asumiremos que los N nodos de la red tienen una trama lista para ser enviada (*tráfico saturado*) y sortean uniformemente, e independientemente del resto de la red, el tiempo en que tratarán de realizar dicha

transmisión en el intervalo $[0, T_c]$ (esto corresponde a una simplificación del mecanismo de *backoff*). Supongamos que al nodo i le corresponde transmitir en el tiempo $T_i \in [0, T_c]$; si antes de T_i ninguno de los vecinos de i trató de transmitir, entonces durante dicho *slot time* le corresponderá transmitir dentro de su dominio de contención (o *vecindad*), por lo que sus vecinos quedarán bloqueados para transmitir en ese *slot time*. Al inicio de un nuevo *slot time*, se reinician los relojes de todos los nodos de la red.

Desde el punto de vista analítico, solo interesa el orden en que dichos tiempos se producen, por lo que cualquier otra distribución continua de estos tiempos será equivalente. Nosotros consideraremos una distribución exponencial de parámetro λ , con λ suficientemente grande como para que la “asignación” de cuáles son los nodos que podrán transmitir se lleve a cabo durante el intervalo de contención (o tan al inicio de cada *slot time* como sea posible, si no consideramos dicha partición del intervalo $[0, T]$).

Nuestro objetivo será estimar la *probabilidad de transmisión* (o, en otras palabras, la proporción de nodos que podrán comunicar simultáneamente) de un nodo dentro de una red de este tipo en cada *slot time*. A dicho parámetro le llamaremos la *jamming constant* de la red por su relación con los procesos conocidos como RSA (*Random Sequential Adsorption*), que mencionaremos más adelante.

Para estimar dicho parámetro olvidaremos la configuración espacial de los nodos, a los que consideraremos fijos en dicho *slot time*, y modelaremos los dominios de contención (es decir, las interferencias) de dicha red mediante un grafo aleatorio:

$$G_N = (V_N, A_N),$$

donde N es la cantidad de nodos que componen la red, V_N representa los nodos de la red y A_N (las aristas) modela las *interferencias* entre dichos nodos. Asumiremos que dichas interferencias son recíprocas.

Modelaremos el protocolo CSMA/CA sobre esta red de la siguiente manera:

- Supongamos que cada nodo de la red tiene un “reloj” que sonará (independientemente de lo que ocurra en el resto de la red) en un tiempo exponencial de parámetro λ . Si en ese momento no ha sonado el reloj de ninguno de sus vecinos, comienza a transmitir su trama hacia el AP, por lo que sus vecinos deben “apagar” sus relojes hasta la finalización de ese *slot time*.
- Sean $A_t \subseteq V_N$ los *nodos activos* del grafo, cuyos relojes sonaron antes del tiempo $t > 0$, y B_t los *nodos bloqueados* hasta t (es decir, cada uno de los nodos a los que se les apagaron sus relojes exponenciales ya que sonó primero el reloj de alguno de sus vecinos). $A_0 = \emptyset$ y $B_0 = \emptyset$. Al conjunto $A_t \cup B_t$ le llamaremos el conjunto de *nodos explorados* hasta t .
- Si en tiempo t suena el reloj exponencial de algún nodo i_t , entonces A_t y B_t se actualizan de la siguiente manera: $A_{t+} = A_t \cup \{i_t\}$ y $B_{t+} = B_t \cup \mathcal{N}_{i_t}$, siendo $\mathcal{N}_{i_t} \subseteq V_N \setminus (A_t \cup B_t)$ los vecinos no explorados de i_t .
- El algoritmo termina cuando $|A_t \cup B_t| = N$.

Luego, la proporción de nodos que podrán transmitir simultáneamente dentro de dicho *slot time* será:

$$\frac{|A_{T^*}|}{N},$$

siendo $T^* \in [0, T]$ el momento en el que termina el algoritmo (*i.e.* $|A_{T^*} \cup B_{T^*}| = N$).

El problema que se presenta es que T^* es aleatorio y fuertemente dependiente de la estructura del grafo de interferencias. Por esta razón, usaremos una hipótesis fuerte de homogeneidad en las interferencias entre los nodos del grafo, de manera tal que el proceso $\{Z_t\}_{t \leq T}$, siendo:

$$Z_t = |A_t \cup B_t|,$$

resulte en un proceso de Markov de saltos puros y T^* un tiempo de parada de dicho proceso ($Z_{T^*} = N$).

Utilizaremos una reescala conveniente de $\{Z_t\}_{t \leq T}$ dependiente de N , a la que llamaremos $\{Z_t^N\}_t$, y estudiaremos el límite cuando $N \rightarrow \infty$ de este proceso. Veremos que $\{Z_t^N\}_t$ converge en la topología de Skorohod, que definiremos formalmente, a la única solución de una ecuación diferencial determinística. Este tipo de resultado se enmarca dentro de los conocidos como *límites fluidos* o *hidrodinámicos* [2,5,8,9]. Luego, utilizando el escalado usual de los resultados conocidos como *teorema central del límite*, obtendremos una *aproximación por difusión* [10] para dicho proceso.

A partir de lo anterior, obtendremos también una ley de los grandes números y un teorema central del límite para $\frac{|A_{T^*}|}{N}$, de lo que deduciremos una estimación de la probabilidad de transmisión de un nodo dentro de una red de este tipo. También determinaremos un intervalo de confianza para dicho parámetro de interés.

Estudiaremos, a modo de ejemplo, el desempeño de CSMA sobre uno de los grafos de interferencia más aleatorios posibles, un grafo de Erdős–Rényi. Este es un escenario en el que cualquier par de nodos pueden ser vecinos con probabilidad p y tal que el evento de que sean vecinos es independiente de todo lo demás, *i.e.* este grafo modela una red y una dinámica completamente *no-planificada*. Compararemos los resultados correspondientes al límite fluido con el modelo, utilizando para ello el entorno de programación para análisis estadístico **R** [27]. No compararemos dichos resultados con simulaciones de redes utilizando simuladores tales como **ns2** [28] o **ns3** [29] ya que nuestro objetivo es ver cómo se ajusta el límite fluido al modelo y no el modelo a la realidad. Para estas últimas comparaciones, ver por ejemplo [15] y [16]. Observaremos que el resultado obtenido para el parámetro de interés coincide con el que se obtiene utilizando técnicas de teoría combinatoria específicas para este grafo. La ventaja de nuestra metodología consiste en que no solo funciona para otro tipos de grafos sino que también permite construir intervalos de confianza para dicho parámetro.

1.3. Organización del documento.

En el capítulo 2 introduciremos algunas de las definiciones y resultados que usaremos en este trabajo relacionados a procesos de Markov de saltos puros, topología de Skorohod, límite fluido, martingalas, integral de $It\hat{o}$ y ecuaciones diferenciales estocásticas. Presentaremos solo las demostraciones representativas o significativas, para el resto indicaremos dónde encontrarlas.

Comenzaremos introduciendo en el capítulo 3 una versión centralizada del modelo anterior, sugerida en [22], en la que en cada momento $t = 0, 1, \dots$ “alguien” determinará mediante sorteo qué nodo podrá comunicar y bloqueará a sus vecinos. A este modelo le llamaremos el “*modelo discreto*”. Consideramos primero esta versión centralizada y de tiempo discreto por tres motivos. Primero, porque cada AP podría actuar como árbitro de la red, negociando en qué momento podrá comunicar cada nodo (aún cuando la mayoría de las redes WLAN no implementan esta función sino que utilizan el mecanismo CSMA/CA descentralizado que ya hemos mencionado). Segundo, porque nos dará una primera idea de cómo tratar al modelo continuo. Tercero, porque el algoritmo de exploración del grafo que presentaremos es compatible con otro tipo de aplicaciones en física, química, biología, ecología, etcétera, bajo el nombre de *parking process*, *packing process*, *random sequential adsorption* (RSA), etcétera.

En el capítulo 4 estudiaremos el modelo descentralizado y de tiempo continuo que presentamos en 1.2, al que llamaremos “*el modelo continuo*”. En los dos modelos trabajaremos con procesos de Markov de saltos puros; la diferencia entre ellos consistirá en que en el primero los tiempos de salto estarán predefinidos mientras que en el segundo serán aleatorios. Esta diferencia básica hará que las metodologías que utilizaremos para tratar dichos procesos y estimar el parámetro de interés sean diferentes, lo que motiva a tratarlos por separado. Al final de estos dos capítulos incluiremos los resultados específicos para el caso de un grafo de Erdős–Rényi.

Finalmente, en el capítulo 5 presentaremos las conclusiones y algunas líneas de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares.

Presentaremos en este capítulo algunas de las definiciones, resultados y herramientas que usaremos en el trabajo. Solo incluiremos las pruebas de aquellos enunciados que resulten representativos de lo que haremos después. Indicaremos dónde pueden encontrarse las pruebas de los enunciados que presentaremos sin demostración.

Comenzaremos presentando los grafos de *Erdős–Rényi* y algunos de los resultados que se obtienen a partir de utilizar herramientas de teoría combinatoria. En la sección 2.2 presentamos la definición de *límite fluido*. En 2.3 estudiamos la *topología de Skorohod* y definimos una convergencia de procesos estocásticos cuyas trayectorias son funciones *càdlàg*. En 2.4 presentamos los *procesos de Markov de saltos puros* y su relación con las *martingalas*. Finalmente, en la sección 2.5 presentaremos la *integral de Itô* y las *ecuaciones diferenciales estocásticas*.

2.1. Grafo de Erdős–Rényi.

Como mencionamos en la introducción, estudiaremos a modo de ejemplo el desempeño de CSMA -tanto para el modelo discreto como para el continuo- sobre una red en la que las *interferencias* entre los nodos pueda ser modelada mediante un grafo de Erdős–Rényi, ya que es uno de los grafos aleatorios más sencillos con los cuales se puede trabajar y porque sus propiedades son sumamente conocidas.

Se le denomina grafo de Erdős–Rényi (ER) a un tipo bien particular de grafos aleatorios en donde se asume que un nodo se enlaza con igual probabilidad, y de manera independiente, con el resto de los nodos del grafo. Un grafo de Erdős–Rényi es entonces $G = G(N, p)$ tal que N es la cantidad de vértices del grafo y p es la probabilidad de que dos nodos estén conectados entre sí. Luego, si X es la cantidad de vecinos de un nodo cualquiera (es decir, la cantidad de nodos con los cuales comparte una arista), entonces $X \sim \text{Bin}(N - 1, p)$.

Cabe mencionar que construir un *conjunto independiente* (que es lo que hará el algoritmo de exploración del grafo que consideraremos y que pretende aproximar al funcionamiento de CSMA) de tamaño máximo dentro de un grafo aleatorio, en particular dentro de un grafo de ER, es considerado un problema *NP-hard*. Existen heurísticas que pretenden, al menos, contruir un conjunto

independiente que sea lo más grande posible. Sin embargo, en este trabajo no estamos interesados en construir un conjunto independiente máximo (o que se aproxime a uno) por dos razones: la primera es que tener una mayor cantidad de nodos que puedan comunicar simultáneamente no implica necesariamente mayor capacidad y mejor desempeño, pues la interferencia también será mayor; la segunda es que estamos tratando de construir un modelo que se aproxime al funcionamiento de CSMA, y este tipo de protocolo no se diseñó para que pudieran comunicar simultáneamente la mayor cantidad posible de nodos .

En el caso de los grafos de ER es posible obtener cotas para el tamaño de los *conjuntos independientes* (es decir, subconjuntos del grafo G tales que dos vértices cualesquiera no están conectados por una arista) mediante herramientas de teoría combinatoria. Los resultados que presentaremos a continuación pueden encontrarse en [12]. Sea $G_N = G(N, p_N)$ un grafo de ER, donde consideraremos dos casos de especial interés:

- *el modelo de densidad constante*: $p_N = p$ constante, y
- *el modelo de grado constante en promedio*: la cantidad de vecinos en promedio de cada vértice $(N - 1)p_N$ tiende a $c > 0$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Teorema. (P. Erdos, 1962). *Sea $\alpha(G_N)$ el tamaño máximo de un subconjunto independiente de G_N . Si $Np_N \geq 3$, entonces $\alpha_N = \alpha(G_N) \leq -2 \frac{\log(Np_N)}{\log(1-p_N)}$.*

Luego, para los grafos de ER se conoce, al menos, una cota para el tamaño del conjunto independiente máximo (aunque no sepamos hallarlo en tiempo polinómico). Mostraremos a continuación que una clase de heurísticas sumamente intuitivas para la construcción de conjuntos independientes, a las que llamaremos *heurísticas greedy*, son suficientemente “buenas” en los grafos de ER.

Las *heurísticas greedy* son el tipo de heurística que construye un conjunto independiente considerando los vértices secuencialmente y agregando un vértice al conjunto cada vez que sea posible.

Teorema. *Sea $\sigma_N = \sigma(G_N)$ el tamaño del conjunto independiente obtenido con una heurística greedy.*

- *Si $Np_N \rightarrow \infty$, entonces $\sigma_N \sim -\frac{\log(Np_N)}{\log(1-p_N)}$.*
- *Si $Np_N \rightarrow c$, entonces $\sigma_N \sim N \frac{\log(1+c)}{c}$.*

Observación 1. Es decir que en cualquier caso ($Np_N \rightarrow \infty$ y $Np_N \rightarrow c$) se tiene que:

$$\frac{\sigma_N}{\alpha_N} \gtrsim \frac{1}{2},$$

i.e. el tamaño del conjunto independiente obtenido con cualquier heurística *greedy* es al menos más grande que la mitad del conjunto independiente más grande posible.

Puesto que los modelos que usaremos en este trabajo para aproximar al algoritmo CSMA resultarán ser heurísticas *greedy*, el ejemplo de los grafos de ER será *el ejemplo* ya que sabemos a priori que los resultados que obtengamos para la *jammig constant* deberían de ser coherentes con el resultado mencionado antes. Más aún, nuestro enfoque nos permitirá construir intervalos de confianza para dicho parámetro.

2.2. Límite Fluido.

Como mencionado en la introducción, nuestros resultados de *leyes de los grandes números funcionales* se enmarcan dentro del tipo de resultados llamados *límites fluidos* o *hidrodinámicos*. El concepto de *límite fluido* fue introducido por primera vez en el año 1971 por Thomas G. Kurtz en [1] y se refiere en la mayoría de los casos a un proceso determinístico (pero podría ser estocástico) a valores reales que aproxima la evolución de un proceso estocástico, usualmente sujeto a algún tipo de reescala.

Más formalmente, si $\{X(x, t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov en un espacio de estados numerable $S \subseteq \mathbb{R}^d$ con estado inicial $x \in S$ (i.e. $X(0, x) = x$), un *límite fluido* asociado a este proceso es un proceso estocástico (o determinístico) que es *uno de los límites* (en las próximas dos secciones definiremos sobre qué topología consideraremos estos límites) del proceso:

$$\{\bar{X}(x, t)\}_{t \geq 0} = \left\{ \frac{1}{\|x\|} X(x, \|x\| t) \right\}_{t \geq 0}$$

ó del proceso:

$$\{\bar{X}(x, t)\}_{t \geq 0} = \left\{ \frac{1}{\|x\|} X(x, t) \right\}_{t \geq 0}$$

ó de algún tipo de reescala del proceso original, cuando $\|x\|$ tiende a infinito. Vale aclarar que este límite no tiene por qué existir, ni ser único, ni determinístico, pero en muchos de los casos de interés es un proceso único y determinístico. Un límite fluido resulta ser entonces una descripción asintótica de las trayectorias de un proceso de Markov sujeto a algún tipo de reescala.

2.3. Convergencia en distribución de procesos estocásticos *càdlàg*.

Como hemos mencionado antes, trabajaremos con procesos que presentan saltos (más aún, hemos adelantado que en algún momento aparecerán los procesos de Markov), por lo cual el espacio de las funciones continuas no será adecuado para describir estos procesos. Consideraremos entonces el espacio de las funciones *càdlàg*, al que equiparemos con una topología definida a partir de una métrica adecuada.

Sea $D([0, T], \mathbb{R}) = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es } \textit{càdlàg}\}$ el espacio de las funciones continuas por derecha con límite por izquierda de $[0, T]$ en \mathbb{R} , con $0 < T \leq \infty$. Consideraremos el caso $T < \infty$, que es el que nos interesa en este trabajo. Este resulta ser el espacio natural cuando se pretende analizar procesos de Poisson y otros procesos que sean necesariamente discontinuos.

Sabemos que en $C([0, T], \mathbb{R}) = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$, equipado con la topología uniforme (i.e. equipado con la distancia inducida por la norma $\|f\| = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$), dos funciones f y g están “cerca” si el gráfico de f puede transformarse en el de g con pequeñas perturbaciones uniformes en las ordenadas y dejando las abscisas (el tiempo) fijas. Para transformar el gráfico de f en el de g en

el espacio $D([0, T], \mathbb{R})$ también será necesario realizar pequeñas deformaciones uniformes en la escala de tiempo. Esta es la idea que encarna la topología de Skorohod, que definiremos a continuación.

Sea $\Delta[0, T] = \{\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T] \text{ creciente y continua tal que } \alpha(0) = 0 \text{ y } \alpha(T) = T\}$. Si $f, g \in D([0, T], \mathbb{R})$, definimos la distancia $d_T(f, g)$ como el ínfimo de los $\epsilon > 0$ para los cuales existe $\alpha \in \Delta[0, T]$ tal que:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\alpha(t) - t| = \sup_{t \in [0, T]} |t - \alpha^{-1}(t)| < \epsilon$$

y

$$\sup_{t \in [0, T]} |f(t) - g(\alpha(t))| = \sup_{t \in [0, T]} |f(\alpha^{-1}(t)) - g(t)| < \epsilon.$$

Esta definición se puede resumir de la siguiente manera:

$$d_T(f, g) = \inf_{\alpha \in \Delta[0, T]} \{\|\alpha - \text{id}\| \vee \|f - g \circ \alpha\|\}.$$

d_T considera entonces esas pequeñas perturbaciones uniformes de las escalas de tiempo y espacio que mencionamos antes. En [4], página 124, se muestra que d_T es una distancia.

Entonces una sucesión $\{f_n\}_n \subseteq (D([0, T], \mathbb{R}), d_T)$ converge a f en la topología de Skorohod si y solo si existe una sucesión de funciones $\{\alpha_n\}_n \subseteq \Delta[0, T]$ tales que $\lim_n f_n(\alpha_n(t)) = f(t)$ y $\lim_n \alpha_n(t) = t$ uniformemente en t . Más aún, si f es continua, entonces la convergencia en la topología de Skorohod implica la convergencia uniforme (basta tomar $\alpha_n = \text{id}$). Luego, la topología de Skorohod relativa a $C([0, T], \mathbb{R}) \subseteq D([0, T], \mathbb{R})$ coincide con la topología uniforme en $C([0, T], \mathbb{R})$, o (en otras palabras) *la topología de Skorohod resulta ser una extensión de la topología uniforme para el espacio de las funciones càdlàg*.

El problema que presenta $D([0, T], \mathbb{R})$ con esta métrica es que $(D([0, T], \mathbb{R}), d_T)$ no es un espacio métrico completo (condición bastante útil cuando uno quiere probar convergencias ya que la completitud facilita la caracterización de los conjuntos compactos). Por suerte es posible definir otra métrica equivalente a d_T para la cual $D([0, T], \mathbb{R})$ sí es completo. Esta métrica se define así:

$$d_T^o(f, g) = \inf_{\alpha \in \Delta[0, T]} \{H(\alpha) \vee \|f - g \circ \alpha\|\},$$

$$\text{siendo } H(\alpha) = \sup_{s, t \in [0, T], s < t} \left| \log \left(\frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} \right) \right|.$$

Teorema. ([4] páginas 126-129) *Las métricas d_T y d_T^o son equivalentes, $D([0, T], \mathbb{R})$ es un espacio métrico separable bajo las dos métricas y es completo bajo d_T^o .*

Luego, $(D([0, T], \mathbb{R}), d_T^o)$ es un espacio métrico completo y separable (espacio Polaco) y $d_T^o(f_n, f)$ tiende a cero si y solo si $d_T(f_n, f)$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Podemos extender también la definición de módulo de continuidad para las funciones càdlàg; para eso reescribiremos la definición del módulo de continuidad. Si f es una función continua, entonces el módulo de continuidad de f puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\{s, t: |s-t| < \delta\}} |f(s) - f(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T-\delta} \omega_f([t, t + \delta]),$$

siendo $\omega_f(B) = \sup_{s,t \in B} |f(s) - f(t)|$ para todo $B \subseteq [0, T]$. El siguiente lema permite construir en $D([0, T], \mathbb{R})$ un módulo que cumpla el mismo papel que el módulo de continuidad en el espacio de las funciones continuas:

Lema. *Para cada $f \in D([0, T], \mathbb{R})$ y cada $\epsilon > 0$ existe una partición del intervalo $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_v = T$ tal que $\omega_f([t_{i-1}, t_i]) < \epsilon$ para todo $i = 1, 2, \dots, v$.*

Podemos definir entonces en $D([0, T], \mathbb{R})$ un módulo que cumpla el mismo rol que el módulo de continuidad en el espacio de las funciones continuas así:

$$\omega'_f(\delta) = \inf_{\pi \in \mathcal{P}([0, T], \delta)} \max_{1 \leq i \leq v_\pi} \varpi_f([t_{i-1}, t_i]),$$

siendo $\mathcal{P}([0, T], \delta) = \left\{ \pi = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{v_\pi} = T\} / \min_{1 \leq i \leq v_\pi} (t_i - t_{i-1}) > \delta \right\}$. El lema anterior afirma que si $f \in D([0, T], \mathbb{R})$ entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega'_f(\delta) = 0$. Más aún, los módulos $\omega_f(\delta)$ y $\omega'_f(\delta)$ son esencialmente lo mismo cuando f es continua.

Sea \mathcal{D} la σ -álgebra de Borel generada por los abiertos de $(D([0, T], \mathbb{R}), d_T)$ (que coincide con la σ -álgebra generada por los abiertos de $(D([0, T], \mathbb{R}), d_T^o)$).

Definición 2. Convergencia débil de una sucesión de funciones de probabilidad. Decimos que una sucesión $\{\mathbb{P}_n\}_n$ de distribuciones de probabilidad definidas sobre (D, \mathcal{D}) converge (*convergencia débil*) a una distribución \mathbb{Q} , $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{Q}$, si para toda función $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada:

$$\lim_n \int \phi d\mathbb{P}_n = \int \phi d\mathbb{Q}.$$

A veces, refiriéndose a la convergencia de distribuciones sobre (D, \mathcal{D}) , se dice que esta convergencia ocurre en la topología de Skorohod sin embargo, estrictamente hablando, la topología de Skorohod está definida sobre D no sobre las medidas de probabilidad definidas sobre (D, \mathcal{D}) . Por esta razón algunas veces se usa el término “*topología J_1* ” para referirse a esta topología. Estudiaremos a continuación algunos resultados referentes a la convergencia en la topología J_1 .

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Pensaremos en los procesos estocásticos cuyas trayectorias son funciones *càdlàg* como variables aleatorias $X^N : \Omega \rightarrow D$ (\mathcal{A}/\mathcal{D} -medibles). Cabe observar que, en general, el espacio muestral Ω puede ser muy complicado por lo que resulta conveniente pensar que es el conjunto de las realizaciones de los procesos que consideraremos, por lo cual $\Omega \subseteq D$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

La siguiente proposición nos da condiciones bajo las cuales una sucesión de procesos estocásticos definidos sobre este espacio converge (bajo la topología J_1) a una función *càdlàg*.

Proposición 3. Si $\left\{ \left\{ X^N(t) \right\}_{t \in [0, T]} \right\}_{N \geq 0}$ es una sucesión de procesos estocásticos càdlàg en $[0, T]$ ($X^N : \Omega \rightarrow D$) tales que para todo $\eta > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| \geq \eta \right) = 0,$$

donde $x(\cdot) \in D([0, T], \mathbb{R})$ es determinística, entonces $\{X^N\}_{N \geq 0}$ converge a $x(\cdot)$ en la topología de Skorohod (es decir que la medida de probabilidad inducida por $\{X^N\}_{N \geq 0}$ sobre (D, \mathcal{D}) converge a la medida de Dirac en $x(\cdot)$).

Presentaremos a continuación la demostración de esta proposición ya que esta será la base para probar la existencia del límite fluido de los procesos de Markov con los que trabajaremos.

Demostración. Sea $\Phi : (D([0, T], \mathbb{R}), d_T) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuo y acotado, y $\varepsilon > 0$. En particular Φ es continuo en $x = \{x(t)\}_{t \in [0, T]}$ por lo que existe $\eta > 0$ tal que si $d_T(x, y) < \eta$ entonces $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \varepsilon$. Puesto que $d_T(x, y) \leq \|x - y\|_\infty$, si $\|x - y\|_\infty < \eta$ entonces $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \mathbb{E}(\Phi(X^N))| &\leq \mathbb{E} |\Phi(x) - \Phi(X^N)| \\ &= \mathbb{E} \left[|\Phi(x) - \Phi(X^N)| \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| \geq \eta \right\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[|\Phi(x) - \Phi(X^N)| \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| < \eta \right\}} \right]. \end{aligned}$$

Para el primer término tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\Phi(x) - \Phi(X^N)| \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| \geq \eta \right\}} \right] &\leq \mathbb{E} \left[2 \|\Phi\|_\infty \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| \geq \eta \right\}} \right] \\ &= 2 \|\Phi\|_\infty \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| \geq \eta \right), \end{aligned}$$

que tiende a 0, por hipótesis, cuando $N \rightarrow \infty$. Y para el segundo término tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\Phi(x) - \Phi(X^N)| \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| < \eta \right\}} \right] &< \mathbb{E} \left[\varepsilon \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| < \eta \right\}} \right] \\ &= \varepsilon \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X^N(s) - x(s)| < \eta \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Entonces $\mathbb{E}(\Phi(X^N)) \rightarrow \Phi(x)$ para todo funcional sobre $D([0, T], \mathbb{R})$ continuo y acotado; esto implica que X^N converge en distribución (según la definición) a x cuando $N \rightarrow \infty$. \square

Puesto que en general el límite (en caso de existir) de una sucesión de procesos estocásticos *càdlàg* no tiene por qué ser determinístico, los teoremas que siguen permiten estudiar la convergencia de procesos estocásticos *càdlàg* incluso en el caso de que el límite no sea determinístico. En nuestro caso, los límites correspondientes a leyes de los grandes números funcionales serán determinísticos mientras que los correspondientes a resultados del tipo teorema central del límite funcional serán no determinísticos, más aún, serán soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Si prestamos atención a los métodos que se encuentran en la literatura para probar resultados que impliquen la convergencia de procesos estocásticos, es posible distinguir dos métodos. El método clásico (“*a la Billingsley*”, [4]) consiste en probar la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales y luego verificar la condición de *tightness*. El otro método (“*a la Ethier & Kurtz*”, [1]) comienza con una caracterización del o de los procesos límites, luego se muestra que dicha caracterización es “asintóticamente cierta” y finalmente se argumenta que eso debe implicar la convergencia débil. En este trabajo usaremos una “mezcla” de estos dos métodos.

Sea $\left\{ \left\{ X^N(t) \right\}_{t \in [0, T]} \right\}_{N \geq 0}$ una sucesión de procesos estocásticos *càdlàg*. Sea \mathbb{P}_N la medida de probabilidad inducida por el proceso estocástico $\left\{ X^N(t) \right\}_{t \in [0, T]}$, *i.e.*:

$$\mathbb{P}_N(A) = \mathbb{P}(X^N \in A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Podemos estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{ X^N \right\}_N$ en términos de la convergencia de la sucesión $\left\{ \mathbb{P}_N \right\}_N$. El siguiente teorema de *Prohorov*, cuya demostración puede encontrarse en [3], asegura que existe una subsucesión $\left\{ \mathbb{P}_{N_k} \right\}_k \subseteq \left\{ \mathbb{P}_N \right\}_N$ convergente si se cumple la condición de *tightness*:

Definición 4. Condición de *tightness*. Sea S un espacio métrico y \mathcal{S} la σ -álgebra de Borel generada por los abiertos de S . Una familia π de distribuciones sobre (S, \mathcal{S}) se dice que es *tight* (tensa) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \subseteq S$ compacto tal que $\mathbb{P}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ para todo $\mathbb{P} \in \pi$.

Teorema 5. (Prohorov). *Si S es un espacio métrico completo y separable, π es relativamente compacta si y solo si es *tight*.*

Como D es un espacio métrico completo y separable bajo la métrica d_T^o , una sucesión de distribuciones sobre (D, \mathcal{D}) es relativamente compacta (*i.e.* existe una subsucesión convergente) si y solo si es *tight*, por lo cual no existe dificultad en este punto. El siguiente teorema permite además caracterizar la distribución límite (en principio, de esa subsucesión convergente) en términos de las distribuciones finito dimensionales (estudio “*a la Billingsley*” de la convergencia débil de una sucesión de distribuciones):

Teorema. ([4], página 139). Si $\{\mathbb{P}_n\}_n$ es *tight* y

$$\lim_n \mathbb{P}_n (X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_p) \in A_p) = \mathbb{Q}(X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_p) \in A_p)$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $t_1, \dots, t_p \in \mathbf{T}$, siendo \mathbf{T} un subconjunto de $[0, T]$ tal que $0, T \in \mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^c \subseteq [0, T]$ es a lo sumo numerable, entonces $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{Q}$.

Observación 6. Puesto que el teorema de Prohorov expresa la condición de *tightness* en términos de la compacidad, mediante el teorema de *Ascoli-Arzelá* es posible mostrar (ver [4], página 139) que una sucesión de medidas de probabilidad $\{\mathbb{P}_n\}_n$ definidas sobre (D, \mathcal{D}) es *tight* si y solo si se cumplen las siguientes condiciones definidas en términos del módulo de continuidad que hemos definido antes:

- (i) $\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n (f \in D / \|f\| \geq a) = 0$, y
- (ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n (f \in D / \omega'_f(\delta) \geq \varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Más aún, el teorema que sigue no solo da condiciones (más fuertes) para las cuales se cumple la condición de *tightness* sino que también asegura que, bajo estas condiciones, el límite de cualquier subsucesión convergente de la sucesión $\{\mathbb{P}_n\}_n$ definida sobre (D, \mathcal{D}) corresponde a una distribución sobre $C([0, T], \mathbb{R})$.

Teorema 7. ([5], página 373). Sea $\{\mathbb{P}_n\}_n$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre (D, \mathcal{D}) tal que para todo $\varepsilon > 0$:

- existe $a > 0$ tal que $\mathbb{P}_n (|X(0)| > a) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{P}_n (\omega_X(\delta) \geq \eta) \leq \varepsilon$ si n es suficientemente grande.

Entonces:

- $\{\mathbb{P}_n\}_n$ es *tight*;
- si \mathbb{Q} es alguno de los límites de $\{\mathbb{P}_n\}_n$ (por el teorema 5 sabemos que existe $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_k \subseteq \{\mathbb{P}_n\}_n$ tal que $\mathbb{P}_{n_k} \rightarrow \mathbb{Q}$ en J_1 ya que es *tight*) entonces \mathbb{Q} es una medida de probabilidad sobre el espacio de las funciones continuas en $[0, T]$.

Es decir que $\mathbb{Q}(C[0, T]) = 1$.

Observación 8. Luego, si queremos probar que $\{X^N\}_N$ tiene una subsucesión convergente en la topología de Skorohod, tendremos que probar que para todo $\varepsilon > 0$:

- existe $a > 0$ tal que $\mathbb{P}^N (|X(0)| > a) = \mathbb{P} (|X^N(0)| > a) \leq \varepsilon$ para todo N ;
- para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si N es suficientemente grande entonces:

$$\mathbb{P}^N (\omega_X(\delta) \geq \eta) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \mathbb{P} (\omega_{X^N}(\delta) \geq \eta) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \mathbb{P} \left(\sup_{s, t \leq T, |t-s| \leq \delta} |X^N(t) - X^N(s)| \geq \eta \right) \leq \varepsilon.$$

En este trabajo, estas condiciones no solo serán suficientes para probar lo que precisamos sino que también el cálculo necesario para comprobar que estas condiciones se cumplen será relativamente sencillo (aunque un poco tedioso). Para situaciones más generales, en [35] se presenta una revisión detallada de resultados que proporcionan condiciones suficientes para asegurar la propiedad de *tightness* en términos de la estructura de *semimartingala* que presentan los procesos que se consideran (en la próxima sección definiremos estos procesos). Por ejemplo, se presentan las condiciones de Aldous y los teoremas de Aldous y de Robledo para probar la propiedad de *tightness* de una sucesión de semimartingalas.

Claramente, la condición de *tightness* no asegura la convergencia de la sucesión $\{X^N\}_N$ sino la de una subsucesión, por lo cual, si queremos probar la convergencia de la sucesión misma, tendremos que agregar alguna condición. Una opción es estudiar la convergencia de las distribuciones finito dimensionales de $\{X^N\}_N$ (“a la Billingsley”). Otra (“a la Ethier & Kurtz”) consiste en hallar el “candidato” a límite, probar que toda subsucesión convergente converge a este límite y usar el siguiente teorema:

Teorema 9. Condición suficiente para la convergencia débil de sucesiones *tight* ([4], página 59). Si $\{\mathbb{P}_n\}_n$ es *tight* y si cada subsucesión que converge débilmente converge a \mathbb{Q} , entonces $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{Q}$.

2.4. Procesos de Markov con saltos puros y Martingalas.

En lo que sigue trabajaremos con un tipo particular de procesos estocásticos cuyas trayectorias son funciones *càdlàg*, estos son los procesos de Markov de saltos puros.

Definición 10. Un **proceso de Markov de saltos puros** (*Markov jump process*) es un proceso de Markov con espacio de estados numerable S y con trayectorias continuas por derecha con límite por izquierda (*càdlàg*).

Un proceso de Markov de saltos puros puede verse entonces como una distribución de probabilidad sobre el espacio de funciones *càdlàg* con valores a S equipado con la topología de Skorohod que definimos en la sección anterior.

Consideremos ahora un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t)$. Presentaremos a continuación algunos resultados (cuyas demostraciones pueden encontrarse en [5] y [10]) para procesos de Markov de saltos puros $\mathbf{X} = \{X_t\}_t$ irreducibles, homogéneos y regulares o no explosivos (no hay transiciones instantáneas). Estos resultados nos permitirán luego descomponer un proceso de Markov de saltos puros como una martingala más un *compensador* (*i.e.* establecen un “puente” entre los procesos de Markov y las martingalas). A tales procesos les llamaremos *semimartingalas*.

Definición 11. Martingala local. Diremos que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una *martingala local* si:

- M_0 es \mathcal{F}_0 -medible;

- existe una sucesión no decreciente de tiempos de parada $\{T_n\}_n$ tendiendo a infinito tales que cada proceso detenido: $\{M_{t \wedge T_n} - M_0\}_t$ es una martingala.

Notación 12. Llamémosle \mathcal{M} al espacio de las martingalas reales, $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ a las martingalas tales que $M_0 = 0$ y \mathcal{M}_{loc} al espacio de las martingalas locales en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t)$.

Claramente, toda martingala es una martingala local, pero no es cierto que toda martingala local sea una martingala. Por ejemplo, si consideramos el movimiento Browniano en \mathbb{R}^3 $\{B(t)\}_t$ tal que $|B(0)| = 1$, definimos $M_t = \frac{1}{|B(t)|}$ y la sucesión de tiempos de parada:

$$T_n = \inf \{t > T_{n-1} : |M_t| > n\},$$

entonces resulta que $\{M_t\}_t$ es una martingala local ya que:

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n} \text{ si } t > s,$$

pero no es una martingala pues $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] < M_s$ ([10], página 22). Por otro lado, la siguiente proposición nos dice cuándo una martingala local es también una martingala:

Proposición 13. ([5], página 354). *Si $\{M_t\}_t$ es una martingala local real tal que para todo $t > 0$:*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \right) < \infty,$$

entonces el proceso $\{M_t\}_t$ es una martingala.

Definición 14. Semimartingalas. Diremos que un proceso $\mathbf{X} = \{X_t\}_t$ en \mathbb{R} es una *semimartingala* si es \mathbb{F} -adaptado y puede descomponerse como:

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

siendo $X_0 \in \mathcal{F}_0$, $\{M_t\}_t \in \mathcal{M}_{loc,0}$ y $\{A_t\}_t$ un proceso con trayectorias de variación finita y nulo en cero. Al proceso $\{A_t\}_t$ se le suele llamar el *compensador* del proceso \mathbf{X} .

Observar que la descomposición anterior no tiene por qué ser única.

Definición 15. Generador infinitesimal de un proceso de Markov de saltos puros. Si $\mathbf{X} = \{X_t\}_t$ es un proceso de Markov con espacio de estados S , se le llama *generador infinitesimal* de \mathbf{X} a la matriz $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$, siendo q_{ij} la tasa de transición del estado i al estado j :

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i)}{h} \text{ si } i \neq j \text{ y } q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Q también puede pensarse como un operador funcional definido sobre el espacio de las funciones reales y no negativas sobre S de la siguiente manera: si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa, entonces $Q(f)$ es una función real definida sobre S y tal que para todo $i \in S$:

$$Q(f)(i) = \sum_{j \in S} q_{ij} f(j). \quad (2.1)$$

La siguiente proposición nos da una herramienta para construir martingalas a partir de procesos de Markov de saltos puros. La prueba puede encontrarse en [10], página 33.

Proposición 16. *Si $\{X_t\}_t$ es un proceso de Markov de saltos puros con generador infinitesimal Q y si $g : \mathbb{R}^+ \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ es tal que $g_t(\cdot, x)$ es continua para todo $x \in S$, entonces el proceso:*

$$\left\{ g(t, X_t) - g(0, X_0) - \int_0^t (g_t(s, X_s) + Q(g)(s, X_s)) ds \right\}_t$$

es una martingala local respecto a la filtración generada por $\{X_t\}_t$.

Observación 17. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^+$. En virtud de la proposición anterior, tomando $g(t, x) = f(x)$, tenemos que:

$$\left\{ f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Q(f)(X_s) ds \right\}_t$$

es una martingala local.

Además, en cierto momento tendremos que calcular la esperanza de M_t^2 , siendo $\{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala. La siguiente proposición nos permitirá calcularla a partir del *increasing process* de $\{M_t\}_{t \geq 0}$.

Proposición 18. Existencia del increasing process. *Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala local y continua para la cual existe una sucesión $\{T_n\}_n$ no decreciente de tiempos de parada tendiendo a infinito tales que $\{M_{t \wedge T_n}\}_{t \geq 0}$ es una martingala en L^2 , entonces existe un único proceso previsible y no decreciente $\{I_t\}_{t \geq 0}$ tal que $\{M_t^2 - I_t\}_t$ es una martingala local.*

Definición 19. Increasing process de una martingala. Al proceso $\{I_t\}_t$ le llamaremos el *increasing process* de $\{M_t\}_t$. En la literatura, muchas veces se usa la notación $\langle M \rangle_t$ para referirse al proceso $\{I_t\}_t$.

Luego, si determinamos el (único) proceso previsible y no decreciente $\{I_t\}_t$ tal que $\{M_t^2 - I_t\}_t$ es una martingala, resulta que:

$$\mathbb{E}(M_t^2 - I_t) = \mathbb{E}(M_0^2 - I_0) \text{ y } \mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(I_t) + \mathbb{E}(M_0^2 - I_0).$$

Presentaremos a continuación la prueba de la proposición anterior ya que nos proporciona una herramienta para calcular el *increasing process* de una martingala continua y acotada en L^2 . El *increasing process* se puede definir en casos más generales, pero este es el caso que nos interesa. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $M_0 = 0$.

Demostración. ([10], página 53) Asumamos que $\{M_t\}_t$ es acotada (el caso general sale de usar que es una martingala local).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la siguiente sucesión de tiempos de parada:

$$\begin{cases} T_0^n = 0 \\ T_{k+1}^n = \inf \left\{ t > T_k^n : |M_t - M_{T_k^n}| > \frac{1}{2^n} \right\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sea $t_k^n = T_k^n \wedge t$; observar que:

$$\begin{aligned} M_t^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t_k^n}^2 - M_{t_{k-1}^n}^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right) \left(M_{t_k^n} + M_{t_{k-1}^n} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_{t_{k-1}^n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right)^2. \end{aligned}$$

El primer término es una martingala ya que resulta ser la integral de $It\hat{o}$ del proceso simple:

$$H^n = \sum_{k=1}^{\infty} M_{T_{k-1}^n} \mathbf{1}_{(T_{k-1}^n, T_k^n]}$$

respecto a la martingala local y continua $\{M_t\}_t$ (veremos en la próxima sección que la integral de $It\hat{o}$ es una martingala cuando se integra respecto a una martingala), es decir que:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} M_{t_{k-1}^n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right) = 2 \int_0^t H_s^n dM_s.$$

Sea $I_t^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right)^2$, sabemos entonces que para cada n el proceso $M_t^2 - I_t^n$ resulta ser una martingala. Observar que por cómo definimos la sucesión de tiempos de parada tenemos además que:

- $\sup_t |H_t^n - H_t^{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$;
- $\sup_t |H_t^n - M_t| \leq \frac{1}{2^n}$;
- $I_{T_k^n}^n \leq I_{T_{k+1}^n}^n$, i.e. $\{I_t^n\}_t$ es un proceso creciente para todo n ;
- si $J_n(\omega) = \{T_k^n(\omega) : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $J_n(\omega) \subseteq J_{n+1}(\omega)$.

Se tiene entonces que la sucesión de martingalas continuas $\left\{ \int_0^t H_s^n dM_s \right\}_t$ verifica:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_t \left(\int_0^t H_s^n dM_s - \int_0^t H_s^{n+1} dM_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sup_t \int_0^t (H_s^n - H_s^{n+1}) dM_s \right]^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sup_t \int_0^t \frac{1}{2^{n+1}} dM_s \right]^2 \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \mathbb{E} \left[\sup_t (M_s)^2 \right] = \frac{1}{4^{n+1}} C, \end{aligned}$$

por lo cual, dicha sucesión converge uniformemente (casi seguramente) cuando n tiende a infinito a una martingala continua $\{N_t\}_t$. Luego, los procesos $\{I_t^n\}_t$ también convergen uniformemente a un proceso continuo $\{I_t\}_t$ y $M_t^2 = 2N_t + I_t$. Además, como $I_{T_k^n} \leq I_{T_{k+1}^n}$, se tiene que $I_{T_k^n} \leq I_{T_{k+1}^n}$ para todo k y n , por lo que el proceso $\{I_t\}_t$ es creciente al menos en la clausura del conjunto de tiempos $J(\omega) = \bigcup_n J_n(\omega)$.

Más aún, si (a, b) es un intervalo abierto de \mathbb{R} en J^c , entonces se tiene que ningún T_k^n pertenece a (a, b) , por lo cual $\{M_t\}_t$ tiene que ser constante en (a, b) y también lo será el proceso $\{I_t\}_t$ (por cómo lo construimos). Es decir que el proceso $\{I_t\}_t$ es creciente en J y constante en el complemento de J .

Hemos probado entonces que $M_t^2 - I_t = 2N_t$ es una martingala, $\{I_t\}_t$ es un proceso creciente y continuo e $I_0 = 0$. La unicidad del proceso $\{I_t\}_t$ sale de considerar el siguiente teorema:

Si $\{M_t\}_t$ es una martingala local y continua tal que $M_0 = 0$ y además sus trayectorias son de variación finita, entonces $M_t = 0$ para todo t .

Sean $\{I_t\}_t$ e $\{\tilde{I}_t\}_t$ dos procesos continuos, crecientes y nulos en cero tales que $\{M_t^2 - I_t\}_t$ y $\{M_t^2 - \tilde{I}_t\}_t$ son martingalas, es decir que $I_t = M_t^2 - N_t$ e $\tilde{I}_t = M_t^2 - \tilde{N}_t$ con N_t y \tilde{N}_t martingalas, por lo cual $I_t - \tilde{I}_t = N_t - \tilde{N}_t$ es una martingala continua, de variación finita y nula en cero. Luego, el teorema anterior establece que $I_t - \tilde{I}_t = 0$ para todo t . \square

Observar que el *increasing process* resulta ser la variación cuadrática del proceso (por cómo lo construimos) cuando se está en las hipótesis de la proposición anterior. En principio, el cálculo del *increasing process* requiere entonces de utilizar la herramienta que presentamos en la demostración anterior, es decir, determinar los tiempos de parada t_k^n y estudiar la convergencia del proceso:

$$I_t^n = \sum_{k=1}^{\infty} (M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n})^2.$$

En el caso particular de que el proceso sea un proceso puntual Poisson, existe una versión de la proposición anterior en la que también se explicita quién es el *increasing process*, lo cual nos evitará el cálculo anterior. Estos son los resultados que presentaremos a continuación, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [5], páginas 20 y 21.

Sea $N_X = \sum_n \delta_{(t_n, X_n)}$ un *proceso puntual Poisson marcado* sobre $\mathbb{R}^+ \times G$ con intensidad $\lambda dx \otimes \nu(dy)$, es decir, sea $\{t_n\}_n$ un proceso puntual Poisson sobre \mathbb{R}^+ con intensidad λ y $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias *i.i.d* con distribución ν sobre el espacio localmente acotado y σ -compacto G . Sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t$ la filtración generada por dicho proceso:

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{N_X((a, b] \times U) : 0 \leq a < b \leq t; U \in \mathcal{B}(G)\}.$$

Proposición 20. *Si $B \in \mathcal{B}(G)$, entonces el proceso*

$$M_B(t) = N_X((0, t] \times B) - \lambda \nu(B) t$$

tiene incrementos independientes y estacionarios; además es una \mathbb{F} -martingala que cumple la propiedad fuerte de Markov. El increasing process de esta martingala es el proceso:

$$\{\lambda \nu(B) t\}_{t \geq 0},$$

i.e. $\{(M_B(t))^2 - \lambda \nu(B) t\}_{t \geq 0}$ es una \mathbb{F} -martingala.

Además, la proposición anterior puede extenderse de la siguiente manera:

Proposición 21. *Si N_X es un proceso puntual Poisson marcado en $\mathbb{R}^+ \times G$ con intensidad $\lambda ds \otimes \nu(dy)$ y $f : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función medible tal que $\int_G (f(y))^2 d\nu(y) < \infty$, entonces el proceso*

$$M_t = \iint_{(0, t] \times G} f(y) [N_X(ds, dy) - \lambda d\nu(y)]$$

es una martingala, $M_t \in L^2$ y su increasing process es:

$$\left\{ \lambda t \int_G (f(y))^2 d\nu(y) \right\}_{t \geq 0}.$$

Finalmente, el siguiente teorema (cuya demostración puede encontrarse en [2], página 339), nos da además un criterio de convergencia de una martingala local a un movimiento Browniano:

Teorema 22. Convergencia de una martingala local a un Movimiento Browniano. *Si las sucesiones de procesos estocásticos $\{Y_N(t)\}_t$ e $\{I_N(t)\}_t$ y la función $t \mapsto \beta(t)$ son tales que para todo $N \in \mathbb{N}$:*

1. $Y_N(0) = 0, \beta(0) = 0$.
2. $\{Y_N(t)\}_t$ es localmente una martingala respecto a la filtración generada por este proceso.
3. Las trayectorias de $\{I_N(t)\}_t$ son no decrecientes.
4. El proceso $\{Y_N(t)^2 - I_N(t)\}_t$ es una martingala local respecto a la filtración generada por $\{Y_N(t)\}_t$.
5. $\lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |I_N(t) - I_N(t^-)| \right] = 0$.
6. $\lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |Y_N(t) - Y_N(t^-)| \right] = 0$.
7. Para todo $t > 0$, $I_N(t)$ converge en distribución a $\beta(t)$.

Entonces $\{Y_N(t)\}_t$ converge en distribución a $\{B(\beta(t))\}_t$, donde $\{B(t)\}_t$ es el movimiento Browniano estándar.

La razón por la cual aparece el movimiento Browniano tiene que ver con el teorema de *Dubins y Schwarz* (cuya demostración puede encontrarse en [10], página 64). Básicamente, el enunciado de dicho teorema establece que, módulo una cierta transformación del tiempo, el movimiento Browniano es la más general de las martingalas locales y continuas:

Teorema. (Dubins y Schwarz). *Sea $\{M_t\}_t$ una martingala local y continua con $M_0 = 0$ y tal que su increassing process $I_t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si para cada $t \geq 0$ definimos el tiempo de parada:*

$$\tau_t = \inf \{u : I_u > t\},$$

y si $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$, entonces $B(t) = M_{\tau_t}$ define un movimiento Browniano $\{B(t)\}_t$ relativo a la filtración $\{\mathcal{G}_t\}_t$. Más aún, para cada t fijo I_t es un $\{\mathcal{G}_t\}_t$ -tiempo de parada y $M_t = B(I_t)$.

i.e. cuando cualquier martingala local y continua se ve a sí misma en esta transformación del tiempo, “piensa” que es un movimiento Browniano.

2.5. Algunos resultados del cálculo de $It\hat{o}$.

Puesto que durante la tesis trabajaremos con integrales estocásticas, presentaremos a continuación algunos de los resultados principales relacionados con la definición de la integral de $It\hat{o}$ y sus propiedades. Las demostraciones de los resultados que presentaremos pueden encontrarse en [10]. Como antes, consideremos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t)$.

Definición 23. Procesos previsible.

- Le llamaremos R -procesos (*right process*) a los procesos estocásticos $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas trayectorias son funciones *càdlàg* y L -procesos (*left process*) a los procesos cuyas trayectorias son continuas por izquierda con límite por derecha.
- Le llamaremos σ -álgebra previsible a \mathcal{P} , la menor de las σ -álgebras en $(0, \infty) \times \Omega$ tal que todo L -proceso adaptado es \mathcal{P} -medible, *i.e.*:

$$\mathcal{P} = \sigma(\{X : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} / X \text{ es un } L\text{-proceso adaptado}\}).$$

- Diremos que un proceso $H : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *previsible* si es \mathcal{P} -medible.

El cálculo de $It\hat{o}$ consiste en definir la integral $\int HdM$ cuando H y M son procesos estocásticos adecuados. Esta integral podrá ser vista como un nuevo proceso estocástico si definimos:

$$\int HdM(t, \omega) = \left(\int_{(0,t]} H_s dM_s \right) (\omega).$$

El siguiente teorema es el principal resultado del cálculo de $It\hat{o}$ y el que le da sentido a la definición de la integral de $It\hat{o}$:

Teorema 24. Teorema Fundamental del Cálculo Estocástico. *Si $\{H_t\}_t$ es un proceso previsible y localmente acotado y $\{M_t\}_t$ es una martingala local, entonces $\int HdM$ existe y es una martingala local.*

Esta resulta ser la principal característica de la integral de $It\hat{o}$ y por la cual se la prefiere ante otro tipo de integrales más intuitivas, como lo es la integral de Stratonovich: la integral de $It\hat{o}$ transforma martingalas en martingalas; *i.e.* para cada proceso previsible y localmente acotado H , el funcional:

$$F_H : \{M_t\}_t \longmapsto \left\{ \int_{(0,t]} H_s dM_s \right\}_t$$

transforma martingalas locales en martingalas locales.

2.5.1. Definición de la Integral de $It\hat{o}$.

Repasaremos a continuación cómo se define la integral de $It\hat{o}$.

Si $A = \{A_t\}_t$ es un proceso real de *variación finita*, entonces se puede definir $\int HdA$ como la integral de Stieltjes para cada ω :

$$\left(\int HdA\right)(t, \omega) = \int_{(0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega).$$

El problema que se presenta es, que en general, los procesos que interesan no tienen por qué ser de variación finita. La integral de $It\hat{o}$ resulta ser una extensión de la integral de Stieltjes.

El teorema 24 junto con el cálculo de $\int HdA$ cuando el proceso $\{A_t\}_t$ es de variación finita permite el cálculo de la integral de $It\hat{o}$ para una clase más general de procesos, a los que hemos llamado *semimartingalas*: si un proceso real $\{X_t\}_t$ adaptado en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t)$ puede descomponerse como:

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

siendo $\{M_t\}_t \in \mathcal{M}_{loc}$ con $M_0 = 0$, $\{A_t\}_t$ es un proceso con trayectorias de variación finita tal que $A_0 = 0$ y $X_0 = 0$, entonces para todo proceso localmente acotado y previsible $\{H_t\}_t$ se tiene que:

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s,$$

por lo cual la integral de $It\hat{o}$ también preserva la propiedad de ser semimartingala.

Más aún, el siguiente teorema indica que el conjunto más general de procesos que puedan ser “integradores” para la integral de $It\hat{o}$ son las semimartingalas:

Definición 25. Integradores para la integral de $It\hat{o}$. Un proceso real adaptado $\{X_t\}_t$ se dice que es un *integrador* (para la integral de $It\hat{o}$) si para cualquier sucesión $\{H^n\}_n$ de *procesos acotados y previsibles* tales que $\|H^n\| = \sup_{t>0, \omega \in \Omega} |H^n(t, \omega)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$\mathbb{P} \left(\left| \int_0^t H_s^n dX_s \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \forall t, \forall \varepsilon > 0.$$

Teorema 26. ([10], página 25). $\mathbf{X} = \{X_t\}_t$ es un *integrador* si y solo si \mathbf{X} es una *semimartingala*.

La teoría del cálculo de $It\hat{o}$ es entonces completa en el sentido de que sabemos exactamente cuáles son las condiciones que deben ser impuestas tanto al integrando como al integrador, esencialmente: *el integrando debe ser un proceso previsible y el integrador debe ser una semimartingala*.

Luego, basta con definir la integral de $It\hat{o}$ cuando el integrador es una martingala local. Presentaremos el caso más sencillo (pero sumamente explicativo de lo que ocurre en el caso más general) en donde $S \leq T \leq +\infty$ son tiempos de parada y $Z \in \mathcal{F}_S$ (σ -álgebra de los sucesos ocurridos antes de S) v.a. acotada. Sea:

$$H = Z \mathbf{1}_{(S,T]}; \text{ i.e. } H_t(\omega) = \begin{cases} Z(\omega) & \text{si } S(\omega) < t \leq T(\omega). \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

H es un proceso previsible según la definición 23. Si $\{X_t\}_t$ es cualquier integrador entonces se define la integral de $It\hat{o}$ de $\{H_t\}_t$ respecto a $\{X_t\}_t$ como:

$$\int_0^t H_s dX_s = Z (X_{T \wedge t} - X_{S \wedge t}).$$

Lema 27. Si $H = Z \mathbf{1}_{(S,T]}$ es como antes y $\{M_t\}_t$ es una martingala uniformemente integrable, entonces $\left\{ \int_0^t H_s dM_s \right\}_t$ es una martingala uniformemente integrable.

Definición 28. Procesos estocásticos uniformemente integrables. Decimos que un proceso estocástico $\{X_t\}_t$ es *uniformemente integrable* (U.I.) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k = k_\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}(|X_t| \mathbf{1}_{\{|X_t| \geq k\}}) < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Toda la teoría de la integral de $It\hat{o}$ consiste en la extensión del lema anterior. Las dos técnicas que se usan para generalizar dicho resultado son la de *aproximación por clases monótonas* (como en otros casos) y *localización*.

Algunos resultados referentes a la integral de $It\hat{o}$ respecto al movimiento Browniano.

El teorema de Dubins y Schwarz justifica que pasemos rápidamente a concentrarnos ahora en las propiedades de la integral de $It\hat{o}$ respecto al movimiento Browniano. Más aún, presentaremos solo algunos resultados y ejemplos que usaremos en este trabajo.

Proposición 29. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ espacio de probabilidad filtrado y $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ el movimiento Browniano real en este espacio. Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función determinística, positiva y aproximable por funciones simples, entonces para cada $t > 0$:

$$\int_0^t f(s) dB(s) \stackrel{\mathbb{D}}{=} N \left(0, \int_0^t f^2(s) ds \right) \stackrel{\mathbb{D}}{=} B \left(\int_0^t f^2(s) ds \right),$$

siendo $N(\mu, \sigma^2)$ una v.a. con media μ y varianza σ^2 .

Demostración. Esto es fácil de probar si consideramos una función simple $f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k 1_{[s_k, s_{k+1})}$ con $f_k \geq 0$ y $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. Supongamos que $t \in [s_l, s_{l+1})$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) dB(s) &= \sum_{k=1}^{l-1} f_k (B(s_{k+1}) - B(s_k)) + f_l (B(t) - B(s_l)) \\ &=_{\mathbb{D}} \sum_{k=1}^{l-1} f_k \sqrt{s_{k+1} - s_k} Z_k + f_l \sqrt{t - s_l} Z_l, \end{aligned}$$

siendo $Z_1, \dots, Z_l \sim N(0, 1)$ independientes. Luego, $\int_0^t f(s) dB(s)$ es suma de normales independientes, por lo cual distribuye como una variable normal, con media cero y varianza:

$$\text{var} \left(\sum_{k=1}^{l-1} f_k \sqrt{s_{k+1} - s_k} Z_k + f_l \sqrt{t - s_l} Z_l \right) = \sum_{k=1}^{l-1} f_k^2 (s_{k+1} - s_k) + f_l^2 (t - s_l) = \int_0^t f^2(s) ds.$$

La demostración para el caso general consiste en utilizar que f es aproximable por funciones simples. \square

La demostración de la siguiente proposición nos da un ejemplo de cómo calcular la integral de Itô usando la definición (“a mano”): en general, se trata de reescribir la suma correspondiente a la definición de la integral de Itô como suma de *v.a.* independientes y estudiar la convergencia de dicha suma.

Proposición 30. *La integral estocástica $I = \int_0^1 B(s) ds$ distribuye como una *v.a.* $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$.*

Demostración. Como no podemos aplicar la regla de Barrow, tendremos que calcular la integral anterior “a mano”. Consideremos entonces una partición del intervalo $[0, 1]$ de tamaño $\frac{1}{n}$ y estudiaremos la distribución de:

$$I = \lim_n \sum_{i=1}^n B\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}. \tag{2.2}$$

Sabemos que para todo $i = 1, \dots, n$: $B\left(\frac{i}{n}\right) \sim N\left(0, \frac{i}{n}\right)$ pero la suma en (2.2) no corresponde a la suma de normales independientes (los incrementos son independientes, no los $B\left(\frac{i}{n}\right)$), entonces trataremos de escribir la suma en (2.2) como la suma de *v.a.* independientes. Observar que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= nY_1 + (n-1)(Y_2 - Y_1) + (n-2)(Y_3 - Y_2) + \dots + (Y_n - Y_{n-1}) \\ &= nX_1 + (n-1)X_2 + (n-2)X_3 + \dots + X_n \\ &= \sum_{i=1}^n (n-i+1)X_i. \end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \left(B\left(\frac{i}{n}\right) - B\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) =_{\mathbb{D}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \frac{1}{\sqrt{n}} Z_i$, siendo Z_1, Z_2, \dots, Z_n i.i.d con distribución $N(0, 1)$. Entonces $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B\left(\frac{i}{n}\right)$ es una normal con media cero y varianza:

$$\text{var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \frac{1}{\sqrt{n}} Z_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Es decir que $I_n = \sum_{i=1}^n B\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} \sim N\left(0, \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$, por lo cual $I \sim N\left(0, \frac{1}{3}\right)$. En otras palabras, el área definida entre el gráfico del movimiento Browniano y el eje de las abscisas entre 0 y 1 distribuye como una v.a. $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$. \square

Esta integral se puede calcular facilmente utilizando la fórmula de Itô, sin embargo la calculamos “a mano” ya que esta estrategia de transformar sumas en sumas de v.a. independientes es “la estrategia” para calcular integrales estocásticas cuando la fórmula de Itô no facilita el cálculo. Presentaremos a continuación otro ejemplo de cómo usar esta estrategia.

Proposición 31. Sea $\{\sigma_s^2\}_s$ una función positiva y creciente con $\sigma_0^2 = 0$, entonces para cada $t > 0$

fijo la v.a. $\int_0^t B(\sigma_s^2) ds$ tiene la misma distribución que una v.a. normal con media cero y varianza $2 \int_0^t (t-s) \sigma_s^2 ds$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y una partición de $[0, t]$, $0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = t$ tal que $t_{i+1} - t_i = \frac{t}{n} = \delta_n$. Luego,

$$\int_0^t B(\sigma_s^2) ds = \lim_n \sum_{i=1}^n B(\sigma_{t_{i-1}}^2) \delta_n = \lim_n \delta_n \sum_{i=1}^n B(\sigma_{t_i}^2) = \lim_n A_n.$$

Sean $Y_i = B(\sigma_{t_i}^2)$ y $X_i = Y_i - Y_{i-1}$, entonces $X_i \sim B(\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \sim \sqrt{\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2} Z_i$ con $Z_i \sim N(0, 1)$, es decir que $A_n =_{\mathbb{D}} \delta_n \sum_{i=1}^n (n-i+1) \sqrt{\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2} Z_i$ es una v.a. normal (por ser suma de v.a. normales independientes) con media cero y varianza:

$$\begin{aligned} \text{var}(A_n) &= \delta_n^2 \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \\ &= t^2 \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^n (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \right], \end{aligned}$$

donde:

$$\blacksquare \quad t^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^n (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \rightarrow t^2 \sigma_t^2$$

- $t^2 \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \rightarrow 2t \int_0^t \sigma_s^2 ds - 2t^2 \sigma_t^2$
- $t^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (\sigma_{t_i}^2 - \sigma_{t_{i-1}}^2) \rightarrow -2 \int_0^t s \sigma_s^2 ds + t^2 \sigma_t^2$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Es decir que para cada $t > 0$ fijo: $\int_0^t B(\sigma_s^2) ds \sim N\left(0, 2t \int_0^t \sigma_s^2 ds - 2 \int_0^t s \sigma_s^2 ds\right)$. □

Por supuesto que, en algunos casos, el cálculo de la integral de $It\hat{o}$ puede facilitarse mediante el uso de la fórmula de $It\hat{o}$, que presentamos a continuación. La situación es similar a la que nos planteamos cuando tuvimos que trabajar con la integral de Riemann: si para obtener una integral de Riemann tuviéramos que usar la definición (es decir, calcular la suma de Riemann y su límite cuando la norma de la partición tiende a cero), el concepto mismo de integral no sería muy útil. Sin embargo, el teorema fundamental del cálculo permite reducir el cálculo de integrales al cálculo de primitivas, lo que convierte a la integral en un concepto más fácil de manejar.

Para las integrales estocásticas también existe una regla, llamada fórmula de $It\hat{o}$, para facilitar el cálculo. A continuación enunciaremos la regla en sus dos versiones más sencillas, pero también es válida una fórmula más general:

Teorema. *Fórmulas de $It\hat{o}$, para la integral de $It\hat{o}$ respecto al movimiento Browniano.*

(i) Si $f(x) \in C^2$ (determinística), entonces:

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t f'(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds.$$

(ii) Si $f(t, x) \in C^{1,2}$ (determinística), entonces:

$$f(t, B(t)) - f(0, B(0)) = \int_0^t \left(f_t + \frac{1}{2} f_{xx}\right)(s, B(s)) ds + \int_0^t f_x(s, B(s)) dB(s).$$

Luego, la fórmula de $It\hat{o}$ es para la integral de $It\hat{o}$ lo mismo que la fórmula de integración por partes para la integral de Riemann. Obviamente, cuando la fórmula de $It\hat{o}$ no facilita el cálculo, entonces habrá que recurrir a la definición y calcular la integral de $It\hat{o}$ “a mano”.

2.5.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Presentaremos a continuación algunos resultados relacionados con ecuaciones diferenciales estocásticas y difusiones. Las pruebas de estos resultados pueden encontrarse en [6].

En los títulos de muchos trabajos, como este, aparece la palabra “*difusión*” cuando se presentan resultados relacionados con procesos que son soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, pero: ¿qué es una difusión?. En principio, la definición más general de difusión no exige *a priori* que el proceso sea un proceso de Markov (ver por ejemplo la definición general de difusión en [10], página 110), sin embargo en la mayoría de los casos de interés práctico las difusiones son también procesos de Markov. Definiremos entonces cuándo un proceso de Markov es una difusión.

Sea $\mathbf{X} = \{X(t)\}_t$ un proceso estocástico real en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y

$$\mathcal{G}_{a,b} = \sigma \{X(s) : a \leq s \leq b\}.$$

Supongamos, como mencionamos antes, que \mathbf{X} es un proceso de Markov; *i.e.*:

$$\mathbb{P}(X(t) \in A \mid \mathcal{G}_{0,s}) = \mathbb{P}(X(t) \in A \mid \mathcal{G}_{s,s}) \quad \forall s < t \text{ y } \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Sea $\mathbf{p}(s, x, t, A)$ la función de transiciones de \mathbf{X} , es decir, la función que verifica:

$$\mathbf{p}(s, X(t), t, A) = \mathbb{P}(X(t) \in A \mid \mathcal{G}_{s,s})$$

más ciertas condiciones técnicas de medibilidad.

Definición 32. Difusión. Diremos que \mathbf{X} es una *difusión* si:

1. $\forall \epsilon > 0 : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\{|y-x| \geq \epsilon\}} \mathbf{p}(t, x, t+h, y) dy = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$;
2. existen $\eta > 0$ y a, b funciones medibles tales que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\{|y-x| \geq \eta\}} |y-x| \mathbf{p}(t, x, t+h, y) dy = a(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\{|y-x| \geq \eta\}} |y-x|^2 \mathbf{p}(t, x, t+h, y) dy = b^2(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

En ese caso, se le llama a la función a el *drift* y a b el *coeficiente de difusión* de \mathbf{X} .

Una de las grandes ideas de Itô fue la de construir las trayectorias de una difusión \mathbf{X} directamente a partir de las trayectorias de un movimiento Browniano B , describiendo \mathbf{X} en términos de B mediante una ecuación diferencial estocástica:

Definición 33. Solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica. Sean $\{B(t)\}_t$ un movimiento Browniano y ξ v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_t$ la σ -álgebra generada por ellas (i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B(s)\}_{s \leq t}, \xi)$) y las funciones medibles $a, b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\mathbf{X} = \{X(t)\}_t$ es solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dB(t) \\ X(0) = \xi \end{cases} \quad (2.3)$$

si:

- \mathbf{X} es un proceso estocástico continuo (i.e. las trayectorias de \mathbf{X} son continuas);
- \mathbf{X} es \mathbb{F} -adaptado;
- $\int_0^T |a(s, X(s))| + (b(s, X(s)))^2 ds < \infty$;
- $X(t) = \xi + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s)$.

Teorema 34. Existencia y unicidad de la solución fuerte de una EDE. Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. *condición de Lipschitz:* existe C_T tal que $|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C_T |x - y|$;
2. *crecimiento lineal:* $|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C_T (1 + |x|)$;
3. *condición inicial:* ξ es independiente de $\{B(t)\}_t$ y $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$,

entonces existe una única (en ley) solución fuerte de (2.3).

Teorema 35. Las soluciones de EDEs como (2.3) son difusiones. Más aún:

- $\mathbf{p}(s, x, t, A) = \mathbb{P}(X_s^x(t) \in A)$ siendo $X_s^x(t) = X^x(t) - X^x(s)$ y $X^x(t)$ la solución de:

$$X^x(t) = x + \int_0^t a(u, X^x(u)) du + \int_0^t b(u, X^x(u)) dB(u).$$

- Su drift es $a(t, x)$ y su coeficiente de difusión es $(b(t, x))^2$.

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de EDEs:

Ejemplo 36. Exponencial estocástica. Sea:

$$\begin{cases} d\rho(t) = b(t) \rho(t) dB(t) \\ \rho(0) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Del teorema de *Girsanov* ([6], página 62) se desprende que:

$$\rho_0(t) = \exp \left[- \int_0^t b(s) dB(s) - \int_0^t \frac{b(s)^2}{2} ds \right]$$

verifica que $\rho_0(t) = 1 - \int_0^t \rho_0(s) b(s) dB(s)$, por lo cual $d\rho_0(t) = -b(t) \rho_0(t) dB(t)$ (es casi la solución de (2.4)). Con una pequeña modificación de ρ_0 , la única solución de (2.4) resulta ser:

$$\rho(t) = \exp \left[\int_0^t b(s) dB(s) - \int_0^t \frac{b(s)^2}{2} ds \right].$$

Ejemplo 37. Ecuación diferencial estocástica lineal ([6], página 71).

La *EDE lineal*:

$$(E) \begin{cases} dX(t) = (a(t)X(t) + c(t)) dt + (b(t)X(t) + q(t)) dB(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

tiene una única solución:

$$X(t) = Y(t) \left[x + \int_0^t q(s) (Y(s))^{-1} dB(s) + \int_0^t (c(s) - b(s)q(s)) (Y(s))^{-1} ds \right] \quad \forall t > 0,$$

donde $Y(t)$ es la única solución de la *EDE lineal homogénea*:

$$(H) \begin{cases} dY(t) = a(t)Y(t)dt + b(t)Y(t)dB(t) \\ Y(0) = 1 \end{cases} ,$$

cuya solución es:

$$Y(t) = \exp \left[\int_0^t b(s)dB(s) + \int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s) \right) ds \right].$$

Método de Euler Maruyama para simular aproximaciones a las trayectorias de una EDE.

Para mostrar gráficamente algunos de los resultados obtenidos relacionados con EDEs utilizaremos, por practicidad, un método numérico para aproximar a las trayectorias de las soluciones de dichas ecuaciones. El *método de Euler-Maruyama* es uno de los métodos computacionales más simples para la aproximación de ecuaciones diferenciales estocásticas y es el análogo al método de Euler para la aproximación de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si queremos simular trayectorias de la EDE:

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dB(t) \\ X(0) = x \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, T],$$

el método de Euler-Maruyama consiste en considerar una partición del intervalo $[0, T]$ de tamaño $\frac{T}{N}$:

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq T,$$

y la sucesión $\{X_{t_n}^E\}_{n=0, \dots, N}$ tal que:

$$\begin{cases} X_{t_0}^E = 0 \\ X_{t_{n+1}}^E = X_{t_n}^E + a(t_n, X_{t_n}^E)(t_{n+1} - t_n) + b(t_n, X_{t_n}^E)(B(t_{n+1}) - B(t_n)) \end{cases},$$

siendo $\{B(t)\}_t$ el movimiento Browniano estándar. Como la distribución de $\{X_{t_n}^E\}_{n=0, \dots, K}$ coincide con la de la sucesión:

$$\begin{cases} X_{t_0}^E = 0 \\ X_{t_{n+1}}^E = X_{t_n}^E + a(t_n, X_{t_n}^E)(t_{n+1} - t_n) + b(t_n, X_{t_n}^E) \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_{n+1} \end{cases},$$

donde Z_0, \dots, Z_{N-1} son independientes y con distribución $N(0, 1)$, simulamos N *v.a.* normales estándar independientes y a partir de ello la función:

$$X_t^E = X_{t_n}^E + \frac{X_{t_{n+1}}^E - X_{t_n}^E}{t_{n+1} - t_n} (t - t_n) \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}).$$

Las trayectorias de $\{X_t^E\}_t$ resultan ser entonces una aproximación a las trayectorias de $\{X_t\}_t$.

Existen otros métodos de aproximación y también resultados referentes a la velocidad de convergencia de tales aproximaciones a la única (en ley) solución de dicha ecuación. No profundizaremos en esto ya que, como mencionamos antes, solo lo usaremos para mostrar gráficamente algunos de los resultados relacionados con EDEs.

Capítulo 3

El modelo discreto.

Como mencionamos en la introducción, presentaremos en este capítulo una versión centralizada del protocolo CSMA/CA sobre una red WLAN formada por N nodos dispuestos alrededor de un AP y tal que las interferencias entre los nodos (dominios de contención de la red) puedan ser modeladas mediante un grafo aleatorio $G_N = (V_N, A_N)$. Supondremos entonces que en cada momento $t = 0, 1, \dots$ “alguien” (por ejemplo, el AP) determinará mediante sorteo qué nodo podrá comunicar y bloqueará a sus vecinos.

Aclaremos que el grafo estará fijo. Puesto que en principio los dispositivos podrían estar en movimiento, la cantidad de vecinos de un nodo cualquiera podría cambiar con el tiempo. Por simplicidad nosotros supondremos que esto no ocurre.

Modelaremos entonces el protocolo CSMA/CA sobre esta red mediante un algoritmo de exploración de dicho grafo, que construirá secuencialmente un subconjunto independiente. A partir de este algoritmo, y bajo cierta hipótesis de homogeneidad del grafo, podremos construir una cadena de Markov de tiempo discreto y luego un proceso de Markov con saltos puros, al que aproximaremos por la solución de una ecuación diferencial determinística. Luego, a partir de esta aproximación, podremos estimar la *jamming constant* del grafo (o de la red).

Presentamos a continuación dicho algoritmo de exploración del grafo: supongamos que en cada tiempo $n = 1, 2, \dots$ alguien sortea uniformemente qué nodo podrá transmitir dentro del conjunto de nodos que no han sido explorados previamente (inicialmente el conjunto de nodos explorados es vacío), se bloquea a sus vecinos al mandarlos al conjunto de los nodos explorados y se itera lo anterior hasta que todo el grafo haya sido explorado. Sea $V_N = \{1, 2, \dots, N\}$. Describimos este algoritmo mediante el siguiente pseudocódigo:

Sean $A_n \subseteq V_N$ el conjunto de *nodos activos* construido hasta el paso n y $B_n \subseteq V_N$ el conjunto formado por todos los vecinos de estos (es decir, todos los nodos que fueron *bloqueados* hasta el paso n). $A_0 = \emptyset$, $B_0 = \emptyset$. $A_n \cup B_n$ es el conjunto formado por los nodos *explorados* hasta el paso n .

While: $|A_n \cup B_n| < N$

sortear: $i_n \in \{1, \dots, N\} \setminus (A_n \cup B_n)$; consideraremos que este sorteo se realiza uniformemente entre los nodos no explorados.

actualizar: $A_{n+1} = A_n \cup \{i_n\}$; $B_{n+1} = B_n \cup \mathcal{N}_{i_n}$, siendo \mathcal{N}_{i_n} los vecinos no explorados de i_n ; $n = n + 1$.

Observación. Observar que A_n resulta ser un subconjunto independiente de V_N , por construcción, y que $|A_n|$ aumenta en uno por cada paso del algoritmo (*i.e.* $|A_{n+1}| - |A_n| = 1$ si $|A_n \cup B_n| < N$).

Este algoritmo de exploración puede usarse en general para aproximar la evolución de algunos de los procesos conocidos como RSA (*Random Sequential Adsorption*). En general, un RSA es un proceso en el que partículas “duras” (moléculas, proteínas, autos, paquetes, etcétera) son agregadas secuencialmente en un volumen d -dimensional, eligiendo posiciones de manera aleatoria y con la condición de que la partícula entrante no puede solapar a las partículas que llegaron antes. El proceso termina cuando no quedan lugares disponibles para agregar una nueva partícula; a este estado se le suele llamar *jamming limit* y la proporción de partículas presentes en este estado se denomina *jamming constant* [23], que en nuestro modelo coincide con la probabilidad de transmisión exitosa. La versión 1-dimensional de este modelo, conocido como *car parking problem* o *sequential interval problem*, fue introducido por primera vez por Alfréd Rényi en 1958. En [24] se presenta una revisión bibliográfica de las distintas aplicaciones relacionadas con RSA y en [23] se presenta una ley de los grandes números para dichos procesos.

Sea $Z_n = |A_n \cup B_n|$, luego:

$$\boxed{Z_{n+1} = Z_n + 1 + \xi_n}, \quad (3.1)$$

siendo $\xi_n = |\mathcal{N}_{i_n}|$ la cantidad de vecinos *no explorados* de i_n . Interesa conocer $T_N^* \in \mathbb{N}$, el tiempo en que $Z_{T_N^*} = N$, pues T_N^* resulta ser la cantidad de pasos del algoritmo, *i.e.* la cantidad de vértices que podrán comunicar simultáneamente en virtud de la observación anterior. El problema que se presenta es que T_N^* depende fuertemente de la estructura del grafo (*i.e.* de las interferencias entre los nodos). Trabajaremos entonces sobre la siguiente suposición de homogeneidad en las interferencias:

Suposición. *Asumiremos que ξ_n solo depende de la cantidad de vértices del grafo que han sido explorados, i.e. que solo depende de Z_n .*

Esta hipótesis se cumple por ejemplo en el caso de un grafo de Erdős–Rényi. Luego, se tiene que $\{Z_n\}_n$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, creciente, homogénea, con estado absorbente N y con probabilidades de transición:

$$p_{x,y} = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{n+1} = y \mid Z_n = x) = \mathbb{P}(\xi_n = y - x - 1 \mid Z_n = x) & \text{si } y \geq x + 1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En la sección 3.1 “continuizaremos” el tiempo de $\{Z_n\}_n$ y la transformaremos en un proceso de Markov de saltos puros, estudiaremos el límite fluido de dicho proceso y veremos que una de las reescalas sugeridas en la definición de límite fluido converge en la topología de Skorohod a la única solución de una ecuación diferencial determinística. Probaremos también un teorema central del límite funcional y veremos que hay convergencia a una difusión.

Luego, en la sección 3.2 aplicaremos los resultados obtenidos para estimar la *jamming constant*. Probaremos también que se cumple una ley de los grandes números y un teorema central del límite para la *jamming constant*, lo que nos permitirá construir intervalos de confianza para dicho parámetro.

Finalmente, en la sección 3.3 mostraremos los resultados obtenidos en el caso de un grafo de Erdős–Rényi.

3.1. Límite fluido y aproximación por difusión.

3.1.1. Límite fluido.

Queremos conocer el momento T_N^* en el que la cadena llega al estado absorbente N . Por esta razón estamos interesados en obtener un resultado del tipo límite fluido para poder estimar, a partir de esta aproximación (que resultará ser continua) de la cadena $\{Z_n\}_{0 \leq n \leq N}$, el tiempo T_N^* .

Para poder aplicar los resultados presentados previamente referentes al límite fluido primero tenemos que “continuizar” el tiempo de la cadena $\{Z_n\}_{0 \leq n \leq N}$. Definimos entonces el proceso $\{Z_t\}_{t \in [0, N]}$ tal que $Z_t = Z_{[t]}$. $\{Z_t\}_{t \in [0, N]}$ es un proceso de Markov de saltos puros. Comenzaremos probando que $\{Z_t\}_{t \in [0, N]}$ es una semimartingala respecto a la filtración generada por dicho proceso.

Definición 38. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $G_{1,n} = A_n \cup B_n$, el conjunto de vértices explorados hasta el tiempo n , $G_{2,n} = \{1, \dots, N\} \setminus G_{1,n}$, el conjunto de los vértices no explorados y

$$p_N(k, x, n) = \mathbb{P}(i \in G_{2,n} \text{ tiene } k \text{ vecinos en } G_{2,n} \mid Z_n = x).$$

Observar que $p_N(k, x, n) = p_N(k, x)$ ya que $\{Z_n\}_{0 \leq n \leq N}$ es homogénea. Sean además:

$$\gamma_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1-x} k p_N(k, x) \text{ y } \Psi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1-x} (k - \gamma_N(x))^2 p_N(k, x)$$

la media y varianza del número ξ de vecinos no explorados de un nodo no explorado, dado que ya se han recorrido x nodos del grafo.

Lema 39. El proceso $\{Z_t\}_{t \in [0, N]}$ es una semimartingala, más aún, puede descomponerse como:

$$Z_t = A_t + M_t,$$

siendo $A_t = \int_0^{[t]} (1 + \gamma_N(Z_s)) ds$ si $t \leq T_N^*$, $A_t = A_{T_N^*}$ si $t \geq T_N^*$, $\{M_t\}_{t \in [0, N]}$ una $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, N]}$ martingala y $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k - Z_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})$.

Observar que como $\{Z_n\}_n$ es una cadena de Markov y $\{Z_s\}_s$ es constante entre los tiempos de salto $k = 1, 2, \dots$, entonces:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k + 1 | Z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (1 + \gamma_N(Z_s)) ds = \int_0^n (1 + \gamma_N(Z_s)) ds. \end{aligned}$$

Más aún, si T_N^* es el tiempo en el que $\{Z_n\}_n$ llega al estado absorbente N , entonces $\forall n \geq T_N^*$:

$$A_n = A_{T_N^*},$$

por construcción. Podemos extender entonces la definición de $\{A_n\}_n$ a tiempo continuo de la siguiente manera:

$$A_t = \begin{cases} \int_0^{[t]} (1 + \gamma_N(Z_s)) ds = \sum_{k=1}^{[t]} (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) & \text{si } t \leq T_N^*, \\ A_{T_N^*} & \text{si } t > T_N^*. \end{cases}$$

Sea $M_t = Z_t - A_t$. Veremos a continuación que $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ es una $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -martingala.

Puesto que $M_t = M_n$ si $t \in [n, n+1)$ ya que los procesos $\{Z_t\}_t$ y $\{A_t\}_t$ son constantes entre los tiempos de salto $k = 1, 2, \dots$, bastará con probar que $\{M_n\}_{n \leq N}$ es una $\{\mathcal{F}_n\}_{n \leq N}$ -martingala.

Claramente $\{M_n\}_n$ es $\{\mathcal{F}_n\}_n$ -adaptada y $\mathbb{E}|M_n| < \infty$, veamos que $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = 0$ para todo n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E} \left[Z_{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Z_k - Z_{k-1} | Z_{k-1}) | \mathcal{F}_n \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[Z_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k - Z_{k-1} | Z_{k-1}) | \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}[Z_{n+1} - Z_n - \mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_n | Z_n) | \mathcal{F}_n] = 0. \end{aligned}$$

□

Aproximaremos las trayectorias de $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ por la solución de una ecuación diferencial determinística. Para eso consideraremos una de las reescalas de Z_t propuesta en la definición de límite fluido, y para que el estado inicial de la cadena sea N , con $N \rightarrow \infty$, consideraremos la cadena de Markov $\{N - Z_t\}_t$.

Definición. Sea $Z_t^N = \frac{1}{N} (N - Z_{tN}) = 1 - \frac{Z_{tN}}{N}$ si $t \in [0, 1]$.

Observación. $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ es entonces un proceso de Markov de saltos puros (càdlàg) sobre el espacio de probabilidad filtrado $(D, \mathcal{D}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,1]})$ que definimos en el capítulo anterior, siendo \mathbb{F} la σ -álgebra generada por $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$. Además este proceso verifica que es decreciente, $Z_0^N = 1$ y $Z_t^N \in [0, 1] \forall t \in [0, 1]$. Observar que los saltos de $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ ocurren en una escala de tiempo muy rápida ya que hemos escalado el tiempo como tN , el multiplicar por $\frac{1}{N}$ compensa esa aceleración del tiempo.

Teorema 40. Límite fluido para $\{Z_t\}_t$. Si existe una función real $\gamma \geq 0$ Lipschitz de constante $C_L > 0$ tal que $\gamma_N(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{N}\right) + \delta_N$ con $\delta_N \rightarrow 0$, entonces para todo $t \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} |Z_s^N - z(s) \vee 0| \right] \leq \left(\delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} t} \right) e^{C_L t},$$

siendo $\bar{\Psi}_N = \sup_x \Psi_N(x)$, $\bar{\gamma}_N = \sup_x \gamma_N(x)$ y z la (única) solución de la siguiente ecuación diferencial determinística:

$$\begin{cases} z = -(1 + \gamma(z)) \\ z(0) = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Observación. $\gamma_N \geq 0$, por lo cual es razonable pedir que $\gamma \geq 0$. Intuitivamente, el enunciado anterior establece que si tomamos N suficientemente grande, entonces la tasa de decrecimiento de Z_t^N está dada en cada instante por el nodo que es sorteado en ese instante y sus vecinos no explorados.

Corolario 41. Si $\frac{\bar{\Psi}_N}{N} \rightarrow 0$ y $\frac{\bar{\gamma}_N}{N} \rightarrow 0$, entonces $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ converge en la topología de Skorohod (J_1) a $\{z(t) \vee 0\}_{t \in [0,1]}$, siendo z la solución de la ecuación diferencial determinística (3.2).

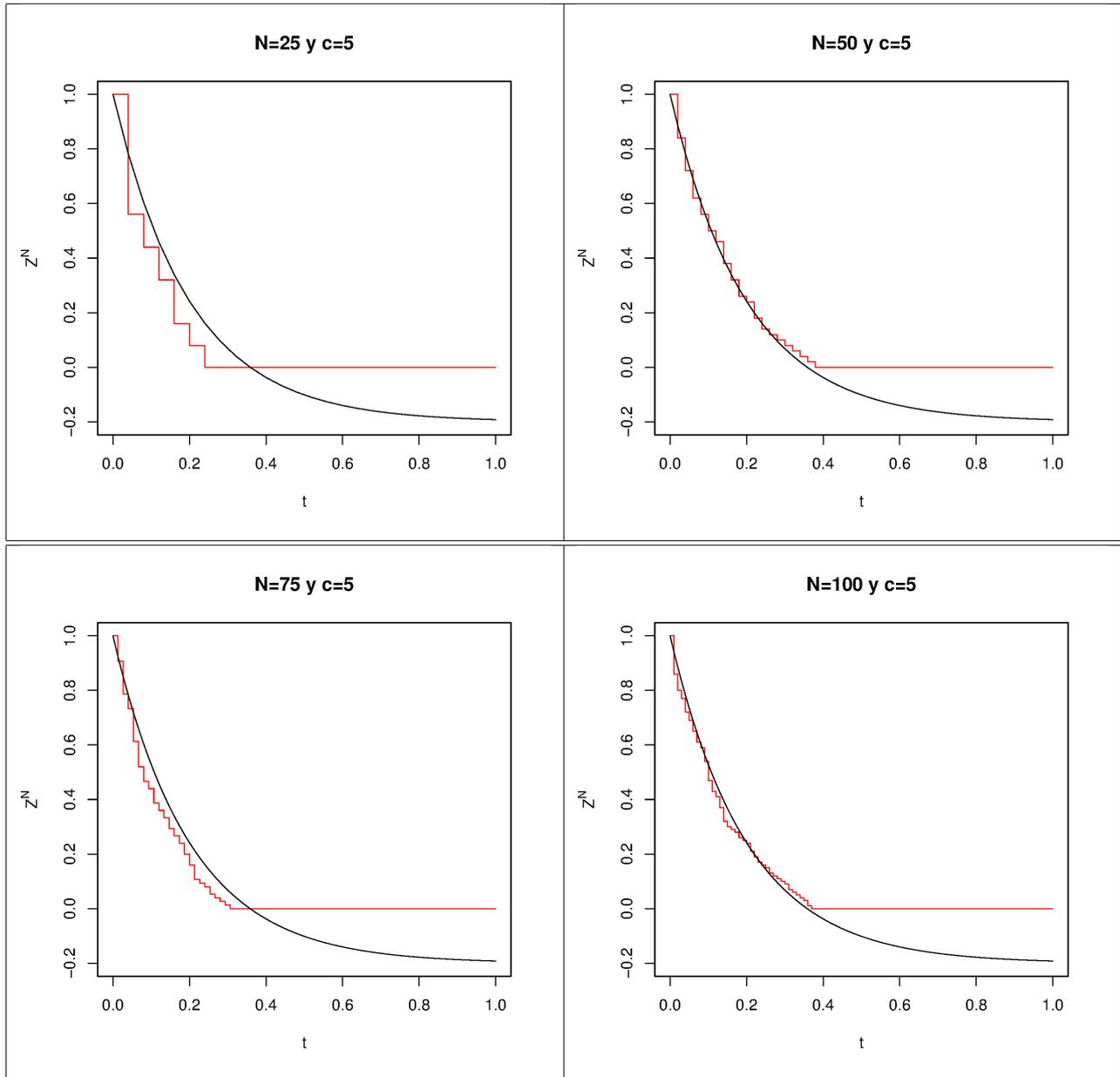


Figura 3.1: Aproximación de una trayectoria de $\{Z_t^N\}_t$ a $\{z(t)\}_t$ en un grafo de Erdős–Rényi $G(N, p_N)$ con $p_N = \frac{c}{N}$, a medida que aumenta el tamaño del grafo.

Demostración. Observar que para todo $t_0 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t_0]} |Z_s^N - z(s) \vee 0| > \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t_0]} |Z_s^N - z(s) \vee 0| \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\delta_N t_0 + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} t_0} \right) e^{C_L t_0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $N \rightarrow \infty$ ya que $\delta_N \rightarrow 0$, $\frac{\bar{\Psi}_N}{N} \rightarrow 0$ y $\frac{\bar{\gamma}_N}{N} \rightarrow 0$ por hipótesis.

Luego, en virtud de la proposición 3, tenemos que $\{Z_s^N\}_s$ converge a $z(s) \vee 0$ en la topología de Skorohod. Estrictamente hablando, $\{Z_s^N\}_s$ converge a $z(s) \vee 0$ en la topología que definimos como J_1 , es decir que la medida de probabilidad inducida por $\{Z_s^N\}_{s \in [0, 1]}$ sobre $(D([0, T], \mathbb{R}), d_T^0)$ converge a la medida de Dirac en $z(\cdot)$. \square

En la figura **Fig. 3.1** se muestra la convergencia de una trayectoria de $\{Z_t^N\}_{t \in [0, 1]}$ a $\{z(t) \vee 0\}_{t \in [0, 1]}$ a medida que aumenta N en un grafo de Erdős–Rényi. Observar que la aproximación es buena incluso cuando N no es grande.

Demostración. (Del teorema 40) Sea $T^* = \inf \{s \in [0, 1] : z(s) = 0\} \wedge 1$. Consideremos primero el caso en el que $t \leq T^*$.

Paso I. ¿Cómo se obtiene la ecuación diferencial (3.2)?

En virtud del lema 39 tenemos que Z_t^N puede descomponerse como:

$$\begin{aligned} Z_t^N &= 1 - \frac{1}{N} Z_{tN} = 1 - \frac{1}{N} \left[\int_0^{[tN]} (1 + \gamma_N(Z_s)) ds \right] - \frac{M_{tN}}{N} \\ &= 1 - \int_0^{\frac{[tN]}{N}} (1 + \gamma_N(Z_{uN})) du - \frac{M_{tN}}{N} \\ &= 1 - \int_0^t (1 + \gamma_N(Z_{uN})) du + R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{N}, \end{aligned}$$

siendo:

$$R_{N,t} = \int_{\frac{[tN]}{N}}^t (1 + \gamma_N(Z_{uN})) du \leq \sup_{u \in [0, 1]} (1 + \gamma_N(Z_{uN})) \left| t - \frac{[tN]}{N} \right| \leq (1 + \bar{\gamma}_N) \frac{tN - [tN]}{N} \leq \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Z_t^N &= 1 - \int_0^t \left(1 + \gamma \left(1 - \frac{Z_u^N}{N} \right) + \delta_N \right) du + R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{N} \\
&= 1 - \int_0^t \left(1 + \gamma \left(Z_u^N \right) + \delta_N \right) du + R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{N}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego, si $Z_t^N \rightarrow z(t)$, $R_{N,t} \rightarrow 0$ y $\frac{M_{tN}}{N} \rightarrow 0$ (en alguna topología, que definiremos) cuando $N \rightarrow \infty$, $z(t)$ debería de verificar la siguiente ecuación integral:

$$z(t) = 1 - \int_0^t (1 + \gamma(z(s))) ds$$

y por lo tanto es solución de (3.2).

Paso II. Veamos que si $z(t)$ es solución de (3.2), entonces:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} |Z_s^N - z(s)| \right] \leq \left[\delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right) \right] e^{C_L t}.$$

$$\begin{aligned}
Z_s^N - z(s) &= 1 - \int_0^s \left(1 + \gamma \left(Z_u^N \right) + \delta_N \right) du + R_{N,s} - \frac{M_{sN}}{N} - 1 + \int_0^s (1 + \gamma(z(u))) du \\
&= \int_0^s \left(\gamma(z(u)) - \gamma \left(Z_u^N \right) \right) du - \delta_N s + R_{N,s} - \frac{M_{sN}}{N}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sea $\varepsilon_N(t) = \sup_{s \in [0,t]} |Z_s^N - z(s)|$, entonces:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N(t) &\leq \sup_{s \in [0,t]} \left[\int_0^s |\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)| du \right] + \sup_{s \in [0,t]} \delta_N s + \sup_{s \in [0,t]} R_{N,s} + \sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \\
&\leq \int_0^t \sup_{u \in [0,s]} |\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)| ds + \delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + \sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \\
&\leq C_L \int_0^t \varepsilon_N(s) ds + \delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + \sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N}
\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}(\varepsilon_N(t)) \leq C_L \int_0^t \mathbb{E}(\varepsilon_N(s)) ds + \delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right].$$

Recordemos que el lema de Grönwall ([6], pág. 67) establece *que si $k > 0$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones medibles en $[0, T]$ tales que:*

$$g(t) \leq h(t) + k \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \geq 0,$$

entonces $g(t) \leq h(t) + k \int_0^t h(s) e^{k(t-s)} ds$. Si además h es no decreciente, entonces $g(t) \leq h(t) e^{kt}$.

Luego, tomando $g(t) = \mathbb{E}(\varepsilon_N(t))$, $h(t) = \delta_N t + \frac{1+\bar{\gamma}_N}{N} + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right]$ y $k = C_L$, obtenemos que:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_N(t)) \leq \left[\delta_N t + \frac{1+\bar{\gamma}_N}{N} + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] \right] e^{C_L t}.$$

Paso III. Veamos que $\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] \leq 2\sqrt{\frac{\Psi_N}{N} t}$.

La desigualdad de Jensen implica que $|\mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$. Si aplicamos esto a $X = \sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N}$ y usamos la desigualdad de Doob (ya que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -MG) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} M_{sN}^2 \right]} \leq \sqrt{\frac{4}{N^2} \mathbb{E} [M_{tN}^2]}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora tendremos que acotar $\sqrt{\frac{4}{N^2} \mathbb{E} [M_{tN}^2]}$ y para eso calcularemos $\mathbb{E}(M_t^2)$ a partir del *increasing process* de $\{M_t\}_t$. Volvamos al proceso discreto:

$$M_n = Z_n + \sum_{k=1}^n (1 + \gamma_N(Z_{k-1})). \quad (3.6)$$

Sea $\{I_n\}_{n \in \{0,1,\dots,N\}}$ tal que $I_0 = 0$ e $I_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1})$. $\{I_n\}_{n \in \{0,1,\dots,N\}}$ es el *increasing process* de $\{M_n\}_{n \in \{0,1,\dots,N\}}$ ya que:

$$\mathbb{E}(M_n^2 - I_n - M_{n-1}^2 + I_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 - \mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$$

para todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ (i.e. $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(I_n)$).

Calcularemos a continuación $\mathbb{E}(I_n)$ para todo n . Para eso, analizaremos los términos $\mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1})$ de la definición de $\{I_n\}_n$:

$$M_n^2 = Z_n^2 - 2Z_n \sum_{k=1}^n (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) + \left(\sum_{k=1}^n (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) \right)^2 \quad (3.7)$$

y

$$M_{n-1}^2 = Z_{n-1}^2 - 2Z_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} (1 + \gamma_N(Z_{k-1})) \right)^2,$$

entonces:

$$\mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n^2 - Z_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) + (1 + \gamma_N(Z_{n-1}))^2 - 2(1 + \gamma_N(Z_{n-1})) \mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1}). \quad (3.8)$$

Recordemos que $\gamma_N(x)$ y $\Psi_N(x)$ son respectivamente la media y varianza de la cantidad ξ de vecinos no explorados de un nodo no explorado, dado que han sido explorados x nodos del grafo. Luego,

$$\begin{aligned} \Psi_N(Z_{n-1}) &= \mathbb{E}(\xi_n^2 | Z_{n-1}) - \gamma_N^2(Z_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}((Z_n - Z_{n-1} - 1)^2 | Z_{n-1}) - \gamma_N^2(Z_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(Z_n^2 | Z_{n-1}) + Z_{n-1}^2 - 2Z_{n-1} \mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1}) - (\gamma_N(Z_{n-1}) + 1)^2. \end{aligned}$$

Si sustituímos $\mathbb{E}(Z_n^2 | Z_{n-1})$ en la ecuación (3.8) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= \Psi_N(Z_{n-1}) + 2(1 + \gamma_N(Z_{n-1}))^2 - 2Z_{n-1}^2 \\ &\quad + 2\mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1}) [Z_{n-1} - (1 + \gamma_N(Z_{n-1}))], \end{aligned}$$

y como $\mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n - Z_{n-1} + Z_{n-1} | Z_{n-1}) = (1 + \gamma_N(Z_{n-1})) + Z_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= \Psi_N(Z_{n-1}) + 2(1 + \gamma_N(Z_{n-1}))^2 - 2Z_{n-1}^2 + 2Z_{n-1}^2 - 2(1 + \gamma_N(Z_{n-1}))^2 \\ &= \Psi_N(Z_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Hemos probado entonces que:

$$I_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \Psi_N(Z_{k-1}) = \int_0^n \Psi(Z_s) ds. \quad (3.10)$$

Nuevamente, podemos extender $\{I_n\}_n$ al caso continuo $\{I_t\}_t$ de la siguiente manera (como $\{M_t\}_t$ es constante entre los tiempos de salto $k = 1, 2, \dots$, entonces $\{M_t^2\}_t$ también lo es):

$$I_t = \int_0^{[t]} \Psi(Z_s) ds.$$

Finalmente:

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(I_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^{[t]} \Psi(Z_s) ds\right) = \int_0^{[t]} \mathbb{E}(\Psi_N(Z_s)) ds, \quad (3.11)$$

y concluimos la demostración del teorema para el caso en que $t \leq T^*$ observando que:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] \leq \sqrt{\frac{4}{N^2} \mathbb{E}(M_{tN}^2)} \leq \sqrt{\frac{4}{N^2} \bar{\Psi}_N[tN]} = 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N[tN]}{N}} \leq 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} t}.$$

Supongamos ahora que $t > T^*$. Como $\{Z_s^N\}_s$ es decreciente, se cumple que para todo $t > T^*$:

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, t]} |Z_s^N - z(s) \vee 0| &= \sup \left\{ \sup_{s \in [0, T^*]} |Z_s^N - z(s)|, \sup_{s \in [T^*, t]} |Z_s^N| \right\} \\ &= \sup \left\{ \sup_{s \in [0, T^*]} |Z_s^N - z(s)|, |Z_{T^*}^N| \right\} \\ &= \sup_{s \in [0, T^*]} |Z_s^N - z(s)|. \end{aligned}$$

Luego, en virtud de lo demostrado para el caso en que $t \leq T^*$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |Z_s^N - z(s) \vee 0| \right] &= \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T^*]} |Z_s^N - z(s)| \right] \\ &\leq \left(\delta_N T^* + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} T^*} \right) e^{C_L T^*} \\ &\leq \left(\delta_N t + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} t} \right) e^{C_L t}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

3.1.2. Aproximación por difusión.

Si pensamos en el límite fluido como una *ley de los grandes números funcional*, el siguiente teorema corresponde a un *teorema central del límite funcional*, puesto que trata la convergencia del proceso $\{\sqrt{N}(Z_t^N - z(t))\}_t$:

Teorema 42. Difusión para $\{Z_t\}_t$. *Supongamos además que existe $\Psi > 0$ continua en \mathbb{R}^+ tal que $\Psi_N(x) = \Psi\left(1 - \frac{x}{N}\right) + \epsilon_N$ con $\epsilon_N \rightarrow 0$, que γ es lineal (i.e. $\gamma_N(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{N}\right) + \delta_N$ con $\gamma(x) = ax + b$) y que $\sqrt{N}\delta_N \rightarrow 0$. Entonces:*

$$X_t^N = \sqrt{N}(Z_t^N - z(t)) \rightarrow X_t,$$

en la topología de Skorohod (J_1), siendo $X = \{X_t\}_t$ la única (en ley) solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t dt - \sqrt{\beta'(t)} dB(t) \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, T^*], \quad (3.12)$$

donde:

- $\{B(t)\}_t$ es el movimiento Browniano estándar;
- $\beta(t) = \int_0^t \Psi(z(s)) ds$;
- z es la solución de (3.2)
- $T^* = \inf \{s \in [0, 1] : z(s) = 0\} \wedge 1$

Parece ser razonable pedir que $\gamma_N(x)$ pueda ser aproximable por una función lineal en los grafos en los que el número medio de vecinos de un vértice sea proporcional al tamaño del grafo, como lo es en el caso de un grafo de Erdős–Rényi.

Por otro lado, en [22] se debilita esta hipótesis de linealidad de la función γ y se prueba (utilizando otras técnicas) el mismo resultado, agregando ciertas condiciones a la función $p_N(k, x)$.

Demostración. (Del teorema 42) Como hemos mencionado antes, estudiaremos el “candidato” a límite de $\{X^N\}_N$, veremos que $\{X^N\}_N$ verifica la condición de *tightness* y usaremos el teorema 9.

Paso I. Asumamos primero que existe $\lim_{N \rightarrow \infty} X^N$ y tratemos de ver quién es $X = \lim_{N \rightarrow \infty} X^N$.

En virtud de la ecuación (3.3) tenemos que:

$$\begin{aligned}
X_t^N &= \sqrt{N} (Z_t^N - z(t)) \\
&= \sqrt{N} \int_0^t (\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)) du - \sqrt{N} \delta_{Nt} + \sqrt{N} R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} \\
&= \sqrt{N} \int_0^t a(z(u) - Z_u^N) du - \sqrt{N} \delta_{Nt} + \sqrt{N} R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Luego,

$$X_t^N = -a \int_0^t X_u^N du - \sqrt{N} \delta_{Nt} + \sqrt{N} R_{N,t} - \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} \tag{3.14}$$

y

$$\begin{aligned}
X_t &= \lim_{N \rightarrow \infty} -a \int_0^t X_u^N du - \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \delta_{Nt} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} R_{N,t} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} \\
&= -a \int_0^t X_u du + \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} R_{N,t} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}},
\end{aligned}$$

pues $\sqrt{N} \delta_{Nt} \rightarrow 0$. Para el segundo término tenemos que:

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} R_{N,t} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + \bar{\gamma}}{\sqrt{N}} = 0,$$

si $\bar{\gamma} = \sup_{x \in [0,1]} \gamma(x)$. Entonces:

$$X_t = -a \int_0^t X_u du - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}.$$

Calcularemos ahora el $\lim_N \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}$. Para eso consideraremos el teorema 22. Sean $Y_N(t) = \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}$ e $I_N(t) = \frac{I_{tN}}{N}$, siendo $\{I_t\}_t$ el *increasing process* de $\{M_t\}_t$ calculado en la ecuación (3.10), luego:

$$I_N(t) = \frac{1}{N} \int_0^{[tN]} \Psi_N(Z_s) ds = \int_0^{\frac{[tN]}{N}} \Psi_N(Z_{uN}) du.$$

Veamos que $\{Y_N(t)\}_t$ e $\{I_N(t)\}_t$ verifican las condiciones 1-7 del teorema 22:

1. $Y_N(0) = \frac{M_0}{\sqrt{N}} = 0$ para todo N .
2. $\{M_t\}_t$ es una martingala por lo cual $\{Y_N(t)\}_t$ también lo es.
3. $\{I_N(t)\}_t$ es no decreciente ya que $\Psi_N \geq 0$.
4. $(Y_N(t))^2 - I_N(t) = \frac{(M_{tN})^2}{N} - \frac{I_{tN}}{N}$ es una martingala ya que $\{M_t^2 - I_t\}_t$ lo es.
- 5.

$$\begin{aligned} \lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} |I_N(t) - I_N(t^-)| \right] &\leq \lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} \int_{\frac{[t^-N]}{N}}^{\frac{[tN]}{N}} \Psi_N(Z_{uN}) du \right] \\ &= \lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} \int_{\frac{[t^-N]}{N}}^{\frac{[tN]}{N}} (\Psi(Z_u^N) + |\epsilon_N|) du \right] \\ &= \sup_{t \leq 1} \int_{t^-}^t \Psi(z(u)) du \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues Ψ y z son funciones continuas.

6.

$$\begin{aligned}
\lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} |Y_N(t) - Y_N(t^-)| \right] &= \lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} \left| \frac{M_{tN}}{N} - \frac{M_{t^-N}}{N} \right| \right] \\
&= \lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} \left| - (Z_t^N - Z_{t^-}^N) - \int_{\frac{[t^-N]}{N}}^{\frac{[tN]}{N}} \gamma_N(Z_{uN}) du \right| \right] \\
&\leq \lim_N \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} + \sup_{t \leq 1} \int_{\frac{[t^-N]}{N}}^{\frac{[tN]}{N}} (\gamma(Z_u^N) + |\delta_N|) du \right] \\
&= \sup_{t \leq 1} \int_{t^-}^t \gamma(z(u)) du \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues γ y z son funciones continuas.

7. $I_N(t) = \int_0^{\frac{[tN]}{N}} \Psi_N(Z_{uN}) du = \int_0^{\frac{[tN]}{N}} (\Psi(Z_u^N) + \epsilon_N) du$ converge en distribución a $\int_0^t \Psi(z(u)) du$ en virtud del corolario 41, pues Ψ es continua.

Si $\beta(t) = \int_0^t \Psi(z(u)) du$, obtenemos entonces que $\frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}$ converge en distribución a $B(\beta(t))$. Luego, si la sucesión de procesos estocásticos $\{X^N\}_N$ converge a X , $X = \{X_t\}_t$ tiene que verificar la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds - B(\beta(t)).$$

Más adelante, en la sección 3.3, mostraremos gráficamente la convergencia de $\{X_t^N\}_t$ a la solución de la ecuación (3.12).

Paso II. Veamos que la ecuación diferencial anterior tiene solución y es única.

En virtud de la proposición 29, tenemos las siguientes igualdades en distribución:

$$B(\beta(t)) = B \left(\int_0^t \Psi(z(s)) ds \right) = \int_0^t \sqrt{\Psi(z(s))} dB(s) = \int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s),$$

por lo cual $\{X_t\}_t$ debe ser solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds - \int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s),$$

que es equivalente a la ecuación (3.12).

Esta EDE lineal tiene una única solución (en ley), que calcularemos. Aplicando la solución del ejemplo **Ej. 37** con $a(t) = -a$, $c(t) = 0$, $b(t) = 0$, $q(t) = -\sqrt{\beta'(t)}$ y $x = 0$, obtenemos:

$$X_t = e^{-at} \int_0^t -\sqrt{\beta'(s)} e^{as} dB(s) =_{\mathbb{D}} N \left(0, e^{-2at} \int_0^t \beta'(s) e^{2as} ds \right). \quad (3.15)$$

Luego, $\{X_t\}_t$ es un proceso estocástico con la misma distribución que el movimiento Browniano reescalado:

$$\left\{ B(\sigma_t^2) \right\}_t, \text{ siendo } \sigma_t^2 = e^{-2at} \int_0^t \beta'(s) e^{2as} ds.$$

Paso III. Veamos que la sucesión de procesos $\{X^N\}_N$ es convergente.

Probaremos que la sucesión de procesos estocásticos $\{X^N\}_N$ es *tight*. Luego, en virtud del teorema de Prohorov (teorema 5) existe una subsucesión de $\{X^N\}_N$ que converge en la topología de Skorohod (J_1).

En este caso, esta condición es suficiente para probar que $\{X^N\}_N$ es convergente: si $X = \{X_t\}_t$ es cualquier punto límite de esta sucesión (*i.e.* si existe $\{X^{N_k}\}_{N_k} \subseteq \{X^N\}_N$ tal que $\{X^{N_k}\}_{N_k}$ converge a X en la topología de Skorohod) entonces en virtud del paso I sabemos que X tiene que verificar (3.12). Como además vimos en el paso II que la solución de (3.12) es única, entonces $\{X^N\}_N$ tiene un único punto límite; *i.e.* $\{X^N\}_N$ converge en la topología de Skorohod a la única solución de (3.12).

Para probar que $\{X^N\}_N$ es *tight*, en virtud de la observación **Obs. 8**, tendremos que probar que $\forall \varepsilon > 0$ se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Existe $a > 0$ tal que $\mathbb{P}^N(|X_0| > a) = \mathbb{P}\left(|X_0^N| > a\right) \leq \varepsilon$ para todo N .

(ii) Para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si N es suficientemente grande:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s, t \leq 1, |t-s| \leq \delta} \left\{ |X_t^N - X_s^N| \right\} \geq \eta \right) \leq \varepsilon.$$

Puesto que $X_0^N = \sqrt{N} (Z_0^N - z(0)) = 0$ para todo N , la condición (i) se cumple trivialmente.

Para la condición (ii), en virtud de la ecuación (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\omega_{X^N}(\delta) &= \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left\{ |X_t^N - X_s^N| \right\} \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left\{ a \int_s^t |X_u^N| du \right\} + \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \sqrt{N} \delta_N (t-s) \\
&\quad + \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \sqrt{N} |R_{N,t} - R_{N,s}| + \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left\{ \left| \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} - \frac{M_{sN}}{\sqrt{N}} \right| \right\} \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left\{ a \int_s^t |X_u^N| du \right\} + \sqrt{N} \delta_N \delta + 2\sqrt{N} \frac{1}{N} (1 + \bar{\gamma}_N) + \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left\{ \left| \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} - \frac{M_{sN}}{\sqrt{N}} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Sea $\kappa_N(\delta) = \sqrt{N} \delta_N \delta + \frac{2}{\sqrt{N}} (1 + \bar{\gamma}_N)$. Si $\eta > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\omega_{X^N}(\delta) \geq \eta) &\leq \mathbb{P} \left(a \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \int_s^t |X_u^N| du \geq \frac{\eta}{3} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(\kappa_N(\delta) \geq \frac{\eta}{3} \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} \left| \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}} - \frac{M_{sN}}{\sqrt{N}} \right| \geq \frac{\eta}{3} \right) \\
&= \textcircled{a} + \textcircled{b} + \textcircled{c}.
\end{aligned}$$

Para \textcircled{b} : si $\delta = \delta_{\mathbf{b}} < \infty$, entonces $\lim_N \sqrt{N} \delta_N \delta = 0$ y $\lim_N \frac{2}{\sqrt{N}} (1 + \bar{\gamma}_N) = \lim_N \frac{2}{\sqrt{N}} (1 + \bar{\gamma}) = 0$. Luego, existe $N_{\mathbf{b}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathbb{P} \left(\kappa_N(\delta) \geq \frac{\eta}{3} \right) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } N \geq N_{\mathbf{b}}.$$

Para \textcircled{c} : ya probamos que si $Y_t^N = \frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}$ entonces para todo $c > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |Y_t^N - B(\beta(t))| > c \right) \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty,$$

y puesto que las trayectorias de $\{B(\beta(t))\}_{t \in [0,1]}$ son continuas casi seguramente, *i.e.* uniformemente continuas en $[0,1]$, tenemos que existen $N_{\mathbf{c}}$ y $\delta_{\mathbf{c}} = \delta_{\mathbf{c}}(N_{\mathbf{c}}, \frac{\eta}{3})$ (de la continuidad uniforme de las trayectorias de $\{B(\beta(t))\}_{t \in [0,1]}$) tales que si $N \geq N_{\mathbf{c}}$ y $\delta < \delta_{\mathbf{c}}$ entonces:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} |Y_t^N - Y_s^N| \geq \frac{\eta}{3} \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para \textcircled{a} : nuevamente, en virtud de lo observado en la ecuación (3.13) tenemos que para todo $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|X_s^N| &\leq a \int_0^s |X_u^N| du + \sqrt{N} s \delta_N + \sqrt{N} \frac{1}{N} (1 + \bar{\gamma}_N) + |Y_s^N| \\
&\leq a \int_0^s |X_u^N| du + \kappa_N(1) + |Y_s^N|.
\end{aligned}$$

Sea $\kappa_N = \kappa_N(1)$. Luego,

$$\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u^N| \leq \sup_{0 \leq u \leq s} |Y_u^N| + \kappa_N + a \int_0^s \sup_{0 \leq v \leq u} |X_v^N| du.$$

El lema de Grönwall implica entonces que:

$$\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u^N| \leq \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Y_u^N| + \kappa_N \right) e^{as} \quad \forall s \in [0, 1],$$

y

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} a \int_s^t |X_u^N| du &\leq \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} a \int_s^t \sup_{0 \leq v \leq 1} |X_v^N| du \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} a(t-s) \sup_{0 \leq v \leq 1} |X_v^N| \\ &< a\delta \sup_{0 \leq v \leq 1} |X_v^N| \\ &\leq a\delta \left(\sup_{0 \leq v \leq 1} |Y_v^N| + \kappa_N \right) e^a. \end{aligned}$$

Luego, podemos acotar ① de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t \leq 1; |t-s| < \delta} a \int_s^t |X_u^N| du \geq \frac{\eta}{3} \right) &\leq \mathbb{P} \left(a\delta \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N| + \kappa_N \right) e^a \geq \frac{\eta}{3} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N \right). \end{aligned}$$

Sea $c > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N; \sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N - B(\beta(u))| < c \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N; \sup_{0 \leq u \leq 1} |Y_u^N - B(\beta(u))| \geq c \right) \\ &< \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |B(\beta(u))| + c \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N \right) + \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

si $N \geq N_{c,a}$ pues $\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |Y_t^N - B(\beta(t))| > c \right) \rightarrow 0$. Además:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |B(\beta(u))| + c \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |B(\beta(u))| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N - c \right) \\ &= 2\mathbb{P} \left(\left| B \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} \beta(u) \right) \right| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N - c \right), \end{aligned}$$

en virtud del *Problema de barrera* o *Principio de reflexión* del movimiento browniano ([36], página 254). Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq u \leq 1} |B(\beta(u))| + c \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N \right) &= 2\mathbb{P} \left(\sqrt{\sup_{0 \leq u \leq 1} \beta(u)} |N(0,1)| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N - c \right) \\ &\leq 2\mathbb{P} \left(\sqrt{\bar{\Psi}} |N(0,1)| \geq \frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N - c \right) \\ &= 4 \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\Psi}}} \left(\frac{\eta}{3a\delta e^a} - \kappa_N - c \right) \right) \right] \\ &< \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

si $\delta < \frac{\eta}{3ae^a \left(\sqrt{\bar{\Psi}} z_{1-\frac{\varepsilon}{24}} + \kappa_N + c \right)}$. Sean $c = \frac{\eta}{3}$ y $\delta_{\mathbf{a}} = \frac{\eta}{3ae^a \left(\sqrt{\bar{\Psi}} z_{1-\frac{\varepsilon}{24}} + \kappa_N + c \right)}$.

Finalmente, tomando $N^*(\eta) = \max \{N_{\mathbf{a}, \frac{\eta}{3}}, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{c}}\}$ y $\delta^*(\eta) = \min \{\delta_{\mathbf{a}}, \delta_{\mathbf{b}}, \delta_{\mathbf{c}}\} > 0$, obtenemos que para todo $\delta < \delta^*(\eta)$ y $N \geq N^*(\eta)$:

$$\mathbb{P}(\omega_{X^N}(\delta) \geq \eta) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Hemos probado entonces que $\{X^N\}_N$ es *tight* y esto concluye la demostración. \square

3.2. *Jamming constant* del grafo.

Si $N < \infty$, entonces $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ llega al estado absorbente en un tiempo finito T_N^* . Hasta ahora obtuvimos teoremas para el proceso $\{Z_t\}_t$. Ahora usaremos esos resultados para realizar primeramente una estimación puntual de T_N^* y luego una estimación por intervalos de confianza, a partir de un teorema central del límite para dicha variable aleatoria.

Definición 43. Sea $T_N^* \in \mathbb{N}$ el primer momento en que $Z_{T_N^*} = N$ y $T^* = \inf \{t \in [0, 1] : z(t) = 0\} \wedge 1$, siendo z la solución de (3.2).

Observar que T_N^* (aleatorio) es un tiempo de parada del proceso. Como mencionamos antes, estamos interesados en estimar T_N^* ya que si $\omega \in \Omega$ es una posible trayectoria del proceso $\{Z_t\}_t$, entonces $T_N^*(\omega)$ representa la cantidad de pasos del algoritmo bajo esa trayectoria, es decir, la cantidad de nodos que podrán comunicar simultáneamente si ocurre ω . Puesto que:

$$\begin{aligned} \frac{T_N^*}{N} &= \frac{1}{N} \inf \{t \in [0, 1] : Z_{tN} = N\} \\ &= \frac{1}{N} \inf \left\{ t \in [0, 1] : 1 - \frac{Z_{tN}}{N} = 0 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \inf \{t \in [0, 1] : Z_t^N = 0\}, \end{aligned}$$

estimaremos T_N^* a partir del límite fluido.

3.2.1. Estimación de la *jamming constant* a partir del límite fluido.

Teorema 44. Ley de los grandes números para T_N^* . *Supongamos como antes que existe $\gamma \geq 0$ Lipschitz tal que $\gamma_N(x) = \gamma \left(1 - \frac{x}{N}\right) + \delta_N$ con $\sqrt{N}\delta_N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$ y que $\frac{\bar{\Psi}_N}{N} \rightarrow 0$. Entonces:*

$$\frac{T_N^*}{N} \rightarrow T^* \text{ en } L^1.$$

Demostración. En virtud de la ecuación (3.3) y puesto que $T_N^* \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{\frac{T_N^*}{N}}^N = 1 - \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} (1 + \gamma(Z_u^N)) du - \delta_N \frac{T_N^*}{N} + R_{N, \frac{T_N^*}{N}} - \frac{M_{T_N^*}}{N} \\ &= 1 - (1 + \delta_N) \frac{T_N^*}{N} - \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(Z_u^N) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} \end{aligned}$$

(en este caso $R_{N, \frac{T_N^*}{N}} = \int_{\left[\frac{T_N^*}{N}\right]}^{\frac{T_N^*}{N}} (1 + \gamma_N(Z_{uN})) du = 0$ ya que $\left[\frac{T_N^*}{N} N\right] = \left[\frac{T_N^*}{N}\right] = \frac{T_N^*}{N}$) y

$$\frac{T_N^*}{N} = \frac{1}{1 + \delta_N} \left[1 - \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(Z_u^N) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} \right].$$

Además, $0 = z(T^*) = 1 - \int_0^{T^*} (1 + \gamma(z(s))) ds = 1 - T^* - \int_0^{T^*} \gamma(z(s)) ds$, por lo cual:

$$T^* = 1 - \int_0^{T^*} \gamma(z(u)) du.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{T_N^*}{N} - T^* &= \frac{1}{1 + \delta_N} \left[1 - \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(Z_u^N) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} - (1 + \delta_N) \left(1 - \int_0^{T^*} \gamma(z(u)) du \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 + \delta_N} \left[\int_0^{\frac{T_N^*}{N}} [(1 + \delta_N) \gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)] du + (1 + \delta_N) \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} - \delta_N \right] \end{aligned}$$

y

$$\frac{T_N^*}{N} - T^* - \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du < \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} [(1 + \delta_N) \gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)] du - \frac{M_{T_N^*}}{N}. \quad (3.16)$$

Por otro lado,

$$\frac{T_N^*}{N} - T^* - \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du = \int_{T^*}^{\frac{T_N^*}{N}} [1 + \gamma(z(u))] du = -z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) + z(T^*). \quad (3.17)$$

Luego, en virtud de las ecuaciones (3.16) y (3.17) tenemos que:

$$\begin{aligned} z(T^*) - z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) &< \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} [(1 + \delta_N) \gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)] du - \frac{M_{T_N^*}}{N} \\ &= \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} [\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)] du + \delta_N \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(z(u)) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E} \left| z(T^*) - z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) \right| < \mathbb{E} \left[\int_0^{\frac{T_N^*}{N}} C_L |z(u) - Z_u^N| du \right] + \delta_N \mathbb{E} \left[\int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(z(u)) du \right] + \mathbb{E} \left[\frac{|M_{T_N^*}|}{N} \right].$$

Acotaremos cada uno de estos tres términos:

■

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^{\frac{T_N^*}{N}} C_L |z(u) - Z_u^N| du \right] &\leq C_L \mathbb{E} \left[\frac{T_N^*}{N} \sup_{0 \leq u \leq 1} |z(u) - Z_u^N| \right] \\ &\leq C_L \left(\delta_N + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}} \right) e^{C_L}, \end{aligned}$$

en virtud del teorema 40;

- $\delta_N \mathbb{E} \left[\int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \gamma(z(u)) du \right] \leq \delta_N \int_0^1 \bar{\gamma} du \leq \delta_N \bar{\gamma}$ si $\bar{\gamma} = \sup_{x \in [0,1]} \gamma(x)$;
- $\mathbb{E} \left| \frac{M_{T_N^*}}{N} \right| = \mathbb{E} \left| \frac{M_{\frac{T_N^*}{N} N}}{N} \right| \leq \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,1]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] \leq 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}}$, pues en el paso III de la prueba del teorema 40 demostramos que $\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \frac{|M_{sN}|}{N} \right] \leq 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N} t}$ para todo $t > 0$.

Hemos probado entonces que:

$$\mathbb{E} \left| z(T^*) - z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) \right| \leq C_L \left(\delta_N + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}} \right) e^{C_L} + \delta_N \bar{\gamma} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}}.$$

Además, el teorema de valor medio para derivadas (puesto que z es derivable) implica que para todo $\varpi \in \Omega$ existe un real $c_N(\varpi)$ entre $\frac{T_N^*(\varpi)}{N}$ y T^* tal que:

$$\begin{aligned} z\left(\frac{T_N^*(\varpi)}{N}\right) - z(T^*) &= \dot{z}(c_N(\varpi)) \left(\frac{T_N^*(\varpi)}{N} - T^* \right) \\ &= -(1 + \gamma(z(c_N(\varpi)))) \left(\frac{T_N^*(\varpi)}{N} - T^* \right), \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} \lim_N \mathbb{E} \left| \frac{T_N^*}{N} - T^* \right| &= \lim_N \mathbb{E} \left| \frac{-1}{(1 + \gamma(z(c_N)))} \left(z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) - z(T^*) \right) \right| \\ &\leq \lim_N \mathbb{E} \left| z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) - z(T^*) \right| \\ &\leq \lim_N C_L \left(\delta_N + \frac{1 + \bar{\gamma}_N}{N} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}} \right) e^{C_L} + \delta_N \bar{\gamma} + 2\sqrt{\frac{\bar{\Psi}_N}{N}} = 0. \end{aligned}$$

□

3.2.2. Teorema Central del Límite para T_N^* .

Igual que antes, agregando algunas hipótesis es posible demostrar un teorema central del límite para el resultado anterior.

Teorema 45. Teorema Central del Límite para T_N^* . *Si suponemos además que existe $\Psi(\cdot)$ continua en \mathbb{R}^+ tal que $\Psi_N(x) = \Psi\left(1 - \frac{x}{N}\right) + \epsilon_N$ con $\epsilon_N \rightarrow 0$ y $\gamma(x) = ax + b$ con $a, b > 0$, entonces:*

$$\sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) \rightarrow_{\mathbb{D}} N(0, \sigma^2),$$

siendo: $\sigma^2 = \frac{1}{(a+b+1)^2} \int_0^{T_N^*} \Psi(z(s)) e^{2as} ds$, z la solución de (40) y $T^* \in \mathbb{R}$ tal que $z(T^*) = 0$.

Demostración. Observemos primero que en este caso la única solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \dot{z} = -(1 + \gamma(z)) = -az - (b+1) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

es $z(t) = \frac{a+b+1}{a} e^{-at} - \frac{b+1}{a}$. Luego, $z(T^*) = 0 \Leftrightarrow T^* = \frac{1}{a} \log\left(\frac{a}{b+1} + 1\right) < \infty$.

A partir de la demostración del teorema anterior, obtenemos que:

$$\frac{T_N^*}{N} - T^* = \frac{1}{1 + \delta_N} \left[a \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} (z(u) - Z_u^N) du + \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du + \delta_N \int_0^{T^*} \gamma(z(u)) du - \frac{M_{T_N^*}}{N} - \delta_N \right],$$

entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} a \int_0^{\frac{T_N^*}{N}} \sqrt{N} (z(u) - Z_u^N) du + \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}}. \quad (3.18)$$

Además, en virtud de (3.17):

$$\int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du = z\left(\frac{T_N^*}{N}\right) - z(T^*) + \frac{T_N^*}{N} - T^*.$$

Si hacemos el desarrollo de Taylor de orden 2 de $z(t)$ alrededor de $t = T^*$ tenemos que:

$$\begin{aligned} z(t) - z(T^*) &= z'(T^*) (t - T^*) + \frac{z''(T^*)}{2} (t - T^*)^2 + r_2(t) \\ &= -(b+1)(t - T^*) + \frac{a(b+1)}{2} (t - T^*)^2 + r_2(t), \end{aligned}$$

con $\lim_{t \rightarrow T^*} \frac{r_2(t)}{(t - T^*)^2} = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du &= -(b+1) \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) + \frac{a(b+1)}{2} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)^2 + r_2\left(\frac{T_N^*}{N}\right) + \frac{T_N^*}{N} - T^* \\ &= -b \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) + \frac{a(b+1)}{2} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)^2 + r_2\left(\frac{T_N^*}{N}\right). \end{aligned}$$

Entonces, si sustituímos $\int_{\frac{T_N^*}{N}}^{T^*} \gamma(z(u)) du$ en la ecuación (3.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) &= -a \int_0^{T^*} \lim_{N \rightarrow \infty} X_u^N du \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left[-b \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) + \frac{a(b+1)}{2} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)^2 + r_2\left(\frac{T_N^*}{N}\right) \right] - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

o, equivalentemente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) \left[(b+1) - \frac{a(b+1)}{2} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) - \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) \frac{r_2 \left(\frac{T_N^*}{N} \right)}{\left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)^2} \right] = -a \int_0^{T^*} \lim_{N \rightarrow \infty} X_u^N du - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}}.$$

El teorema 44 implica entonces que:

$$(b+1) \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) = -a \int_0^{T^*} X_u du - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}}$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) = \frac{-1}{b+1} \left[a \int_0^{T^*} X_u du + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}} \right]. \quad (3.19)$$

Estudiaremos a continuación el $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}}$. Como:

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds - \int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s),$$

entonces

$$a \int_0^{T^*} X_u du = -X_{T^*} - \int_0^{T^*} \sqrt{\beta'(s)} dB(s).$$

Además probamos en el paso I de la demostración del teorema 42 que $\frac{M_{tN}}{\sqrt{N}}$ converge en la topología de Skorohod a $\int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s)$, siendo $\beta(t) = \int_0^t \Psi(z(s)) ds$ y $\{B(t)\}_t$ el mismo movimiento Browniano que define a $\{X_t\}_t$ (por cómo construimos $\{X_t\}_t$). Luego,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{T_N^*}}{\sqrt{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{\frac{T_N^*}{N}N}}{\sqrt{N}} = \int_0^{T^*} \sqrt{\beta'(s)} dB(s).$$

Finalmente, hemos probado que:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right) &=_{\mathbb{D}} \frac{-1}{b+1} \left[-X_{T^*} - \int_0^{T^*} \sqrt{\beta'(s)} dB(s) + \int_0^{T^*} \sqrt{\beta'(s)} dB(s) \right] \\ &= \frac{1}{b+1} X_{T^*}, \end{aligned}$$

siendo X_t la única solución de la ecuación diferencial estocástica (3.12) cuya distribución coincide con la del proceso gaussiano:

$$N \left(0, e^{-2at} \int_0^t \beta'(s) e^{2as} ds \right) \quad \forall t > 0,$$

como vimos en (3.15).

Concluimos la demostración observando que entonces $\sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)$ converge en distribución a una variable aleatoria normal $N(0, \sigma^2)$, siendo:

$$\sigma^2 = \frac{e^{-2aT^*}}{(b+1)^2} \int_0^{T^*} \beta'(s) e^{2as} ds = \frac{1}{(a+b+1)^2} \int_0^{T^*} \Psi(z(s)) e^{2as} ds.$$

□

3.3. Grafo de Erdős–Rényi.

En esta sección veremos los resultados específicos que se obtienen cuando el grafo de interferencias se asume que es un Erdős–Rényi. Como mencionamos en la sección 2.1, en este caso tenemos que $p_N(x, y)$ corresponde a una distribución binomial $\text{Bin}(N-1-x, p_N)$. Consideraremos el caso en que:

$$Np_N \rightarrow c \text{ con } c > 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty \text{ (i.e. } p_N \sim \frac{c}{N}\text{);}$$

supongamos además que:

$$\sqrt{N} (Np_N - c) \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

(esta condición se cumple si tomamos por ejemplo $p_N = \frac{c}{N}$). Para comenzar, identificaremos quiénes son las funciones γ y Ψ que aproximan a γ_N y Ψ_N bajo estos supuestos.

Lema 46. *En este caso $\gamma(x) = \Psi(x) = cx$, siendo $c > 0$ el número medio de vecinos de un nodo dentro de este grafo de interferencias.*

Demostración. Puesto que en este caso $p_N(x, y)$ corresponde a una distribución binomial

$$\text{Bin}(N-1-x, p_N),$$

entonces:

- $\gamma_N(x) = \mathbb{E}(\text{Bin}(N-1-x, p_N)) = (N-1-x)p_N \sim c - c\frac{x}{N} = c \left(1 - \frac{x}{N}\right) = \gamma \left(1 - \frac{x}{N}\right)$, si:
 $\gamma(x) = cx.$
- $\Psi_N(x) = \text{var}(\text{Bin}(N-1-x, p_N)) = (N-1-x)p_N(1-p_N) \sim c \left(1 - \frac{x}{N}\right) = \Psi \left(1 - \frac{x}{N}\right)$, si:
 $\Psi(x) = cx.$

□

$\gamma_N(x)$ y $\Psi_N(x)$ están entonces en las hipótesis de los teoremas 40, 42, 44 y 45.

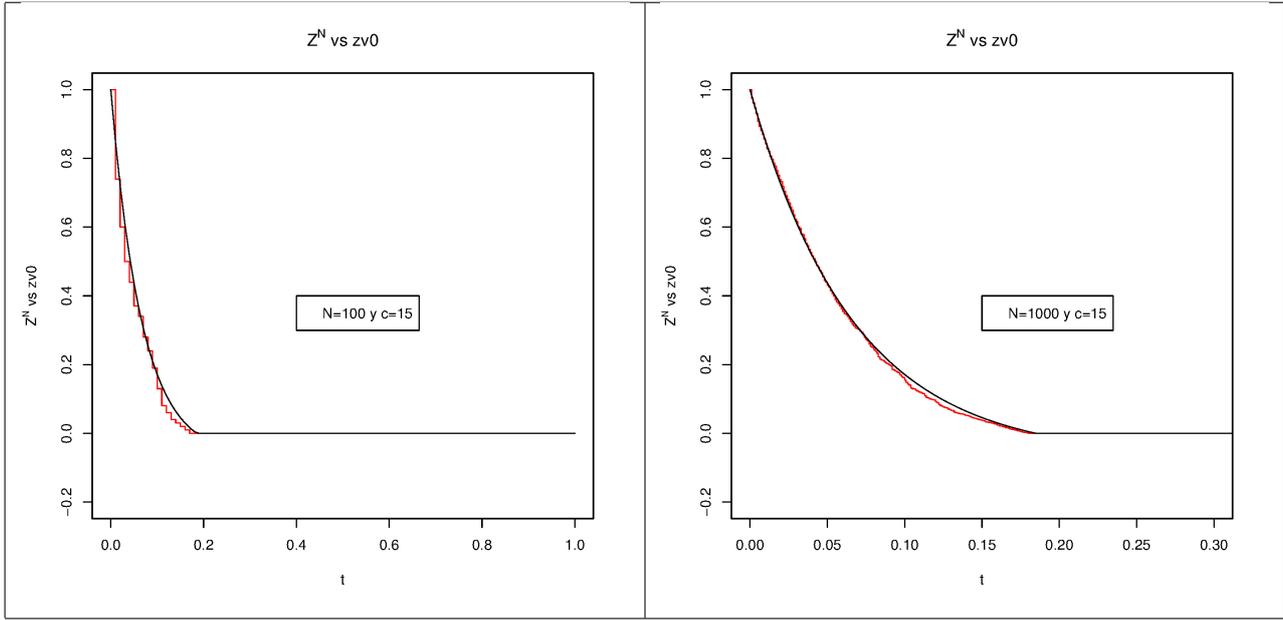


Figura 3.2: Comparación de una trayectoria de $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ con $\{z(t) \vee 0\}_{t \in [0,1]}$ para un grafo de Erdős–Rényi $G(N, p_N)$.

3.3.1. Límite fluido:

En virtud del teorema 40 tenemos que $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ converge en la topología de Skorohod a

$$\{z(t) \vee 0\}_{t \in [0,1]},$$

siendo $z(t)$ la solución de $z'(t) = -1 + cz(t)$, es decir:

$$z(t) = \frac{1}{c} [(c+1)e^{-ct} - 1] \quad \forall t \in [0, 1].$$

Luego, $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ converge a $\hat{z}(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} [(c+1)e^{-ct} - 1] & \text{si } t \in [0, T^*] \\ 0 & \text{si } t \geq T^* \end{cases}$, siendo:

$$T^* = \frac{1}{a} \log \left(\frac{a}{b+1} + 1 \right) = \frac{1}{c} \log(c+1).$$

En la figura **Fig. 3.2** se compara una trayectoria de $\{Z_t^N\}_{t \in [0,1]}$ con $\{z(t) \vee 0\}_{t \in [0,1]}$ para $c = 15$ y $N = 100$ ó 1000 .

Además, el error $\{X_t^N\}_{t \in [0, T^*]} = \{\sqrt{N}(Z_t^N - z(t) \vee 0)\}_{t \in [0, T^*]}$ converge en la topología de Skorohod a $\{X_t\}_t$, siendo este proceso la única solución (en ley) de la ecuación diferencial estocástica (3.12). En este caso:

- $a = c$ y $b = 0$;
- $\beta'(t) = \Psi(z(t)) = cz(t) = (c+1)e^{-ct} - 1 \geq 0 \forall t \in [0, T^*]$,

por lo que $\{X_t\}_t$ es solución de:

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt - \sqrt{(c+1)e^{-ct} - 1} dB(t) \quad \forall t \in [0, T^*] \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Es decir que, si N es suficientemente grande, la variación de dicho error puede descomponerse en una componente de *tendencia*: $a(t, X_t^N) = -cX_t^N dt$ y una componente de *variabilidad alrededor de la tendencia*: $b(t, X_t^N) = -\sqrt{(c+1)e^{-ct} - 1} dB(t)$. Luego, en este caso, tanto la tendencia del error como la variabilidad del mismo varían sistemáticamente con el tiempo. Hemos observado además que para cada $t \in [0, T^*]$ la solución $\{X_t\}_t$ de la EDE (3.20) tiene la misma ley que la variable aleatoria normal $N(0, \sigma_t^2)$, siendo:

$$\sigma_t^2 = e^{-2at} \int_0^t \beta'(s) e^{2as} ds = \frac{1}{c} \left[(c+1)e^{-ct} - \left(c + \frac{1}{2}\right) e^{-2ct} - \frac{1}{2} \right].$$

Consideremos el caso en que $p_N = \frac{c}{N}$. En la figura **Fig. 3.3** comparamos una trayectoria de $\{X_t^N\}_{t \in [0, T^*]}$ con R trayectorias del proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T^*]}$. Para eso, hemos aproximado a $\{X_t\}_t$ por el *método de Euler-Maruyama*, que mencionamos en 2.5.2:

Consideraremos entonces una partición del intervalo $[0, T^*]$ de tamaño $\frac{1}{N}$:

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = T^*$$

y la sucesión $\{X_{t_n}^E\}_{n=0, \dots, N}$ tal que:

$$\begin{cases} X_{t_0}^E = 0 \\ X_{t_{n+1}}^E = X_{t_n}^E - cX_{t_n}^E (t_{n+1} - t_n) - \sqrt{(c+1)e^{-ct_n} - 1} (B(t_{n+1}) - B(t_n)) \end{cases},$$

siendo $\{B(t)\}_t$ el movimiento Browniano estándar. La distribución de $\{X_{t_n}^E\}_{n=0, \dots, N}$ coincide con la de la sucesión:

$$\begin{cases} X_{t_0}^E = 0 \\ X_{t_{n+1}}^E = X_{t_n}^E - cX_{t_n}^E (t_{n+1} - t_n) - \sqrt{(c+1)e^{-ct_n} - 1} \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_{n+1} \end{cases},$$

donde Z_1, \dots, Z_N son independientes y con distribución $N(0, 1)$.

Luego, en la figura **Fig. 3.3** comparamos una trayectoria del proceso $\{X_t^N\}_{t \in [0, T^*]}$ con R trayectorias del proceso $\{X_t^E\}_{t \in [0, T^*]}$ tal que:

$$X_t^E = X_{t_n}^E + \frac{X_{t_{n+1}}^E - X_{t_n}^E}{t_{n+1} - t_n} (t - t_n) \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}).$$

para distintos valores de N y c .

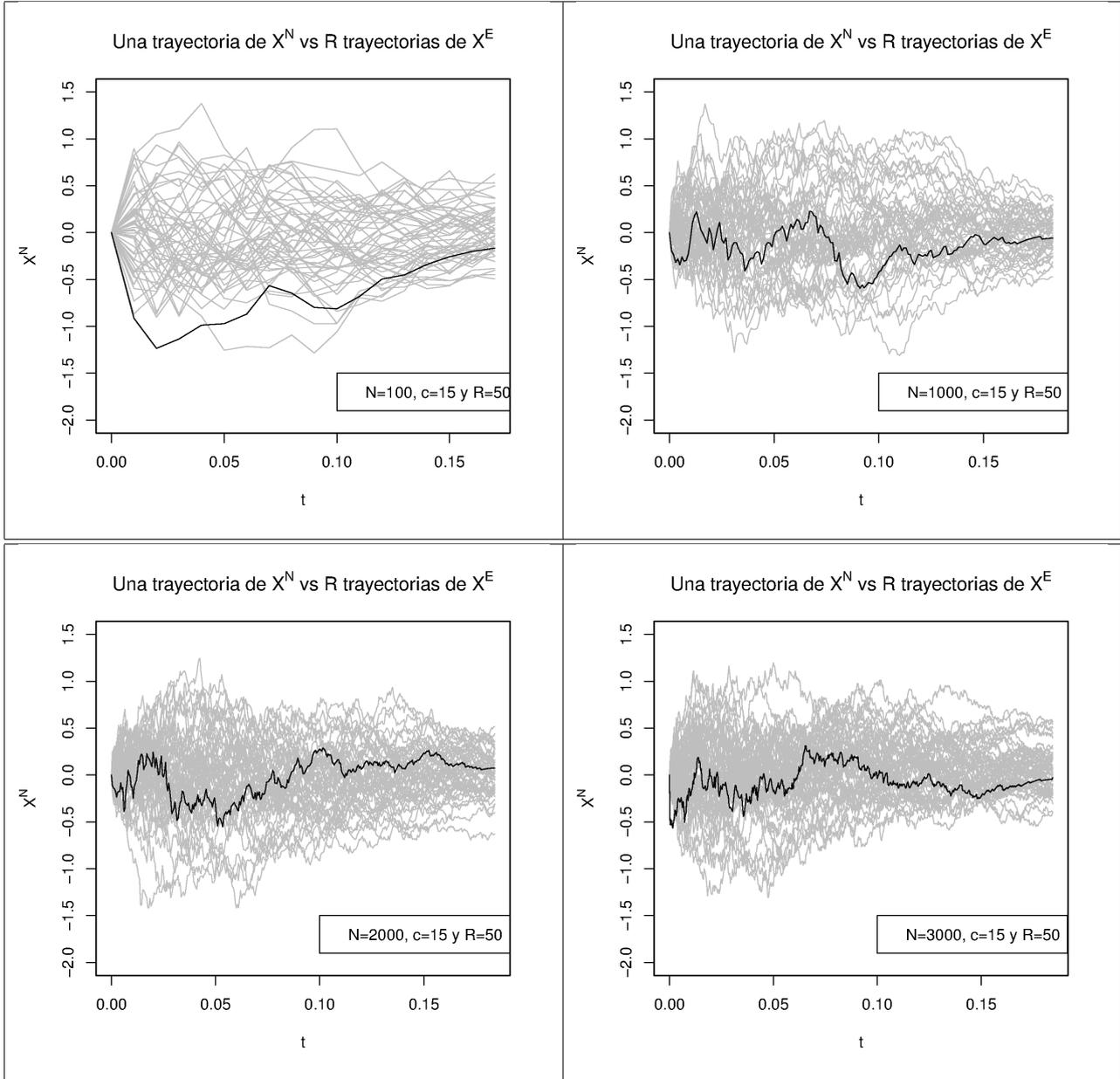


Figura 3.3: Comparación de una trayectoria de $\{X_t^N\}_{t \in [0,1]}$ con R trayectorias de la aproximación a la solución de la EDE (3.20) mediante el método de Euler-Maruyama, $\{X_t^E\}_{t \in [0,1]}$, para un grafo de Erdős-Rényi $G(N, p_N)$.

3.3.2. Jamming constant del grafo.

Hemos visto entonces que la *jamming constant* (la proporción de vértices que podrán comunicar simultáneamente) en un grafo de Erdős–Rényi resulta ser:

$$T^* = \frac{1}{c} \log(c + 1).$$

Es decir que un estimador de la cantidad de terminales de la red que podrán comunicar simultáneamente es $\frac{N}{c} \log(c + 1)$, que es al menos más grande que la mitad del conjunto independiente más grande posible en virtud de la observación **Obs. 1**.

Más aún, hemos visto que $\sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)$ converge en distribución a una variable aleatoria $N(0, \sigma^2)$, siendo:

$$\sigma^2 = \sigma_{T^*} = \frac{1}{c} \left[(c + 1) e^{-cT^*} - \left(c + \frac{1}{2} \right) e^{-2cT^*} - \frac{1}{2} \right] = \frac{c}{2(c + 1)^2}.$$

Consideremos N suficientemente grande y fijo (por ejemplo, tomaremos $N = 1000$). A continuación resumiremos qué es lo que sabemos acerca de la distribución de la variable aleatoria $J = \frac{T_N^*}{N}$:

- $\mathbb{E}(J) = \mathbb{E}\left(\frac{T_N^*}{N}\right) \approx T^* = \frac{1}{c} \log(1 + c)$ ya que $\lim_N \mathbb{E}\left|\frac{T_N^*}{N} - T^*\right| = 0$.
- La distribución de la variable aleatoria $\sqrt{N} \left(\frac{T_N^*}{N} - T^* \right)$ se aproxima a la de una $N(0, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = \frac{c}{2(c+1)^2}$, por lo cual:

$$\text{var}\left(\sqrt{N}(J - T^*)\right) \approx \sigma^2 \Rightarrow N \text{var}(J) \approx \sigma^2 \Rightarrow \text{var}(J) \approx \frac{\sigma^2}{N}.$$

Consideremos m realizaciones de la *v.a.* J : J_1, J_2, \dots, J_m y compararemos la media muestral de J con T^* pues:

$$\bar{J}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m J_i \rightarrow_m \mathbb{E}(J) \approx T^*,$$

y la varianza muestral de J con $\frac{1}{N} \frac{c}{2(c+1)^2}$ pues:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (J_i - \bar{J}_m)^2 \rightarrow_m \text{var}(J) \approx \frac{\sigma^2}{N}.$$

La siguiente tabla compara \bar{J}_m con T^* y σ_m^2 con $\frac{\sigma^2}{N}$ para distintos valores del número medio de vecinos con $N = 1000$ y $m = 100$.

c	\bar{J}_m	$T^* = \frac{1}{c} \log(1 + c)$	σ_m^2	$\frac{\sigma^2}{N} = \frac{1}{N} \frac{c}{2(c+1)^2}$
5	0.34938	0.3583519	4.04804e-05	6.944444e-05
10	0.24093	0.2397895	4.289404e-05	4.132231e-05
15	0.1852	0.1848392	2.40202e-05	2.929687e-05
30	0.11326	0.1144662	1.409333e-05	1.560874e-05

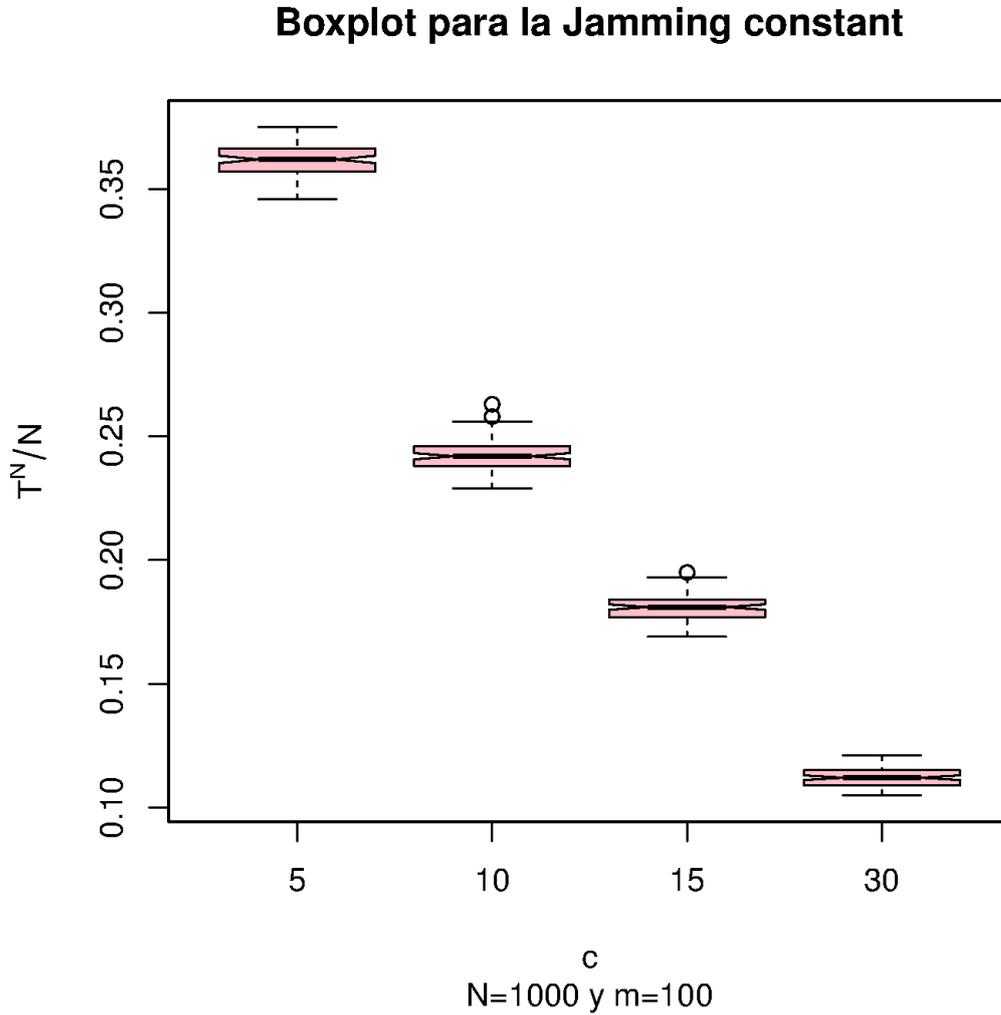


Figura 3.4: *Boxplots* correspondientes a las muestras J_1, J_2, \dots, J_m para distintos valores de c .

En la figura **Fig. 3.4** se muestran los *boxplots* correspondientes a dichas muestras. Como se observa, la varianza disminuye a medida que aumenta el número medio de vecinos, lo cual es consistente con el hecho de que $\text{var}(J) \approx \frac{\sigma^2}{N} = \frac{1}{N} \frac{c}{2(c+1)^2}$.

Ya hemos dado una estimación puntual de la *jamming constant* mediante $T^* = \frac{1}{c} \log(1+c)$. Calcularemos a continuación una estimación por intervalo de confianza para dicho parámetro a partir del teorema 45. Queremos encontrar un intervalo tal que sepamos que con probabilidad $1 - \alpha$ la proporción de nodos que podrán comunicarse simultáneamente para una corrida del algoritmo descrito en la introducción caerá dentro de dicho intervalo. Naturalmente, este intervalo será de la forma:

$$I_\alpha = [T^* - k_\alpha, T^* + k_\alpha].$$

Determinaremos a continuación el valor de k_α . En virtud del teorema 45 tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J \in I_\alpha) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_N^*}{N} - T^*\right| \leq k_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sqrt{N}\left(\frac{T_N^*}{N} - T^*\right)\right| \leq \sqrt{N}k_\alpha\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(|N(0, \sigma^2)| \leq \sqrt{N}k_\alpha\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}k_\alpha}{\sigma}\right) - 1,\end{aligned}$$

luego $\mathbb{P}(J \in I_\alpha) \approx 1 - \alpha$ si $k_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Esta aproximación es la que origina la necesidad de plantear a futuro resultados de *grandes desvíos* como continuación de los resultados planteados en este trabajo.

Finalmente, en la figura **Fig. 3.5** comparamos cada uno de los *boxplots* de la figura **Fig. 3.4** con I_α para $\alpha = 0,05$, es decir que:

$$k_\alpha = k_{\alpha,c} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times 1,96 = \sqrt{\frac{c}{2N(c+1)^2}} \times 1,96.$$

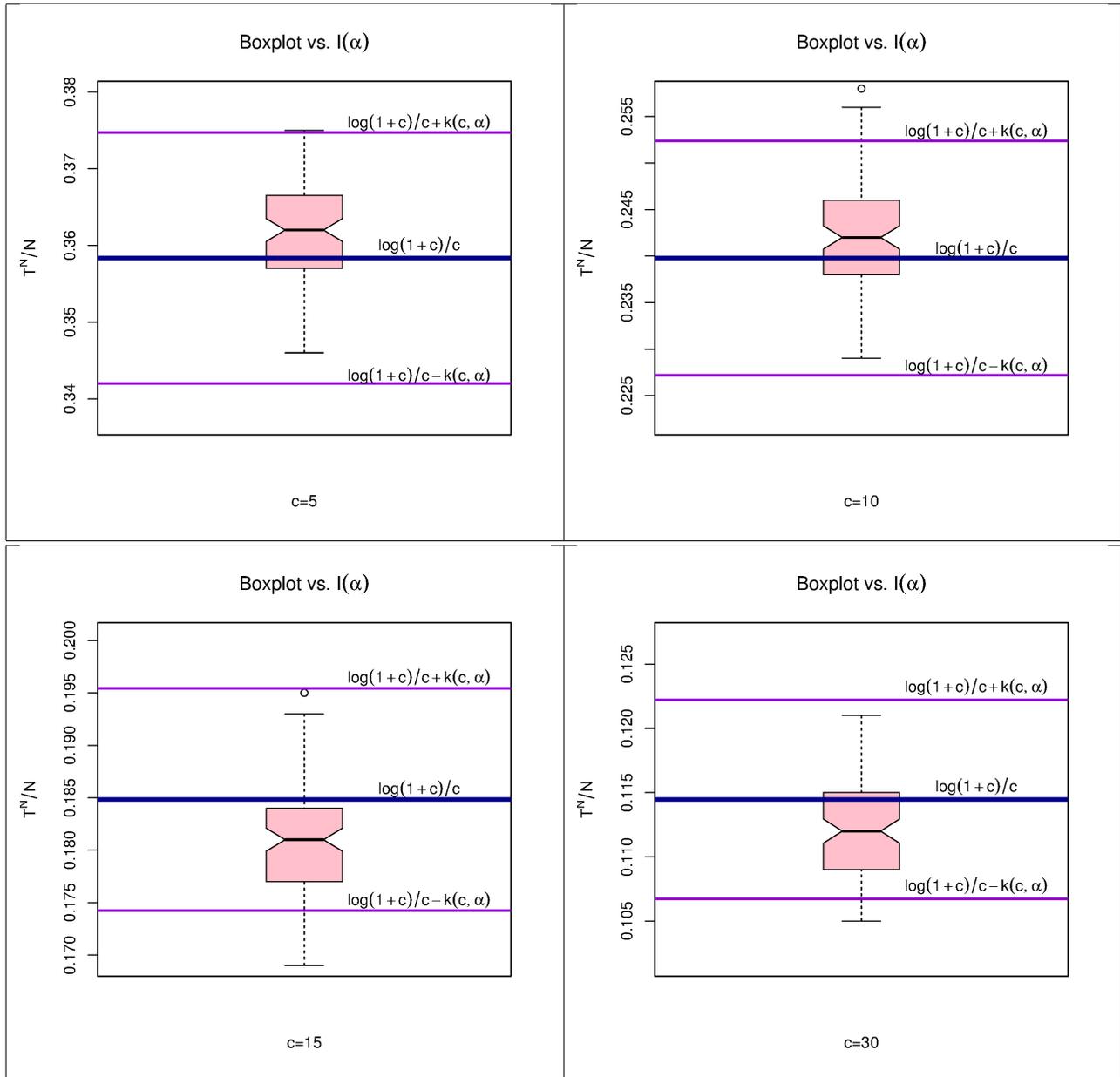


Figura 3.5: Comparación de cada uno de los boxplots de la figura Fig. 3.4 con I_α siendo $\alpha = 0,05$.

Capítulo 4

El modelo continuo.

Consideraremos ahora el modelado de CSMA/CA de tiempo continuo que propusimos en la sección 1.2. Estimaremos entonces la cantidad de nodos que podrán transmitir simultáneamente en un *slot time* bajo esta variante del protocolo CSMA/CA sobre una red tal que pueda ser modelada mediante un grafo aleatorio con la misma característica de homogeneidad que presentamos en el capítulo anterior. Veremos que la *jamming constant* de esta red no depende del valor de λ , por lo que λ solo determinará la rapidez con la que se realiza la “selección” de los nodos que podrán transmitir en cada *slot time*.

Asumiremos nuevamente que el grafo $G_N = (V_N, A_N)$ con $V_N = \{1, 2, \dots, N\}$ está *fijo*, en el mismo sentido que mencionamos en la introducción del capítulo 3.

Suposición. *Supondremos como en el caso discreto que para toda partición (G_1, G_2) del grafo G_N se cumple que si $i \in G_2$ entonces la distribución de la cantidad de vecinos de i en G_2 solo depende de $|G_2|$ y $|G_1| = N - |G_2|$.*

Nuevamente, esta hipótesis es muy fuerte, pero es la que nos permitirá asegurar que el proceso $Z_t = |A_t \cup B_t|$ sea un proceso de Markov:

Observar que si $E_1, E_2, \dots, E_{N-Z_{t^-}}$ son las exponenciales de los nodos no explorados del grafo hasta tiempo t^- , entonces el próximo reloj sonará en un tiempo $\min\{E_1, E_2, \dots, E_{N-Z_{t^-}}\}$, cuya distribución es exponencial de parámetro $\lambda(N - Z_{t^-})$, por ser el mínimo de exponenciales independientes.

Luego, en este caso el tiempo de parada T_N^* tal que $Z_{T_N^*} = N$ depende también de los relojes exponenciales de los nodos que van quedando sin explorar. Esta dependencia hará que los resultados que obtengamos para T_N^* sean distintos a los que presentamos en el capítulo anterior, lo que ha motivado al estudio de estos dos modelos por separado.

Como mencionamos en la sección 1.2, si en tiempo t suena el reloj exponencial de alguno de los nodos no explorados (i_t) , el proceso $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ se actualiza de la siguiente manera:

$$Z_{t^+} = Z_{t^-} + 1 + \xi_{i_t},$$

siendo $\xi_{i_t} = |\mathcal{N}_{i_t}|$. Entonces, bajo el supuesto anterior aplicado a la partición de G_N dada por el conjunto de los nodos “*explorados*” (G_1) y los “*no explorados*” (G_2) hasta t , tenemos que la distribución de la v.a. ξ_{i_t} solo depende de la *cantidad* de nodos explorados hasta t (i.e. de Z_{t-}). Se tiene entonces que el proceso $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov con saltos puros, con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, homogéneo, irreducible, con estado absorbente N y con generador infinitesimal $Q = (q_{ij})_{i,j \in \{0,1,2,\dots,N\}}$, siendo:

$$q_{i,i+m} = \begin{cases} \lambda(N-i)p_N(m-1,i) & \text{si } m \geq 1; i+m \leq N \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases},$$

ya que $\lambda(N-i)$ es la tasa con la que se enciende el reloj exponencial de alguno de los nodos no explorados y $p_N(m-1,i)$, igual que en el caso discreto, es la probabilidad de que ese nodo tenga $m-1$ vecinos no explorados:

$$p_N(k,x) = \mathbb{P}(i \in G_2 \text{ tiene } k \text{ vecinos en } G_2 \mid |G_1| = x).$$

Nuevamente, definiremos las funciones $\gamma_N(x)$ y $\Psi_N(x)$ como la media y la varianza del número de vecinos en G_2 de $i \in G_2$, dado que $|G_1| = x$, i.e.:

$$\gamma_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1-x} k p_N(k,x) \text{ y } \Psi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1-x} (k - \gamma_N(x))^2 p_N(k,x).$$

Igual que antes, consideremos el espacio métrico de las funciones *càdlàg* junto con la distancia de Skorohod, $D = (D([0,T], \mathbb{R}), d_T \text{ ó } d_T^0)$, y sobre él definimos la σ -álgebra de Borel \mathcal{D} . Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad definido sobre este espacio.

En la próxima sección probaremos que $\{Z_t\}_t$ es una semimartingala, condición que usaremos en la sección 4.2 para estudiar el límite fluido de $\{Z_t\}_t$ con un reescalado distinto al que usamos para el caso discreto puesto que en este caso no aceleraremos el tiempo. Probaremos que dicha reescala converge en la topología J_1 , cuando $N \rightarrow \infty$, a $\{z(t)\}_t$, siendo $\{z(t)\}_t$ la única solución de una ecuación diferencial determinística, que determinaremos. También probaremos que $\{\sqrt{N}(Z_t - z(t))\}_t$ converge en J_1 a una difusión.

En la sección 4.3 utilizaremos los resultados obtenidos para estimar la *jamming constant*, observar que no depende de λ y probar un teorema central del límite, lo que permitirá luego construir intervalos de confianza para dicho parámetro.

Finalmente, en la sección 4.4 mostraremos nuevamente los resultados obtenidos en un grafo de Erdős-Rényi.

4.1. Descomposición de $\{Z_t\}_t$ en martingala.

Comenzaremos reescribiendo el proceso $\{Z_t\}_t$ en términos de un proceso puntual Poisson, como en [5], página 241. Para ello, reescribiremos las tasas de transición del proceso $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ de la siguiente manera:

$$q_{i,i+m} = \lambda(N-i) p_N(m-1, i) \mathbf{1}_{\{1 \leq m \leq N-i\}} = \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{k=i\}} \lambda_i \nu_i(\{m\}),$$

siendo $\lambda_i = \lambda(N-i)$ y ν_i una medida de probabilidad con $\nu_i(\{m\}) = p_N(m-1, i) \mathbb{I}_{\{1 \leq m \leq N-i\}}$. Luego, cuando $Z_t = i$, se tiene que este proceso salta de i a $i+m$ de acuerdo a un proceso Poisson con intensidad $\lambda_i \nu_i(\{m\})$. $\{Z_t\}_t$ puede verse entonces como la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dZ_t = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{t-}=i\}} \sum_{m=1}^N m V_i(dt, \{m\}), \quad (4.1)$$

siendo V_i un proceso puntual Poisson marcado sobre $\mathbb{R}^+ \times \{1, 2, \dots, N\}$ con intensidad $\lambda_i dt \otimes \nu_i(dm)$. Luego, en virtud de la proposición 21, tomando $f(m) = m$ para todo $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, tenemos que el proceso:

$$M_t = \iint_{(0,t] \times \{1,2,\dots,N\}} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s-}=i\}} m [V_i(ds, dm) - \lambda_i \nu_i(dm)] \quad (4.2)$$

es una martingala en L^2 con *increasing process*:

$$I_t = \iint_{(0,t] \times \{1,2,\dots,N\}} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s-}=i\}} m^2 \lambda_i ds \otimes d\nu_i(y). \quad (4.3)$$

Veremos a continuación que esto nos permite descomponer a $\{Z_t\}_t$ como la martingala $\{M_t\}_t$ más un compensador (*i.e.* $\{Z_t\}_t$ será una semimartingala).

Proposición 47. *El proceso $\{Z_t\}_t$ es una semimartingala; más aún, se puede descomponer como:*

$$Z_t = \int_0^t \lambda(N-Z_s) (1 + \gamma_N(Z_s)) ds + M_t, \quad (4.4)$$

siendo $\{M_t\}_t$ una martingala en L^2 . Además, el proceso $\{M_t^2 - I_t\}_t$ es una martingala, siendo:

$$I_t = \int_0^t \lambda(N-Z_s) [\Psi_N(Z_s) + (1 + \gamma_N(Z_s))^2] ds. \quad (4.5)$$

Demostración. En virtud de las ecuaciones (4.1) y (4.2) tenemos que:

$$\begin{aligned}
M_t &= \int_0^t \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \sum_{m=1}^N m V_i(ds, \{m\}) - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda_i \sum_{m=1}^N m \nu_i(\{m\}) \right) ds \\
&= \int_0^t dZ_s - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda(N-i) \sum_{m=1}^{N-i} m p_N(m-1, i) \right) ds \\
&= Z_t - Z_0 - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda(N-i) \sum_{m=1}^{N-i} m p_N(m-1, i) \right) ds \\
&= Z_t - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda(N-i) \sum_{m=1}^{N-i} m p_N(m-1, i) \right) ds,
\end{aligned}$$

pues $Z_0 = 0$. Como $\sum_{m=1}^{N-i} m p_N(m-1, i) = \sum_{k=0}^{N-i-1} (k+1) p_N(k, i) = 1 + \gamma_N(i) \forall i$, entonces:

$$\begin{aligned}
M_t &= Z_t - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda(N-i) (1 + \gamma_N(i)) \right) ds \\
&= Z_t - \int_0^t \lambda(N - Z_s) (1 + \gamma_N(Z_s)) ds.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
I_t &= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda_i \sum_{m=1}^N m^2 \nu_i(\{m\}) \right) ds \\
&= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda_i \sum_{m=1}^{N-i} m^2 p_N(m-1, i) \right) ds.
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{m=1}^{N-i} m^2 p_N(m-1, i) = \sum_{k=0}^{N-i-1} (k+1)^2 p_N(k, i) = 1 + 2\gamma_N(i) + \sum_{k=0}^{N-i-1} k^2 p_N(k, i)$$

y $\Psi_N(i) = \sum_{k=0}^{N-i-1} (k - \gamma_N(i))^2 p_N(k, i) = \sum_{k=0}^{N-i-1} k^2 p_N(k, i) - \gamma_N(i)^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N-i} m^2 p_N(m-1, i) &= 1 + 2\gamma_N(i) + \Psi_N(i) + \gamma_N(i)^2 \\
&= \Psi_N(i) + (1 + \gamma_N(i))^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_{s^-}=i\}} \lambda (N-i) \left[\Psi_N(i) + (1 + \gamma_N(i))^2 \right] \right) ds \\ &= \int_0^t \lambda (N - Z_s) \left[\Psi_N(Z_s) + (1 + \gamma_N(Z_s))^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. \square

4.2. Límite fluido y aproximación por difusión.

A continuación, aproximaremos las trayectorias de una reescala adecuada de esta semimartingala por la solución de una ecuación diferencial determinística cuando el tamaño del grafo tiende a infinito, a partir de lo que podremos deducir luego la proporción de nodos que podrán transmitir simultáneamente en este caso.

4.2.1. Límite fluido.

Hemos visto que $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso de Markov de saltos puros. Igual que en el caso discreto, a partir de considerar un límite fluido, aproximaremos las trayectorias de $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq T}$ por la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Para eso consideraremos la siguiente reescala del proceso $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq T}$:

$$Z_t^N = \frac{N - Z_t}{N} = 1 - \frac{Z_t}{N} \text{ con } 0 \leq t \leq T.$$

Observación. Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ la filtración generada por $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq T}$. $\{Z_t^N\}_{0 \leq t \leq T}$ es entonces un proceso de Markov con saltos puros, sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T})$, decreciente, con $Z_t^N \in [0, 1] \forall t \in [0, T]$ y $Z_0^N = 1$.

Teorema 48. Límite fluido para $\{Z_t\}_t$. Si existe una función $\gamma \geq 0$ Lipschitz de constante C_L tal que $\gamma_N(x) = \gamma \left(1 - \frac{x}{N}\right) + \delta_N$ con $\delta_N \rightarrow 0$, entonces:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |Z_s^N - z(s)| \right] \leq \left[\lambda t \delta_N + 2\sqrt{C_N t} \right] e^{\lambda(1 + \bar{\gamma}_T + C_L)t}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, siendo:

- $\bar{\gamma}_s = \max_{0 \leq u \leq s} \gamma(z(u))$ si $s \in [0, T]$;
- $C_N = \frac{\lambda[\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2]}{N}$ con $\bar{\gamma}_N = \max_{x \in \{1, \dots, N\}} \gamma_N(x)$ y $\bar{\Psi}_N = \max_{x \in \{1, \dots, N\}} \Psi_N(x)$, y

▪ z es solución de la siguiente ecuación diferencial determinística:

$$\begin{cases} z = -\lambda z (1 + \gamma(z)) \\ z(0) = 1 \end{cases} . \quad (4.6)$$

Corolario 49. Si $C_N = \frac{\lambda[\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2]}{N} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces el proceso $\{Z_s^N\}_s$ converge en la topología de Skorohod (J_1) a $\{z(s)\}_s$.

Demostración. Para todo $t_0 \leq T$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t_0]} |Z_s^N - z(s)| > \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t_0]} |Z_s^N - z(s)| \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda \delta_N t_0 + 2\sqrt{C_N t_0} \right) e^{\lambda(1 + \bar{\gamma}_T + C_L)t_0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego, en virtud de la proposición 3 tenemos que $\{Z_s^N\}_s$ converge en J_1 a $\{z(s)\}_s$. \square

Demostración. (Del teorema 48). La demostración de este teorema sigue la misma estrategia que utilizamos para la del teorema 40 del capítulo anterior:

Paso I. ¿Cómo se obtiene la ecuación diferencial ordinaria?

En virtud de la proposición 47 tenemos que el proceso reescalado $\{Z_t^N\}_t$ también puede descomponerse como:

$$Z_t^N = 1 - \lambda \int_0^t Z_s^N (1 + \gamma(Z_s^N) + \delta_N) ds - \frac{M_t}{N}. \quad (4.7)$$

Luego, si $Z_t^N \rightarrow z(t)$ y $\frac{M_t}{N} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, $z(t)$ debería de verificar la siguiente ecuación integral:

$$z(t) = 1 - \lambda \int_0^t z(s) (1 + \gamma(z(s))) ds, \quad (4.8)$$

que es solución de (4.6).

Paso II, Veamos que si $z(t)$ es solución de (4.6) entonces se verifica:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |Z_s^N - z(s)| \right] \leq \left[\lambda t \delta_N + \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right) \right] e^{\lambda(1 + \bar{\gamma}_T + C_L)t} .$$

En virtud de las ecuaciones (4.7) y (4.8) tenemos que:

$$\begin{aligned} Z_s^N - z(s) &= \lambda \int_0^s \left[z(u) (1 + \gamma(z(u))) - Z_u^N (1 + \gamma(Z_u^N) + \delta_N) \right] du - \frac{M_s}{N} \\ &= \lambda \int_0^s \left[z(u) - Z_u^N + \gamma(z(u)) (z(u) - Z_u^N) + Z_u^N (\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)) - Z_u^N \delta_N \right] du - \frac{M_s}{N}; \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} |Z_s^N - z(s)| &\leq \lambda \int_0^s \left[|z(u) - Z_u^N| + \gamma(z(u)) |z(u) - Z_u^N| \right] du \\ &\quad + \lambda \int_0^s \left[|Z_u^N| |\gamma(z(u)) - \gamma(Z_u^N)| + |Z_u^N| \delta_N \right] du + \left| \frac{M_s}{N} \right| \\ &\leq \lambda \int_0^s \left[(1 + \gamma(z(u)) + C_L |Z_u^N|) |z(u) - Z_u^N| + |Z_u^N| \delta_N \right] du + \left| \frac{M_s}{N} \right| \\ &\leq \lambda \int_0^s (1 + \gamma(z(u)) + C_L) |z(u) - Z_u^N| du + \lambda s \delta_N + \left| \frac{M_s}{N} \right|. \end{aligned}$$

Como γ y z son funciones continuas (y determinísticas), podemos tomar $\bar{\gamma}_s = \max_{0 \leq u \leq s} \gamma(z(u))$, luego:

$$|Z_s^N - z(s)| \leq \lambda (1 + \bar{\gamma}_s + C_L) \int_0^s |z(u) - Z_u^N| du + \lambda s \delta_N + \left| \frac{M_s}{N} \right| \quad \forall s.$$

Sea $\varepsilon_N(t) = \sup_{s \in [0, t]} |Z_s^N - z(s)|$, entonces:

$$\begin{aligned} \varepsilon_N(t) &\leq \lambda (1 + \bar{\gamma}_t + C_L) \int_0^t \sup_{u \in [0, s]} |z(u) - Z_u^N| ds + \lambda t \delta_N + \sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \\ &\leq \lambda (1 + \bar{\gamma}_T + C_L) \int_0^t \varepsilon_N(s) ds + \lambda t \delta_N + \sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}(\varepsilon_N(t)) \leq \lambda (1 + \bar{\gamma}_T + C_L) \int_0^t \mathbb{E}(\varepsilon_N(s)) ds + \lambda t \delta_N + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right]$$

para todo $t \leq T$. Luego, puesto que la función $h(t) = \lambda t \delta_N + \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right)$ es no decreciente, el lema de Grönwall establece que:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_N(t)) \leq \left[\lambda t \delta_N + \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right) \right] e^{\lambda(1 + \bar{\gamma}_T + C_L)t}.$$

Paso III. *Calcularemos ahora una cota para $\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right)$.*

Usando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Doob obtenemos que:

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right) \leq \sqrt{\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sup_{s \in [0, t]} |M_s| \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} |M_s|^2 \right)} \leq \frac{1}{N} \sqrt{4\mathbb{E}(M_t^2)} = \frac{1}{N} \sqrt{4\mathbb{E}(I_t)},$$

siendo I_t el *increasing process* de $\{M_t\}_t$ que presentamos en (4.5). Calcularemos entonces una cota para $\mathbb{E}(I_t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t) &= \mathbb{E} \left(\int_0^t \lambda (N - Z_s) [\Psi_N(Z_s) + (1 + \gamma_N(Z_s))^2] ds \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t \lambda N [\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2] ds \right) = \lambda N [\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2] t. \end{aligned}$$

Finalmente, hemos probado que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{M_s}{N} \right| \right) &\leq \frac{2}{N} \sqrt{\mathbb{E}(I_t)} \leq \frac{2}{N} \sqrt{\lambda N [\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2] t} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\lambda [\bar{\Psi}_N + (1 + \bar{\gamma}_N)^2]}{N} t} = 2\sqrt{C_N t}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

4.2.2. Aproximación por difusión.

De manera análoga a lo que hicimos para el caso discreto, veremos a continuación que además se cumple un teorema central del límite funcional ya que el proceso $\left\{ \sqrt{N} (Z_t^N - z(t)) \right\}_t$ converge a una difusión.

Teorema 50. Difusión para $\{Z_t\}_t$. *Supongamos además que existe $\Psi > 0$ continua en \mathbb{R}^+ tal que $\Psi_N(x) = \Psi \left(1 - \frac{x}{N} \right) + \epsilon_N$ con $\epsilon_N \rightarrow 0$ y que γ es lineal (i.e. existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\gamma(x) = ax + b$) con $\sqrt{N} \delta_N \rightarrow 0$. Entonces:*

$$X_t^N = \sqrt{N} (Z_t^N - z(t)) \rightarrow X_t,$$

en la topología de Skorohod, siendo $\{X_t\}_t$ la única solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda (2az(t) + b + 1) X_t dt - \sqrt{\beta'(t)} dB(t) & \forall t \in [0, T], \\ X_0 = 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

donde $\{B(t)\}_t$ es el movimiento browniano estándar, $\beta(t) = \lambda \int_0^t z(s) [\Psi(z(s)) + (1 + \gamma(z(s)))^2] ds$ y z es la única solución de (4.6).

Nuevamente, la hipótesis de linealidad de la función γ se puede debilitar si se agregan condiciones a la función $p_N(k, x)$.

Demostración. Como lo hicimos en el caso discreto, asumiremos primero que la sucesión de procesos $\{\{X_t^N\}_t\}_N$ es convergente para deducir quién tendría que ser $\{X_t\}_t$ y luego probaremos que dicho límite existe efectivamente.

Observemos que en este caso la única solución de (4.6) es $z(t) = \frac{b+1}{(a+b+1)e^{\lambda(1+b)t} - a}$, que está bien definida y es acotada en el intervalo $[0, +\infty)$.

Paso I. Asumiremos primero que existe $X_t = \lim_N X_t^N$ para ver quién tendría que ser $\{X_t\}_t$.

En virtud de las ecuaciones (4.7) y (4.8) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (Z_t^N - z(t)) &= \sqrt{N} \lambda \int_0^t [z(s)(1 + \gamma(z(s))) - Z_s^N (1 + \gamma(Z_s^N) + \delta_N)] ds - \frac{M_t}{\sqrt{N}} \\ &= \sqrt{N} \lambda \int_0^t [z(s) - Z_s^N + \gamma(z(s))(z(s) - Z_s^N) + Z_s^N (\gamma(z(s)) - \gamma(Z_s^N))] ds \\ &\quad - \sqrt{N} \lambda \int_0^t Z_s^N \delta_N ds - \frac{M_t}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Luego, si γ es una función lineal, entonces:

$$X_t^N = -\lambda \int_0^t [(az(s) + b + 1 + aZ_s^N) X_s^N + Z_s^N \sqrt{N} \delta_N] ds - \frac{M_t}{\sqrt{N}} \quad (4.10)$$

y el proceso $\{X_t\}_t$ tiene que verificar:

$$\begin{aligned} X_t &= \lim_N X_t^N \\ &= -\lambda \int_0^t [(az(s) + b + 1 + az(s)) X_s + z(s) \times 0] ds - \lim_N \frac{M_t}{\sqrt{N}} \\ &= -\lambda \int_0^t (2az(s) + b + 1) X_s ds - \lim_N \frac{M_t}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

en virtud del teorema 48, si $0 \leq t \leq T$.

Calcularemos ahora el $\lim_N \frac{M_t}{\sqrt{N}}$. Para eso consideraremos nuevamente el teorema 22.

Sea $Y_t^N = \frac{M_t}{\sqrt{N}}$; sabemos que $\{M_t\}_t$ es una martingala respecto a la filtración generada por $\{Z_t\}_t$ por

lo cual $\{Y_t^N\}_t$ también lo es. Más aún, sabemos que $\{M_t^2 - I_t\}_t$ es una martingala si $\{I_t\}_t$ es como en (4.5). Luego, si tomamos:

$$I_t^N = \frac{1}{N} \int_0^t \lambda (N - Z_s) \left[\Psi_N(Z_s) + (1 + \gamma_N(Z_s))^2 \right] ds,$$

tendremos que $\left\{ (Y_t^N)^2 - I_t^N \right\}_t$ es una martingala, $\{Y_t^N\}_t$ e $\{I_t^N\}_t$ cumplen las condiciones 1-6 del teorema 22 (la prueba es idéntica a la del teorema Teo. 42) y además:

$$\begin{aligned} I_t^N &= \int_0^t \lambda Z_s^N \left[\Psi \left(1 - \frac{Z_s}{N} \right) + \epsilon_N + \left(1 + \gamma \left(1 - \frac{Z_s}{N} \right) + \delta_N \right)^2 \right] ds \\ &= \int_0^t \lambda Z_s^N \left[\Psi(Z_s^N) + \epsilon_N + (1 + \gamma(Z_s^N) + \delta_N)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Entonces, en virtud del teorema 48 y puesto que Ψ y γ son funciones continuas, tenemos la siguiente convergencia en distribución:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(t) = \int_0^t \lambda z(s) \left[\Psi(z(s)) + (1 + \gamma(z(s)))^2 \right] ds.$$

Si $\beta(t) = \lambda \int_0^t z(s) \left[\Psi(z(s)) + (1 + \gamma(z(s)))^2 \right] ds$, el teorema 22 establece que $\frac{M_t}{\sqrt{N}}$ converge en distribución a $\{B(\beta(t))\}_t$, siendo $\{B(t)\}_t$ el movimiento browniano estándar; *i.e.*:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_t}{\sqrt{N}} = B(\beta(t)) =_{\mathbb{D}} \int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s).$$

Entonces:

$$X_t = -\lambda \int_0^t (2az(s) + b + 1) X_s ds - \int_0^t \sqrt{\beta'(s)} dB(s),$$

por lo que verifica la ecuación diferencial estocástica (4.9).

Paso II. *La ecuación diferencial estocástica anterior tiene solución y es única (en ley).*

Puesto que la EDE anterior es lineal, sabemos que la única solución es:

$$X_t = y(t) \int_0^t \frac{-\sqrt{\beta'(s)}}{y(s)} dB(s)$$

con $y(t) = \exp \left[\int_0^t -\lambda (2az(s) + b + 1) ds \right] = (z(t))^2 e^{\lambda(b+1)t}$. Luego, no solo hemos probado que la solución de (4.9) es única (en ley) sino que además hemos probado que $\{X_t\}_t$ resulta ser un proceso

gaussiano con la misma distribución que el movimiento Browniano reescalado $\{B(\sigma_t^2)\}_t$, siendo:

$$\sigma_t^2 = (z(t))^4 e^{2\lambda(b+1)t} \int_0^t \frac{\beta'(s)}{(z(s))^4 e^{2\lambda(b+1)s}} ds. \quad (4.11)$$

Paso III. Veamos que la sucesión de procesos $\left\{ \left\{ X_t^N \right\}_t \right\}_N$ es convergente.

Igual que para el caso discreto, podemos que la sucesión de procesos estocásticos $\{X^N\}_N$ es *tight*. La prueba es idéntica a la del modelo discreto, por lo cual la presentamos en el **Anexo 4.5**. Luego, en virtud del teorema de Prohorov (teorema 5), existe una subsucesión de $\{X^N\}_N$ que converge en la topología de Skorohod. La unicidad demostrada en el paso anterior implica que esta condición es suficiente para probar que $\{X^N\}_N$ es convergente. \square

4.3. Jamming constant del grafo.

Sea $N < \infty$ y $T_N^* = \inf \{t > 0 : Z_t = N\} \wedge T$ el tiempo en que el proceso $\{Z_t\}_t$ llega al estado absorbente o se termina el *slot time*. Esto último puede ocurrir debido a que en este caso se produce un enlentecimiento del proceso $\{Z_t\}_t$ para llegar a N ya que depende de los -posiblemente pocos- relojes exponenciales de los nodos que queden sin explorar hasta tiempo t y debido a la pérdida de memoria de las variables aleatorias exponenciales. Luego, puede ocurrir que al finalizar el *slot time* aún quedasen nodos sin explorar.

Como $T_N^* = \inf \{t > 0 : Z_t^N = 0\} \wedge T$, podríamos querer estimarlo a partir de un T^* tal que $z(T^*) = 0$, como hicimos en el caso discreto. Sin embargo, si estamos en las condiciones del teorema 50 entonces el límite fluido de $\{Z_t^N\}_t$ es $z(t) = \frac{b+1}{(a+b+1)e^{\lambda(1+b)t} - a}$, que no tiene raíz en $(0, \infty)$. Luego, a diferencia de lo que hicimos en el caso discreto, no podremos estimar T_N^* a partir de un T^* tal que $z(T^*) = 0$.

De todas maneras, a diferencia del caso discreto, T_N^* no representa la cantidad de terminales que podrán comunicarse simultáneamente debido a que los saltos no se producen en tiempos predefinidos sino en los tiempos exponenciales que hemos definido previamente. Estimaremos entonces la cantidad de terminales que podrán transmitir simultáneamente durante el *slot time* $[0, T]$ contando los saltos del proceso $\{Z_t\}_t$ hasta llegar al estado absorbente.

Construiremos a continuación un contador de saltos. Consideremos el proceso acoplado $\{(Z_t, C_t)\}_{t \geq 0}$ tal que $\{Z_t\}_t$ es el proceso de Markov de saltos puros que hemos definido antes y $\{C_t\}_t$ es el proceso que cuenta la cantidad de saltos del proceso $\{Z_t\}_t$ hasta t , es decir que $C_{t+h} - C_t = 1$ si en $(t, t+h]$ suena el reloj exponencial de alguna de las terminales no exploradas de la red.

$\{(Z_t, C_t)\}_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov de tiempo continuo en $\{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, N\}$ con generador

infinitesimal $\tilde{Q} = \left(\tilde{q}_{(i,j),(i',j')} \right)_{(i,j),(i',j') \in \{0,1,\dots,N\}^2}$ tal que:

$$\tilde{q}_{(i,j),(i+m,j+1)} = \begin{cases} \lambda(N-i)p_N(m-1,i) & \text{si } 1 \leq m \leq N-i \text{ y } 0 \leq j \leq i; \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Observar que si $T_N^* < T$ entonces $C_{T_N^*}$ es la cantidad de saltos del proceso $\{Z_t\}_t$ hasta llegar al estado absorbente N , es decir, la cantidad de terminales que podrán comunicar simultáneamente. Nuestro objetivo será estimar $\frac{C_{T_N^*}}{N}$, la proporción de nodos que podrán comunicar simultáneamente.

Proposición 51. *El proceso $\{C_t\}_t$ es una semimartingala.*

Demostración. Como mencionamos recién, $\{(Z_t, C_t)\}_t$ es un proceso de Markov con generador infinitesimal $\tilde{Q} = \left(\tilde{q}_{(i,j),(k_1,k_2)} \right)_{(i,j),(k_1,k_2) \in I}$ tal que:

$$\tilde{q}_{(i,j),(k_1,k_2)} = \lambda(N-i)p_N(k_1-i-1,i) \mathbf{1}_{\{j \leq i; i+1 \leq k_1 \leq N; k_2=j+1\}}.$$

Luego, en virtud de la proposición 16 y la observación Obs. 17, tomando $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(k_1, k_2) = k_2$ obtenemos que:

$$\left\{ f(Z_t, C_t) - f(Z_0, C_0) - \int_0^t \tilde{Q}(f)(Z_s, C_s) ds \right\}_{t \geq 0} = \left\{ C_t - C_0 - \int_0^t \tilde{Q}(f)(Z_s, C_s) ds \right\}_{t \geq 0}$$

es una martingala local respecto a la filtración generada por $\{(Z_t, C_t)\}_t$ (que coincide con la filtración generada por $\{Z_t\}_t$ por cómo construimos el proceso $\{C_t\}_t$). Calcularemos a continuación el proceso

$\int_0^t \tilde{Q}(f)(Z_s, C_s) ds$ ya que este será entonces el *compensador* de $\{C_t\}_t$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(f)(i, j) &= \sum_{k=(k_1, k_2) \in I} \tilde{q}_{(i,j),(k_1, k_2)} f(k_1, k_2) \\ &= \sum_{\substack{k=(k_1, k_2) \in I \\ k \neq (i, j)}} \tilde{q}_{(i,j),(k_1, k_2)} (f(k_1, k_2) - f(i, j)) \\ &= \sum_{\substack{k=(k_1, k_2) \in I \\ k \neq (i, j)}} \lambda(N-i)p_N(k_1-i-1,i) \mathbf{1}_{\{j \leq i; i+1 \leq k_1 \leq N; k_2=j+1\}} (f(k_1, k_2) - f(i, j)) \\ &= \sum_{\substack{k=(k_1, k_2) \in I \\ k \neq (i, j)}} \lambda(N-i)p_N(k_1-i-1,i) \mathbf{1}_{\{j \leq i; i+1 \leq k_1 \leq N; k_2=j+1\}} (j+1-j) \\ &= \sum_{k_1=i+1}^N \lambda(N-i)p_N(k_1-i-1,i) = \sum_{m=0}^{N-i-1} \lambda(N-i)p_N(m,i) = \lambda(N-i). \end{aligned}$$

Luego, tenemos que el proceso:

$$N_t = N_t^N =_{def} C_t - C_0 - \int_0^t \lambda (N - Z_s) ds$$

es una martingala local. Más aún, $\forall t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} |N_u| \right] = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} \left| C_u - \int_0^u \lambda (N - Z_s) ds \right| \right] < \infty,$$

por lo cual $\{N_t\}_t$ es una martingala respecto a la filtración generada por $\{Z_t\}_t$ en virtud de la proposición 13. Entonces el proceso $\{C_t\}_t$ puede descomponerse como:

$$C_t = \int_0^t \lambda (N - Z_s) ds + N_t, \quad (4.12)$$

siendo $\{N_t\}_t$ una martingala (i.e. $\{C_t\}_t$ es una semimartingala). \square

Sea $C_t^N = \frac{1}{N} C_t$. Puesto que $C_t^N = \lambda \int_0^t Z_s^N ds + \frac{N_t}{N}$, si asumimos las condiciones del teorema 48 y si probamos que $\frac{N_t}{N} \rightarrow 0$, tendremos que el proceso $\{C_t^N\}_t$ converge (en alguna topología, que determinaremos) a la función $c(t) = \lambda \int_0^t z(s) ds$. Entonces podremos obtener una cota para $\frac{C_{T_N^*}}{N}$ de la siguiente manera:

$$\frac{C_{T_N^*}}{N} \approx \lambda \int_0^{T_N^*} z(s) ds \leq \lambda \int_0^T z(s) ds < \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds .$$

Más aún, probaremos en la proposición 53 que la v.a. $\frac{C_{T_N^*}}{N}$ converge a $\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds$.

Comenzaremos probando que el proceso $\{C_t^N\}_t$ converge en la topología de Skorohod (J_1) a $\{c(t)\}_t$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Proposición 52. Límite fluido para $\{C_t\}_t$. *Supongamos que estamos en las condiciones del teorema 48. Sea $z(t)$ la solución de (4.6) y $c(t) = \lambda \int_0^t z(s) ds$. Entonces para todo $t \in [0, T]$:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |C_s^N - c(s)| \right] = 0 .$$

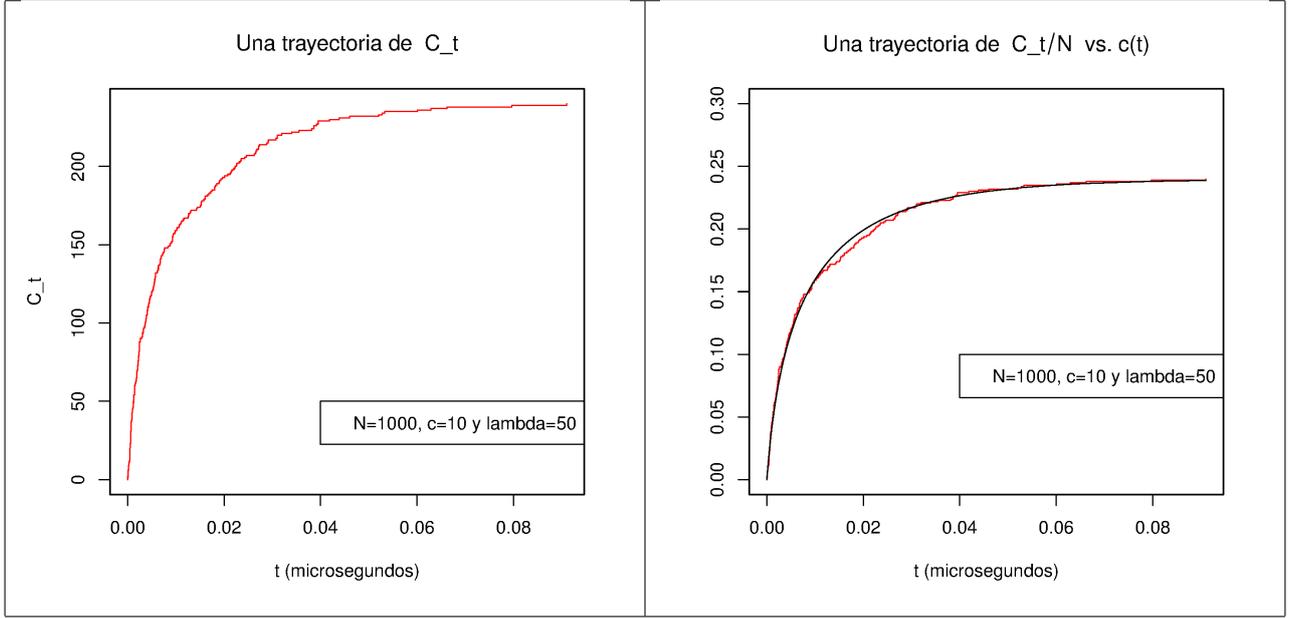


Figura 4.1: Comparación de una trayectoria de $\left\{\frac{C_t}{N}\right\}_t$ vs. $c(t) = \lambda \int_0^t z(s) ds$ para un grafo de Erdős–Rényi $G(N, p_N)$.

Luego, como $\left\{\left\{C_t^N\right\}_t\right\}_N$ es una sucesión de procesos estocásticos càdlàg, tenemos que $\left\{C_t^N\right\}_t$ converge en la topología J_1 a $c(\cdot)$ en virtud del teorema 3.

En la figura **Fig. 4.1** se compara una trayectoria de $\left\{\frac{C_t}{N}\right\}_t$ con $\{c(t)\}_t$ en un grafo de Erdős–Rényi.

Demostración. En virtud de la ecuación (4.12) y del teorema 48, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \left| C_s^N - c(s) \right| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\lambda \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \left| Z_u^N - z(u) \right| ds + \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right] \\
 &\leq \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} \left| Z_u^N - z(u) \right| \right] ds + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right] \\
 &\leq \lambda \int_0^t \left[\lambda s \delta_N + 2\sqrt{C_N s} \right] e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T + C_L)s} ds + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right] \\
 &\leq \lambda t \left[\lambda t \delta_N + 2\sqrt{C_N t} \right] e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T + C_L)t} + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right].
 \end{aligned}$$

Como $\lim_N \lambda t \left[\lambda t \delta_N + 2\sqrt{C_N t} \right] e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T + C_L)t} = 0$ para todo t , basta con probar que $\lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right] = 0$.

Si combinamos las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Doob (dado que $\{N_t\}_t$ es una martingala) obtenemos que:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right] \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N_s|}{N} \right]^2} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |N_s|^2 \right]} \leq \sqrt{\frac{1}{N^2} 4\mathbb{E} [N_t^2]} = 2\sqrt{\frac{1}{N^2} \mathbb{E} [N_t^2]}.$$

Probaremos a continuación que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E} [N_t^2] = 0$ y para eso consideraremos el *increasing process* de $\{N_t\}_t$:

Sean $0 = T_0^N < T_1^N < \dots < T_{k-1}^N < T_k^N < \dots$ los tiempos en los que ocurren los saltos del proceso $\{C_t\}_t$ (i.e. los tiempos en los que ocurren los saltos del proceso $\{Z_t\}_t$); observar que $\{T_k^N\}_k$ es una sucesión de tiempos de parada y que, dado $Z_{T_{k-1}^N}$, $T_k^N - T_{k-1}^N$ distribuye como una *v.a.* exponencial con tasa $\lambda(N - Z_{T_{k-1}^N})$. Además:

$$N_{T_k^N} - N_{T_{k-1}^N} = C_{T_k^N} - C_{T_{k-1}^N} - \lambda \int_{T_{k-1}^N}^{T_k^N} (N - Z_s) ds = 1 - \lambda (N - Z_{T_{k-1}^N}) (T_k^N - T_{k-1}^N).$$

Dado $t > 0$, sean $t_k^N = T_k^N \wedge t$ y $k_N^*(t) = \inf \{k \in \mathbb{N} : t_k^N = t\}$. Observar que $k_N^*(t) = C_t \leq N$ para todo $t > 0$, $N_t = \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N}) = \sum_{k=1}^{\infty} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N})$ y

$$N_t^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (N_{t_k^N}^2 - N_{t_{k-1}^N}^2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} N_{t_{k-1}^N} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N}) + \sum_{k=1}^{\infty} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N})^2.$$

Si $H_N = \sum_{k=1}^{\infty} N_{t_{k-1}^N} \mathbf{1}_{(t_{k-1}^N, t_k^N]}$, entonces H_N es un proceso simple en L^2 y

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} N_{t_{k-1}^N} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N}) = 2 \int_0^t H_N(s) dN_s$$

es una martingala en L^2 ya que $\{N_t\}_t$ lo es. $I_N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N})^2$ es entonces el *increasing process* de $\{N_t\}_t$.

Luego, puesto que el proceso $N_t^2 - I_N(t) = 2 \int_0^t H_N(s) dN_s$ es una martingala, tenemos que:

$$\mathbb{E} (N_t^2 - I_N(t)) = \mathbb{E} (N_0^2 - I_N(0)) = 0 \text{ y } \mathbb{E} (N_t^2) = \mathbb{E} (I_N(t)).$$

Tendremos que probar entonces que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}(I_N(t)) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} I_N(t) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \left[1 - \lambda (N - Z_{t_{k-1}^N}) (t_k^N - t_{k-1}^N) \right]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} 1 - \frac{2\lambda}{N} \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} (t_k^N - t_{k-1}^N) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2. \end{aligned}$$

Calcularemos a continuación la esperanza de cada uno de estos términos:

- $\mathbb{E} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} 1 \right] \leq \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N} \rightarrow 0$;
- $\mathbb{E} \left[\frac{2\lambda}{N} \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} (t_k^N - t_{k-1}^N) \right] \leq \frac{2\lambda}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{k_N^*(t)} (t_k^N - t_{k-1}^N) \right] = \frac{2\lambda}{N} \mathbb{E}(t) = \frac{2\lambda}{N} t \rightarrow 0$;
- Para el tercer término tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\lambda^2 \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \right] &= \lambda^2 \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 1_{\{k \leq k_N^*(t)\}} \right] \\ &= \lambda^2 \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 1_{\{k \leq k_N^*(t)\}} \right] \\ &\leq \lambda^2 \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \right]. \end{aligned}$$

Para cada k :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \right] &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \mid Z_{t_{k-1}^N} \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 \mathbb{E} \left[(t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \mid Z_{t_{k-1}^N} \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 \mathbb{E} \left[(\text{Exp}(\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})))^2 \mid Z_{t_{k-1}^N} \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 \frac{2}{(\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N}))^2} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{2}{\lambda^2 N^2} \right\} = \frac{2}{\lambda^2 N^2} \end{aligned}$$

luego,

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\frac{N - Z_{t_{k-1}^N}}{N} \right)^2 (t_k^N - t_{k-1}^N)^2 \right] = \lambda^2 \sum_{k=1}^N \frac{2}{\lambda^2 N^2} = \frac{2}{N} \rightarrow 0.$$

Hemos probado que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}(I_N(t)) = 0$ y con esto concluimos la demostración. \square

Probaremos a continuación que $\frac{C_{T_N^*}}{N}$ converge en L^1 a $\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds$.

Proposición 53. Ley de los grandes números para la jamming constant. *Si estamos en las condiciones del teorema 48 y $z(t)$ es la solución de (4.6) entonces:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right| = 0.$$

Demostración. Como $\dot{z} = -\lambda z(1 + \gamma(z)) \leq -\lambda z$ y $z(0) = 1$, entonces $z(t) \leq e^{-\lambda t}$. Como además $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $S(\varepsilon) > 0$ tal que $\int_{S(\varepsilon)}^{+\infty} z(s) ds < \frac{\varepsilon}{3\lambda}$. Sin pérdida de generalidad

podemos asumir que $S(\varepsilon) > T > T_N^*$ (ya que si $S(\varepsilon) < T$, también se verifica que $\int_T^{+\infty} z(s) ds < \frac{\varepsilon}{3\lambda}$).

Dado que $Z_s^N = 0 \forall s \geq T_N^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right| &= \mathbb{E} \left| \lambda \int_0^{T_N^*} Z_s^N ds + \frac{N_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right| \\ &= \mathbb{E} \left| \lambda \int_0^{S(\varepsilon)} (Z_s^N - z(s)) ds + \frac{N_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_{S(\varepsilon)}^{+\infty} z(s) ds \right| \\ &\leq \lambda S(\varepsilon) \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, S(\varepsilon)]} |Z_s^N - z(s)| \right] + \mathbb{E} \left| \frac{N_{T_N^*}}{N} \right| + \lambda \int_{S(\varepsilon)}^{+\infty} z(s) ds. \end{aligned}$$

Acotaremos cada uno de estos tres términos:

- $\lambda \int_{S(\varepsilon)}^{+\infty} z(s) ds < \lambda \frac{\varepsilon}{3\lambda}$ por construcción de $S(\varepsilon)$.
- $\mathbb{E} \left| \frac{N_{T_N^*}}{N} \right| \leq \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \left| \frac{N_t}{N} \right| \right] < \frac{\varepsilon}{3}$ si tomamos N suficientemente grande ya que en la prueba de la proposición anterior vimos que $\lim_N \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \left| \frac{N_t}{N} \right| \right] = 0$,

▪ y

$$\begin{aligned}
\lambda S(\varepsilon) \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, S(\varepsilon)]} |Z_s^N - z(s)| \right] &= \lambda S(\varepsilon) \max \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Z_s^N - z(s)| \right], \sup_{s \in [T, S(\varepsilon)]} |z(s)| \right\} \\
&= \lambda S(\varepsilon) \max \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Z_s^N - z(s)| \right], |z(T)| \right\} \\
&= \lambda S(\varepsilon) \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Z_s^N - z(s)| \right] \\
&\leq \lambda S(\varepsilon) \left[\lambda T \delta_N + 2\sqrt{C_N T} \right] e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T + C_L)T} \\
&< \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

si tomamos N suficientemente grande, en virtud del teorema 48.

Finalmente, hemos probado que:

$$\mathbb{E} \left| \frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

Es decir que, si estamos en las condiciones del teorema 48, la *jamming constant* del grafo según este modelo es $\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds$.

Observación 54. Puesto que:

$$\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds = - \int_0^{+\infty} \frac{\dot{z}(s)}{1 + \gamma(z(s))} ds = - \int_1^0 \frac{1}{1 + \gamma(u)} du = \int_0^1 \frac{1}{1 + \gamma(u)} du,$$

la *jamming constant* solo depende de γ . En particular, no depende de λ . Es decir que el λ determina la velocidad con que se realiza la “selección” de quiénes serán los nodos que podrán transmitir en cada *slot time*, pero no cuántos de ellos podrán transmitir.

Resulta natural preguntarnos ahora si tendremos también un teorema central del límite para la *jamming constant*, es decir, si la variable aleatoria:

$$\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right)$$

converge, cuando N tiende a infinito, a una variable aleatoria cuya distribución sea conocida.

Probaremos primero que $\sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right)$ converge a una *v.a.* normal para cada $t > 0$ y luego que $\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right)$ converge también a una *v.a.* normal.

Proposición 55. *Supongamos que estamos en las condiciones del teorema 50. Para cada $t > 0$ se tiene que:*

$$\sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right)$$

converge en distribución a una variable aleatoria $N(0, \rho_t^2)$, siendo:

- $\rho_t^2 = h(t) + c(t) - 2 \min \{h(t), c(t)\};$
- $h(t) = \int_0^t \lambda^2 \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} (Y(t) - Y(u))^2 du;$
- $y(t) = (z(t))^2 e^{\lambda(b+1)t}$ e $Y(t) = \frac{-1}{\lambda(a+b+1)} z(t);$
- $\beta(t) = \lambda \int_0^t z(s) [\Psi(z(s)) + (1 + \gamma(z(s)))^2] ds$ y
- $c(t) = \lambda \int_0^t z(s) ds.$

Demostración. En virtud de la ecuación (4.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right) &= \sqrt{N} \left(\lambda \int_0^t Z_s^N ds + \frac{N_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right) \\ &= \lambda \int_0^t \sqrt{N} (Z_s^N - z(s)) ds + \frac{N_t}{\sqrt{N}} \\ &= \lambda \int_0^t X_s^N ds + \frac{N_t}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Por el teorema 50 sabemos que $\{X_t^N\}_t$ converge en la topología de Skorohod al proceso $\{X_t\}_t$, que es solución de la EDE (4.9). Vimos además que:

$$X_t = y(t) \int_0^t \frac{-\sqrt{\beta'(s)}}{y(s)} dB(s), \text{ siendo } y(t) = (z(t))^2 e^{\lambda(b+1)t}.$$

Luego,

$$\lim_N \int_0^t X_s^N ds = \int_0^t X_s ds = \int_0^t \left(y(s) \int_0^s \frac{-\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} dB(u) \right) ds.$$

Además, el teorema de Fubini para integrales estocásticas establece que:

$$\int_0^t \left(y(s) \int_0^s \frac{-\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} dB(u) \right) ds = \int_0^t \left(\int_u^t -y(s) \frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} ds \right) dB(u)$$

ya que en este caso la *fórmula de corrección del teorema de Fubini para integrales estocásticas* da cero (ver [11]). Es decir que:

$$\begin{aligned} \lim_N \lambda \int_0^t X_s^N ds &= \lambda \int_0^t -\frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} \left(\int_u^t y(s) ds \right) dB(u) \\ &= \lambda \int_0^t -\frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} (Y(t) - Y(u)) dB(u) \end{aligned}$$

si $Y(t)$ es alguna primitiva de $y(t)$, *i.e.*:

$$Y(t) = \int y(t) dt = \int (z(t))^2 e^{\lambda(b+1)t} dt = \frac{-1}{\lambda(a+b+1)} z(t) + \text{cte}.$$

A partir del teorema fundamental del cálculo integral podemos deducir que Y es creciente y

$$\frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} (Y(t) - Y(u)) > 0,$$

luego:

$$\begin{aligned} \lim_N \int_0^t X_s^N ds &= - \int_0^t \lambda \frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} (Y(t) - Y(u)) dB(u) \\ &=_{\mathbb{D}} -B \left(\int_0^t \left[\lambda \frac{\sqrt{\beta'(u)}}{y(u)} (Y(t) - Y(u)) \right]^2 du \right) \\ &= -B(h(t)). \end{aligned}$$

Calcularemos ahora el $\lim_N \frac{N_t}{\sqrt{N}}$. En la prueba de la proposición 51 vimos que $\{N_t\}_t$ es una martingala; más aún, sabemos que $\{N_t^2 - I_N(t)\}_t$ es una martingala, siendo:

$$I_N(t) = \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \left(N_{t_k^N} - N_{t_{k-1}^N} \right)^2 = \sum_{k=1}^{k_N^*(t)} \left[1 - \lambda(N - Z_{t_{k-1}^N}^N) \left(t_k^N - t_{k-1}^N \right) \right]^2,$$

$k_N^*(t) = \inf \{k \in \mathbb{N} : t_k^N = t\} = C_t$ y $t_k^N = T_k^N \wedge t$. Luego, los procesos $\left\{\frac{N_t}{\sqrt{N}}\right\}_t$ y $\left\{\frac{N_t^2 - I_N(t)}{N}\right\}_t$ también son martingalas. Veremos a continuación que $\frac{I_N(t)}{N}$ converge en distribución a $c(t) = \lambda \int_0^t z(s) ds$.

De la demostración de la proposición 18 se desprende que $\left\{\frac{1}{N}I_N(t)\right\}_t$ converge uniformemente, cuando N tiende a infinito, a un único proceso continuo y creciente $\{I(t)\}_t$. Asumamos que $\{I(t)\}_t$ es determinístico (en principio no tendría por qué serlo, pero la unicidad junto con la cuenta que haremos a continuación demostrará que lo es), entonces:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \mathbb{E}(I(t)) = \mathbb{E}\left(\lim_N \frac{1}{N}I_N(t)\right) = \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}I_N(t)\right) \\
&= \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{C_t} \left[1 - \lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})(t_k^N - t_{k-1}^N)\right]^2\right) \\
&= \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{C_t}{N}\right) + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[\left(-2\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})(t_k^N - t_{k-1}^N) + \lambda^2(N - Z_{t_{k-1}^N})^2(t_k^N - t_{k-1}^N)^2\right)\mathbf{1}_{\{k \leq C_t\}}\right] \\
&= \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{C_t}{N}\right) + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left(-2\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})(t_k^N - t_{k-1}^N) + \lambda^2(N - Z_{t_{k-1}^N})^2(t_k^N - t_{k-1}^N)^2\right)\mathbf{1}_{\{k \leq C_t\}} \mid Z_{t_{k-1}^N}\right]\right\} \\
&= \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{C_t}{N}\right) + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left\{\left(-2\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})\frac{1}{\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})} + \lambda^2(N - Z_{t_{k-1}^N})^2\frac{2}{\lambda^2(N - Z_{t_{k-1}^N})^2}\right)\mathbf{1}_{\{k \leq C_t\}}\right\} \\
&= \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{C_t}{N}\right) + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\{0\mathbf{1}_{\{k \leq C_t\}}\}
\end{aligned}$$

ya que, dado $Z_{t_{k-1}^N}$, $t_k^N - t_{k-1}^N$ es una variable exponencial de parámetro $\lambda(N - Z_{t_{k-1}^N})$. Luego,

$$I(t) = \lim_N \mathbb{E}\left(\frac{C_t}{N}\right) = c(t)$$

en virtud de la proposición 52. Deducimos que $I(t)$ es determinística ya que:

$$\lim_N \frac{C_t}{N} = c(t),$$

i.e. no precisábamos usar la esperanza en el límite anterior (pero facilita el cálculo).

$\left\{\frac{N_t}{\sqrt{N}}\right\}_t$ e $\left\{\frac{I_N(t)}{N}\right\}_t$ están entonces en las hipótesis del teorema 22 por lo que $\left\{\frac{N_t}{\sqrt{N}}\right\}_t$ converge en distribución al proceso $\{B(c(t))\}_t$, siendo $\{B(t)\}_t$ el *mismo* movimiento Browniano que define al proceso $\{X_t\}_t$ (recordar que $\{X_t^N\}_t$ también se construyó usando el teorema 22).

En la figura **Fig. 4.2** se comparan trayectorias $\left\{\frac{N_t}{\sqrt{N}}\right\}_t$ y $\{B(c(t))\}_t$ para un grafo de Erdős–Rényi.

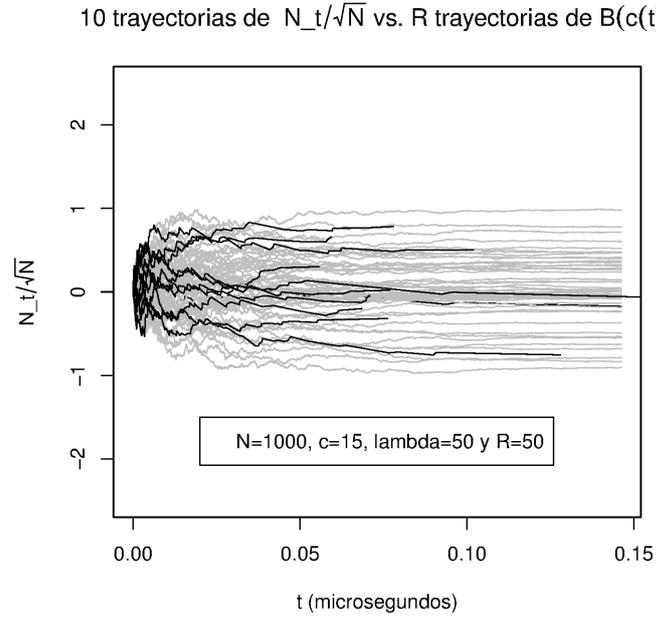


Figura 4.2: Comparación de diez trayectorias de $\left\{\frac{N_t}{\sqrt{N}}\right\}_t$ con R trayectorias de $\{B(c(t))\}_t$ para un grafo de Erdős–Rényi $G(N, p_N)$.

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_N \sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right) &=_{\mathbb{D}} \lambda \int_0^t X_s ds + B(c(t)) \\ &=_{\mathbb{D}} -B(h(t)) + B(c(t)), \end{aligned}$$

es decir que para cada t la variable aleatoria $\sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right)$ converge en distribución a una variable normal con media cero y varianza:

$$\begin{aligned} \rho_t^2 &= \text{var}(B(c(t)) - B(h(t))) \\ &= \text{var}(B(c(t))) + \text{var}(B(h(t))) - 2\text{cov}(B(c(t)), B(h(t))) \\ &= c(t) + h(t) - 2\text{mín}\{c(t), h(t)\}. \end{aligned}$$

□

Observar que no estudiamos la convergencia de $\sqrt{N} \left(\frac{C_t}{N} - \lambda \int_0^t z(s) ds \right)$ como proceso ya que nuestra finalidad será estudiar la convergencia de la variable aleatoria $\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right)$. Esto es lo que haremos a continuación.

Teorema 56. Teorema Central del Límite para la jamming constant.

Si estamos en las condiciones del teorema 50, entonces la variable aleatoria:

$$\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right)$$

converge en distribución a una variable normal con media cero y varianza:

$$\rho^2 = \lim_N \rho_{T_N}^2,$$

siendo $T_N = \frac{1}{\lambda(1+b)} \log \left(\frac{(b+1)N+a}{a+b+1} \right)$ y ρ_t^2 como en la proposición anterior.

Demostración. Sabemos que $z(t) = \frac{b+1}{(a+b+1)e^{\lambda(1+b)t-a}}$ converge rápidamente a cero. Podemos tomar entonces $T_N > 0$ tal que $z(T_N) = \frac{1}{N}$ (i.e. $T_N = \frac{1}{\lambda(1+b)} \log \left(\frac{(b+1)N+a}{a+b+1} \right)$). Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right) &= \sqrt{N} \left(\lambda \int_0^{T_N^*} Z_s^N ds + \frac{N_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\lambda \int_0^{T_N} Z_s^N ds + \frac{N_{T_N}}{N} + \lambda \int_{T_N}^{T_N^*} Z_s^N ds + \frac{N_{T_N^*}}{N} - \frac{N_{T_N}}{N} \right) \\ &\quad + \sqrt{N} \left(-\lambda \int_0^{T_N} z(s) ds - \lambda \int_{T_N}^{+\infty} z(s) ds \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N}}{N} - \lambda \int_0^{T_N} z(s) ds \right) + \frac{N_{T_N^*} - N_{T_N}}{\sqrt{N}} \\ &\quad + \lambda \sqrt{N} \int_{T_N}^{T_N^*} Z_s^N ds - \lambda \sqrt{N} \int_{T_N}^{+\infty} z(s) ds. \end{aligned}$$

Estudiaremos el límite cuando $N \rightarrow \infty$ de cada uno de estos términos:

- En virtud de la proposición anterior tenemos que:

$$\lim_N \sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N}}{N} - \lambda \int_0^{T_N} z(s) ds \right) =_{\mathbb{D}} \lim_N N(0, \rho_{T_N}^2) =_{\mathbb{D}} N(0, \rho^2),$$

siendo $\rho^2 = \lim_N \rho_{T_N}^2$.

- También de la demostración de la proposición anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_N \mathbb{E} \left| \frac{N_{T_N^*} - N_{T_N}}{\sqrt{N}} \right| &=_{\mathbb{D}} \lim_N \mathbb{E} |B(c(T_N^*)) - B(c(T_N))| \\
&= \lim_N \mathbb{E} \left| \sqrt{|c(T_N^*) - c(T_N)|} N(0, 1) \right| \\
&\leq \lim_N \sqrt{\left| \lambda \int_{T_N}^{+\infty} z(s) ds \right|} \mathbb{E} |N(0, 1)| \\
&= \lim_N \sqrt{\left| \lambda \int_{T_N}^{+\infty} \frac{b+1}{(a+b+1)e^{\lambda(1+b)s} - a} ds \right|} \mathbb{E} |N(0, 1)| \\
&= \lim_N \sqrt{\left| \lambda \int_{e^{-\lambda(1+b)T_N}}^0 \frac{1}{au - (a+b+1)} du \right|} \mathbb{E} |N(0, 1)| \\
&= \lim_N \sqrt{\left| \frac{1}{a} \log \left| \frac{a}{(b+1)N+a} - 1 \right| \right|} \mathbb{E} |N(0, 1)| = 0.
\end{aligned}$$

- Para el tercer término tenemos que:

$$\lim_N \lambda \sqrt{N} \int_{T_N}^{T_N^*} Z_s^N ds \leq \lim_N \lambda \sqrt{N} \frac{1}{N} |T_N^* - T_N| = \lim_N \frac{\lambda}{\sqrt{N}} |T_N^* - T_N| = 0$$

en virtud del teorema 48.

- Finalmente,

$$\lim_N \sqrt{N} \int_{T_N}^{+\infty} z(s) ds = \lim_N \frac{\sqrt{N}}{a} \log \left(1 - \frac{a}{(b+1)N+a} \right) = \lim_N \frac{\sqrt{N}}{(b+1)N+a} = 0 \quad .$$

Tenemos entonces que $\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds \right)$ converge en distribución a una variable normal con media cero y varianza $\rho^2 = \lim_N \rho_{T_N}^2$. □

Este teorema nos permitirá construir un intervalo de confianza para la *jamming constant* en la próxima sección.

4.4. Grafo de Erdős–Rényi.

Presentaremos los resultados anteriores para el caso en que el grafo de interferencias sea un grafo de Erdős–Rényi. Veremos que en este caso los resultados obtenidos para la proporción de nodos del grafo que pueden transmitir simultáneamente coinciden con los que obtuvimos en el modelo discreto.

Consideraremos nuevamente el caso en que $Np_N \rightarrow c$ y $\sqrt{N}(Np_N - c) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, siendo $c > 0$ el número medio de nodos que interfieren en la transmisión de un nodo cualquiera de la red. Como observamos en la sección 3.3, $\gamma_N(x) \approx \gamma\left(1 - \frac{x}{N}\right)$ y $\Psi_N(x) \approx \Psi\left(1 - \frac{x}{N}\right)$ si

$$\gamma(x) = \Psi(x) = cx$$

cuando N es suficientemente grande. Luego, γ_N y Ψ_N están en las condiciones de los teoremas 48 y 50 si tomamos $a = c$ y $b = 0$.

4.4.1. Límite fluido.

Luego, en virtud de los teoremas 48 y 50 tenemos que el proceso $\{Z_s^N\}_s$ converge en la topología de Skorohod a $z(\cdot)$, siendo $z(\cdot)$ la solución de:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\lambda z(1 + \gamma(z)) = -\lambda z(1 + cz) \\ z(0) = 1 \end{cases},$$

i.e. $z(t) = \frac{1}{(c+1)e^{\lambda t} - c}$ para todo $t \geq 0$.

En la figura **Fig. 4.3** se comparan trayectorias de $\{Z_t^N\}_{t \in [0, T]}$ con $z(\cdot)$ para distintos valores de N , c y λ en el caso de que $p_N = \frac{c}{N}$ y bajo el supuesto de que el *ancho de banda* de la red sea de 10 Mbit/s, es decir que en este caso la duración del *slot time* es de $T = 51,2$ microsegundos. Observar que el valor de λ determina la velocidad con la que $\{Z_t^N\}_{t \in [0, T]}$ llega al estado absorbente 0.

Además, hemos probado que el proceso $\{\sqrt{N}(Z_t^N - z(t))\}_{t \in [0, T]}$ converge en la topología de Skorohod a $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, siendo este proceso la única (en ley) solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda(2cz(t) + 1)X_t dt - \sqrt{\beta'(t)}dB(t) \\ X_0 = 0 \end{cases}. \quad (4.13)$$

Como hicimos en el caso discreto, en la figura **Fig. 4.4** hemos comparado una trayectoria del proceso

$$\{X_t^N\}_{t \in [0, T]} = \{\sqrt{N}(Z_t^N - z(t))\}_{t \in [0, T]}$$

con R trayectorias de la aproximación al proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ mediante el método de Euler-Maruyama.

En este caso, para cada $\omega \in \Omega$ consideramos una partición del intervalo $[0, T_N^*(\omega)]$:

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K = T_N^*(\omega)$$

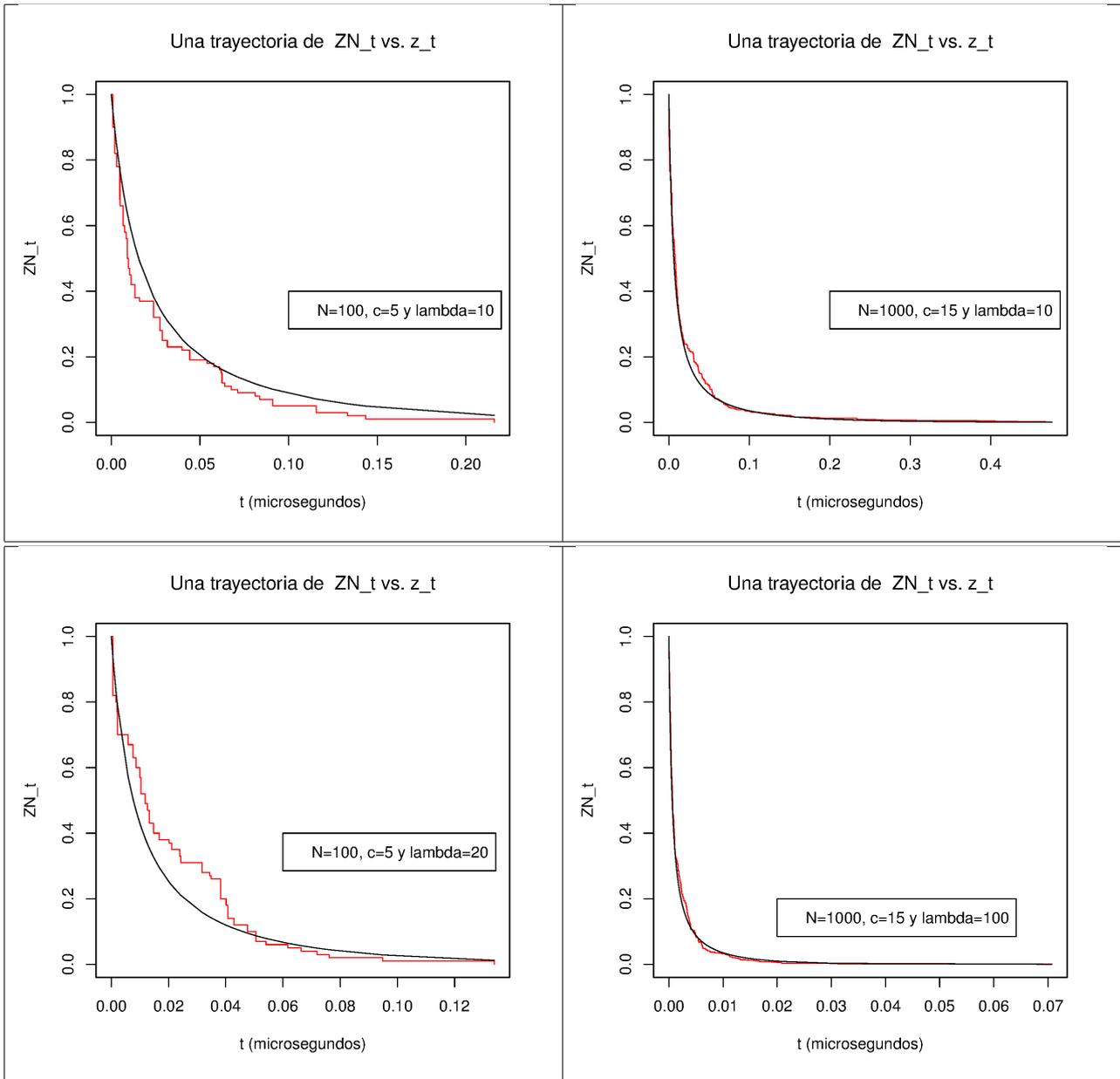


Figura 4.3: Comparación entre las gráficas correspondientes a una trayectoria de $\{Z_t^N\}_{t \in [0, T]}$ en un grafo de Erdős–Rényi $G(N, p_N)$ y $z(t)$ para distintos valores de N , c y λ con un ancho de banda de 10 Mbit/s ($T = 51,2$ microsegundos).

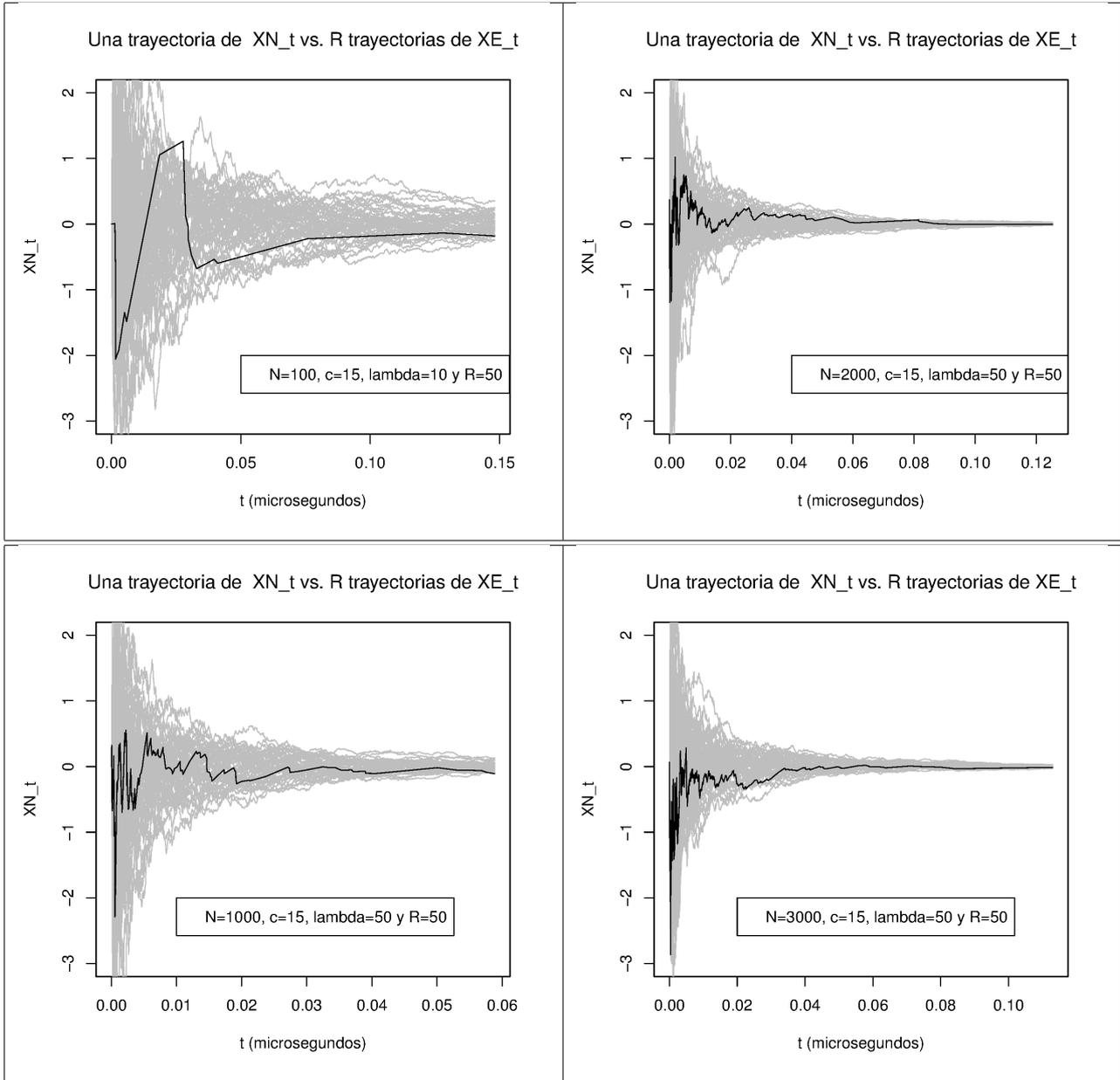


Figura 4.4: Comparación de una trayectoria de $\{X_t^N\}_t$ con R trayectorias de la aproximación a la solución de la EDE (4.13) mediante el método de Euler-Maruyama, $\{X_t^E\}_t$, en un grafo de Erdős-Rényi $G(N, p_N)$ para distintos valores de N, c y λ .

tal que $t_{i+1} - t_i = \frac{T_N^*(\omega)}{K}$ con K suficientemente grande y la sucesión $\{X_{t_n}^E\}_{n=0,1,\dots,K}$ de variables aleatorias:

$$\begin{cases} X_{t_0}^E = 0 \\ X_{t_{n+1}}^E = X_{t_n}^E - \lambda(2cz(t_n) + 1)X_{t_n}^E(t_{n+1} - t_n) - \sqrt{\beta'(t_n)}\sqrt{t_{n+1} - t_n}Z_{n+1} \end{cases},$$

donde Z_1, Z_2, \dots, Z_K son independientes y con distribución $N(0, 1)$. Luego, en la figura **Fig. 4.4** hemos comparado una trayectoria del proceso $\{X_t^E\}_{t \in [0, T]}$ con R trayectorias del proceso $\{X_t^E\}_{t \in [0, T]}$ tal que:

$$X_t^E = X_{t_n}^E + \frac{X_{t_{n+1}}^E - X_{t_n}^E}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}).$$

4.4.2. Jamming constant del grafo.

En virtud del teorema 53 sabemos que $\frac{C_{T_N^*}}{N}$, la proporción de nodos que podrán comunicar simultáneamente, converge en L^1 a $\lambda \int_0^{+\infty} z(s)ds$. Es decir que:

$$\lim_{L^1} \frac{C_{T_N^*}}{N} = \lambda \int_0^{+\infty} z(s)ds = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{1}{(c+1)e^{\lambda s} - c} ds = \frac{1}{c} \log(c+1)$$

es la *jamming constant* del grafo según este modelo. Observar que coincide con la que ya habíamos calculado para el modelo discreto y, en especial, que no depende del parámetro λ .

En la figura **Fig. 4.5** se compara el promedio de m realizaciones de $\frac{C_{T_N^*}}{N}$ con $\frac{1}{c} \log(c+1)$ para distintos valores de N . Observar que la convergencia es buena incluso cuando N no es grande. En la figura **Fig. 4.6** se muestra que la *jamming constant* no depende de λ .

Más aún, en virtud del teorema 56 sabemos que la *v.a.*:

$$\sqrt{N} \left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \frac{1}{c} \log(c+1) \right)$$

converge en distribución a una variable aleatoria normal con media cero y varianza $\rho^2 = \lim_N \rho_{T_N}^2$, siendo:

$$\rho_{T_N}^2 = c(T_N) + h(T_N) - 2 \min \{c(T_N), h(T_N)\}.$$

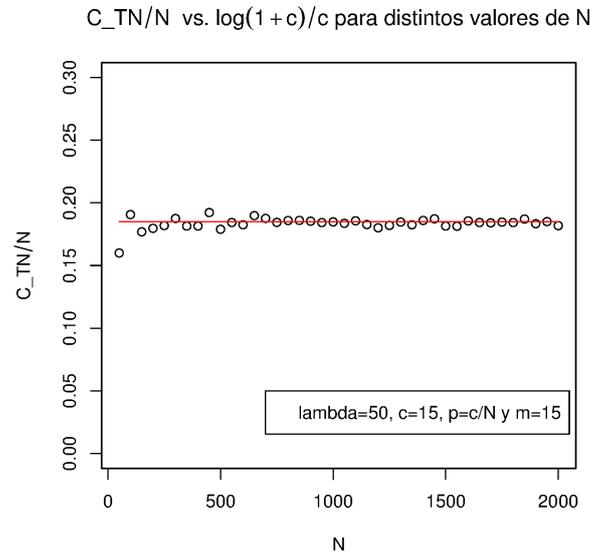


Figura 4.5: Comparación del promedio de m realizaciones de $\frac{C_{T^N}}{N}$ con $\frac{1}{c} \log(c+1)$ para distintos valores de N .

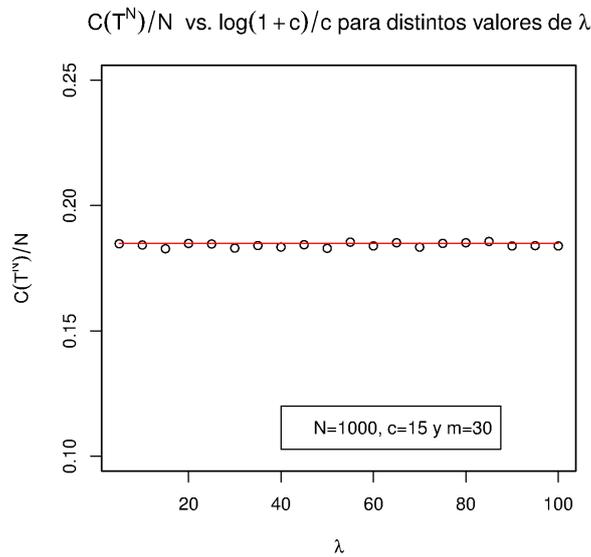


Figura 4.6: Comparación entre el promedio de m realizaciones de $\frac{C_{T^N}}{N}$ y la jamming constant del grafo $\frac{1}{c} \log(1+c)$ para distintos valores de λ .

En este caso:

- $T_N = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{N+c}{c+1} \right)$.
- $y(u) = z(u)^2 e^{\lambda u} = \frac{e^{\lambda u}}{[(c+1)e^{\lambda u} - c]^2}$ e $Y(u) = \frac{-1}{\lambda(c+1)} z(u)$.
- $c(t) = \frac{1}{c} \log [(c+1) - ce^{-\lambda t}]$ y $\lim_N c(T_N) = \frac{1}{c} \log(c+1)$.
- $h(t) = \lambda^2 Y(t)^2 \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} du - 2\lambda^2 Y(t) \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} Y(u) du + \lambda^2 \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} (Y(u))^2 du$, siendo:
 - ◊ $\lambda^2 Y(t)^2 \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} du = \frac{z(t)^2}{(c+1)^2} [(c+1)^3 e^{\lambda t} + 2c^2(c+1)e^{-\lambda t} - \frac{c^3}{2}e^{-2\lambda t} - (c+1)^3 - 2c^2(c+1) + \frac{c^3}{2}]$,
 - ◊ $-2\lambda^2 Y(t) \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} Y(u) du = \frac{-2z(t)}{(c+1)^2} [(c+1)^2 \lambda t - c(c+1)e^{-\lambda t} + \frac{c^2}{2}e^{-2\lambda t} + c(c+1) - \frac{c^2}{2}]$ y
 - ◊ $\lambda^2 \int_0^t \frac{\beta'(u)}{y(u)^2} (Y(u))^2 du = \frac{-c}{2(c+1)^2 e^{2\lambda t}} - \frac{\lambda t}{c} + \frac{1}{c} \log((c+1)e^{\lambda t} - c) + \frac{c}{2(c+1)^2}$.
- Luego, $\lim_N h(T_N) = \frac{1}{c} \log(c+1) + \frac{c}{2(c+1)^2}$ y

$$\lim_N \min \{h(T_N), c(T_N)\} = \min \left\{ \frac{1}{c} \log(c+1) + \frac{c}{2(c+1)^2}, \frac{1}{c} \log(c+1) \right\} = \frac{1}{c} \log(c+1).$$

Entonces:

$$\rho^2 = \frac{1}{c} \log(c+1) + \frac{c}{2(c+1)^2} + \frac{1}{c} \log(c+1) - 2\frac{1}{c} \log(c+1) = \frac{c}{2(c+1)^2}.$$

Observar que ρ^2 coincide con la varianza para la *jamming constant* que obtuvimos a partir del modelo discreto en la sección 3.3.

Finalmente, consideremos N suficientemente grande y fijo (por ejemplo, tomaremos $N = 1000$); resumiremos a continuación la información que tenemos acerca de la proporción (aleatoria) de terminales que podrán comunicarse simultáneamente en cada *slot time*, llamémosle $J = J_N = \frac{C_{T_N}^*}{N}$, según este modelo.

Sabemos que:

- $\mathbb{E}(J) = \mathbb{E}\left(\frac{C_{T_N}^*}{N}\right) \approx \frac{1}{c} \log(1+c)$ ya que $\lim_N \mathbb{E}\left|\frac{C_{T_N}^*}{N} - \frac{1}{c} \log(1+c)\right| = 0$.

- La distribución de la variable aleatoria $\sqrt{N} \left(\frac{C_{TN}^*}{N} - \frac{1}{c} \log(1+c) \right)$ puede ser aproximable por la de una $N(0, \rho^2)$ con $\rho^2 = \frac{c}{2(c+1)^2}$; en particular:

$$\text{var} \left(\sqrt{N} \left(J - \frac{1}{c} \log(1+c) \right) \right) \approx \rho^2 \Rightarrow N \text{var}(J) \approx \rho^2 \Rightarrow \text{var}(J) \approx \frac{\rho^2}{N}.$$

Consideremos m realizaciones de la v.a. J, J_1, J_2, \dots, J_m ; compararemos la media muestral de J con $\frac{1}{c} \log(1+c)$ pues:

$$\bar{J}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m J_i \rightarrow_m \mathbb{E}(J) \approx \frac{1}{c} \log(1+c),$$

y la varianza muestral de J con $\frac{\rho^2}{N}$ pues:

$$\rho_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (J_i - \bar{J}_m)^2 \rightarrow_m \text{var}(J) \approx \frac{\rho^2}{N}.$$

La siguiente tabla compara \bar{J}_m con $\frac{1}{c} \log(1+c)$ y ρ_m^2 con $\frac{\rho^2}{N}$ para distintos valores del número medio de vecinos con $N = 1000$ y $m = 100$. En todos los casos consideramos $\lambda = 50$.

c	\bar{J}_m	$\frac{1}{c} \log(1+c)$	ρ_m^2	$\frac{\rho^2}{N} = \frac{1}{N} \frac{c}{2(c+1)^2}$
5	0.36258	0.3583519	6.810465e-05	6.944444e-05
10	0.24028	0.2397895	2.731475e-05	4.132231e-05
15	0.18645	0.1848392	3.255303e-05	2.929687e-05
30	0.1126	0.1144662	1.266667e-05	1.560874e-05

En la figura **Fig. 4.7** se muestran los *boxplots* correspondientes a dichas muestras. Igual que en el caso discreto, se puede observar que la varianza de J decrece a medida que aumenta el número medio de vecinos de un nodo del grafo.

Como hemos mencionado antes, ya obtuvimos una estimación puntual para la *jamming constant* a partir de:

$$\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds = \frac{1}{c} \log(c+1).$$

Ahora daremos una estimación por intervalo de confianza para dicho parámetro, es decir que construiremos un intervalo tal que sepamos que, con probabilidad $1 - \alpha$, la proporción de nodos que podrán comunicar simultáneamente para una corrida del algoritmo descrito para este modelo caiga dentro de dicho intervalo. Igual que en el caso discreto, este intervalo será de la forma:

$$I_\alpha = \left[\lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds - k_\alpha, \lambda \int_0^{+\infty} z(s) ds + k_\alpha \right].$$

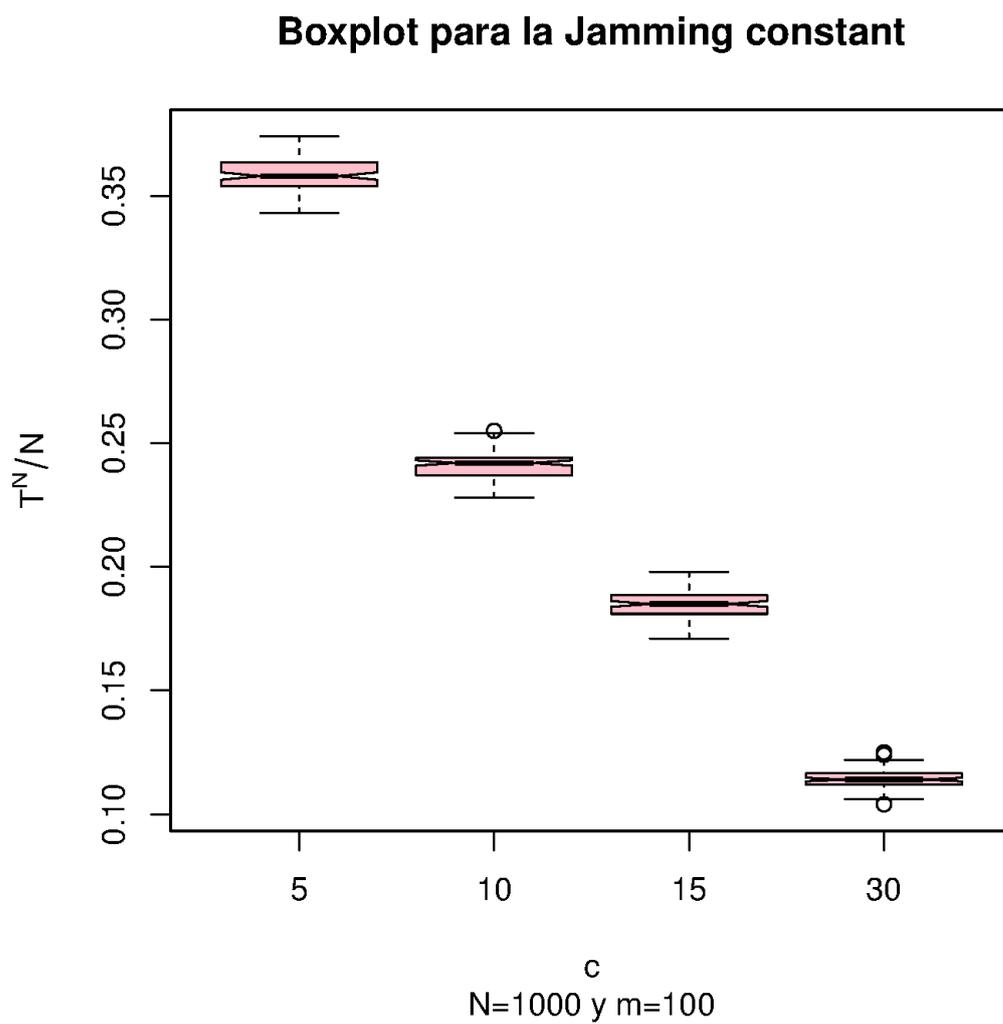


Figura 4.7: *Boxplots* correspondientes a las muestras J_1, J_2, \dots, J_m para distintos valores de c .

Determinaremos a continuación el k_α .

En virtud del teorema 56 tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J \in I_\alpha) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s)ds\right| \leq k_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sqrt{N}\left(\frac{C_{T_N^*}}{N} - \lambda \int_0^{+\infty} z(s)ds\right)\right| \leq \sqrt{N}k_\alpha\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(|N(0, \rho^2)| \leq \sqrt{N}k_\alpha\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}k_\alpha}{\rho}\right) - 1, \end{aligned}$$

luego $\mathbb{P}(J \in I_\alpha) \approx 1 - \alpha$ si $k_\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{N}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Observar que el intervalo de confianza anterior es válido para cualquier grafo en las condiciones de los teoremas 48 y 50 (no solo para un grafo de Erdős–Rényi).

En el caso particular de un grafo de Erdős–Rényi, este intervalo coincide con el que obtuvimos para el modelo discreto:

$$I_\alpha = \left[\frac{1}{c} \log(c+1) - \frac{\rho}{\sqrt{N}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{1}{c} \log(c+1) + \frac{\rho}{\sqrt{N}}z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

con $\rho = \sigma = \sqrt{\frac{c}{2(c+1)^2}}$.

Finalmente, en la figura **Fig. 4.8** comparamos cada uno de los *boxplots* de la figura **Fig. 4.7** con I_α para $\alpha = 0,05$, es decir que:

$$k_\alpha = k_{\alpha,c} = \frac{\rho}{\sqrt{N}} \times 1,96 = \sqrt{\frac{c}{2N(c+1)^2}} \times 1,96.$$

Los gráficos parecen ser los mismos que presentamos en el caso discreto debido a que en este caso la media y la varianza para la jamming constant coinciden con las que obtuvimos con el modelo discreto, aún cuando los algoritmos de exploración del grafo fueron distintos.

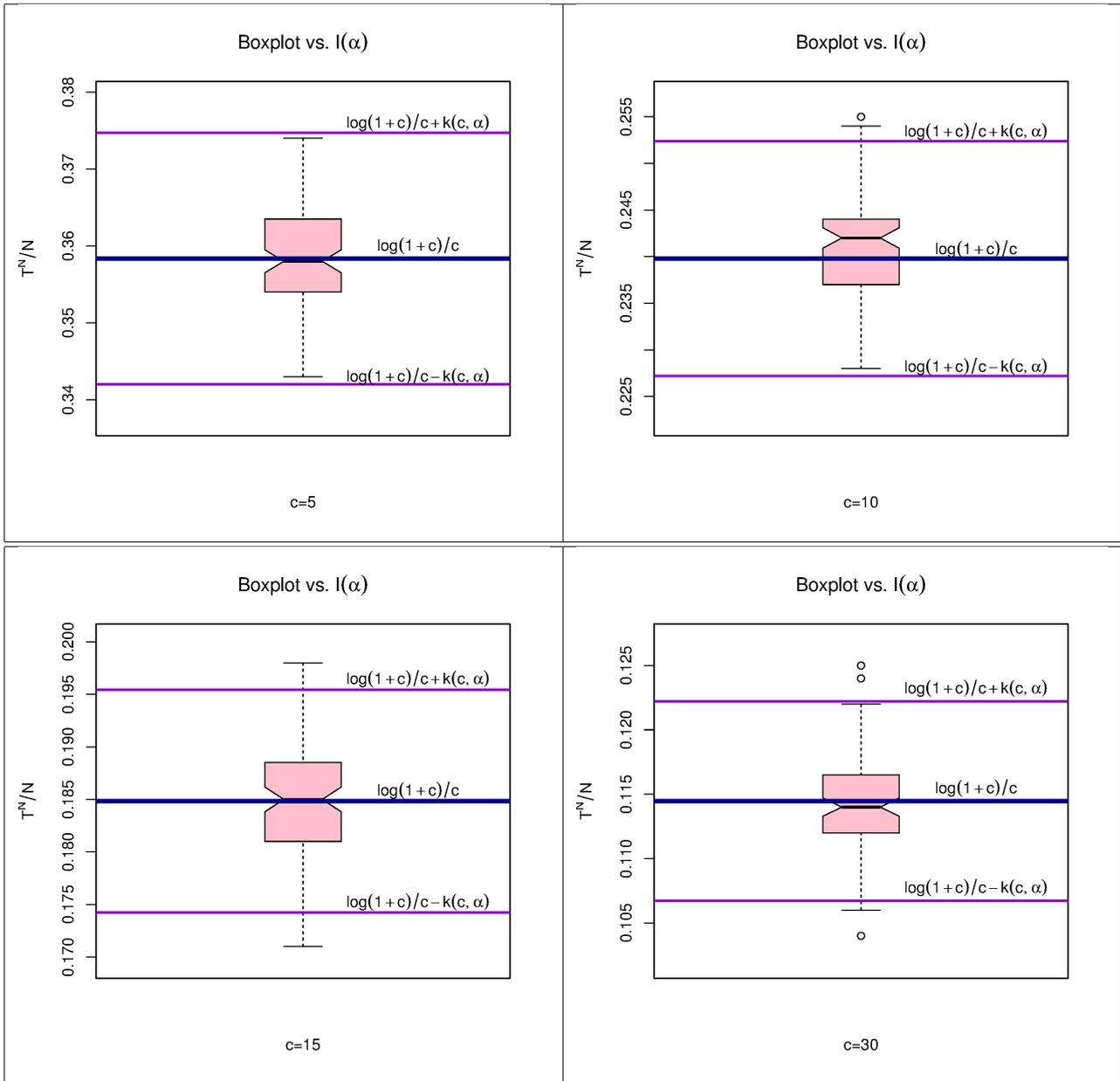


Figura 4.8: Comparación de cada uno de los boxplots de la figura Fig. 4.7 con I_α siendo $\alpha = 0,05$.

4.5. Anexo. Condición de *tightness* de $\{X^N\}_N$.

Presentamos a continuación la prueba de que la sucesión de procesos $\{X^N\}_N$ cumple la condición de *tightness*, condición que utilizamos en el paso III de la prueba del teorema 50.

Lema 57. *La sucesión de procesos estocásticos $\{X^N\}_N$ tal que:*

$$X_t^N = \sqrt{N} (Z_t^N - z(t))$$

es *tight*.

Demostración. Para probar que $\{X^N\}_N$ es *tight*, en virtud de la observación **Obs. 8**, tendremos que probar que $\forall \varepsilon > 0$ se cumplen:

(i) Existe $a > 0$ tal que $\mathbb{P}^N (|X(0)| > a) = \mathbb{P} (|X^N(0)| > a) \leq \varepsilon$ para todo N .

(ii) Para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si N es suficientemente grande:

$$\mathbb{P} (\varpi_{X^N}(\delta) \geq \eta) = \mathbb{P} \left(\sup_{s,t \leq T; |t-s| \leq \delta} |X_t^N - X_s^N| \geq \eta \right) \leq \varepsilon.$$

Puesto que $X_0^N = 0 \forall N \in \mathbb{N}$, la condición (i) se cumple trivialmente.

Igual que en el caso discreto, se observa que:

$$\varpi_{X^N}(\delta) \leq \lambda (1 + \bar{\gamma}_T + a) \sup_{s,t \leq T; |t-s| \leq \delta} \int_s^t |X_u^N| du + \lambda \sqrt{N} \delta_N \delta + \sup_{s,t \leq T; |t-s| \leq \delta} \left| \frac{M_t - M_s}{\sqrt{N}} \right|,$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} (\varpi_{X^N}(\delta) \geq \eta) &\leq \mathbb{P} \left(\lambda (1 + \bar{\gamma}_T + a) \sup_{s,t \leq T; |t-s| \leq \delta} \int_s^t |X_u^N| du \geq \frac{\eta}{3} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\lambda \sqrt{N} \delta_N \delta \geq \frac{\eta}{3} \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{s,t \leq T; |t-s| \leq \delta} \left| \frac{M_t - M_s}{\sqrt{N}} \right| \geq \frac{\eta}{3} \right) \\ &= \textcircled{a} + \textcircled{b} + \textcircled{c}. \end{aligned}$$

Acotaremos cada uno de estos tres términos (la prueba es idéntica a la del teorema **Teo. 42**):

Para \textcircled{b} : si $\delta = \delta_b < \infty$ entonces $\lambda \sqrt{N} \delta_N \delta \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, luego existe $N_b \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P} (\lambda \sqrt{N} \delta_N \delta \geq \frac{\eta}{3}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si $N \geq N_b$.

Para \textcircled{c} : como $Y_t^N = \frac{M_t}{\sqrt{N}}$ converge en la topología de Skorohod a $\{B(\beta(t))\}_{t \in [0, T]}$, entonces $\forall c > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y_t^N - B(\beta(t))| > c \right) \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Luego, puesto que las trayectorias de $\{B(\beta(t))\}_{t \in [0, T]}$ son *c.s.* uniformemente continuas en $[0, T]$, tenemos que existen $N_c \in \mathbb{N}$ y $\delta_c = \delta_c(N_c, \frac{\eta}{3})$ tales que si $N \geq N_c$ y $\delta < \delta_c$ entonces:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s, t \leq T, |t-s| \leq \delta} \left| \frac{Y_t^N - Y_s^N}{\sqrt{N}} \right| \geq \frac{\eta}{3} \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para ①: como $|X_s^N| \leq \lambda(1 + \bar{\gamma}_T + a) \int_0^s |X_u^N| du + \lambda\sqrt{N}s\delta_N + |Y_s^N|$,

$$\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u^N| \leq \sup_{0 \leq u \leq s} |Y_u^N| + \lambda\sqrt{N}s\delta_N + \lambda(1 + \bar{\gamma}_T + a) \int_0^s \sup_{0 \leq v \leq u} |X_v^N| du.$$

El lema de Grönwall implica que:

$$\sup_{0 \leq u \leq s} |X_u^N| \leq \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |Y_u^N| + \lambda\sqrt{N}s\delta_N \right) e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)s} \quad \forall s \in [0, T]$$

y

$$\sup_{\substack{0 \leq s \leq t \leq T; \\ |t-s| < \delta}} \int_s^t |X_u^N| du < \delta \sup_{0 \leq v \leq T} |X_v^N| \leq \delta \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| + \lambda\sqrt{N}\delta_N T \right) e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T}.$$

Finalmente, podemos acotar ① de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a) \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \leq T; \\ |t-s| < \delta}} \int_s^t |X_u^N| du \geq \frac{\eta}{3} \right) &\leq \mathbb{P} \left(\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)\delta \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| + \lambda\sqrt{N}\delta_N T \right) e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T} \geq \frac{\eta}{3} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| \geq \frac{\eta}{3\lambda\delta(1+\bar{\gamma}_T+a)e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T} - \lambda\sqrt{N}\delta_N T} \right). \end{aligned}$$

Sea $\zeta_{N,\eta} = \frac{\eta}{3\lambda\delta(1+\bar{\gamma}_T+a)e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T} - \lambda\sqrt{N}\delta_N T}$. Para cualquier $c > 0$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| \geq \zeta_{N,\eta} \right) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| \geq \zeta_{N,\eta}; \sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N - B(\beta(v))| < c \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| \geq \zeta_{N,\eta}; \sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N - B(\beta(v))| \geq c \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N| \geq \zeta_{N,\eta}; \sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N - B(\beta(v))| < c \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |Y_v^N - B(\beta(v))| \geq c \right) \\ &< \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq T} |B(\beta(v))| + c \geq \zeta_{N,\eta} \right) + \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

si $N \geq N_{\mathbf{a},c}$ pues $\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |Y_t^N - B(\beta(t))| > c\right) \rightarrow 0$. Además, utilizando el *Problema de barrera* o *Principio de reflexión del movimiento browniano* ([36], página 254), podemos ver que:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq v \leq T} |B(\beta(v))| + c \geq \zeta_{N,\eta}\right) \leq 4 \left[1 - \Phi\left(\frac{\zeta_{N,\eta} - c}{\sqrt{\lambda(b+1)[\bar{\Psi}_T + (1+\bar{\gamma}_T)^2]T}}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{6}$$

si

$$\delta < \frac{\eta}{3\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T} \left[z_{1-\frac{\varepsilon}{24}} \sqrt{\lambda(b+1)(\bar{\Psi}_T + (1+\bar{\gamma}_T)^2)T} + c + \lambda\sqrt{N}\delta_N T\right]}.$$

Tomemos $c = \frac{\eta}{3}$ y $\delta_{\mathbf{a}} = \frac{\eta}{3\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)e^{\lambda(1+\bar{\gamma}_T+a)T} \left[z_{1-\frac{\varepsilon}{24}} \sqrt{\lambda(b+1)(\bar{\Psi}_T + (1+\bar{\gamma}_T)^2)T} + c + \lambda\sqrt{N}\delta_N T\right]}$.

Finalmente, si $N^*(\eta) = \max\{N_{\mathbf{a},\frac{\eta}{3}}, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{c}}\}$ y $\delta^*(\eta) = \min\{\delta_{\mathbf{a}}, \delta_{\mathbf{b}}, \delta_{\mathbf{c}}\} > 0$, obtenemos que para todo $\delta < \delta^*(\eta)$ y $N \geq N^*(\eta)$:

$$\mathbb{P}(\omega_{X^N}(\delta) \geq \eta) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos a futuro.

En esta tesis hemos presentado una modelización estocástica de una versión sloteada del protocolo de acceso al medio para redes inalámbricas denominado CSMA/CA sobre una red WLAN formada por N usuarios dispuestos alrededor de un AP con “capacidad infinita”. Para ello, hemos modelado las *interferencias* entre los usuarios o nodos de la red mediante un grafo aleatorio y el funcionamiento de CSMA/CA sobre una red de ese tipo mediante un algoritmo de exploración del grafo.

Hemos utilizado este contexto de las redes inalámbricas para presentar formalmente herramientas que también son útiles para la formalización de resultados en otro tipo de aplicaciones. Entre otros, presentamos resultados para probar la convergencia de procesos estocásticos, cuyas trayectorias son funciones càdlàg, en la convergencia que hemos definido como *convergencia J_1* . Dicha convergencia se define a partir de la *topología de Skorohod*, definida sobre el espacio de las funciones càdlàg. En muchos trabajos se habla de la convergencia de dichos procesos pero sin dejar en claro de qué convergencia se trata. Presentamos la teoría de *límite fluido* para la aproximación de *procesos de Markov de saltos puros* y la condición de *tightness* para probar la convergencia de procesos estocásticos. También hemos presentado técnicas para la descomposición en martingala de los procesos que hemos definido como *semimartingalas* y técnicas para el cálculo del *increasing process* de las martingalas para las cuales existan dichos procesos. Presentamos también algunas técnicas para el cálculo de *integrales estocásticas de Itô* y la teoría de *ecuaciones diferenciales estocásticas* para aproximar procesos estocásticos por las soluciones de dichas ecuaciones.

Luego, hemos usado estas herramientas para la modelización de CSMA/CA sobre la red que mencionamos antes. Para ello, asumimos una hipótesis fuerte de homogeneidad en las interferencias entre los nodos del grafo, de manera tal que el algoritmo de exploración que utilizamos para modelizar el funcionamiento de CSMA/CA sobre dicho grafo resultara en un proceso de Markov $\{Z_t\}_t$. A partir de ello, hemos aproximado el promedio de las trayectorias de una reescala adecuada $\{Z_t^N\}_t$ de dicho proceso de Markov por la solución de una ecuación diferencial determinística $\{z(t)\}_t$ (*límite fluido* o *límite hidrodinámico*) cuando N tiende a infinito. Más aún, hemos obtenido un teorema central del límite funcional, en el que hemos probado la convergencia de $\{\sqrt{N}(Z_t^N - z(t))\}_t$ a la solución de una ecuación diferencial estocástica (*i.e.* a una *difusión*).

Estos resultados nos permitieron probar una ley de los grandes números y un teorema central del límite para la probabilidad de transmisión de un nodo dentro de este tipo de redes (*jamming constant*). Luego, hemos obtenido una estimación puntual y por intervalo de confianza para dicho parámetro.

También obtuvimos resultados específicos para el caso de un grafo de Erdős–Rényi que, además de demostrar coherencia con resultados obtenidos de manera independiente, nos permite concluir que las aproximaciones son muy buenas incluso para valores pequeños de N .

Una continuación natural para este tipo de resultados consiste en probar *grandes desvíos* ([30], [31], [32], [33] y [34]) tanto para la *jamming constant* como para el límite fluido, al menos en el caso en que el grafo de interferencias pueda ser modelado mediante un grafo de Erdős–Rényi. En estas cuestiones estaremos trabajando a partir de la finalización del presente trabajo.

También interesa una extensión de los resultados que presentamos en esta tesis para grafos de interferencia más generales. En [20,19] se presentan algunas ideas para la modelización del funcionamiento de CSMA/CA sobre grafos aleatorios más generales (pero que modelan redes Ad-Hoc) mediante *modelos de configuración* para grafos aleatorios.

Finalmente, extender dichos resultados a una modelización no sloteada de CSMA/CA es un desafío interesante, sobre todo desde el punto de vista de las aplicaciones.

Bibliografía

- [1] Thomas G. Kurtz. (1971) **Limit Theorems for Sequences of Jump Markov Processes Approximating Ordinary Differential Processes**. Journal of Applied Probability. Vol. 8, páginas 344-356.
- [2] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. (2009) **Markov processes: Characterization and convergence**. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.
- [3] Yuri V. Prokhorov. (1956) **Convergence of random processes and limit theorems in probability theory**. Theory of Prob. And Appl. Vol. 2, pages. 157–214.
- [4] Patrick Billingsley. (1999) **Convergence of Probability Measures**. Second edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- [5] Philippe Robert. (2003) **Stochastic Networks and Queues**. Applications of Mathematics. Springer.
- [6] Andrey N. Borodin. (2005) **Lectures on Stochastic Processes**. Reports on Computer Science & Mathematics.
- [7] József Fritz. (2000). **An Introduction to the theory of hydrodynamic limits**.
- [8] R.W.R. Darling and J.R. Norris. (2008) **Differential equation approximations for Markov chains**. Probability Surveys. Vol. 5; pages. 37-79. Disponible desde: <[Differential equation approximations for Markov chains](#)>.
- [9] R.W.R. Darling (2002) **Fluid limits of pure jump Markov processes: a practical guide**. Disponible desde: <[Fluid limits of pure jump Markov processes](#)>.
- [10] L.C.G. Rogers and David Williams. (2000) **Diffusions, Markov Processes and Martingales**. Vol. 2: *Itô* Calculus. Second edition. Cambridge University Press.
- [11] Marc A. Berger and Victor J. Mizel. (1977) **A Fubini Theorem for iterated Stochastic Integrals**. Disponible desde:<[A Fubini Theorem for iterated Stochastic Integrals](#)>.
- [12] Colin McDIARMID. (1984) **Colouring Random Graphs**. Annals of Operations Research. Vol. I, páginas 183-200.
- [13] Adam Jakubowski. (2007) The Skorokhod Space in functional convergence: a short introduction. **Skorokhod space: 50 years on**. Kyiv, Ukraine.

- [14] David Aldous. (1978) **Stopping Times and Tighness**. The Annals of Probability. Vol. 6, páginas 335-340.
- [15] Fernanda Rodríguez. (2015) **Análisis y desempeño de redes 802.11**. Disponible desde: <[Tesis de Maestría, Fernanda Rodriguez](#)>.
- [16] Aravind Iyer, Catherine Rosenberg and Aditya Karnik. (2009) **What is the Right Model for Wireless Channel Iterference?** Wireless Communications, IEEE Transactions on. Vol. 8. Issue 5. Páginas 2662-2671. Disponible desde: <[What is the right model for wireless channel interference?](#)>.
- [17] ANSI/IEEE Std. 802.11. (1999, rev. 2003) **Information Technology Telecommunications and information exchange between systems. Local and metropolitan area networks. Specific requirements. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications**.
- [18] G. Bianchi. (1998) **IEEE 802.11. Saturation Throughput Analysis**. IEEE Communications Letters. Vol. 2, No. 12.
- [19] P. Bermolen, M. Jonckheere and P. Moyal. (2013) **The Jamming Constant of Random Graphs**. Cornell University Library. Disponible desde: <[The Jamming Constant of Random Graphs](#)>.
- [20] P. Bermolen, M. Jonckheere, F. Larroca and P. Moyal. (2014) **Estimating the Spatial Reuse with Configuration Models**. Cornell University Library. Disponible desde: <[Estimating the Spatial Reuse with Configuration Models](#)>.
- [21] P. Bermolen and F. Baccelli. (2010) **Multiple Access Mechanisms with Performance Guarantees for Ad-Hoc Networks**. Disponible desde: <[MAC with Performance Guarantees for Ad-Hoc Networks](#)>.
- [22] P. Bermolen, M. Jonckheere and J. Sanders. (2015) **Scaling Limits for Exploration Algorithms**. Disponible desde: <[Scaling limits for exploration algorithms](#)>.
- [23] M. Penrose. (2000) **Random parking, sequential adsorption, and the jamming limit**.
- [24] J. Talbot, G. Tarjus, P. R. Van Tassel, and P. Viot. (1999) **From Car Parking to Protein Adsorption: An Overview of Sequential Adsorption Processes**. Disponible desde: <[From Car Parking to Protein Adsorption](#)>.
- [25] F. Baccelli and B. Blaszczyszyn. **Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume I - Theory**. (2009) NoW Publishers, 1, pp.150. Disponible desde: <[Stochastic Geometry and Wireless Networks V I, NoW Publisher](#)>. Foundations and Trends in Networking Vol. 3: No 3-4, pp 249-449. Disponible desde: <[Stochastic Geometry and Wireless Networks V I, INRIA](#)>.
- [26] F. Baccelli, B. Blaszczyszyn. **Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume II - Applications**. (2009) NoW Publishers, 2, pp.209. Disponible desde: <[Stochastic Geometry and Wireless Networks V II, NoW Publishers](#)>. Foundations and Trends in Networking: Vol. 4: No 1-2, pp 1-312. Disponible desde: <[Stochastic Geometry and Wireless Networks V II, INRIA](#)>.

- [27] **The R Project for Statistical Computing:** <[R](#)>.
- [28] ns2: <[ns2](#)>.
- [29] ns3: <[ns3](#)>.
- [30] A. Shwartz and A Weiss. **Large deviations for performance analysis: queues, communications and computing.** (1996) Stochastic Modeling Series. Chapman and all.
- [31] M. Jonckheere and S. López. **Large deviations of the stationary measure of networks under proportional fair allocations.** (2012) Cornell University Library. Disponible desde: <[Large deviations of the stationary measure of networks under proportional fair allocations](#)>.
- [32] Richard S. Ellis. **Large deviations for the empirical measure of a Markov chain with an application to the multivariate empirical measure.** (1988) The Annals of Probability, Vol. 16, No 4, pp 1496-1508.
- [33] S.R.S. Varadhan. **Large Deviations and Applications.** (1994) Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [34] M.I. Freindlin and A.D. Wentzell. **Random Perturbations of Dynamical Systems.** (1998) Second Edition. Springer-Verlag, New York, Inc.
- [35] A. Joffe and M. Metivier. **Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching process.** (1986) Advances in Applied Probability. Vol. 18, No 1, pp. 20-65. Disponible desde: <[Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching process](#)>.
- [36] Valentín V. Petrov & Ernesto Mordecki. **Teoría de la Probabilidad.** (2008) Segunda edición. DIRAC-Facultad de Ciencias-Universidad de la República-Uruguay.