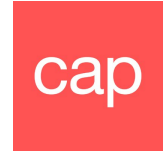




UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Grupo de Renormalización No Perturbativo de los modelos $O(N)$: explorando la simetría conforme

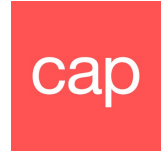
Santiago Cabrera Sosa

Programa de Posgrado de Pedeciba Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Julio de 2024



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Grupo de Renormalización No Perturbativo de los modelos $O(N)$: explorando la simetría conforme

Santiago Cabrera Sosa

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado de Pedeciba Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Pedeciba Física.

Directores:

Gonzalo De Polsi

Nicolás Wschebor

Montevideo – Uruguay

Julio de 2024

Cabrera Sosa, Santiago

Grupo de Renormalización No Perturbativo de los modelos $O(N)$: explorando la simetría conforme / Santiago Cabrera Sosa. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2024.

XIII, 172 p.: il.; 29, 7cm.

Directores:

Gonzalo De Polsi

Nicolás Wschebor

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Pedeciba Física, 2024.

Referencias bibliográficas: p. 157 – 166.

I. De Polsi, Gonzalo, Wschebor, Nicolás, .

II. Universidad de la República, Programa de Posgrado de Pedeciba Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Daniel Ariosa (Presidente)

Dr. Miguel Campiglia

Dr. Alessandro Codello

Dr. José Rafael León

Dr. Gonzalo De Polsi (Orientador)

Dr. Guzmán Hernández (Suplente)

Montevideo – Uruguay

Julio de 2024

Agradecimientos

Agradezco a todos quienes me han apoyado y ayudado a lo largo de la maestría, e incluso desde mucho antes. He llegado hasta aquí gracias a ustedes:

A mis tutores, por todo lo que me han enseñado, por el apoyo y orientación ejemplares y por preocuparse por lograr una formación integral en todos los planos. Gonzalo, por el aguante, los trucos y la paciencia para encontrar cada error en mis programas, la disposición para ayudar con todos los problemas que fueron surgiendo y por los consejos para la vida, para dentro y fuera de la ciencia. Nicolás, por la paciencia para explicarme lo mismo veinte veces, por responder dudas a toda hora del día y por las enseñanzas para ser un mejor científico. A ambos, por jugársela siempre, y por la responsabilidad con que se tomaron mi maestría. Por ser grandes ejemplos a seguir.

A todos los profesores que a lo largo de mi formación, desde la licenciatura y hasta el día de hoy, han sido fuente de aprendizaje y ánimos para llegar hasta este punto. Y a aquellos que han ido más allá para dar una mano, y han sido una inspiración para elegir este camino.

A los compañeros de estudio, entre ellos Nico y Gianni, por el apoyo mutuo y por el contagio de la motivación.

A mi profe Guzmán, por dejarme ver partículas volando en el liceo y por compartirme el gusto por la física.

A la banda amiga, siempre atenta a si Sale Algo, por las risas, el aguante y la distensión en momentos difíciles.

A mi familia, por el apoyo y tolerancia incondicionales. A mamá y Martín, por soportar las frustraciones, las incertidumbres y los enojos, siendo siempre mi contención, por la comprensión y tolerancia, y por siempre dar para adelante y estar para compartir las alegrías. A la abuela, siempre preocupada por cómo iba la maestría. A Ulises, gran compañero en las buenas y las malas.

A Flo, por el amor y el apoyo incondicional en todo lo que esta carrera supone, por entender que a veces no podía, o que había examen el 14, por las despertadas de domingo de estudio y, sobretodo, por siempre estar ahí.

A la Universidad de la República, sin la cual no podría estudiar física, y que me dio los medios para viajar y obtener experiencias para toda la vida. A PEDECIBA, y a Jimena, por gestionar la maestría. A la CAP, por la beca de maestría.

RESUMEN

Existe un amplio conjunto de sistemas físicos de interés compuestos por un gran número de componentes que interactúan entre sí. Dichas interacciones son, en general, locales, y las correlaciones entre componentes del sistema decaen exponencialmente con la distancia. No obstante, existen situaciones físicas en las cuales estos mismos sistemas se muestran fuertemente correlacionados, con sus componentes interactuando de forma efectiva a grandes distancias, por lo cual su estudio requiere de herramientas especialmente desarrolladas para tal fin. Tal es el caso de los fenómenos críticos o transiciones de fase de segundo orden. Adicionalmente, en el régimen crítico, los sistemas presentan a grandes distancias simetrías emergentes, tales como invariancia ante transformaciones de escala o, incluso, invariancia ante todas las transformaciones que conservan los ángulos, denominadas transformaciones conformes. Particularmente, para los modelos escalares $O(N)$ esta simetría ha sido conjeturada, y probada para algunos casos. En esta tesis exploraremos la realización de la simetría conforme, y la información y consecuencias que de esta podemos extraer.

El grupo de renormalización de Wilson, o su versión moderna, el grupo de renormalización no perturbativo, es una herramienta o marco teórico desarrollado, precisamente, para el estudio de la física de los fenómenos críticos. Esta herramienta constituye un marco conceptual exacto que permite abordar los sistemas fuertemente correlacionados. A pesar de esto, salvo algunas excepciones, es necesario la implementación de técnicas o desarrollos aproximados que permitan hacer predicciones o cálculos concretos del comportamiento de los sistemas con correlaciones de larga distancia. Dentro del grupo de renormalización no perturbativo, uno de los esquemas de aproximación más utilizados para el cálculo de propiedades críticas es el Desarrollo en Gradientes. Este esquema permite estudiar el comportamiento de los sistemas a grandes distancias y, en los últimos años, ha alcanzado niveles de precisión muy elevados. Esto se debe, en particular, a que se han comenzado a comprender las propiedades de convergencia de dicho método gracias a la identificación de un pequeño parámetro que controla el desarrollo. A pesar de estos avances en la comprensión del comportamiento del desarrollo en gradientes, la convergencia del método es aún un problema abierto.

En esta tesis se estudiaron, en el marco del grupo de renormalización no perturbativo, las teorías escalares $O(N)$. Esto se hizo desde dos ángulos: analíticamente, considerando el límite N grande, y numéricamente, con el Desarrollo en Gradientes, abordando valores finitos de N . En primer lugar, el estudio analítico del comportamiento de los sistemas en el límite $N \rightarrow \infty$ resulta de gran interés debido a que el modelo se sabe tratar de forma exacta. Esto da lugar a un terreno de prueba ideal donde es

posible analizar las propiedades de simetría de un sistema con interacciones intensas de manera exacta. Por un lado, investigamos la realización de la simetría conforme en este límite, lo cual a la fecha es un resultado esperado, pero no demostrado. Por otro, estudiamos las restricciones que supone asumir dicha invariancia conforme en el régimen crítico, sobre las funciones de correlación en este límite.

En segundo lugar, empleando el Desarrollo en Gradientes estudiamos diversos modelos escalares $O(N)$. Partimos de suponer la simetría conforme, y a partir de las restricciones que su cumplimiento supone, extrajimos predicciones sobre el comportamiento a grandes distancias de estos modelos en el régimen crítico, utilizando este esquema de aproximación. Concretamente, estudiamos un método de determinación de cantidades físicas basado completamente en minimizar la ruptura de la simetría conforme – lo cual sucede producto de las aproximaciones realizadas – viendo cómo se compara con las técnicas establecidas en la literatura.

Palabras Claves:

Fenómenos Críticos, Grupo de Renormalización, Simetría Conforme, Mecánica Estadística, Desarrollo en Gradientes.

ABSTRACT

A wide range of physical systems of interest are constituted by large numbers of microscopic interacting components. Said interactions are, typically, local, and the correlations between the systems' components decay exponentially with the distance. Nevertheless, there are physical scenarios in which these systems are strongly correlated, with their components effectively interacting at long range, its study therefore requiring of specific toolsets developed for this objective. Such is the case of critical phenomena or second order phase transitions. Additionally, in the critical regime, systems present, at large separations, emergent symmetries, such as invariance under scale transformations, or even, invariance under all transformations that preserve angles, known as conformal transformations. In particular, for the scalar $O(N)$ models, this symmetry has been conjectured, and proved for some specific cases. In this thesis we will explore the realization of conformal symmetry, and the information and consequences that can be deduced from it.

Wilson's renormalization group, or its modern version, the non-perturbative renormalization group, is a theoretical framework developed, precisely, for the study of the physics of critical phenomena. This exact framework allows one to approach strongly correlated systems. However, with few exceptions, the implementation of additional techniques or approximation schemes are required to obtain predictions or to perform concrete computations about the behaviour of the systems with long distance correlations. Amongst said further techniques, one of the approximation schemes more widely employed for the computation of critical properties is the Derivative Expansion. This scheme allows one to study the long-range behaviour of systems and, recently, has reached high levels of precision. This is due, in particular, to the fact that the convergence properties of the method have begun to be understood, thanks to the identification of a small parameter controlling the expansion. In spite of the progress in the understanding of the Derivative Expansion's behaviour, its convergence, as a whole, still remains an open problem.

In this thesis we studied, in the non-perturbative renormalization group framework, the $O(N)$ scalar theories. This subject from two angles: analytically, considering the large N limit, and numerically, with the Derivative Expansion, studying finite values of N . Firstly, the analytical study of the systems' behaviour in the $N \rightarrow \infty$ limit is of great interest because the model can be solved exactly in this limit. This sets an ideal

testing ground where the symmetry properties of a system with intense interactions can be analysed in an exact manner. On the one hand, we investigated the realization of conformal symmetry in this limit, which remains an expected result, yet not still proved. On the other hand, we studied the restrictions which arise, if conformal symmetry is assumed in the critical regime, over the correlation functions in the $N \rightarrow \infty$ limit. Secondly, employing the Derivative Expansion, we studied diverse scalar $O(N)$ models with finite N . We started from the assumption of conformal symmetry, and from the restrictions its satisfactions suppose, we extracted predictions on the long-range behaviour of these models in the critical regimen, utilizing this approximation scheme. Concretely, we studied a method for determining physical quantities entirely based on minimizing the breaking of conformal symmetry – which occurs as a consequence of the approximations performed – comparing it with the techniques already established in the literature.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Sistemas físicos en las clases de universalidad de los modelos $O(N)$. . .	4
1.2	Fenómenos críticos: simetrías emergentes	11
1.3	Objetivos de trabajo	12
2	El Grupo de Renormalización No Perturbativo	14
2.1	Grupo de Renormalización de Wilson	14
2.1.1	Problemas con el desarrollo perturbativo	14
2.1.2	Transformaciones del Grupo de Renormalización	18
2.1.3	Flujo de renormalización, superficie crítica y puntos fijos	21
2.2	Grupo de Renormalización No Perturbativo	27
2.3	Esquema de aproximación: Desarrollo en Gradientes	35
2.4	Grupo de Renormalización No Perturbativo para modelos $O(N)$	37
2.5	El Desarrollo en Gradientes para los modelos $O(N)$: aplicación	41
2.5.1	Obtención de las ecuaciones de flujo	41
2.5.2	Determinación de los exponentes críticos y sus barras de error .	43
3	Simetrías e Identidades de Ward-Takahashi	47
3.1	Simetrías de una teoría	47
3.2	Identidades de Ward-Takahashi en el marco del NPRG	49
3.2.1	Simetrías del regulador	50
3.3	Grupo conforme	51
3.3.1	Identidades de Ward-Takahashi para traslaciones y rotaciones .	55
3.3.2	Identidad de Ward-Takahashi para dilataciones: ecuación de punto fijo	57
3.3.3	Identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales	58
3.4	Fuentes para operadores compuestos	60
3.4.1	Perturbaciones propias alrededor del punto fijo y operadores compuestos	61

4	Límite $N \rightarrow \infty$: resultados exactos	65
4.1	Preámbulo: compatibilidad de las identidades de Ward en el caso $N = 1$ para $\Gamma^{(2)}(p)$	66
4.2	Compatibilidad de las identidades de Ward-Takahashi para $\Gamma_{ab}^{(2)}(p)$ para todo N	67
4.3	Solución exacta para $N \rightarrow \infty$: $\hat{\Gamma}^{(n)}$ y suma de burbujas	70
4.4	Compatibilidad de las identidades de Ward-Takahashi para $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$ para $N \rightarrow \infty$	78
4.5	Soluciones en presencia de fuentes para operadores compuestos locales .	85
4.6	Identidades de Ward-Takahashi por dilataciones y restricciones sobre los operadores locales	88
4.7	Restricción especial conforme sobre los operadores locales compatibles .	91
5	N finito: resultados del Desarrollo en Gradientes	95
5.1	Implementación del desarrollo en gradientes: algoritmo de determinación de los exponentes críticos	96
5.2	Principio de Máxima Conformalidad	100
5.2.1	Análisis de la identidad conforme: Principio de Máxima Confor- malidad	102
5.3	Exponentes críticos para los modelos $O(N)$	105
5.3.1	$N=1$	106
5.3.2	$N=2$	107
5.3.3	$N=3$ y 4	109
5.3.4	$N=5$: PMC no es aplicable para ω	110
5.3.5	N grande	113
5.3.6	Casos no unitarios: $N=0$ y $N=-2$	115
5.4	Discusión: equivalencia entre PMS y PMC	116
6	Conclusiones y perspectivas de trabajo	119
	Apéndices	124
A	Grupo conforme: transformaciones y generadores	125
B	Ecuación de Wetterich-Morris	128
C	Identidades de Ward-Takahashi bajo transformaciones conformes	130
D	Identidad de la transformada de Fourier con un momento nulo	134
E	Cálculo de $\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2)$ y $\hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$ en el límite $N \rightarrow \infty$	135
F	Detalles del cálculo de compatabilidad de identidades de Ward para $\Gamma_{abc}^{(3)}$ con $N \rightarrow \infty$	138
G	Cálculo de $\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2)$	151
H	Resultados crudos para los exponentes ν y ω	155

Bibliografía	157
Lista de tablas	167
Lista de figuras.	171

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas macroscópicos con los cuales interactuamos cotidianamente están formados por un número tal de componentes microscópicos que un estudio pormenorizado de la evolución del estado de dichos componentes es, para cualquier efecto práctico, una tarea imposible – un orden de magnitud típico del número de elementos constituyentes es el del número de Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$. Sin embargo, el estudio y conocimiento sobre las propiedades colectivas emergentes de tales sistemas ha sido un campo de interés para la humanidad desde hace siglos. Desde los desarrollos de las máquinas simples a vapor con la Revolución Industrial y de forma ininterrumpida hasta el día de hoy, el estudio de sistemas macroscópicos con gigantescos números de componentes ha sido un área de relevancia en la física. El campo de la *mecánica estadística* fue desarrollado, comenzando con los primeros trabajos de Boltzmann al respecto en 1872, para abordar estos sistemas con un formalismo que permitiera conectar la dinámica microscópica que describe las interacciones entre los elementos fundamentales, como átomos o moléculas, con la termodinámica, desarrollada por Bernoulli, Carnot, Clausius, Kelvin, Joule y tantos otros a lo largo de los siglos XVIII y XIX, que describe a las variables macroscópicas de los sistemas, como la presión o la densidad. En particular, la mecánica estadística es una disciplina que permite extraer el comportamiento macroscópico promediando en los grados de libertad microscópicos.

Desde sus orígenes, la mecánica estadística ha recorrido un largo camino. Hoy día es el formalismo aplicado a la hora de estudiar casi cualquier sistema con un gran número de grados de libertad. Particularmente, es el método utilizado para el estudio de aquellos sistemas que exhiben *transiciones de fase*¹. Sucede que numerosos sistemas, no solamente físicos², al variar algún parámetro de control como puede ser la temperatura

¹Cabe destacar que esto no fue siempre así. De hecho, en un principio no era claro que la mecánica estadística pudiera explicar los cambios de fases y las no-analiticidades asociadas a estos procesos. Sin embargo, el trabajo pionero de Peierls [1, 2] en esta línea mostró rigurosamente que la mecánica estadística sí puede predecir la existencia de transiciones de fase. Más adelante Lee y Yang mostraron, de forma más general, cómo en el límite termodinámico la mecánica estadística puede producir el tipo de no analiticidades propias de una transición de fase [3, 4].

²En modelos de economía, de transmisión de enfermedades, de agentes sociales y muchos otros,

o el campo magnético externo, experimentan un fenómeno en el cual el comportamiento de las cantidades macroscópicas de interés no es analítico como función del parámetro de control mencionado. Antes y después del fenómeno, el sistema presenta diferentes *fases*, estados de la materia que coexisten en equilibrio termodinámico. Por ejemplo, la densidad de una sustancia, inicialmente líquida, varía considerablemente luego de pasar por su punto de ebullición. Un imán describe un descenso marcado, hasta anularse, de su magnetización al ser calentado. Ciertos conductores presentan resistividad nula por debajo de una temperatura dada. Incluso sistemas de agentes macroscópicos, como una población con circulación de una enfermedad, pueden pasar de un estado de epidemia activa a un estado de epidemia extinta según se varía la efectividad de los tratamientos o la resiliencia del patógeno. Estos cambios son lo que se denomina transiciones de fase. Solamente pueden ocurrir al considerar el límite termodinámico, pues de otra forma, una suma finita de funciones suave de los parámetros de control, como pueden ser los pesos de Boltzmann, no puede dar lugar a un comportamiento no analítico [3, 4].

Las transiciones de fase se suelen clasificar en dos grandes grupos: las de primer orden, o *discontinuas*, y las *continuas*. En el pasaje de una fase a otra, puede ocurrir que sea necesaria la absorción o liberación de cierta energía, denominada *calor latente*. Este está asociado al cambio en el nivel de desorden del sistema y es igual a la variación de la entalpía entre las dos fases a presión constante. Para las transiciones de primer orden, el calor latente es no nulo. En la transiciones continuas, el calor latente es nulo, siendo la derivada n -ésima de alguna función termodinámica, de tipo entalpía, la que es discontinua. En general, si las primeras $n - 2$ derivadas son continuas, pero la $n - 1$ es discontinua, la transición es de orden n , y se denomina un punto n -crítico¹. En el caso de las transiciones de fase de segundo orden, se les suele llamar solamente *punto crítico*. La denominación se debe a que las transiciones de primer orden suelen aparecer en el diagrama de fases como líneas continuas, mientras que las transiciones continuas aparecen como puntos en el mismo². Este fenómeno se observa en la figura 1.1, donde vemos dos ejemplos de sistemas que presentan puntos críticos en sus diagramas de fases. Las transiciones de fase se suelen observar estudiando alguna magnitud termodinámica llamada *parámetro de orden*, cuyo valor se anula en la transición y dicha anulación implica una mayor simetría del problema.

Veamos cómo son las no-analiticidades de las magnitudes termodinámicas cerca de un punto crítico. En general, presentan divergencias como leyes de potencias en la diferencia entre el parámetro de control y su valor crítico. Como típicamente este

sucede que al variar algún parámetro de control ocurre un cambio marcado en el estado del sistema, entre dos regímenes con propiedades colectivas diferentes.

¹Este criterio de clasificación de transiciones de fase fue propuesto por Ehrenfest. Existen otros criterios que no discutiremos en este trabajo.

²Existen excepciones a esto, por ejemplo en la figura 1.3a vemos un diagrama de fases en donde se tiene una línea de puntos críticos separando dos fases líquidas del He-4.

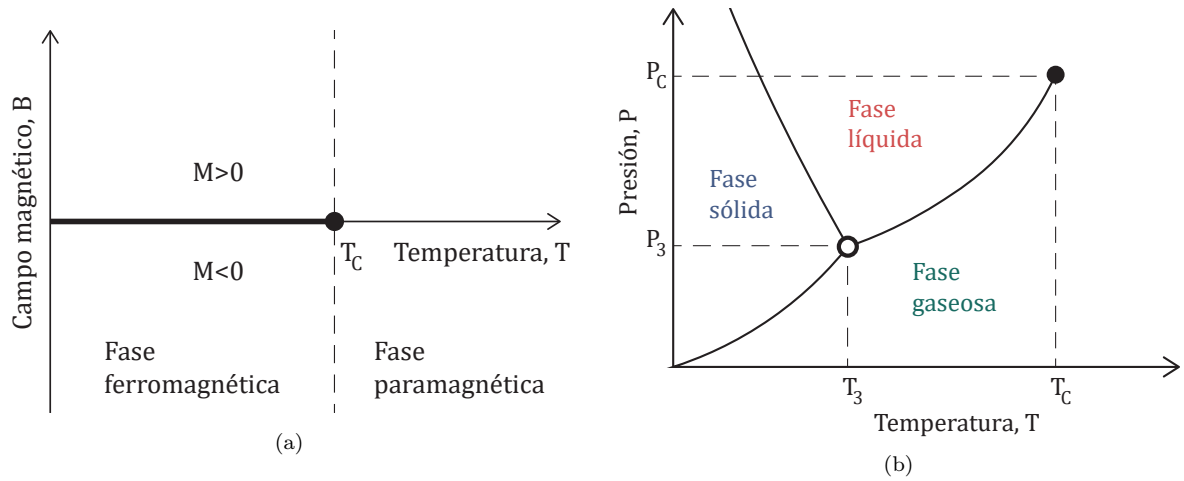


Figura 1.1: Diagramas de fase para (a) un sistema magnético y (b) una sustancia pura típica. En ambos diagramas existe un *punto crítico*. En (a) el parámetro de orden es la magnetización M que se anula para $T = T_C$ y $B = 0$. En (b) la cantidad que juega un rol similar a un parámetro de orden es la diferencia entre la densidad de las fases líquida y gaseosa, que se anula en $T = T_C$ y $P = P_C$.

será la temperatura, la variable comúnmente utilizada es la *temperatura reducida* $t = (T - T_C)/T_C$. La transición continua suele describirse en términos de los *exponentes críticos*, los cuales gobiernan las mencionadas leyes de potencias. Por ejemplo, en un sistema magnético, la susceptibilidad magnética χ diverge como:

$$\chi \propto |t|^{-\gamma}. \quad (1.1)$$

Con respecto a dichos exponentes críticos, una de las características más sorprendentes de las transiciones de fase es la *universalidad*. Múltiples transiciones como el orden-desorden en una aleación binaria, líquido-gas en sustancias puras, o ferro-paramagnetismo en un imán uniaxial, son descritas por leyes de potencias gobernadas por *exactamente* los mismos exponentes críticos. Y esto sucede a pesar de que hablamos de sistemas muy disímiles, donde las transiciones son caracterizadas por parámetros de orden completamente diferentes, y con un parámetro de control relevante que no tiene porqué ser la temperatura. Se dice que estas transiciones pertenecen a una misma *clase de universalidad*. En general, existen varias clases de universalidad que engloban todas las diferentes transiciones de fase.

Pensemos cómo es posible que sistemas físicos con interacciones microscópicas *a priori* totalmente distintas unas de otras, se comporten de forma exactamente igual cerca del punto crítico. Para algunos casos es relativamente sencillo, mediante reparametrizaciones, notar que las descripciones microscópicas de los sistemas son equivalentes, pudiendo mapear unos en los otros. Luego, cerca de la transición, las no-analiticidades tendrán el mismo aspecto. En el siguiente capítulo veremos cómo el formalismo del Grupo de Renormalización Wilson, o su variante moderna el *Grupo de Renormalización No Perturbativo* explica de una forma muy natural la existencia de este fenómeno

tan llamativo.

En esta tesis, estudiaremos un conjunto de modelos, parametrizados por un número entero N , llamados modelos $O(N)$, los cuales presentan una transición de fase de segundo orden. La denominación no es casual. Se trata de sistemas donde cada componente microscópico, o *grado de libertad*, tiene N elementos con simetría interna ortogonal. Podemos pensar que en cada punto del espacio, o nodo de una red periódica, existe un vector N -dimensional donde la teoría microscópica es invariante bajo transformaciones $O(N)$ de dicho vector. Desarrollaremos más formalmente la acción de estos modelos en el capítulo 2. El parámetro de orden de estos sistemas es el valor esperado de este vector, el cual podemos pensar como análogo a la magnetización $\langle \vec{M} \rangle$ de un sistema magnético. Por encima de la temperatura de transición, este valor esperado se anula, mientras que por debajo tiene un módulo y dirección dados – lo cual rompe la simetría $O(N)$ ¹.

Centrarnos en los modelos $O(N)$ tiene múltiples motivaciones. En primer lugar, para varios valores de N finitos existen realizaciones experimentales de sistemas físicos que exhiben una transición de fase continua de segundo orden, cuya física de largas distancias es controlada por la clase de universalidad $O(N)$ para un valor N dado. En segundo lugar, cuando consideremos el límite $N \rightarrow \infty$, obtendremos un sistema resoluble de forma exacta, lo cual no ocurre para valores de N finitos. Asimismo, se trata de un escenario donde se conocen resultados perturbativos exactos desarrollando en $1/N$ desde la década del '70 [5, 6, 7, 8]. Esto es un campo de prueba ideal para evaluar aproximaciones, necesarias en los casos de N finito, y para estudiar en detalle las simetrías del problema, partiendo de las soluciones exactas.

1.1. Sistemas físicos en las clases de universalidad de los modelos $O(N)$

Con el propósito de dar al lector una idea del rango de aplicación de estos modelos, veamos algunos ejemplos de sistemas físicos con transiciones que pueden describirse mediante modelos $O(N)$:

$N = 1$: Imanes uniaxiales y sustancias puras

Para el caso $N = 1$, hay ejemplos muy conocidos. Esta clase de universalidad incluye a sistemas físicos tradicionalmente importantes para el campo de la mecánica estadística y, particularmente, de los fenómenos críticos. El grupo $O(1)$ está dado por

¹Se suele decir que en la fase de baja temperatura, con una dirección preferencial – la de $\langle \vec{M} \rangle$ – hay una simetría espontáneamente rota. En este caso, sería la simetría interna $O(N)$. Al anularse $\langle \vec{M} \rangle$ conforme aumentamos la temperatura, esta simetría se restaura.

$\{-1, 1\}$. Es fácil ver entonces que la simetría para esta clase de universalidad no es otra que la de $\mathbb{Z}_2$ – la simetría bajo cambiar el signo del parámetro de orden.

Una consecuencia de esto es que los imanes uniaxiales – descritos por el modelo de Ising [9] – pertenecen a esta clase de universalidad. Existen varias sustancias compuestas, como SrRuO_3 , FeF_2 o NdRu_2Si_2 , por dar algunos ejemplos, que presentan un comportamiento *antiferromagnético* uniaxial [10, 11, 12, 13, 14]. Tal comportamiento puede ser mapeado, en muchos casos, a un sistema ferromagnético uniaxial de forma sencilla. Si bien sobre estos sistemas existen numerosos estudios, y de hecho se conocen soluciones exactas en algunas dimensiones bajas [15] es útil tener un formalismo general que incluya, en un caso particular, a un sistema tan importante para la mecánica estadística. Este modelo de variables binarias sobre una red presenta, para dimensión $d > 1$, magnetización espontánea – es decir una dirección preferencial a temperaturas bajas, en su fase con la simetría $\mathbb{Z}_2$ rota – la cual se anula en una transición de segundo orden si no se lo somete a un campo magnético externo, recuperando la simetría $O(1)$. En dicho punto el sistema es invariante bajo una inversión de sus grados de libertad microscópicos. Este fenómeno se observa en la figura 1.2 donde se muestra la solución analítica, propuesta por Onsager [15] y probada por Yang [16], para el modelo de Ising en el caso bidimensional.

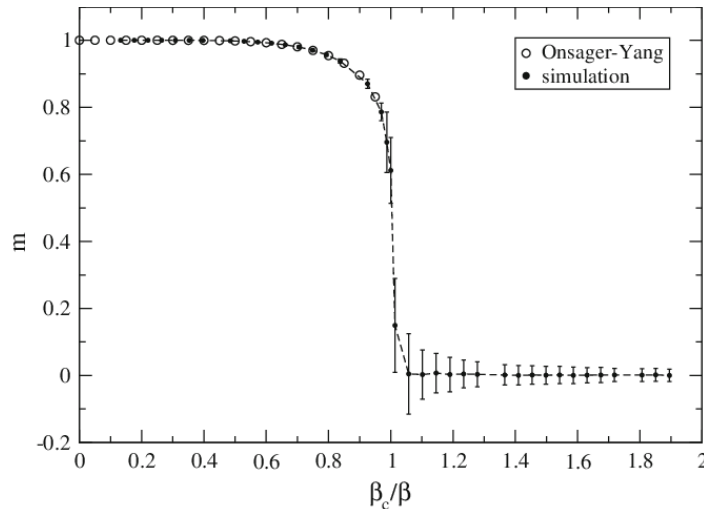


Figura 1.2: Magnetización espontánea de un sistema magnético uniaxial sobre una estructura cristalina bidimensional, en función del cociente $\beta_c/\beta = T/T_C$ y en campo magnético externo nulo. Vemos tanto la solución exacta de Onsager y Yang, como el resultado de una simulación Monte-Carlo del sistema. Conforme T aumenta y se aproxima a T_C , M disminuye de su valor máximo en $T = 0$, anulándose en $T = T_C$. Figura extraída de [17].

Ahora bien, hay más sistemas que pertenecen a la clase de universalidad de Ising. Tal es el caso de las sustancias puras, en torno a su transición de fase líquido-gas¹ [18, 19, 20, 21]. Cerca del punto crítico, el *modelo de gas en red* describe con total

¹En esta transición la diferencia de densidades no es un parámetro de orden en un sentido estricto, aunque se anula en el punto de transición, pues ambas fases poseen las mismas simetrías.

precisión las leyes de potencias de las magnitudes termodinámicas del gas. Este modelo parte de suponer interacciones entre moléculas de la sustancia del tipo Lennard-Jones, y luego realiza una discretización del espacio a una red periódica. Para cada “nodo” de esta “red”, se considera una variable binaria n_i tal que mide la ocupación del nodo por una molécula. Trabajando en el ensemble gran canónico – en donde el número de moléculas no está fijo – es posible obtener que el Hamiltoniano del gas, para la interacción local considerada, respeta las mismas simetrías que el Hamiltoniano del modelo de Ising y puede reparametrizarse de modo de coincidir con este. Por ende, la transición líquido-gas es descrita por la clase $O(1)$. Notemos que en este caso, la simetría $O(1) = \mathbb{Z}_2$ es una propiedad emergente del punto crítico, no presente en el problema original en puntos arbitrarios del diagrama de fases.

Otro caso similar ocurre al considerar aleaciones binarias [22, 23, 24], como Zn-Cu. En estos casos, se observa que por encima de una cierta temperatura crítica, el orden *bcc* del cristal, con un tipo de átomo en las esquinas y otro en el centro de cada celda se empieza a perder y los átomos ocupan cualquier lugar con igual probabilidad. Planteando una interacción entre primeros vecinos es posible realizar una reparametrización y obtener un Hamiltoniano idéntico al del gas en red, que a su vez hemos discutido pertenece a la clase de universalidad $O(1)$.

$N = 2$: Imanes planos, transición λ del Helio-4 y superconductores de alta temperatura

Al pensar en sistemas ferromagnéticos donde la interacción no es isotrópica, sino que posee un plano preferencial, se obtienen los denominados imanes *planos*¹, uno de los ejemplos más conocidos de sistema físico cuyo punto crítico es descrito por la clase de universalidad de los modelos $O(2)$. El caso bidimensional de este modelo es muy particular, dando lugar a la transición BKT (Berezinskii–Kosterlitz–Thouless) [25, 26, 27], cuya investigación fue objeto de un premio Nobel en 2016. En la mayoría de este trabajo, sin embargo, nos centraremos en el caso $d \geq 3$.

Existen otros sistemas importantes para la física estadística que también poseen una transición en la clase de universalidad $O(2)$: el Helio-4 superfluido y los superconductores de alta temperatura. Comencemos con el primero de ellos. Partiendo desde alta temperatura, el He-4 comienza en el estado fluido (desordenado). Debido a que los átomos de He-4 se comportan como bosones, al bajar la temperatura una cantidad macroscópica del total de átomos acceden al mismo estado cuántico, en un proceso parecido al del condensado de Bose-Einstein. No se trata exactamente de un condensado de Bose-Einstein pues existen interacciones. En un principio, estas impedirían que se

¹En un imán plano, las interacciones entre espines favorecen un cierto plano – luego la magnetización se encuentra confinada a este. Esto no significa que el material, la estructura cristalina con momentos magnéticos periódicamente distribuidos, sea bi-dimensional.

alcance un estado superfluido, debido a colisiones entre átomos excitados y átomos en el condensado. Sin embargo, a comienzos de los '60, Landau demostró que la superfluidez sí podía suceder [28], valiéndole esto un premio Nobel. Su argumento muestra que si la velocidad de flujo en el fluido es menor que un cierto valor crítico v_c , vinculado a las energías de los estados excitados, el sistema no puede disipar. Para el caso de He-4, v_c es finita, y por debajo de esta, el sistema exhibe un estado de superfluidez (fase ordenada). En la figura 1.3 vemos el diagrama de fases para el He-4 donde se distinguen las dos fases líquidas con diferentes propiedades, y también la curva de calor específico en función de la temperatura, la cual presenta una no-analiticidad en $T = T_C$ cuyo aspecto recuerda a la letra λ – de ahí el nombre del fenómeno crítico.

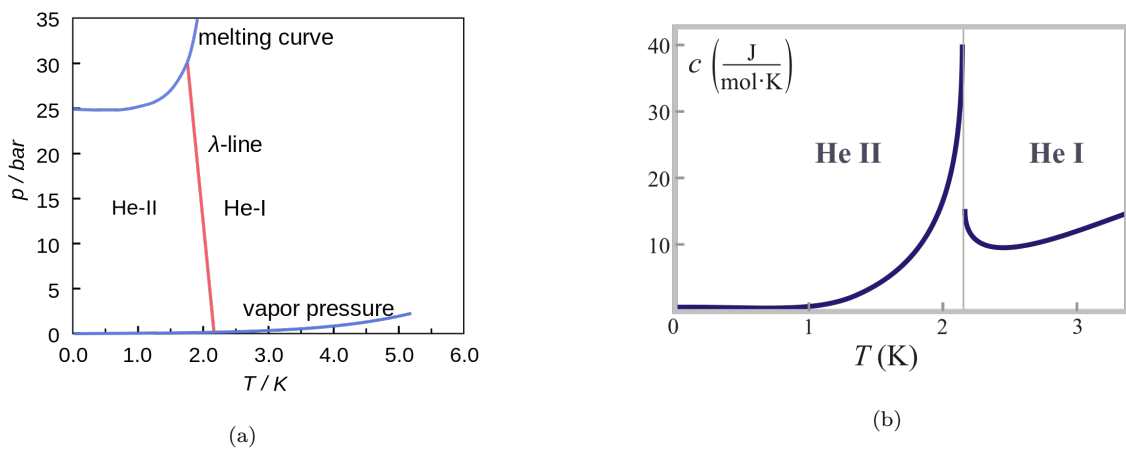


Figura 1.3: Representaciones esquemáticas de (a): diagrama de fases para el Helio-4. y (b): calor específico cerca de la transición. El aspecto de su no analiticidad da lugar al nombre de la transición: λ . Figuras tomadas de Wikimedia Commons.

Cuando uno considera la función de onda que describe el estado condensado, y tiene en cuenta que los átomos de He-4 presentan repulsión de corto alcance, resulta que puede dar una descripción, en las proximidades de la transición de fase, en términos de un campo clásico de dos componentes, con módulo fijo [29]. Esto se debe a que la transición de la fase ordenada a la desordenada es producida por fluctuaciones en la fase compleja de la función de onda $\Psi(r)$, y no de su módulo. En conclusión, la transición es medida por un parámetro de módulo fijo y dos componentes, análogo al caso del imán ferromagnético plano, por lo cual la clase de universalidad $O(2)$ controla su régimen emergente. Vale la pena destacar que esta es una de las transiciones en tres dimensiones estudiadas con mayor precisión, con experimentos realizados en el Space Shuttle [30, 31].

Por último, mencionemos el caso de los materiales superconductores a altas temperaturas, los cuales también exhiben una transición entre sus fases conductora y superconductora descrita por esta clase de universalidad [29, 32, 33]. Una descripción cualitativa del fenómeno es que en ciertos materiales con electrones cuasi-libres, se forman estados ligados de pares de electrones, llamados pares de Cooper. Para estos pares

el espectro de energías presenta un salto ΔE sin valores permitidos – llamado *band-gap* – lo cual conlleva a que, para temperaturas bajas tales que $k_B T \lesssim \Delta E$, el flujo de los electrones en el material sea no disipativo al no poder perder energía en colisiones con los iones que lo forman, de forma similar al ejemplo del superfluido. Esta transición, para su correcta descripción, requiere de un tratamiento mecánico cuántico de las interacciones entre electrones. Sin embargo, el resultado es relativamente sencillo: se puede analizar el problema en términos del campo escalar complejo $\Psi(\vec{r})$, que mide la amplitud cuántica de hallar un par de Cooper en $\vec{r}$. El Hamiltoniano de la teoría resulta invariante bajo cambios globales de fase de esta función de onda Ψ . Se trata de una situación similar a la del He-4, y nuevamente la transición entre el estado superconductor y el conductor, en la cual $|\Psi|^2$ se anula, es descrita por la clase de universalidad $O(2)$.

$N = 3$: Imanes isotrópicos

Al considerar sistemas con parámetro de orden de tres componentes, el ejemplo canónico lo constituyen los imanes ferromagnéticos isotrópicos, cuyo régimen crítico pertenece a la clase $O(3)$. Estos son sistemas, usualmente ubicados sobre una red, que exhiben una magnetización espontánea debajo de una cierta temperatura, conocida como temperatura de Curie. Estos incluyen a los imanes habituales que presentan magnetización con tres grados de libertad, como por ejemplo Fe, Ni, Gd, EuO o Fe_3O_4 . Muchos materiales antiferromagnéticos isotrópicos poseen una descripción microscópica que puede ser re-expresada fácilmente en los mismos términos que los modelos para los ferromagnéticos. Por ende, la transición antiferro-paramagnética también es descrita por esta clase de universalidad. Este segundo caso incluye ejemplos como Cr, NiO, FeMn o RbMnF_3 .

Un modelo habitual de los sistemas ferromagnéticos isotrópicos es el de una estructura cristalina donde los átomos, o moléculas, en los nodos de la red, presentan un momento magnético. Dichos momentos magnéticos interactúan entre sí mediante la interacción *de intercambio* – lo cual es en realidad el nombre que se le da a un fenómeno cuántico debido al principio de exclusión de Pauli. Esta interacción – que surge del hecho de que la función de onda de un conjunto de fermiones debe ser antisimétrica bajo intercambio de partículas – puede ser tanto ferromagnética como antiferromagnética – según si la energía es minimizada por el alineamiento paralelo o antiparalelo de los momentos magnéticos. Esto sucede debido a que al considerar un término de interacción Coulombiana entre dos electrones, se rompe la degeneración en las energías de los estados espacialmente simétricos y antisimétricos¹. Esta diferencia de energía es

¹Recordemos que para un par de fermiones la función de onda debe ser antisimétrica bajo intercambio de posiciones *y* espines. En consecuencia, si es espacialmente antisimétrica, debe ser simétrica en los espines – o viceversa.

proporcional a un factor llamado *integral de intercambio*, cuyo signo depende de los detalles del sistema específico. El efecto neto de este término es que uno de los estados, simétrico o antisimétrico en los momentos de espín, resulte el de mínima energía, tendiendo así el sistema a baja temperatura a alinear o anti-alinear los espines, según el signo de la integral de intercambio. Esta interacción es de corto alcance pues la integral de intercambio involucra el producto de las densidades de probabilidad espacial de cada electrón, y su superposición decae rápidamente. Es mucho más intensa que la interacción magnética espín-espín, por lo cual domina en la determinación del comportamiento magnético del material.

El modelo de Heisenberg cuántico, el más sencillo para describir esta interacción, considera espines cuánticos ubicados en los nodos de la red:

$$\mathcal{H}_{qH} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \hat{\vec{S}}_i \cdot \hat{\vec{S}}_j, \quad (1.2)$$

donde J_{ij} son las *constantes de intercambio*, vinculadas a la integral de intercambio para el par $\{i, j\}$. La suma se realiza sobre todas las parejas de espines en la red. Según si las J_{ij} son mayores(menores) a cero, la interacción es ferro(antiferro)-magnética. Notemos que la forma de la interacción es simétrica por rotaciones de los espines, de allí que se trate de un sistema isotrópico, sin direcciones preferenciales.

Cuando uno considera un sistema de este tipo a una temperatura *finita*, las fluctuaciones térmicas se tornan dominantes, y es posible realizar un modelo clásico en términos de espines como momentos magnéticos clásicos, de módulo constante. En ese caso, el Hamiltoniano luce:

$$H_{cH} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \quad (1.3)$$

donde ahora los $\vec{S}_i$ son vectores clásicos de tres componentes. Este Hamiltoniano describe al denominado *modelo de Heisenberg clásico*. Este modelo presenta simetría $O(3)$. Incluso si la estructura cristalina introduce interacciones anisotrópicas subdominantes la transición es aproximadamente descrita por la clase de universalidad¹ $O(3)$.

$N = 4$: transición quiral en Cromodinámica Cuántica

Hemos mencionado ejemplos de interés principalmente para la física de la materia condensada. Sin embargo, las clases de universalidad de los modelos $O(N)$ también son útiles para la descripción de transiciones a nivel de la Cromodinámica Cuántica. Más concretamente, la transición *quiral*, donde la simetría de la teoría se rompe espontáneamente, es descrita por la clase de universalidad $O(4)$ en el caso de dos sabores

¹Recientemente se ha reportado que en el caso de una red cúbica, estas anisotropías son “marginamente” relevantes [34], es decir, sus *scaling* positivos, pero muy pequeños.

de quarks sin masa.

La naturaleza de la transición depende del número f de quarks que pueden considerarse no masivos [35]. Supongamos que tenemos dos quarks sin masa. Esta situación describe casi perfectamente el mundo en que vivimos: hay dos tipos de quarks, *up* y *down*, que a escalas de energía típicas de QCD, pueden considerarse aproximadamente sin masa. El caso del quark *strange* es un poco más delicado, y los restantes quarks tienen masas que exceden considerablemente las escalas típicas de QCD.

Para la Cromodinámica Cuántica con f quarks sin masa, el Lagrangiano presenta una simetría global $SU(f)_L \times SU(f)_R \times U(1)_{L+R}$. Esta simetría se rompe espontáneamente a $SU(f)_{L+R} \times U(1)_{L+R}$ a temperaturas bajas, y es restaurada a temperaturas suficientemente altas [36, 37]. Aquí los subíndices L y R refieren a transformaciones actuando sobre los fermiones izquierdos o derechos, respectivamente. Inicialmente existe una simetría que permite transformar unos u otros por separado, la cual es rota en la transición a una simetría bajo transformación simultánea de ambos tipos de fermiones. Para $f \geq 2$, existe una transición de fase asociada a la restauración de esta simetría. En el caso $f = 2$, cerca del punto de transición en que se rompe espontáneamente la simetría, es posible dar una descripción en términos de una energía libre de tipo Ginzburg-Landau [38], donde el parámetro de orden M , un bilineal construido a partir de los quarks, se expresa en términos de las matrices 2×2 unitarias de determinante positivo:

$$M = \phi_0 \text{Id}_2 + i\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}, \quad (1.4)$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli. Esta descripción termina resultando equivalente a una teoría con un campo $\phi \equiv (\phi_0, \vec{\pi})$ de cuatro componentes, con simetría $O(4)$ [36, 35, 37]. La transición de fase pertenece entonces a la clase de universalidad $O(4)$.

$N = 0$ y $N = -2$: casos no unitarios

El parámetro N que describe la simetría interna de los modelos $O(N)$ solo tiene sentido estricto cuando consideramos N entero y positivo – el número de índices de color internos. Sin embargo, su rol en las ecuaciones que describen la física de largas distancias de la clase de universalidad $O(N)$ dada, es el de un parámetro que se puede modificar arbitrariamente para incluir valores no enteros, e incluso, negativos de N . En este caso, tenemos modelos donde el mapeo a una teoría unitaria en espacio Minkowskiano no es nada trivial.

Hay dos ejemplos que estudiaremos numéricamente. Primero, $N = 0$ que corresponde a caminatas auto-evitantes [39], un modelo útil para describir cadenas de polímeros largas con auto-repulsión. El segundo ejemplo es $N = -2$, que describe la física de las caminatas al azar con eliminación de bucle [40] – si en su camino el agente realiza una curva cerrada, esta se elimina y continua desde el punto en que se cerró tal curva.

1.2. Fenómenos críticos: simetrías emergentes

Hemos mencionado múltiples sistemas físicos que experimentan transiciones de fase continuas descritas por diferentes modelos $O(N)$. En esta tesis estudiaremos las transiciones de estas clases de universalidad, determinando los exponentes críticos que caracterizan las leyes de potencias en sus alrededores, y poniendo especial énfasis en las simetrías emergentes del régimen crítico. Para comprender mejor esto, debemos hacer una discusión cualitativa de los fenómenos críticos.

Comencemos estudiando el comportamiento de la función de correlación conexas a 2-puntos cerca de una transición de segundo orden:

$$G_{ij} = \langle \varphi_i \varphi_j \rangle - \langle \varphi_i \rangle \langle \varphi_j \rangle, \quad (1.5)$$

donde para fijar ideas estamos considerando una red periódica con variables φ_i en sus nodos. Para i, j fijos, se trata de la covarianza $\text{cov}(\varphi_i, \varphi_j)$, que mide la tendencia de las dos variables a presentar una relación lineal – que tan dependientes son una de la otra. Normalizada por las varianzas de cada variable, toma valores entre -1 y 1 . Estos valores extremos pueden interpretarse físicamente como una tendencia de los espines a antialinearse, o alinearse, mediante una interacción efectiva. El valor 0 sugiere que se trata de variables independientes, o físicamente, de grados de libertad que no interactúan¹. Si ahora nos permitimos variar la pareja i, j considerada, G_{ij} nos da una idea de hasta qué distancia los grados de libertad del sistema “interactúan” efectivamente – en el sentido de que “mide” cuan independientes son las variables microscópicas. La función a dos puntos suele comportarse a grandes distancias como:

$$\log G_{ij} \sim \log G(R_{ij}) \sim -\frac{R_{ij}}{\xi}, \quad (1.6)$$

donde R_{ij} es la distancia entre los nodos i y j , y ξ es la *longitud de correlación*, que nos da una idea de la distancia a la cual los espines se encuentran correlacionados. Para temperaturas por encima, o debajo, de la temperatura crítica T_C , ξ tiene un valor finito (típicamente del orden de a – la constante de la red). Sin embargo, cerca de una transición de fase continua, los sistemas se encuentran fuertemente correlacionados y $\xi \gg a$ – si tuviésemos una muestra de tamaño ilimitado $\xi/a \rightarrow \infty$. Tenemos un número efectivo de grados de libertad interactuando mucho mayor al esperable por las interacciones microscópicas, que normalmente solo relacionan a vecinos cercanos. Podemos ir un poco más allá, pues resulta que cerca de la temperatura de transición $T \sim T_C$ – o en general cuando el parámetro de control se encuentra cerca del valor crítico – la función de correlación conexas a dos puntos se comporta según su *forma de*

¹Esto no significa que si $G_{ij} = 0$ las variables son independientes. Si bien dos variables independientes presentan covarianza nula, el recíproco no es cierto siempre.

scaling:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(q) &= \frac{1}{q^{2-\eta}} f(q\xi) \\ G(r) &= \frac{1}{r^{d-2+\eta}} g\left(\frac{r}{\xi}\right),\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde f y g no dependen de los detalles microscópicos del modelo (a menos de constantes de normalización) y la dimensión anómala η , es un nuevo exponente crítico. Este comportamiento es válido si $r, q^{-1} \gg a$. Por otro lado, cerca de la transición la longitud de correlación diverge con una ley de potencia caracterizada por el exponente crítico ν :

$$\xi \stackrel{T \rightarrow T_C}{\propto} \frac{1}{|T - T_C|^\nu}.\tag{1.8}$$

Del comportamiento de las funciones de correlación, notamos que para distancias $r \gg a$, hay independencia de los detalles microscópicos. Y, al mismo tiempo, si $r \ll \xi$, las cantidades no deben depender de ξ – si hay un límite termodinámico, ya que en el límite de volumen infinito, $\xi \rightarrow \infty$. En definitiva, existe un cierto régimen $a \ll r \ll \xi$ en donde el sistema, careciendo de una escala típica, se comporta cómo “invariante de escala”. Esto significa que la física permanece incambiada si miramos el sistema desde más cerca, o más lejos, con un comportamiento que es aproximadamente autosimilar. Por ejemplo, en un sistema magnético que se acerca a la criticalidad $T \rightarrow T_C^-$, los dominios magnéticos con los espines alineados se vuelven de tamaños y formas sin una escala característica. Notemos que esto solamente puede suceder en la criticalidad, pues de otro modo $\xi \sim a$. Además de este hecho, la muy leve dependencia en la escala microscópica a para un r en este régimen, conduce a un comportamiento homogéneo e isotrópico – es decir, invariante bajo traslaciones y rotaciones – incluso si a escala microscópica el sistema se ubica sobre una red con simetrías discretas. En el capítulo 3 estudiaremos más de cerca la relación entre la invariancia bajo transformaciones de escala y el análisis del problema en la formulación del Grupo de Renormalización. Podemos concluir que en su punto crítico, y a largas distancias, el sistema presenta muchas más simetrías que para un punto arbitrario del diagrama de fases.

1.3. Objetivos de trabajo

En esta tesis, exploraremos las transiciones de fase de los modelos $O(N)$ poniendo particular atención en las simetrías del régimen crítico. En particular, estudiaremos la posibilidad de que en el punto crítico estos sistemas presenten simetría *conforme*, algo conjeturado por Polyakov y Migdal en los años 70 [41, 42]. Las transformaciones conformes son aquellas transformaciones que, para dos curvas dadas que se intersectan en un punto, no modifican el ángulo de intersección. Esta simetría incluye las ya mencio-

nadas rotaciones, traslaciones y transformaciones de escala, pero considera además un nuevo tipo de transformaciones: las llamadas *transformaciones conformes especiales*. Podemos intuitivamente considerar estas transformaciones como la composición de una inversión¹, una traslación y otra inversión. En el capítulo 3 profundizaremos en el grupo conforme, sus propiedades, generadores y álgebra. Esta conjetura ha sido demostrada, en $d = 3$, para $N = 1, 2, 3, 4$ [43, 44], pero no ha sido probada para N arbitrario si nos restringimos a esta dimensión. Existen resultados más generales, desde los años 80, que muestran como en dimensión $d = 2$ la invariancia bajo traslaciones, rotaciones y dilataciones, conjunto a la condición de unitariedad implican que los puntos fijos críticos son invariantes conformes [45, 46] para varios sistemas.

El propósito de esta tesis a nivel analítico es doble:

1. Abordar, de forma analítica, el caso $N \rightarrow \infty$, donde veremos como para las funciones de correlación a 2- y 3-puntos, la simetría conforme se verifica.
2. Estudiar qué restricciones impone sobre la teoría requerir la invariancia conforme, en dicho límite y también para N finito. Esto nos permitirá extraer el espectro de exponentes críticos en el límite $N \rightarrow \infty$, así como restricciones sobre operadores compatibles con la simetría acoplables a la teoría.

Para el caso N finito, utilizaremos esta simetría para extraer resultados numéricos. A partir de un esquema de aproximación, denominado *Desarrollo en Gradientes*, del Grupo de Renormalización No Perturbativo, estudiaremos el régimen crítico de los modelos $O(N)$ para diversos valores de N , incluyendo aquellos físicamente relevantes, como los mencionados en la sección 1.1. Profundizaremos sobre este método en el capítulo 2. A partir de esta implementación numérica, considerando la conjeturada simetría conforme, planeamos:

3. Extraer predicciones numéricas para los exponentes críticos. Compararemos estos resultados con los valores aceptados, donde veremos que las predicciones obtenidas son comparables, y compatibles, con las más precisas a la fecha. En particular, estudiaremos las diferencias del criterio de determinación de dichos exponentes buscando minimizar la ruptura de la simetría conforme con otro método actualmente más extendido, conocido como *Principio de Mínima Sensibilidad*.
4. Con un enfoque más técnico, comparar dos versiones diferentes de la DE existentes en la literatura, *full* y *strict*, sobre las cuales hablaremos en el siguiente capítulo, al nivel de precisión abordado en esta tesis.

¹Se trata de la transformación discreta $x^\mu \rightarrow x^\mu/\mathbf{x}^2$ que mapea el interior de la d -esfera en su exterior y viceversa.

Capítulo 2

El Grupo de Renormalización No Perturbativo

Como hemos introducido en el capítulo 1, las transiciones de fase, y más particularmente, los puntos críticos – es decir las transiciones de segundo orden – son un campo de la física con numerosas realizaciones experimentales, de importancia teórica y práctica, y son fenómenos sumamente interesantes en sí mismos. Sin embargo, la creciente complejidad de la descripción de un sistema conforme se aproxima al régimen crítico, donde el número de grados de libertad interactuando de forma efectiva se vuelve cada vez más grande, conllevan a que su estudio analítico sea sutil y requiera de técnicas específicas. En este capítulo realizaremos una puesta a punto sobre los avances formales para tratar el régimen crítico, repasando material no original de este trabajo, explicado, entre otras fuentes, en [47, 48, 49, 50, 51]. Introduciremos las ideas generales detrás del Grupo de Renormalización y sus transformaciones discretas, viendo de qué modo éste nos permite considerar las interacciones a toda escala sin arruinar el cálculo y, de esa forma, estudiar los puntos críticos. Luego veremos una implementación particular de esta idea: el Grupo de Renormalización No Perturbativo (NPRG), o Grupo de Renormalización Funcional (FRG), con un enfoque funcional para lo que llamaremos flujo de renormalización. Estudiaremos un esquema de aproximación dentro del NPRG – el desarrollo en gradientes (DE), el cual nos permite realizar cálculos numéricos de los exponentes críticos y otras magnitudes de interés en la criticalidad.

2.1. Grupo de Renormalización de Wilson

2.1.1. Problemas con el desarrollo perturbativo

El tratamiento de las transiciones de fase ha sido un campo de trabajo intenso para la física del siglo XX. En la década del 30, Landau realizó uno de los primeros intentos de dar una descripción sistemática de los fenómenos críticos, implementando

una aproximación similar a la teoría de campo medio [38] para estudiar transiciones de fase en fluidos. Introduzcamos esta formulación, viendo sus éxitos, y sus defectos, lo cual nos servirá para introducir el Grupo de Renormalización. En primer lugar, se considera un Hamiltoniano mesoscópico (usualmente denominado Hamiltoniano de Ginzburg-Landau) $H_{GL}[\varphi]$ para variables continuas, que respeta las simetrías de la teoría y posee un estado de energía mínima que se corresponde con la fase de baja temperatura del sistema. Si pensamos en un modelo magnético unidireccional, sería la fase ferromagnética, y un ejemplo de Hamiltoniano de Ginzburg-Landau sería:

$$H_{GL}[\varphi] = \int_x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{r_0}{2} \varphi^2 + \frac{u_0}{4!} \varphi^4 \right\}, \quad (2.1)$$

en donde utilizamos la notación:

$$\int_x f(x) \equiv \int f(x) d^d x. \quad (2.2)$$

En este modelo, el parámetro de orden es una variable continua que toma valores en cada punto del espacio. En principio el modelo mesoscópico puede incluir más acoplamientos, según cuan bien se conozca la interacción a nivel fundamental – lo cual varía de sistema en sistema. Afortunadamente, uno de los resultados más llamativos de la teoría de Landau (o de Ginzburg-Landau) es que la descripción de la transición de fase de segundo orden que se obtiene es mayormente independiente de todas estas posibles constantes de acoplamiento, lo cual evita la necesidad de estudios microscópicos detallados. A partir de H_{GL} se obtiene la función de partición del sistema:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-H_{GL}[\varphi] + \int_x J(x)\varphi(x)}. \quad (2.3)$$

Usualmente la función de partición tiene un factor $\beta = (k_B T)^{-1}$ en el exponente. En este análisis, lo supondremos absorbido en las constantes de acoplamiento de la teoría, que consecuentemente dependen de T . Debido a que se trabaja con un parámetro de orden continuo, en vez de sumar sobre microestados, se realiza una *integral de caminos* sobre todas las posibles *configuraciones* del campo (parámetro de orden). Es aquí donde se introduce la aproximación de Landau: se supone que $\log Z[J]$ está dominada por una única configuración del campo, la de mayor probabilidad:

$$\log Z[J] \approx -H_{GL}[\varphi_0] + \int_x J(x)\varphi_0(x), \quad (2.4)$$

en donde φ_0 es aquella configuración del campo que maximiza el exponente:

$$\left. \frac{\delta H_{GL}}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi_0} = J(x). \quad (2.5)$$

Al realizar esta aproximación, hemos despreciado las contribuciones de todas las fluctuaciones en torno a la configuración dominante, lo cual es similar a la aproximación de campo medio (MFT). Como consecuencia, el valor esperado del campo coincide con φ_0 , dado que es la única configuración que se toma en cuenta:

$$\langle \varphi(x) \rangle \equiv \phi(x) = \varphi_0(x). \quad (2.6)$$

En general, en lugar de trabajar con la energía libre de Helmholtz $W[J]$, que es proporcional a $\log Z$, se pasa a trabajar en términos de la energía libre de Gibbs $\Gamma[\phi]$. Esta no es más que la transformada de Legendre de la primera, respecto al campo externo $J(x)$. Al calcularla, se obtiene la aproximación de Landau para $\Gamma[\phi]$:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] &= \int J_\phi \phi(x) - W[J_\phi] \quad \text{donde } J_\phi \text{ es tal que: } \phi(x) = \left. \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right|_{J_\phi} \\ &= H_{GL}[\varphi \equiv \phi] \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir de esta aproximación se pueden calcular los exponentes críticos de una teoría. Un resultado importante de tal análisis es que dichos exponentes apenas dependen de algunos signos relativos entre constantes de acoplamiento, no de sus valores. Es decir, los exponentes críticos son comunes a una gran cantidad de sistemas con diferentes Hamiltonianos microscópicos – son cantidades universales. Este es uno de los mayores éxitos de la formulación de Landau, pues predice correctamente la existencia de las clases de universalidad observadas empíricamente, que mencionamos en el capítulo 1. Sin embargo, los exponentes críticos que predice son incorrectos, idénticos a los de la teoría de campo medio [38, 52, 53] e independientes de la dimensión d . Esto, para dimensiones menores a un cierto valor d_c no se verifica y no se corresponde con las mediciones experimentales y las simulaciones numéricas. Veamos cómo podrían mejorarse los resultados en este esquema de trabajo. Ginzburg, a comienzo de la década del 60, se propuso calcular las primeras correcciones a la teoría de Landau [54]. El fruto de su trabajo es lo que hoy se conoce como criterio de Ginzburg, que determina el rango de validez de la aproximación de Landau. Partiendo de suponer ésta lo suficientemente buena, Ginzburg calculó las primeras correcciones y las comparó con el orden cero de la aproximación – en que todas las fluctuaciones están congeladas. Una forma de hacer este desarrollo es considerar un parámetro adicional ficticio¹ $\hbar$:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{\frac{-H_{GL}[\varphi] + \int_x J(x)\varphi(x)}{\hbar}}. \quad (2.8)$$

donde $\hbar \rightarrow 0$ corresponde a la aproximación de Landau: solo importa la configuración

¹Aquí $\hbar$ no es la constante de Planck, sino un parámetro adimensionado ficticio. Empleamos esta notación por la similitud con los desarrollos semiclásicos de la mecánica cuántica en $\hbar$.

de campos que verifica (2.5). Si permitimos que $\hbar$ sea pequeña, pero no tienda a 0, podemos desarrollar en potencias de $\hbar$ y obtener las correcciones a la teoría de Landau. Ginzburg observó que las correcciones resultan, para dimensiones menores a la denominada dimensión crítica superior de una clase de universalidad d_c , comparables al orden cero, y de hecho, divergentes en la criticalidad en esta aproximación. Esto invalida la teoría de Landau para dimensiones $d < d_c$ cerca del punto crítico, y explica por qué predice exponentes críticos erróneos. Estudiemos el verdadero problema detrás de todo esto. La aproximación de Landau

$$\Gamma[\phi] = H_{GL}[\varphi \equiv \phi], \quad (2.9)$$

implica una propiedad crucial: la energía libre del modelo es analítica en el parámetro de orden ϕ y sus derivadas $\nabla^n \phi$. Suponer $H_{GL}[\varphi]$ como una suma de algunos pocos términos no es algo desacertado, ya que a nivel microscópico las interacciones son de corto alcance – es decir que no involucran derivadas de alto orden – y, en general, los sistemas no exhiben interacciones que involucren productos de un gran número de campos. Sin embargo, al considerar la energía libre de Gibbs, funcional del valor esperado del campo microscópico, $\phi(x)$, la historia es muy diferente. Lejos del punto crítico, donde $\xi \approx \mathcal{O}(a)$ con a la escala microscópica – por ejemplo la constante de una red – Γ compartirá estas propiedades con H_{GL} y también será una función suave, desarrollable en potencias del campo y sus derivadas. Pero al acercarnos a la transición de fase de segundo orden, esto ya no es así. Cada grado de libertad interactúa de manera efectiva con un número $\sim (\xi/a)^d \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty$ de componentes del sistema. Esto lleva a que Γ sea una función no analítica, es decir una suma de infinitos términos donde las constantes de acoplamiento no son progresivamente más pequeñas, y por ende, no desarrollable – no podemos despreciar los términos de mayor orden en el número de campos o derivadas, todos están presentes. Profundicemos un poco más, veamos por qué no funciona un desarrollo perturbativo en torno a la teoría de Landau *à la* Feynman. El problema con este enfoque reside en que, a un orden dado del desarrollo¹ en $\hbar$, consideramos las fluctuaciones de *todas* las longitudes de onda en pie de igualdad – de ahí surgen las integrales de Feynman. Cuando nos aproximamos al punto crítico y $\xi \rightarrow \infty$, este procedimiento puede arruinar nuestra aproximación, incluso si nuestro modelo microscópico es muy preciso. La idea del Grupo de Renormalización de Wilson, que veremos a continuación, es re-ordenar la suma sobre las fluctuaciones de una nueva forma tal que no aparezcan divergencias, construyendo una sucesión de teorías efectivas a escalas cada vez mayores, integrando la física de distancias pequeñas de forma progresiva.

¹Equivalentemente a desarrollar en $\hbar$, podemos pensar en que el desarrollo es en u_0 si pensamos en una teoría φ^4 en torno al punto fijo Gaussiano con una perturbación $u_0 \varphi^4/4!$, para fijar ideas.

2.1.2. Transformaciones del Grupo de Renormalización

Bloques de espines de Kadanoff

Uno de los pasos más importantes hacia la obtención de una descripción más adecuada de los fenómenos críticos fue dado por Kadanoff en 1966, con su propuesta de construir bloques de espines sucesivos integrando cada vez más grados de libertad [55].

Consideremos una teoría en una red de constante a , como puede ser un modelo de un sistema magnético. Por simplicidad consideremos el caso uniaxial clásico – modelo de Ising – en donde los espines $S_i = \pm 1$ son variables binarias. Su Hamiltoniano microscópico – discreto – está dado por:

$$H_I = -\beta J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \beta B \sum_i S_i, \quad (2.10)$$

donde $\langle \rangle$ indica parejas de primeros vecinos. Queda implícito que los acoplamientos para las interacciones entre más espines (compatibles con la simetría $\mathbb{Z}_2$), como puede ser las interacciones llamadas de plaqueta, son nulos. Ahora, para estudiar la física a distancias $\gg a$, podemos considerar, en vez de cada grado de libertad de forma individual, bloques de espines de tamaño $s_0 a$, sustituyendo los espines originales S_i por uno nuevo S'_α representante del bloque. Esta fue la idea de Kadanoff de realizar un procedimiento gradual de granulado grueso. Existen muchas maneras de asignar el representante del bloque. Por ejemplo, puede considerarse una variable binaria que tome el valor mayoritario en el bloque (signo de la suma de los espines). Otra opción sería considerar el promedio de los valores – perdiendo así la estructura binaria, pues en los pasos sucesivos el valor del espín se acercará a una variable continua $\in [-1, 1]$. Hay muchas más opciones. En general denotamos al representante como:

$$S'_\alpha = f_\alpha(\{S_i\}), \quad (2.11)$$

donde solamente requeriremos que $f_\alpha(\{S_i\})$ respete la simetría $\mathbb{Z}_2$ y que sea sensible a si dentro del bloque hay una mayoría de espines en una u otra dirección. Esta definición induce una transformación del Hamiltoniano, $H[S_i] \rightarrow H'[S'_\alpha]$, donde este nuevo Hamiltoniano debe describir la misma física de grandes distancias y, en particular, producir la misma función de partición:

$$Z' = \sum_{\{S'_\alpha\}} e^{-H'[S'_\alpha]} = Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-H[S_i]}. \quad (2.12)$$

Este procedimiento induce una relación entre los pesos de Boltzman para una configuración de espines antes y después de la transformación. En general, H' no contendrá sólo los acoplamientos presentes en H , sino que incluirá además muchos términos que

originalmente no estaban contenidos en la teoría microscópica. Continuando con nuestro ejemplo, genéricamente tendremos para $B = 0$:

$$H'|_{\text{campo nulo}} = K'_1 \sum_{\langle \alpha\beta \rangle} S'_\alpha S'_\beta + K'_2 \sum_{\langle \alpha\beta\gamma\delta \rangle} S'_\alpha S'_\beta S'_\gamma S'_\delta + \dots \quad (2.13)$$

donde todos los acoplamientos posibles (compatibles con la simetría del modelo) aparecerán al cabo de algunas transformaciones sucesivas. Llegado a este punto vale la pena modificar el planteo y considerar Hamiltonianos $H[\vec{K}, \{S_i\}]$ donde $\vec{K}$ es una estructura que contiene todos los posibles acoplamientos de la teoría. En el caso de Ising en campo externo B nulo, tiene una única componente no nula en el paso inicial.

Transformaciones del Grupo de Renormalización lineales

Veamos una implementación concreta de la idea de Kadanoff, considerando transformaciones del grupo de renormalización *lineales*. Cada transformación implica dos pasos: primero, formar bloques de espines con f_α una función lineal de los espines S_i y reobtener el Hamiltoniano H' . Consideraremos:

$$S'_\alpha = \frac{\lambda(s_0, \vec{K})}{s_0^d} \sum_{i \in \alpha} S_i, \quad (2.14)$$

donde $\lambda(s_0, \vec{K})$ es una función escalar del factor de escala y los acoplamientos que fijaremos más adelante.

El segundo paso consiste en re-escalar el sistema y medir todas las magnitudes *dimensionadas* en términos de la nueva escala del problema $a' = s_0 a$. Nuestro objetivo es construir una teoría efectiva a partir de la original, con los modos de corta distancia, ya integrados. Para poder comparar la teoría original con la nueva, es necesario medir ambas en las unidades correspondientes, a y $s_0 a$. En particular, si nos interesa estudiar la física de grandes distancias en el régimen *invariante de escala* del punto crítico, es necesario “independizarnos” de las escalas dimensionadas. ¿Cómo sabremos que hemos alcanzado el régimen invariante de escala? Si al hacer una transformación del Grupo de Renormalización, el Hamiltoniano obtenido en términos de la nueva escala de la red, es el mismo que antes, medido en la escala previa a la transformación. Naturalmente, las magnitudes *dimensionadas* no podrán ir a un régimen invariante bajo las TGR – a un *punto fijo* – pues dependen explícitamente de la escala. Re-escalar nos permitirá extraer el factor dimensional y analizar si las magnitudes alcanzan un régimen invariante.

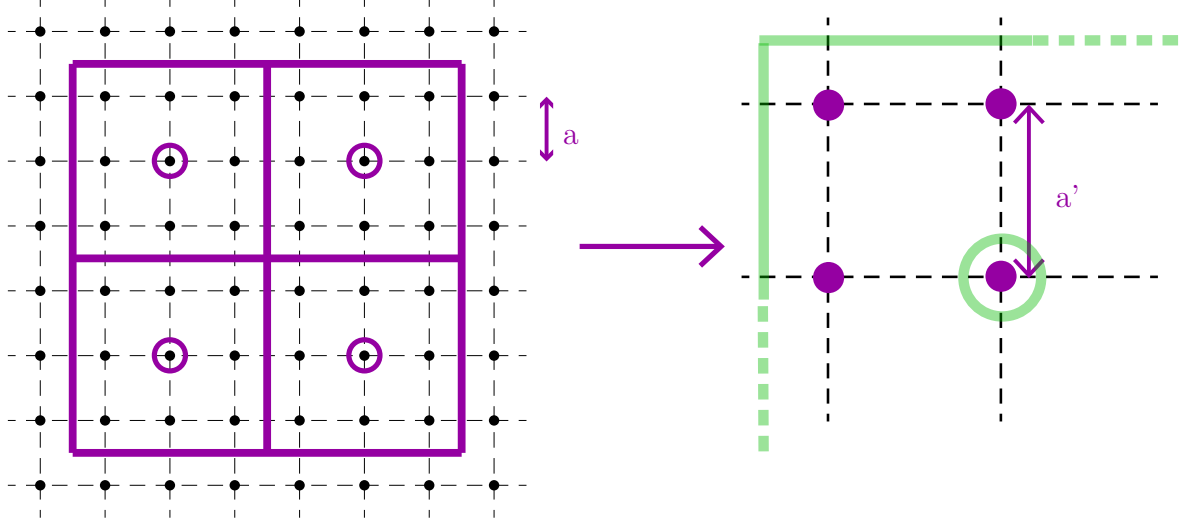


Figura 2.1: Ilustración de la transformación del grupo de renormalización

Este proceso – recalcular el Hamiltoniano y hacer un reescalo de la red, cuya representación gráfica vemos en la figura 2.1 – preserva la función de partición, realizando un mapeo entre teorías efectivas con la misma física de largas distancias, donde los grados de libertad microscópicos son incorporados de forma gradual. La transformación puede resumirse en el mapeo:

$$\vec{K} \rightarrow \vec{K}' = \vec{T}(\vec{K}) \quad (2.15)$$

Una hipótesis importante que haremos es que tras un número finito de transformaciones, $(\vec{T}^n)(\vec{K})$ serán funciones suaves de la temperatura (y el campo externo si lo hubiera), si inicialmente lo eran. La evolución de las constantes de acoplamiento mediante las transformaciones del grupo de renormalización se denomina *flujo de renormalización*. En este caso, el flujo será un mapa discreto, con “saltos” de una teoría efectiva a la siguiente en el espacio abstracto de constantes de acoplamiento.

Comportamiento de la longitud de correlación

Vale la pena discutir qué sucede con la longitud de correlación al realizar transformaciones del grupo de renormalización. Si partimos de la transformación lineal (2.14) que nos da los S'_α , donde la función $\lambda(s_0, \vec{K})$ de momento sigue siendo indeterminada, se puede mostrar [48] que las funciones de correlación verifican:

$$\langle S'_\alpha S'_\beta \rangle = \frac{\lambda(s_0, \vec{K})^2}{s_0^{2d}} \sum_{i \in \alpha, j \in \beta} \langle S_i S_j \rangle \approx \lambda(s_0, \vec{K})^2 \langle S_i S_j \rangle, \quad (2.16)$$

donde la segunda relación es aproximadamente válida si, con $\xi \gg a$, consideramos dos bloques α y β tales que $r_{\alpha\beta} \gg a$ – pues en ese caso $\langle S_i S_j \rangle$ no varía significativamente

para $i \in \alpha$ y $j \in \beta$. Entonces, cerca del punto crítico:

$$\langle S'_\alpha S'_\beta \rangle \approx \lambda(s_0, \vec{K})^2 \langle S_i S_j \rangle. \quad (2.17)$$

Recordemos ahora la *forma de scaling* (1.7) de la función de correlación conexas cerca de la criticalidad, en términos de variables adimensionadas $\bar{r}, \bar{\xi}$:

$$G(\bar{r}, \bar{\xi}) \sim \frac{e^{-\bar{r}/\bar{\xi}}}{\bar{r}^\theta} \quad \text{con} \quad \theta = d - 2 + \eta. \quad (2.18)$$

Esta expresión es válida tanto antes como después de la transformación, pues seguimos teniendo un sistema físico con la misma simetría y física de largas distancias. En conclusión, combinando (2.17) y (2.18):

$$\frac{e^{-\bar{r}/s_0 \bar{\xi}'}}{\bar{r}^\theta} s_0^\theta = \lambda(s_0, \vec{K})^2 \frac{e^{-\bar{r}/\bar{\xi}}}{\bar{r}^\theta}, \quad (2.19)$$

de donde podemos despejar:

$$\bar{\xi}' = \frac{\bar{\xi}}{s_0} \quad \text{y} \quad \lambda(s_0, \vec{K}) = s_0^{(d-2+\eta)/2}. \quad (2.20)$$

Esto quiere decir que la longitud de correlación, medida en términos de la constante de la red re-escalada, disminuye con cada transformación – salvo que el sistema esté exactamente en el punto crítico con $\xi = +\infty$.

Cabe hacer un par de comentarios con respecto a $\lambda(s_0, \vec{K})$. Primero, vemos que su expresión depende de $\vec{K}$ a través de la dimensión anómala η . Segundo, nos conduce a la definición de la *dimensión crítica del campo* φ :

$$\lambda(s_0, \vec{K}) \equiv s_0^{d_\phi(\vec{K})} \quad \text{con} \quad d_\phi = \frac{d - 2 + \eta}{2}. \quad (2.21)$$

Notemos que el término $\frac{d-2}{2}$ corresponde a la dimensión canónica del campo φ , lo cual conduce a la denominación de η como dimensión anómala.

2.1.3. Flujo de renormalización, superficie crítica y puntos fijos

El flujo de las constantes de acoplamiento – flujo de renormalización – tiene lugar en el espacio de todos los acoplamientos compatibles con la simetría de una teoría. Partiendo de algún punto $\vec{K}(T)$, cada paso del grupo de renormalización nos moverá en el espacio de constantes de acoplamiento, mapeando una teoría en otra. Cada una de las teorías a lo largo del flujo de renormalización tendrá una física microscópica diferente – corresponde a una teoría efectiva de la teoría anterior – pero presentará el

mismo comportamiento de grandes distancias.

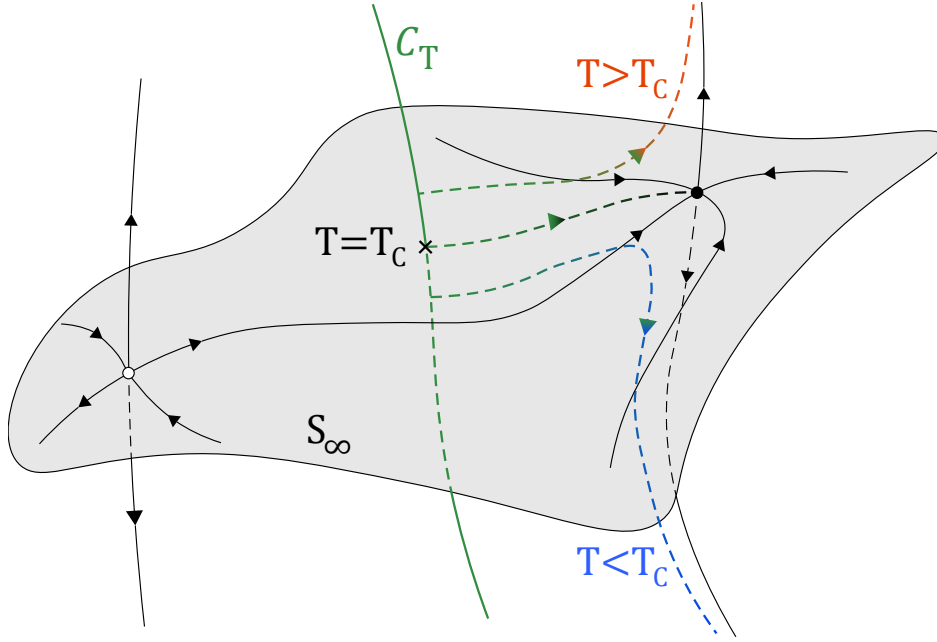


Figura 2.2: Ilustración del flujo de renormalización en la proximidad de la superficie crítica S_∞ . Sobre ésta se presentan dos puntos fijos, uno estable en S_∞ y el otro inestable. La curva $\mathcal{C}_T$ corresponde a una teoría física microscópica con un punto crítico. Las trayectorias que parten de $T \neq T_C$ permanecen cercanas a la trayectoria que parte de $T = T_C$ pero luego se alejan gradualmente, conforme sus $\xi \rightarrow 0$. La trayectoria que parte del punto crítico T_C es atraída hacia el punto fijo estable en S_∞ .

Para un sistema crítico, variando T , las constantes de acoplamiento variarán de forma suave – por hipótesis – describiendo una curva $\mathcal{C}_T$ en el espacio de acoplamientos. Cuando la temperatura alcanza el valor crítico T_C , la longitud de correlación diverge, $\xi = +\infty$. Para cualquier otro valor de T , si bien puede suceder que $\xi \gg a$, su valor permanece finito. Por ende, al cabo de suficientes transformaciones del grupo de renormalización, $\bar{\xi}$ (ξ medida en las unidades del nuevo paso de la red) se volverá tan pequeña como uno quiera. Por otra parte, en la criticalidad, $\bar{\xi} = +\infty$ y luego también $\bar{\xi}' = +\infty$. Esto quiere decir que el flujo de renormalización, partiendo del punto crítico, está confinado a una hipersuperficie de codimensión 1. Se denomina a esta hipersuperficie, dentro del espacio de constantes de acoplamiento, la *superficie crítica* S_∞ – el lugar geométrico de las teorías con $\xi = +\infty$. Entonces, la superficie crítica es estable bajo el flujo de renormalización y “repulsiva”, pues trayectorias que comiencen en un punto cercano, pero por fuera de esta, se irán alejando progresivamente, conforme disminuye ξ medido en las unidades reescaladas – ecuación (2.20). En la figura 2.2 puede apreciarse, esquemáticamente, el comportamiento del flujo del grupo de renormalización en las proximidades de S_∞ .

Concentrémonos ahora en las características del flujo de renormalización, sobre el cual realizaremos una hipótesis fundamental: todo flujo desemboca *siempre* en un punto fijo, no surgen ciclos límites, atractores caóticos, o comportamientos similares.

Por punto fijo se entiende:

$$\vec{K}^* = \vec{T}(\vec{K}^*). \quad (2.22)$$

Estos puntos fijos pueden ser *impropios*, con alguna coordenada infinita – hacia donde son atraídos los flujos que comienzan fuera de la superficie crítica – o *propios*, ubicados en S_∞ . Supondremos que existen uno, o varios, puntos fijos dentro de S_∞ . A cada uno de estos puntos fijos propios $\vec{K}^*$, está asociado un *dominio de atracción* $D(\vec{K}^*)$, tal que todas las teorías cuya intersección con S_∞ ocurre en $D(\vec{K}^*)$ desembocan en $\vec{K}^*$. Supondremos que hay al menos un punto fijo en S_∞ cuyo dominio de atracción posee igual codimensión que S_∞ y que este es estable bajo el flujo de renormalización. Estas hipótesis deben chequearse cada vez que se trabaje con un sistema físico.

En este contexto podemos entender cómo surge la *universalidad*. Ya tenemos una pista importante en el concepto de dominio de atracción $D(\vec{K}^*)$, pues toda teoría microscópica cuya curva de parámetros $\mathcal{C}_T$ interseque a S_∞ en $D(\vec{K}^*)$ tendrá el mismo comportamiento a largas distancias, al compartir el Hamiltoniano de punto fijo. Veamos concretamente como los exponentes críticos serán *exactamente* los mismos para todas las teorías que alcancen su punto crítico en $D(\vec{K}^*)$.

Para comenzar, a partir de la definición de punto fijo (2.22), y la relación entre funciones de correlación antes y después de una transformación del grupo de renormalización (2.17):

$$G\left(\bar{r}, \vec{K}^*\right) = s_0^{-2d_\phi(\vec{K}^*)} G\left(\frac{\bar{r}}{s_0}, \vec{K}^*\right) = s^{-2d_\phi(\vec{K}^*)} G\left(\frac{\bar{r}}{s}, \vec{K}^*\right) \quad (2.23)$$

donde hemos introducido que tras n iteraciones del grupo de renormalización, el factor de escala es $s = s_0^n$. Para aliviar la notación, introduzcamos la siguiente definición:

$$\vec{K}^{(i)} \equiv \underbrace{\vec{T} \circ \dots \circ \vec{T}}_{\leftarrow i \text{ veces} \rightarrow}(\vec{K}). \quad (2.24)$$

Ahora, la función de correlación para una teoría crítica, de acuerdo a lo que hemos visto (2.17), y tras n pasos del grupo de renormalización, vendrá dada por:

$$\begin{aligned} G\left(\bar{r}, \vec{K}\right) &= \prod_{i=1}^n s_0^{-2d_\phi(\vec{K}^{(i)})} G\left(\frac{\bar{r}}{s}, \vec{K}^{(n)}\right) \\ &= s_0^{-2\sum_{i=1}^n d_\phi(\vec{K}^{(i)})} G\left(\frac{\bar{r}}{s}, \vec{K}^{(n)}\right) \\ &\approx s_0^{-2(n-n_0)d_\phi(\vec{K}^*)} G\left(\frac{\bar{r}}{s}, \vec{K}^*\right) s_0^{-2\sum_{i=1}^{n_0} d_\phi(\vec{K}^{(i)})} \\ &= s^{-2d_\phi(\vec{K}^*)} G\left(\frac{\bar{r}}{s}, \vec{K}^*\right) s_0^{-2\sum_{i=1}^{n_0} (d_\phi(\vec{K}^{(i)}) - d_\phi(\vec{K}^*))} \end{aligned} \quad (2.25)$$

En la tercer línea, hemos supuesto que tras $n_0 < n$ pasos la distancia al punto fijo es

menor al error tolerable, y que por ende $\vec{K}^{(n_0)} \approx \vec{K}^*$. De momento no hemos fijado el valor de s (es decir, el de s_0). Impongamos:

$$\frac{\bar{r}}{s} = r_0, \quad (2.26)$$

para un valor arbitrario r_0 . Entonces, el comportamiento de la función de correlación (2.25) es:

$$G(\bar{r}, \vec{K}) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2d_\phi(\vec{K}^*)} G(r_0, \vec{K}^*) \cdot \mathbb{C} \quad (2.27)$$

donde $\mathbb{C}$ es un factor multiplicativo finito.

Si ahora interpretamos este resultado en términos de la forma de escaleo de la función de correlación conexas (1.7), podemos ver que para *toda* teoría cuyo punto crítico se ubique en $D(\vec{K}^*)$, tendremos el mismo exponente crítico η :

$$\eta = 2d_\phi(\vec{K}^*) - (d - 2). \quad (2.28)$$

Como veremos más adelante, lo mismo sucede para los demás exponentes críticos. En este sentido, la formulación en términos del flujo de renormalización hace aparecer naturalmente el fenómeno de universalidad; y lo que es más, podemos ver que los dominios de atracción se corresponden con las *clases de universalidad*. Todas las teorías asociadas a un dominio dado, presentan la misma física de largas distancias descrita por los mismos exponentes críticos – que son *universales* a todas ellas.

Para culminar esta sección, veamos cómo la información sobre los demás exponentes críticos está codificada en el flujo de renormalización – y cómo podemos extraerla linealizándolo. Consideremos una teoría cercana a un punto fijo:

$$K_\alpha = K_\alpha^* + \delta K_\alpha \quad (2.29)$$

Tras un paso del grupo de renormalización, obtendremos una nueva teoría $\vec{K}'$ también cercana al punto fijo, con una diferencia $\delta \vec{K}'$ de este, donde a orden dominante tendremos:

$$\delta K'_\alpha = \sum_\beta \left. \frac{\partial T_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\vec{K}^*} \delta K_\beta \equiv \sum_\beta T_{\alpha\beta} \delta K_\beta. \quad (2.30)$$

Aquí $T_{\alpha\beta}$ es la *matriz de estabilidad*, cuyas entradas dependen del factor de escala s_0 . Los vectores y valores propios correspondientes a esta matriz – que asumiremos diagonalizable y con autovalores reales¹ – se denotan: $\vec{v}^{(i)}$ y λ_i respectivamente. Podemos escribir los valores propios de una forma más útil:

$$\lambda_i \equiv s_0^{y_i} \quad (2.31)$$

¹Esto debe ser comprobado para un punto fijo dado de interés. Los valores propios pueden llegar a ser complejos, dando lugar a trayectorias en espiral entorno al punto fijo.

Dado que hemos supuesto la matriz de estabilidad diagonalizable, podremos escribir para una perturbación del punto fijo genérica:

$$\delta K_\alpha = \sum_i t_i \vec{v}_\alpha^{(i)} \quad (2.32)$$

donde t_i se denominan *variables de scaling*. Estas no son otra cosa que los coeficientes de la descomposición de $\delta \vec{K}$ en la base que diagonaliza a $T_{\alpha\beta}$. Al cabo de n iteraciones del grupo de renormalización, manteniéndonos a orden lineal, tendremos:

$$\delta K_\alpha^{(n)} = \sum_i t_i^{(n)} \vec{v}_\alpha^{(i)}, \quad (2.33)$$

donde podemos observar que, al ser los autovectores de $(T^{(n)})_{\alpha\beta}$ los mismos que los de $T_{\alpha\beta}$, los $t_i^{(n)}$ vendrán dados por:

$$t_i^{(n)} \equiv (s_0^{y_i})^n t_i = s^{y_i} t_i. \quad (2.34)$$

Esta observación hace evidente por qué llamamos a estas variables *de scaling*. Según y_i , tendremos tres tipos de variables de scaling:

- Si $y_i > 0$, la variable de scaling crece a lo largo del flujo de renormalización y se aleja de S_∞ . En este caso t_i se denomina una *dirección relevante*.
- Si $y_i < 0$, la variable de scaling decrece a lo largo del flujo de renormalización y tiende a 0. En este caso t_i se denomina una *dirección irrelevante*.
- Si $y_i = 0$, no podemos conocer el comportamiento de t_i mediante en análisis al orden lineal, requiriendo ir a órdenes mayores para estudiar su flujo. t_i se denomina *dirección marginal*. Típicamente el flujo en esta dirección es lento, siendo logarítmico en vez de una ley de potencias como en los otros casos.

Físicamente, cabe esperar que solo existan una pocas direcciones relevantes para un punto fijo dado, tantas como parámetros experimentales deban fijarse para alcanzar el punto crítico – que podemos concluir coinciden en número con la codimensión del dominio de atracción $D(\vec{K}^*)$ del punto fijo de interés. Para transiciones de fase de segundo orden – puntos críticos – hay un solo acoplamiento a fijar (la temperatura, usualmente, en campo externo nulo). Para puntos n –críticos, habrá n direcciones relevantes a considerar. Por hipótesis, asumiremos todas las demás direcciones irrelevantes¹.

Para terminar, veamos cómo podemos extraer los exponentes críticos a partir del estudio de la matriz de estabilidad, como habíamos prometido. Estudiemos el caso de ν , que mide la divergencia de ξ – recordemos su definición (1.8) – cerca de la criticalidad. Como dijimos, supongamos que hay una única dirección relevante y todas las demás

¹Esto también debe ser chequeado para un sistema físico dado bajo estudio

son irrelevantes:

$$y_1 > 0 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots \quad (2.35)$$

Continuando con los sistemas magnéticos como ejemplo, cerca del punto fijo el parámetro relevante será t_1 que se anulará en S_∞ , al igual que t la temperatura reducida. Es decir, normalizando t_1 de forma apropiada:

$$t_1 = t + \mathcal{O}(t^2). \quad (2.36)$$

Supongamos $t_1 \neq 0$, pero suficientemente pequeño tal que vale el régimen lineal, y consideremos un s tal que:

$$s / |t_1 s^{y_1}| = 1, \quad (2.37)$$

donde el 1 es convencional, basta con que, con $t_1 \rightarrow 0$, el producto sea constante. Llamemos ahora

$$\hat{\xi} \equiv r_0 |t_1|^{-\frac{1}{y_1}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} r_0 |t|^{-\frac{1}{y_1}} \Rightarrow s = \frac{\hat{\xi}}{r_0}. \quad (2.38)$$

En base a estas definiciones, y suponiendo proximidad a la criticalidad tal que $|\hat{\xi}/r_0|^{y_2} t_2 \ll 1$, la función de correlación, utilizando (2.27), puede expresarse cómo:

$$\begin{aligned} G(\bar{r}, t_1, t_2, \dots) &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \left(\frac{r_0}{\hat{\xi}} \right)^{2d_\phi} G\left(r_0 \frac{\bar{r}}{\hat{\xi}}, \pm 1, 0, 0, \dots \right) \\ &= \frac{1}{r^{2d_\phi}} f_\pm \left(\frac{r}{\hat{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este resultado tiene dos implicancias. Primero, hemos probado la forma de scaling de la función de correlación (1.7). Y en segundo lugar, vemos que podemos identificar a $\hat{\xi}$ con la longitud de correlación ξ . Además, podemos identificar el exponente crítico ν , que mide la divergencia de ξ con la temperatura reducida t :

$$\nu = -\frac{1}{y_1}, \quad (2.40)$$

donde nuevamente ν es universal para toda teoría cuyo punto crítico se ubique en $D(\vec{K}^*)$, como ya habíamos visto en (2.28) era el caso para η . Esto es común a los demás exponentes críticos de la teoría, pues todos pueden calcularse a partir de η y ν mediante las relaciones de escala que los vinculan [47]:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - d\nu \\ \beta &= \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \\ \gamma &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \\ \delta &= \nu(2 - \eta), \end{aligned} \quad (2.41)$$

en donde α regula la divergencia del calor específico con el parámetro de control, β la no analiticidad del parámetro de orden en términos del de control, y δ describe la relación entre el parámetro de control y su fuente en la isoterma crítica [47].

Recapitulemos. Hemos visto una forma de sumar de forma progresiva las fluctuaciones de cortas distancias preservando la física de largas distancias, mediante un mapeo en el espacio abstracto de constantes de acoplamiento – que de momento ha sido iterativo pero pronto veremos cómo hacer continuo – entre teorías efectivas con el mismo comportamiento a largas distancia. Con algunas hipótesis adicionales, como la existencia de puntos fijos estables¹ en la superficie crítica, y que la matriz de estabilidad en torno a estos fuese diagonalizable, pudimos ver de qué forma este procedimiento nos permite extraer el comportamiento de largas distancias – por ejemplo extrayendo el exponente ν – y hemos visto como el fenómeno de universalidad es una consecuencia natural de esta formulación. En la siguiente sección veremos un planteo funcional más moderno, que nos permitirá tener un flujo continuo, más amigable para truncamientos y aproximaciones numéricas.

2.2. Grupo de Renormalización No Perturbativo

Para nuestro trabajo, será útil pasar a trabajar en términos de variables continuas $\varphi(x)$ en vez de variables discretas *à la* Ising. Podemos pensar que partimos de un sistema discreto y hemos realizado suficientes iteraciones del grupo de renormalización tal que podemos considerar la variable de espín como continua. La función de partición en tal contexto se generaliza de una suma sobre todos los microestados posibles que usamos en la subsección 2.1.2 a una integral de caminos sobre todas las configuraciones posibles del campo $\varphi(x)$, como la que vimos en la sección 2.1.1:

$$Z[J] = \sum_{\{S_i\}} e^{-H[\{S_i\}] - \sum_i S_i J_i} \rightarrow \int \mathcal{D}\varphi e^{-H[\varphi] + \int_x \varphi(x) J(x)} \quad (2.42)$$

De la mano de este cambio, se vuelve necesario pasar de considerar derivadas usuales a *derivadas funcionales* para extraer funciones de correlación a partir de $Z[J]$. Por ejemplo, en esta formulación el valor esperado del campo del cual hablamos en la subsección 2.1.1 se calcula:

$$\phi(x) \equiv \langle \varphi(x) \rangle = \frac{\delta \log Z[J]}{\delta J(x)} \quad (2.43)$$

En general nos será más conveniente trabajar en el espacio de momentos, donde muchos operadores diferenciales se vuelven operadores matriciales y la formulación es levemente más compacta. Al igual que sucede en la teoría cuántica de campos, las

¹Atractivos para trayectorias confinadas en S_∞ .

integrales de distancias cortas, o momentos grandes, pueden traer no analiticidades provenientes de divergencias *ultravioletas*. Asumiremos estos problemas tratados por alguna forma de regularización de la teoría de campos. Concretamente en este trabajo, supondremos la existencia de una escala microscópica subyacente Λ (que por ejemplo puede ser el inverso de la constante de la red en un sistema sobre una red) de modo que las integrales en el espacio de momentos tendrán un *cut-off* finito $p < \Lambda$. Aun si esta escala no existiese, el tratamiento podría hacerse de igual manera, utilizando algún otro procedimiento de regularización y renormalización en el UV – como la regularización dimensional y posterior renormalización para extraer las divergencias de las teorías renormalizables en el espacio euclídeo.

Veamos el pasaje de la idea de bloques de espín de Kadanoff y Wilson a una formulación continua. Partiremos de una teoría microscópica definida en la escala Λ . Ahora, el equivalente al promedio en los bloques de espín será la integración gradual hasta una nueva escala Λ/s_0 , donde tendremos una teoría con los modos rápidos (de corta distancia) integrados, y la misma física de largas distancias que la teoría original. Finalmente, re-escalamos las distancias, campos y demás objetos dimensionados como antes. Reiterando este proceso, integraremos todas las fluctuaciones hasta $p = 0$.

Por completitud histórica, antes de proceder con el enfoque más utilizado actualmente, mencionemos el grupo de renormalización funcional de Wilson-Polchinski [56], introducido en los años 70' por Wilson, y luego por Polchinski en los 80'. La idea consistía en modificar el Hamiltoniano de la teoría mediante la adición de un término parecido a una masa¹ que permite tratar por separado las fluctuaciones rápidas y las lentas. En particular, les permitía realizar la integración sobre las configuraciones de los campos correspondientes a los modos rápidos, obteniendo una suerte potencial efectivo *running* V_k de los modos lentos, con k la escala que separa los dos tipos de modos. En la formulación Wilson-Polchinski es posible obtener una ecuación de flujo para esta magnitud y así integrar sobre todos los modos.

En este trabajo adoptaremos la formulación, algo más moderna, de la década del 90, desarrollada principalmente por Wetterich, Morris, Ellwanger, Tetradis *et.al.* [57, 58, 59, 60, 61]. Esta formulación del *Grupo de Renormalización No Perturbativo* es conocida como método de la *acción efectiva promedio*. La idea principal consiste en incluir una modificación al Hamiltoniano mediante la adición de un término *regulador*

¹En la acción de una teoría de un campo escalar real, clásica o cuántica, un término de masa es del tipo $\int_x \frac{m^2}{2} \phi^2$. En general m no tiene porque ser una constante. En teoría cuántica de campos es un acoplamiento dependiente de la escala, fijado por algún procedimiento de renormalización UV. En nuestro caso, depende de una escala ficticia k que se elimina al final del cálculo.

ΔH_k , similar a un término de masa pero con una dependencia en la escala:

$$\begin{aligned}\Delta H_k &= \frac{1}{2} \int_{xy} \varphi(x) R(|x-y|) \varphi(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_q \varphi(-q) R_k(q) \varphi(q)\end{aligned}\tag{2.44}$$

Aquí hemos introducido la notación:

$$\int_q \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\tag{2.45}$$

Para no recargar la notación utilizaremos los mismos símbolos para las funciones y sus transformadas de Fourier, donde la variable quedará clara por contexto. La función regulador R_k satisface las siguientes propiedades:

- Es una función que en el espacio directo depende de $|x-y|$, es decir, es invariante bajo rotaciones y traslaciones. Entonces en espacio de momentos depende de q^2 .
- En el espacio de momentos, es una función suave de q^2 .
- $R_k(q^2) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \alpha Z_k k^2$ con Z_k ¹ el factor de renormalización (infrarrojo) del campo.
- $R_k(q^2) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0$ más rápido que cualquier ley de potencias.

La adición de este término garantiza que los modos de largas distancias queden congelados hasta una escala $\sim k$, dejando inalterados los de escalas $\gg k$, que serán integrados. En la figura 2.3 vemos una representación gráfica de la forma típica del regulador. Algunos reguladores habitualmente considerados son:

- Exponencial:

$$E_k(q^2) = \alpha Z_k k^2 e^{-q^2/k^2}$$

- Wetterich:

$$W_k(q^2) = \alpha Z_k k^2 \frac{q^2/k^2}{e^{q^2/k^2} - 1}$$

- Littim² generalizado:

$$\Theta_k^n(q^2) = \alpha Z_k k^2 \left(1 - q^2/k^2\right)^n \Theta\left(1 - \frac{q^2}{k^2}\right)$$

¹Definiremos esta magnitud a la brevedad. Es la corrección al término cinético $(\partial\varphi)^2/2$.

²El regulador introducido inicialmente por Littim corresponde a $\alpha = n = 1$

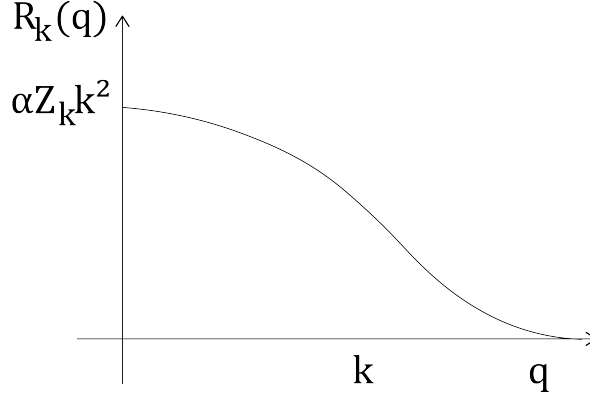


Figura 2.3: Bosquejo de un ejemplo de función reguladora $R_k(q)$, cumpliendo con todas las características requeridas de la misma, acerca de su comportamiento en $q \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$.

Una vez introducido el término regulador, veamos como prosigue el método de la acción efectiva promedio. Recordemos que, a menos de un factor $-k_B T$, $W_k[J] = \log Z_k[J]^1$ es la energía libre de Helmholtz, la funcional generatriz de las funciones de correlación a n -puntos conexas. La idea central de este método consiste en trabajar con la transformada de Legendre generalizada de $W_k[J]$, la acción efectiva promedio $\Gamma_k[\phi]$:

$$\Gamma_k[\phi] + W_k[J] \equiv \int_x J(x)\phi(x) - \frac{1}{2} \int_{x,y} \phi(x) R_k(|x-y|)\phi(y). \quad (2.46)$$

Recordemos de (2.43) que $\phi(x)$ es la variable conjugada de $J(x)$ en este contexto, y el segundo término es quién hace diferir a Γ_k de la auténtica transformada de Legendre. Cabe notar que al haber introducido el regulador con una escala auxiliar k , ahora $\phi(x) \rightarrow \phi_k(x)$, si se deja J fija, y solo coincidirá con el verdadero valor esperado del campo una vez se haya integrado en toda escala k y el término del regulador se anule. De ahora en más $\phi(x)$ denotará el valor esperado del campo en la teoría regulada.

Vale la pena destacar dos propiedades interesantes de la acción efectiva promedio:

- $\Gamma_k[\phi] \xrightarrow{k \rightarrow 0} \Gamma[\phi]$: energía libre de Gibbs del sistema.
- $\Gamma_k[\phi] \xrightarrow{k \rightarrow \Lambda} H[\varphi \equiv \phi]$ el Hamiltoniano microscópico de la teoría en la configuración de campo medio.

Veamos el significado de estos resultados. Primero, que la acción efectiva promedio interpola entre la física microscópica en la escala Λ y la física macroscópica, de forma natural. Al variar la escala k desde Λ hasta 0, vamos “descongelando” de forma

¹Como hemos venido haciendo, no dejaremos los factores β explícitos, lo cual se puede hacer de forma sencilla, para evitar sobrecargar la notación.

gradual fluctuaciones de momentos cada vez más pequeños. Al comienzo, esencialmente todas las fluctuaciones están congeladas y la única contribución relevante proviene de la configuración $\varphi(x) = \phi_\Lambda(x)$. Conforme la escala k disminuye, se consideran más fluctuaciones hasta llegar a $k = 0$, en dónde todas han sido tenidas en cuenta y las funciones se tornan los potenciales termodinámicos usuales.

En segundo lugar, el comportamiento global de Γ_k implica que para su ecuación de flujo $\partial_k \Gamma_k$, la condición inicial es el Hamiltoniano de la teoría original. La deducción de la ecuación de flujo se puede ver en el apéndice B. Trabajando con el *tiempo de renormalización*¹ $t = \log(k/\Lambda)$, con Λ la escala microscópica, resulta:

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] \Big|_\phi = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|) G_k[x,y], \quad (2.47)$$

que es conocida como la ecuación de Wetterich. La notación $\Big|_\phi$ refiere a derivada tomada con el campo ϕ fijo, en lugar de dejar J fijo. Aquí G es el propagador completo del campo φ – la función de correlación conexas a 2 puntos en presencia de una fuente $J(x)$ arbitraria – que satisface la siguiente identidad:

$$\int_z G_k[x,z] \left(R_k(z,y) + \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(z) \delta \phi(y)} \right) = \delta^{(d)}(x-y). \quad (2.48)$$

Esto sugiere pasar a un planteo alternativo, exclusivamente en términos de la funcional Γ_k y sus derivadas funcionales,

$$\Gamma_k^{(n)}[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] \equiv \Gamma_k^{(n)}[x_1, \dots, x_n] \equiv \frac{\delta^n \Gamma_k}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)}. \quad (2.49)$$

En esta tesis, nos interesaremos por el caso homogéneo, con campo externo nulo, que conlleva a $\phi(x) = \phi_0$ constante. Evaluadas en tal configuración, las funcionales $\Gamma_k^{(n)}$ se tornan *funciones* de n coordenadas, pues el campo es uniforme, y del valor de este, ϕ_0 , que denotaremos $\Gamma_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. Al tener simetría por traslaciones, tendremos siempre la libertad de escoger una coordenada nula $x_i = 0$. Esto traerá como consecuencia la restricción de que la suma de momentos al realizar la transformada de Fourier, sea nula. En consecuencia, definiremos esta transformada de una forma particular, factorizando una delta de Dirac de conservación de momento. Por ejemplo, para los vértices evaluados en campo uniforme introduciremos la notación:

$$(2\pi)^d \delta^{(d)}(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \Gamma_k^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \int_{x_1, \dots, x_n} e^{i \sum_{j=1}^n x_j p_j} \Gamma_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.50)$$

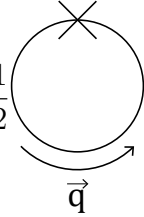
Aquí los paréntesis $()$ refieren a que tratamos con funciones con dependencia exclu-

¹Aquí la expresión “tiempo” no debe ser interpretada en un sentido literal. El flujo es a lo largo de la escala artificial k , que separa los modos rápidos ya integrados de aquellos que aún no lo han sido.

sivamente en las coordenadas, x o p , y ya no funcionales del campo $\phi(x)$, el cual es uniforme. En particular, esto implica que los propagadores en configuración homogénea serán funciones de un sólo momento, pues:

$$(2\pi)^d \delta^{(d)}(q + q') G_k(q) \equiv \int_{x,y} e^{i(xq + yq')} G_k(x, y). \quad (2.51)$$

Con esto en mente, podemos escribir la ecuación (2.47) en el espacio de momentos (ver el apéndice B), que ahora luce:

$$\left. \partial_t \Gamma_k[\phi] \right|_{\phi} = \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_k(q) = \frac{1}{2} \text{Diagrama} \quad (2.52)$$


en donde utilizamos una representación diagramática para el último término, con las siguientes reglas de Feynman:

- El símbolo $\times$ representa a $\partial_t R_k(q)$.
- Las líneas continuas $—$ representan al propagador $G_k(q)$ en campo uniforme.
- Realizamos una integración sobre el momento que recorre bucles.

Volvamos ahora nuestra atención a la ecuación de Wetterich evaluada en configuración de campo uniforme. En tal caso, el flujo de la ahora función Γ_k es complicado, se trata de una ecuación integro-diferencial abierta, que involucra a la función del vértice $\Gamma_k^{(2)}$. Podemos intentar obtener un sistema cerrado, extrayendo una ecuación de flujo para la función $\Gamma_k^{(2)}$. Para ello, debemos tomar dos derivadas funcionales respecto al campo ϕ en (2.47), y luego transformar de Fourier en campo uniforme. Con este objetivo, comencemos notando que podemos derivar la identidad (2.48) respecto a $\phi(w)$, y luego multiplicar a ambos lados por un propagador $G(y, u)$ e integrar en y . Esto nos permite despejar la derivada funcional respecto a $\phi(w)$ de $G(x, u)$:

$$\frac{\delta G[x, u]}{\delta \phi(w)} = - \int_{z,y} G[x, z] \Gamma_k^{(3)}[z, w, y] G[y, u] \quad (2.53)$$

Esta identidad nos permite “derivar” el propagador en el diagrama del lado derecho de la ecuación de Wetterich. Formalmente, se deriva funcionalmente las integrales que aparecen en el lado derecho de (2.47), se utiliza la identidad (2.53) y luego se transforma de Fourier en campo uniforme. El resultado que se obtiene es un signo $(-)$ y una inserción de $\Gamma_k^{(3)}$ en el propagador derivado. Diagramáticamente tras haber tomado la derivada funcional de la ecuación de Wetterich, ya en campo uniforme, el diagrama se modifica según:

$$\text{Diagram 1} \rightarrow - \text{Diagram 2} \quad (2.54)$$

En la representación (2.54), hemos introducido una nueva representación diagramática que se suma a las reglas de Feynman anteriores:

$$\Gamma_k^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \text{Diagram} \quad (2.55)$$

Ahora que hemos deducido la regla de derivación del propagador (2.53), podemos derivar a ambos lados de la ecuación de Wetterich (2.52), y obtener la ecuación de flujo para $\Gamma_k^{(1)}(x \equiv 0) = \Gamma_k^{(1)} \equiv V'_k(\phi)$ en campo uniforme:

$$\left. \partial_t V'_k(\phi) \right|_\phi = -\frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G(q) \Gamma_k^{(3)}(q, -q) G(q) = -\frac{1}{2} \text{Diagram} \quad (2.56)$$

La ecuación nuevamente queda abierta, involucrando a $\Gamma_k^{(3)}$. Sin mayores novedades, lo mismo sucede para la ecuación de flujo de $\Gamma_k^{(2)}$ que buscábamos deducir:

$$\left. \partial_t \Gamma_k^{(2)}(p) \right|_\phi = -\frac{1}{2} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \quad (2.57)$$

Es una propiedad general que la ecuación de flujo para $\Gamma_k^{(n)}$ involucra hasta $\Gamma_k^{(n+2)}$. Sin alguna aproximación estas ecuaciones en general son abiertas y obtenemos una torre infinita de ecuaciones acopladas. Con aproximaciones, o alguna información adicional, es posible atacar el problema. Por ejemplo, en el caso $N \rightarrow \infty$ de los modelos $O(N)$, o trabajando en $d = 4 - \epsilon$ y haciendo un desarrollo a orden finito en ϵ , es posible cerrar las ecuaciones y resolver el sistema. Para el caso general, no se conoce la solución.

Si nuestro objetivo es hallar puntos fijos del flujo de renormalización, será necesario hacer un pasaje a variables *adimensionadas* – al igual que hacíamos para las transfor-

maciones finitas del grupo de renormalización. Esto significa que haremos desaparecer la dependencia explícita en la escala k del flujo, lo cual físicamente puede interpretarse como que todas las magnitudes dimensionadas son medidas en unidades del “paso de la red” móvil k^{-1} (a la potencia correspondiente). Utilizaremos la notación $\sim$ para indicar que una variable es adimensionada. Por ejemplo,

- La coordenada x , se expresa como $x = k^{-1}\tilde{x}$
- Γ_k de acuerdo a su definición, es adimensionada, de modo que $\tilde{\Gamma}_k \equiv \Gamma_k$.
- El campo ϕ se adimensiona según: $\phi(x) = k^{d_{\phi,k}}\tilde{\phi}(\tilde{x}) \equiv k^{\frac{d-2}{2}}Z_k^{-\frac{1}{2}}\tilde{\phi}(\tilde{x})$, donde Z_k es el factor de renormalización del campo que introdujimos en la definición del regulador $R_k(q)$.
- Los momentos, con la misma dimensión que k , resultan: $p = k\tilde{p}$.

Notemos que la dimensión crítica del campo $d_{\phi,k}$ depende de la escala, a través del factor de renormalización Z_k . En particular, tendremos una dimensión anómala móvil η_k que vendrá dada por:

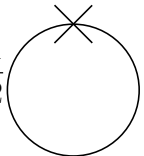
$$\eta_k = -\partial_t \log Z_k. \quad (2.58)$$

En el punto fijo, η_k dejará de variar y coincidirá con la dimensión anómala η .

Si implementamos esta adimensionalización, la derivada respecto al “tiempo” de renormalización de la acción efectiva promedio *adimensionada* resulta:

$$\begin{aligned} \left. \partial_t \Gamma_k \right|_{\phi} &= \left. \partial_t \tilde{\Gamma}_k \right|_{\tilde{\phi}} + \int_{\tilde{x}} \left. \partial_t \tilde{\phi}(\tilde{x}) \right|_{\phi} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \tilde{\phi}(\tilde{x})} \\ \left. \partial_t \tilde{\phi}(\tilde{x}) \right|_{\phi} &= -(d_{\phi,k} - \tilde{x}^\mu \tilde{\partial}_\mu) \tilde{\phi}(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Si imponemos que la acción efectiva promedio *adimensionada* vaya a un punto fijo, en términos de las variables dimensionadas obtenemos la ecuación de punto fijo:

$$\int_x (x^\mu \partial_\mu + d_{\phi,k}) \phi(x) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(x)} + \frac{1}{2} \text{Diagrama} = 0. \quad (2.60)$$


Tomando derivadas funcionales de esta identidad, y evaluando en campo uniforme, podemos obtener identidades de punto fijo para las funciones de los vértices $\Gamma_k^{(n)}$.

Antes de terminar con esta sección, vale la pena hacer algunas puntualizaciones y definiciones. Primero, con respecto a los diagramas que surgen, notemos que para $n \geq 1$ siempre tendremos un factor $\partial_t R_k(q) G_k(q) G_k(q')|_{q'=-q}$ – al tomar derivadas respecto al campo del propagador es como si “insertásemos un vértice $\Gamma_k^{(3)}$ en el medio

del propagador”. Esto nos llevará a introducir la siguiente notación:

$$\partial_t \Gamma_k^{(n)} \equiv \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_k(q) G_k(q') H^{(n)}(p_1, \dots, p_n; q, q') \Big|_{q'=-q}. \quad (2.61)$$

Si bien de momento podríamos directamente sustituir q' por $-q$ sin mayores efectos, realizar la evaluación más tarde probará ser útil cuando nos dediquemos a investigar la simetría conforme, de lo cual hablaremos en mayor detalle en el siguiente capítulo. Por ejemplo, los casos más sencillos:

$$\begin{aligned} H^{(1)}(q, q') &= -\Gamma_k^{(3)}(q, q') \\ H^{(2)}(p; q, q') &= -\Gamma_k^{(4)}(p, q, q') + \Gamma_k^{(3)}(p, q) G(q+p) \Gamma_k^{(3)}(p+q, q') + (q \leftrightarrow q') \end{aligned} \quad (2.62)$$

Cabe destacar que $H^{(n)}$ presenta varias simetrías bajo intercambio de sus momentos. Sin embargo, postergaremos la discusión de estas propiedades a la sección 2.4, cuando realicemos la generalización al caso de N campos con simetría interna $O(N)$ – nuestro caso de estudio en el presente trabajo.

Otro comentario a realizar es acerca del factor de renormalización del campo Z_k . Este se puede fijar de varias maneras, convencionalmente imponemos:

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_k^{(2)}(p, \phi_0)}{d\tilde{p}^2} \Big|_{\tilde{p}=0, \tilde{\rho}_0} = 1, \quad (2.63)$$

donde $\tilde{\rho}_0$ puede ser elegido de forma arbitraria, por ejemplo, en el valor de ϕ dónde el potencial¹ se minimiza. Este criterio no es único, y hablaremos un poco más del mismo en la siguiente sección.

2.3. Esquema de aproximación: Desarrollo en Gradientes

En la sección anterior hemos introducido un nuevo formalismo, el del Grupo de Renormalización No Perturbativo, para el cual es fundamental estudiar el flujo de la acción efectiva promedio Γ_k . Como discutimos, la ecuación de flujo para (??) en configuración homogénea es abierta, involucrando a $\Gamma_k^{(2)}$, y lo mismo es cierto para cualquiera de los vértices $\Gamma_k^{(n)}$. Por ende una solución a la ecuación de flujo no se conoce en general. Salvo que existan simplificaciones adicionales propias del modelo en estudio, que permitan una resolución exacta, son necesarios esquemas de aproximación.

Una posibilidad de cerrar el sistema de ecuaciones para los $\Gamma_k^{(n)}$ es realizar un trun-

¹La integral espacial de Γ en campo uniforme, dividida por el volumen del espacio. Es el ya introducido $V(\phi) = \Gamma^{(1)}$.

camiento a un orden dado n_0 , es decir, imponer $\Gamma_k^{(n)} = 0 \ \forall n > n_0$. Este procedimiento equivale a realizar un truncamiento en el campo, considerando acoplamientos solo hasta ϕ^{n_0} – lo cual equivale a un desarrollo para campos pequeños.

Otro esquema de aproximación, el que utilizaremos en esta tesis, es el denominado *desarrollo en gradientes*. La idea consiste en explotar que nos interesa la física de largas distancias, o equivalentemente, de momentos bajos. Entonces, podemos pensar en realizar un truncamiento en momentos – o equivalentemente en número de derivadas consideradas.

El primer orden de esta aproximación se conoce como *aproximación de potencial local* LPA, o (∂^0) . Consiste en tomar un ansatz para la AEP que se compone de un potencial y un término cinético sin renormalizar:

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + U_k(\phi) \right\}, \quad (2.64)$$

donde $U_k(\phi)$ es una función genérica de ϕ , llamada *potencial efectivo*, que respeta las simetrías internas de la teoría – por ejemplo es par si el sistema presenta simetría $\mathbb{Z}_2$, o función de $(\vec{\phi})^2$ para los modelos de N campos con simetría interna $O(N)$.

El siguiente orden, denotado (∂^2) , consiste en incluir los términos más general con hasta dos gradientes de ϕ . Para el caso con un único campo escalar luce:

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_k(\phi)}{2} (\nabla\phi)^2 + U_k(\phi) \right\}, \quad (2.65)$$

donde $Z_k(\phi)$ respeta la misma simetría que $U_k(\phi)$, y es una función del campo que no debemos confundir con el factor Z_k que aparece en el regulador o en la dimensión del campo. En este trabajo nos limitaremos a explorar resultados a este orden.

Por completitud, mencionemos el siguiente orden, denominado (∂^4) , que para el caso con un único campo escalar se escribe:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_k(\phi)}{2} (\nabla\phi)^2 + U_k(\phi) + \frac{W_{k,a}(\phi)}{2} (\partial_\mu \partial_\nu \phi)^2 \right. \\ \left. + \frac{\phi W_{k,b}(\phi)}{2} \nabla^2 \phi (\nabla\phi)^2 + W_{k,c}(\phi) ((\nabla\phi)^2)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde las funciones $W_{k,i}$ también respetan la simetría $\mathbb{Z}_2$ de la teoría.

Este método de aproximación ha sido aplicado a numerosos sistemas, obteniendo en muchos casos predicciones [49] con niveles de precisión comparables a otros procedimientos, como es el programa del *Conformal Bootstrap*¹ o las simulaciones Monte-Carlo. De hecho, los resultados de orden (∂^4) son más precisos, y más certeros, que la teoría de

¹Para el caso del modelo de Ising, los resultados que arroja el *conformal bootstrap* son bastante más precisos que los obtenidos por el desarrollo en gradientes del GRNP. Sin embargo, para modelos $O(N)$ con $N \neq 1$, las precisiones son comparables.

perturbaciones a 6-loops. Los sucesivos órdenes de esta aproximación funcionan cada vez mejor, en acuerdo con resultados experimentales y numéricos de varios orígenes; sin embargo el motivo de esta convergencia solo ha comenzado a ser comprendido recientemente [50]. Más concretamente, se ha comprendido que entre órdenes sucesivos, el error cometido disminuye en un factor $\sim 1/4$, asociado al radio de convergencia del desarrollo en momentos pequeños¹. Estos avances han permitido mejorar las estimaciones del método, además de permitir una estimación sus barras de error [49], como veremos en la sección 2.5.2.

Para concluir con la introducción a este esquema de aproximación, dediquémonos a una duda que probablemente haya surgido para algún lector. Para acceder al comportamiento crítico, se debe acceder régimen $k \ll p \ll \Lambda_G$, donde tenemos invariancia de escala (al menos en esa región de p 's). Sin embargo, el desarrollo en gradientes es válido en la región $p \lesssim k$, no permitiéndonos extraer las leyes de potencias en el régimen anterior. Sin embargo, es posible vincular dichos comportamientos con propiedades definidas en momento $p = 0$ – particularmente los exponentes críticos de la teoría, lo cual nos evita el aparente problema de que ambos regímenes no son compatibles. Más generalmente, existen varias cantidades universales, incluyendo los exponentes críticos, que pueden ser extraídas del régimen $p \lesssim k$. Existen otros esquemas de aproximación que no realizan desarrollos entorno a momento nulo, como el método propuesto por Blaizot, Méndez y Wschebor[62], y que permiten, por tanto, calcular cantidades más generales.

2.4. Grupo de Renormalización No Perturbativo para modelos $O(N)$

En las anteriores secciones hemos desarrollado un formalismo que nos permite estudiar muchas propiedades de los fenómenos críticos para múltiples sistemas. En el desarrollo del NPRG, supusimos para cada nodo de la red, o punto del espacio, un único grado de libertad. En esta sección extenderemos los razonamientos expuestos al caso de interés de esta tesis: los *modelos* $O(N)$. Veremos cómo modificar el formalismo que hemos desarrollado hasta este punto para dar cuenta de los N grados de libertad por cada punto del espacio con simetría interna $O(N)$. Luego, estudiaremos cómo implementar para estos modelos el esquema de aproximación del desarrollo en gradientes del grupo de renormalización no perturbativo.

Para comenzar, precisemos la nueva terminología. Para cada punto x del espacio ahora tendremos $\varphi_i(x)$ con $i = 1, \dots, N$, donde en adición a simetrías que ya podíamos

¹Esto se vincula a la aparición de la primera singularidad en la plano complejo de la teoría regulada, la cual se comporta como una teoría masiva con $m \sim k$, si uno comienza su desarrollo en $p = 0$.

tener – como traslaciones o rotaciones del espacio – tendremos la simetría interna:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &\rightarrow \varphi'_i(x) = R_{ij}\varphi_j(x) \quad \text{tal que:} \quad R^T = R^{-1} \\ \Rightarrow S[\vec{\varphi}] &\rightarrow S[\vec{\varphi}'] = S[\vec{\varphi}]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Desde esta expresión en adelante, se emplea la convención de Einstein para índices internos repetidos. La acción respeta tal simetría, por ejemplo, si en la escala microscópica es una funcional de $\rho = \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}/2$. Incluso puede suceder que la acción microscópica S_Λ no sea escalar $O(N)$, y esta propiedad emerja en el régimen crítico, si es que las perturbaciones que rompen tal simetría son irrelevantes. Suponiendo esta simetría, si deseamos preservarla al realizar la generalización del formalismo del NPRG, tendremos que considerar reguladores que la respeten – sino tendremos ruptura de esta simetría para toda escala k intermedia, solamente recuperándola en $k = 0$. Una opción es considerar un regulador proporcional a la identidad. Ahora modificaremos nuestros resultados y definiciones de la acción efectiva promedio, el regulador, el propagador, la ecuación de Wetterich y demás resultados que hemos deducido a lo largo de este capítulo, para poder describir las teorías con simetría interna $O(N)$.

El primer paso es notar que ahora la integral de caminos se hace sobre las configuraciones de n campos, y para todo cálculo supondremos que la medida de integración $\mathcal{D}\vec{\varphi}$ es invariante bajo transformaciones ortogonales de los campos.

El regulador ahora pasará a ser una estructura de dos índices: $R_k(x, y) \rightarrow R_{k,ij}(x, y)$. Si partimos de una acción microscópica invariante $O(N)$, lo más natural será preservar esta simetría a lo largo del flujo de renormalización, para lo cual, como dijimos, escogeremos un regulador que sea compatible con tal simetría. La elección más sencilla, y la que utilizaremos, es:

$$R_{k,ij}(|x - y|) = R_k(|x - y|)\delta_{ij}. \quad (2.68)$$

De este modo, el término con el regulador será un escalar $O(N)$ global:

$$\Delta H_k = \frac{1}{2} \int_{xy} \varphi_i(x) R(|x - y|) \varphi_i(y). \quad (2.69)$$

El propagador completo de la teoría – la función de correlación conexas a 2 puntos – tendrá ahora también una estructura tensorial. Con campo externo uniforme luce:

$$\left. \frac{\delta \phi_i(x)}{\delta J_j(x)} \right|_{\phi_i(x)=\phi_{i,0}} \equiv G_{ij}(x, y) \Big|_{\phi_i(x)=\phi_{i,0}} = G_a(|x - y|)\delta_{ij} + G_b(|x - y|)\phi_i\phi_j. \quad (2.70)$$

En muchos casos, será conveniente trabajar, en vez de con las estructuras δ_{ij} y $\phi_i\phi_j$,

con lo que se denomina los *proyectores paralelo y transversal*:

$$\begin{aligned}(\Pi_{\parallel})_{ij} &= \frac{\phi_i \phi_j}{2\rho} \\ (\Pi_{\perp})_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{\phi_i \phi_j}{2\rho},\end{aligned}\tag{2.71}$$

que son tales que:

$$\Pi_{\parallel} \vec{\phi} = \vec{\phi} \quad \Pi_{\perp} \vec{\phi} = 0.\tag{2.72}$$

En estos términos, el propagador en espacio de momento, y en campo uniforme, se escribe:

$$G_{ij}(q) = G_{\parallel}(q) (\Pi_{\parallel})_{ij} + G_{\perp}(q) (\Pi_{\perp})_{ij}.\tag{2.73}$$

Esta notación resulta útil porque, al considerar productos matriciales de varios propagadores, las componentes no se mezclarán, ya que estamos considerando proyectores en espacios ortogonales de los tensores de 2 entradas con simetría $O(N)$. En otras palabras:

$$(G(q)^n)_{ij} = (G_{\parallel})^n(q) (\Pi_{\parallel})_{ij} + (G_{\perp})^n(q) (\Pi_{\perp})_{ij}.\tag{2.74}$$

Esta propiedad nos ayudará a la hora de trabajar los diagramas que surgen de la generalización de la ecuación de Wetterich, que ahora se lee:

$$\left. \partial_t \Gamma_k[\phi] \right|_{\phi} = \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_{ii}(q).\tag{2.75}$$

Aquí nuevamente la derivada respecto al “tiempo” de renormalización se toma con el campo $\vec{\phi}$ fijo. Como fuera mencionado, de acuerdo al criterio de Einstein, índices de “color” repetidos (como en G_{ii}) son sumados. En tales diagramas, particularmente para valores de n crecientes, tendremos que tomar productos de varios propagadores. La derivación de tales ecuaciones de flujo para los vértices de n —patas es esencialmente igual, salvo porque ahora tendremos índices de “color” asignados a cada línea externa y propagador, y tomaremos trazas respecto a estos en los bucles cerrados. En general, las funcionales $\Gamma_k^{(n)}$ ahora lucirán:

$$\Gamma_{k,i_1 \dots i_n}^{(n)}[x_1, \dots, x_n] = \frac{\delta^n \Gamma_k}{\delta \phi_{i_1}(x_1) \dots \delta \phi_{i_n}(x_n)}\tag{2.76}$$

Tendremos que los vértices no se modifican bajo permutaciones de posiciones e índices en simultáneo, lo cual para las funciones de los vértices en campo uniforme luce:

$$\Gamma_{i_1 \dots i_a \dots i_b \dots i_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_a, \dots, p_b, \dots, p_{n-1}) = \Gamma_{i_1 \dots i_b \dots i_a \dots i_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_b, \dots, p_a, \dots, p_{n-1}).\tag{2.77}$$

Esto es una consecuencia de la invariancia bajo cambio en el orden de derivación. En la última igualdad hemos omitido el subíndice k referente a la escala introducida por el regulador, para aliviar la notación. De momento la omitiremos para propagadores y vértices, de modo de no recargar la notación, recordando que siguen siendo funciones de la escala k , y solo la haremos explícita cuando sea necesaria.

Para fijar ideas, veamos un ejemplo de cómo interpretar los diagramas que teníamos antes:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: A circle with an 'X' at the top. An incoming arrow from the left is labeled } \vec{p}, a. \text{ An outgoing arrow to the right is labeled } \vec{p}, b. \text{ A curved arrow inside the circle pointing clockwise is labeled } \vec{q}. \text{ A curved arrow at the bottom pointing right is labeled } \vec{p} + \vec{q}.
 \end{array}
 = \int_q \dot{R}_k(q) G_{ij}(q) \Gamma_{iak}^{(3)}(q, p) G_{kl}(q + p) \Gamma_{lbm}^{(3)}(q + p, -p) G_{mi}(q).$$

(2.78)

Notemos que aquí los índices a lo largo del bucle se suman, quedando solamente explícitos aquellos provenientes de patas externas. Naturalmente la estructura tensorial llevará a que los objetos $H^{(n)}$ que definimos en (2.61) sufran modificaciones. Ahora serán objetos de $n + 2$ índices – n correspondientes a las patas externas, y 2 a las patas que conectan con propagadores.

Habíamos pospuesto el análisis de las simetrías de $H^{(n)}$ hasta este momento, para dar cuenta del caso que nos interesa en este trabajo. Considerando su estructura de momentos e índices, las propiedades que nos interesarán son las siguientes:

- $H_{i_1 \dots i_n ab}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q, q') = H_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_{n-1}) i_n ab}^{(n)}(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n-1)}; q, q')$ donde σ es una permutación de las primeras $n - 1$ patas externas.
- $H_{i_1 \dots i_n ab}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q, q') = H_{i_n i_2 \dots i_1 ab}^{(n)}\left(\left(-\sum_{i=1}^{n-1} p_i - q - q'\right), p_2, \dots, p_{n-1}; q, q'\right).$
- $H_{i_1 \dots i_n ab}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q, q') = H_{i_1 \dots i_n ba}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q', q).$

La primer propiedad se debe simplemente a la simetría bajo el orden en que se toman las derivadas, o equivalentemente, a que al sumar sobre todos los diagramas, consideramos todas las permutaciones de momentos externos. La segunda propiedad es una consecuencia de la arbitrariedad en la elección del momento no explícito. La convención que usamos en este trabajo (y la usual) es fijar $x_n = 0$, pero esto es completamente arbitrario. A aquella coordenada que fijamos a cero, le corresponde al transformar de Fourier, un momento igual al opuesto de la suma de los restantes. Por último, la simetría bajo intercambio de q y q' se debe nuevamente al hecho de considerar todos los diagramas de flujo – si no lo hiciéramos, no sería el caso.

2.5. El Desarrollo en Gradientes para los modelos $O(N)$: aplicación

Para finalizar con este capítulo, veamos cómo se aplica el esquema de aproximación del desarrollo en gradientes para el caso $O(N)$. El *ansatz* utilizado se modifica con la adición de un nuevo término y se lee:

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ U_k(\rho) + \frac{Z_k(\rho)}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{Y_k(\rho)}{4} (\nabla \rho)^2 \right\} \quad (2.79)$$

donde ahora U_k , Z_k e Y_k son funciones suaves de ρ – de modo de respetar la simetría $O(N)$. Notemos que en el caso $N = 1$, $\nabla \rho = \phi \nabla \phi$, por lo cual podemos absorber el tercer término dentro del segundo. Sin embargo, para $N \neq 1$, esta simplificación ya no es posible, y es necesario tratar ambos términos por separado.

Al realizar un truncamiento en la cantidad de derivadas del campo consideradas, el complicado problema original se reduce a estudiar el flujo de tres funciones escalares, U_k , Z_k e Y_k . Esto, sin ser trivial, se convierte en una tarea abordable numéricamente de bajo costo. Veamos esquemáticamente el procedimiento. En términos de este *ansatz*, las dos componentes del propagador completo de la teoría regulada en campo uniforme lucen:

$$\begin{aligned} G_{\perp}(q) &= \frac{1}{R_k(q^2) + Z_k(\rho)q^2 + U'_k(\rho)}, \\ G_{\parallel}(q) &= \frac{1}{R_k(q^2) + Z_k(\rho)q^2 + U'_k(\rho) + \rho \left[2U_k^{(2)}(\rho) + Y_k(\rho)q^2 \right]}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Por otro lado, también podemos hallar las funciones de los vértices con campo externo uniforme. Para los casos de $\Gamma(\rho)$, $\Gamma_a^{(1)}(\rho)$ y $\Gamma_{ab}^{(2)}(p; \rho)$, se tiene a partir del *ansatz*:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho) &= \frac{1}{\Omega} U_k, \\ \Gamma_a^{(1)}(\rho) &= U'_k \phi_a, \\ \Gamma_{ab}^{(2)}(p; \rho) &= [Z_k q^2 + U'_k] (\Pi_{\perp})_{ab} + \left[Z_k p^2 + U'_k + \rho \left(2U_k^{(2)} + Y_k p^2 \right) \right] (\Pi_{\parallel})_{ab}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde hemos omitido el argumento de las funciones del *ansatz* para no recargar la notación. Aquí, Ω es el volumen del espacio.

2.5.1. Obtención de las ecuaciones de flujo

Para deducir las ecuaciones de flujo de las funciones U_k , Z_k e Y_k , debemos analizar la forma de los vértices $\Gamma^{(n)}$. Por ejemplo, a partir de (2.81), vemos que con obtener los flujos de los vértices a 1 y 2 puntos, en términos de los diagramas que involucran a los

$H^{(n)}$, podremos extraer la evolución de las funciones U_k , Z_k e Y_k en campo uniforme. Por ejemplo, para Z_k e Y_k :

$$\begin{aligned} (\Pi_{\perp})_{ab} \frac{d}{dp^2} \Gamma_{bc}^{(2)}(p; \rho) \Big|_{p=0} &= Z_k(\rho) (\Pi_{\perp})_{ac}, \\ \frac{1}{\rho} (\Pi_{\parallel})_{ab} \frac{d}{dp^2} \Gamma_{bc}^{(2)}(p; \rho) \Big|_{p=0} &= Y_k(\rho) (\Pi_{\parallel})_{ac}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

con lo cual, derivando la ecuación de flujo de $\Gamma_{ab}^{(2)}$ respecto a p^2 , evaluando en $p = 0$ – para eliminar del lado derecho las eventuales contribuciones $\propto (p^2)^n$ con $n > 1$, y aplicando el proyector adecuado, podemos aislar el flujo de $Z_k(\rho)$ o de $Y_k(\rho)$ según varía k .

Versiones *full* y *strict* de las ecuaciones

Nos resta discutir cómo se trabajan los diagramas de los lados derechos de las ecuaciones de flujo. Respecto a esto, existen al menos dos procedimientos razonables. En este trabajo, optamos por utilizar el siguiente método, que denominamos versión *full* de las ecuaciones de flujo. Primero, se sustituye la expresión del propagador (2.80) y las expresiones de los vértices obtenidas del *ansatz*. Luego, se realiza un desarrollo en p^2 del diagrama bajo consideración, explotando que ya hemos despreciado contribuciones $\propto p^4$ y mayores en el *ansatz* inicial para la acción efectiva promedio. Por ejemplo, para los propagadores, cuando el momento que circula por estos incluye un p , se realiza el desarrollo a primer orden en p^2 . Este cálculo puede realizarse de forma manual, o con algún software que permita operaciones simbólicas; para la obtención de las ecuaciones utilizadas en esta tesis se empleó, precisamente, una rutina simbólica. Una vez realizado el desarrollo de los diagramas, se aplica el procedimiento para aislar la contribución al flujo de la función que se busque estudiar. Por ejemplo, se aplica (2.82) si se busca extraer el flujo de Z_k o de Y_k a partir de la evolución de $\Gamma_{ab}^{(2)}$. Finalmente, las integrales a lo largo de los bucles, que ahora solamente dependen del momento q interno al diagrama, se pueden calcular de forma numérica.

Utilizando este procedimiento obtenemos por ejemplo, a partir de la ecuación para $\Gamma_a^{(1)}(p)$, la ecuación de flujo de $U'_k(\rho)$ – la derivada de U_k :

$$\begin{aligned} \partial_t U'_k(\rho) = \frac{1}{2} \int_q \dot{R}_k(q^2) &\left[(N-1) \frac{U''_k + q^2 Z'_k}{(R_k(q^2) + q^2 Z_k + U'_k)^2} \right. \\ &\left. - \frac{3U''_k + 2\rho U_k^{(3)} + q^2 (Y_k + Z'_k + \rho Y'_k)}{(R_k(q^2) + U'_k + 2\rho U''_k + q^2 (Z_k + \rho Y_k))^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

El procedimiento alternativo cuyo nombre ya hemos mencionado, *strict*, consiste en realizar un truncamiento estricto en el número de derivadas involucradas en el producto

de vértices, de forma consistente con el truncamiento que realizamos en los lados izquierdos donde nos quedamos con el orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. Esto conduce a ecuaciones levemente distintas, y más sencillas. Por ejemplo, cuando un diagrama involucra varios vértices, mientras que en la versión *full* utilizamos toda la dependencia en momento, y luego desarrollamos en p^2 , en la versión *strict* se desarrolla el producto de vértices al orden 2 en momentos, incluyendo tanto potencias de p como de q en el conteo. Esto conduce a que contribuciones en potencias de $p^2 q^2$ de los vértices, por ejemplo, consideradas en la versión *full*, no sean tenidas en cuenta en la versión *strict*. Esto es consistente, pues ya estamos despreciando potencias de momentos mayores a 2 en otros términos del lado derecho de la ecuación, como en el diagrama con un solo vértice. Por lo tanto, al mismo nivel de la aproximación, podemos considerar las contribuciones de los diagramas con productos de vértices a este orden. Para dar un ejemplo concreto, pensemos en el diagrama de la ecuación (2.78). Mientras que en la versión *full* tendríamos contribuciones proporcionales a q^2 de un $\Gamma^{(3)}$ al desarrollar el otro en p^2 , en la versión *strict* ignoramos toda la dependencia en momento de uno al desarrollar el otro.

2.5.2. Determinación de los exponentes críticos y sus barras de error

Notemos que la ecuación de flujo depende del regulador, por lo cual una aproximación de su solución dependerá, de forma espuria, de la forma funcional y del parámetro α del regulador $R_k(q)$. Si elegimos un regulador en particular, por ejemplo alguno de los dados en la sección 2.2, obtendremos soluciones parametrizadas por α , lo cual nos conducirá a predicciones levemente distintas, según su valor, de los exponentes críticos: nuestra estimación del exponente crítico Q será una función $Q(\alpha)$. Esto conduce a la interrogante de cómo escoger el valor α para dar la predicción del método. Comencemos con una respuesta establecida a este problema, en lo que se conoce como *Principio de Mínima Sensibilidad* [63, 51, 64]. Sucintamente, este consiste en quedarse con el valor α en el cual se minimiza la dependencia de Q en tal parámetro. Idealmente, buscaremos – siempre que exista un único – $dQ/d\alpha|_{\alpha_{\text{PMS}}} = 0$ – para determinar la predicción. El razonamiento detrás de esto es sencillo: si buscamos determinar una predicción que depende de forma espuria de un parámetro, parece razonable escoger el valor óptimo α_{PMS} como aquel donde la dependencia se minimiza. Este criterio ha sido aplicado a los modelos $O(N)$ [65, 49, 66], así como a otros sistemas [67, 68, 69], brindando resultados compatibles con la literatura y logrando precisiones, en algunos casos, tan buenas como las mejores disponibles.

Una vez determinado el α_{PMS} óptimo para cada regulador – ya sea con el criterio PMS u alguno alternativo – todavía resta la tarea de determinar la predicción al orden dado del Desarrollo en Gradientes, y la estimación de su barra de error. Para ello

seguiremos los criterios introducidos en [49]. La idea central es la existencia de un parámetro de desarrollo pequeño en el Desarrollo en Gradientes de los modelos $O(N)$. Como se explica en [50, 49], al calcular los vértices $\Gamma^{(n)}$, y sus derivadas, realizando un desarrollo alrededor de $p = 0$, el Desarrollo en Gradientes es controlado por un factor pequeño de orden $\sim 1/9 - 1/4$. Esto se vincula al radio de convergencia del desarrollo en momentos en la teoría regulada, que se asemeja a una teoría masiva con masa $m \sim k$. En consecuencia, el radio de convergencia de un desarrollo en torno al origen es de orden $p^2 \sim 4m^2 - 9m^2$ (según si estamos en la fase sin, o con, la simetría espontáneamente rota). Esta propiedad permite realizar estimaciones razonables de los valores centrales y de las barras de error para los modelos $O(N)$.

Estimación conservadora del valor central y barras de error

Discutamos el criterio general, que podemos aplicar de forma genérica en todos los casos. Sea Q la cantidad física que nos interesa, ya sea un exponente crítico u otra cantidad. El criterio consiste en:

- Dada una familia de reguladores, caracterizada por el parámetro α , tomamos el valor Q_{opt} donde utilizamos el α_{opt} para un criterio de optimización, que puede ser PMS.
- Sin más información, al comparar entre familias diferentes de reguladores, elegimos el valor central $\bar{Q}$ de los distintos valores Q correspondientes a cada familia. Si trabajamos al orden $\mathcal{O}(\partial^s)$, denominamos esta estimación $\bar{Q}^{(s)}$.
- Al orden dado $\mathcal{O}(\partial^s)$ estimamos inicialmente la barra de error como $\Delta\bar{Q}^{(s)} = |\bar{Q}^{(s)} - \bar{Q}^{(s-2)}|/4$. El factor $1/4$ proviene de una estimación pesimista del parámetro pequeño que gobierna la convergencia del método.

Respecto a este método, notemos que requiere de tener resultados para al menos dos órdenes consecutivos del Desarrollo en Gradientes, por lo cual no es aplicable a la aproximación LPA. Cabe destacar que Q puede ser cualquier magnitud física de interés extraíble de los vértices en el entorno de $p = 0$. Por último, no está de más mencionar que si bien típicamente $\Delta\bar{Q}^{(s)}$ es uno o dos órdenes de magnitud mayor que la variabilidad de Q a un orden dado entre las familias de reguladores, a veces ocurren cruces accidentales entre un orden y el sucesivo de la DE que requieren tener en cuenta también esta incertidumbre alrededor del valor central $\bar{Q}^{(s)}$.

Estimación mejorada del valor central y barras de error

Como se ve en [49], y en nuestros resultados numéricos del capítulo 5, en muchos casos la concavidad de las curvas de los exponentes críticos en función de α se alterna entre los órdenes sucesivos de la DE. Asimismo, suele ocurrir que los resultados a un

orden dado no se intersectan con el orden anterior. En tales casos, el criterio PMS arroja la predicción que converge más rápidamente. Asimismo, si esa es la situación, tenemos fuerte evidencia para suponer que cada orden sucesivo de la DE hasta el orden s provee una cota, alternada superior e inferior, para el valor real del exponente crítico en estudio. Con esto en mente, se puede modificar el criterio anterior para dar lugar a uno mejorado más optimista [49]:

- Para el conjunto de familias de reguladores, a un orden dado, consideramos el valor extremo $Q_{\text{ext}}^{(s)}$ entre los dados por el criterio considerado – el más cercano al orden anterior.
- Para tener en cuenta que el valor real del exponente se encontrará dentro del intervalo $[Q_{\text{ext}}^{(s-2)}, Q_{\text{ext}}^{(s)}]$, y más próximo a $Q_{\text{ext}}^{(s)}$ por un factor de orden $1/4 - 1/9$, estimamos al orden s de la DE el valor central:

$$\tilde{Q}^{(s)} = \frac{1}{8} \left(7Q_{\text{ext}}^{(s)} + Q_{\text{ext}}^{(s-2)} \right). \quad (2.84)$$

- Consideramos un error ahora dado por:

$$\tilde{\Delta}Q^{(s)} = \frac{1}{8} \left| Q_{\text{ext}}^{(s)} - Q_{\text{ext}}^{(s-2)} \right|. \quad (2.85)$$

Este criterio, cabe remarcar, solo puede ser utilizado cuando tenemos claros indicios de que los órdenes sucesivos del Desarrollo en Gradientes proveen cotas alternadas inferiores y superiores del exponente crítico en cuestión. No podemos aplicarlo cuando tenemos órdenes sucesivos con concavidad de igual signo, o si las curvas del exponente crítico en función de α se cruzan entre dos órdenes del método.

Otras fuentes de errores

Para finalizar la discusión acerca de cómo estimar los valores centrales y las barras de error, consideremos dos fuentes de error. Para comenzar, en los casos en que no podemos apelar al criterio optimista y debemos acudir al conservador, optamos como estimación al orden s el valor central entre las familias de reguladores consideradas. Si bien esto es razonable, perfectamente podríamos escoger algún otro representante ubicado dentro del intervalo de valores arrojados por las familias. Existe una cierta ambigüedad en nuestra elección, que podemos subsanar teniendo en cuenta una contribución adicional a las barras de error: un valor de incertidumbre vinculado a la dependencia en el tipo de regulador. Elegiremos este como la distancia entre los dos valores extremos obtenidos para todas las familias de reguladores consideradas, y lo denotamos $\Delta\bar{Q}_{\text{reg}}$. Si bien típicamente $\Delta\bar{Q}_{\text{reg}}^{(s)}$ es al menos un orden de magnitud menor que $\Delta\bar{Q}^{(s)}$, para algunos casos, como aquellos en que la convergencia es muy rápida, es importante considerar su aporte, modificando nuestra definición de incertidumbre por $\Delta Q^{(s)} = \Delta\bar{Q}^{(s)} + \Delta\bar{Q}_{\text{reg}}$.

En segundo lugar, veamos cómo tratar aquellos casos en que dos órdenes sucesivos del Desarrollo en Gradientes se intersectan y conducen a distancias accidentalmente pequeñas entre sus estimaciones, llevando a barras de error demasiado optimistas. Como se discute en [49], supondremos que la magnitud de las barras de error es una función decreciente monótonamente de N . Usaremos como una estimación de esta, para aquellos casos en que el criterio anterior dé valores absurdamente pequeños, las barras de error para valores para N mayores donde se recupere el comportamiento esperable monótono.

Con esto, finaliza nuestra introducción al Grupo de Renormalización No Perturbativo y el desarrollo en gradientes, y a los modelos $O(N)$ dentro de su formalismo. Hemos mencionado varias veces la elección de una fuente uniforme para los campos que, en consecuencia, nos conduce a un valor esperado de los campos espacialmente uniforme – el sistema se vuelve invariante bajo traslaciones. Asimismo, si el espacio en que nos ubicamos es isotrópico y la fuente es uniforme, el sistema presentará invariancia bajo rotaciones espaciales. Aún más, en el régimen crítico, en términos de variables adimensionadas, las funciones tienden a un punto fijo – toman el mismo valor independientemente de la escala para k pequeño – exhibiendo simetría bajo dilataciones. En el siguiente capítulo discutiremos acerca de qué significa presentar una simetría, y veremos toda la información que de esta podremos extraer acerca de la acción efectiva promedio y sus derivadas.

Capítulo 3

Simetrías e Identidades de Ward-Takahashi

En este capítulo discutiremos en mayor detalle qué significa que una teoría posea una simetría, la diferencia entre una simetría interna y externa, y con particular detalle, qué se entiende por simetría conforme y sus implicancias. Presentaremos en general las identidades de Ward-Takahashi, que expresan las consecuencias de las simetrías a nivel de la energía libre. Profundizaremos en el grupo conforme $SO(d+1, 1)$ – su definición y generadores. Veremos explícitamente las identidades de Ward-Takahashi asociadas a las diferentes simetrías del grupo conforme, para la acción efectiva promedio y sus derivadas funcionales. En particular, veremos cómo las ecuaciones de punto fijo son equivalentes a las identidades de Ward provenientes de la invariancia de escala. Para finalizar, estudiaremos el efecto de incluir fuentes para operadores compuestos – funciones del campo y sus derivadas, y su conexión con las perturbaciones propias alrededor del punto fijo.

3.1. Simetrías de una teoría

Comencemos preguntándonos por el significado de que una teoría respete una simetría. Esto se puede responder con creciente nivel de rigurosidad. Una respuesta posible, bastante genérica, sería que un sistema físico posee una simetría si bajo una determinada transformación de los componentes de la teoría usada para modelarlo, la descripción resulta inalterada. Hilando más fino, podemos decir a nivel clásico que un sistema presenta una simetría si su acción es invariante bajo una cierta transformación de los campos de la teoría – y eventualmente, de forma simultánea, de las coordenadas del espacio (o del espacio-tiempo). En tal caso, aquellas cantidades medibles escalares permanecerán incambiadas tras la transformación. En general, los componentes de una teoría se transformarán de tal modo que las ecuaciones que gobiernan su evolución –

las llamadas *ecuaciones de movimiento* – tomen la misma forma antes y después de la transformación. Se dice que bajo una transformación de simetría, las mismas se transforman de forma *covariante*. Mientras que los campos de la teoría – sus componentes – usualmente sufren modificaciones, los escalares contruidos a partir de estos toman el mismo valor antes y después, si la transformación considerada es una simetría. Por ejemplo, consideremos una partícula sometida a un potencial arbitrario confinada a $x > 0$. Si realizamos una simetría especular en $x = 0$ – una reflexión – la posición de la partícula, así como su cantidad de movimiento, modificarán sus componentes. Sin embargo, el tiempo que le toma llegar de un punto x_i a otro x_f será el mismo de un lado u otro del espejo, como también lo serán su rapidez al alcanzarlo, o la variación de su energía cinética. Si pensamos en un átomo de hidrógeno, el sistema presentará simetría bajo rotaciones. Nuevamente, el momento lineal o angular del electrón se modificarán bajo una rotación genérica, pero la energía del sistema – dada por un potencial central y un término cinético – no variarán. Las líneas de emisión obtenidas serán exactamente las mismas, así como lo serán los módulos del momento angular, o los radios típicos de las órbitas del electrón. En un sistema magnético isotrópico, más cercano a los objetos de estudio de esta tesis, se puede rotar libremente los grados de libertad de espín, lo cual acarreará una modificación en la magnetización, pero dejará invariante la energía del sistema, así como las demás propiedades termodinámicas (si no consideramos el acoplamiento espín-órbita).

En general, hay dos grandes clases de simetrías de una teoría. Una de estas son las simetrías *internas*. En estas, únicamente se realiza una modificación de los campos de la teoría, dejando las coordenadas del espacio tiempo sin cambios. El otro grupo, quizás más conocido, son las simetrías *del espacio-tiempo*. Estas involucran una transformación simultánea de las coordenadas del espacio(-tiempo) y de los campos de la teoría. Ejemplos habituales pueden ser las traslaciones y rotaciones en el espacio, o los *boosts* de Lorentz o de Galileo. En estos casos, tras la modificación conjunta de coordenadas y campos, los observables físicos escalares resultan iguales a los originales – si la teoría presenta la simetría en cuestión. Ha lugar una aclaración: hasta ahora hemos mencionado casi exclusivamente ejemplos de simetrías conectadas con la identidad. Esto significa que podemos deformarlas de forma continua a la transformación identidad¹. Sin embargo, los grupos de simetrías del espacio-tiempo e internas son más grandes. Si levantamos la restricción de estar conectada a la identidad, encontramos muchas más transformaciones. Estas se vinculan con las anteriores a través de transformaciones *discretas*, que son de suma importancia para la física y, en particular, para el Modelo Estándar de la física de partículas. Dichas transformaciones incluyen a las simetrías de

¹Siempre podemos construir una traslación o rotación a partir de iterar transformaciones infinitesimales. Sin embargo, la reflexión espacial no puede construirse de esta forma – no hay pasos intermedios.

paridad, inversión temporal y conjugación de carga.

En este trabajo, enmarcado dentro de la teoría clásica de campos, nos limitaremos a considerar simetrías de la teoría $O(N)$ en el espacio euclídeo. Como ya mencionamos en la sección 2.4, la simetría interna característica de los modelos $O(N)$ está dada por el grupo homónimo – el grupo ortogonal N –dimensional. Una de las cuestiones abordadas a lo largo de este trabajo es qué simetría del espacio presenta esta teoría en su punto crítico. Existe evidencia [43, 44] que apunta a que los modelos $O(N)$ presentan invariancia *conforme* en su régimen crítico para valores arbitrarios de $N \in \mathbb{N}$. En este trabajo estudiamos esta hipótesis, de forma analítica para $N \rightarrow \infty$ y numéricamente para N finito. La demostración de esta propiedad sería de gran relevancia porque la simetría conforme es mucho más restrictiva que la simetría bajo dilataciones y permite el acceso a herramientas para el abordaje del estudio de estos sistemas que, de otra forma, no estarían disponibles. Por ejemplo, en este trabajo veremos más adelante un método numérico [70] para determinar los exponentes críticos suponiendo que la simetría del punto crítico es la del grupo conforme. Desde un enfoque totalmente diferente, el programa del *conformal bootstrap* proporciona cotas rigurosas para los exponentes a partir de desigualdades provenientes de esta simetría. Veamos a continuación cómo extraer restricciones para la acción efectiva promedio a partir de las simetrías.

3.2. Identidades de Ward-Takahashi en el marco del NPRG

Hemos hablado del significado de que una teoría respete una simetría. En esta sección, extraeremos identidades explícitas que la acción efectiva promedio, y sus derivadas funcionales respecto a los campos $\phi_i(x)$ deben satisfacer como consecuencia de sus simetrías. Presentaremos la idea detrás de las identidades de Ward-Takahashi, y veremos cómo deducir las identidades que debe satisfacer Γ_k , la acción efectiva promedio. Nos limitaremos a introducir estas ideas en una notación habitual, dedicándonos particularmente al cálculo explícito de las identidades asociadas a la invariancia bajo las diferentes simetrías del grupo conforme en el marco del NPRG.

Si bien estamos pensando en nuestro objeto de estudio, N campos escalares con simetría interna $O(N)$, la argumentación que sigue es general. Supongamos que los campos de la teoría experimentan una transformación infinitesimal:

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + \epsilon \Delta \varphi_a(x), \quad (3.1)$$

en donde ϵ es un parámetro infinitesimal, y $\Delta \varphi_a(x)$ una deformación de la configuración del campo. Esta transformación es una simetría de la teoría si la acción es invariante al aplicar dicha transformación. En el caso del modelo $O(N)$, dado por la representación

fundamental del grupo $O(N)$, construida con N campos escalares bajo el grupo de rotaciones, $\Delta\varphi_a(x)$ involucrará solamente a φ_a si se trata de una simetría del espacio, pero en el caso de la simetría interna – la $O(N)$ – “mezclará los colores”.

Como los objetos de interés para nuestro trabajo son los vértices $\Gamma_k^{(n)}$, veamos las identidades que estas deben satisfacer si las transformaciones (3.1) son simetrías de la acción. Consideremos esta transformación infinitesimal en el formalismo del grupo de renormalización no perturbativo – es decir teniendo en cuenta el término regulador. Si la transformación es una simetría de la acción, significa que $\delta S = 0$. Por lo tanto, la funcional generatriz de las funciones de correlación – función de partición desde el punto de vista mecánico-estadístico – debería permanecer incambiada tras aplicar el cambio:

$$\begin{aligned} Z_k[J] &= \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \varphi} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \varphi - \delta \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \delta \varphi} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \varphi} \left[1 - \delta \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \delta \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Hemos asumido que la medida de integración respeta la simetría, y por ende, al realizar el cambio de variable (3.1), no se modifica. Dividiendo por $Z_k[\phi]$, podemos re-expresar el resultado como:

$$\langle \delta \Delta S_k[\varphi] \rangle = \int J \cdot \langle \delta \varphi \rangle. \quad (3.3)$$

Esta es la identidad de Ward-Takahashi, para el caso clásico que trabajamos, en presencia de una simetría arbitraria. Recordando el aspecto del término ΔS_k – (2.44) – y con un regulador diagonal, podemos reescribir la identidad nuevamente como:

$$\int_{xy} R_k(x, y) \langle \varphi_a(x) \delta \varphi_a(y) \rangle = \int_x J_a(x) \langle \delta \varphi_a(x) \rangle. \quad (3.4)$$

Con este último resultado, hemos llegado al punto en que podemos calcular identidades para simetrías concretas. En las siguientes secciones veremos qué sucede si la teoría presenta algunas de las simetrías conformes, comenzando desde los casos más sencillos: las simetrías también respetadas por el término regulador, lineales en los campos.

3.2.1. Simetrías del regulador

Para comenzar, pensemos en aquellas simetrías de la acción también respetadas por el regulador. En dicho caso, el lado izquierdo de (3.4) es idénticamente nulo, y recordando la relación entre J_a y Γ_k – la ecuación (2.46) – obtenemos:

$$0 = \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} \langle \delta \varphi_a(x) \rangle. \quad (3.5)$$

Nos limitaremos en esta sección a los resultados provenientes de aquellas simetrías que en su forma infinitesimal actúan linealmente sobre el campo, es decir

$$\delta\varphi_a(x) = \epsilon \hat{M}_{ab} \varphi_b, \quad (3.6)$$

donde $\hat{M}$ es un operador lineal sobre $\vec{\varphi}$ – puede involucrar derivadas – y ϵ un parámetro infinitesimal. En este caso, tenemos que:

$$\Gamma_k[\phi] = \Gamma_k[\phi] + \int_x \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\phi_a(x)} \delta\phi_a(x) = \Gamma[\phi + \delta\phi]. \quad (3.7)$$

En la primer igualdad hemos hecho uso de que la variación del campo φ_a es lineal en este, y por ende su valor esperado coincide con $\delta\phi_a$. La consecuencia de esto es que si la acción respeta una simetría lineal infinitesimal, y escogemos un regulador de manera tal de preservarla, entonces la acción efectiva promedio Γ_k también presentará dicha simetría¹.

Por ejemplo, comencemos con un caso sencillo: la simetría $O(N)$. Como hemos mencionado, los modelos $O(N)$ se componen de N campos en la representación fundamental de $O(N)$. En consecuencia, bajo transformaciones ortogonales infinitesimales globales tendremos:

$$\varphi_a(x) \rightarrow (\delta_{ab} + \epsilon M_{ab}) \varphi_b(x), \quad (3.8)$$

donde $M + M^T = 0$. Si esta transformación es una simetría de la acción, funcional de $\varphi_a(x)$, y nos restringimos a reguladores con esta simetría, como los dados en (2.68), entonces Γ_k , funcional de $\phi_a(x)$, será también invariante bajo transformaciones $O(N)$ de $\phi_a(x)$. Este será uno de los puntos de partida que asumiremos a lo largo de este trabajo.

3.3. Grupo conforme

Hemos hablado de las identidades de Ward-Takahashi en el contexto del NPRG, lo cual nos ha dado restricciones generales para Γ_k . Veamos ahora qué aspecto toman cuando la simetría en consideración es del grupo conforme. En esta sección comenzaremos por introducir a las transformaciones conformes en el espacio euclídeo d dimensional, veremos su acción sobre campos a nivel clásico – el que nos interesa para este trabajo – y estudiaremos los generadores de este grupo y sus relaciones de conmutación. Esto nos permitirá entender mejor la estructura del grupo y concluir que es isomorfo al grupo ortogonal especial generalizado, o indefinido, $SO(d+1, 1)$. Luego, veremos qué aspecto concreto toman las identidades de Ward-Takahashi asociadas a los distintos tipos de transformaciones que componen a este grupo.

¹De hecho esto puede probarse también para simetrías discretas lineales como la simetría $\mathbb{Z}_2$

Comencemos por definir qué es una transformación conforme. Para ello, recordemos primero un ejemplo quizás más conocido para el lector: las isometrías del espacio euclídeo. Estas son las transformaciones del espacio euclídeo en sí mismo que preservan la distancia entre puntos:

$$ISO(d) : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{E}^d / (x - y)^2 \mapsto (x - y)^2. \quad (3.9)$$

Este grupo incluye las traslaciones, las rotaciones, y también las reflexiones. Otra cantidad conservada bajo este grupo, por ser conservadas las distancias, son los ángulos entre curvas de $\mathbb{E}^d$ que se intersectan. Veámoslo con dos vectores:

$$\theta_{xy} = \arccos \frac{x \cdot y}{|x||y|} \mapsto \theta'_{xy} = \arccos \frac{x' \cdot y'}{|\vec{x}'||\vec{y}'|} = \theta_{xy}, \quad (3.10)$$

donde la igualdad se debe a la preservación del producto interno (asociada a la norma habitual del espacio euclídeo). Si levantamos la restricción de que las distancias sean conservadas, y solo requerimos que se preserven los ángulos, obtenemos las transformaciones *conformes*. El grupo de transformaciones aceptables aumenta, pues a las ya mencionadas debemos sumarle las dilataciones, y un nuevo tipo de transformación, que se denomina transformación *conforme especial*¹. De manera algo más rigurosa, las transformaciones conformes son aquellas que preservan el ángulo de intersección para cualquier par de curvas arbitrarias que se cortan en algún punto. Esto puede describirse matemáticamente como un mapeo $x \mapsto x'$ que deja a la métrica invariante módulo un factor de escala *local*:

$$g'_{\mu\nu}(\vec{x}') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (3.11)$$

A partir de esta restricción, parametrizando las transformaciones infinitesimales como $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, obtenemos las transformaciones conformes infinitesimales. El tratamiento detallado, siguiendo el desarrollo en [71], se realiza en el apéndice A. La solución general a la que uno llega resulta ser:

$$\epsilon^\mu = a^\mu + b^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu{}_{\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad \text{tal que} \quad c^\mu{}_{\nu\rho} = c^\mu{}_{\rho\nu}. \quad (3.12)$$

donde se ha empleado la convención de Einstein para los índices espaciales repetidos, como haremos de ahora en adelante.

El primer término, a^μ no recibe restricciones a lo largo de la deducción. Corresponde entonces a las traslaciones infinitesimales. El término lineal en la posición puede ser escrito cómo la suma de una parte antisimétrica $M^\mu{}_\nu$ y un término de traza $\alpha \delta^\mu{}_\nu$.

¹Este es el caso en una dimensión d arbitraria. Si uno se detiene en el caso $d = 2$, el grupo es mucho más grande: su dimensión es infinita, pues incluye todos los mapas analíticos del plano complejo alrededor de algún punto. El grupo conforme en dimensión d genérica es solo un subgrupo de todas las transformaciones conformes para el caso $d = 2$.

La primer parte, corresponde a las rotaciones rígidas infinitesimales, mientras que la segunda, a las transformaciones infinitesimales de escala. Por último, el coeficiente del término cuadrático, como se ve en la deducción realizada en el apéndice A, satisface la siguiente restricción:

$$c^\mu_{\nu\rho} = \eta^\mu_\nu r_\rho + \eta^\mu_\rho r_\nu - \eta_{\nu\rho} r^\mu \quad \text{donde} \quad r_\mu \equiv \frac{1}{d} c^\sigma_{\sigma\mu}, \quad (3.13)$$

con η el tensor métrico $\eta = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Estos $c^\mu_{\nu\rho}$ corresponden a la transformación infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - b^\mu x^2, \quad (3.14)$$

que llamamos *transformación conforme especial* (SCT por su sigla en inglés) infinitesimal.

Las transformaciones conformes finitas que obtenemos a partir de las versiones infinitesimales son:

$$\begin{aligned} (\text{traslaciones}) \quad & x'^\mu = x^\mu + a^\mu \\ (\text{rotaciones}) \quad & x'^\mu = M^\mu_\nu x^\nu \\ (\text{dilataciones}) \quad & x'^\mu = \alpha x^\mu \\ (\text{SCT}) \quad & x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Las transformaciones conformes especiales se pueden reexpresar de la siguiente manera:

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu, \quad (3.16)$$

es decir que puede entenderse como una composición de una inversión¹ $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$, una traslación, y una nueva inversión.

El siguiente paso es determinar los generadores de este grupo. La forma de obtenerlos es considerar variaciones en las coordenadas y estudiar cómo se transforman en consecuencia los campos, teniendo además en consideración la transformación explícita del campo (si pertenece a una representación no trivial del grupo). En general expresamos:

$$\varphi'_a(x') = \mathcal{F}(\varphi_a(x)), \quad (3.17)$$

para referirnos al nuevo campo en la posición transformada. Los generadores del grupo pueden identificarse a través de una transformación infinitesimal de los campos:

$$\delta_\omega \varphi_i(x) \equiv \varphi'_i(x) - \varphi_i(x) \equiv -i\omega_a T_a \phi_i(x), \quad (3.18)$$

¹Una inversión $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$ es un ejemplo de una transformación conforme *discreta*, la cual no puede obtenerse componiendo transformaciones infinitesimales. Preserva la d -esfera unidad, mapeando el exterior de la misma a su interior y viceversa.

donde los T_a son los generadores del grupo (formalmente la representación de los generadores del álgebra de Lie del grupo). A partir del cálculo explícito de esta variación, es que se determinan los generadores. Esto nuevamente es hecho en el apéndice A. Los generadores resultantes, considerando de momento un campo escalar no afectado por la transformación conforme, son:

$$\begin{aligned}
(\text{traslaciones}) \quad \mathcal{P}_\mu &= -i\partial_\mu \\
(\text{rotaciones}) \quad \mathcal{J}_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\
(\text{dilataciones}) \quad \mathcal{D} &= -ix^\mu\partial_\mu \\
(\text{SCT}) \quad \mathcal{K}_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Para concluir esta sección, vale la pena mencionar qué reglas de conmutación verifican los generadores (3.19). Sus reglas de conmutación definen lo que se denomina el *álgebra conforme*:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}, \mathcal{P}_\mu] &= i\mathcal{P}_\mu \\
[\mathcal{D}, \mathcal{K}_\mu] &= -i\mathcal{K}_\mu \\
[\mathcal{K}_\mu, \mathcal{P}_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}\mathcal{D} - \mathcal{J}_{\mu\nu}) \\
[\mathcal{K}_\rho, \mathcal{J}_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}\mathcal{K}_\nu - \eta_{\rho\nu}\mathcal{K}_\mu) \\
[\mathcal{P}_\rho, \mathcal{J}_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}\mathcal{P}_\nu - \eta_{\rho\nu}\mathcal{P}_\mu) \\
[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}\mathcal{J}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{J}_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{J}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{J}_{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Estas reglas de conmutación se pueden expresar de una forma más compacta redefiniendo los generadores cómo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mu\nu} &= \mathcal{J}_{\mu\nu} & \mathcal{J}_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{K}_\mu) \\
\mathcal{J}_{-1,0} &= \mathcal{D} & \mathcal{J}_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}_\mu + \mathcal{K}_\mu).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

De esta manera, el álgebra puede expresarse con una sola igualdad como:

$$[\mathcal{J}_{ab}, \mathcal{J}_{cd}] = i(\eta_{bc}\mathcal{J}_{ad} + \eta_{ad}\mathcal{J}_{bc} - \eta_{ac}\mathcal{J}_{bd} - \eta_{bd}\mathcal{J}_{ac}), \tag{3.22}$$

donde la métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$. Esta no es otra que el álgebra del grupo ortogonal especial generalizado $SO(d+1, 1)$. Puede probarse que ambos grupos son isomorfos [71, 72]. Este resultado nos dice que el grupo conforme en el espacio euclídeo d -dimensional puede verse como el grupo de Lorentz actuando en dimensión $(d+1, 1)$.

Con esto concluye lo que trataremos en cuanto a la teoría general del grupo conforme, sus elementos y su estructura. De más está decir que el grupo de Poincaré y las dilataciones conforman un subgrupo del grupo conforme completo. Es decir, una teoría

invariante bajo traslaciones y rotaciones – como nuestro sistema de estudio – y también bajo dilataciones, propiedad del punto fijo, no necesariamente es invariante bajo el grupo conforme completo. En este trabajo estudiaremos la conjeturada invariancia también bajo SCT de los modelos $O(N)$ en la criticalidad.

A continuación, nos dedicaremos a deducir las identidades de Ward que satisfacen las funciones vértice $\Gamma_k^{(n)}$ debido a las simetrías conformes. El primer paso es saber cómo calcular las variaciones de los campos bajo transformaciones conformes. Esto se puede hacer en general para campos en diversas representaciones de este grupo [71, 72, 73]. Para el caso particular que nos interesa, el de N campos escalares sin espín, la regla es:

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi'_a(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-d_\phi/d} \varphi_a(x), \quad (3.23)$$

donde d_ϕ es la *dimensión de escala* del campo correspondiente a la dilatación:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \varphi'_a(\lambda x) &= \lambda^{-d_\phi} \varphi_a(x), \end{aligned} \quad (3.24)$$

la cual no es sino quien anteriormente llamábamos *dimensión crítica* del campo. Podemos vincular el jacobiano del cambio de variable con el factor de escala local $\Lambda(x)$ – (3.11):

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Lambda(x)^{-d/2}. \quad (3.25)$$

Ahora, elijamos diferentes $\Lambda(x)$'s específicos a cada simetría del grupo conforme.

3.3.1. Identidades de Ward-Takahashi para traslaciones y rotaciones

Comencemos con el caso más sencillo: las traslaciones. En este caso, el factor de escala local es 1, y el cambio entre x' y x es: $x'^\mu = x^\mu + \alpha b^\mu$ donde α es un parámetro infinitesimal. Entonces, la regla de transformación se lee:

$$\delta\varphi_a(x) = \varphi_a(x') - \varphi_a(x) = \epsilon b^\mu \partial_\mu \varphi_a(x). \quad (3.26)$$

Este es un ejemplo de una simetría asociada con una transformación lineal a nivel infinitesimal, del tipo (3.6). Se trata de una simetría de la acción de Ginzburg-Landau. Puesto que hemos supuesto el término regulador $R_k(x, y) = R_k(|x - y|)$, el mismo presenta también simetría bajo traslaciones. Entonces, obtenemos el resultado de la sección 3.2.1, llegando así a la identidad de Ward-Takahashi para traslaciones:

$$\mathcal{P}_\mu \Gamma_k \equiv \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} \partial_\mu^x \phi_a(x) = 0. \quad (3.27)$$

Analicemos qué información contiene esta restricción. A nivel de Γ_k en campo uniforme, se satisface de manera trivial. Si tomamos la derivada funcional respecto a un campo $\phi_a(x)$, obtendremos que $\Gamma_a^{(1)}(x)$ es uniforme. Si tomamos más derivadas, la información adicional no será sorprendente: tendremos la libertad de fijar una coordenada nula. Por ejemplo, para $n = 2$ y tras realizar dos derivadas y evaluar en campo uniforme llegamos a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1 - x_2, 0). \quad (3.28)$$

Es decir: las $\Gamma^{(n)}$ en campo uniforme son funciones independientes del origen de coordenadas – respetan la simetría bajo traslaciones. Pasemos ahora a estudiar qué sucede cuando consideramos rotaciones, identidad que nos será de particular utilidad en el siguiente capítulo. En este caso, la transformación de coordenadas asociada al generador $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ es:

$$\varphi_a(x) \rightarrow [1 + \epsilon(x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu)] \varphi_a(x) \quad (3.29)$$

Nuevamente, se trata de una simetría cuya transformación es lineal sobre los campos. Por lo tanto, la identidad de Ward-Takahashi para rotaciones resulta:

$$\int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} (x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu) \phi_a(x) = 0. \quad (3.30)$$

donde hemos utilizado la invariancia del regulador bajo rotaciones para utilizar (3.5). Ahora, podemos tomar derivadas funcionales de esta identidad, y luego transformar a espacio de Fourier evaluando en campo uniforme – la configuración de campos que nos interesa. En concreto, la identidad que más nos servirá a continuación implica tomar dos derivadas. El cálculo de la derivación y transformada se realiza en el apéndice C. Obtenemos:

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \Gamma_{k,ab}^{(2)}(x, y) \equiv \left(x^\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} - y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Gamma_{k,ab}^{(2)}(x, y) = 0. \quad (3.31)$$

Cabe mencionar que esta identidad es satisfecha por cualquier tensor de dos componentes $T_{ab}(x, y)$ que dependa únicamente de $|x - y|$ – es decir, que sea invariante por traslaciones. Si uno toma un número arbitrario de derivadas, explotando que siempre puede fijar una de las coordenadas a 0 (casi siempre x_n) por la invariancia bajo traslaciones, obtiene, tras transformar al espacio de Fourier:

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \Gamma_{a_1, \dots, a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} \right) \Gamma_{a_1, \dots, a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = 0. \quad (3.32)$$

3.3.2. Identidad de Ward-Takahashi para dilataciones: ecuación de punto fijo

El objetivo de las transformaciones del grupo de renormalización vistas en el capítulo 2 es analizar el régimen cuasi-invariante de escala que las teorías exhiben en sus puntos críticos, con $\xi \rightarrow \infty$. Las transformaciones del grupo de renormalización realizan un mapeo de teorías efectivas preservando esta propiedad – el flujo de renormalización permanece en S_∞ si partimos del punto crítico de una teoría. Este flujo conduce a un punto fijo de las transformaciones, donde las magnitudes adimensionadas dejan de variar y se alcanza un régimen completamente invariante de escala. Veamos qué implica esto para nuestros vértices $\Gamma_k^{(n)}$ – la identidad de Ward-Takahashi asociada a la invariancia de escala, y cómo esta es *equivalente* a la ecuación de punto fijo del flujo de renormalización.

La transformación a considerar es:

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + \epsilon(d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \varphi_a(x). \quad (3.33)$$

De ahora en más, introduciremos la notación $x^\mu \partial_\mu \equiv d^x$. Si aplicamos esta transformación de escala infinitesimal, (3.4) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle \delta \Delta S_k[\varphi] \rangle &= \frac{1}{2} \langle \int_{x,y} R_k(x,y) [\epsilon(d_\phi + d^x)] \varphi_a(x) [\epsilon(d_\phi + d^y)] \varphi_a(y) \rangle \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int_{x,y} R_k(x,y) (2d_\phi + d^x + d^y) \langle \varphi_a(x) \varphi_a(y) \rangle \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int_{x,y} R_k(x,y) (2d_\phi + d^x + d^y) \left\{ \frac{\delta^2 W}{\delta J_a(x) \delta J_a(y)} + \phi_a(x) \phi_a(y) \right\} \\ &= \langle \delta(J \cdot \varphi) \rangle = \epsilon \int_x J_a(x) (d_\phi + d^x) \phi_a(x) \\ &= \epsilon \int_x \left(\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi_a(x)} + \int_y R_k(x,y) \phi_a(y) \right) (d_\phi + d^x) \phi_a(x). \end{aligned}$$

Nótese que hemos cancelado los dos aportes $(\dots)$. Si ahora notamos que la segunda derivada funcional de W es el propagador completo de la teoría G_{aa} , y utilizamos integración por partes con los operadores actuando sobre G_{aa} , obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_{x,y} G_{aa}(x,y) (2d_\phi - 2d - d^x - d^y) R_k(x,y) = \int_x (d^x + d_\phi) \phi_a(x) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)}. \quad (3.34)$$

Podemos trabajar el lado izquierdo de esta igualdad, identificando la derivada respecto al tiempo de renormalización del regulador – el cual recordemos es función de $(x - y)$. Obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_{x,y} G_{aa}(x,y)(2d_\phi - 2d - d^x - d^y)R_k(x,y) = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(x,y)G_{aa}(x,y) = \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi. \quad (3.35)$$

Es decir, hemos obtenido el lado derecho de la ecuación de Wetterich (2.60).

Ahora, respecto al lado derecho de (3.34): no es otra cosa que la derivada respecto al tiempo de renormalización de $\tilde{\Gamma}_k$ debido a su dependencia en el campo $\tilde{\phi}_i(k)$ adimensionado – el lado izquierdo de la ecuación de Wetterich (2.60). Recordemos que este término había surgido en el capítulo 2 al notar que es $\tilde{\Gamma}_k$ quien debe ir a un punto fijo, es decir, que la ecuación de punto fijo es $\partial_t \tilde{\Gamma}_k \left[\tilde{\phi} \right] \Big|_{\tilde{\phi}} = 0$ y no $\partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi = 0$. Esto era pues solamente cabe esperar que las magnitudes adimensionadas alcancen un régimen invariante de escala – las magnitudes dimensionadas f necesariamente tendrán una dependencia $\propto k^{d_f}$ con d_f su dimensión de escala.

Pasando en limpio, hemos hallado que la identidad de Ward por simetría bajo dilataciones da que los dos términos que obtenemos al derivar respecto al tiempo de renormalización de la funcional $\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}]$, con $\tilde{\phi}$ fijo, suman cero: obtenemos, entonces, la ecuación de punto fijo (2.60).

$$\mathcal{D}\Gamma_k \equiv \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi + \int_x (d^x + d_\phi) \phi_i(x) \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_i(x)} = 0 \Leftrightarrow \text{Punto fijo: } \partial_t \tilde{\Gamma}_k \left[\tilde{\phi} \right] \Big|_{\tilde{\phi}} = 0, \quad (3.36)$$

coherente con lo que uno podría haber supuesto¹. Esta es la forma [74, 61] en que el Grupo de Renormalización prueba la invariancia de escala en el régimen crítico. Esta identidad puede derivarse para obtener restricciones sobre los $\Gamma_k^{(n)}$, que sin mayor sorpresa coincidirán con imponer que las derivadas según el tiempo de renormalización, a campo adimensionado $\tilde{\phi}_i$ fijo, de las funciones adimensionadas $\tilde{\Gamma}_k^{(n)}$ sean nulas. La expresión general de estas identidades para campo uniforme se deduce en el apéndice C. En el espacio de momentos se lee:

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} \right) - d + nd_\phi + d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q) G^2(q) H_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q, -q). \quad (3.37)$$

3.3.3. Identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales

Para finalizar este capítulo, veamos las identidades de Ward-Takahashi que se deducen de suponer la acción de la teoría invariante respecto a transformaciones conformes

¹Esto, además, confirma que d_ϕ coincide con la dimensión de *scaling* del campo, $(d - 2 + \eta)/2$.

especiales. La transformación a considerar es:

$$\begin{aligned}\varphi_a(x) &\rightarrow \varphi'_a(x) = (1 + 2d_\phi(x \cdot \epsilon)) [1 + (2(x \cdot \epsilon)x^\mu - x^2\epsilon^\mu) \partial_\mu] \varphi_a(x) \\ &\equiv (1 - \epsilon^\mu (K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu)) \varphi_a(x),\end{aligned}\quad (3.38)$$

donde introducimos la notación $K_\mu^x \equiv x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu$.

Veamos cómo quedan expresados ambos lados de la identidad de Ward genérica (3.4):

$$\begin{aligned}\delta \langle \Delta S_k \rangle &= -\frac{\epsilon^\mu}{2} \int_{x,y} R_k(x,y) [K_\mu^x + K_\mu^y - 2d_\phi(x+y)_\mu] \langle \varphi_a(x) \varphi_a(y) \rangle \\ &= -\frac{\epsilon^\mu}{2} \int_{x,y} R_k(x,y) [K_\mu^x + K_\mu^y - 2d_\phi(x+y)_\mu] \{G_{aa}(x,y) + \cancel{\phi_a(x)\phi_a(y)}\} = \\ &= \int_x J_a(x) \langle \delta \varphi_a(x) \rangle = -\epsilon^\mu \int_x \left[\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} + \cancel{\int_y \phi_a(y) R_k(x,y)} \right] [K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu] \phi_a(x),\end{aligned}\quad (3.39)$$

donde hemos cancelado los términos $\cancel{(\dots)}$. Si trabajamos las derivadas en el lado izquierdo llegamos a la siguiente versión de la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales:

$$\int_{x,y} G_{aa}(x,y) [K_\mu^x + K_\mu^y - d_R(x+y)_\mu] R_k(x,y) + \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} [K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu] \phi_a(x) = 0. \quad (3.40)$$

En este trabajo nos interesará la versión en espacio de momentos de esta identidad, tomando un número arbitrario de derivadas con respecto al campo, en configuración de campo uniforme. En el apéndice C se realiza el procedimiento de tomar las derivadas, evaluar en campo uniforme y transformar de Fourier. La identidad por simetría ante transformaciones conformes especiales en espacio de momento resulta:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1} \left[p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \\ &\quad - 2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{ia_1 \dots a_n}^{(n+1)}(r, p_1, \dots) \Big|_{r=0} = \\ &\quad -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q) G^2(q) \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \{H_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; q, q')\} \Big|_{q'=-q}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Finalmente vemos porqué hasta ahora habíamos arrastrado la notación $H^{(n)}(p_1, \dots; q, q')$ evaluado en $q' = -q$. Si bien en el caso de la identidad de Ward para simetría bajo dilataciones (3.37) la evaluación se podía hacer directamente, en el caso de las transformaciones conformes especiales, primero deben tomarse las derivadas de $H^{(n)}(p_1, \dots; q, q')$ y recién hecho esto se puede evaluar $q' = -q$. Trabajando de este

modo, la notación no es ambigua y $H^{(n)}$ refiere siempre al mismo objeto.

3.4. Fuentes para operadores compuestos

El formalismo del Grupo de Renormalización No Perturbativo que hemos trabajado hasta ahora considera un término regulador adicional en la acción microscópica, que apagamos de forma gradual para realizar una integración progresiva de los grados de libertad, en presencia de una fuente $J(x)$ para el campo. Esto no significa que no podamos extender el razonamiento y considerar una fuente $K(x)$ para un operador compuesto local, que denotaremos $\mathcal{O}(x)$ [75, 76]. Esto significa modificar la función de partición:

$$Z_k[J, K] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H[\varphi] - \Delta H_k[\varphi] + \int_x J(x)\varphi(x) + \int_x K(x)\mathcal{O}(x)}. \quad (3.42)$$

A consecuencia de considerar $K(x)$, ahora los valores esperados de los operadores dependerán tanto de la configuración de $J(x)$ como de la de $K(x)$. Ahora la acción efectiva promedio luce:

$$\Gamma_k[\phi, K] \equiv -W_k[J, K] - \Delta H_k[\phi] + \int_x J_a(x)\phi_a(x). \quad (3.43)$$

Es una funcional del valor medio del campo a la escala k y de la fuente $K(x)$ para el operador compuesto $\mathcal{O}(x)$.

Antes de continuar, precisemos que queremos decir con operador compuesto local. A partir de los operadores básicos de la teoría, los campos $\varphi_a(x)$ y sus derivadas, podemos construir operadores $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)$ que sean el producto de n campos, o campos y derivadas – de órdenes arbitrarios – en n posiciones arbitrarias. Esto es lo que se entiende por un operador *compuesto*. Si nos interesamos particularmente por el caso en que todos los puntos de evaluación coinciden, tenemos un operador compuesto *local* $\mathcal{O}(x)$. Para continuar, introduzcamos ahora a los operadores de *scaling*. En la sección 2.1.3 hablamos de las variables de *scaling*. De igual manera podemos considerar los operadores de *scaling*, que son las combinaciones lineales de operadores con los pesos relativos entre las distintas potencias de campo y sus derivadas dados por los vectores propios de la matriz de estabilidad $\vec{v}^{(i)}$, los cuales mencionamos en la sección 2.1.3. Dado un conjunto $\vec{v}^{(i)}$ de acoplamientos que obedecen un *scaling* dado, el operador de *scaling* $\mathcal{O}_i(x)$ asociado es la suma de los operadores cuyos acoplamientos vienen dados por $\vec{v}^{(i)}$. Definidos así, ante el flujo de renormalización estos operadores escalan según

$$\mathcal{O}'_i(x') = s_0^{d_i} \mathcal{O}_i(x) \quad \text{con} \quad d_i = d - y_i, \quad (3.44)$$

cuando realizamos una transformación de escala de factor s_0 , es decir, $x' = x/s_0$, y donde debemos recordar que y_i se vincula con el autovalor de la matriz de estabilidad

correspondiente λ_i según la ecuación $\lambda_i \equiv s_0^{y_i}$.

Una de las hipótesis del análisis del punto fijo es que la matriz de estabilidad es diagonalizable, lo cual significa que los operadores de *scaling* conforman una base. De hecho, podemos expresar cualquier producto de operadores locales en un mismo punto, es decir cualquier operador compuesto local, como una combinación lineal de operadores de *scaling* con coeficientes apropiados – esto está vinculado con el procedimiento que se conoce como el desarrollo en producto de operadores (OPE) [77, 78] introducido originalmente por Wilson. De este modo, expresamos un operador local compuesto genérico $\mathcal{O}(x)$ en términos de los operadores de *scaling* como:

$$\mathcal{O}(x) = Z_0(k)\mathbb{1} + Z_1(k)\mathcal{O}_1(x) + Z_2(k)\mathcal{O}_2(x) + \dots \quad (3.45)$$

Si uno escoge de forma adecuada el operador $\mathcal{O}(x)$, de modo de fijar los primeros n coeficientes Z_i nulos, obtiene un operador cuya función de correlación conexas a dos puntos, para grandes distancias, o para momentos pequeños, viene dada por una ley de potencias que es dominada por la dimensión de *scaling* d_n , la del primer operador con coeficiente Z_n no nulo, si es que los ordenamos de más relevantes a más irrelevantes. Esto permite extraer el espectro de dimensiones de *scaling* estudiando operadores compuestos.

3.4.1. Perturbaciones propias alrededor del punto fijo y operadores compuestos

Analicemos porqué nos interesamos por incluir fuentes para estos operadores compuestos de *scaling*. Veamos cómo se conectan estos operadores con las perturbaciones propias de la solución del punto fijo, y porqué esto nos permite extraer de manera directa los valores propios de tales perturbaciones, que se corresponden con los exponentes críticos. Consideremos la solución de punto fijo a la ecuación de flujo, en variables *adimensionadas* – cuya notación no haremos explícita pero asumiremos en lo que sigue. Consideremos una pequeña perturbación homogénea en torno a esta:

$$\tilde{\Gamma}_k[\tilde{\phi}] = \tilde{\Gamma}^*[\tilde{\phi}] + \epsilon\gamma_k[\tilde{\phi}], \quad (3.46)$$

donde $\tilde{\Gamma}^*[\tilde{\phi}]$ no depende de k , y ϵ es pequeño y lo trataremos a primer orden. La ecuación de flujo para la perturbación es [43]:

$$\partial_t \gamma_k[\tilde{\phi}] + \int_x \gamma_{k,i}^{(1)}(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \gamma_k^{(2)} G \right], \quad (3.47)$$

donde la traza del lado derecho corresponde a suma sobre los índices de color e integrales espaciales. Notar que a diferencia de la ecuación de flujo para $\partial_t \Gamma_k[\tilde{\phi}]$, el lado derecho

involucra a $\gamma_k^{(2)}$. Esto se debe solamente a haber tomado la ecuación al orden $\mathcal{O}(\epsilon)$. Notemos, además, que la ecuación es lineal y no depende explícitamente¹ de t . Por lo tanto, su espacio de soluciones tiene una base con dependencia exponencial en el “tiempo” de renormalización:

$$\gamma_k[\tilde{\phi}] = e^{y_i t} \tilde{\gamma}_i[\tilde{\phi}], \quad (3.48)$$

donde ahora $\tilde{\gamma}_i[\tilde{\phi}]$ no depende de t . Esta verifica la ecuación:

$$y_j \tilde{\gamma}_j[\tilde{\phi}] + \int_x \tilde{\gamma}_{j,i}^{(1)}(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \tilde{\gamma}_{k,j}^{(2)} G \right]. \quad (3.49)$$

Para ver la conexión entre las perturbaciones propias y los operadores locales, consideremos la fuente $K(x)$ para un operador $\mathcal{O}(x)$ local compuesto modificando la función de partición según (3.42). Considerando esta modificación, podemos definir:

$$\bar{\Gamma}[\phi] = \left. \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta K(x)} \right|_{K=0}. \quad (3.50)$$

Derivemos ahora la identidad de Ward-Takahashi para dilataciones correspondiente a $\bar{\Gamma}[\phi]$, evaluada en configuración de campo uniforme y $K = 0$. Para ello, procederemos de forma análoga a lo hecho en la sección 3.2, donde debemos introducir un leve cambio. Debemos considerar la variación del término con el operador compuesto. Este varía como:

$$\delta \mathcal{O}(x) = \epsilon (d_\mathcal{O} + d^x) \mathcal{O}(x), \quad (3.51)$$

y en consecuencia la identidad de Ward se modifica, para dilataciones, según:

$$\delta(K \cdot \mathcal{O}) = \epsilon \int_x (d_\mathcal{O} + d^x) \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\frac{\delta W}{\delta K(x)}} K(x) = -\epsilon \int_x K(x) (d_\mathcal{O} + d^x) \Gamma^{(0,1)}(; x). \quad (3.52)$$

Notemos que en la primer igualdad hemos asumido que el operador compuesto es de *scaling* con una dimensión de escaleo concreta $d_\mathcal{O}$. En la segunda, hemos apelado a la relación entre Γ_k y W_k , ecuación (3.43), en presencia de la fuente $K(x)$. Considerando este nuevo término (3.52), la identidad de Ward-Takahashi por dilataciones para la acción efectiva promedio ahora se lee:

$$\int_x (d^x + d_\phi) \phi_i(x) \Gamma_i^{(1,0)}(x) - K(x) (d_\mathcal{O} + d^x) \Gamma^{(0,1)}(; x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R} G \right]. \quad (3.53)$$

Tomando la derivada funcional respecto a $K(z_1)$, obtenemos la identidad de Ward-Takahashi para dilataciones de $\bar{\Gamma}$, modificada para incluir fuentes para operadores

¹Para ello, es necesario elegir un esquema de renormalización en que η_k es constante e igual a su valor de punto fijo [79]

locales:

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{k,i}^{(1,1)}(x; z_1) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) - K(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \Gamma_k^{(0,2)}(; x, z_1) \\ & - (d_\phi + z_1^\mu \partial_\mu^{z_1}) \Gamma_k^{(0,1)}(; z_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \Gamma^{(2,1)}(; z_1) G \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nuevamente, la traza implica integración en todas las variables espaciales no explícitas. Si ahora evaluamos en $K = 0$ y realizamos una integración sobre z_1 , obtenemos finalmente la identidad de Ward de dilataciones para $\bar{\Gamma}[\phi]$:

$$\int_x \bar{\Gamma}^{(1)}(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) - (d_\phi - d) \bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \bar{\Gamma}^{(2)} G \right]. \quad (3.55)$$

Si ahora comparamos el aspecto de (3.49) y (3.55), podemos concluir que $\bar{\Gamma}[\phi]$ es una perturbación propia de Γ_k en torno al punto fijo. Notemos que hemos recuperado la relación dada en (3.44) entre la dimensión de escala del operador local de *scaling* $\mathcal{O}_i$ y el $\lambda_i = s_0^{y_i}$ asociado al autovalor, de la matriz de estabilidad, correspondiente a la perturbación γ_i .

He aquí una gran utilidad de incluir fuentes para estos operadores compuestos locales de *scaling*. Sin embargo, no es el único motivo por el cual las consideraremos: como discutiremos en el próximo capítulo su inclusión nos permitirá, trabajando en el desarrollo en gradientes del grupo de renormalización no perturbativo, analizar para N finito el cumplimiento de la simetría conforme especial e implementar las consecuencias de ésta. Vale destacar, además, que para la determinación de los exponentes críticos, la resolución de las ecuaciones provenientes de identidades de Ward con operadores compuestos, como (3.55) proporciona resultados mucho más precisos, y numéricamente más estables, que la diagonalización de la matriz de estabilidad, particularmente para los operadores irrelevantes.

En esta tesis nos interesará estudiar la verificación de las identidades asociadas a las transformaciones conformes especiales, para analizar la conjetura de Polyakov y Migdal sobre la simetría conforme en el régimen crítico [41, 42] y comprender mejor el papel que juega esta simetría en la descripción del régimen crítico. Vale la pena mencionar la similitud entre la identidad asociada a dilataciones (3.37) y la que hemos obtenido para transformaciones conformes especiales (3.41). Esta similitud es profunda. Veremos analíticamente, en el caso de $N \rightarrow \infty$, cómo (3.41) puede deducirse a partir de las demás identidades ya vistas en este capítulo asociadas a los otros generadores del grupo conforme, para $\Gamma^{(2)}$ y $\Gamma^{(3)}$. A continuación, estudiaremos las modificaciones de las identidades de Ward en presencia de fuentes $K(x)$ para operadores compuestos de *scaling*, lo cual nos permitirá recuperar parte de su espectro, así como restringir fuertemente la forma de las funciones de vértice. Luego, a nivel numérico, estudiaremos la ruptura de (3.41) en el marco del desarrollo en gradientes del NPRG debido a las

aproximaciones realizadas, y veremos cómo podemos extraer información de esto para estimar los exponentes críticos – buscando minimizar dicha ruptura. Esto da lugar a un método para determinar los exponentes críticos [70] denominado *Principio de Máxima Conformalidad*, alternativo, y compatible, al habitualmente utilizado en el desarrollo en gradientes, el Principio de Mínima Sensibilidad del cual hablamos en el capítulo 2.

Capítulo 4

Límite $N \rightarrow \infty$: resultados exactos

En este capítulo, estudiaremos el límite $N \rightarrow \infty$ de los modelos $O(N)$ introducidos en el capítulo 1, caso en que la teoría resulta resoluble de forma analítica sin realizar aproximaciones. Para todas las realizaciones físicas que discutimos, con N finito, no se conoce la solución exacta para la acción efectiva promedio (es decir se desconoce el punto fijo de las ecuaciones del NPRG). Comenzaremos este capítulo repasando la prueba de la compatibilidad entre las identidades de Ward-Takahashi para dilataciones y transformaciones conformes especiales para $\Gamma^{(2)}$ para el modelo de Ising. A continuación, generalizaremos la demostración de la compatibilidad entre identidades a $\Gamma_{ab}^{(2)}$ con N arbitrario, apelando al mismo tipo de argumentos. Visto esto, nos dedicaremos al límite $N \rightarrow \infty$. Comenzaremos estudiando el método de resolución y la forma particular que adquiere la acción efectiva promedio cuando $N \rightarrow \infty$. A continuación, veremos cómo se pueden obtener las funciones de los vértices $\Gamma^{(n)}$, es decir las derivadas funcionales de la acción efectiva promedio a n -puntos en campo uniforme cuando $N \rightarrow \infty$. Utilizando estas soluciones, veremos que el vértice a tres puntos – que se vincula con la función de correlación a tres puntos – respetan la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales – (3.41) – como consecuencia directa de las identidades asociadas a las demás simetrías que integran el grupo conforme. Es decir, la invariancia bajo transformaciones de traslación, rotación y escala implican invariancia ante todo el grupo conforme, al menos para esta función de correlación. A continuación, estudiaremos aún en el límite $N \rightarrow \infty$ el acoplamiento de fuentes para una familia de operadores compuestos locales. Esto nos permitirá obtener un conjunto grande de posibles dimensiones de los operadores compatibles con las simetrías presentes en la criticalidad. Finalizaremos estudiando las restricciones sobre la estructura de estos operadores que surgen de imponer la mencionada identidad de Ward-Takahashi para simetría conforme especial.

4.1. Preámbulo: compatibilidad de las identidades de Ward en el caso $N = 1$ para $\Gamma^{(2)}(p)$

Comencemos el capítulo repasando la relación que existe entre las identidades de Ward-Takahashi para transformaciones especial conformes y las demás identidades (traslaciones, rotaciones y dilataciones) en el sistema más sencillo $O(1) = \mathbb{Z}_2$, siguiendo la prueba en [65]. Veamos cómo a nivel de $\Gamma^{(2)}$ la identidad de Ward-Takahashi para las transformaciones conformes especiales, identidad (3.41), es consecuencia directa de las de dilataciones, traslaciones y rotaciones. Comencemos con el término con $\Gamma^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
2\phi d_\phi \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_k^{(3)}(p, r) \Big|_{r=0} &= 2\phi d_\phi \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\Gamma_k^{(3)}(-p - r, r) \right] \Big|_{r=0} \\
&= 2\phi d_\phi \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\Gamma_k^{(3)}(p + r, -r) \right] \Big|_{r=0} \\
&= 2\phi d_\phi \left[\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma_k^{(3)}(p, 0) - \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_k^{(3)}(p, r) \Big|_{r=0} \right] \\
&= 2\phi d_\phi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma_k^{(3)}(p, 0) \\
&= \phi d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \partial_\phi \Gamma_k^{(2)}(p).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

En esta derivación se utiliza la invariancia bajo permutación de patas externas de $\Gamma^{(3)}$ en la primer línea, y la invariancia por paridad para pasar a la segunda. Ahora con el término que proviene de la integral, se puede proceder de forma similar:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H^{(2)}(p, q, q') \Big|_{q'=-q} &= \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left[H^{(2)}(-p - q - q', q, q') \right] \Big|_{q'=-q} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left[H^{(2)}(p + q + q', -q, -q') \right] \Big|_{q'=-q} \\
&= \left(2 \frac{\partial}{\partial p^\mu} - \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H^{(2)}(p, q, q') \Big|_{q'=-q} \\
&= \frac{\partial}{\partial p^\mu} H^{(2)}(p, q, -q).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pasemos ahora a estudiar qué sucede si se toma una derivada respecto a p^μ de la identidad para dilataciones de $\Gamma^{(2)}(p)$, y a esto le adicionamos la información proveniente de la identidad para rotaciones. Trabajemos el miembro izquierdo de la identidad:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - d + 2d_\phi + \phi d_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Gamma^{(2)}(p; \phi) \\
&= \left(p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + (2d_\phi - d + 1) \frac{\partial}{\partial p^\mu} + d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Gamma^{(2)}(p; \phi) \\
&= \left(-p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} + 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} + d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Gamma^{(2)}(p; \phi) \\
&+ \left(\cancel{p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu}} - \cancel{p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu}} + (1-d) \frac{\partial^2}{\partial p^\mu} \right) \Gamma^{(2)}(p; \phi).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

En la segunda igualdad, hemos utilizado que el segundo término es nulo en tanto la identidad de Ward-Takahashi para rotaciones sea válida (3.31) – lo cual era una hipótesis de partida – ya que coincide con tomar la derivada respecto a p^ν de la identidad asociada al generador $\mathcal{J}_{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \Gamma^{(2)}(p) \right) = \left(p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + (1-d) \frac{\partial^2}{\partial p^\mu} \right) \Gamma^{(2)}(p). \tag{4.4}$$

Ahora, el cuarto término del primer paréntesis en (4.3), es justamente el término que trabajamos en (4.1). De esta manera, tomar ∂_{p^μ} del lado izquierdo de la identidad para dilataciones, recupera el lado izquierdo de la identidad para transformaciones especial conformes. Por otra parte, (4.2) nos muestra que tomar ∂_{p^μ} del lado derecho de la identidad de dilataciones – es una operación que conmuta con la integral en q – recupera el lado derecho de la identidad especial conforme. En conclusión, la derivada respecto a p^μ de la identidad de Ward para dilataciones de $\Gamma^{(2)}(p)$ permite mostrar que la identidad para transformaciones conformes especiales, en el caso de $N = 1$ y para $\Gamma^{(2)}$, se satisface. En la prueba [65] que hemos repasado, se hace uso reiterado de la invariancia bajo traslaciones (al definir la transformada de Fourier) y de la identidad de Ward para rotaciones en (4.3). Podemos resumir este resultado como:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_\mu \Gamma^{(2)} &= 0 \\ \mathcal{J}_{\mu\nu} \Gamma^{(2)} &= 0 \\ \mathcal{D} \Gamma^{(2)} &= 0 \\ \text{Paridad} & \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{entonces}} \mathcal{K}_\mu \Gamma^{(2)} = 0. \tag{4.5}$$

4.2. Compatibilidad de las identidades de Ward-Takahashi para $\Gamma_{ab}^{(2)}(p)$ para todo N

Una vez realizado el calentamiento adecuado, veamos cómo extender esta argumentación – con algunos trucos nuevos – al caso $O(N)$ para cualquier valor de N .

Nuevamente, veremos que la identidad de Ward asociada a transformaciones conformes especiales se cumple como consecuencia de las identidades asociadas a las demás simetrías. Escribamos explícitamente las identidades correspondientes a dilataciones y transformaciones conformes especiales para el caso de $n = 2$, a partir de (3.37) y (3.41):

$$\left[p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} - d + 2d_\phi + \phi_i d_\phi \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \Gamma_{ab}^{(2)}(p) = \frac{1}{2} \int_q \dot{R}(q) G_{ij}(q) H_{ajkb}^{(2)}(p, q, -q) G_{ki}(q), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \left[p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \Gamma_{ab}^{(2)}(p) - 2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iab}^{(3)}(r, p) \Big|_{r=0} = \\ - \frac{1}{2} \int_q \dot{R}(q) G_{ij}(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{ajkb}^{(2)}(p, q, q') \right\} G_{ki}(q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

El procedimiento que seguiremos es análogo al expuesto en la sección 4.1. Para empezar, estudiemos el término que involucra a $\Gamma^{(3)}$. Veamos cómo llevarlo a una derivada respecto a p^μ . Para ello utilizaremos primero la simetría bajo intercambio de momentos e índices – que corresponde a cambiar el orden en que se deriva según $\phi_a(x)$, $\phi_b(y)$. En segundo lugar, podemos observar que al estar el índice i contraído, tenemos una estructura de dos índices, a, b , que solamente puede dar lugar a estructuras simétricas bajo el intercambio únicamente de índices de color – pues los únicos tensores covariantes $O(N)$ de dos índices en campo uniforme, $\phi_a \phi_b$ y δ_{ab} , son automáticamente simétricos en a, b . Luego la derivada respecto a r^μ de $\Gamma^{(3)}$ luce:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iab}^{(3)}(r, p) \Big|_{r=0} &= \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\Gamma_{iba}^{(3)}(r, -p - r) \right] \Big|_{r=0} \\ &= \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iab}^{(3)}(r, -p - r) \Big|_{r=0} \\ &= \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\Gamma_{iab}^{(3)}(-r, p + r) \right] \Big|_{r=0} \\ &= - \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\Gamma_{iab}^{(3)}(r, p) \right] \Big|_{r=0} + \phi_i \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma_{iab}^{(3)}(0, p) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Gamma_{ab}^{(2)}(p), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde utilizamos simetría bajo paridad en la tercer igualdad. Hemos así obtenido el resultado análogo a (4.1), ahora para los modelo $O(N)$. Sigamos con las analogías, ahora para el término dentro de la integral:

$$\begin{aligned}
& \left[G_{ij}(q) G_{ki}(q') \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{ajkb}^{(2)}(p, q, q') \right] \Big|_{q'=-q} = \\
& = \left[G_{ij}(q) G_{ki}(q') \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left[H_{bjka}^{(2)}(-p - q - q', q, q') \right] \right] \Big|_{q'=-q} \\
& = \left[G_{ij}(q) G_{ki}(q') \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left[H_{ajkb}^{(2)}(-p - q - q', q, q') \right] \right] \Big|_{q'=-q} \\
& = \left[G_{ij}(q) G_{ki}(q') \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left[H_{ajkb}^{(2)}(p + q + q', -q, -q') \right] \right] \Big|_{q'=-q} \\
& = \left[G_{ij}(q) G_{ki}(q') \left(2 \frac{\partial}{\partial p^\mu} H_{ajkb}^{(2)}(p, -q, q) - \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{ajkb}^{(2)}(p, q, q') \right) \right] \Big|_{q'=-q} \\
& = G_{ij}(q) G_{ki}(-q) \frac{\partial}{\partial p^\mu} H_{ajkb}^{(2)}(p, q, -q).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En los primeros tres pasos hemos utilizado los mismos trucos que en la derivación anterior (4.8), ya que al estar $H^{(2)}$ contraído con los propagadores $G_{ij}(q)G_{ki}(q)$, lo cual nos lleva a tener sólo dos índices no sumados, a y b – es decir, términos $\propto \phi_a \phi_b, \delta_{ab}$ al estar trabajando en campo uniforme. Para pasar a la última igualdad, hemos utilizado la simetría de los $H^{(n)}$ bajo el intercambio de q y q' – propiedad vista en 2.4 válida en presencia de los propagadores. Continuando con nuestra prueba análoga a la de la sección 4.1, tomemos una derivada respecto a p^μ de (4.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - d + 2d_\phi + \phi_i d_\phi \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p; \phi) \\
& = \left(p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + (2d_\phi - d + 1) \frac{\partial}{\partial p^\mu} + d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p; \phi) \\
& = \left(-p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} + 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} + d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p; \phi) \\
& + \left(p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + (1 - d) \frac{\partial^2}{\partial p^\mu} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p; \phi).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

El procedimiento para cancelar la última línea es idéntico al hecho en (4.3), identificándola con la derivada según p^ν de la identidad de Ward-Takahashi para rotaciones, que para este caso tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p) \right] = \left(p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} + (1 - d) \frac{\partial^2}{\partial p^\mu} \right) \Gamma_{ab}^{(2)}(p). \tag{4.11}$$

Si nuevamente combinamos los resultados (4.8), (4.9) y (4.10), podemos concluir que la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales puede obtenerse de la identidad correspondiente a dilataciones derivada respecto a p^μ utilizada

en conjunto con la información de invariancia bajo traslaciones y rotaciones. A falta de una prueba general de la simetría conforme especial para N arbitrario en el régimen crítico, contar con la prueba para el caso de $\Gamma^{(2)}$ significa un primer paso en la obtención de tales demostraciones. Podemos resumir lo aprendido de forma esquemática como:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_\mu \Gamma_{ab}^{(2)} = 0 \\ \mathcal{J}_{\mu\nu} \Gamma_{ab}^{(2)} = 0 \\ \mathcal{D} \Gamma_{ab}^{(2)} = 0 \\ \text{Paridad} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{entonces}} \mathcal{K}_\mu \Gamma_{ab}^{(2)} = 0. \quad (4.12)$$

Hasta aquí va lo que se puede, a la fecha, probar de forma exacta apelando a argumentos generales cinemáticos y de simetría respecto a la simetría conforme especial de los vértices $\Gamma^{(n)}$. Para el caso de $\Gamma_{abc}^{(3)}$ no disponemos de una prueba equivalente a la mostrada para $\Gamma_{ab}^{(2)}$ en esta sección. Sin embargo, si en vez de trabajar con valores arbitrarios de N , tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, el modelo se torna resoluble de forma exacta. En ese caso, es posible realizar una demostración de la compatibilidad entre las identidades de Ward-Takahashi de transformaciones conformes especiales y las de dilataciones, traslaciones y rotaciones para dicho vértice.

4.3. Solución exacta para $N \rightarrow \infty$: $\hat{\Gamma}^{(n)}$ y suma de burbujas

Para comenzar, analicemos porqué miramos el caso $N \rightarrow \infty$. Es un límite interesante por varios motivos. Primero, las soluciones exactas obtenidas permiten realizar un testeo de la aproximación del desarrollo en gradientes (y eventualmente de otras posibles aproximaciones). En segundo lugar, la prueba de la invariancia bajo el grupo conforme de la teoría crítica en este límite junto a las pruebas para $N \leq 4$ [43, 44] nos acercaría a una prueba general de la hipotetizada invariancia conforme de los modelos $O(N)$ en su punto crítico para valores arbitrarios de N . Más generalmente, al ser un modelo resoluble, nos permite enfocarnos en empezar a comprender el comportamiento de las teorías conformes en el marco del NPRG. En esta sección seguiremos el enfoque de [80, 62] que nos permitirá obtener la forma exacta de las funcionales $\Gamma_k^{(n)}$ evaluadas en configuración $\phi_i(x) = \phi_i^0$ constante. Una idea central detrás de este enfoque reside en un cambio de variable, $\rho \rightarrow W = V'$, expresando así $\Gamma_k^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}; W)$ [62].

Para comenzar, presentaremos un resultado clásico [80] que dice que la forma de la funcional acción efectiva promedio, para cierta clase de condiciones iniciales, es sencilla y preservada por el flujo de renormalización. Nuestro sistema de estudio es el modelo de N campos escalares con simetría $O(N)$. Con total generalidad, la función de partición del sistema viene dada por:

$$\exp W_k[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \{ -H_\Lambda[\varphi] - \Delta H_k[\varphi] + J_a \cdot \varphi_a \}. \quad (4.13)$$

Aquí $H_\Lambda[\varphi]$ refiere al Hamiltoniano en la escala Λ microscópica, los índices de color se suman, y $\cdot$ implica integración en x .

Hagamos ahora la suposición clave. Asumamos que para una cierta escala k_0 , la acción efectiva promedio está dada por:

$$\Gamma_{k_0}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi_a)^2 \right\} + \hat{\Gamma}_{k_0}[\rho]. \quad (4.14)$$

Notemos que esta forma es explícitamente invariante $O(N)$, puesto que solo involucra escalares o funciones de escalares bajo el grupo $O(N)$, que por ende son invariantes. Calculemos la segunda derivada de esta funcional, $\Gamma_{k_0,ab}^{(2)}(x,y)$, aquella involucrada en la ecuación de evolución de Γ_k – (2.75) – en esta escala:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_{k_0}}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(y)} = \delta_{ab} \left(-\partial_x^2 \delta(x-y) + \delta(x-y) \frac{\delta \hat{\Gamma}_{k_0}}{\delta \rho(x)} \right) + \phi_a(x) \phi_b(y) \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}_{k_0}}{\delta \rho(x) \delta \rho(y)}. \quad (4.15)$$

Tenemos contribuciones con las dos estructuras tensoriales posibles con dos índices: $\Gamma_{k_0}^{(2)} = a\delta_{ab} + b\phi_a\phi_b \equiv a\delta_{ab} + b_{ab}$. Ahora, si para $N \rightarrow \infty$ la AEP tiene un límite suave, resulta que la contribución del segundo término es despreciable frente a la del primero para el flujo de Γ_k . Veamos esto de forma explícita. En (2.75) nos interesa calcular el propagador G_{ij} , que es igual a la funcional inversa de $\left(\Gamma_{k_0}^{(2)} + R_{k_0} \right)_{ij}$. Como serie infinita tenemos:

$$(a\delta_{ab} + b_{ab})^{-1} = a^{-1}\delta_{ab} - a^{-1}b_{ab}a^{-1} + a^{-1}b_{ac}a^{-1}b_{cb}a^{-1} - \dots \quad (4.16)$$

En vistas de este desarrollo, al tomar la traza que aparece en la ecuación (2.75), obtenemos:

$$G_{ii}(x,y) = N \left(\left(-\partial^2 + \hat{\Gamma}^{(1)} \right) \delta(x-y) \right)^{-1} + \mathcal{O}(\phi_i(x)\phi_i(y)). \quad (4.17)$$

Si consideramos el orden dominante de esta traza cuando $N \rightarrow \infty$, la ecuación (2.75) luce:

$$\partial_t \Gamma_{k_0}[\phi] = -\frac{N}{2} \int_{x,y} \left[\dot{R} \left(-\partial^2 + \frac{\delta \hat{\Gamma}_{k_0}}{\delta \rho} \right)^{-1}_{(x,y)} \right]. \quad (4.18)$$

De esta expresión, se extraen dos conclusiones importantes. La primera, el resultado anunciado. Como en la escala k_0 , $\partial_t \Gamma_{k_0}[\rho]$ es una funcional de ρ , entonces:

$$\partial_t \left(\Gamma_k - \int \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} \right) \Big|_{k_0}, \quad (4.19)$$

es funcional también de ρ – el segundo término, con la prescripción de que ∂_t se toma a ϕ fijo, es idénticamente nulo. Luego, como la ecuación de Wetterich (2.75) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en k , y ambos lados de la igualdad son funcionales de ρ , la forma de Γ_k es preservada por el flujo de renormalización. Un argumento breve en favor de esta tesis, no completamente riguroso, es considerar qué sucede en $k_0 - dk$. Como todas las funcionales en k_0 son funcionales de ρ , despejando a orden dominante en dk , tenemos que $\hat{\Gamma}_{k_0-dk}$ también es funcional de ρ . Este argumento, aplicado iterativamente, es la esencia de una prueba formal de la preservación de la forma de Γ_k a lo largo del flujo. La segunda consecuencia de (2.75) y (4.19) es que el acoplamiento para el término cinético, en configuración uniforme, permanece constante en valor, $Z_k = 1 \forall k$. En particular, esto significa que en el límite $N \rightarrow \infty$, la ecuación para el potencial en la aproximación de potencial local LPA, se vuelve exacta – si para alguna escala k_0 se cumple la condición (4.14). En esta situación, al evaluar en campo uniforme, el potencial se vincula con $\hat{\Gamma}_k$ según:

$$W(\rho) \equiv V'(\rho) = \hat{\Gamma}_k^{(1)}(\rho). \quad (4.20)$$

Hemos concluido entonces que la acción efectiva promedio, para $N \rightarrow \infty$, tiene la forma (4.14) para toda escala k menor que k_0 :

$$\Gamma_k[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi_a)^2 \right\} + \hat{\Gamma}_k[\rho]. \quad (4.21)$$

Antes de proseguir con las soluciones para los vértices de n puntos, cabe mencionar que la hipótesis sobre la forma de la acción efectiva promedio para alguna escala k_0 , (4.14), es compatible con suponer una teoría microscópica con interacciones $O(N)$ invariantes, y no supone una condición demasiado exigente. De hecho, se trata de la forma usual de la AEP – pensemos por ejemplo en el ejemplo canónico dado por la teoría φ^4 (y su generalización para N campos).

Una vez probada la forma general de Γ_k , podemos calcular la expresión de las transformadas de Fourier en campo uniforme de las siguientes $\Gamma_k^{(n)}$. El caso $n = 1$ ya lo hemos visto. Para los vértices de 2-, 3-, 4- y 5- puntos obtenemos:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(p; \phi) = (p^2 + W(\rho)) \delta_{ab} + \hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho) \phi_a \phi_b, \quad (4.22)$$

$$\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2; \phi) = \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1; \rho) \phi_a \delta_{bc} + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2; \rho) \phi_b \delta_{ac} \quad (4.23)$$

$$+ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2; \rho) \phi_c \delta_{ab} + \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2; \rho) \phi_a \phi_b \phi_c, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{abcd}^{(4)}(p_1, p_2, p_3; \phi) &= \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2; \rho) \delta_{ab} \delta_{cd} + 2 \text{ perm.} \\
&+ \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1 + p_2, p_3; \rho) \delta_{ab} \phi_c \phi_d + 5 \text{ perm.} \\
&+ \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3; \rho) \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{abcde}^{(5)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1 + p_2, p_3 + p_4; \rho) \delta_{ab} \delta_{cd} \phi_e + 14 \text{ perm.} \\
&+ \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3; \rho) \delta_{de} \phi_a \phi_b \phi_c + 9 \text{ perm.} \\
&+ \hat{\Gamma}^{(5)}(p_1, p_2, p_3, p_4; \rho) \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \phi_e.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Como puede verse, al conocer los $\hat{\Gamma}^{(n)}$ es posible reconstruir los $\Gamma^{(n)}$.

A partir del vértice de 2-puntos, podemos calcular el aspecto de las dos componentes del propagador $G_{ij}(p)$ en su descomposición en los proyectores transversal G_T y paralelo G_P – (2.73):

$$G_P^{-1}(p; \rho) = p^2 + W(\rho) + 2\rho \hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho) + R_k(p) \tag{4.27}$$

$$G_T^{-1}(p; \rho) = p^2 + W(\rho) + R_k(p). \tag{4.28}$$

Dado que hemos visto que basta con estudiar los $\hat{\Gamma}^{(n)}$, continuemos estudiando la forma de dichas funciones en campo uniforme. Como vimos en el capítulo 3 la ecuación de punto fijo para las $\Gamma^{(n)}$ es equivalente a la identidad de Ward-Takahashi para dilataciones. Esto nos permitirá obtener las expresiones explícitas para todos los $\Gamma_k^{(n)}$ en campo uniforme. Para hacerlo, realizaremos el cambio de variable [61] anunciado:

$$\rho \rightarrow W(\rho). \tag{4.29}$$

Veamos que se trata de un cambio de variable invertible. A partir de (4.21), tenemos que:

$$\Gamma_{k,a}^{(1)}[\phi] = \hat{\Gamma}_k^{(1)}[\rho] \phi_a. \tag{4.30}$$

Recordemos la ecuación de Wetterich para $\Gamma_k^{(1)}$, (2.56). Sustituyendo el resultado (4.30), y en campo uniforme:

$$\partial_t \Gamma_a^{(1)}(\phi) = -\frac{1}{2} \text{ (diagrama de bucle con una línea vertical hacia abajo etiquetada como } p, a \text{)} = -\frac{1}{2} \int \dot{R}(q) G_{ij}(q) \Gamma_{jak}^{(3)}(q, p=0) G_{ki}(q), \tag{4.31}$$

donde omitimos el subíndice k . Factorizando un ϕ_a y tomando la traza a lo largo del bucle la contribución dominante ($\propto N$), nos queda:

$$\partial_t \hat{\Gamma}^{(1)}(\rho) = -\frac{N}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with a cross at the top. A dashed line goes down from the bottom of the circle to a dot, with an arrow pointing up labeled 'p'. Two curved arrows on the circle, one clockwise and one counter-clockwise, are labeled 'q' and '-q' respectively.} \end{array} = -\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p=0; \rho) \int \dot{R}(q) G_T^2(q). \quad (4.32)$$

En el diagrama anterior, hemos introducido dos nuevas notaciones:

$$\hat{\Gamma}_k^{(n)} \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram: A central dot with n dashed lines radiating outwards. A '2' is above the dot and a '1' is to the right of the dot.} \end{array}, \quad (4.33)$$

$$G_{ai}(q) \delta_{ij} \hat{\Gamma}^{(n)}(q+q', \dots) G_{jb}(q') \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with two incoming lines labeled 'q' and 'q'' and one outgoing line labeled '...' (dashed).} \end{array}. \quad (4.34)$$

La expresión (4.32) puede simplificarse utilizando la identidad (D.1) que nos dice que $\hat{\Gamma}^{(2)}(p=0) = \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(1)} = \partial_\rho W$ y notando que $\partial_t \int_q G_T(q) = -\int_q \dot{R}_k G_T^2(q)$, usando la expresión (4.28) para $G_T(q; W)$, que a W fijo solo depende de k a través de $R_k(q)$. Entonces (4.32) se lee:

$$\partial_t \hat{\Gamma}^{(1)}(\rho) \Big|_\rho = \frac{N}{2} \frac{\partial W}{\partial \rho} \partial_t \int G_T(q) \Big|_W. \quad (4.35)$$

Ahora, realicemos el cambio de variable $\rho \rightarrow W$, lo cual nos permitirá pasar de la función $W(\rho)$ a su inversa:

$$W(\rho) = V'_k(\rho) \leftrightarrow \rho = f_k(W), \quad (4.36)$$

$$\partial_t \rho|_\rho = 0 \Rightarrow \partial_t f_k(W)|_{W(\rho)} = -f'_k(W) \partial_t W|_\rho. \quad (4.37)$$

Una vez aplicado el cambio de variable, recordando que $\hat{\Gamma}^{(1)}(\rho) = W(\rho)$ la ecuación (4.35) se simplifica a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_k(W)} \partial_t f_k(W)|_W &= -W'(\rho) \frac{N}{2} \partial_t \int_q G_T(q) \Big|_W, \\ \partial_t f_k(W)|_W &= -\frac{N}{2} \partial_t \int_q G_T(q) = \frac{N}{2} \int_q \dot{R}_k(q) G_T^2(q) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\rho - f_\Lambda(W) = \frac{N}{2} W^{\frac{d-2}{2}} \hat{I}_1(W; k), \quad (4.39)$$

donde hemos usado que $f'_k(W)W'(\rho) = 1$ y hemos definido:

$$\hat{I}_1(W, k) \equiv \int_q \frac{1}{q^2 + W + R_k(q^2)} - \frac{1}{q^2 + W + R_\Lambda(q^2)}. \quad (4.40)$$

Cabe destacar que si bien las integrales de $G_T(q)$ a escalas k y Λ son divergentes en $d = 3$ pues el integrando para q grande se comporta como q^0 , su resta no lo es, pues recogemos en el numerador a las funciones reguladoras que controlan esta divergencia UV. El término $f_\Lambda(W)$ queda completamente determinado por la física microscópica. Por ejemplo, partiendo de la teoría ϕ^4 con

$$H_\Lambda = \int_x \frac{c}{2} (\nabla \phi)^2 + r \rho + \frac{u}{6} \rho^2, \quad (4.41)$$

tenemos $f_\Lambda(W) = -3(r + W)/u$.

En vistas de (4.38), el cambio de variable (4.29) es invertible y está bien definido¹. Es decir, si bien no es explícita, tenemos una expresión $\rho(W)$ que podemos invertir para obtener $W(\rho)$. Desde ahora trabajaremos en términos de la variable W , lo cual nos permitirá obtener ecuaciones cerradas para los $\hat{\Gamma}^{(n)}$ en campo uniforme [62]. Veamos esto en detalle para el caso de $\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p; W)$ [62]. A partir de las reglas de Feynman desarrolladas en el capítulo 2, y considerando la contribución $\propto \phi_a \phi_b$ de la ecuación para $\Gamma_{k,ab}^{(2)}(p; W)$, obtenemos la ecuación de flujo para $\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p; W)$:

$$\partial_t \hat{\Gamma}_k^{(2)}(p) \Big|_\rho = -\frac{N}{2} \left[\text{Diagram 1} - 2 \text{Diagram 2} \right]. \quad (4.42)$$

Hasta ahora ∂_t , si bien no lo explicitábamos, correspondía a la derivada tomada a campo, o ρ , fijo. Veamos cómo se vincula esta con la derivada tomada a W fijo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_W = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_\rho + \partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (4.43)$$

Veamos como podemos llevar (4.42) a una ecuación fácilmente integrable en t . Trabajemos el primer término del lado derecho. De forma similar a lo que sucedía en (4.32), tenemos ahora $\hat{\Gamma}^{(3)}(p, 0; \rho)$. Usando una vez más la identidad (D.1) que nos dice que $\hat{\Gamma}^{(3)}(p, 0; \rho) = \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho)$, podemos reexpresar este término como:

$$-\frac{N}{2} \text{Diagram 1} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho(W)) \left[\frac{N}{2} \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \right] = -\frac{\partial \hat{\Gamma}^{(2)}}{\partial \rho} \partial_t \rho|_W, \quad (4.44)$$

donde utilizamos (4.38). Ahora trabajemos el segundo término de (4.42). Veamos

¹En el supuesto de un comportamiento monótono de la función $W(\rho)$ en el punto fijo.

con detenimiento cómo se expresa el diagrama como una integral factorizando un $N/2 \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho) \right)^2$:

$$\begin{aligned} 2 \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) G_T(p+q) &= 2 \int_q \dot{R}(q) \left(\frac{1}{q^2 + W + R(q)} \right)^2 \frac{1}{(p+q)^2 + W + R(p+q)} \\ &= - \partial_t \int_q G_T(q) G_T(p+q) \Big|_W. \end{aligned} \quad (4.45)$$

En el pasaje a la segunda línea, hemos utilizado la invariancia bajo el cambio de variable $q \rightarrow -(q+p)$ del integrando, que es consecuencia de integrar en todo el espacio de momento y que solo están involucradas los momentos al cuadrado. Si ahora combinamos los resultados que hemos obtenido (4.43), (4.44) y (4.45), finalmente podemos obtener:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Gamma}_k^{(2)}(p) \Big|_\rho &= -\partial_\rho \hat{\Gamma}^{(2)}(p) \partial_t \rho \Big|_W + \frac{N}{2} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p; \rho) \right)^2 \partial_t \int_q G_T(q) G_T(p+q) \Big|_W \\ \partial_t \left(\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p) \right)^{-1} \Big|_W &= \frac{N}{2} \partial_t \int_q G_T(q) G_T(p+q) \Big|_W. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Integrando esta ecuación obtenemos una expresión explícita para $\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p; W)$:

$$\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p; W) = \frac{u}{3} \frac{1}{1 + \frac{Nu}{6} I_2(p; W)}, \quad (4.47)$$

en dónde hemos usado que $\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2)} = u/3$ partiendo de la condición inicial (4.41) y hemos introducido la definición:

$$I_n(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \int_q G_T(q) G_T(q+p_1) G_T(q+p_1+p_2) \dots G_T(q+p_1+\dots+p_{n-1}). \quad (4.48)$$

¿Qué podemos concluir de estos cálculos? En el límite $N \rightarrow \infty$, el cambio de variable $\rho \rightarrow W$ nos permitió obtener una expresión exacta para $\hat{\Gamma}_k^{(2)}(p; W)$. Este razonamiento puede ser extendido para las siguientes derivadas de $\hat{\Gamma}$. En general, en los diagramas para $\hat{\Gamma}^{(n)}$, tenemos siempre uno de tipo *tadpole*¹ con n patas entrantes a un vértice $\hat{\Gamma}^{(n+2)}$. Por la conservación de momento, una pata conectada al vértice transportará $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$ momento, lo cual nos permitirá usar el truco del apéndice D y junto a (4.43), llevar el lado izquierdo de la ecuación de flujo a una derivada ∂_t tomada a W fijo. Los demás diagramas, agrupándolos por cantidad de propagadores y teniendo en cuenta sus prefactores de simetría, nos darán derivadas ∂_t a W fijo de integrales tipo $I_n(p_1, \dots, p_{n-1}; W)$. En el apéndice E [62], vemos cómo obtener las expresiones para

¹Por ejemplo, para el flujo de $\hat{\Gamma}^{(2)}(p)$, se trata del primer diagrama que vemos en (4.42).

las funciones $\hat{\Gamma}_k^{(3)}$ y $\hat{\Gamma}_k^{(4)}$:

$$\hat{\Gamma}_k^{(3)}(p_1, p_2) = N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2; W), \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_k^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_3) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2 + p_3) \\ \left[\left(N I_3(p_1, p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_3, p_4) \right. \right. \\ \left. \left. - I_4(p_1, p_2, p_3) \right) + 2 \text{ permutaciones cíclicas} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde realizamos permutaciones cíclicas de p_1 , p_2 y p_3 .

Para cerrar esta sección, veamos cómo podemos conectar estos resultados con la *resumación de burbujas*, un resultado quizás más familiar para el lector, sin hacer un tratamiento riguroso. Se puede ver que $\Gamma[\phi]$ – la energía libre de Gibbs habitual, sin incluir el regulador – es la funcional generatriz de los vértices propios [47], es decir, la suma de diagramas de funciones de correlación de una partícula irreducible con número arbitrario de patas externas amputadas. En concreto, $\Gamma^{(n)}$ es el vértice propio con n patas amputadas de $\phi(x)$. Se puede ver, de igual forma, que $\hat{\Gamma}^{(n)}$ son los vértices propios con n patas del operador $\rho(x)$ amputadas. Los vértices de la teoría microscópica desnuda ϕ^4 – incluyen un factor $1/N$. Por otro lado, los bucles incluyen a orden dominante, un factor N – que viene de sumar en los índices de color conectados. Entonces, por ejemplo para $\hat{\Gamma}^{(2)}$, podemos representar diagramáticamente:

$$\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (4.51)$$

Aquí las líneas discontinuas corresponden a identidades con deltas de Kronecker en los índices de color que se conectan a sus extremos, y las continuas al propagador del campo ϕ resumado – el que hemos utilizado hasta ahora. El efecto de la resumación en este es modificar $m_B \rightarrow W^1$. Como podemos apreciar, tenemos una serie geométrica que al ser sumada, nos conduce al resultado (4.47). El mismo argumento podemos aplicar para $\hat{\Gamma}^{(3)}$. Si consideramos todos los diagramas al orden $\mathcal{O}(N^{-2})$, tenemos:

$$\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots = \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (4.52)$$

que nuevamente coincide con el resultado que hemos obtenido (4.49). De igual manera,

¹Aquí m_B es la masa *bare* de la teoría, el acoplamiento de ϕ^2 .

considerando ahora diagramas $\mathcal{O}(N^{-3})$ podemos obtener la versión resumada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$:

$$= \left(- \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) + 2 \text{ perm}, \quad (4.53)$$

donde las permutaciones son de p_1, p_2, p_3 los momentos libres de los diagramas, y nuevamente obtenemos la expresión dada por el NPRG (4.50).

En conclusión, el procedimiento basado en el cambio de variable $\rho \rightarrow W$, al evaluarlo en la escala $k = 0$ con todas las fluctuaciones incluidas, arroja los mismos resultados obtenidos a partir de un tratamiento alternativo al Grupo de Renormalización No Perturbativo, introduciendo el campo auxiliar $\rho(x)$ y realizando la resumación de burbujas. Teniendo estos resultados exactos para las formas de los funciones $\hat{\Gamma}^{(n)}$, aboquémonos al análisis de las identidades de Ward-Takahashi.

4.4. Compatibilidad de las identidades de Ward-Takahashi para $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$ para $N \rightarrow \infty$

En esta sección veremos el cálculo explícito de compatibilidad de $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$ para $N \rightarrow \infty$, el cual es significativamente más extenso puesto que no podemos apelar a argumentos tan generales como en las secciones anteriores. Se trata de un resultado esperado para N arbitrario, pero no sabemos realizar el cálculo para N finito, donde hay menos simplificaciones. La prueba que veremos requiere de mirar detenidamente las contribuciones de los diferentes diagramas a los $H^{(n)}$ y ver de qué manera organizar los términos para lograr probar que la identidad de Ward para transformaciones conformes especiales puede derivarse de las demás identidades.

Para comenzar, veamos el aspecto de la identidad que deseamos probar:

$$\left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2) - 2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iabc}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} \\ \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2} \int_q \dot{R}(q) G_{ij}(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{abjkc}^{(3)}(p_1, p_2, q, q') \right\} G_{ki}(q) \Big|_{q'=-q}. \quad (4.54)$$

El cálculo involucra explícitamente¹ a $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$ y $\Gamma_{iabc}^{(4)}(r, p_1, p_2)$, por lo cual nos resultarán útiles sus expresiones (4.23) y (4.25).

Al involucrar la identidad (4.54) tres índices de color “libres”, tendremos en am-

¹De hecho, en los diagramas del r.h.s también tenemos a $\Gamma^{(5)}$, pero como presenta un momento nulo, lo expresaremos en términos de derivadas de $\Gamma^{(4)}$.

bos lados de la igualdad, en general, las cuatro estructuras tensoriales posibles, que aparecen en la expresión de $\Gamma_{abc}^{(3)}$ ($\phi_a\phi_b\phi_c$ y permutaciones de $\phi_a\delta_{bc}$). La prueba de la identidad requerirá verificar que las componentes según cada estructura coinciden a ambos lados de la igualdad. Del lado derecho, tendremos contribuciones de tres diagramas diferentes, según dónde actúan las sucesivas derivadas funcionales que tomamos de la ecuación de Wetterich (2.47). Los diagramas de flujo de $\Gamma^{(3)}$ que debemos considerar son representados en la figura 4.1:

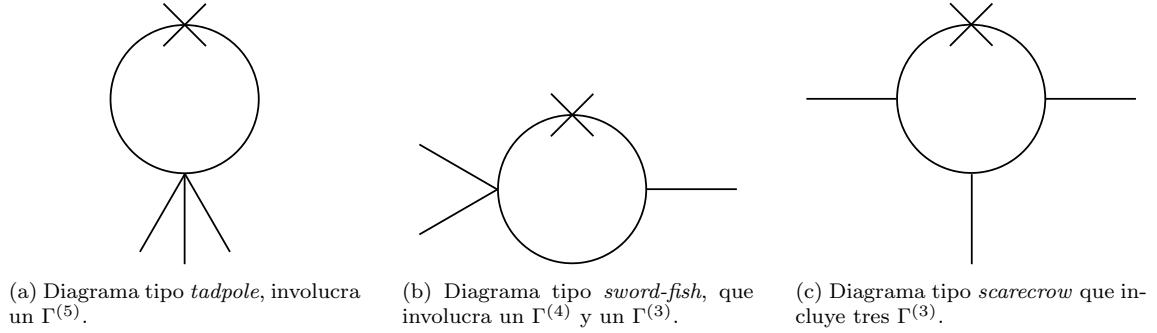


Figura 4.1: Diagramas que contribuyen al flujo de $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$.

Para comenzar, lo más sencillo de hacer es analizar los términos que multiplican a las estructuras como $\phi_a\delta_{bc}$. Resulta que en realidad estos no involucran nueva información – corresponden a la identidad bajo transformaciones conformes especiales para $\Gamma^{(2)}$. El detalle de este cálculo se realiza en el apéndice F. En resumen, el punto es que si $\Gamma_{ab}^{(2)}$ satisface la identidad de Ward para transformaciones conformes especiales, lo hacen su componente $\propto \phi_a\phi_b$ y su componente $\propto \delta_{ab}$ por separado – ya que la identidad no mezcla ambos sectores. La identidad (4.54), proyectada en $\phi_a\delta_{bc}$, resulta equivalente al sector $\propto \phi_a\phi_b$ de la identidad para $\Gamma_{ab}^{(2)}(p)$. Notando esto desde un comienzo podemos obviar el cálculo, pero como nos será de utilidad a continuación, escribamos la identidad a la que estamos haciendo referencia:

$$\left[p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - 4d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p) - 4d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(r, p) \Big|_{r=0} = -2 \partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \Big|_{r=0} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_W \right]. \quad (4.55)$$

Esta es la identidad para SCT que satisface $\hat{\Gamma}^{(2)}$. Nos concentraremos ahora en dónde realmente no tenemos una prueba, que es la componente de (4.54) $\propto \phi_a\phi_b\phi_c$. Comencemos estudiando el primer paréntesis recto de (4.54). Debemos quedarnos con la contribución que viene del último término en (4.23), $\hat{\Gamma}_{abc}^{(3)}\phi_a\phi_b\phi_c$:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) = \\
& \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \left(N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)I_3(p_1, p_2) \right).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Para la igualdad, hemos utilizado la solución para $\hat{\Gamma}^{(3)}$ en términos de los momentos y W – (4.49). Observando la expresión (4.25), vemos que el término de (4.54) con la derivada evaluada en momento r nulo tiene cuatro contribuciones de $\Gamma^{(4)}$, que son:

$$\begin{aligned}
& -2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iabc}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} \xrightarrow{\text{parte } \propto \phi_a \phi_b \phi_c} -2d_\phi \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[2\rho \hat{\Gamma}^{(4)}(r, p_1, p_2) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\Gamma}^{(3)}(r + p_1, p_2) + \hat{\Gamma}^{(3)}(r + p_2, p_1) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \right] \Big|_{r=0}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Evaluemos ahora esta derivada. Los términos que involucran a $\hat{\Gamma}^{(3)}$ son de fácil tratamiento, nos dan:

$$-2d_\phi \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2), \tag{4.58}$$

donde debemos notar que el último sumando no contribuye. Para evaluar la derivada golpeando en $\hat{\Gamma}^{(4)}$, recordemos su expresión (4.50) y, ya que $\partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2)}(r)|_{r=0} = 0$, factoricemos $-4Nd_\phi \rho \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(0)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} \propto \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2 + r) \left(N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + r)I_3(r, p_1)I_3(p_2, r + p_1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2 + r)I_3(r, p_2)I_3(p_1, r + p_2) + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)I_3(p_1, p_2)I_3(p_1 + p_2, r) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - I_4(p_1, p_2, r) - I_4(p_2, r, p_1) - I_4(r, p_1, p_2) \right) \right] \Big|_{r=0}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Para continuar, es necesario aplicar regla del producto y evaluar con cuidado los diferentes términos. Al evaluar en un momento nulo, tenemos una relación conveniente para re-expresar las integrales, recordando la forma del propagador transversal (4.28):

$$I_3(p, 0) = \int_q G_T(q)^2 G_T(q + p) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \int_q G_T(q) G_T(p + q) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} I_2(p), \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
I_4(p_1, p_2, 0) + I_4(p_2, 0, p_1) + I_4(0, p_1, p_2) &= \int_q \{ G_T(q) G_T(q + p_1) G_T^2(q + p_1 + p_2) \\
&\quad + G_T(q) G_T^2(q + p_1) G_T(q + p_1 + p_2) \\
&\quad + G_T^2(q) G_T(q + p_1) G_T(q + p_1 + p_2) \} \\
&= - \frac{\partial}{\partial W} I_3(p_1, p_2),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

donde hemos usado en la primera igualdad de (4.61) la libertad de redefinir $q \rightarrow -q - p_1 - p_2$ al integrar en todo el espacio de q , y el hecho de que $G_T(q) = G_T(-q)$. De igual manera, es necesario trabajar las derivadas de estas integrales I_3 e I_4 . Es posible expresarlas en términos de derivadas respecto a los momentos externos p_1 y p_2 y a W . Esto se realiza con más detenimiento en el apéndice F. Considerando los términos dados por estas derivadas, y aquellos en que las derivadas actúan sobre los $\hat{\Gamma}^{(2)}$'s de (4.59), obtenemos finalmente el extenso aporte del término que involucra la derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$. Para simplificar la notación, introducimos la siguiente convención que utilizaremos de ahora en adelante:

$$\partial_{p_i}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}. \tag{4.62}$$

Finalmente, en el apéndice F se llega a que, a menos de un factor $-2Nd_\phi \partial_\rho W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)$, el aporte de la derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$ luce:

$$\begin{aligned}
& -\frac{N}{4} (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) I_3(p_1, p_2) \partial_W I_2(p_1) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) I_3(p_1, p_2) \partial_W I_2(p_2) \right] \\
& -\frac{N}{4} I_3(p_1, p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_W I_2(p_1 + p_2) \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_W I_3(p_1, p_2) \right) \\
& -\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \left[\partial_{p_1}^\mu (\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_W I_2(p_1)) + 1 \rightarrow 2 \right] \\
& -\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_W I_2(p_1) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_W I_2(p_2) \partial_{p_2}^\mu I_3(p_1, p_2) \right] \\
& -\frac{1}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\partial_{p_1}^\mu \int_q G(q - p_1) G(q) \partial_W G(q + p_2) + \partial_{p_2}^\mu \int_q G(q - p_2) G(q) \partial_W G(q + p_1) \right].
\end{aligned} \tag{4.63}$$

El siguiente paso consiste en estudiar el lado derecho de (4.54), es decir las contribuciones provenientes de los diagramas de la figura 4.1. Solamente nos interesamos por los aportes $\propto \phi_a \phi_b \phi_c$. El tratamiento detallado nuevamente se realiza en el apéndice F. Ahora nos limitaremos a expresar los resultados para los aportes totales de cada tipo de diagrama, comenzando con el *tadpole* (figura 4.1a):

$$-\frac{1}{2} \text{Diagram} = \left(-N \int_q \dot{R}(q) G^2(q) \right) \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0} = -2\partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0}. \quad (4.64)$$

A continuación, podemos expresar la suma de los diagramas *sword-fish* (figura 4.1b) como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[\text{Diagram} \right] = & \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) + (1 \rightarrow 2) \right. \\ & - 2 \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-2} \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \rightarrow 2) \\ & - \frac{1}{2} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right)^{-1} (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right) \Big] \\ & - 2 \left[\partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) + (1 \rightarrow 2) \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Por último, podemos simplificar la contribución de los diagramas tipo *scarecrow* (figura 4.1c) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[\text{Diagram} \right] = & N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left[(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left\{ \partial_t I_3(p_1, p_2)|_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right\} \right. \\ & \left. - \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_2}^\mu \int_q \partial_t G(q - p_1)|_W G(q) G(q + p_2) - (1 \leftrightarrow 2) \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Como hemos mencionado, el cálculo de cada diagrama y las simplificaciones adicionales se pueden ver en el apéndice F.

Antes de continuar, vale la pena mencionar una relación útil que se usa más de una vez en los siguientes pasos de la prueba, detallados en el apéndice F. Dada una función *f dimensionada* que depende de alguna magnitud dimensionada¹ p , además de la escala k , podemos reescribir su derivada respecto al tiempo de renormalización con

¹En general, puede ser un momento, o varios, o en el caso que venimos estudiando, la derivada del potencial W . El argumento permanece incambiado.

el parámetro p fijo:

$$\left. \partial_t f(p; k) \right|_p = \partial_t \left[k^{d_f} \tilde{f}(\tilde{p}; k) \right] \Big|_p = d_f f(p; k) + k^{d_f} \partial_{\tilde{p}} \tilde{f}(\tilde{p}; k) \underbrace{\left. \partial_t \tilde{p} \right|_p}_{-\partial_t p|_{\tilde{p}}} + k^{d_f} \left. \partial_t \tilde{f}(\tilde{p}; k) \right|_{\tilde{p}}. \quad (4.67)$$

Ahora, en términos de variables adimensionadas, el flujo de renormalización se dirige a un punto fijo. Es decir, la derivada de las funciones *adimensionadas* respecto al tiempo de renormalización, con sus variables adimensionadas fijadas, debe ser nula en el punto fijo. Asimismo, notemos que funcionalmente $f(p)$ y $\tilde{f}(\tilde{p})$ son iguales – meramente se factoriza las potencias de k entre una y otra y se renombra $p \rightarrow k^{D_p} \tilde{p}$. Consideremos para hacer algo más general el argumento que f depende también de la derivada del potencial W . En base a (4.67) tenemos:

$$\left. \partial_t f(p, W; k) \right|_p = d_f f(p, W; k) - d_p \partial_p f(p, W; k) - d_W \partial_W f(p, W; k). \quad (4.68)$$

Este es por el caso de $\hat{\Gamma}^{(2)}$, donde hay que tener en cuenta la dependencia en p y W . Para funciones de más argumentos, por ejemplo $I_3(p_1, p_2; W)$, el argumento se generaliza y restamos un término del lado derecho por variable dimensionada de la función. Esto se utiliza en varias oportunidades para simplificar aportes de los diagramas con términos que vienen de la derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$ – término que podemos combinar con el diagrama *tadpole* utilizando la ecuación de flujo de ρ vista en la sección 4.3 – ecuación (4.38).

Un siguiente paso de la prueba es trabajar con los operadores de derivadas que golpean el $\hat{\Gamma}^{(3)}$ – ecuación (4.56). Estos se pueden descomponer separando su acción solo sobre I_3 , solo sobre las tres $\hat{\Gamma}^{(2)}$ y los términos “cruzados”. Para cuando actúan exclusivamente sobre las $\hat{\Gamma}^{(2)}$, podemos apelar a (4.55) – he ahí el motivo por el cual explicitamos la identidad de Ward-Takahashi para SCT de $\hat{\Gamma}^{(2)}(p)$. Una vez extraídos todos los términos, es posible realizar más cancelaciones apelando a la simetría bajo rotaciones, mediante la identidad de Ward-Takahashi (3.32) asociada a esta simetría para las funciones $\hat{\Gamma}^{(2)}$ e I_3 :

$$\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \hat{\Gamma}^{(2)}(p) = 0, \quad (4.69)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] I_3(p_1, p_2) = 0. \quad (4.70)$$

Empleando estas, es posible simplificar varios términos provenientes del operador de derivadas como vemos en el apéndice F. A esta altura, la identidad inicial (4.54) luce:

$$\begin{aligned}
& N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} \right] I_3(p_1, p_2) \\
& (-10d_\phi + 2d - 1)N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) \\
& -2d_\phi N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \\
& \stackrel{?}{=} 2(d - 2d_\phi)N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) \\
& + \left((2d - 8d_\phi) + (d - 6) \right) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \\
& + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \int_q (\partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Para continuar, podemos apelar a otra información de la cuál no hemos hecho uso explícitamente: el valor de d_ϕ . Recordemos que en el límite $N \rightarrow \infty$ la aproximación LPA se tornaba exacta para el potencial y para la función $Z_k(\rho)$. Esto implicaba que $\eta = 0$, y que luego obteníamos la dimensión canónica del campo $d_\phi = (d - 2)/2$, dato que podemos usar para simplificar la segunda línea del lado izquierdo y la primera del derecho de (4.71); así como para cancelar la tercera del lado izquierdo con la segunda del derecho – que marcamos con $(\dots)$. El aspecto que toma (4.71) considerando esto, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} + (1 - d)\partial_i^\mu \right] I_3(p_1, p_2) \\
& \stackrel{?}{=} \int_q q^\nu (\partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\mu) G(q)G(q-p_1)G(q+p_2).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Para verificar la satisfacción de la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales, tras numerosas simplificaciones y usos de diversas propiedades, debemos comprobar la igualdad (4.72). Comencemos observando que el lado izquierdo se asemeja mucho a la identidad de Ward para rotaciones (4.70), si le tomamos una derivada $(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu)$ desde la izquierda y le cambiamos el signo. De hecho, solamente le hacen falta los términos cruzados. Puesto que esta identidad se verifica, sustituyamos el lado izquierdo de nuestra igualdad a probar por los términos cruzados de derivar la identidad (4.70).

$$\begin{aligned}
& (p_1^\nu \partial_{p_1}^\mu \partial_{p_2}^\nu - p_1^\mu \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\nu + p_2^\nu \partial_{p_2}^\mu \partial_{p_1}^\nu - p_2^\mu \partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\nu) \int_q G(q)G(q-p_1)G(q+p_2) \\
& \stackrel{?}{=} \int_q \{ q^\nu (\partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\mu) + \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\nu q^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\nu q^\mu \} G(q)G(q-p_1)G(q+p_2)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Nótese que del lado derecho, hemos sumado y restado un nuevo término. Si ahora reordenamos términos, notando que las derivadas parciales conmutan (siempre y cuando

dejemos los p_1 y p_2 a la izquierda) finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} & \partial_{p_2}^\nu \int_q \{ (q - p_1)^\mu \partial_{p_1}^\nu - (q - p_1)^\nu \partial_{p_1}^\mu \} G(q - p_1) G(q) G(q + p_2) \\ & + \partial_{p_1}^\nu \int_q \{ (q + p_2)^\nu \partial_{p_2}^\mu - (q + p_2)^\mu \partial_{p_2}^\nu \} G(q + p_2) G(q) G(q - p_1) = 0, \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde en la última igualdad utilizamos las identidades de rotaciones que verifican las $G(q)$. La prueba que hemos realizado ha sido extensa y laboriosa, teniendo que trabajar las diferentes contribuciones término a término, y apelando numerosas veces a identidades de Ward-Takahashi correspondientes a n 's menores. Además, fue necesario utilizar la expresión exacta de $\hat{\Gamma}^{(4)}(p, q, l)$, o equivalentemente, la identidad de Ward-Takahashi para dilataciones correspondiente a $\Gamma^{(4)}$. Esto nos da un primer indicio de que la prueba general de invariancia conforme para modelos $O(N)$ en el límite $N \rightarrow \infty$ requerirá en general utilizar identidades de dilataciones de funciones a $n + 1$ puntos para la identidad conforme especial a n puntos. Este resultado respalda la hipótesis de la simetría conforme a todo orden n en el límite $N \rightarrow \infty$, y por la forma en que suceden las cancelaciones, apunta fuertemente a la existencia de una prueba general de simetría conforme.

4.5. Soluciones en presencia de fuentes para operadores compuestos locales

Hemos discutido el límite $N \rightarrow \infty$, viendo cómo a partir del cambio de variable $\rho \rightarrow W$ se obtienen soluciones exactas para los $\Gamma^{(n)}$ y así probamos que la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales es satisfecha hasta $n = 3$. Ahora nos dedicaremos a analizar qué información podemos extraer de estas identidades si en nuestra función de partición consideramos fuentes $K(x)$ para operadores locales compuestos de *scaling*, como vimos en la sección 3.4. Esto nos permitirá obtener una restricción que determinará un conjunto de operadores locales para los que podemos considerar fuentes, si queremos que el punto crítico respete la simetría conforme, además de darnos el espectro de sus dimensiones de *scaling*. Para ello, explotaremos la relación entre los λ_i y las dimensiones de *scaling* d_i – ecuación (3.44). Como punto de partida, si bien no la hemos probado, supondremos que en el punto crítico, y en el límite $N \rightarrow \infty$, la simetría conforme se verifica e impondremos la identidad de Ward-Takahashi asociada a las transformaciones conformes especiales. Esto nos proveerá de restricciones sobre el tipo de operadores locales compatibles con dicha simetría.

Para empezar, destaquemos que las soluciones halladas en la sección 4.3 para $\Gamma^{(n)} \equiv \Gamma^{(n,0)}$ siguen valiendo, pues siempre tomamos $K = 0$ al evaluar las derivadas. Si bien

podríamos repetir los cálculos para justificar enteramente esto, basta con el siguiente razonamiento para convencerse. Si evaluamos la acción efectiva promedia en $K = 0$, se reduce exactamente a la AEP del capítulo 2. Por otro lado, para los vértices $\Gamma_k^{(n,0)}$ con $n \geq 1$, tomamos solo derivadas respecto a los campos ϕ_i . Por ende, una vez hagamos la evaluación $K = 0$, las únicas contribuciones que tendremos son las que ya teníamos en los cálculos de la sección 4.3. De ahí se sigue que las soluciones son las de antes. Ahora miremos las funcionales $\Gamma_k^{(n,1)}$ evaluadas en configuración homogénea. Lo primero es ver cómo se modifica la prescripción para derivar el propagador $G_{ab}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\delta(x-y)\delta_{ab})}{\delta K(y_1)} &= 0 = \int_z \frac{\delta}{\delta K(y_1)} \left[W_{ac}^{(2,0)}(x, z) \left(\Gamma_k^{(2,0)} + R_k \right)_{cb}(z, y) \right] \\ &\therefore \\ W_{ab}^{(2,1)}(x, y; y_1) &= - \int_{z_1, z_2} G_{ac}(x, z_1) \Gamma_{cd}^{(2,1)}(z_1, z_2; y_1) G_{db}(z_2, y), \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde recordemos que $W_{ab}^{(2,0)}(x, y) \equiv G_{ab}(x, y)$. La regla para construir los diagramas de los lados derechos es como la que veníamos usando, solo que al derivar el propagador insertaremos una “pata de $\mathcal{O}$ ”. El pasaje a espacio de momentos no tiene mayor diferencia con el realizado en (2.50). Por convención elegiremos – siempre que la haya – la coordenada espacial asociada a una derivada en K para fijar a 0. Utilizando el resultado (4.75), la regla para obtener los diagramas del lado derecho de la ecuación de flujo para los $\Gamma^{(n,m)}$ resulta:

$$\frac{\delta}{\delta K(y_1)} \left[\text{Diagrama: círculo con una pata recta hacia abajo} \right] = \text{Diagrama: círculo con una pata recta y una pata ondulada hacia abajo} - \left(\text{Diagrama: círculo con una pata recta hacia abajo y una pata ondulada hacia la derecha} + \text{Diagrama: círculo con una pata recta hacia abajo y una pata ondulada hacia la izquierda} \right), \quad (4.76)$$

donde ahora el vértice con n patas rectas y m onduladas, corresponde a $\Gamma^{(n,m)}$ en campo uniforme. La regla es completamente análoga a (2.53). Usando esta regla, obtengamos la ecuación de flujo para $\Gamma_{k,a}^{(1,1)}(p)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_i^{(1,1)}(p; \phi, K) &= -\frac{1}{2} \left(\text{Diagrama: círculo con una pata recta hacia abajo y una pata ondulada hacia la izquierda} + \text{Diagrama: círculo con una pata recta hacia abajo y una pata ondulada hacia la derecha} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \dot{R}_k(q) G_{ab}(q) \Gamma_{ibc}^{(3,1)}(p, q, -q) G_{ca}(q) \\ &\quad + \int_q \dot{R}_k(q) G_{ab}(q) \Gamma_{bc}^{(2,1)}(-p, q, p) G_{cd}(q+p) \Gamma_{die}^{(3,0)}(q, p) G_{ea}(q). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ahora impongamos el límite $N \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que debemos recoger las contribuciones que aporten con δ 's al tomar la traza en el bucle, de modo de obtener un $\delta_{aa} = N$. Esto significa:

$$\begin{aligned}
G_{ab}(q) &\rightarrow G_T(q)\delta_{ab} \\
\Gamma_{ibc}^{(3,1)}(p, q, -q) &\rightarrow \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p, 0)\delta_{bc}\phi_i \\
\Gamma_{ibc}^{(2,1)}(-p, p+q) &\rightarrow \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p, 0)\delta_{bc}\phi_i \\
\Gamma_{die}^{(3,0)}(q, p) &\rightarrow \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)\phi_i\delta_{de}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Realizando estos cambios, obtenemos una ecuación de flujo para $\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)$, análoga a (4.42). Esta puede ser resuelta usando el mismo tipo de manipulación que utilizamos en la sección 4.3, cambiar de variable $\rho \rightarrow W$:

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) \Big|_\rho &= -\frac{N}{2} \left[\text{Diagram 1} - 2 \text{Diagram 2} \right] \\
&= -\frac{N}{2} \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p, 0) - 2\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) G_T(p+q) \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) \right\} \\
\partial_t \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) \Big|_W &= \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) \underbrace{N \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) G_T(p+q)}_{-\partial_t (\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p))^{-1} \Big|_W}.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

En esta última ecuación, definimos que el vértice de n patas rectas punteadas y m patas onduladas punteadas corresponde a $\hat{\Gamma}^{(n,m)}$. Esto significa que $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)$ y $\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)$ difieren únicamente en una función multiplicativa, puesto que podemos escribir esta igualdad como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)}{\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)} &= \frac{\partial_t \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)}{\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)} \\
&\therefore \\
\partial_t \log \frac{\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)}{\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)} &= 0 \Rightarrow \hat{\Gamma}_k^{(1,1)}(p) = \frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1)}(p)}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2,0)}(p)} \hat{\Gamma}_k^{(2,0)}(p).
\end{aligned} \tag{4.80}$$

En particular, si partimos de una teoría ϕ^4 en la escala microscópica Λ y consideramos el operador local $\rho(x)$, para tener un ejemplo concreto, la relación es:

$$W = \int_x \frac{r}{2} \rho + \frac{u}{6} \rho^2 + K \rho \Rightarrow \hat{\Gamma}_\Lambda^{(2,0)}(p) = r + \frac{u}{3} \rho + K \Rightarrow \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1)}(p) = 1 \tag{4.81}$$

En este caso particular, obtenemos que:

$$\hat{\Gamma}_k^{(1,1)}(p) = \frac{u}{3} \left(\frac{u}{3} \frac{1}{1 + \frac{Nu}{6} I_2(p; W)} \right) \quad (4.82)$$

Si no particularizamos la teoría microscópica, ni imponemos inicialmente el operador local, dejándolo expresado como $\mathcal{O}(x)$, podemos igualmente extraer información útil. Para comenzar, hagamos la siguiente definición:

$$\chi^{(1)}(p; W) \equiv \frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1)}(p)}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2,0)}(p)}. \quad (4.83)$$

Esta función $\chi^{(1)}(p; W)$ queda entonces determinada completamente por la escala microscópica, y vincula a $\hat{\Gamma}_k^{(1,1)}$ con $\hat{\Gamma}_k^{(2,0)}$. Habiendo obtenido la solución general $\hat{\Gamma}^{(1,1)}$, sigamos adelante y obtengamos la forma general de $\hat{\Gamma}^{(2,1)}$. El procedimiento a seguir es sencillo, debemos repetir el procedimiento empleado en la obtención de $\hat{\Gamma}^{(3,0)}$, pero cambiando siempre “una pata de ρ por una de $\mathcal{O}$ ” en los diagramas. Esto se hace en detalle en el apéndice G. El resultado que obtenemos es:

$$\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2; W) = \chi^{(1)}(p_1 + p_2) \hat{\Gamma}_k^{(3,0)}(p_1, p_2) + \hat{\Gamma}_k^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}_k^{(2,0)}(p_2) \chi^{(2)}(p_1, p_2). \quad (4.84)$$

Aquí la función $\chi^{(2)}(p_1, p_2)$ está determinada también por la escala microscópica, y viene dada por:

$$\chi^{(2)}(p_1, p_2; W; \Lambda) = \chi^{(1)}(p_1 + p_2) \frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2,1)}(p_1, p_2)}{\Gamma_\Lambda^{(2,0)}(p_1) \Gamma_\Lambda^{(2,0)}(p_2)}. \quad (4.85)$$

Ahora veremos qué información podemos extraer de las identidades de Ward-Takahashi. En particular, veremos qué nos dicen estas de los $\chi^{(n)}$ y como esto nos restringirá el tipo de operadores locales permitidos.

4.6. Identidades de Ward-Takahashi por dilataciones y restricciones sobre los operadores locales

Al considerar una fuente para operadores locales, las identidades de Ward-Takahashi que veníamos utilizando deben ser recalculadas, como hemos comentado anteriormente. En el apéndice G realizamos el procedimiento para $\Gamma_a^{(1,1)}$ y $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$, generalizando el resultado mencionado para $\Gamma^{(0,1)}$ – ecuación (3.54). Si repetimos el cálculo, derivando respecto a $\phi_i(x)$ y $K(y)$ la identidad de dilataciones para Γ_k , obtenemos la identidad correspondiente a $\Gamma_i^{(1,1)}(x; y)$. Realizando la transformada de Fourier, fijando $y = 0$ por la simetría bajo traslaciones de la teoría – que no es rota por considerar un $K(x)$ que

luego fijaremos a 0 – obtenemos:

$$\left(2d_\phi - d_\mathcal{O} + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} + 2d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p; \rho) = \frac{N}{2} \left[\text{Diagram 1} - 2 \frac{p}{\dots} \text{Diagram 2} \right]. \quad (4.86)$$

Diagram 1: A circle with a cross on top. An incoming dashed line with momentum p enters from the bottom left, and an outgoing dashed line with momentum p exits from the bottom right. A curved arrow labeled q points clockwise around the circle.

Diagram 2: A circle with a cross on top. An incoming dashed line with momentum p enters from the left, and an outgoing dashed line with momentum p exits from the right. A curved arrow labeled $p+q$ points clockwise around the circle.

Vale la pena recordar el aspecto de la identidad de Ward-Takahashi de dilataciones también para $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p; \rho)$:

$$\left(4d_\phi - d + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} + 2d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p; \rho) = \frac{N}{2} \left[\text{Diagram 1} - 2 \frac{p}{\dots} \text{Diagram 2} \right]. \quad (4.87)$$

Diagram 1: A circle with a cross on top. An incoming dashed line with momentum p enters from the bottom left, and an outgoing dashed line with momentum p exits from the bottom right. A curved arrow labeled q points clockwise around the circle.

Diagram 2: A circle with a cross on top. An incoming dashed line with momentum p enters from the left, and an outgoing dashed line with momentum p exits from the right. A curved arrow labeled q points clockwise around the circle.

De momento, la única novedad en nuestro cálculo es $\chi^{(1)}$. Para estudiar sus propiedades, veamos qué nos dice la invariancia bajo transformaciones de escala – identidad (4.86). De modo de no considerar la información acerca de $\hat{\Gamma}^{(2)}(p)$, calculemos $\mathcal{D}\hat{\Gamma}^{(1,1)} - \mathcal{D}\chi^{(1)}\hat{\Gamma}^{(2,0)}$:

$$\left(-2d_\phi - d_\mathcal{O} + d + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} + 2d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \chi^{(1)}(p; \rho) = \frac{N}{2} \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \partial_\rho \chi^{(1)}(p; \rho) \quad (4.88)$$

Si ahora utilizamos que en el límite $N \rightarrow \infty$, $2d_\phi = d - 2$ y la ecuación (4.38) para realizar el cambio de variable $\rho \rightarrow W$, podemos simplificar esto a:

$$\left(2 - d_\mathcal{O} + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} + 2W \frac{\partial}{\partial W}\right) \chi^{(1)}(p; W) = 0. \quad (4.89)$$

En conclusión, las únicas soluciones $\mathbb{C}^\infty$ para $\chi^{(1)}(p; W)$ son polinomios en p^2 y W . No solo esto, además, tenemos una restricción para $d_\mathcal{O}$. Específicamente:

$$\chi^{(1)}(p; W) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{\chi}_{nm}^{(1)}(p^2)^n W^m \Rightarrow \boxed{d_\mathcal{O} = 2(n+m+1)} \text{ para algún } \{n, m\} \quad (4.90)$$

La primer observación que podemos realizar sobre estos resultados, es que sumas diferentes de $n+m$ corresponden a diferentes operadores locales de *scaling*. A su vez, $D_\mathcal{O} \geq 2$, o equivalentemente, las perturbaciones propias tienen $\lambda \leq d-2$. El caso límite, $n=m=0$, nos da $\lambda = d-d_\mathcal{O} = d-2$. Este resultado coincide con el autovalor $\lambda = \nu^{-1}$ de la dirección relevante del flujo de renormalización en el límite $N \rightarrow \infty$. Si ahora nos paramos en el siguiente valor de $n+m$, tenemos $d_\mathcal{O} = 4$, que corresponde al exponente crítico menos irrelevante $\omega_\infty = d-4$. Con n 's y m 's mayores, se pueden recuperar

autovalores correspondientes a direcciones crecientemente más irrelevantes del flujo de renormalización. Vale la pena destacar que las dimensiones $d_{\mathcal{O}}$ dadas en (4.90) no cubren todo el espectro de operadores locales de *scaling* para el caso $N \rightarrow \infty$. Esto se debe a que hemos considerado únicamente operadores funcionales de ρ , sin incluir por ejemplo fuentes para operadores impares como el propio campo.

Hagamos un análisis similar al expuesto, pero ahora para $\chi^{(2)}(p_1, p_2)$. Esto es, veamos qué nos dicen las identidades de Ward-Takahashi para dilataciones: $\mathcal{D}\hat{\Gamma}^{(2,1)} - \chi^{(1)}(p_1 + p_2)\mathcal{D}\hat{\Gamma}^{(3,0)}$. La deducción de $\mathcal{D}\hat{\Gamma}^{(2,1)}$ es muy similar a la de $\mathcal{D}\hat{\Gamma}_i^{(1,1)}$. La única diferencia es que previo a la transformación a espacio de Fourier, se toma una nueva derivada respecto a un campo $\phi_j(x_2)$ y se estudia la componente $\propto \phi_i\phi_j$ (como puede verse en el apéndice G). Para $\mathcal{D}\hat{\Gamma}^{(3,0)}$ utilizamos el resultado general (3.37) para el caso $n = 3$ y miramos la contribución $\propto \phi_a\phi_b\phi_c$. Tras calcular la diferencia, sobreviven:

$$\begin{aligned} & \left(4d_\phi - d_{\mathcal{O}} + p_1^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} + p_2^\nu \frac{\partial}{\partial p_2^\nu} + 2d_\phi \rho \partial_\rho\right) \left[\chi^{(2)}(p_1, p_2) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_2)\right] \\ & \hat{\Gamma}^{(3,0)}(p_1, p_2) \left(-d_{\mathcal{O}} + (p_1 + p_2)^\nu \frac{\partial}{\partial (p_1 + p_2)^\nu} + d - 2d_\phi + 2d_\phi \rho \partial_\rho\right) \chi^{(1,1)}(p_1 + p_2) \\ & = \partial_t \rho|_W \left[\hat{\Gamma}^{(3,0)}(p_1, p_2) \partial_\rho \chi^{(1)}(p_1 + p_2) + \partial_\rho \left(\chi^{(2)}(p_1 + p_2) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_2)\right)\right] \\ & - \chi^{(2)}(p_1, p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_2) \partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1) \Big|_W\right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

La segunda línea del lado izquierdo, junto al primer término del lado derecho, se cancelan pues se reducen a la ecuación (4.88). Nos queda así una igualdad que vincula a $\chi^{(2)}$ y $\hat{\Gamma}^{(2,0)}$. Veamos como reducirla aún más, y poder extraer una restricción sobre $\chi^{(2)}$. Para ello, recordemos que en la solución de punto fijo, se satisface la relación (4.68), que ya hemos utilizado numerosas veces y para $\hat{\Gamma}^{(2,0)}$ luce:

$$\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p; W) = -[2W \partial_W + p^\nu \partial_{p^\nu} + (4d_\phi - d)] \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p; W). \quad (4.92)$$

Utilizando esta relación, en conjunto con (4.38), podemos cancelar el término con la derivada respecto a t y los términos que vienen de derivar respecto a p_1 y p_2 a las $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)$. Asimismo, podemos sustituir el valor de d_ϕ en el límite $N \rightarrow \infty$, obteniendo así una ecuación diferencial lineal para $\chi^{(2)}$:

$$\left(4 - d_{\mathcal{O}} + p_1^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} + p_2^\nu \frac{\partial}{\partial p_2^\nu} + 2W \frac{\partial}{\partial W}\right) \chi^{(2)}(p_1, p_2; W) = 0. \quad (4.93)$$

Por la simetría del problema, $\chi^{(2)}$ debe ser simétrico bajo el intercambio $p_1 \leftrightarrow p_2$, y si además buscamos soluciones suaves, obtenemos la siguiente base de soluciones para (4.93):

$$\chi^{(2)}(p_1, p_2; W) = \bar{\chi}^2 W^a (p_1^2 + p_2^2)^b (p_1^2 p_2^2)^{b'} ((p_1 + p_2)^2)^{b''}. \quad (4.94)$$

Veamos qué ocurre si fijamos uno de los momentos a 0. Obtenemos un vínculo entre las soluciones para $\chi^{(2)}$ y las soluciones para $\chi^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p, 0) &= \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) \\ \partial_\rho W \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \chi^{(2)}(p, 0) + \cancel{\chi^{(1)}(p) \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)} &= \cancel{\chi^{(1)}(p) \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)} + \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_\rho \chi^{(1)}(p) \\ \chi^{(2)}(p, 0) &= \partial_W \chi^{(1)}(p).\end{aligned}\tag{4.95}$$

En el pasaje a la segunda línea, usamos el hecho de que $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(0) = \partial_\rho \hat{\Gamma}^{(1,0)} = W'$, y para pasar a la tercera, sustituimos $W'(\rho) = 1/\rho'(W)$, además de simplificar los $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)$ a ambos lados. Vinculemos ahora las soluciones generales (4.90) y (4.94), escribiéndolas de una forma ligeramente diferente, de modo de poder vincular soluciones correspondientes a operadores de igual $d_{\mathcal{O}}$:

$$\chi^{(1)}(p; W) = \bar{\chi}_{-1,0}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{b=0}^n \bar{\chi}_{n-b,b}^{(1)} W^{n-b+1} (p^2)^b + \bar{\chi}_{-1,n+1}^{(1)} (p^2)^{n+1} \right\}, \tag{4.96}$$

$$\chi^{(2)}(p_1, p_2, W) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b=0}^n \sum_{i=0}^b W^{n-b} \bar{\chi}_{n-b,b-i,i}^{(2)} (p_1^2 + p_2^2)^{b-i} ((p_1 + p_2)^2)^i + \mathcal{O}(p_1^2 p_2^2). \tag{4.97}$$

Escritas las soluciones de este modo, para un n dado, la dimensión del operador local respectivo es $d_{\mathcal{O}} = 2 + 2n$ con $n \geq 0$. Nótese que hemos dejado parte de la solución de $\chi^{(2)}$ no explícita, ya que sobre esta no hay restricciones al orden trabajado – y de hecho es posible que correspondan a soluciones no físicas, como analizaremos más adelante. Si imponemos la condición (4.95) llegamos a:

$$\boxed{(n - b + 1) \bar{\chi}_{n-b,b}^{(1)} = \sum_{i=0}^b \bar{\chi}_{n-b,b-i,i}^{(2)}}. \tag{4.98}$$

Este es el primero de dos vínculos, que junto con la restricción proveniente de la identidad de Ward para transformaciones conformes especiales, nos permitirá obtener, para cada dimensión $d_{\mathcal{O}}$, las relaciones entre los coeficientes $\bar{\chi}$ correspondientes.

4.7. Restricción especial conforme sobre los operadores locales compatibles

De manera similar a cómo se procede con las $\Gamma^{(2,0)}(p)$, se puede obtener una identidad de Ward para transformaciones conformes especiales para $\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)$ a partir de derivar la identidad original para Γ . Se toma una derivada respecto a un campo $\phi_i(x)$ y otra respecto a la fuente para el operador local, $K(y)$ y se transforma de Fourier.

Esto está hecho en el apéndice G, donde asumiremos que los operadores compuestos de *scaling* considerados son *primarios* – es decir se trata de operadores que bajo el grupo conforme, se transforman según:

$$\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-d_{\mathcal{O}}/d} \mathcal{O}(x), \quad (4.99)$$

donde $d_{\mathcal{O}}$ es la dimensión de escala del operador. Notemos que el campo $\varphi_a(x)$ es un operador de *scaling* primario, pues su regla de transformación (3.23) es un caso particular de (4.99). En vistas de esto, nuestros resultados son válidos solamente para operadores primarios. El resultado para la identidad de Ward-Takahashi bajo transformaciones conformes especiales es muy similar a (4.7):

$$\begin{aligned} \left[p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \Gamma_i^{(1,1)}(p) - 2d_\phi \phi_j \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{ji}^{(2,1)}(r, p) \Big|_{r=0} = \\ - \int_q \dot{R}(q) G_{ca}(q) G_{ab}(q) \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_{bic}^{(3,1)}(q, p, q') \right. \\ \left. - \Gamma_{bid}^{(3,0)}(q, p) G_{de}(q+p) \Gamma_{ec}^{(2,1)}(q+p, q') \right\}_{q'=-q}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Si factorizamos un ϕ_i , obtenemos la identidad de Ward para transformaciones especial conformes $\mathcal{K}^\mu \hat{\Gamma}^{(1,1)}$:

$$\begin{aligned} \left[p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - 4d_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p) - 4d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2,1)}(r, p) \Big|_{r=0} = \\ -N \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) (\partial_{q^\mu} + \partial_{q'^\mu}) \left\{ \frac{\hat{\Gamma}^{(2,1)}(q+q', p)}{2} - \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) G_T(p+q) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p+q+q') \right\}_{q'=-q} \\ = -2 \partial_t \rho \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2,1)}(r, p) \Big|_{r=0} + \chi^{(1)}(p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \right] + 2\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \chi^{(1)}(p). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Si ahora, procediendo de forma similar a lo hecho en la sección anterior, calculamos la diferencia con la identidad especial conforme correspondiente a $\hat{\Gamma}^{(2,0)}$, ecuación (4.55) multiplicada por $\chi^{(1)}$, tenemos $\mathcal{K}^\mu \hat{\Gamma}^{(1,1)} - \chi^{(1)} \mathcal{K}^\mu \hat{\Gamma}^{(2,0)}$:

$$\begin{aligned} -4d_\phi \rho \left\{ \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2,1)}(r, p) - \chi^{(1)}(p) \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3,0)}(r, p) \right\}_{r=0} \\ + 2\partial_{p^\nu} \chi^{(1)}(p) \underbrace{[p^\mu \partial_{p^\nu} - p^\nu \partial_{p^\mu}] \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)}_{=0 \text{ por id. rotaciones de } \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)} - 2p^\nu \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p) \partial_{p^\nu} \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \\ + \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) [p^\mu \partial_{p^\nu}^2 - 2p^\nu \partial_{p^\nu} \partial_{p^\mu} - 4d_\phi \partial_{p^\mu}] \chi^{(1)}(p) = 2\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \chi^{(1)}(p). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Podemos reexpresar algunos términos de esta identidad, explotando nuevamente la

relación que satisface $\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p)$, la ecuación (4.92). Nos va quedando:

$$\begin{aligned} & -4\partial_W \rho W \left\{ \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2,1)}(r, p) - \chi^{(1)}(p) \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3,0)}(r, p) \right\}_{r=0} \\ & + \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) [p^\mu \partial_{p^\nu}^2 - 2p^\nu \partial_{p^\nu} \partial_{p^\mu}] \chi^{(1)}(p) = 2(2 - 2W \partial_W) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Ahora usemos la solución que hallamos para $\hat{\Gamma}^{(2,1)}$, en términos de los $\hat{\Gamma}^{(n,0)}$ y $\chi^{(n)}$ – ecuación (4.84). Esto nos permitirá evaluar el primer término y llevarlo a una expresión más útil:

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(2,1)}(r, p) - \chi^{(1)}(p) \partial_{r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3,0)}(r, p) \right\}_{r=0} = \\ & \hat{\Gamma}^{(3,0)}(p, 0) \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p) + W' \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{r^\mu} \chi^{(2)}(p, r) \Big|_{r=0} = \\ & \partial_\rho W \partial_W \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p) + W' \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{r^\mu} \chi^{(2)}(p, r) \Big|_{r=0}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Sustituyendo este resultado en nuestra identidad de Ward, podemos eliminar los $\hat{\Gamma}^{(2,0)}$:

$$\begin{aligned} & -4W \partial_W \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p) - 4W \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{r^\mu} \chi^{(2)}(p, r) \Big|_{r=0} \\ & + \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) [p^\mu \partial_{p^\nu}^2 - 2p^\nu \partial_{p^\nu} \partial_{p^\mu}] \chi^{(1)}(p) = 2(2 - 2W \partial_W) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p) \partial_{p^\mu} \chi^{(1)}(p). \end{aligned} \quad (4.105)$$

La ecuación (4.105) nos proporciona un segundo vínculo entre $\chi^{(1)}$ y $\chi^{(2)}$, proveniente de la simetría bajo transformaciones conformes especiales:

$$[p^\mu \partial_{p^\nu}^2 - 2p^\nu \partial_{p^\nu} \partial_{p^\mu} - 4\partial_{p^\mu}] \chi^{(1)}(p) = 4W \partial_{r^\mu} \chi^{(2)}(p, r) \Big|_{r=0}. \quad (4.106)$$

Si volvemos a utilizar las soluciones (4.96) y (4.97), obtenemos nuevas relaciones entre sus coeficientes. Tras calcular las derivadas, nos queda:

$$\begin{aligned} & p^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{b=0}^n [2b(d-2) - 4b(b-1) - 8b] \bar{\chi}_{n-b,b}^{(1)} W^{n-b+1} (p^2)^{b-1} \right. \\ & \left. + [2(n+1)(d-2) - 4n(n+1) - 8(n+1)] \bar{\chi}_{-1,n+1}^{(1)} (p^2)^n \right\} \\ & = 4p^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b=0}^n W^{n-b+1} \sum_{i=0}^b 2i \bar{\chi}_{n-b,b-i,i}^{(2)} (p^2)^{b-1}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Si ahora estudiamos los distintos monomios a cada lado, podemos extraer dos nuevas relaciones:

$$\begin{aligned} & \boxed{[d-2-2n-4] \bar{\chi}_{-1,n+1}^{(1)} = 0} \Rightarrow \bar{\chi}_{-1,n+1}^{(1)} = 0 \text{ para } d \leq 6 \\ & \boxed{[d-2b-4] b \bar{\chi}_{n-b,b}^{(1)} = 4 \sum_{i=0}^b i \bar{\chi}_{n-b,b-i,i}^{(2)}}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Notemos como, nuevamente, no tenemos ninguna restricción sobre el sector $\mathcal{O}(p_1^2 p_2^2)$ de $\chi^{(2)}$ ya que se satisface trivialmente la identidad conforme a este nivel. Veamos

algunos casos concretos de las nuevas restricciones junto con (4.98). Para ello, nos reduciremos al caso de operadores locales primarios: $\bar{\chi}_{n-b,b,0}^{(2)} \neq 0$. Esto significa decir que el operador no puede expresarse como una derivada global. Las relaciones quedan

n=0:

$$\bar{\chi}_{00}^{(1)} = \bar{\chi}_{000}^{(2)} \quad (4.109)$$

n=1:

$$\begin{aligned} 2\bar{\chi}_{10}^{(1)} &= \bar{\chi}_{100}^{(2)} & \bar{\chi}_{100}^{(2)} &= \frac{\bar{\chi}_{10}^{(1)}}{2} \\ \bar{\chi}_{11}^{(1)} &= \bar{\chi}_{010}^{(2)} + \bar{\chi}_{001}^{(2)} & \Rightarrow \bar{\chi}_{001}^{(2)} &= \frac{d-6}{4}\bar{\chi}_{01}^{(1)} \\ (d-6)\bar{\chi}_{01}^{(1)} &= 4\bar{\chi}_{001}^{(2)} & \bar{\chi}_{010}^{(2)} &= \bar{\chi}_{11}^{(1)} + \frac{6-d}{4}\bar{\chi}_{01}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.110)$$

En base a nuestros cálculos, podemos concluir que imponer la invariancia conforme en el punto fijo y requerir que los operadores acoplados sean primarios restringe de manera importante la forma de los operadores compuestos de *scaling* compatibles. Asimismo, nos da la forma general de las funciones $\Gamma^{(n,1)}$ en el punto fijo, y nos permite extraer parte del espectro de dimensiones de los operadores de *scaling* en este límite.

Capítulo 5

N finito: resultados del Desarrollo en Gradientes

En este capítulo presentaremos los resultados numéricos obtenidos, empleando el desarrollo en gradientes, para valores finitos de N . Comenzaremos discutiendo generalidades del algoritmo empleado para la extracción de los exponentes críticos, el cual tiene tres grandes etapas: integración del flujo de renormalización, análisis de la matriz de estabilidad y refinamiento de las perturbaciones propias mediante operadores compuestos. Veremos cómo, al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$ y considerando fuentes para operadores compuestos, la simetría conforme sobre-determina al sistema, y nos brinda una restricción independiente, cuya igualdad es violada a este orden de la aproximación. En consecuencia, nos proporciona un criterio de optimización: buscar minimizar su ruptura. En base a este criterio, el Principio de Máxima Conformalidad, presentamos los resultados para múltiples valores de N , incluyendo los casos mencionados en el capítulo 1 con realizaciones experimentales, así como valores grandes de $N \in \{10, 20, 100\}$ donde compararemos con los resultados del desarrollo en $1/N$ para los modelos $\mathcal{O}(N)$. Veremos que para $N = 5$, el criterio derivado de la identidad conforme no puede ser empleado en plenitud, e identificamos el origen del problema. Compararemos los resultados arrojados por este criterio con los arrojados por el Principio de Mínima Sensibilidad (al regulador), notando que ambos producen resultados compatibles con sus barras de error en prácticamente todos los casos, así como con otras técnicas teóricas y resultados experimentales.

5.1. Implementación del desarrollo en gradientes: algoritmo de determinación de los exponentes críticos

En esta sección comentaremos el algoritmo empleado para resolver numéricamente el desarrollo en gradientes del NPRG. No se trata de un método original, sino que ya ha sido implementado en numerosas ocasiones por varios grupos de investigación de la comunidad científica (incluyendo el nuestro) como discutimos en el capítulo 2. La versión particular es la utilizada en [70]. El procedimiento tiene, *grosso modo*, tres etapas. Veamos esquemáticamente cada una de ellas.

Dicotomización del flujo de renormalización

Una vez se dispone de las ecuaciones de evolución con la escala del NPRG de las diferentes funciones del *ansatz* (2.79) de la DE

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ U_k(\rho) + \frac{Z_k(\rho)}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{Y_k(\rho)}{4} (\nabla \rho)^2 \right\}, \quad (5.1)$$

que podemos obtener como fue explicado en la sección 2.5, se realiza una búsqueda del punto crítico, partiendo de alguna teoría sencilla microscópica como φ^4 . Esta teoría posee un régimen crítico controlado por la clase de universalidad $O(N)$ por lo cual es un buen punto de partida. Escogemos una condición inicial microscópica del tipo:

$$\Gamma_\Lambda = \int_x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{r_0}{2} \vec{\phi}^2 + \frac{u_0}{4!} (\vec{\phi}^2)^2 \right\}. \quad (5.2)$$

Esto significa partir de condiciones iniciales para las funciones:

$$\begin{aligned} U_\Lambda(\rho) &= r_0 \rho + \frac{u_0}{6} \rho^2, \\ Z_\Lambda(\rho) &= 1, \\ Y_\Lambda(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A partir de esta configuración inicial, integramos numéricamente los flujos de U_k , Z_k e Y_k , que recordemos obtuvimos mediante una rutina de cálculo simbólico desarrollando los diagramas en p^2 . Las integrales de bucle resultantes de funciones de q^2 pueden ser resueltas numéricamente, por ejemplo en esta tesis mediante integración por cuadraturas Gaussianas adaptativas. La obtención de las ecuaciones toma un tiempo de CPU del orden de minutos, mientras que el proceso de dicotomización, de una hora.

El objetivo de esta etapa es obtener una aproximación inicial del Γ_k de punto fijo. Para poder evaluar la proximidad al punto fijo, es necesario estudiar qué sucede con las

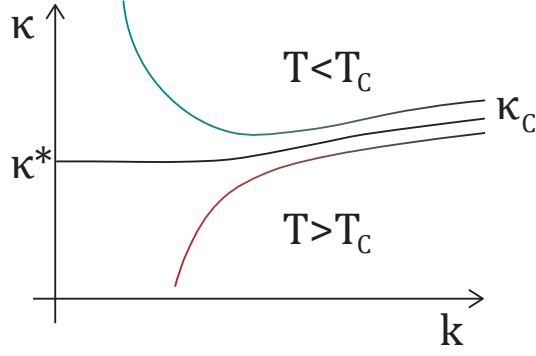


Figura 5.1: Flujo del mínimo adimensionado κ del potencial adimensionado $\tilde{U}_k(\tilde{\rho})$ para tres condiciones iniciales diferentes del flujo de renormalización. En el centro vemos la trayectoria seguida partiendo desde el valor crítico κ_C , correspondiente al punto crítico de la teoría $T = T_C$. Por encima y debajo vemos condiciones iniciales para temperaturas levemente por encima y debajo de T_C , que fluyen respectivamente hacia las fases de alta y baja temperatura.

magnitudes adimensionadas a lo largo de la integración del flujo. Por ejemplo, se puede estudiar qué sucede con el mínimo adimensionado del potencial – el campo $\tilde{\rho}_0 \equiv \kappa$ donde $\tilde{U}_k(\tilde{\rho})$ se minimiza. Naturalmente, para combinaciones arbitrarias de r_0 y u_0 el punto de partida no corresponderá al punto crítico de la teoría – y el flujo divergirá, o a la fase de alta, o a la de baja, temperatura. Recordemos de nuestra discusión acerca del flujo de renormalización en el capítulo 2 que S_∞ , la superficie crítica, es repulsiva bajo el flujo de renormalización. Si la teoría microscópica no comienza exactamente en el punto crítico, terminará alejándose de S_∞ hacia alguna de las dos fases del sistema. Vemos esquemáticamente este comportamiento en la figura 5.1. El proceso de dicotomización consiste en realizar un ajuste del punto de partida del flujo de manera de acercarse a los valores críticos r_C y u_C , lo cual conlleva a trayectorias que se acercan, progresivamente, cada vez más al punto fijo antes de diverger hacia alguna de las fases atractivas. Vale la pena mencionar que alcanza con ajustar uno solo de los parámetros dejando el otro fijo para alcanzar un punto crítico. Este procedimiento se realiza hasta obtener alguna condición inicial aceptable cuyo flujo permanezca un “tiempo de renormalización” suficientemente largo cerca de S_∞ y se acerque razonablemente al punto fijo – donde por ejemplo se puede buscar que la variación de las funciones $\tilde{U}_k$, $\tilde{Z}_k$ e $\tilde{Y}_k$ al realizar un paso $k \rightarrow k - \delta k$, comparada con el valor de las funciones en escala k , sea menor que cierto valor umbral, para establecer un criterio.

Análisis de estabilidad alrededor del punto fijo

Una vez disponemos de la estimación de las funciones de punto fijo, utilizamos el algoritmo de refinamiento de Newton-Raphson. Puesto que trabajamos con una discretización del campo ρ y calculamos las derivadas de las funciones mediante diferencias finitas, es posible expresar la ecuación de punto fijo (2.60) como:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_1^U(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \\ \vdots \\ \beta_{N_\rho}^U(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} \beta_1^Z(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \\ \vdots \\ \beta_{N_\rho}^Z(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} \beta_1^Y(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \\ \vdots \\ \beta_{N_\rho}^Y(U_k(0), \dots, Z_k(0), \dots, Y_k(N_\rho \Delta \rho)) \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\beta}^U \\ \vec{\beta}^Z \\ \vec{\beta}^Y \end{pmatrix} \equiv \vec{\beta} = 0. \quad (5.4)$$

Aquí hemos omitido los “tildes” para aliviar la notación, pero en lo que sigue referiremos a variables adimensionadas. Tratándose de la ecuación de punto fijo, la función β debería anularse si evaluamos en U_k^* , Z_k^* e Y_k^* , las soluciones del mismo. Por ende, se trata de un problema de búsqueda de raíces $\vec{\beta} = 0$, de una función de $3N_\rho - 1$ variables, si discretizamos ρ en N_ρ puntos¹. Partiendo de la solución hallada por dicotomización, se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para buscar minimizar aún más esta diferencia. Para determinar que el algoritmo ha convergido, se puede evaluar por ejemplo el cociente entre la variación arrojada por el método de Newton-Raphson y el valor actual de las funciones, hasta reducir esto por debajo de algún umbral. Lo útil de esta formulación es que permite extraer los exponentes críticos de la teoría de forma natural, ya que el algoritmo aproxima numéricamente la matriz de estabilidad alrededor del punto fijo en cada paso hasta converger. De este modo, obtenemos las funciones U_k , Z_k e Y_k del punto fijo y al mismo tiempo una primer aproximación de las perturbaciones propias y sus respectivos autovalores. Con estas estimaciones de los valores y vectores propios, se realiza la tercer etapa: flujo de los operadores compuestos.

Optimización mediante inclusión de operadores compuestos

Como hicimos en el estudio analítico del límite $N \rightarrow \infty$, el último paso del algoritmo consiste en incluir operadores compuestos. Esto tiene dos propósitos: obtener un algoritmo de optimización para determinar los valores propios de las perturbaciones alrededor del punto fijo y evaluar la satisfacción de la simetría conforme especial.

¹Observemos que al trabajar con magnitudes adimensionadas, necesitaremos estimar de forma simultánea la dimensión anómala *running* del campo η_k . Por ejemplo, para el adimensionamiento de $Z_k(\rho) = Z_k \tilde{z}_k(\tilde{\rho})$ con $\partial_t Z_k = -\eta_k Z_k$. Notemos que esta definición presenta una ambigüedad: el punto de renormalización en que escogemos, por ejemplo, $\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) \equiv 1$. Esto nos permite reducir el número de incógnitas, fijando $\tilde{z}_k$ en algún punto. La ecuación para dicho punto, con ahora $\tilde{z}_k$ es dada, nos permite estimar numéricamente η_k .

Veamos cómo funciona. Para empezar, el *ansatz* (5.2) se modifica a:

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ U_0(\rho) + \frac{Z_0(\rho)}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{Y_0(\rho)}{4} (\nabla \rho)^2 + K(x) \left(U_1(\rho) + \frac{Z_1(\rho)}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + \frac{Y_1(\rho)}{4} (\nabla \rho)^2 \right) - \Upsilon(\rho) \partial^2 K(x) \right\}. \quad (5.5)$$

Las ecuaciones de punto fijo de U_1 , Z_1 , Y_1 y Υ se pueden obtener con el mismo tipo de razonamiento expuesto en la sección 2.5, trabajando con los vértices $\Gamma_k^{(1,1)}$ y $\Gamma_k^{(2,1)}$ para extraer las de $W_1 \equiv \partial_\rho U_1$ y Υ' y las correspondientes a Z_1 e Y_1 , respectivamente. Cabe mencionar que las ecuaciones de invariancia por dilataciones – que como vimos en la sección 3.3.2 equivalen a la condición de punto fijo – para U_1 , Z_1 e Y_1 no dependen de Υ – por lo cual si nos limitamos a considerar las identidades de Ward producto de la simetría de dilataciones, podemos obtener un sistema cerrado de ecuaciones para U_0 , Z_0 , Y_0 , U_1 , Z_1 e Y_1 . La mayor importancia de Υ se debe a su aparición en la restricción conforme no trivial que existe a nivel de $\Gamma^{(1,1)}$.

Para determinar las funciones U_1 , Z_1 , Y_1 y Υ de punto fijo, partimos de las perturbaciones propias halladas en el paso anterior para las primeras tres y una constante para la última¹. Puesto que las ecuaciones involucran la dimensión del operador compuesto $d_{\mathcal{O}}$ – como podemos ver en el apéndice G – estimamos esta con los autovalores de las perturbaciones obtenidos del análisis de la matriz de estabilidad para las cantidades U_0 , Z_0 e Y_0 – empleando la relación entre la dimensión $d_{\mathcal{O}}$ y el valor propio de la perturbación propia del punto fijo λ , ecuación (3.44). Como las perturbaciones propias están definidas a menos de un factor global, podemos escoger algún valor de U_1 , Z_1 , Y_1 o Υ para algún $\rho = N_{\text{fix}} \Delta \rho$ de forma arbitraria – luego la perturbación propia se reescala de manera de que en ese punto dicha función no varíe en cada paso del algoritmo. Esto conduce a un problema de $4N_\rho - 1$ variables. Sin embargo, dado el rol que juega $d_{\mathcal{O}}$ en las ecuaciones de dilataciones, se puede reexpresar el problema en términos de $4N_\rho$ variables, donde una de ellas es $d_{\mathcal{O}}$. Nuevamente, la ecuación de punto fijo para estas cantidades se puede expresar como un sistema del tipo:

$$\vec{\beta}_1(d_{\mathcal{O}}, U_1(0), \dots, \Upsilon(N_\rho \Delta \rho); \vec{U}_0^*, \vec{Z}_0^*, \vec{Y}_0^*) = 0 \quad (5.6)$$

donde ahora β_1 es una función de $4N_\rho$ salidas y apelamos a una notación vectorial para no sobrecargar esta expresión – por ejemplo $\vec{U}_0^*$ refiere a $U_0^*(0), U_0^*(\Delta \rho), U_0^*(2\Delta \rho), \dots$, la solución numérica de punto fijo. En esta ecuación las cantidades U_0^* , Z_0^* e Y_0^* juegan un rol espectador, no son mejoradas al resolver este sistema mediante Newton-Raphson, y lo mismo sucede con el exponente crítico η , para el cual utilizamos la aproximación obtenida en el paso anterior. Algo a destacar de esta tercera y última etapa, es que

¹Ya que las funciones 1 corresponden a las perturbaciones de las 0. Por otro lado, Υ es una nueva función que surge al considerar los términos más generales con una fuente $K(x)$ y dos derivadas

la precisión y estabilidad obtenidas en $d_{\mathcal{O}}$ tras iterar el método de Newton-Raphson es mucho mayor que la que uno logra en λ mediante el análisis de autovalores de la matriz de estabilidad. Luego, permite refinar los resultados obtenidos previamente para los autovalores de las distintas perturbaciones propias.

Vale la pena mencionar que en las dos últimas etapas, antes de realizar los cálculos definitivos, se realiza un estudio de los diferentes parámetros de la aproximación, como N_{ρ} , $\Delta\rho$, $\rho_{\max}$ y los parámetros de la integración numérica de los bucles, para maximizar la precisión y estabilidad numérica del cálculo y en simultáneo optimizar el costo del mismo. En cuanto al tiempo de cálculo que las dos últimas etapas suponen, fue del orden ~ 36 -72 horas, dependiendo del N considerado, sin realizar una optimización de la rutina de integración, que podría reducirlo en un factor de orden 2 [65]. Con esto, concluye la descripción que daremos del algoritmo empleado en este trabajo. Ahora pasaremos a discutir la ventaja más destacable, a los efectos de esta tesis, que supone incluir operadores compuestos: la existencia de una restricción no trivial proveniente de la identidad de Ward-Takahashi conforme especial al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$.

5.2. Principio de Máxima Conformalidad

En esta sección discutiremos un criterio, alternativo al ya mencionado PMS, para determinar un exponente crítico – que depende espuriamente del parámetro α del regulador por las aproximaciones realizadas – proveniente de la simetría bajo transformaciones conformes especiales: el *Principio de Máxima Conformalidad*.

Una de las consecuencias de suponer la simetría conforme en el régimen crítico de los modelos $O(N)$ es que disponemos de un nuevo conjunto de identidades de Ward-Takahashi para determinar las funciones de punto fijo. Sin embargo, con las identidades de dilataciones para $\Gamma_k^{(1,0)}$, $\Gamma_k^{(2,0)}$, $\Gamma_k^{(1,1)}$ y $\Gamma_k^{(2,1)}$ alcanza para determinar todas las funciones del *ansatz* (5.5) – lo cual obedece a una propiedad más general: las identidades de Ward de dilataciones, junto a la regularidad de la acción efectiva promedio Γ_k permiten determinar esta para cualquier esquema de aproximación razonable. Las identidades de Ward-Takahashi bajo SCT para $\Gamma_k^{(1,0)}$ y $\Gamma_k^{(2,0)}$ se satisfacen trivialmente al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. Sin la inclusión de operadores compuestos es necesario trabajar al orden $\mathcal{O}(\partial^4)$ para obtener restricciones conformes no triviales para funciones de vértice $\Gamma^{(n,0)}$ [70] – a nivel de $\Gamma^{(2,0)}$ ya vimos en 4.2 que la identidad conforme especial no contiene ninguna información adicional respecto a dilataciones y rotaciones, por lo cual es necesario ir al siguiente orden del desarrollo en gradientes.

La gran ventaja de incluir operadores compuestos en nuestro *ansatz* (5.5), más allá de haber obtenido un método para refinar el cálculo de los exponentes críticos, es que se obtiene una restricción proveniente de la simetría bajo transformaciones conformes especiales no trivial al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. En consecuencia, tendremos un sistema

sobredeterminado que nos permitirá tener un nuevo criterio para elegir el parámetro α óptimo del regulador: aquel para el cual la identidad no impuesta es mejor satisfecha. En otras palabras, para analizar el comportamiento asociado a un operador compuesto cualquiera disponemos de 7 funciones a determinar, y 8 ecuaciones independientes para imponer. Utilizando las 7 identidades de dilataciones, determinamos las funciones del *ansatz*. La identidad de Ward-Takahashi para SCT de $\Gamma_k^{(1,1)}$ no será satisfecha exactamente por las soluciones halladas debido a las aproximaciones. Esta luce:

$$C_L(\rho) = C_R(\rho), \quad (5.7)$$

en donde C_L corresponde a un término “dimensional” y C_R a un término con integrales de diagramas. Los lados de la igualdad vienen dados por:

$$C_L(\rho) = (4d_{\mathcal{O}} - d - 4) \Upsilon'(\rho) - 2d_{\phi} (Z_1(\rho) + \rho Y_1(\rho)), \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} C_R(\rho) = \int_q \dot{R}_k(q) \Bigg\{ & -\frac{G_{\parallel}(q^2)^3}{d} \left[d \left(3U_0''(\rho) + 2\rho U_0^{(3)}(\rho) \right) (Z_1(\rho) + \rho Y_1(\rho)) \right. \\ & (Z_0'(\rho) + \rho Y_0'(\rho)) \left((4d+2) (Z_1(\rho) + \rho Y_1(\rho)) q^2 + 3d (U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho)) \right) \\ & + Y_0(\rho) (2(2d+1) (\rho Y_1(\rho) + Z_1(\rho)) q^2 + 3d (U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho))) \Big] \\ & - \frac{G_{\parallel}(q^2)^2}{d} \left[(Z_0'(\rho) + \rho Y_0'(\rho)) (4Z_1(\rho) G_{\parallel}''(q^2) q^6 + 2(4+d) Z_1(\rho) G_{\parallel}'(q^2) q^4 \right. \\ & + 4U_1'(\rho) G_{\parallel}''(q^2) q^4 + 8\rho G_{\parallel}''(q^2) U_1''(\rho) q^4 + 2(d+1) G_{\parallel}'(q^2) U_1'(\rho) q^2 \\ & + 4(d+1) \rho G_{\parallel}'(q^2) U_1''(\rho) q^2 + 12 (Z_1(\rho) q^2 + U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho)) G_{\parallel}''(q^2) U_0''(\rho) q^2 \\ & + 6(d+3) Z_1(\rho) G_{\parallel}'(q^2) U_0''(\rho) q^2 + 2Y_0(\rho) (Z_1(\rho) (2G_{\parallel}''(q^2) q^2 \\ & + (d+4) G_{\parallel}'(q^2)) q^2 + (2G_{\parallel}''(q^2) q^2 + (d+1) G_{\parallel}'(q^2)) (U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho))) q^2 \\ & - (d+1) (Z_1'(\rho) + \rho Y_1'(\rho)) + 6d (U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho)) G_{\parallel}'(q^2) U_0''(\rho) \\ & + 4\rho (Z_1(\rho) (2G_{\parallel}''(q^2) q^2 + (d+3) G_{\parallel}'(q^2)) q^2 + (2G_{\parallel}''(q^2) q^2 \\ & + dG_{\parallel}'(q^2)) (U_1'(\rho) + 2\rho U_1''(\rho))) U^{(3)}(\rho) + Y_1(\rho) (2q^2 \rho ((2G_{\parallel}''(q^2) q^2 \\ & + (d+4) G_{\parallel}'(q^2)) Y_0(\rho) q^2 + 2G_{\parallel}''(q^2) ((\rho Y_0'(\rho) + Z_0'(\rho)) q^2 + 3U_0''(\rho) + 2\rho U^{(3)}(\rho)) q^2 \\ & + G_{\parallel}'(q^2) ((d+4) (Z_0'(\rho) + \rho Y_0'(\rho)) q^2 + (d+3) (3U_0''(\rho) + 2\rho U^{(3)}(\rho)))) - d) \Big] \\ & - \frac{N-1}{d} G_{\perp}(q^2)^3 [-dZ_0'(\rho) U_1'(\rho) + 2dY_0(\rho) (Z_1(\rho) q^2 + U_1'(\rho)) + Z_1(\rho) (2Z_0'(\rho) q^2 \\ & + dU_0''(\rho))] + \frac{N-1}{2d} G_{\perp}(q^2)^2 [dY_1(\rho) - 4 [(Z_1(\rho) q^2 + U_1'(\rho)) G_{\perp}''(q^2) (q^2 Z_0'(\rho) + U_0''(\rho)) \\ & + G_{\perp}'(q^2) (U_1'(\rho) ((1+d) q^2 Z_0'(\rho) + dU_0''(\rho)) + q^2 Z_1(\rho) ((4+d) q^2 Z_0'(\rho) + (3+d) U_0''(\rho)))] \Big] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como vemos, esta identidad acopla Υ a las demás funciones del *ansatz* a través de su lado izquierdo, lo cual no sucede en el lado derecho, que no depende de Υ , ni tampoco en las ecuaciones para dilataciones de las funciones U_1 , Z_1 e Y_1 .

5.2.1. Análisis de la identidad conforme: Principio de Máxima Conformalidad

Presentaremos ahora el criterio para escoger el regulador imponiendo que la ruptura de la identidad no trivial de simetría conforme sea rota lo menos posible – es decir, el Principio de Máxima Conformalidad [70, 79]. Esto significa determinar el parámetro α_{opt} del regulador tal que la ruptura de (5.7) se minimiza, y tomar como la predicción del exponente crítico en consideración, el calculado con el regulador parametrizado por dicho α_{opt} . En este trabajo exploramos el regulador exponencial y el regulador de Wetterich introducidos en 2.2 – que han sido empleados exitosamente antes en la literatura [81, 64, 82, 49]

Para estudiar la ruptura de la identidad (5.7), es útil estudiar el comportamiento de las funciones $U_1(\rho)$, $Z_1(\rho)$, $Y_1(\rho)$ y $\Upsilon(\rho)$ para campos grandes, lo cual puede extraerse de sus ecuaciones de flujo. Los lados derechos de estas ecuaciones para campos grandes se tornan despreciables, y el régimen de punto fijo es controlado por el lado izquierdo de las ecuaciones de flujo. Se obtiene:

$$\begin{aligned} U_1(\rho) &\underset{\rho \gg 1}{\sim} A_{U_1} \rho^{d_{\mathcal{O}}/2d_\phi}, \\ Z_1(\rho) &\underset{\rho \gg 1}{\sim} A_{Z_1} \rho^{(d_{\mathcal{O}}-2-2d_\phi)/2d_\phi}, \\ Y_1(\rho) &\underset{\rho \gg 1}{\sim} A_{Y_1} \rho^{(d_{\mathcal{O}}-2-4d_\phi)/2d_\phi}, \\ \Upsilon(\rho) &\underset{\rho \gg 1}{\sim} A_\Upsilon \rho^{(d_{\mathcal{O}}-2)/2d_\phi}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Debido a que tenemos un factor global de normalización de las autoperturbaciones que se puede escoger de forma arbitraria, en realidad solo tres cocientes de estos A 's son significativos. Sus valores, escogido un criterio de normalización¹, quedan determinados por el comportamiento en campos intermedios donde no vale (5.10). La restricción adicional conforme (5.8) implica que A_{Z_1} , A_{Y_1} y A_Υ no son cantidades independientes, como se podría prever *a priori*, sino que se vinculan según:

$$(4d_{\mathcal{O}} - d - 4)(d_{\mathcal{O}} - 2)A_\Upsilon = 4d_\phi^2(A_{Z_1} + A_{Y_1}), \tag{5.11}$$

dado que se puede despreciar el lado derecho frente al izquierdo para $\rho \gg 1$.

Existe una consecuencia importante del comportamiento en campos grandes de las funciones del *ansatz* (5.10): el lado izquierdo de la restricción conforme especial se

¹En este trabajo, se utilizó siempre que era posible, el criterio $W_1(0) = U_1'(0) = 1$. Excepcionalmente, para el caso $N = -2$, se utilizó un punto intermedio de la grilla en ρ para fijar el valor de W_1 en 1. Esto se debe a que para $N = -2$, el potencial presenta su mínimo en 0, y por ende $W_1(0) = 0$.

comporta para $\rho \gg 1$ como

$$C_L(\rho) \propto \rho^{(d_{\mathcal{O}} - 2 - 2d_{\phi})/2d_{\phi}}, \quad (5.12)$$

que crece con el campo si $\lambda = d - d_{\mathcal{O}} < -\eta$, lo cual es el caso para todas las perturbaciones irrelevantes del punto fijo¹. Por otro lado, para la perturbación relevante, aquella correspondiente al exponente crítico ν , la desigualdad no se satisface, y la restricción de Ward tiende automáticamente a cero a campos grandes. Resulta conveniente deshacerse de este comportamiento de campos grandes, para perturbaciones relevantes e irrelevantes, mediante una normalización adecuada de la identidad (5.7). Por un lado, esto nos permite analizar simultáneamente y comparar los resultados para ambos tipos de perturbaciones. Por otro, uniformiza criterios con otros trabajos del grupo hechos en esta línea [70, 79]. A estos efectos definiremos

$$f(\rho; \alpha) = [C_L(\rho) - C_R(\rho)] \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2d_{\phi} + 2 - d_{\mathcal{O}}}{2d_{\phi}}}, \quad (5.13)$$

de modo que f tienda, para campos grandes, a una constante. En esta definición, ρ_0 refiere a una escala característica del sistema, que elegimos como el mínimo del potencial² $U'_0(\rho_0) = 0$. Agregamos este parámetro por dos motivos: para que el factor de normalización tienda a 1 para campos pequeños, donde la restricción no presenta los problemas de campos grandes, y para, al re-escalar por factor, obtener un comportamiento para campos grandes menos dependiente en α , puesto que $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$.

En este trabajo utilizaremos la simetría conforme para eliminar la dependencia espuria en el parámetro α del regulador, del cual dependen *a priori* las cantidades físicas, como los exponentes críticos predichos por el desarrollo en gradientes. La idea, similar a la utilizada en [70, 79] es fijar el valor de α como aquel en el cual $f(\rho = 0; \alpha)$ se minimiza, buscando la mejor satisfacción de la simetría conforme especial. Esta es la manera precisa en que implementamos el Principio de Máxima Conformalidad. En las figuras 5.2 y 5.3 vemos el comportamiento de $f(\alpha, \rho)$ para ν y para un exponente que aún no habíamos introducido, la primer corrección al *scaling*, ω , con $N = 2$. En ambos casos, la función no cruza el 0 para el espacio de parámetros estudiado, pero sí se minimiza al analizar $f(\alpha, \rho = 0)$. Lo mismo sucede con ν para todos los valores de N estudiados; en la figura 5.4 vemos el comportamiento para $N = 100$. Sin embargo, para ω el comportamiento para N grande cambia, y f sí presenta un valor nulo en $\rho = 0$, lo cual vemos en la figura 5.5. Un aspecto común a ambos valores, 2 y 100, es que

¹Salvo casos particulares donde una perturbación es marginalmente irrelevante. Numéricamente esto se vería como una perturbación o muy levemente relevante, o muy levemente irrelevante. En los casos que estudiamos no hay perturbaciones de este tipo.

²En el caso $N = -2$, se escogió otro criterio por ser $\rho_0 \approx 0$. En tal caso, se tomo el mínimo de la función Y_1 .

$\alpha_{\text{PMC}} \sim \alpha_{\text{PMS}}$, y esto vale para todos los N que estudiaremos. Por último, respecto al comportamiento global para todo N , vale la pena destacar que, con N dado, siempre la identidad para ν es satisfecha de mejor manera que la respectiva para ω , lo cual puede deberse a no haber absorbido completamente la tendencia automática a 0 del lado izquierdo. Ahora veremos los resultados para los valores de N estudiados.

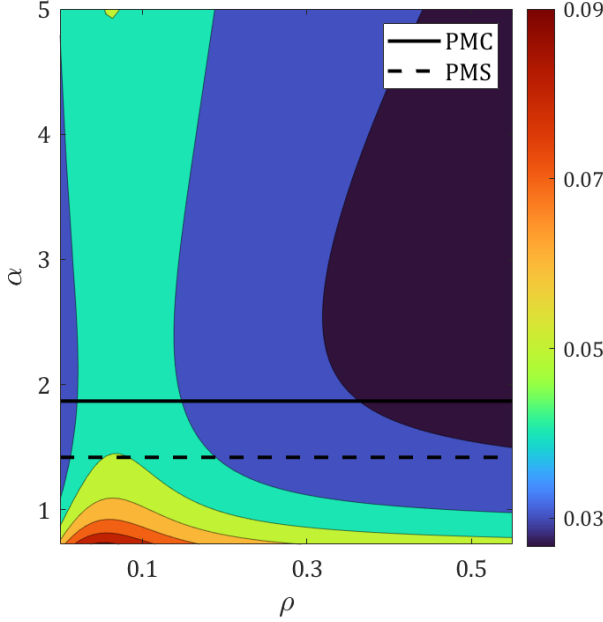


Figura 5.2: Función $f(\alpha, \rho)$, con regulador exponencial, para el exponente crítico ν en el caso $N = 2$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La restricción conforme no se anula, presenta un mínimo local para $\rho = 0$.

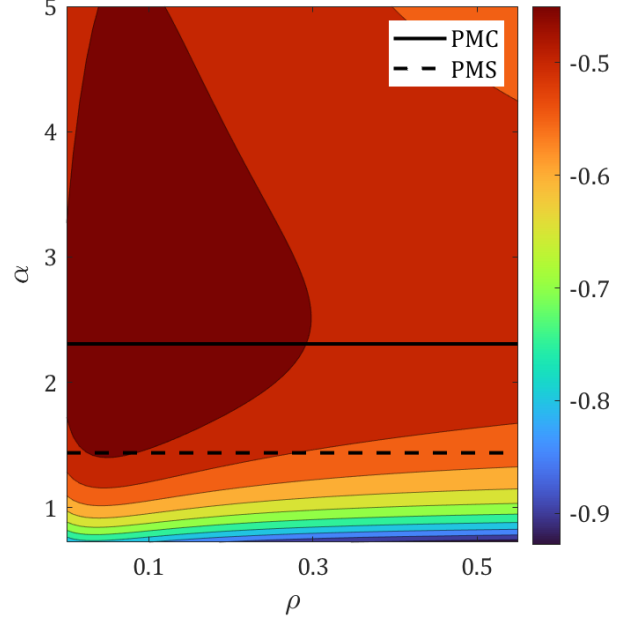


Figura 5.3: Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ω en el caso $N = 2$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La restricción conforme especial presenta un mínimo local para $\rho = 0$.

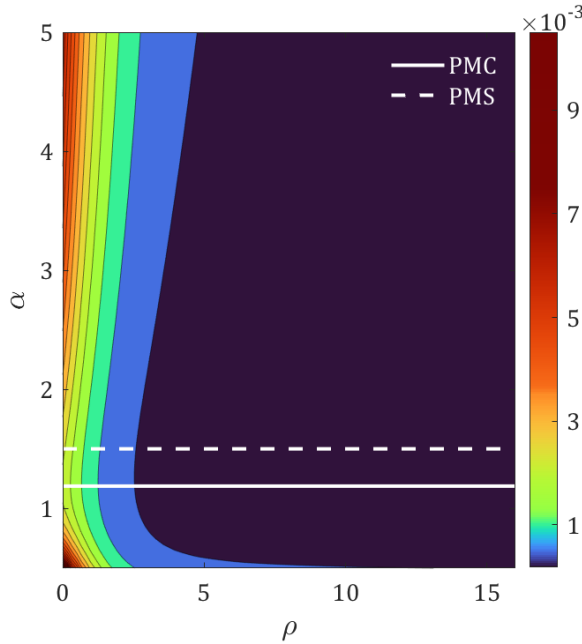


Figura 5.4: Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ν con $N = 100$. En líneas blancas continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La identidad presenta un mínimo para $\rho = 0$.

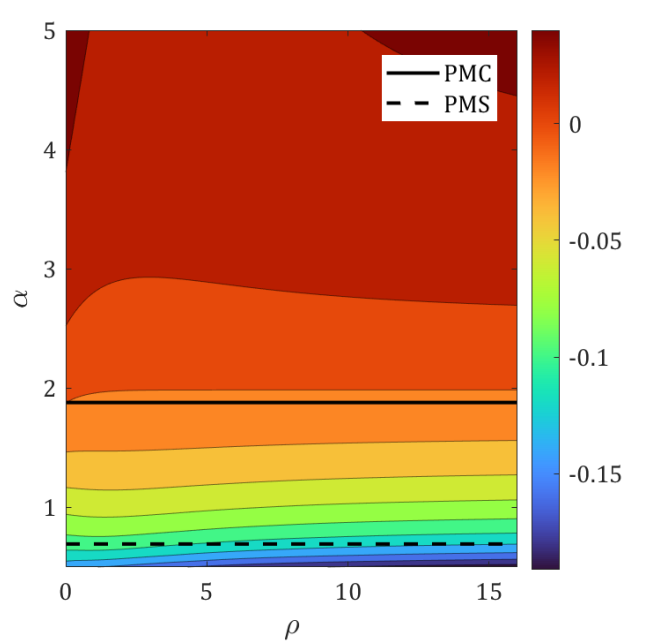


Figura 5.5: Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ω con $N = 100$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La identidad cruza el valor 0 para $\rho = 0$.

5.3. Exponentes críticos para los modelos $O(N)$

A continuación presentamos y analizamos los resultados obtenidos del exponente relevante ν y la primer corrección a las leyes de escala, el exponente ω , para múltiples valores de N . Comenzaremos con los casos de mayor interés físico, $N = 1, 2, 3, 4$, luego veremos casos de N grande, con $N = 5, 10, 20, 100$, y finalmente veremos dos casos particulares no unitarios $N = 0, -2$.

Siempre que los resultados lo sugieren, empleamos el criterio optimista para la determinación del valor central y las barras de error del método explicado en la sección 2.5.2. Este es el caso para valores moderados, y positivos, de N . En particular, fue el criterio adoptado para $1 \leq N \leq 5$. Para valores de N mayores, y para los casos no unitarios, los resultados no parecen sugerir que los órdenes sucesivos del desarrollo en gradientes provean cotas alternadas para el valor de los exponentes críticos – según lo que observamos y lo reportado en [49]. En consecuencia, para estos casos se emplea el criterio más conservador de estimación de valor central y barras de error explicado en 2.5.2. Salvo en el caso $N = 5$, donde el criterio PMC no está bien definido, siempre resultó posible determinar tanto ν como ω pidiendo minimizar la ruptura de la identidad conforme especial. Simultáneamente, al no estar reportados a la fecha los resultados según el PMS utilizando la versión *full* de las ecuaciones de flujo, presentamos también los resultados obtenidos empleando este criterio. Esto nos permite comparar las predicciones PMC y PMS para las mismas ecuaciones de flujo.

Para los diversos valores de N estudiados en esta tesis, reportamos resultados publicados de diferentes técnicas de cálculo, desde resultados de cotas exactas del *conformal bootstrap*, simulaciones Monte-Carlo, hasta resultados experimentales para transiciones en las clases de universalidad $O(N)$. Asimismo presentamos resultados del desarrollo en gradientes al orden $\mathcal{O}(\partial^4)$ obtenidos con la versión *strict* de las ecuaciones de flujo [82, 49]. Vale la pena destacar que las barras de error para los diferentes resultados reportados tienen interpretaciones diferentes. Para los resultados del *conformal bootstrap* CB acerca de ν , para $N > 0$, se tienen cotas rigurosas y por ende las barras de error son estrictas: el exponente está acotado entre los extremos del intervalo. Sin embargo, las predicciones para $N = 0$ y para ω no son tan rigurosas. Los resultados de simulaciones Monte-Carlo MC presentan barras de error estadísticas, que están controladas, pero solo deben interpretarse probabilísticamente¹. Las barras de error para otros métodos, como el Desarrollo en Gradientes, el desarrollo en alta temperatura, o teoría de perturbaciones, no tienen el mismo tipo de rigor, pues provienen del análisis de órdenes sucesivos de cada técnica y de algunas propiedades de su convergencia – como por ejemplo el factor de $1/4$ entre órdenes sucesivos para el Desarrollo en Gradientes.

¹Para estas simulaciones, existe también otra importante fuente de error: los efectos por tamaño finito, que son tenidos en cuenta para estimar las barras de error.

5.3.1. N=1

Comencemos por los resultados correspondientes a la clase de universalidad de Ising, presentados en la tabla 5.1. Se trata de un sistema ya previamente estudiado en este enfoque, empleando el PMC [70, 79]. Incluimos este valor de N pues se trata de un caso de control con múltiples resultados teóricos y experimentales disponibles. En este trabajo, como hemos mencionado, utilizamos los reguladores exponencial y de Wetterich, cuyas predicciones utilizamos para construir el valor central y la barra de error de ν y ω . En vistas del comportamiento que observamos en este trabajo, y lo que se obtiene en [49], para ν hay fuertes indicios hacia que la DE provee cotas superiores e inferiores, alternando en cada orden sucesivo, al menos hasta el orden $\mathcal{O}(\partial^4)$. Esto nos permite utilizar el criterio más optimista para determinar tanto el valor central como la barra de error. Por otro lado, para ω , esto no parece ser el caso, lo cual nos conduce a utilizar el criterio más conservador para su determinación

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.6308(27)	0.849(49)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.6309(27)	0.848(49)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.6308(27)	0.870(55)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.62989(25)	0.832(14)
$\mathcal{O}(\partial^6)_{\text{sPMS}}$	0.63012(16)	
CB	0.629971(4)	0.82968(23)
6-loop	0.6304(13)	0.799(11)
ϵ -exp, ϵ^5	0.6290(25)	0.814(18)
ϵ -exp, ϵ^6	0.6292(5)	0.820(7)
High T	0.63012(16)	0.83(5)
MC	0.63002(10)	0.832(6)
L-G (D ₂ O)	0.62(3)	
Mix	0.636(31)	
Ising (FeF ₂)	0.64(1)	

Tabla 5.1: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 1$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. Con los subíndices f y s indicamos la versión de las ecuaciones usada. También incluimos los resultados obtenidos para varios órdenes de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [82, 49]. Se incluyen para comparar los resultados de CB ([83] para ν y [84] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], MC [87] y desarrollo de alta temperatura [88]. También los resultados experimentales más precisos de: punto crítico de una sustancia pura [18], transición de mezcla [89] y materiales ferromagnéticos uniaxiales [90].

Contrastemos nuestros resultados usando el PMC con los demás disponibles. Una primer observación es la compatibilidad con los obtenidos según el PMS – los valores centrales difieren en valores $\lesssim 0,1\%$, es decir un orden de magnitud menor que las barras de error, que a su vez son prácticamente iguales – lo cual sugiere compatibilidad

entre los métodos. Si comparamos nuestros resultados con los obtenidos a partir de las versiones *strict* de las ecuaciones, vemos que tanto para ν como para ω , hay una excelente coincidencia también, lo que es esperable pues ambas versiones difieren en términos de orden $\mathcal{O}(\partial^4)$. Si comparamos con los demás métodos, vemos que nuestros exponentes según PMC son compatibles con los estudios más precisos, en particular los del CB, aunque nuestras barras de error son en general más grandes, en particular varios órdenes de magnitud mayores que las del CB y de los cálculos Monte-Carlo.

Para cerrar esta subsección, cabe señalar que el propósito de este trabajo no es alcanzar altos niveles de precisión, sino que testear la calidad del procedimiento PMC y compararlo con el PMS. Para lograr un estudio de precisión, habría que trabajar con órdenes sucesivos de la DE utilizando el PMC, una vez establecida su aplicabilidad.

5.3.2. N=2

El caso $N = 2$, como vimos en 1.1, se trata de una clase de universalidad con múltiples realizaciones experimentales, sobre la cual se dispone de precisos resultados teóricos y experimentales. Sobre estos resultados, vale la pena destacar que existe cierta controversia acerca del valor aceptado de ν . Los resultados experimentales más precisos a la fecha [31, 91] provenientes del estudio de la transición λ del He-4 no coinciden entre sí, y también presentan discrepancias con los resultados teóricos más precisos disponibles, provenientes del CB [92], de simulaciones MC recientes [93, 94] y del estudio previo del DE [49]. De hecho no existe consenso entre los resultados provenientes de simulaciones MC, pues algunos sí resultan compatibles con la evidencia experimental [95]; aunque se puede decir que las simulaciones más precisas a la fecha están en discrepancia con los experimentos.

En la tabla 5.2 presentamos nuestros resultados finales, con sus barras de error, extraídos tanto por el PMC como por PMS. De la misma manera que para $N = 1$, para el autovalor relevante ν los órdenes sucesivos de la DE parecen arrojar cotas alternadas para el exponente crítico, lo cual nos permite utilizar el criterio optimista para la determinación de su valor y de las barras de error. Por otro lado, no tenemos este comportamiento para ω , en base a nuestros resultados y los previamente obtenidos en [49]. Por lo tanto para el exponente de corrección al escaleo ω , utilizamos nuevamente el criterio conservador. Tenemos total coincidencia entre los resultados obtenidos según PMC y PMS. Asimismo, las diferencias entre la versión *full* de las ecuaciones y los reportados para la versión *strict* son mínimas, bien por dentro de las barras de error.

Al comparar nuestros resultados con otros métodos teóricos, los resultados son totalmente compatibles. Vemos que la precisión alcanzada es un orden de magnitud peor que la de los desarrollos perturbativos de mayor orden, lo cual seguramente sea mejorable trabajando al siguiente orden de la DE – como se puede ver de los resultados

al orden $\mathcal{O}(\partial^4)$. Asimismo, al comparar con los resultados más precisos del CB (para ν) y de simulaciones MC, nuevamente hay al menos un orden de magnitud menos en nuestra precisión. En cuanto a la controversia acerca de ν , nuestra predicción es compatible con los resultados teóricos más precisos a la fecha, y no permite discernir entre los resultados experimentales, pues es compatible con ambos. Cabe destacar que los resultados [49] al orden $\mathcal{O}(\partial^4)$ sí permiten posicionarse sobre la contradicción, por lo que posiblemente haya que ir al siguiente orden trabajando con el PMC para poder aportar a la discusión al respecto.

A pesar de la mayor precisión de los métodos Monte-Carlo o del *conformal bootstrap*, vale la pena destacar que el análisis completo de esta clase de universalidad: búsqueda del punto fijo, análisis de la matriz de estabilidad variando α y posterior estudio de las funciones del *ansatz* vinculadas a los operadores compuestos se realizó en una computadora de uso doméstico en un lapso del orden de 24 horas. En comparación con los tiempos de cálculo característicos de los otros métodos, nuestro procedimiento resulta significativamente menos costoso en tiempo y recursos de cálculo.

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.6726(52)	0.786(29)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.6727(52)	0.787(30)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.6725(52)	0.798(34)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.6716(6)	0.791(8)
CB (2016)	0.6719(12)	0.811(19)
CB (2019)	0.6718(1)	0.794(8)
6-loop	0.6703(15)	0.789(11)
ϵ -exp, ϵ^5	0.6680(35)	0.802(18)
ϵ -exp, ϵ^6	0.6690(10)	0.804(3)
MC + High T	0.6717(1)	0.785(20)
MC (2019)	0.67169(7)	0.789(4)
Helio-4 (2003)	0.6709(1)	
Helio-4 (1984)	0.6717(4)	
XY-AF (CsMnF ₃)	0.6710(7)	
XY-AF (SmMnO ₃)	0.6710(3)	
XY-F (Gd ₂ IFe ₂)	0.671(24)	
XY-F (Gd ₂ ICo ₂)	0.668(24)	

Tabla 5.2: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 2$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB de 2016 ([92] para ν y [96] para ω) y 2019 [97], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], análisis combinado de MC con el desarrollo de alta temperatura [98] y MC de 2019 [93]. Asimismo reportamos los resultados experimentales más precisos para las transiciones: He-4 superfluido [31, 91], antiferromagnética (CsMnF₃ [99] y SmMnO₃ [100]) y ferromagnética (Gd₂IFe₂ y Gd₂ICo₂ de [101]).

5.3.3. N=3 y 4

Analicemos ahora dos clases de universalidad interesantes, con realizaciones físicas: la clase de Heisenberg, que describe, como vimos, a los imanes isotrópicos, y la clase $O(4)$. Nuevamente, junto con nuestros resultados, presentamos los resultados de métodos teóricos más precisos disponibles, así como las mejores mediciones experimentales existentes – para la clase $O(3)$. Vemos estos valores en las tablas 5.3 y 5.4. Para la determinación de ν , utilizamos nuevamente el criterio optimista de determinación de valor central y barras de error, producto de analizar nuestros resultados y los de [49]. Para el caso de ω , utilizamos el criterio más conservador para su valor central, mientras que para sus barras de error, fue preciso utilizar el criterio discutido en 2.5.2 para aquellos casos en los cuales el decrecimiento de la barra de error deja de ser monótono. Puesto que para estos dos valores de N – así como para el PMS con $N = 5$ – se obtiene, mediante el método conservador, barras de error menores a las de $N = 10$, utilizamos las correspondientes a este último valor para estimar la precisión en estos casos.

Al orden trabajado, obtenemos para ν resultados compatibles con los demás métodos y con niveles de precisión muy parecidos a los resultados perturbativos y los provenientes del CB. Sigue existiendo una diferencia, ahora menor, en nuestra precisión al comparar con los resultados de simulaciones MC, aunque los resultados son compatibles entre sí. Nuevamente, PMS y PMC arrojan resultados absolutamente equivalentes, y muy parecidos a los obtenidos con las ecuaciones *strict*. Para $N = 3$, vemos que nuestra predicción es también compatible con los resultados experimentales obtenidos de sistemas ferromagnéticos.

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.7125(71)	0.744(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.7126(71)	0.746(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.7125(71)	0.754(34)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.7114(9)	0.769(11)
CB	0.7120(23)	0.791(22)
6-loop	0.7073(35)	0.782(13)
ϵ –exp, ϵ^5	0.7045(55)	0.794(18)
ϵ –exp, ϵ^6	0.7059(20)	0.795(7)
MC	0.7116(10)	0.773
MC + High T	0.7112(5)	
Ferro Gd ₂ BrC	0.7073(43)	
Ferro Gd ₂ IC	0.7067(60)	
Ferro CdCr ₂ Se ₄	0.656(56)	

Tabla 5.3: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 3$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB ([92] para ν y [96] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], análisis combinado de MC con el desarrollo de alta temperatura [102] y MC ([103] para ν y [104] para ω). También reportamos los resultados experimentales más precisos para la transición ferromagnética ([105] para Gd₂BrC y Gd₂IC y [106] para CdCr₂Se₄).

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.749(8)	0.723(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.749(8)	0.723(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.749(8)	0.731(34)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.7478(9)	0.761(12)
CB	0.7472(87)	0.817(30)
6-loop	0.741(6)	0.774(20)
ϵ -exp, ϵ^5	0.737(8)	0.795(30)
ϵ -exp, ϵ^6	0.7397(35)	0.794(9)
MC	0.74817(20)	0.755(5)

Tabla 5.4: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 4$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB ([107] para ν y [96] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86] y MC [108].

5.3.4. N=5: PMC no es aplicable para ω

Veamos qué ocurre al aumentar N de 4 a 5. Si bien se ha discutido que este valor puede describir las transiciones de ciertos superconductores [109], incluimos este caso para estudiar cómo es el comportamiento del método según N aumenta; ya que como hemos visto para $N \rightarrow \infty$ podemos resolver el sistema de forma exacta, y calcular las correcciones al régimen asintótico en un desarrollo $1/N$ [6, 7, 8]. Luego, podemos estudiar nuestro método en un terreno controlado. En la tabla 5.5 vemos nuestros resultados, junto a los obtenidos de la versión *strict* en [49], y a otros de la literatura.

Para el exponente ν , utilizamos el criterio conservador para determinar su valor central y sus barras de error, pues los resultados no sugieren que los órdenes sucesivos de la DE provean cotas. Al comparar nuestro resultado PMC con los resultados PMS (para ambas versiones de las ecuaciones) vemos total compatibilidad, al punto de tener diferencias del 0,025 % entre unos y otros. Respecto a otras técnicas, vemos que nuestros resultados son compatibles con el desarrollo en $1/N$ y con las simulaciones Monte-Carlo, pero no con el desarrollo a 6-loop del GR. Notemos que al orden trabajado, $\mathcal{O}(\partial^2)$, la precisión alcanzada, junto con la de los métodos MC, es de las mejores disponibles.

El caso del exponente ω , es mucho más delicado. El resultado PMS que obtenemos es compatible con los resultados previos de la DE. Sin embargo, al intentar utilizar el criterio PMC, encontramos que la función $f(\alpha; \rho)$ se comporta de forma totalmente diferente a los casos $1 \leq N \leq 4$ y en N grande. Más concretamente: no presenta un mínimo, sino un máximo, al variar α con $\rho = 0$, como vemos en las figuras 5.6 y 5.7. Mientras que para ν obtenemos figuras similares a 5.2 y 5.4, para ω el gráfico presenta un máximo en $\rho = 0$. En consecuencia, no tenemos una predicción proveniente de la identidad para SCT. Podría discutirse que se trata meramente de un problema de rango de parámetros barridos. Pero no parece ser el caso: extendimos el rango $\alpha \in [0.5, 5]$

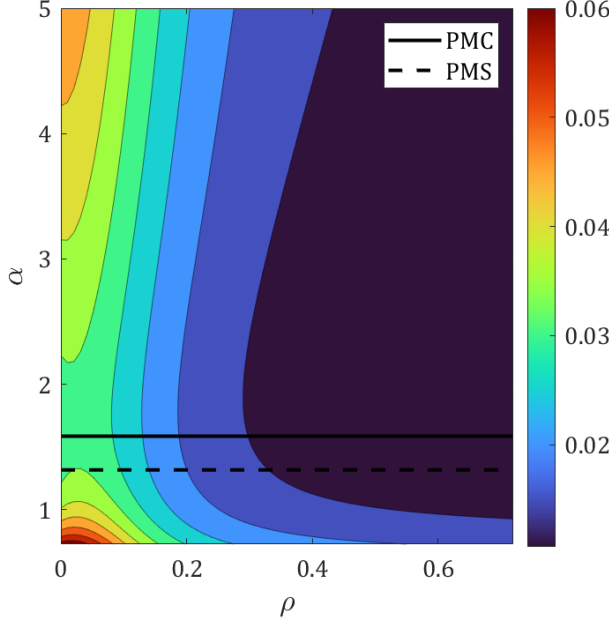


Figura 5.6: Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ν con $N = 5$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . De nuevo, la identidad especial conforme presenta un mínimo para $\rho = 0$.

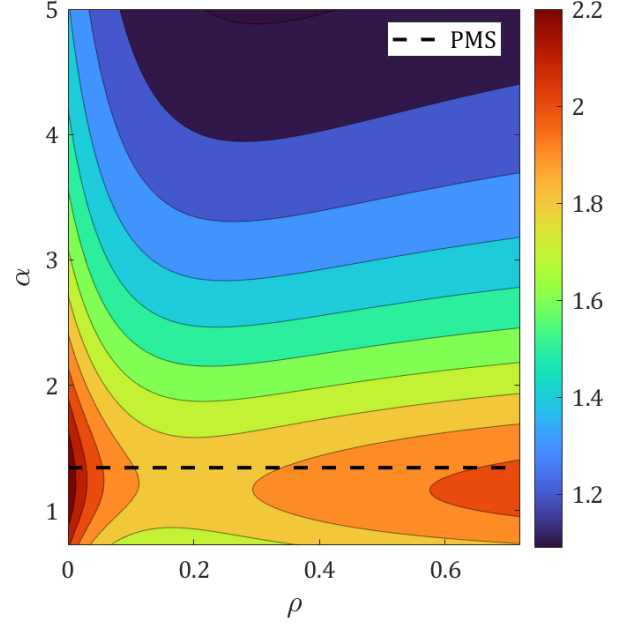


Figura 5.7: Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente ω con $N = 5$. La línea negra punteada marca el valor α_{PMS} . Se aprecia que f presenta un máximo para $\rho = 0$, por lo cual no hay un valor PMC de α a determinar.

barrido para todos los valores N a $\alpha \in [0.25; 20]$ sin cambios apreciables. Dado que para todos los valores de N , $\alpha_{\text{PMS}}/\alpha_{\text{PMC}} \sim \mathcal{O}(1)$, y siendo para $N = 5$, $\alpha_{\text{PMS}}^{\text{Exp}}(\omega) = 1,34$ y $\alpha_{\text{PMS}}^{\text{Wett}}(\omega) = 2,18$, uno esperaría que el rango inicial de búsqueda fuera el adecuado.

Para hilar más fino, uno puede observar el comportamiento de la función $f(\alpha, \rho; N)$ al variar N desde 4 hasta 5. Lo que se observa es la aparición de una suerte de factor de normalización global que crece con N de forma rápida, divergiendo para un valor de $N = N_C$ intermedio, $4 < N_C < 5$, que depende del regulador considerado. Luego de dicha divergencia, el factor global cambia de signo y comienza a decrecer, pero recién se recupera el comportamiento esperado de $f(\alpha, \rho)$ para $N \geq 7$.

Llegado a este punto, nos dedicamos a indagar acerca del motivo de esta divergencia, físicamente inesperada y probablemente no existente en ausencia de aproximaciones. Estudiando las funciones del *ansatz*, se observa con la variación continua de N , una evolución suave de todas las funciones excepto de $\Upsilon_k(\rho)$ – o más precisamente $\Upsilon'(\rho)$ que es la función utilizada. En las figuras 5.8 y 5.9, vemos para valores de $N \in [4, 5]$ la evolución de las funciones $Z_1(\rho)$ y $\Upsilon'(\rho)$, al variar N . Mientras que la primera cambia suavemente, $\Upsilon'(\rho)$ presenta una divergencia en el entorno de $N_C \approx 4.5$, tras lo cual cambia de signo. Es esta función del *ansatz* entonces la que diverge para N_C , y puesto que tiene un rol central en el lado izquierdo de la restricción conforme (5.8), lleva al mal comportamiento de f conforme N crece. Analicemos la ecuación de punto fijo de Υ' :

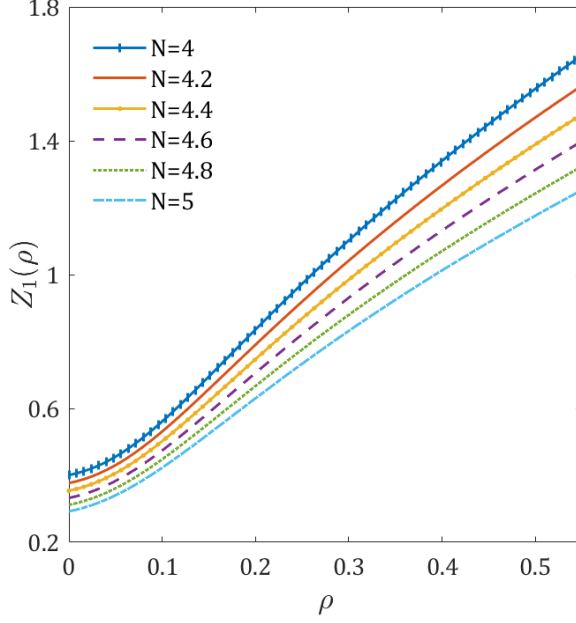


Figura 5.8: Resultados para varios valores de N , entre 4 y 5, para la función $Z_1(\rho)$ del *ansatz*. Nótese la evolución suave a medida que varía el parámetro N .

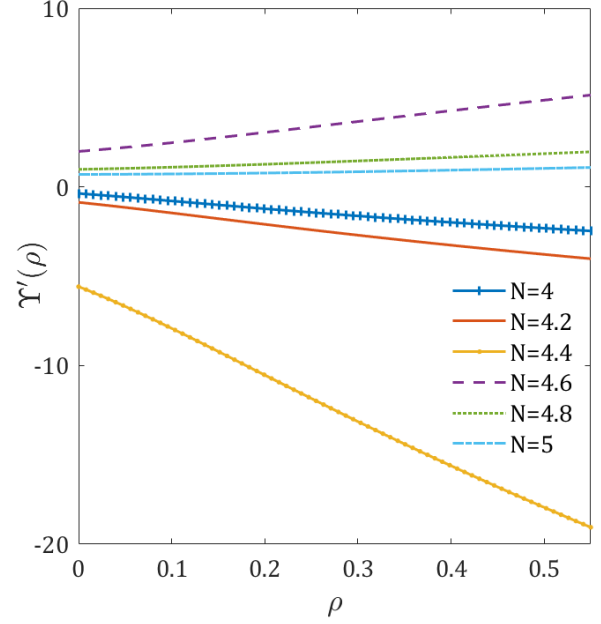


Figura 5.9: Resultados, para varios valores de N , entre 4 y 5, para la función $\Upsilon'(\rho)$ del *ansatz*. Nótese que presenta un comportamiento singular para un valor de $N \in (4.4, 4.5)$, que conlleva a una divergencia, con un cambio de signo entre un lado y otro de la misma.

$$[(2 - d_{\mathcal{O}} + 2d_{\phi}) + 2d_{\phi}\rho\partial_{\rho}] \Upsilon'(\rho) = \mathbb{L}_0(U_0, Z_0, Y_0, U_1, Y_1, Z_1) + \mathbb{L}_1(U_0, Z_0, Y_0) \Upsilon'(\rho), \quad (5.14)$$

donde $\mathbb{L}_0$ y $\mathbb{L}_1$ corresponden a las integrales de los diagramas que tenemos del lado derecho de la ecuación de Wetterich. Puesto que extraemos esta ecuación de analizar la ecuación de punto fijo de $\Gamma_k^{(1,1)}$, tendremos dos contribuciones, una independiente de Υ , $\mathbb{L}_0$, y otra proporcional a Υ' , $\mathbb{L}_1$. Notemos que al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$, $\mathbb{L}_1$ solamente depende de las funciones del punto fijo, que son comunes a todas las autoperturbaciones. En consecuencia, podemos despejar de la ecuación de punto fijo a $\Upsilon'(\rho)$, para lo cual debemos invertir el siguiente operador:

$$[(2 - d_{\mathcal{O}} + 2d_{\phi}) + 2d_{\phi}\rho\partial_{\rho} - \mathbb{L}_1(U_0(\rho), Z_0(\rho), Y_0(\rho))]. \quad (5.15)$$

Al trabajar con una discretización de ρ , este problema se reduce a invertir la versión matricial de este operador – donde la derivada se calcula mediante diferencias finitas. La condición para la invertibilidad de esta matriz es que ningún autovalor sea nulo, y justamente para $N = N_C$, ocurre que el autovalor más pequeño tiene un cruce en 0. Podemos apreciar el comportamiento de este autovalor en la figura 5.10, donde se ve un comportamiento aproximadamente lineal con un corte en 0. Sospechamos que este problema podría solucionarse de distintas maneras al trabajar en órdenes mayores de

la DE, lo cual discutiremos en la sección 5.4. Se trata de una problemática que tenemos pensado estudiar en el mediano plazo.

Para concluir, vale la pena destacar que si bien surge esta problemática a la hora de estudiar la restricción conforme para el exponente ω , el criterio PMS puede aplicarse sin problema alguno – si bien habría que analizar por qué nuestros resultados y los valores reportados en [49] al orden $\mathcal{O}(\partial^4)$ apenas coinciden en los extremos de sus barras de error, extendiendo nuestra versión a la aproximación $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE.

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.782(9)	
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.7823(79)	0.716(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.782(8)	0.724(34)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.7797(9)	0.760(18)
6-loop	0.766	
MC	0.780(6)	0.754(7)
$N \rightarrow \infty$	0.71(7)	0.51(6)

Tabla 5.5: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 5$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [108], y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].

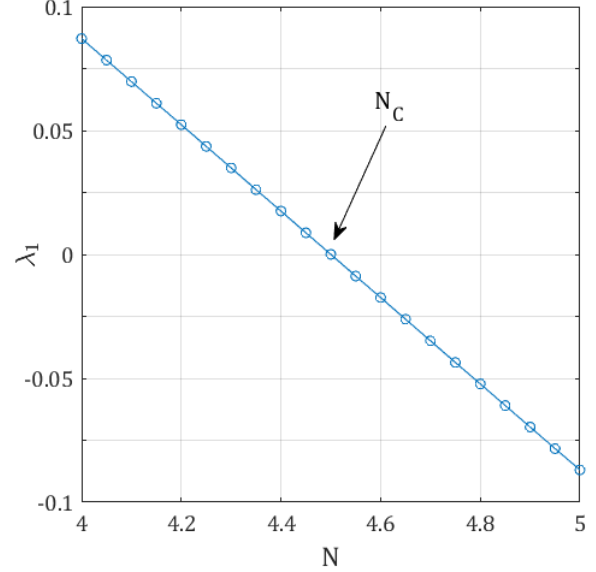


Figura 5.10: Comportamiento del autovalor más pequeño λ_1 del operador diferencial, en su versión discretizada, que actúa sobre $\Upsilon'(\rho)$ en su ecuación de punto fijo (5.14), conforme se varía el parámetro N que caracteriza a los modelos $\mathcal{O}(N)$ desde 4 hasta 5. Se puede ver como para un $N_C \sim 4,5$, este autovalor se vuelve nulo, arruinando la invertibilidad del operador.

5.3.5. N grande

Procedamos ahora con el análisis de los resultados correspondientes a valores de N relativamente grandes, donde el desarrollo $1/N$ se vuelve una herramienta muy precisa. En particular, analizamos los casos $N = \{10, 20, 100\}$. Como sucede con $N = 5$ no se trata de casos de interés físico por sus realizaciones experimentales, pero sí por constituir un terreno de prueba controlado de nuestro método.

Para los exponentes que nos interesan, el desarrollo $1/N$ se ha calculado hasta el orden sub-sub-dominante [6, 7, 8]. Las expresiones para ν y ω son en $d = 3$:

$$\begin{aligned} \nu &= 1 - \frac{32}{3\pi^2} \frac{1}{N} - \frac{128}{27\pi^4} (27\pi^2 - 112) \frac{1}{N^2} + \mathcal{O}(1/N^3) \\ \omega &= 1 - \frac{64}{3\pi^2} \frac{1}{N} + \frac{128}{9\pi^4} \left(\frac{104}{3} - \frac{9\pi^2}{2} \right) \frac{1}{N^2} + \mathcal{O}(1/N^3). \end{aligned} \quad (5.16)$$

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.879(10)	0.782(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.879(10)	0.783(26)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.877(11)	0.788(26)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.8776(10)	0.807(7)
6-loop	0.859	
MC	0.8797(9)	
N grande	0.87(2)	0.77(1)

Tabla 5.6: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 10$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [108] y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.9429(46)	0.886(14)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.9428(46)	0.886(14)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.9414(49)	0.887(14)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.9409(6)	0.887(2)
CB	0.9416(87)	
6-loop	0.930	
N grande	0.941(5)	0.888(3)

Tabla 5.7: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 20$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB [107], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [111], y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].

Usamos estas expresiones para calcular el valor central del desarrollo, y la diferencia entre los dos últimos órdenes calculados como una estimación de la precisión del mismo – si bien puede tratarse de una sobreestimación del error, dado que los coeficientes del desarrollo no son de orden 1, optamos por esta estimación. En adición a esto, también adjuntamos resultados provenientes de la resumación a 6-loops del GR y de CB para aquellos valores en que existen.

Vemos nuestros resultados junto con las predicciones de los demás métodos y los valores obtenidos de las versiones *strict* en las tablas 5.6-5.8. Una vez más apreciamos que PMC y PMS arrojan los mismos resultados, con diferencias muy por debajo del error del método. Entre las versiones *full* y *strict*, los resultados son completamente compatibles. Al comparar con el desarrollo $1/N$, vemos que nuestros resultados para $N = 10$ y $N = 20$ son de precisiones comparables, y compatibles con este. Para $N = 100$, el desarrollo en N grande – incluso seguramente sobreestimando su error – se vuelve más preciso que la DE, aunque los resultados siguen siendo completamente compatibles. Si bien como hemos visto en el capítulo 4 al nivel LPA ya se recupera el orden dominante en $N \rightarrow \infty$, es importante notar que trabajando al nivel $\mathcal{O}(\partial^2)$ obtenemos resultados compatibles con las dos primeras correcciones a dicho orden dominante $\nu = \omega = 1$, por más que no es esperable obtener las correcciones de orden $1/N$ de manera exacta. De hecho, si realizamos un ajuste de los exponentes ν y ω para $N \in [10, 20, 100]$ como $\nu = 1 + a_\nu/N + b_\nu/N^2$ y $\omega = 1 + a_\omega/N + b_\omega/N^2$, obtenemos estimaciones numéricas de los coeficientes en $1/N$ de (5.16) con errores porcentuales, respecto a los valores exactos, de 1% y 3% respectivamente. Los errores obtenidos, relativamente grandes, no deberían ser una sorpresa. Para $N = 10$, los términos de orden $1/N$ y $1/N^2$ son del

mismo orden – difieren en un factor ~ 0.7 para ν , por ejemplo, por lo cual solamente considerar los primeros términos puede ser equivocado. Sin embargo, para un ajuste de varios parámetros, disponemos de pocos puntos. Es destacable, de cualquier modo, que obtenemos una estimación razonable de las correcciones dominantes al régimen asintótico.

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.98939(82)	0.9771(29)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.98939(82)	0.9782(32)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.9892(11)	0.9782(26)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.9888(2)	0.9770(8)
N grande	0.9890(2)	0.9782(2)

Tabla 5.8: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 100$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].

5.3.6. Casos no unitarios: $N=0$ y $N=-2$

Para finalizar, analicemos qué arroja el método para los casos $N = 0$ y $N = -2$, cuyos mapeo a teorías unitarias en el espacio de Minkowski no es nada claro. Mientras que para N entero positivo el mapeo a teorías Ginzburg-Landau en $(d-1, 1)$ con simetría $O(N)$ es claro, para estos casos que podemos entender como extensiones analíticas de los N positivos, es bastante menos obvio, y quizás, imposible. De hecho, la interpretación para $N = -2$ de qué significaría que la teoría respetase la simetría conforme no es nada evidente. Sin embargo, como hemos mencionado, podemos tratar N como un parámetro más de las ecuaciones y estudiar qué resultados obtenemos, considerando estos valores de N como casos de prueba para nuestro método en modelos no-unitarios.

Reportamos nuestros resultados para estos valores algo menos convencionales de N en las tablas 5.9 y 5.10. Para ambos valores de N , una vez más vemos que PMC y PMS arrojan esencialmente los mismos resultados. Asimismo, no hay problemas de compatibilidad entre los resultados *full* y los *strict*. Para el caso de ν con $N = 0$, podemos ver que nuestros resultados son de una precisión similar al CB y algunos métodos perturbativos. Al comparar con lo obtenido mediante simulaciones Monte-Carlo o mediante el método de doble longitud, nuestra precisión es peor, pero el resultado sigue siendo compatible con ambas técnicas. Asimismo, los resultados experimentales están en acuerdo con los valores que hallamos. Para el exponente ω , obtenemos resultados compatibles con MC, e incompatibles con los obtenidos del desarrollo en ϵ . Al comparar con la versión *strict*, vemos que obtuvimos una precisión mayor, funcionando para este caso mejor las ecuaciones *full*.

Por otra parte, para $N = -2$, vemos como al orden $\mathcal{O}(\partial^2)$ ν se encuentra muy próximo a su valor exacto $1/2$, con diferencias de partes en un millón. Para ω , los resultados son compatibles con los provenientes de cálculos perturbativo, lo cual indica que el método es útil y funciona de forma aceptable incluso para este caso no unitario. También para este valor de N , podemos ver que tanto para ν como para ω , la versión *full* de las ecuaciones utilizada provee resultados equivalentes con los reportados [49] para la *strict*.

Estos resultados apuntan a que el rango de aplicación de esta metodología incluye no solamente las clases de universalidad caracterizadas por teorías unitarias, sino que también puede utilizarse para modelos sin una teoría asociada de tales características.

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.5879(11)	0.949(76)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.5879(11)	0.946(76)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.5879(13)	1.00(19)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.5876(2)	0.901(24)
CB	0.5876(12)	
Series LDM	0.58785(40)	
MC	0.58759700(40)	0.899(14)
6-loop	0.5882(11)	0.812(16)
ϵ -exp, ϵ^5	0.5875(25)	0.828(23)
ϵ -exp, ϵ^6	0.5874(3)	0.841(13)
Sol ⁿ polímero	0.586(4)	

Tabla 5.9: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 0$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB [112], método de duplicado de longitud [113], MC [114, 115], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85] y desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86]. También reportamos los resultados experimentales más precisos provenientes de estudios de soluciones diluidas de polímeros [116].

	ν	ω
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMC}}$	0.5000(11))	0.818(76)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{fPMS}}$	0.5000(11)	0.820(76)
$\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{sPMS}}$	0.5000(12)	0.84(19)
$\mathcal{O}(\partial^4)_{\text{sPMS}}$	0.5001(1)	0.838(24)
exact/6-loop	1/2	0.83(1)

Tabla 5.10: Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = -2$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Para comparar, agregamos resultados exactos para ν y perturbativos para ω [117, 118].

5.4. Discusión: equivalencia entre PMS y PMC

Hemos presentado nuestros resultados, a partir de la identidad no trivial conforme, para múltiples valores de N , incluidos aquellos con realizaciones experimentales, valores

grandes donde se puede realizar un desarrollo preciso en $1/N$, y también valores no positivos donde otras técnicas no pueden aplicarse debido a la inexistencia de una conexión clara con una teoría unitaria. Hay varias conclusiones comunes a todos los casos que procederemos a analizar a continuación.

En primer lugar vale la pena destacar que para todos los valores de N considerados – con la excepción de ω para $N = 5$, donde creemos que el problema se debe al truncamiento en p^2 – el criterio PMC funciona. Esto significa que incluso para valores de N donde no se ha probado, pero se sospecha, que la simetría del régimen crítico sea el grupo conforme completo, la restricción funciona pudiendo minimizarse y arrojando en el proceso resultados compatibles con los cálculos teóricos, simulaciones y experimentos más precisos a la fecha. Esto sin duda apunta a que para los modelos $O(N)$, independientemente del valor de N – para los casos positivos enteros – la simetría del punto fijo es la conforme. No constituye de ninguna manera una prueba, pero si es un testeo de consistencia, aparentemente superado, de suponer dicha simetría en el régimen crítico. Incluso para modelos donde no tenemos una interpretación clara de qué significaría respetar la simetría conforme, el método funciona y arroja resultados coherentes, como sucede para $N = 0$ y $N = -2$.

Un segundo punto importante es que en todos los casos en que PMC arroja resultados, estos son prácticamente idénticos a los obtenidos según el criterio PMS – las diferencias porcentuales entre valores centrales siempre son, al menos, un orden de magnitud menores que la precisión del método. Esto habla a favor de la convergencia del desarrollo en gradientes – independientemente del criterio utilizado para fijar los parámetros no físicos del esquema de aproximación, los resultados no cambian de forma significativa. Más concretamente, la aparente equivalencia entre ambos criterios significa que el criterio PMS, criticado muchas veces por su falta de motivación física más allá de reducir dependencias espurias, predice lo mismo que un criterio que busca maximizar la satisfacción de la simetría conforme especial del sistema – lo cual sí posee un claro sentido “físico”. Siendo la implementación del PMS más sencilla, y aparentemente más robusta pues funciona incluso para los casos en que la identidad conforme no arroja un valor, resulta quizás el criterio más adecuado a la fecha para tratar estos problemas.

En tercer lugar, para todos los valores de N estudiados notamos que los resultados PMS obtenidos de las versiones *full* y *strict* de las ecuaciones son totalmente equivalentes, con valores centrales distando en general al menos un orden de magnitud menos que las barras de error. No se trata de un resultado particularmente sorprendente, pues ambas versiones difieren en términos de mayor orden al trabajado, $\mathcal{O}(\partial^2)$, y luego no deberían conducir a predicciones muy disímiles. Sin embargo, a pesar de ser un resultado esperado, esta verificación es importante pues justifica el uso de la versión *strict* de las ecuaciones – al menos al trabajar con los modelos $O(N)$. Estas

ecuaciones, particularmente al trabajar con órdenes más altos de la DE, como $\mathcal{O}(\partial^4)$, se torna mucho más sencillas que las *full*, reduciendo los tiempos de cálculo y los recursos necesarios para llevar adelante los cálculos. Para futuras implementaciones entonces resultará beneficioso implementar la versión *strict*, sin alterar de forma significativa los resultados.

En cuarto y último lugar, que la DE funcione correctamente al buscar satisfacer una identidad no utilizada para determinar las funciones del *ansatz* para Γ_k permite pensar en futuras implementaciones del método que tengan incorporada esta restricción en las ecuaciones de determinación de dichas funciones. Es decir, en vez de utilizar la simetría de invariancia de escala para determinar todas las funciones del punto fijo, y en este caso sus perturbaciones, para luego buscar aquella solución que mejor respeta la simetría SCT, idear un algoritmo que imponga desde un principio tanto la simetría de escala como la conforme especial – trabajo actualmente en desarrollo por parte de nuestro grupo.

Antes de terminar, hablemos brevemente del exponente crítico η . Como mencionamos anteriormente, este no recibió correcciones por parte del tercer paso del algoritmo y siempre quedó fijado por el análisis del punto fijo realizado en la segunda etapa del procedimiento. Esto permite extraer una estimación de su valor $\mathcal{O}(\partial^2)_{\text{IFMS}}$. Al no tener equivalente proveniente de PMC, no se trata de resultados que hayamos presentado en esta tesis, donde la mira estaba puesta en la simetría conforme. Sin embargo, se trata nuevamente de resultados equivalentes a los dados en [49] con diferencias porcentuales entre valores centrales *strict* y *full* al menos un orden de magnitud menores que las barras de error. Estos resultados serán presentados en un artículo en redacción con el énfasis puesto en las implicancias técnicas de este estudio.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas de trabajo

En este capítulo resumiremos los resultados más relevantes obtenidos a lo largo de esta tesis, concluiremos acerca de sus implicancias e indicaremos algunos de los problemas abiertos que no pudimos resolver, así como también plantearemos nuevas interrogantes que surgen de lo realizado.

A lo largo del trabajo, hemos estudiado la simetría conforme conjeturada por Polyakov y Migdal para el punto crítico de los modelos $O(N)$. Todos los resultados que hemos obtenido, tanto de forma analítica para $N \rightarrow \infty$, como de forma numérica para N finito, son consistentes con y dan nuevos argumentos en favor de esta hipótesis. Para comenzar, pudimos probar la satisfacción de la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales al nivel de $\Gamma^{(3)}$ en $N \rightarrow \infty$. Luego, asumiendo tal simetría, pudimos restringir el espectro de operadores compuestos compatibles en el mismo límite, y recuperamos parte del espectro de exponentes críticos – con valores en acuerdo con los desarrollos de resumación. A nivel numérico, imponiendo el criterio PMC, buscando la menor ruptura de las restricciones provenientes de simetría conforme, obtuvimos resultados compatibles con la literatura y con otros trabajos de la DE para los exponentes críticos ν y ω . Sin haberse obtenido una prueba general a la fecha de la conjeturada simetría conforme del régimen crítico, consideramos que este trabajo es una muestra más en favor de su realización.

Comencemos a analizar de manera más pormenorizada los resultados. Primero, repasemos lo que hemos obtenido de forma analítica. En la sección 4.2 comenzamos repasando la generalización de la prueba de compatibilidad de las identidades de Ward-Takahashi de dilataciones y de transformaciones conformes especiales para $\Gamma_{ab}^{(2)}(p)$ con valor de N arbitrario – partiendo de la prueba para la clase de universalidad de Ising [65]. Esta prueba puede realizarse apelando a argumentos cinemáticos y de simetría generales, sin necesidad de estudiar la estructura de los diagramas del lado derecho de la identidad. Luego, particularizamos el valor de N y consideramos el límite $N \rightarrow \infty$.

En este caso, la acción efectiva promedio toma una forma sencilla [80], que nos permite obtener ecuaciones cerradas para las distintas funciones de los vértices a n puntos – las funcionales evaluadas en campo uniforme. A partir del cambio de variable $\rho \rightarrow W$, con W la derivada del potencial respecto al campo, propuesto en [62], es posible obtener ecuaciones cerradas resolubles para los vértices – ecuaciones (4.47), (4.49) y (4.50) – como vimos en la sección 4.3. Esta particularidad del límite $N \rightarrow \infty$ lo convierte en un campo de prueba ideal para comenzar a comprender la estructura de las teorías conformes, donde tenemos acceso a las soluciones exactas de los vértices y podemos estudiar sus restricciones debido a esta simetría, en aras de entender la información que puede aportar la invariancia conforme en casos físicamente más relevantes.

En esta tesis, con las soluciones disponibles para los vértices $\Gamma^{(n)}$ en el caso N grande, estudiamos concretamente la identidad de Ward-Takahashi de transformaciones conformes especiales para la función $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$, ecuación (4.54), buscando entender la conexión entre la simetría bajo las diferentes transformaciones del grupo conforme. En la sección 4.4 vimos como de forma no trivial, pero sí directa, esta identidad se satisface a partir de las identidades de Ward-Takahashi de dilataciones y rotaciones para dicha función de vértice, además de la identidad de dilataciones correspondiente a $\Gamma_{abcd}^{(4)}$. La demostración que presentamos requirió un desarrollo de todos los términos involucrados en la identidad (4.54), realizando cancelaciones entre conjuntos de ellos apelando a identidades de Ward-Takahashi para funciones a 2 puntos. En particular, sin poder apelar a argumentos generales, como en el caso de la identidad correspondiente de $\Gamma_{ab}^{(2)}$, debimos considerar la forma exacta, en el límite $N \rightarrow \infty$, de $\Gamma_{abcd}^{(4)}$. Esto sugiere que una demostración general de la satisfacción de la identidad de Ward de SCT para un $\Gamma^{(n)}$ arbitrario involucrará a la identidad de Ward de dilataciones para $\Gamma^{(n+1)}$. El tipo de cancelaciones que debimos realizar, donde apelamos en reiteradas ocasiones a las propiedades de simetría de las integrales I_n definidas en (4.48) sugiere la posibilidad de que una demostración más eficiente pueda realizarse, donde no se haga necesario profundizar en cada término y se pueda recurrir a argumentos más generales cinemáticos o de simetría. Puesto que a la fecha carecemos de una prueba en esa línea, que sería sin duda un mejor punto de partida hacia una demostración general, queda planteada la interrogante sobre cuál es exactamente la conexión entre la simetría conforme especial y las simetrías bajo dilataciones, rotaciones y traslaciones. El objetivo inmediato sería entender estas relaciones al estilo de lo visto para $\Gamma^{(2)}$, donde la identidad para SCT está directamente vinculada con las otras, mediante una derivada. Con este cometido, es probable que se deba apelar a propiedades de las integrales I_n definidas en (4.48) que aún no entendemos, y a la forma que toman los $\Gamma^{(n)}$ en términos de dichas integrales y de vértices de n 's menores.

Analicemos ahora los resultados analíticos correspondientes a la incorporación de fuentes para operadores compuestos locales de *scaling* y primarios, nuevamente en el

límite $N \rightarrow \infty$. Para esta situación, utilizando otra vez el cambio de variable $\rho \rightarrow W$ y asumiendo incambiada la forma (4.21) de $\Gamma_k[\phi]$, pudimos nuevamente obtener expresiones explícitas para las funciones $\Gamma^{(n,1)}$, que dependen de los operadores compuestos considerados en la escala microscópica. A partir de las identidades de Ward para dilataciones y para transformaciones conformes especiales fue posible restringir fuertemente cierto tipo de operadores de *scaling* primarios compatibles con tales simetrías, pudiendo obtener en (4.90) una parte de su espectro – pues nos restringimos únicamente a operadores funciones de $\rho(x)$ y de sus derivadas. De lo hecho, se puede concluir que solamente apelando a la simetría, sin estudiar en detalle el flujo de las perturbaciones propias del punto fijo, es posible extraer una parte de su espectro con resultados exactos para $N \rightarrow \infty$. Asimismo, este análisis nos permitió restringir fuertemente la forma de las funciones $\Gamma^{(n,1)}$ en el punto fijo, a través de los vínculos dados en (4.98) y (4.108). A futuro deberíamos extender estos razonamientos para incluir más operadores e intentar extraer mayor información acerca del punto fijo utilizando la simetría conforme conjeturada. En primer lugar, no considerar operadores que sean exclusivamente funciones de $\rho(x)$ y sus derivadas, lo cual nos podría permitir recuperar otra parte del espectro de operadores de escala que no observamos. En segundo lugar, podríamos levantar la restricción de que los operadores para los cuales incluimos fuentes sean primarios. De eso modo, podríamos obtener restricciones para los operadores descendientes o para combinaciones lineales de ambos tipos de operadores bajo el grupo conforme, y ver si su inclusión permite encontrar nuevas autoperturbaciones independientes. Por último, una línea que aún no hemos explorado es implementar el Desarrollo en Gradientes en el límite N grande, y estudiar numéricamente la inclusión de estos operadores.

Pensando a futuro, ambas puntas de investigación en el N grande donde podemos resolver exactamente el sistema, sugieren la posibilidad de estudiar las correcciones en $1/N$, con vistas a extraer información acerca de la satisfacción de la simetría conforme para valores de N finitos, donde las identidades no esperamos se satisfagan de forma directa y donde no disponemos de soluciones exactas. Esto permitiría comprender mejor el rol de la simetría conforme en teorías con valores de N de interés físico. Un análisis similar podría abordarse desde el Desarrollo en Gradientes, proyectando en cada orden la solución exacta con sus correcciones sobre el *ansatz* y estudiando el error cometidos de forma cuantitativa orden a orden, lo cual permitiría entender mejor aún las propiedades de convergencia del método.

Dejando el límite $N \rightarrow \infty$, en esta tesis obtuvimos resultados prometedores a nivel numérico para valores finitos de N . El procedimiento, detallado en el capítulo 5, utiliza como punto de partida la suposición de la simetría conforme en el punto crítico. El algoritmo utilizado para determinar las funciones del *ansatz* del Desarrollo en Gradientes impone exclusivamente la invariancia de escala. En consecuencia, debido a las aproximaciones asociadas al truncamiento en momentos, la simetría conforme no

se satisface exactamente. La búsqueda de su menor ruptura de acuerdo a un criterio dado, Principio de Máxima Conformalidad, produce resultados compatibles con otros métodos de determinación de exponentes críticos dentro del Desarrollo en Gradientes, y con otras técnicas teóricas de campos y resultados experimentales. Un resultado particularmente interesante es que, incluso para casos en que no hay un mapeo claro con teorías unitarias de campos – los casos $N = 0$ y $N = -2$ – es posible obtener predicciones razonables para los exponentes críticos ν y ω . Esto da lugar a la pregunta de qué significa, para tales valores de N , la existencia de dicha simetría en el punto fijo, si es que no se trata de un resultado fortuito.

Vale la pena mencionar que para valores de N en el entorno de 5, el algoritmo de determinación de exponentes críticos suponiendo simetría conforme funciona para el exponente crítico ν pero no para el exponente ω – como vemos en las figuras 5.6 y 5.7. Según fue expuesto, todo apunta a que esto se trata de un defecto fortuito del Desarrollo de Gradientes al orden (∂^2) , donde un autovalor vinculado a la ecuación de flujo de $\Upsilon'(\rho)$ – una de las funciones del *ansatz* – cruza el 0, como vemos en la figura 5.10, llevando la divergencia que arruina la predicción para $N = 5$. Sospechamos que trabajando a los siguientes órdenes del Desarrollo en Gradientes, pueden ocurrir al menos dos escenarios que subsanen este problema. Por un lado, que la divergencia sea cada vez menos pronunciada – o directamente evitada – al ser la ecuaciones de punto fijo para Υ distintas para cada orden. Por otro, que el *crossing* del autovalor en 0 siga ocasionando una divergencia, pero que el rango de N 's afectados sea cada vez menor, hasta eventualmente poder obtener predicciones razonables para $N = 4$ y $N = 5$, con el problema restringido a un rango de valores de N no enteros entre ambos valores.

De los resultados numéricos, podemos extraer dos conclusiones importantes, de índole técnica. En primer lugar, un resultado relevante que hemos obtenido es que las dos versiones de las ecuaciones de la DE, *full* y *strict*, introducidas en la sección 2.5.1, brindan resultados totalmente compatibles con sus barras de error. Esto no es sorprendente – pues ambas versiones difieren en términos de orden superior al nivel trabajado – ni físicamente interesante, pero sí es relevante por sus consecuencias a la hora de implementar numéricamente la DE: se puede trabajar con la versión más simple de las ecuaciones, la *strict*, sin perder precisión ni variando significativamente los valores centrales – al menos para los exponentes críticos analizados. Esto reduce los tiempos de cálculo en un factor $\sim 1/2$ al orden (∂^2) y mucho mayor para órdenes superiores, lo cual es útil de cara a implementaciones del criterio PMC para los modelos $O(N)$ a órdenes mayores del Desarrollo en Gradientes.

La segunda conclusión que extraemos, surge de comparar los resultados a partir del Principio de Máxima Conformalidad (PMC) y del de Mínima Sensibilidad (PMS). Para todos los valores de N considerados, y para los dos exponentes ν y ω estudiados, ambos criterios de determinación de los exponentes críticos en función de los paráme-

tros espurios de la DE – vinculados a la elección del regulador, sus parámetros, y las aproximaciones numéricas – arrojan resultados equivalentes, con valores centrales y barras de error muy similares. Esto significa que, para los casos estudiados, la imposición de una restricción con motivaciones físicas – minimizar la ruptura de las identidades de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales dentro de un esquema de aproximación que no las satisface exactamente – produce los mismos resultados que el criterio PMS, cuya validez o motivación ha sido puesta en tela de juicio por su relativa falta de justificación física. En vistas de nuestros resultados, el PMS es un criterio que no solo funciona y produce resultados compatibles con la literatura, sino que es virtualmente equivalente a requerir la menor ruptura, según un criterio dado, de la simetría conforme. Sumado a esto, la implementación numérica del PMS es más sencilla que la del PMC. Además, PMS parece ser un criterio más robusto pues funciona incluso cuando el criterio PMC no arroja resultados¹ – como en el caso del exponente ω para $N = 5$. Desde una perspectiva técnica, esto significa que $\alpha_{\text{PMC}} \approx \alpha_{\text{PMS}}$, lo cual puede interpretarse en base a lo explicado en [50]. En dicho trabajo se explica como α_{PMS} , al menos para los modelos $O(N)$, es próximo, y con los sucesivos órdenes de la DE tiende, a α_{OPT} , el valor de α en el cual los parámetros de desarrollo de la DE son mínimos, y por ende el error cometido se reduce y la convergencia es más veloz. Por lo tanto, al minimizar el criterio PMS el error cometido, la ruptura de cualquier simetría no satisfecha de forma exacta orden a orden de la DE será mínima en su entorno. Este trabajo es compatible con tal resultado, favoreciendo dicho análisis.

Por último, en vistas de la utilidad del criterio PMC para valores finitos de N surge la posibilidad de desarrollar una implementación de la simetría conforme de forma implícita en el algoritmo de determinación de las funciones del *ansatz*. Esto ya ha sido realizado recientemente por nuestro grupo de investigación trabajando con el modelo de Ising. La idea es extender lo hecho a los modelos $O(N)$: en vez de aplicar exclusivamente las identidades de dilataciones para determinar las funciones del *ansatz*, utilizar al mismo tiempo las identidades de Ward-Takahashi para simetría conforme especial, imponiéndola desde un comienzo. El plan es implementar esto redefiniendo el *ansatz* del Desarrollo en Gradientes, usando una combinación de las identidades para dilataciones y transformaciones conformes especiales para estudiar su forma.

¹Además, el rango de aplicación del criterio PMS no está limitado a propiedades universales ni al régimen crítico.

Apéndice

Apéndice A

Grupo conforme: transformaciones y generadores

En este apéndice estudiaremos el grupo conforme sobre el espacio euclídeo d -dimensional, $\mathbb{E}^d$. En particular, estudiaremos las transformaciones conformes infinitesimales, y su acción sobre campos escalares, lo cual nos permitirá extraer la representación de los generadores del grupo – de una base de su álgebra de Lie. Seguiremos la deducción hecha en [71].

Comencemos expresando la transformación de coordenadas conforme más general. Esta es un mapa $x \mapsto x'$ que deja a la métrica invariante módulo un factor de escala local:

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{A.1})$$

A partir de esta condición, veamos cómo extraer las transformaciones infinitesimales de coordenadas. Supongamos una transformación sobre las coordenadas que parametrizaremos como $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$. A orden lineal en ϵ , la variación de la métrica es:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (\text{A.2})$$

El requisito de que la transformación sea conforme implica que:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x)g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Si tomamos traza a ambos lados de esta igualdad, nos queda:

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho, \quad (\text{A.4})$$

donde usamos la convención de Einstein para los índices repetidos. Si estamos trabajando en espacio euclídeo, tenemos que $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. De querer extender este análisis a espacio de Minkowski con $d - 1$ dimensiones espaciales, el tratamiento es

análogo en lo que sigue, teniendo cuidado en el valor $g_{00} = \eta_{00} = -1$. Si tomamos ahora una combinación lineal de (A.2), con una derivada adicional y realizando una permutación de índices, obtenemos:

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = g_{\mu\rho}\partial_\nu f + g_{\nu\rho}\partial_\mu f - g_{\mu\nu}\partial_\rho f. \quad (\text{A.5})$$

Si ahora contraemos ambos lados de esta igualdad con $g^{\mu\nu}$, obtenemos:

$$2\partial^2\epsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu f. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando ahora ∂_ν a esta expresión, y tomando ∂^2 de (A.2), se halla:

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f = g_{\mu\nu}\partial^2 f. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, podemos contraer a ambos lados con $g^{\mu\nu}$ y obtenemos:

$$(d-1)\partial^2 f = 0. \quad (\text{A.8})$$

A partir de estas relaciones es posible obtener la forma de las transformaciones conformes infinitesimales en d dimensiones.

Para empezar, el caso $d = 1$ resulta trivial, f no recibe ninguna restricción de las ecuaciones que hemos obtenido. Cualquier transformación suave es conforme en una dimensión. El caso $d = 2$ es muy sutil, resulta que allí las transformaciones conformes conforman un grupo de dimensión infinita – pues todo mapa holomorfo es una transformación conforme. Concentrémonos en $d \geq 3$, que se trata del caso de interés para esta tesis. Las ecuaciones (A.7) y (A.8) nos dicen que $\partial_\mu\partial_\nu f = 0$, por lo cual f es a lo sumo lineal en las coordenadas. Luego,

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu \quad \text{con } A, B_\mu \text{ constantes.} \quad (\text{A.9})$$

Esto nos permite determinar finalmente los ϵ_μ , ya que al sustituir (A.9) en (A.5), concluimos que a lo sumo ϵ_μ es cuadrático en las coordenadas:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Debido a que todas las ecuaciones que hemos trabajado hasta este punto son lineales y valen para todo x , podemos estudiar por separado cada potencia de las coordenadas. El término a_μ no recibe restricciones, luego corresponde a una traslación infinitesimal. Podemos sustituir el término lineal en (A.2) y obtenemos:

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b^\sigma{}_\sigma g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

por lo cual, podemos descomponerlo en la suma de un tensor antisimétrico y un término de traza pura:

$$b_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \quad \text{con } m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}. \quad (\text{A.12})$$

El término de traza representa una transformación infinitesimal de escala, mientras que la parte antisimétrica corresponde a una rotación rígida infinitesimal. Por último, al sustituir el término cuadrático en (A.5), llegamos a:

$$c_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\rho}r_\nu + g_{\mu\nu}r_\rho - g_{\nu\rho}r_\mu \quad \text{donde } r_\mu \equiv \frac{1}{d}c^\sigma{}_{\sigma\mu}, \quad (\text{A.13})$$

lo cual produce una transformación *conforme especial* infinitesimal:

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - b^\mu x^2. \quad (\text{A.14})$$

Las transformaciones de coordenadas finitas obtenidas a partir de integrar sus versiones infinitesimales son:

$$\begin{aligned} (\text{traslaciones}) \quad x'^\mu &= x^\mu + a^\mu \\ (\text{rotaciones}) \quad x'^\mu &= M^\mu{}_\nu x^\nu \\ (\text{dilataciones}) \quad x'^\mu &= \alpha x^\mu \\ (\text{SCT}) \quad x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Por último, veamos cómo son los generadores de estas transformaciones sobre un campo escalar. Concentrémonos en el efecto generado por la transformación de coordenadas, suponiendo de momento el campo incambiado (es decir $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi$). En tal caso, una dilatación por ejemplo lleva a la siguiente transformación:

$$\varphi(x') = \varphi((1 + \alpha)x) \approx \varphi(x) + \alpha x^\mu \partial_\mu \varphi(x). \quad (\text{A.16})$$

Procediendo de igual forma con las demás transformaciones infinitesimales, obtenemos los generadores del grupo actuando sobre la representación fundamental del mismo:

$$\begin{aligned} (\text{traslaciones}) \quad \mathcal{P}_\mu &= -i\partial_\mu \\ (\text{rotaciones}) \quad \mathcal{J}_{\mu\nu} &= i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \\ (\text{dilataciones}) \quad \mathcal{D} &= -ix^\mu \partial_\mu \\ (\text{SCT}) \quad K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Ecuación de Wetterich-Morris

En este apéndice estudiaremos el método de la acción efectiva promedio, y veremos cómo se extrae su ecuación de flujo funcional, conocida como ecuación de Wetterich, o Wetterich-Morris. En este apéndice consideraremos la teoría de un campo escalar, pero la generalización del argumento al caso de los modelos $O(N)$ es directa. Comencemos por recordar la definición de la acción efectiva promedio Γ_k :

$$\Gamma_k[\phi] + W_k[J] = \int_x \phi(x)J(x) - \frac{1}{2} \int_{x,y} \phi(x)R_k(|x-y|)\phi(y). \quad (\text{B.1})$$

Si tomamos una derivada funcional respecto al valor esperado del campo a escala k – $\phi_k(z)$ – obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\phi(z)} = J(z) - \int_x R(|x-z|)\phi(x). \quad (\text{B.2})$$

Ahora, para determinar la ecuación de flujo de $\Gamma_k[\phi]$, precisamos tener también $\partial_t W[J]$, donde recordemos que estamos tomando derivadas respecto al tiempo de re-normalización a campo ϕ constante. Esta derivada puede determinarse a partir de la función de partición:

$$\partial_t W_k[J]|_J e^{W_k[J]} = \partial_t e^{W_k[J]}|_J = \int \mathcal{D}\varphi \left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|)\varphi(x)\varphi(y) \right) e^{W_k[J]}. \quad (\text{B.3})$$

En consecuencia, se despeja:

$$\partial_t W_k[J]|_\phi = -\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|)\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle_{J,k}, \quad (\text{B.4})$$

donde el valor esperado es tomado en presencia de la fuente $J(x)$ y a la escala introducida por el regulador k . Recordando que W_k es la funcional generatriz de las funciones

de correlación conexas, tenemos:

$$\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = \langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle_{J,k} - \langle\varphi(x)\rangle_{J,k}\langle\varphi(y)\rangle_{J,k}. \quad (\text{B.5})$$

Entonces, podemos re-expresar (B.4) como:

$$\partial_t W_k[J]|_J = -\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|) \left[\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} + \frac{\delta W_k}{\delta J(x)} \frac{\delta W_k}{\delta J(y)} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Tomemos ahora una derivada ∂_t de (B.1) a campo externo J fijo :

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi]|_J = & \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|) \left[\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} + \cancel{\phi(x)\phi(y)} \right] + \int_z J(z) \partial_t \phi(z)|_J \\ & - \int_{x,y} R_k(|x-y|) \phi(y) \partial_t \phi(x)|_J - \frac{1}{2} \int_{x,y} \cancel{\partial_t R_k(|x-y|) \phi(x)\phi(y)}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

la cual podemos conectar con la derivada tomada respecto a ϕ fijo mediante:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi + \int_z \cancel{\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(z)}} \partial_t \phi(z)|_J = & \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|) \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} \\ & + \int_z \left[J(z) - \int_x \cancel{R_k(|x-z|) \phi(x)} \right] \partial_t \phi(z)|_J \quad (\text{B.8}) \\ \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi = & \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(|x-y|) \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)}. \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de flujo exacta para $\Gamma_k[\phi]$, conocida también como ecuación de Wetterich y Morris. Se puede tomar derivadas funcionales de esta para hallar los flujos de las funcionales $\Gamma_k^{(n)}$. Para su tratamiento numérico, y para aplicar el esquema de aproximación del desarrollo en gradientes, nos será útil obtener la versión en espacio de momentos del lado derecho de la ecuación de Wetterich. Como a lo largo de este trabajo hemos explorado únicamente el caso en que el campo externo es homogéneo, nos restringiremos a continuación a dicho caso, y luego $W_k^{(2)}(x,y) \equiv G_k(x,y)$ será función únicamente de $x-y$, y ya no una funcional de la fuente $J(x)$. Así, factorizando un $(2\pi)^d \delta(0) \equiv \Omega$, el volumen del espacio, y apelando a la definición de la transformada de Fourier – ecuación (2.50) – tenemos:

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \delta(0) \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi = & \frac{1}{2} \int_{x,y} \int_q \partial_t R_k(q) e^{-iq(x-y)} G_k(q') e^{-iq'(x-y)} \\ = & \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_k(q) \int_x e^{-ix \cdot 0} \\ \partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi = & \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) G_k(q). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Apéndice C

Identidades de Ward-Takahashi bajo transformaciones conformes

En este apéndice deduciremos las formas generales de las identidades de Ward-Takahashi asociadas a las transformaciones del grupo conforme para las funciones de los vértices $\Gamma_k^{(n)}$, cuyas expresiones referimos en el capítulo 2, en el caso de configuración homogénea del campo – el que nos interesa para esta tesis.

Comencemos con el caso de las rotaciones, recordando la expresión (3.30):

$$\int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} (x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu) \phi_a(x) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Dado que en campo uniforme la primer dependencia en las coordenadas aparece al considerar $\Gamma_k^{(2)}(x, 0; \rho)$. Por lo tanto, las restricciones bajo rotaciones contienen información útil para $n > 2$. Tomemos entonces dos derivadas funcionales de (C.1), y evaluemos en campo uniforme:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_x \left\{ \Gamma_{cb}^{(2)}(x, x_1) (x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu) (\delta(x - x_2)) + \Gamma_{bc}^{(2)}(x, x_2) (x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu) (\delta(x - x_1)) \right\} \\ 0 &= \sum_{i=1}^2 (x_i^\mu \partial_\nu^i - x_i^\nu \partial_\mu^i) \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Esta identidad ahora puede ser evaluada en espacio de momentos, donde explotamos que por ser homogénea la configuración, la dependencia es en una sola coordenada:

$$\begin{aligned} \int_{x_1, x_2} \sum_{i=1}^2 (x_i^\mu \partial_\nu^i - x_i^\nu \partial_\mu^i) \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1, x_2) e^{ip(x_1 - x_2)} \\ = \int_{x_1, x_2} -i ((x_1^\mu - x_2^\mu) p_\nu - (x_1^\nu - x_2^\nu) p_\mu) \Gamma_{ab}^{(2)}(x_1, x_2) e^{ip(x_1 - x_2)} \\ = (p^\nu \partial_\mu^p - p^\mu \partial_\nu^p) \Gamma_{ab}^{(2)}(p) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En la primer igualdad, hemos utilizado integración por partes. El resultado final es la identidad de Ward-Takahashi por rotaciones para $\Gamma_{ab}^{(2)}$. Veamos cómo se deduce la expresión para $\Gamma_k^{(n)}$. El procedimiento consiste en tomar n derivadas funcionales de (C.1) y evaluar en campo uniforme. Notemos que en general tendremos n términos con el operador $x_i^\mu \partial_\nu^i - x_i^\nu \partial_\mu^i \Gamma^{(n)}$, con $i = 1, \dots, n$ golpeando en $\Gamma_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$:

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i^\mu \partial_\nu^i - x_i^\nu \partial_\mu^i) \Gamma_{a_1, \dots, a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{C.4})$$

Al transformar de Fourier, donde fijaremos la coordenada $x_n = 0$, recogeremos una suma en los $n - 1$ momentos explícitos. El despeje es análogo al hecho para $n = 2$. Se llega a la versión generalizada:

IDENTIDAD DE WARD-TAKAHASHI PARA ROTACIONES

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \left(p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} \right) \Gamma_{a_1, \dots, a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})}. \quad (\text{C.5})$$

Pasemos ahora a discutir el caso de las transformaciones de escala. En este caso, tal como vimos en la sección 3.3.2, la identidad asociada a dilataciones presenta dos términos, uno de los cuales tratamos en el cuerpo principal: $\partial_t \Gamma_k[\phi]|_\phi$. Si tomamos derivadas funcionales de este obtendremos los diferentes diagramas discutidos en el capítulo 2. Centrémonos entonces en el término “dimensional”:

$$\int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} (d^x + d_\phi) \phi_a(x), \quad (\text{C.6})$$

donde recordemos que $d^x = x^\mu \partial_\mu$. Si tomamos n derivadas funcionales, y evaluamos en campo uniforme, obtenemos:

$$\int_x d_\phi \phi_a \Gamma_{aa_1 \dots}^{(n+1)}(x, x_1, \dots) - \sum_{i=1}^n (d^{x_i} + d_\phi - d) \Gamma_{a_1, \dots}^{(n)}(x_1, \dots). \quad (\text{C.7})$$

Podemos transformar esto a espacio de Fourier, notando que la primer integral corresponde a transformar la coordenada x con momento nulo. Utilizando integración por partes llegamos a:

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + n d_\phi - d \right] \Gamma_{a_1, \dots}^{(n)}(p_1, \dots) + d_\phi \phi_a \Gamma_{aa_1 \dots}^{(n+1)}(p = 0, p_1, \dots). \quad (\text{C.8})$$

Para finalizar, podemos apelar a la identidad (D.1) probada en el apéndice D para vincular la transformada de $\Gamma^{(n+1)}$ en un momento nulo con $\Gamma^{(n)}$. Llegamos así final-

mente al lado izquierdo de (3.37):

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - d + nd_\phi + d_\phi \phi_a \frac{\partial}{\partial \phi_a} \right] \Gamma_{a_1, \dots}^{(n)}(p_1, \dots). \quad (\text{C.9})$$

Puesto que el lado derecho corresponde a las integrales de los diagramas con $H^{(n)}$, lo dejaremos expresado en términos de este. Así obtenemos la

IDENTIDAD DE WARD-TAKAHASHI PARA DILATACIONES

$$\boxed{\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} \right) - d + nd_\phi + d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q) G^2(q) H_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(q, p_1, \dots, p_{n-1}, -q).} \quad (\text{C.10})$$

Para terminar, estudiemos el caso de transformaciones conformes especiales. En dicho caso, tenemos:

$$\int_{x,y} G_{aa}(x,y) [K_\mu^x + K_\mu^y - d_R(x+y)_\mu] R_k(x,y) + \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_a(x)} [K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu] \phi_a(x) = 0, \quad (\text{C.11})$$

donde recordemos que $K_\mu^x = x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu$.

Es necesario trabajar ambos términos para expresarlos de una manera más familiar y útil para los cálculos. El segundo término se puede tratar de una forma similar al caso conforme. Tras tomar n derivadas funcionales, luce:

$$- \sum_{i=1}^n (x_i^2 \partial_\mu^{x_i} - 2x_{i\mu} x_i^\nu \partial_\nu^{x_i} + 2(d - d_\phi) x_{i\mu}) \Gamma_{a_1, \dots}^{(n)}(x_1, \dots) - 2d_\phi \int_x \phi_a x_\mu \Gamma_{aa_1 \dots}^{(n+1)}(x, x_1, \dots). \quad (\text{C.12})$$

Si transformamos de Fourier esta expresión, obtenemos usando integración por partes:

$$\left[p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) - 2d_\phi \phi_a \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{aa_1 \dots a_n}^{(n+1)}(r, p_1, \dots) \Big|_{r=0}, \quad (\text{C.13})$$

donde hemos usado que la última integral puede interpretarse como una transformada de Fourier respecto a x con momento asociado $r = 0$, y tomando una derivada respecto a r antes de evaluar $r = 0$.

Para evaluar el primer término de (C.11) tras derivar n veces, es necesario apelar a la información disponible sobre $R_k(x, y)$. En primer lugar, que su forma es $Z_k k^2 r(x - y)$ donde r no depende de la escala k , salvo por x e y cuando se expresan como $x = k^{-1} \tilde{x}$ e $y = k^{-1} \tilde{y}$. Esto conduce a que:

$$\partial_t R_k(x, y) = (d_R + d^x + d^y) R_k(x, y), \quad (\text{C.14})$$

resultado que ya hemos usado para la identidad de Ward bajo dilataciones. En segundo lugar, apelamos a que estamos trabajando con un término regulador es invariante bajo traslaciones, es decir, función de $|x - y|$. Luego se pueden trabajar las derivadas que actúan sobre $R_k(x, y)$ y re-exresar el primer término de (C.11) como:

$$\frac{i}{2} \int_{x, y, x_a, y_a} (x + y)_\mu \partial_t R_k(x, y) G_{ab}(x, x_a) H_{ba_1 \dots a_n c}^{(n)}(x_a, x_1, \dots, x_n, y_a) G_{ca}(y_a, y). \quad (\text{C.15})$$

Esto se puede entender como la suma de las derivadas respecto a q y q' de la transformada de Fourier (respecto a x e y) antes de evaluar $q' = -q$ – donde no imponemos de principio que $R_k(x, y) = R_k(x - y)$ y asociamos q a x y q' a y en la transformación del regulador. El resultado en espacio de Fourier es:

IDENTIDAD DE WARD-TAKAHASHI PARA SCT

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \left[p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \\ & - 2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{ia_1 \dots a_n}^{(n+1)}(r, p_1, \dots) \Big|_{r=0} = \\ & -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q) G^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(q, p_1, \dots, p_n, q') \Big|_{q'=-q} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Apéndice D

Identidad de la transformada de Fourier con un momento nulo

En este apéndice deduciremos una propiedad útil para la transformada de Fourier de un funcional dependiente de n campos en n diferentes puntos, al evaluar en campo uniforme y un momento nulo. Por ejemplo para las funciones de los vértices:

$$\Gamma_{aa_1\dots a_n}^{(n+1)}(0, p_1, \dots, p_n; \phi) = \frac{\partial \Gamma_{a_1\dots a_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi)}{\partial \phi_a}. \quad (\text{D.1})$$

Para ver esto, desarrollemos la *funcional* $\Gamma[\phi]$ alrededor de una configuración uniforme $\phi_i(x) = \phi_i^0$:

$$\Gamma[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{x_1\dots x_n} [\phi_{a_1}(x_1) - \phi_{a_1}^0] \dots [\phi_{a_n}(x_n) - \phi_{a_n}^0] \Gamma_{a_1\dots a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi^0). \quad (\text{D.2})$$

Puesto que $\Gamma[\phi]$ no depende de la configuración ϕ_i^0 en torno a la cual realizamos el desarrollo, se cumple que $\partial \Gamma / \partial \phi_a^0 = 0$. Tomando tal derivada en (D.2), obtenemos:

$$\int_x \Gamma_{aa_1\dots a_n}^{(n+1)}(x, x_1, \dots, x_n; \phi^0) = \frac{\partial \Gamma_{a_1\dots a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi^0)}{\partial \phi_a^0}. \quad (\text{D.3})$$

A partir de esto es fácil concluir la identidad (D.1): alcanza con notar que el lado derecho corresponde a la transformada de Fourier de la coordenada x con momento nulo. Las demás coordenadas son comunes a ambos lados y de ahí se deduce (D.1).

Apéndice E

Cálculo de $\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2)$ y $\hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$ en el límite $N \rightarrow \infty$

En este apéndice calcularemos las funciones $\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2; W)$ y $\hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3; W)$ de los modelos $O(N)$ en el límite $N \rightarrow \infty$, explotando las simplificaciones posibles en dicho límite. Seguiremos con los razonamientos explicados en la sección 4.3. En dicha sección vimos que para el cálculo de las ecuaciones de flujo de las funcionales $\hat{\Gamma}^{(n)}$ con $n = 1, 2$ en los diagramas sustituíamos los $\Gamma^{(m)}$ que aparecen usualmente por $\hat{\Gamma}^{(m')}$. Esto se generaliza para las ecuaciones de flujo de todos los $\hat{\Gamma}^{(n)}$. Sucede que para un $\Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)}$ dado, $\hat{\Gamma}^{(n)}$ es su componente en la estructura $\phi_{a_1} \dots \phi_{a_n}$. De modo de extraer los aportes dominantes – que producen una traza $\delta_{aa} = N$ al sumar los índices del bucle – proporcionales a este producto de campos en los diagramas, debemos solamente considerar los vértices “con patas de ρ ”. Notemos que en general los diagramas para $\Gamma^{(n)}$ involucran hasta $\Gamma^{(n+2)}$, pero la componente de esta que aporta a $\phi_{a_1} \dots \phi_{a_n}$ a orden dominante es $\Gamma^{(n)} \phi_{a_1} \dots \phi_{a_n} \delta_{ij}$ con i, j los índices que recorren el bucle. Esta argumentación se extiende a los $\Gamma^{(n+1)}$ y $\Gamma^{(n)}$ que aparecen en los diagramas $\forall n$.

Teniendo en cuenta lo expuesto, mostremos los diagramas a considerar en la ecuación de flujo de $\hat{\Gamma}^{(3)}(p)$:

$$\partial_t \hat{\Gamma}_k^{(3)}(p_1, p_2) \Big|_\rho = -\frac{N}{2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the bottom left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the bottom right is labeled } -p_1 - p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the right side of the circle is labeled } q. \\ \text{Diagram 2: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the right is labeled } p_1 + p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom left is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the top side of the circle is labeled } q. \text{ A curved arrow on the bottom side of the circle is labeled } p_1 + p_2 + q. \\ \text{Diagram 3: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the right is labeled } p_1 + p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the top side of the circle is labeled } q. \text{ A curved arrow on the bottom side of the circle is labeled } p_1 + q. \text{ A curved arrow on the right side of the circle is labeled } p_1 + p_2 + q. \end{array} \right] + 2 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the right is labeled } p_1 + p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom left is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the top side of the circle is labeled } q. \text{ A curved arrow on the bottom side of the circle is labeled } p_1 + p_2 + q. \\ \text{Diagram 5: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the right is labeled } p_1 + p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom right is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the top side of the circle is labeled } q. \text{ A curved arrow on the bottom side of the circle is labeled } p_1 + p_2 + q. \end{array} \right) + 2 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 6: A circle with a cross on top. An incoming dashed line from the left is labeled } p_1, \text{ and an outgoing dashed line to the right is labeled } p_1 + p_2. \text{ An incoming solid line from the bottom left is labeled } p_2. \text{ A curved arrow on the top side of the circle is labeled } q. \text{ A curved arrow on the bottom side of the circle is labeled } p_1 + q. \text{ A curved arrow on the right side of the circle is labeled } p_1 + p_2 + q. \end{array} \right) + 2 \text{ perm} \Bigg]. \quad (\text{E.1})$$

El primer aporte, el diagrama *tadpole* se puede simplificar con la derivada respecto a ρ fijo del lado izquierdo, apelando nuevamente a la identidad (D.1) y utilizando la ecuación (4.38) de flujo de ρ vista en el capítulo 4, para producir una derivada ∂_t de $\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2)$ a W fijo. Por otro lado los diagramas *swordfish* y los *scarecrow* se pueden simplificar. Veámoslo para los diagramas cuyos momentos explicitamos en (E.1):

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (tadpole)} &= -\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_t \int_q G(q) G(q + p_1 + p_2) \Big|_W \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \\
 &= - \left(\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right)^{-1} \Big|_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2),
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (swordfish)} &= N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \int_q \partial_t G(q) G(q + p_1) G(q + p_1 + p_2).
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Combinemos en el lado izquierdo los diagramas *swordfish* con la derivada de $\hat{\Gamma}^{(3)}$, y los tres diagramas *scarecrow* del lado derecho; y tomemos el cociente entre el producto de $N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)$,

$$\partial_t \left(\frac{\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2)}{N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)} \right) = \partial_t \int_q G(q) G(q + p_1) G(q + p_1 + p_2) = \partial_t I_3(p_1, p_2). \tag{E.4}$$

En vistas de este resultado, integrando obtenemos la solución para $\hat{\Gamma}^{(3)}$ dada por (4.49):

$$\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) = N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2). \tag{E.5}$$

Podemos realizar un procedimiento del mismo estilo para determinar $\hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$. En este caso los diagramas que aparecen son múltiples, por lo que solo explicaremos de forma esquemática el razonamiento. Para empezar, veamos los aporte a su flujo:

$$\frac{1}{N} \partial_t \hat{\Gamma}^{(4)} \Big|_\rho = -\frac{1}{2} \text{Diagram (tadpole)} + \left[\text{Diagram (swordfish)} + 3 \text{ perm} \right] \tag{E.6}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\text{Diagram 1} + 5 \text{ perm} \right] - \left[\text{Diagram 2} + 11 \text{ perm} \right] \\
& + \left[\text{Diagram 3} + 2 \text{ perm} \right] + \left[\text{Diagram 4} + 11 \text{ perm} \right].
\end{aligned}$$

Nuevamente podemos absorber el diagrama *tadpole* para, junto al lado izquierdo, conformar una derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$ a W fijo. Luego, podemos tomar el cociente respecto a $N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_3)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2+p_3)$. Entonces, combinando la derivada $\partial_t \hat{\Gamma}^{(4)}$ a W fijo con los cuatro diagramas que aparecen luego del *tadpole* en (E), podemos obtener un término:

$$\partial_t \left(\frac{\hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3)}{N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_3)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2+p_3)} \right). \quad (\text{E.7})$$

Trabajando los diagramas restantes, no es difícil convencerse que los últimos doce diagrama corresponden a las derivadas de $I_4(p_1, p_2, p_3)$ y sus dos permutaciones cíclicas de p_1, p_2 y p_3 . Algo más sutil, pero también directo de ver, es que los restantes veintiún diagramas constituyen las derivadas ∂_t :

$$NI_3(p_1, p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2)I_3(p_3, -p_1-p_2-p_3) + 2 \text{ perm.} \quad (\text{E.8})$$

Integrando a ambos lados de la ecuación de flujo, finalmente se obtiene la solución (4.50) para $\hat{\Gamma}^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_k^{(4)}(p_1, p_2, p_3) &= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_3)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2+p_3) \\
&\quad \left[\left(NI_3(p_1, p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2)I_3(p_3, p_4) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - I_4(p_1, p_2, p_3) \right) + 2 \text{ permutaciones cíclicas} \right] \\
&= \left[N^2 \text{Diagram 5} - N \text{Diagram 6} \right] + 2 \text{ permutaciones cíclicas.} \quad (\text{E.9})
\end{aligned}$$

en donde las permutaciones son en p_1, p_2 y p_3 . Como vemos, no se trata sino del resultado de resumación de burbujas que mencionamos en la sección 4.3.

Apéndice F

Detalles del cálculo de compatabilidad de identidades de Ward para $\Gamma_{abc}^{(3)}$ con $N \rightarrow \infty$

En este apéndice desarrollaremos parte de los cálculos realizados en la sección 4.4, que no son fundamentales para entender el argumento pero pueden ser de interés para el lector.

Un primer caso es el análisis de las contribuciones $\propto \phi_a \delta_{bc}$ (o las permutaciones de estos índices) en la identidad de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales (4.54):

$$\left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2) - 2D_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \Gamma_{iabc}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} \\ \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2} \int_q \dot{R}(q) G_{ij}(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) H_{abjkc}^{(2)}(p_1, p_2, q, q') \right\} G_{ki}(q) \Big|_{q'=-q} . \quad (\text{F.1})$$

Centrémonos en los términos proporcionales a la estructura mencionada en (F.1), comenzando con las contribuciones del lado izquierdo:

$$\left[p_1^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_1^\nu \partial p_1^\nu} - 2p_1^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_1^\nu \partial p_1^\mu} - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial r^\mu} \left[2\rho \hat{\Gamma}^{(3)}(r, p_1) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + r) \right] \Big|_{r=0} . \quad (\text{F.2})$$

Esto corresponde a desarrollar el lado izquierdo de (4.7) y considerar la contribución $\propto \phi_a \phi_b$. Veamos cómo también el término del lado derecho de (4.7) proporcional a $\phi_a \phi_b$ corresponde al término del lado derecho de (F.1) proporcional a $\phi_a \delta_{bc}$. Los diagramas de flujo de $\Gamma^{(3)}$ que debemos considerar, recordemos que son:

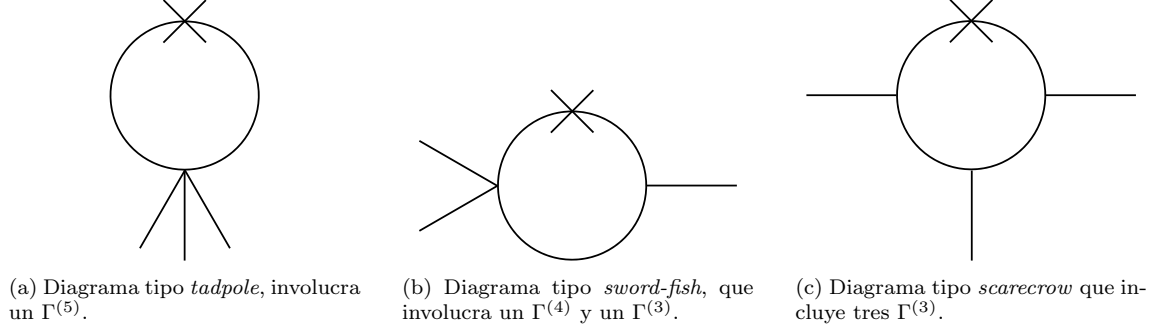


Figura F.1: Diagramas que contribuyen al flujo de $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$.

Comencemos por el más fácil, el de la figura F.1c. Este tipo de diagramas, en el límite $N \rightarrow \infty$ y observando la forma de $\Gamma^{(3)}$ (4.23), solo tienen aportaciones $\propto \phi_a \phi_b \phi_c$ – si queremos obtener un factor N al sumar en los índices del bucle. Por ende, no contribuye a la cuenta que nos ocupa. Veamos las contribuciones provenientes de los diagramas de las figuras F.1a y F.1b. Para ello, utilizaremos las expresiones de $\Gamma^{(4)}$ y $\Gamma^{(5)}$ – ecuaciones (4.25) y (4.26). Las partes $\propto \phi_a \delta_{bc}$ quedan:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \text{(tadpole)} &= -\frac{N}{2} \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, q + q') \right\} \Big|_{q'=-q} \\
 &= \frac{N}{2} \partial_t \int_q G_T(q) \Big|_W 2 \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \Big|_{r=0} \\
 &= -2 \partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \Big|_{r=0},
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(sword-fish)} &\xleftarrow{p_1} = N \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + q + q') G_T(p_1 + q) \right) \right\} \Big|_{q'=-q} \\
 &= N \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right\}^2 \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) \partial_{p_1^\mu} G_T(p_1 + q) \\
 &\quad + 2N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1^\mu} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \int_q \dot{R}(q) G_T^2(q) G_T(q + p_1) \\
 &= -\frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \left[\left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right\}^2 \partial_t I_2(p_1)|_W \right] = \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p) \right] \Big|_W.
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

En las últimas igualdades apelamos a las integrales I_n definidas en (4.48) y la expresión para $\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p)$ dada en (4.46). Esto comienza a parecerse mucho al tipo de argumentación que usamos para probar la compatibilidad de las identidades de Ward para dilataciones y transformaciones especial conformes en la sección 4.2. Y no es sorpresa, ya que

el sector $\propto \phi_a \delta_{bc}$ de la identidad que queremos probar (F.1) no contiene información nueva. En realidad, si tomamos una derivada respecto a ϕ_c que actúe exclusivamente en los ϕ_b del sector $\propto \phi_a \phi_b$ de la identidad de Ward para SCT de $\Gamma_{ab}^{(2)}$ (4.7), obtenemos el lado izquierdo (F.2), y en el lado derecho, la suma de (F.3) y (F.4). Esto es, una identidad sobre $\hat{\Gamma}^{(2)}(p)$ que queda probada automáticamente con la prueba general de la sección 4.2. Si $\Gamma_{ab}^{(2)}$ satisface la identidad de Ward para transformaciones conformes especiales, lo hacen su componente $\propto \phi_a \phi_b$ y su componente $\propto \delta_{ab}$ por separado – ya que la identidad no mezcla ambos sectores. En vistas de esto, este cálculo resulta innecesario en sí mismo. Sin embargo, en la prueba para $\Gamma_{abc}^{(3)}$ del capítulo 4, nos será de utilidad, así que pasemos en limpio nuestros resultados y escribamos la identidad conforme para $\hat{\Gamma}^{(2)}(p)$:

$$\begin{aligned} \left[p^\mu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\nu} - 2p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - 4D_\phi \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p) - 4D_\phi \rho \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(r, p) \Big|_{r=0} = \\ -2 \partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \Big|_{r=0} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_W \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Esta es la identidad para SCT que satisface $\hat{\Gamma}^{(2)}$.

Un segundo cálculo que omitimos realizar en el cuerpo principal, es detallar cómo se calculan las derivadas de las integrales I_3 e I_4 – definidas por (4.48), respecto a un momento r^μ evaluado en $r^\mu = 0$. Comenzando con la más sencilla

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r^\mu} I_3(r, p) \Big|_{r=0} &= \frac{\partial}{\partial r^\mu} \int_q G_T(q) G_T(q+r) G_T(q+r+p) \Big|_{r=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial r^\mu} \int_q G_T(q) G_T(q+p) G_T(q+p+r) \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial W} \int_q G_T(q) G_T(q+p) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial W} I_2(p). \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

En la segunda igualdad, hemos realizado el cambio de variable válido bajo el signo de integral $q \rightarrow -q - p - r$. Veamos ahora cómo tratar con la derivada de I_4 que nos aparece al intentar calcular (F.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r^\mu} [I_4(p_1, p_2, r) + I_4(p_2, r, p_1) + I_4(r, p_1, p_2)]_{r=0} = \\ = \frac{\partial}{\partial r^\mu} \int_q \{ G(q) G(q+p_1) G(q+p_1+p_2) G(q+p_1+p_2+r) \\ + G(q) G(q+p_2) G(q+p_2+r) G(q+p_1+p_2+r) \\ + G(q) G(q+r) G(q+r+p_1) G(q+r+p_1+p_2) \} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_2^\mu} \int_q G(q) G(q+p_1) \partial_W G(q+p_1+p_2) \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \int_q \partial_W G(q) G(q+p_1) G(q+p_1+p_2) \\
&\quad -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial p_2^\mu} \right) \int_q G(q) \partial_W G(q+p_1) G(q+p_1+p_2) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial p_2^\mu} \right) \partial_W I_3(p_1, p_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \int_q G(q) G(q+p_1) \partial_W G(q+p_1+p_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_2^\mu} \int_q \partial_W G(q) G(q+p_1) G(q+p_1+p_2).
\end{aligned}$$

De momento hemos abandonado el subíndice T en los propagadores para aliviar la notación. Estas derivadas eran necesarias para calcular el aporte del término en que se deriva a $\Gamma^{(4)}$ a la identidad conforme (F.1). Si ahora tomamos las demás derivadas que aún no hemos considerado de (4.59), obtenemos finalmente el extenso aporte del término que involucra la derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$, a menos de un factor $-2ND_\phi \partial_\rho W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} (\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[-\frac{N}{2} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) I_3(p_1, p_2) \partial_W I_2(p_1) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) I_3(p_1, p_2) \partial_W I_2(p_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \partial_W I_2(p_1 + p_2) \right) + \partial_W I_3(p_1, p_2) \right] \\
&\quad - \frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \left[\partial_1^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_W I_2(p_1) + \partial_2^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_W I_2(p_2) \right] \\
&\quad - \frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_1^\mu \partial_W I_2(p_1) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_2^\mu \partial_W I_2(p_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) (\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \partial_W I_2(p_1 + p_2) \right] \\
&\quad - \frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_W I_2(p_1) \partial_1^\mu I_3(p_1, p_2) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_W I_2(p_2) \partial_2^\mu I_3(p_1, p_2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \partial_W I_3(p_1, p_2) - \partial_1^\mu \int_q G(q-p_1) G(q) \partial_W G(q+p_2) \right. \\
&\quad \left. - \partial_2^\mu \int_q G(q-p_2) G(q) \partial_W G(q+p_1) \right].
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Hemos introducido una nueva notación en esta última ecuación, con el fin nuevamente de aliviar la notación:

$$\partial_{p_i}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}. \tag{F.9}$$

Esta expresión es extensa y de momento poco intuitiva, simplifiquémosla todo lo posible. La tercer y cuarta línea pueden re-expresarse como:

$$-\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \left[\partial_1^\mu (\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_W I_2(p_1)) + 1 \rightarrow 2 \right]; \tag{F.10}$$

El primer término de la segunda línea de (F.8) y su quinta línea se simplifican a:

$$-\frac{N}{4}I_3(p_1, p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_W I_2(p_1 + p_2) \right). \quad (\text{F.11})$$

El segundo término de la segunda línea y el primero de la séptima también pueden simplificarse, dando:

$$\frac{1}{2}(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_W I_3(p_1, p_2) \right). \quad (\text{F.12})$$

Con estas simplificaciones, podemos expresar ahora (F.8) como:

$$\begin{aligned} & -\frac{N}{4}(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)I_3(p_1, p_2)\partial_W I_2(p_1) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)I_3(p_1, p_2)\partial_W I_2(p_2) \right] \\ & -\frac{N}{4}I_3(p_1, p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_W I_2(p_1 + p_2) \right) \\ & +\frac{1}{2}(\partial_1^\mu + \partial_2^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_W I_3(p_1, p_2) \right) \\ & -\frac{N}{2}\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)I_3(p_1, p_2) \left[\partial_1^\mu(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\partial_W I_2(p_1)) + 1 \rightarrow 2 \right] \\ & -\frac{N}{2}\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\partial_W I_2(p_1)\partial_1^\mu I_3(p_1, p_2) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\partial_W I_2(p_2)\partial_2^\mu I_3(p_1, p_2) \right] \\ & -\frac{1}{2}\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\partial_1^\mu \int_q G(q - p_1)G(q)\partial_W G(q + p_2) + \partial_2^\mu \int_q G(q - p_2)G(q)\partial_W G(q + p_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Pasemos ahora a estudiar el lado derecho de (F.1), es decir las contribuciones provenientes de los diagramas en la figura F.1. Solamente consideraremos los aportes $\propto \phi_a \phi_b \phi_c$. Para el diagrama *tadpole* (figura F.1a), utilizando (4.26), el aporte resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{tadpole diagram} &= -\frac{N}{2} \int_q \dot{R}(q)G^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, q + q') \right\} \Big|_{q'=-q} \\ &= \left(-N \int_q \dot{R}(q)G^2(q) \right) \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0} = -2\partial_t \rho|_W \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0}. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Por otro lado, de los diagramas tipo *swordfish* (figura F.1b), tenemos dos tipos de aportes. Primero, cuando los momentos explícitos no entran al mismo vértice:

$$\text{swordfish diagram} = N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \int_q \dot{R}(q)G^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1 + q + q', p_2)G(q + p_1) \right\} \Big|_{q'=-q} \quad (\text{F.15})$$

$$= -\frac{N}{2}\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\left\{\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1,p_2)\partial_{p_1}^\mu(\partial_t I_2(p_1)|_W)+2\partial_t I_2(p_1)|_W\partial_{p_1}^\mu\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1,p_2)\right\}.$$

Tendremos otro término igual intercambiando p_1 con p_2 proveniente del diagrama donde p_2 ingresa al vértice de 3-patas, y además, tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= N \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \int_q \dot{R}(q) G^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \right. \\
&\quad \left. \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2 + q + q') G(q + p_1 + p_2) \right\} \Big|_{q'=-q} \quad (\text{F.16}) \\
&= -\frac{N}{4} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) (\partial_t I_2(p_1 + p_2)|_W) \right. \\
&\quad \left. + 2 \partial_t I_2(p_1 + p_2)|_W (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right\}.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar estos resultados, expresando la suma de los diagramas *sword-fish* como:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\text{Diagram} \right] = \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) + (1 \rightarrow 2) \right. \\ \left. - 2 \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-2} \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \rightarrow 2) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right)^{-1} \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right) \right] \\ - 2 \left[\partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) + (1 \rightarrow 2) \right]. \quad (\text{F.17})$$

En esta ecuación hemos subrayado con ... y ... dos términos que cancelaremos más adelante con contribuciones del lado izquierdo. Consideremos ahora las contribuciones de los diagramas F.1c *scarecrow*:

$$\begin{aligned}
\text{Diagram: } \text{A circle with an incoming line from the left labeled } p_1 \text{ and an outgoing line to the right. A vertical line enters from the bottom labeled } p_2 \text{ and exits from the top. The top vertex is crossed out with an 'X'.} \\
= -N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\int_q\dot{R}(q)G^2(q)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial q^\mu}+\frac{\partial}{\partial q'^\mu}\right)G(q+p_1)G(q+p_1+p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2+q+q')\right\}\bigg|_{q'=-q}
\end{aligned} \tag{F.18}$$

$$\begin{aligned}
&= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_{p_1}^\mu \int_q \partial_t G(q - p_1)|_W G(q)G(q + p_2) \right. \\
&\quad \left. + \int_q \partial_t G(q - p_1)|_W G(q)G(q + p_2)(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right\},
\end{aligned}$$

que además tendrá su contraparte con p_1 y p_2 intercambiados. La última contribución vendrá del diagrama (F.1c) con la siguiente configuración de momentos:

$$\begin{aligned}
&\text{Diagram: A circle with a cross on top. An incoming line from the left is labeled } p_1 \text{ with an arrow pointing right. An outgoing line to the right is labeled } p_2 \text{ with an arrow pointing left. A vertical line extends downwards from the bottom of the circle.} \\
&= -N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \int_q \dot{R}(q)G^2(q) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial q'^\mu} \right) \right. \\
&\quad \left. G(q + p_1)G(q' + p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2 + q + q') \right\} \Big|_{q'=-q} \\
&= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \\
&\quad (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \int_q \partial_t G(q)|_W G(q - p_1)G(q + p_2) \right\}.
\end{aligned} \tag{F.19}$$

Podemos simplificar la contribución de los diagramas tipo *scarecrow*, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 \left[\text{Diagram: A circle with a cross on top. Two horizontal lines enter from the left and exit to the right. A vertical line extends downwards from the bottom of the circle.} \right] \\
&= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left[(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left\{ \partial_t I_3(p_1, p_2)|_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2)\partial_{p_2}^\mu \int_q \partial_t G(q - p_1)|_W G(q)G(q + p_2) - (1 \leftrightarrow 2) \right].
\end{aligned} \tag{F.20}$$

Con este último resultado, tenemos todas las piezas del puzzle a disposición, ahora debemos trabajar con ellas y ver si efectivamente se satisface, como esperamos, que los lados izquierdo y derecho de (F.1) sean iguales.

Comencemos a mezclar ambos lados de la igualdad. Combinando el diagrama *tad-pole* (F.14) con el primer término de (4.57), obtenemos:

$$2 \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0} (\partial_t \rho|_W - 2D_\phi \rho) = -4W \partial_W \rho \frac{\partial}{\partial r^\mu} \hat{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, r) \Big|_{r=0}. \tag{F.21}$$

Ya estamos en condiciones de empezar a cancelar términos del lado derecho con términos del lado izquierdo. Para ello, comencemos utilizando (4.55) para reescribir parte de (4.56), y veamos como obtenemos términos idénticos a algunas de las contribuciones de los diagramas:

$$\begin{aligned}
& NI_3(p_1, p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \leftrightarrow \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \leftrightarrow \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right\} = \\
& = 4D_\phi \rho NI_3(p_1, p_2) \left[\partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) + (1 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow 1 + 2) \right]_{r=0} \\
& \quad + 2ND_\phi \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right] I_3(p_1, p_2) \\
& \quad - 2\partial_t \rho|_W \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \Big|_{r=0} + (1 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow 1 + 2) \right] \\
& \quad + \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \Big|_W + (1 \rightarrow 2) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right)^{-1} (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \Big|_W \right].
\end{aligned} \tag{F.22}$$

Nótese que hemos cancelado las dos últimas líneas con los términos subrayados de (F.17) – se cancela cada término con el subrayado del color respectivo. Restan evaluar los términos que llamaremos “cruzados”, en los cuales los operadores de derivadas dobles de (4.56) no golpean exclusivamente en uno de los factores, pero postergaremos su evaluación, momentáneamente. Pasemos en limpio los términos que aún no se han cancelado:

$$\begin{aligned}
& N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] I_3(p_1, p_2) \\
& \quad + \text{términos cruzados} - 4W \partial_W \rho \partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} - 2D_\phi (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \\
& \quad + 2ND_\phi \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\
& \quad + 4NW \partial_W \rho I_3(p_1, p_2) \left[\partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, r) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) + (1 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow 1 + 2) \right]_{r=0}. \\
& \stackrel{?}{=} \left(N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left[\partial_t I_3(p_1, p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \right] \right) \\
& \quad - \left(\partial_{p_2}^\mu \int_q \partial_t G(q - p_1) G(q) G(q + p_2) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
& \quad - 2\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-2} \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \rightarrow 2) \right] \\
& \quad + 2 \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) + (1 \rightarrow 2) \right].
\end{aligned} \tag{F.23}$$

En esta última versión (F.23) de (F.1), hemos subrayado con ... un término que se

cancelará con uno de los aportes de la derivada de $\hat{\Gamma}^{(4)}$ – (F.13). Asimismo hemos utilizado paréntesis de color $(\dots)$ y $(\dots)$ para indicar términos que simplificaremos con aportes también de esta derivada. Reescribamos dicho aporte para realizar las simplificaciones:

$$\begin{aligned}
& -4W \partial_W \rho \partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(4)}(r, p_1, p_2) \Big|_{r=0} = -4W \rho' \left[\frac{N}{2} \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) W' \right. \\
& \quad \left. \left\{ \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_W I_3(p_1, p_2) \right) \right\} \right. \\
& \quad - \left(\partial_{p_1}^\mu \int_q G(q - p_1) G(q) \partial_W G(q + p_2) + \partial_{p_2}^\mu \int_q G(q - p_2) G(q) \partial_W G(q + p_1) \right) \Big\} \\
& \quad + \frac{N}{2} I_3(p_1, p_2) W' \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right) \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \\
& \quad + N W' \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\
& \quad \left. + N I_3(p_1, p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_r^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(r, p_1) \Big|_{r=0} + (1 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow (1 + 2)) \right\} \right]. \tag{F.24}
\end{aligned}$$

Aquí hemos cancelado el último término con el subrayado de (F.23). Para simplificar los paréntesis de color, es necesario apelar a la relación entre las derivadas respecto a las diferentes variables de las funciones de punto fijo explicada en el capítulo 4 – la ecuación (4.67). Recordemos que por ejemplo, para una función f de un momento p y la derivada del potencial W , esta nos da que:

$$\partial_t f(p, W; k) \Big|_p = d_f f(p, W; k) - d_p \partial_p f(p, W; k) - d_W \partial_W f(p, W; k). \tag{F.25}$$

Trabajemos ahora combinando las contribuciones de ambos lados de la igualdad entre paréntesis de colores, utilizando (4.68) que acabamos de mencionar para $I_3(p_1, p_2; W)$:

$$\begin{aligned}
& \left(\dots \right) = N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) (\partial_t + 2W \partial_W) I_3(p_1, p_2) \right\} \\
& = N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) (p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu + p_2^\nu \partial_{p_2}^\nu - (d - 6)) I_3(p_1, p_2) \right\} \\
& = - N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \left\{ (p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu + p_2^\nu \partial_{p_2}^\nu - (d - 6)) I_3(p_1, p_2) \right\} \\
& \quad - N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \left(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu \right) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left\{ (p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu + p_2^\nu \partial_{p_2}^\nu - (d - 6)) I_3(p_1, p_2) \right\}. \tag{F.26}
\end{aligned}$$

De igual manera, podemos trabajar:

$$\begin{aligned}
& \left(\dots \right) = - N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_2}^\mu \left(\int_q G(q) G(q + p_2) (\partial_t + 2W \partial_W) G(q - p_1) \right) \\
& \quad + (1 \leftrightarrow 2) \tag{F.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2)\partial_{p_2}^\mu \left(\int_q G(q)G(q+p_2)(2+(p_1-q)^\nu\partial_1^\nu)G(q-p_1) \right) \\
&\quad + (1 \leftrightarrow 2) \\
&= N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left[2(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) \right. \\
&\quad \left. (p_1^\nu\partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu + p_2^\nu\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu) I_3(p_1, p_2) + \int_q (\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2) \right].
\end{aligned}$$

Sumemos ahora este resultado con la primer línea de la última igualdad de (F.26), factorizando para aliviar la notación un $N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2)$:

$$\begin{aligned}
&2(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) + (p_1^\nu\partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu + p_2^\nu\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu) I_3(p_1, p_2) \\
&\quad + \int_q (\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2) \\
&\quad - (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \{ (p_1^\nu\partial_{p_1}^\nu + p_2^\nu\partial_{p_2}^\nu - (d-6)) I_3(p_1, p_2) \} \\
&= \left[(d-5)(\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) - \underline{(p_1^\nu\partial_{p_1}^\nu\partial_{p_1}^\mu + p_2^\nu\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_2}^\mu)} \right] I_3(p_1, p_2) \\
&\quad + \int_q (\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2).
\end{aligned} \tag{F.28}$$

Hemos subrayado en ... un aporte que se cancela con una de las derivadas del operador que actúa sobre I_3 en el lado izquierdo, como veremos.

Pasemos en limpio lo que nos va quedando, considerando las simplificaciones que hemos hecho y cancelando con rojo el aporte mencionado en la primer línea:

$$\begin{aligned}
&N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - \underline{2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu}} - (2D_\phi + d-5)\partial_i^\mu \right] I_3(p_1, p_2) \\
&\quad + \left(2D_\phi \left[N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + 1 \leftrightarrow 2 \right] I_3(p_1, p_2) - (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \right] \right) \\
&\quad - \left(2NI_3(p_1, p_2)W \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\partial_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \right) \\
&\quad - \left(4NW\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left\{ \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\partial_W \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \right) \\
&\quad + \text{términos cruzados} \\
&\stackrel{?}{=} - N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \{ (p_1^\nu\partial_{p_1}^\nu + p_2^\nu\partial_{p_2}^\nu - (d-6)) I_3(p_1, p_2) \} \\
&\quad + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \int_q (\partial_{p_2}^\nu\partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu\partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2) \\
&\quad - 2\hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) \left[\underline{\left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-2} \partial_t \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \rightarrow 2)} \right] \\
&\quad + \left(2 \left[\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2) + (1 \rightarrow 2) \right] \right).
\end{aligned} \tag{F.29}$$

Nuevamente hemos colocado entre paréntesis de color $(\dots)$ y $(\dots)$ términos que simplificaremos a continuación. Asimismo subrayamos $\dots$ un aporte que cancelaremos con parte de $(\dots)$. Para empezar, veamos cómo reducir el paréntesis $(\dots)$:

$$(\dots) = -2ND_\phi \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \right). \quad (\text{F.30})$$

Asimismo, podemos combinar la tercer y cuarta líneas del lado izquierdo con la última del lado derecho, usando (F.25) para $\hat{\Gamma}^{(2)}$, con lo cual $(\dots)$ luce:

$$\begin{aligned} (\dots) &= 2N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) [\partial_t + 2W\partial_W] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \\ &\quad + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) I_3(p_1, p_2) [\partial_t + 2W\partial_W] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \\ &\quad + 2 \left(\partial_t \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) N I_3(p_1, p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right)^{-1} \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \right) + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= 2N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) [-p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu + (4-d)] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \\ &\quad + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) [-p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu + (4-d)] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Hemos cancelado la tercer línea con el término subrayado $\dots$ de (F.29).

Pasando en limpio, lo que hemos obtenido es:

$$\begin{aligned} &N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - (2D_\phi + d - 5) \partial_i^\mu \right] I_3(p_1, p_2) \\ &\quad - 2ND_\phi \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \right) \\ &\quad + \text{términos cruzados} \\ &\stackrel{?}{=} -N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left\{ \left(\underline{p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu} + \underline{p_2^\nu \partial_{p_2}^\nu} - (d-6) \right) I_3(p_1, p_2) \right\} \\ &\quad + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \int_q (\partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q) G(q-p_1) G(q+p_2) \\ &\quad + 2N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) \left[\underline{-p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu} + (4-d) \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \\ &\quad + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \left[\underline{-p_1^\nu \partial_{p_1}^\nu} + (4-d) \right] \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

Hemos marcado tres términos $\dots$, $\dots$ y $\dots$ que cancelaremos a continuación. Para ello, se vuelve necesario estudiar los “términos cruzados”, cuya evaluación nos permitirá concluir la prueba. Veámoslos:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - 2p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} - 2D_\phi \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \stackrel{\text{cross}}{=} \\
& 2N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) p_1^\mu \left\{ \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) + \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right. \\
& + \left. \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right\} - 2N p_1^\nu \left\{ \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \right. \\
& + \left(\partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) \right) + \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) \\
& + \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) + \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \\
& + \left. \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right) \right\} + (1 \leftrightarrow 2).
\end{aligned} \tag{F.33}$$

Recordemos ahora las identidades de Ward-Takahashi (3.31) y (3.32) correspondientes a rotaciones para una función que depende de $(x - y)$, como es el caso de $\hat{\Gamma}^{(2)}(x, y)$, o de $(x - z)$ e $(y - z)$, como es el caso de $I_3(x, y, z)$. En el espacio de momento:

$$\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \hat{\Gamma}^{(2)}(p) = 0, \tag{F.34}$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right] I_3(p_1, p_2) = 0, \tag{F.35}$$

En vistas de estas relaciones, que se cumplen dentro de nuestras hipótesis, podemos simplificar los “términos cruzados” que todavía no hemos tratado. En concreto:

términos cruzados restantes =

$$\begin{aligned}
& 2N \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) p_1^\mu \left\{ \left(\partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \right) + \left(\partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right) \right. \\
& + \left. \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right) \right\} - 2N p_1^\nu \left\{ \left(\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\mu I_3(p_1, p_2) \right) \right. \\
& + \left(\partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \partial_{p_1}^\nu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) I_3(p_1, p_2) \right) + \left(\partial_{p_1}^\mu \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1 + p_2) \partial_{p_1}^\nu I_3(p_1, p_2) \right) \\
& + (1 \leftrightarrow 2).
\end{aligned} \tag{F.36}$$

En esta última ecuación, hemos cancelado los términos entre sí de acuerdo a sus colores. Es decir, tenemos tres cancelaciones término a término. A esta altura, hemos reducido la identidad especial conforme inicial (F.1) a:

$$\begin{aligned}
& N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \left[\sum_{i=1}^2 p_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} - p_i^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\mu} \right] I_3(p_1, p_2) \\
& (-4D_\phi - d + 5)N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) \\
& - 2D_\phi N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \\
& \stackrel{?}{=} (8-2d)N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) I_3(p_1, p_2) \\
& + (2(4-d) + (d-6)) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)I_3(p_1, p_2) (\partial_{p_1}^\mu + \partial_{p_2}^\mu) \hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \\
& + N\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_2)\hat{\Gamma}^{(2)}(p_1+p_2) \int_q (\partial_{p_2}^\nu \partial_{p_1}^\mu - \partial_{p_1}^\nu \partial_{p_2}^\mu) q^\nu G(q)G(q-p_1)G(q+p_2).
\end{aligned} \tag{F.37}$$

Desde este punto, el cálculo se retoma en el cuerpo principal de esta tesis.

Apéndice G

Cálculo de $\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2)$

En este apéndice abordaremos el cálculo de la función de vértice $\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2)$, cuya forma dimos en el capítulo 4. Para su obtención, haremos uso del mismo tipo de manipulaciones empleadas en la sección 4.3 y en el apéndice E. De forma análoga a lo argumentado en el apéndice E y a las reglas para tomar las contribuciones dominantes para el flujo de $\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p)$ – ecuación (4.78), los diagramas que debemos considerar solo tienen patas de “ ρ ” y K . Esto es para extraer del flujo de $\Gamma_{ab}^{(2,1)}(p_1, p_2)$,

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(p_1, p_2) = \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) \phi_a \phi_b + \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p_1 + p_2) \delta_{ab}, \quad (\text{G.1})$$

la componente $\propto \phi_a \phi_b$ que es dominante en el límite $N \rightarrow \infty$, lo cual nos da el flujo de $\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2)$. Teniendo cuidado con esto, la ecuación de flujo resulta:

$$\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) \Big|_{\rho} = -N \left[\frac{1}{2} \left(\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right) - \left(\text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + (1 \leftrightarrow 2) \right) \right]. \quad (\text{G.2})$$

El diagrama *tadpole* se combina con el lado izquierdo para producir, igual que en manipulaciones anteriores, una derivada $\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,1)}$ a W fijo. Los diagramas con tres vértices, por otro lado, se puede sumar para producir una derivada de $I_3(p_1, p_2)$. Por otra parte, los diagramas restantes se pueden re-expresar también como derivadas de $\hat{\Gamma}^{(2,0)}$ o $\hat{\Gamma}^{(1,1)}$. El resultado intermedio es:

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) = & N \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p_1 + p_2) \partial_t I_3(p_1, p_2) \\ & + \hat{\Gamma}^{(3,0)}(p_1, p_2) \frac{\partial_t \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p_1 + p_2)}{\hat{\Gamma}^{(1,1)}(p_1 + p_2)} + \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) \frac{\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1)}{\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1)} + (1 \leftrightarrow 2).\end{aligned}\quad (\text{G.3})$$

Llegado a este punto, podemos definir:

$$\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) = N \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_2) \hat{\Gamma}^{(1,1)}(p_1 + p_2) \hat{\hat{\Gamma}}^{(2,1)}(p_1, p_2), \quad (\text{G.4})$$

y calcular la información nueva respecto a $\hat{\Gamma}^{(1,1)}$, que está contenida en el $\hat{\hat{\Gamma}}^{(2,0)}(p_1, p_2)$:

$$\frac{\partial_t \left(\hat{\hat{\Gamma}}^{(2,1)}(p_1, p_2) - I_3(p_1, p_2) \right)}{\hat{\hat{\Gamma}}^{(2,0)}(p_1, p_2) - I_3(p_1, p_2)} = - \frac{\partial_t \hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1 + p_2)}{\hat{\Gamma}^{(2,0)}(p_1 + p_2)}. \quad (\text{G.5})$$

Podemos integrar esta ecuación, y finalmente obtenemos la expresión para $\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2)$:

$$\hat{\Gamma}^{(2,1)}(p_1, p_2) = \chi^{(1)}(p_1 + p_2) \hat{\Gamma}_k^{(3,0)}(p_1, p_2) + \hat{\Gamma}_k^{(2,0)}(p_1) \hat{\Gamma}_k^{(2,0)}(p_2) \chi^{(2)}(p_1, p_2), \quad (\text{G.6})$$

en donde la función $\chi^{(2)}$ queda determinada por la física microscópica al igual que $\chi^{(1)}$:

$$\chi^{(2)}(p_1, p_2; W; \Lambda) = \chi^{(1)}(p_1 + p_2) \frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2,1)}(p_1, p_2)}{\Gamma_\Lambda^{(2,0)}(p_1) \Gamma_\Lambda^{(2,0)}(p_2)}. \quad (\text{G.7})$$

Nuevamente, realizando el cambio de variable $\rho \rightarrow W$ es posible obtener una expresión exacta para la función del vértice – aunque su forma depende de la física microscópica.

$$\begin{aligned}& \int_x \Gamma_{k,i}^{(1,1)}(x; y_1) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) + K(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \Gamma_k^{(0,2)}(; x, y_1) \\ & - (d_\phi + y_1^\mu \partial_\mu) \Gamma_k^{(0,1)}(; y_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \Gamma^{(2,1)}(; y_1) G \right].\end{aligned}\quad (\text{G.8})$$

En este apéndice deduciremos las identidades de Ward-Takahashi correspondientes a las transformaciones de escala y conforme especial, cuando consideramos la presencia de una fuente $K(x)$ para un operador compuesto $\mathcal{O}(x)$. En concreto veremos las versiones de las identidades correspondientes a las funciones de vértice $\Gamma_a^{(1,1)}(p)$ y $\Gamma_{ab}^{(2,1)}(p_1, p_2)$.

El tratamiento de los lados derechos de las identidades de Ward es completamente análogo al realizado en el capítulo 3 y en el apéndice C. La única sutileza es que ahora, en lugar de tener al objeto $H_{a_1 \dots a_n}^{(n)}$, tendremos una construcción equivalente $H_{a_1 \dots a_{n-1}}^{(n-1,1)}$ en donde en cada diagrama que consideramos debemos cambiar una pata de un vértice correspondiente a derivada respecto a $\phi_{a_n}(x)$ por la pata correspondiente a derivar según $K(x)$. Al momento de transformar a espacio de Fourier, simplemente asignamos el momento implícito ($p_n = -\sum_{i=1}^{n-1} p_i$) a esa pata.

En esta sección pondremos el acento en la modificación del lado izquierdo de las identidades. Para ello, partamos de la identidad deducida para $\Gamma^{(0,1)}$ bajo transformaciones de escala:

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{k,i}^{(1,1)}(x; y_1) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) - K(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \Gamma_k^{(0,2)}(x; y_1) \\ & - (d_\phi + y_1^\mu \partial_\mu) \Gamma_k^{(0,1)}(y_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G \Gamma^{(3,1)}(y_1) G \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

El segundo término de (G.9) tiene un factor $K(x)$. Como nos interesan las funciones de vértice $\Gamma_a^{(1,1)}$ y $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ – las funcionales en configuración homogénea – no tomaremos más derivadas respecto a la fuente para dicho operador. En consecuencia, dicho factor sobrevive en las identidades para estas funciones, mas al evaluar en el punto fijo con $K(x) = 0$, se anula. Por ende, no aporta a las identidades de Ward-Takahashi en configuración uniforme y con fuente nula para el operador. Aún sin especificar la configuración, al tomar una derivada funcional respecto a $\phi_a(x_1)$ de (G.9) tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{ia}^{(2,1)}(x, x_1; y_1) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \phi_i(x) - K(x) (d_\phi + x^\mu \partial_\mu) \Gamma_a^{(1,2)}(x_1; x, y_1) \\ & + (d_\phi - d_\phi - d - d^{x_1} - d^{y_1}) \Gamma_k^{(1,1)}(x_1; y_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G H^{(1,1)}(x_1; y_1) G \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Si transformamos a espacio de Fourier imponiendo la coordenada $y_1 \equiv 0$ y evaluando en ϕ_a uniforme y $K = 0$, obtenemos

$$\left(d_\phi - d_\phi + p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} + 2d_\phi \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Gamma_a^{(1,1)}(p) = \frac{1}{2} \int_q \dot{R}(q) G_{ij}^2(q) H_{aij}^{(1,1)}(p, q, -q). \quad (\text{G.11})$$

Para obtener la ecuación de dilataciones de $\Gamma_{ab}^{(2,1)}(p_1, p_2)$ derivamos respecto a $\phi_b(x_2)$ la identidad (G.10):

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{iab}^{(3,1)}(x, x_1, x_2; y_1) (d_\phi + d^x) \phi_i(x) - K(x) (d_\phi + d^x) \Gamma_{ab}^{(2,2)}(x_1, x_2; x, y_1) \\ & + (2d_\phi - d_\phi - 2d - d^{x_1} - d^{x_2} - d^{y_1}) \Gamma_{ab}^{(2,1)}(x_1, x_2; y_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G H^{(2,1)} G \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Estas son las identidades de Ward-Takahashi para dilataciones de las funciones que nos interesan. Ahora tornemos nuestra atención a la identidad que utilizamos en el capítulo 4 – la restricción conforme especial para $\Gamma_a^{(1,1)}(p)$. Nuevamente las diferencias vienen esencialmente en el lado izquierdo. Comencemos con la identidad equivalente correspondiente a $\Gamma_a^{(1)}$ vista en el apéndice C:

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{ia}^{(2,0)}(x, x_1) (K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu) \phi_i(x) - K(x) (K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu) \Gamma_a^{(1,1)}(x_1; x) \\ & - (K_\mu^{x_1} - 2(d - d_\phi) x_{1\mu}) \Gamma_a^{(1,0)}(x_1) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G^2 (\partial_q + \partial_{q'}) H^{(1,0)} \right]_{q'=-q}. \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

Si ahora derivamos respecto a $K(y_1)$:

$$\begin{aligned} & \int_x \Gamma_{ia}^{(2,1)}(x, x_1; y_1) (K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu) \phi_i(x) - K(x) (K_\mu^x - 2d_\phi x_\mu) \Gamma_a^{(1,2)}(x_1; x, y_1) \\ & - (K_\mu^{x_1} - 2(d - d_\phi) x_{1\mu} + K_\mu^{y_1} - 2d_\phi y_{1\mu}) \Gamma_a^{(1,1)}(x_1; y_1) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G^2 (x_\mu + y_\mu) H^{(1,1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Podemos ahora transformar a espacio de Fourier esta identidad, restringiéndonos a $K(x) = 0$, campo uniforme, y eligiendo $y_1 = 0$. Esto nos da:

$$\begin{aligned} & \left(p_\mu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} - 2p_\nu \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} - 2d_\phi \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) \Gamma_a^{(1,1)}(p) - 2d_\phi \phi_i \frac{\partial}{\partial r_\mu} \Gamma_{ia}^{(2,1)}(r, p) \Big|_{r=0} = \\ & -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\dot{R}_k G^2 (\partial_q + \partial_{q'}) H^{(1,1)} \right]_{q'=-q}. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Esta es la identidad general de Ward-Takahashi para transformaciones conformes especiales de $\Gamma_a^{(1,1)}(p)$, que utilizamos en el capítulo 4.

Apéndice H

Resultados crudos para los exponentes ν y ω

En este apéndice presentamos los resultados crudos, obtenidos según los criterios PMS (explicado en el capítulo 2) y PMC (explicado en el capítulo 5) para los diversos valores de N estudiados, y para los dos reguladores escogidos para el cálculo: el regulador exponencial E , y el regulador de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.62783	0.84889
	W	0.62816	0.84820
PMS	E	0.62796	0.84828
	W	0.62822	0.84800

Tabla H.1: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 1$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.66675	0.78480
	W	0.66741	0.78651
PMS	E	0.66695	0.78597
	W	0.66675	0.78712

Tabla H.2: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 2$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.70452	0.74290
	W	0.70541	0.74630
PMS	E	0.70473	0.74463
	W	0.70552	0.74716

Tabla H.3: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 3$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.74037	0.72054
	W	0.74133	0.72456
PMS	E	0.74056	0.72145
	W	0.74143	0.72511

Tabla H.4: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 4$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.77322	
	W	0.77410	
PMS	E	0.77338	0.71399
	W	0.77419	0.71831

Tabla H.5: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 5$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W . Recordemos de la discusión en la sección 5.3.4 que para ω , no hay predicción PMC para este valor de N .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.87877	0.78058
	W	0.87888	0.78368
PMS	E	0.87906	0.78110
	W	0.87920	0.78406

Tabla H.6: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 10$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.94300	0.88541
	W	0.94287	0.88624
PMS	E	0.94289	0.88549
	W	0.94278	0.88625

Tabla H.7: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 20$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.98941	0.97704
	W	0.98937	0.97723
PMS	E	0.98940	0.97818
	W	0.98937	0.97821

Tabla H.8: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 100$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	0.58790	0.95063
	W	0.58792	0.94640
PMS	E	0.58789	0.94743
	W	0.58791	0.94531

Tabla H.9: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 0$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

	regulador	ν	ω
PMC	E	$0.5+6.3 \times 10^{-6}$	0.81898
	W	$0.5+2.1 \times 10^{-6}$	0.81640
PMS	E	$0.5+6.3 \times 10^{-6}$	0.81833
	W	$0.5+2.1 \times 10^{-6}$	0.82087

Tabla H.10: Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = -2$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W .

Bibliografía

- [1] R. Peierls and M. Born. On Ising's model of ferromagnetism. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):477, January 1936.
- [2] Robert B. Griffiths. Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional ising ferromagnet. *Physical Review*, 136:A437–A439, Oct 1964.
- [3] C. N. Yang and T. D. Lee. Statistical theory of equations of state and phase transitions. i. theory of condensation. *Physical Review*, 87:404–409, Aug 1952.
- [4] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Physical Review*, 87:410–419, Aug 1952.
- [5] G.'t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, 72(3):461–473, 1974.
- [6] Yutaka Okabe and Michiyoshi Oku. $1/N$ Expansion Up to Order $1/N^2$. III: Critical Exponents and for $d=3$. *Progress of Theoretical Physics*, 60(5):1287–1297, 11 1978.
- [7] A. N. Vasiliev, Yu. M. Pismak, and Yu. R. Khonkonen. $1/N$ expansion: calculation of the exponent η in the order $1/N^3$ by the conformal bootstrap method. *Theor. Math. Phys.*, 50:127–134, 1982.
- [8] D. J. Broadhurst, J. A. Gracey, and D. Kreimer. Beyond the triangle and uniqueness relations: non-zeta counterterms at large n from positive knots, 1996.
- [9] W Lenz. Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen Körpern. *Z. Phys.*, 21:613–615, 1920.
- [10] Y. Kats, L. Klein, J. W. Reiner, T. H. Geballe, M. R. Beasley, and A. Kapitulnik. Magnetic resistivity in SrRuO_3 and the ferromagnetic phase transition. *Physical Review B*, 63:054435, Jan 2001.
- [11] M. Marinelli, F. Mercuri, and D.P. Belanger. Critical behaviour of thermal parameters of Fe_2 at the Néel temperature. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 140-144:1547–1548, 1995. International Conference on Magnetism.

- [12] M.A. Salgueiro, B.G. Almeida, M.M. Amado, J.B. Sousa, B. Chevalier, and J. Étouneau. Critical behaviour of the magnetoresistance of NdRu_2Si_2 near the Néel point. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 125(1):103–109, 1993.
- [13] Critical exponent of U_3P_4 . *Physica B: Condensed Matter*, 186-188:785–787, 1993.
- [14] D.P. Belanger, P. Nordblad, A.R. King, V. Jaccarino, L. Lundgren, and O. Beckman. Critical behavior in anisotropic antiferromagnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 31-34:1095–1096, 1983.
- [15] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65:117–149, Feb 1944.
- [16] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Physical Review*, 85:808–816, Mar 1952.
- [17] Maddalena Venturoli, Eric Vanden-Eijnden, and Giovanni Ciccotti. Kinetics of phase transitions in two dimensional Ising models studied with the string method. *Journal of Mathematical Chemistry*, 45:188–222, 01 2009.
- [18] D M Sullivan, G W Neilson, H E Fischer, and A R Rennie. Small angle neutron scattering from D_2O in the critical region. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 12(15):3531, apr 2000.
- [19] A. Haupt and J. Straub. Evaluation of the isochoric heat capacity measurements at the critical isochore of SF_6 performed during the German Spacelab mission D-2. *Physical Review E*, 59:1795–1802, Feb 1999.
- [20] Pierre Damay, Françoise Leclercq, Renato Magli, Ferdinando Formisano, and Peter Lindner. Universal critical-scattering function: An experimental approach. *Physical Review B*, 58:12038–12043, Nov 1998.
- [21] I.M. Abdulagatov, N.G. Polikhronidi, and R.G. Batyrova. Measurements of the isochoric heat capacities c_v of carbon dioxide in the critical region. *The Journal of Chemical Thermodynamics*, 26(10):1031–1045, 1994.
- [22] W. L. Bragg and E. J. Williams. The Effect of Thermal Agitation on Atomic Arrangement in Alloys. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 145(855):699–730, July 1934.
- [23] Foster C. Nix and William Shockley. Order-disorder transformations in alloys. *Rev. Mod. Phys.*, 10:1–71, Jan 1938.
- [24] Toshinosuke Mutô and Yutaka Takagi. The theory of order-disorder transitions in alloys. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1:193–282, 1955.

- [25] V. L. Berezinsky. Destruction of long range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. I. Classical systems. *Sov. Phys. JETP*, 32:493–500, 1971.
- [26] V. L. Berezinsky. Destruction of Long-range Order in One-dimensional and Two-dimensional Systems Possessing a Continuous Symmetry Group. II. Quantum Systems. *Sov. Phys. JETP*, 34(3):610, 1972.
- [27] J M Kosterlitz and D J Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 6(7):1181, apr 1973.
- [28] L. Landau. Theory of the superfluidity of helium ii. *Physical Review*, 60:356–358, Aug 1941.
- [29] Toni Schneider and J. Singer. *Phase Transition Approach to High Temperature Superconductivity*. 01 2000.
- [30] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, and U. E. Israelsson. Heat capacity and thermal relaxation of bulk helium very near the lambda point. *Physical Review Lett.*, 76:944–947, Feb 1996.
- [31] J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. A. Stricker, D. R. Swanson, and T. C. P. Chui. Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point. *Physical Review B*, 68:174518, Nov 2003.
- [32] Toni Schneider. *Universal Properties of Cuprate Superconductors: Evidence and Implications*, pages 459–493. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [33] Dinko Babić and J.R Cooper. The reversible magnetisation of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7\delta}$ crystals: 3d xy critical fluctuations and a field-dependent correlation volume. *Physica B: Condensed Matter*, 284-288:769–770, 2000.
- [34] Shai M. Chester, Walter Landry, Junyu Liu, David Poland, David Simmons-Duffin, Ning Su, and Alessandro Vichi. Bootstrapping heisenberg magnets and their cubic instability. *Physical Review D*, 104(10), November 2021.
- [35] Robert D. Pisarski and Frank Wilczek. Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics. *Physical Review D*, 29:338–341, Jan 1984.
- [36] Frank Wilczek. Application of the renormalization group to a second-order qcd phase transition. *International Journal of Modern Physics A*, 07(16):3911–3925, 1992.

- [37] Krishna Rajagopal. *The chiral phase transition in QCD: critical phenomena and long wavelength pion oscillations*, page 484–554. WORLD SCIENTIFIC, November 1995.
- [38] L. D. Landau. On the theory of phase transitions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 7:19–32, 1937.
- [39] P.G. de Gennes. Exponents for the excluded volume problem as derived by the wilson method. *Physics Letters A*, 38(5):339–340, 1972.
- [40] Gregory F. Lawler. A self-avoiding random walk. *Duke Mathematical Journal*, 47(3):655 – 693, 1980.
- [41] Alexander M. Polyakov. Conformal symmetry of critical fluctuations. *JETP Lett.*, 12:381–383, 1970.
- [42] A.A. Migdal. On hadronic interactions at small distances. *Physics Letters B*, 37(1):98–100, 1971.
- [43] Bertrand Delamotte, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Scale invariance implies conformal invariance for the three-dimensional ising model. *Physical Review E*, 93(1), January 2016.
- [44] Gonzalo De Polsi, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Conformal invariance and vector operators in the $o(n)$ model. *Journal of Statistical Physics*, 177(6):1089–1130, October 2019.
- [45] Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241:333–380, 7 1984.
- [46] A.B. Zamolodchikov. Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2d field theory. *JETP Lett.*, 43:730–732, 1986.
- [47] M. Le Bellac. *Quantum and statistical field theory*. Oxford University Press, 1991.
- [48] Bertrand Delamotte. *An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group*, page 49–132. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [49] Gonzalo De Polsi, Ivan Balog, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Precision calculation of critical exponents in the $o(n)$ universality classes with the nonperturbative renormalization group. *Physical Review E*, 101:042113, Apr 2020.
- [50] Gonzalo De Polsi and Nicolás Wschebor. Regulator dependence in the functional renormalization group: A quantitative explanation. *Physical Review E*, 106:024111, Aug 2022.

- [51] Léonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group. *Physical Review D*, 67(6), March 2003.
- [52] Pierre Weiss. L’hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. Phys. Theor. Appl.*, 6(1):661–690, 1907.
- [53] Leo P. Kadanoff. More is the same; phase transitions and mean field theories. *Journal of Statistical Physics*, 137(5–6):777–797, September 2009.
- [54] VL Ginzburg. Some remarks on phase transitions of the second kind and the microscopic theory of ferroelectric materials. *Soviet Phys. Solid State*, 2:1824–1834, 1961.
- [55] Leo P. Kadanoff. Scaling laws for ising models near T_c . *Physics Physique Fizika*, 2:263–272, Jun 1966.
- [56] Joseph Polchinski. Renormalization and effective lagrangians. *Nuclear Physics B*, 231(2):269–295, 1984.
- [57] C. Wetterich. Average action and the renormalization group equations. *Nuclear Physics B*, 352(3):529–584, 1991.
- [58] Christof Wetterich. The Average action for scalar fields near phase transitions. *Z. Phys. C*, 57:451–470, 1993.
- [59] U. Ellwanger. Collective fields and flow equations. *Z. Phys. C*, 58:619–627, 1993.
- [60] Tim R. Morris. The exact renormalization group and approximate solutions. *International Journal of Modern Physics A*, 09(14):2411–2449, June 1994.
- [61] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4–6):223–386, June 2002.
- [62] J. P. Blaizot, Ramon Mendez Galain, and Nicolas Wschebor. A New method to solve the non perturbative renormalization group equations. *Phys. Lett. B*, 632:571–578, 2006.
- [63] P. M. Stevenson. Optimized perturbation theory. *Physical Review D*, 23:2916–2944, Jun 1981.
- [64] Léonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. Non-perturbative renormalization group approach to the ising model: A derivative expansion at order (∂^4) . *Physical Review B*, 68:064421, Aug 2003.

- [65] Gonzalo De Polsi Astapenco. Critical phenomena: non-perturbative renormalization group and conformal invariance. 2020.
- [66] Gonzalo De Polsi, Guzmán Hernández-Chifflet, and Nicolás Wschebor. Precision calculation of universal amplitude ratios in $o(n)$ universality classes: Derivative expansion results at order $\mathcal{O}(\partial^4)$. *Physical Review E*, 104:064101, Dec 2021.
- [67] Thomas Kloss, Léonie Canet, and Nicolás Wschebor. Nonperturbative renormalization group for the stationary kardar-parisi-zhang equation: Scaling functions and amplitude ratios in 1+1, 2+1, and 3+1 dimensions. *Physical Review E*, 86:051124, Nov 2012.
- [68] Andrzej Chlebicki, Carlos A. Sánchez-Villalobos, Pawel Jakubczyk, and Nicolás Wschebor. F_4 -symmetric perturbations to the xy model from functional renormalization. *Physical Review E*, 106:064135, Dec 2022.
- [69] Patrick Jentsch, Romain Daviet, Nicolas Dupuis, and Stefan Floerchinger. Physical properties of the massive schwinger model from the nonperturbative functional renormalization group. *Physical Review D*, 105:016028, Jan 2022.
- [70] Ivan Balog, Gonzalo De Polsi, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Conformal invariance in the nonperturbative renormalization group: A rationale for choosing the regulator. *Physical Review E*, 101(6), June 2020.
- [71] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Graduate texts in contemporary physics. Island Press, 1996.
- [72] Slava Rychkov. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in $D \geq 3$ Dimensions*. Springer International Publishing, 2017.
- [73] Joshua D. Qualls. Lectures on conformal field theory, 2016.
- [74] Kenneth G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the expansion. , 12(2):75–199, August 1974.
- [75] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 2002.
- [76] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1996.
- [77] Kenneth G. Wilson. Non-lagrangian models of current algebra. *Physical Review*, 179:1499–1512, Mar 1969.
- [78] Wolfhart Zimmermann. Normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions. *Annals of Physics*, 77(1):570–601, 1973.

- [79] Bertrand Delamotte, Gonzalo De Polsi, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Conformal invariance and composite operators: A strategy for improving the derivative expansion of the nonperturbative renormalization group. 1 2024.
- [80] Marco D’Attanasio and Tim R Morris. Large n and the renormalization group. *Physics Letters B*, 409(1):363–370, 1997.
- [81] G. v. Gersdorff and C. Wetterich. Nonperturbative renormalization flow and essential scaling for the kosterlitz-thouless transition. *Physical Review B*, 64(5), July 2001.
- [82] Ivan Balog, Hugues Chaté, Bertrand Delamotte, Maroje Marohnić, and Nicolás Wschebor. Convergence of nonperturbative approximations to the renormalization group. *Physical Review Letters*, 123(24), December 2019.
- [83] Filip Kos, David Poland, and David Simmons-Duffin. Bootstrapping mixed correlators in the 3d ising model. *Journal of High Energy Physics*, 2014(11), November 2014.
- [84] David Simmons-Duffin. The lightcone bootstrap and the spectrum of the 3d ising cft. *Journal of High Energy Physics*, 2017(3), March 2017.
- [85] Riccardo Guida and Jean Zinn-Justin. Critical exponents of the n -vector model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(40):8103, 1998.
- [86] Mikhail V. Kompaniets and Erik Panzer. Minimally subtracted six-loop renormalization of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents. *Physical Review D*, 96(3), August 2017.
- [87] Martin Hasenbusch. Finite size scaling study of lattice models in the three-dimensional ising universality class. *Physical Review B*, 82:174433, Nov 2010.
- [88] Massimo Campostrini, Andrea Pelissetto, Paolo Rossi, and Ettore Vicari. 25th-order high-temperature expansion results for three-dimensional ising-like systems on the simple-cubic lattice. *Physical Review E*, 65(6), June 2002.
- [89] O. Müller and J. Winkelmann. Comparison of critical properties in binary and ternary liquid mixtures using light scattering techniques. *Physical Review E*, 59:2026–2038, Feb 1999.
- [90] D. P. Belanger and H. Yoshizawa. Neutron scattering and the critical behavior of the three-dimensional ising antiferromagnet FeF_2 . *Physical Review B*, 35:4823–4830, Apr 1987.
- [91] Alan Singasaas and Guenter Ahlers. Universality of static properties near the superfluid transition in ^4He . *Physical Review B*, 30:5103–5115, Nov 1984.

- [92] Filip Kos, David Poland, David Simmons-Duffin, and Alessandro Vichi. Precision islands in the ising and $o(n)$ models. *Journal of High Energy Physics*, 2016(8), August 2016.
- [93] Martin Hasenbusch. Monte carlo study of an improved clock model in three dimensions. *Physical Review B*, 100(22), December 2019.
- [94] Wanwan Xu, Yanan Sun, Jian-Ping Lv, and Youjin Deng. High-precision monte carlo study of several models in the three-dimensional $u(1)$ universality class. *Physical Review B*, 100(6), August 2019.
- [95] Ti-Yen Lan, Yun-Da Hsieh, and Ying-Jer Kao. High-precision monte carlo study of the three-dimensional xy model on gpu, 2012.
- [96] Alejandro Castedo Echeverri, Benedict von Harling, and Marco Serone. The effective bootstrap, 2016.
- [97] Shai M. Chester, Walter Landry, Junyu Liu, David Poland, David Simmons-Duffin, Ning Su, and Alessandro Vichi. Carving out ope space and precise $o(2)$ model critical exponents. *Journal of High Energy Physics*, 2020(6), June 2020.
- [98] Massimo Campostrini, Martin Hasenbusch, Andrea Pelissetto, and Ettore Vicari. Theoretical estimates of the critical exponents of the superfluid transition in ^4He by lattice methods. *Physical Review B*, 74:144506, Oct 2006.
- [99] A Oleaga, A Salazar, and Yu M Bunkov. 3d- xy critical behavior of CsMnF_3 from static and dynamic thermal properties. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 26(9):096001, feb 2014.
- [100] A. Oleaga, A. Salazar, D. Prabhakaran, J.-G. Cheng, and J.-S. Zhou. Critical behavior of the paramagnetic to antiferromagnetic transition in orthorhombic and hexagonal phases of $r\text{MnO}_3$ ($r = \text{Sm, tb, dy, ho, er, tm, yb, lu, y}$). *Physical Review B*, 85:184425, May 2012.
- [101] R. Reisser, R.K. Kremer, and A. Simon. 3d- xy critical behavior of the layered metal-rich halides Gd_2IFe_2 , Gd_2ICo_2 and Gd_2BrFe_2 . *Physica B: Condensed Matter*, 204(1):265–273, 1995.
- [102] Massimo Campostrini, Martin Hasenbusch, Andrea Pelissetto, Paolo Rossi, and Ettore Vicari. Critical exponents and equation of state of the three-dimensional heisenberg universality class. *Physical Review B*, 65:144520, Apr 2002.
- [103] Martin Hasenbusch and Ettore Vicari. Anisotropic perturbations in three-dimensional $o(n)$ -symmetric vector models. *Physical Review B*, 84:125136, Sep 2011.

- [104] Martin Hasenbusch. Eliminating leading corrections to scaling in the three-dimensional $O(N)$ symmetric ϕ^4 model: $N = 3$ and $N = 4$. *J. Phys. A*, 34:8221–8236, 2001.
- [105] R. Reisser, R. K. Kremer, and A. Simon. Magnetic phase transition in the metal-rich rare-earth carbide halides gd_2xc ($x = \text{br, i}$). *Physical Review B*, 52:3546–3554, Aug 1995.
- [106] Lei Zhang, Jiyu Fan, Li Li, Renwen Li, Langsheng Ling, Zhe Qu, Wei Tong, Shun Tan, and Yuheng Zhang. Critical properties of the 3d-heisenberg ferromagnet. *Europhysics Letters*, 91(5):57001, sep 2010.
- [107] Filip Kos, David Poland, David Simmons-Duffin, and Alessandro Vichi. Bootstrapping the $o(n)$ archipelago. *Journal of High Energy Physics*, 2015(11), November 2015.
- [108] Martin Hasenbusch. Three-dimensional $o(n)$ -invariant ϕ^4 models at criticality for $n \geq 4$. *Physical Review B*, 105(5), February 2022.
- [109] Andrea Pelissetto and Ettore Vicari. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Physics Reports*, 368(6):549–727, 2002.
- [110] S. A. Antonenko and A. I. Sokolov. Critical exponents for a three-dimensional $o(n)$ -symmetric model with $n > 3$. *Physical Review E*, 51:1894–1898, Mar 1995.
- [111] Xiao Hu. Bicritical and tetracritical phenomena and scaling properties of the $so(5)$ theory. *Physical Review Lett.*, 87:057004, Jul 2001.
- [112] Hirohiko Shimada and Shinobu Hikami. Fractal dimensions of self-avoiding walks and ising high-temperature graphs in 3d conformal bootstrap. *Journal of Statistical Physics*, 165(6):1006–1035, November 2016.
- [113] Raoul D Schram, Gerard T Barkema, Rob H Bisseling, and Nathan Clisby. Exact enumeration of self-avoiding walks on bcc and fcc lattices. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(8):083208, August 2017.
- [114] Nathan Clisby and Burkhard Dünweg. High-precision estimate of the hydrodynamic radius for self-avoiding walks. *Physical Review E*, 94:052102, Nov 2016.
- [115] Nathan Clisby. Scale-free monte carlo method for calculating the critical exponent of self-avoiding walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(26):264003, June 2017.
- [116] J.P. Cotton. Polymer excluded volume exponent ν : An experimental verification of the n vector model for $N = 0$. *Journal de Physique Lettres*, 41(9):231–234, 1980.

- [117] Kay Jörg Wiese and Andrei A. Fedorenko. Depinning transition of charge-density waves: mapping onto $o(n)$ symmetric ϕ^4 theory with $n \rightarrow -2$ and loop-erased random walks. *Physical Review Letters*, 123(19), November 2019.
- [118] Kay Jörg Wiese and Andrei A. Fedorenko. Field theories for loop-erased random walks. *Nuclear Physics B*, 946:114696, September 2019.

Lista de tablas

- 5.1 Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 1$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. Con los subíndices f y s indicamos la versión de las ecuaciones usada. También incluimos los resultados obtenidos para varios órdenes de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [82, 49]. Se incluyen para comparar los resultados de CB ([83] para ν y [84] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], MC [87] y desarrollo de alta temperatura [88]. También los resultados experimentales más precisos de: punto crítico de una sustancia pura [18], transición de mezcla [89] y materiales ferromagnéticos uniaxiales [90]. 106
- 5.2 Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 2$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión *full* del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión *strict* mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB de 2016 ([92] para ν y [96] para ω) y 2019 [97], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], análisis combinado de MC con el desarrollo de alta temperatura [98] y MC de 2019 [93]. Asimismo reportamos los resultados experimentales más precisos para las transiciones: He-4 superfluido [31, 91], antiferromagnética (CsMnF_3 [99] y SmMnO_3 [100]) y ferromagnética (Gd_2IFe_2 y Gd_2ICo_2 de [101]). 108

5.3	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 3$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB ([92] para ν y [96] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86], análisis combinado de MC con el desarrollo de alta temperatura [102] y MC ([103] para ν y [104] para ω). También reportamos los resultados experimentales más precisos para la transición ferromagnética ([105] para Gd_2BrC y Gd_2IC y [106] para CdCr_2Se_4).	109
5.4	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 4$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB ([107] para ν y [96] para ω), desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85], desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86] y MC [108].	110
5.5	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 5$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [108], y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].	113
5.6	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 10$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [108] y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].	114
5.7	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 20$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB [107], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [110], MC [111], y desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].	114

5.8	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 100$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados del desarrollo en $1/N$ [6, 7, 8].	115
5.9	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = 0$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Se incluyen para comparar resultados de CB [112], método de duplicado de longitud [113], MC [114, 115], desarrollo perturbativo a 6-loops del RG [85] y desarrollo en ϵ a orden ϵ^5 [85] y ϵ^6 [86]. También reportamos los resultados experimentales más precisos provenientes de estudios de soluciones diluidas de polímeros [116].	116
5.10	Resultados obtenidos, con sus barras de error, para $N = -2$ en $d = 3$. Reportamos los exponentes extraídos tanto por el PMC como por el PMS de la versión <i>full</i> del DE a orden $\mathcal{O}(\partial^2)$. También incluimos los resultados obtenidos para los órdenes $\mathcal{O}(\partial^2)$ y $\mathcal{O}(\partial^4)$ de la DE en su versión <i>strict</i> mediante el PMS de [49]. Para comparar, agregamos resultados exactos para ν y perturbativos para ω [117, 118].	116
H.1	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 1$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	155
H.2	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 2$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	155
H.3	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 3$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	155
H.4	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 4$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	155
H.5	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 5$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W . Recordemos de la discusión en la sección 5.3.4 que para ω , no hay predicción PMC para este valor de N	156
H.6	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 10$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	156
H.7	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 20$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	156

H.8	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 100$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	156
H.9	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = 0$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	156
H.10	Resultados crudos obtenidos para los exponentes ν y ω con $N = -2$, en $d = 3$, para los reguladores exponencial E y de Wetterich W	156

Lista de figuras

1.1	Diagramas de fase para (a) un sistema magnético y (b) una sustancia pura típica. En ambos diagramas existe un <i>punto crítico</i> . En (a) el parámetro de orden es la magnetización M que se anula para $T = T_C$ y $B = 0$. En (b) la cantidad que juega un rol similar a un parámetro de orden es la diferencia entre la densidad de las fases líquida y gaseosa, que se anula en $T = T_C$ y $P = P_C$	3
1.2	Magnetización espontánea de un sistema magnético uniaxial sobre una estructura cristalina bidimensional, en función del cociente $\beta_C/\beta = T/T_C$ y en campo magnético externo nulo. Vemos tanto la solución exacta de Onsager y Yang, como el resultado de una simulación Monte-Carlo del sistema. Conforme T aumenta y se aproxima a T_C , M disminuye de su valor máximo en $T = 0$, anulándose en $T = T_C$. Figura extraída de [17].	5
1.3	Representaciones esquemáticas de (a): diagrama de fases para el Helio-4. y (b): calor específico cerca de la transición. El aspecto de su no analiticidad da lugar al nombre de la transición: λ . Figuras tomadas de Wikimedia Commons.	7
2.1	Ilustración de la transformación del grupo de renormalización	20
2.2	Ilustración del flujo de renormalización en la proximidad de la superficie crítica S_∞ . Sobre ésta se presentan dos puntos fijos, uno estable en S_∞ y el otro inestable. La curva $\mathcal{C}_T$ corresponde a una teoría física microscópica con un punto crítico. Las trayectorias que parten de $T \neq T_C$ permanecen cercanas a la trayectoria que parte de $T = T_C$ pero luego se alejan gradualmente, conforme sus $\xi \rightarrow 0$. La trayectoria que parte del punto crítico T_C es atraída hacia el punto fijo estable en S_∞	22
2.3	Bosquejo de un ejemplo de función reguladora $R_k(q)$, cumpliendo con todas las características requeridas de la misma, acerca de su comportamiento en $q \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$	30
4.1	Diagramas que contribuyen al flujo de $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$	79

5.1	Flujo del mínimo adimensionado κ del potencial adimensionado $\tilde{U}_k(\tilde{\rho})$ para tres condiciones iniciales diferentes del flujo de renormalización. En el centro vemos la trayectoria seguida partiendo desde el valor crítico κ_C , correspondiente al punto crítico de la teoría $T = T_C$. Por encima y debajo vemos condiciones iniciales para temperaturas levemente por encima y debajo de T_C , que fluyen respectivamente hacia las fases de alta y baja temperatura.	97
5.2	Función $f(\alpha, \rho)$, con regulador exponencial, para el exponente crítico ν en el caso $N = 2$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La restricción conforme no se anula, presenta un mínimo local para $\rho = 0$	104
5.3	Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ω en el caso $N = 2$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La restricción conforme especial presenta un mínimo local para $\rho = 0$	104
5.4	Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ν con $N = 100$. En líneas blancas continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La identidad presenta un mínimo para $\rho = 0$	104
5.5	Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ω con $N = 100$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . La identidad cruza el valor 0 para $\rho = 0$	104
5.6	Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente crítico ν con $N = 5$. En líneas negras continua α_{PMC} y punteada α_{PMS} . De nuevo, la identidad especial conforme presenta un mínimo para $\rho = 0$	111
5.7	Función $f(\alpha, \rho)$, con reg. exponencial, para el exponente ω con $N = 5$. La línea negra punteada marca el valor α_{PMS} . Se aprecia que f presenta un máximo para $\rho = 0$, por lo cual no hay un valor PMC de α a determinar.	111
5.8	Resultados para varios valores de N , entre 4 y 5, para la función $Z_1(\rho)$ del <i>ansatz</i> . Nótese la evolución suave a medida que varía el parámetro N	112
5.9	Resultados, para varios valores de N , entre 4 y 5, para la función $\Upsilon'(\rho)$ del <i>ansatz</i> . Nótese que presenta un comportamiento singular para un valor de $N \in (4.4, 4.5)$, que conlleva a una divergencia, con un cambio de signo entre un lado y otro de la misma.	112
5.10	Comportamiento del autovalor más pequeño λ_1 del operador diferencial, en su versión discretizada, que actúa sobre $\Upsilon'(\rho)$ en su ecuación de punto fijo (5.14), conforme se varía el parámetro N que caracteriza a los modelos $O(N)$ desde 4 hasta 5. Se puede ver como para un $N_C \sim 4.5$, este autovalor se vuelve nulo, arruinando la invertibilidad del operador.	113
F.1	Diagramas que contribuyen al flujo de $\Gamma_{abc}^{(3)}(p_1, p_2)$	139