

TRABAJO MONOGRÁFICO

Acciones de Lattices en S^1

Paula Cardoso

Marzo de 2023

Orientador: Rafael Potrie

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Índice general

Capítulo 1. Introducción	3
1. El problema	3
2. Estructura de la monografía	3
Capítulo 2. Preliminares	7
1. Generalidades	7
2. Dos ejemplos relevantes	11
Capítulo 3. Medidas invariantes y puntos fijos globales	21
1. Introducción	21
2. Generalidades	21
3. Prueba del Teorema	22
4. Acciones de lattice de $SL(2, \mathbb{R})$	26
Capítulo 4. Los Lattices del grupo lineal especial tienen abelianizado finito	29
1. Introducción	29
2. Generalidades	29
3. Propiedad de Kazhdan	29
4. Propiedades de algunos grupos con la propiedad de Kazhdan	31
5. El grupo lineal especial y la propiedad de Kazhdan	34
Capítulo 5. Promediabilidad y Solubilidad	35
1. Introducción	35
2. Generalidades	36
3. El grupo P es promediable	36
4. Prueba del teorema de Fustenberg	42
Capítulo 6. Teorema de ergodicidad de Moore	51
1. Introducción	51
2. Generalidades	52
3. Decaimiento de Matrices	57
4. Ergodicidad de Moore	66
5. Consecuencias	68
Capítulo 7. Prueba del Teorema de la órbita finita	75
1. Introducción	75
2. Prueba del Teorema	77
Bibliography	85

CAPÍTULO 1

Introducción

1. El problema

Esta monografía se enmarca en el área de teoría de grupos aritméticos y trata sobre acciones de lattices de grupos de Lie. Trabajamos con el grupo de Lie $SL(3, \mathbb{R})$ y sus lattices en particular el lattice $SL(3, \mathbb{Z})$. Muchas veces para entender un grupo buscamos verlo actuando en un espacio métrico y otra como en este caso ver que obstrucciones tiene para actuar en él. El resultado principal abordado aquí está enmarcado en el programa de Zimmer, que surge a grandes rasgos de la siguiente pregunta:

PREGUNTA. *Dada una variedad compacta M , ¿qué grupos Γ finitamente generados admiten morfismos fieles $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(M)$?*

En esta monografía trabajaremos con un caso particular donde la variedad M es S^1 , y Γ es un lattice de $SL(3, \mathbb{R})$. El objetivo es demostrar que en este caso la acción inducida por ρ tiene una órbita finita. Usando este resultado como punto de partida, recientemente, en [DH20], se demostró que los lattices de $SL(3, \mathbb{R})$ (así como otros grupos de Lie) no pueden actuar fielmente en S^1 . Vale la pena mencionar que para el caso particular de $SL(3, \mathbb{Z})$, la no existencia de acciones fieles en S^1 tiene una prueba más sencilla debida a Witte-Morris (ver por ejemplo [Wit11]). Dicha prueba utiliza propiedades algebraicas que no usaremos en esta monografía, con lo cual a los efectos de este trabajo, la prueba será igual de difícil en el caso de $SL(3, \mathbb{Z})$ que en el caso de un lattice cualquiera de $SL(3, \mathbb{R})$.

Como es común en matemáticas en el trayecto vamos a intersectar con otras áreas, como teoría de la medida y análisis funcional.

2. Estructura de la monografía

El objetivo de esta monografía es demostrar el siguiente teorema probado por Ghys en [Ghy01].

TEOREMA 1.1. *Si Γ es un lattice de $SL(3, \mathbb{R})$, entonces toda acción por homomorfismos de Γ en S^1 tiene al menos una órbita finita.*

Este resultado permita a su vez probar el siguiente teorema, que no abordaremos en esta monografía pero vale la pena mencionar, (una prueba del mismo puede ser encontrada en [Ghy01]).

TEOREMA 1.2. *Si Γ es un lattice de $SL(3, \mathbb{R})$, entonces toda acción de Γ en S^1 por difeomorfismos es trivial.*

Como sucede muchas veces agregarle más estructura o más hipótesis a nuestro problema facilita su resolución, el siguiente resultado pone a nuestro lattice Γ en un contexto a priori menos amplio en el que es más fácil deducir la tesis.

TEOREMA 1.3. *Si Γ es un grupo discreto tal que:*

- (1) *Su abelianización $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finita*
- (2) *Γ actúa en S^1 por homeomorfismos que preservan orientación, preservando una medida de probabilidad μ .*

Entonces Γ tiene al menos una órbita finita

La aparición de una medida de probabilidad invariante por la acción no es excepcional, existe toda una clase de grupos, los grupos promediables, cuyas acciones continuas sobre compactos tienen medida de probabilidad invariante. De estos grupos hablaremos en el capítulo 5. Usando este último teorema es claro que para probar el Teorema 1.1 alcanza probar que los lattices de $SL(3, \mathbb{R})$, están en las hipótesis del Teorema 1.3 con alguna medida de probabilidad μ . Los lattices Γ de $SL(3, \mathbb{R})$ no son promediables por lo que la existencia de esta medida no es trivial, nos apoyaremos en la promediabilidad de un subgrupo de $SL(3, \mathbb{R})$ para demostrarla. La prueba del Teorema 1.3 será desarrollada en el capítulo 3.

En el capítulo 4 nos dedicaremos a probar que los lattices de $SL(3, \mathbb{R})$ satisfacen la hipótesis (1) del Teorema 1.3. Para eso definiremos la propiedad de Kazhdan y usaremos que tanto $SL(3, \mathbb{R})$, como sus lattices tienen dicha propiedad.

Los capítulos 5 al 7 están dedicados a probar que:

$$(1.1) \quad \text{existe una medida de probabilidad } \Gamma\text{-invariante en } S^1$$

En el capítulo 5 estudiamos las propiedades de promediabilidad y solubilidad de algunos grupos. La prueba de 1.1 tiene, al comienzo, cierta analogía con el hallado de una medida invariante para una acción dada por un grupo R promediable. En el caso promediable, es decir si R actúa en X (compacto y Hausdorff), la prueba consiste en inducir una acción en $C(X)^*$, ver que deja invariante a $\text{Prob}(X)$ y por lo tanto tiene un fijo, que será la medida invariante buscada. En nuestro caso como un lattice Γ de G no es promediable consideraremos el subgrupo P de la matrices triangulares superiores de G que, como probaremos al inicio del capítulo 5, es promediable. Vamos a construir un espacio sobre el que haremos actuar solo a P , cuyos puntos podemos pensar que en vez de ser medidas, son familias de medidas con ciertas propiedades. Específicamente haremos actuar P en el espacio de funciones medibles y acotadas de G en $C(X)^*$. Tras hallar un compacto invariante conveniente, para considerar solo a las medidas de probabilidad y solo las funciones Γ -equivariantes, tendremos que dicha acción tendrá un fijo. Las propiedades que tiene este fijo están explicitadas en el siguiente teorema que probaremos al final del capítulo 5:

TEOREMA 1.4 (Fustenberg). *Si Γ actúa continuamente en un espacio compacto X entonces existe un mapa Γ -equivariante (a izquierda), P -invariante (a derecha) y Borel medible $\psi : G \rightarrow \text{Prob}(X)$.*

A partir del capítulo 6 queremos probar que en el caso que $X = S^1$ esta función es constante μ c.t.p, donde μ es la medida de Haar de G . Para ello probaremos la ergodicidad de las acciones de lattices Γ sobre ciertos cocientes de G . Específicamente el capítulo 6 estará dedicado a demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 1.5 (Teorema de ergodicidad de Moore). *Si H es un subgrupo cerrado no compacto de G entonces toda función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ medible, H -invariante (a izquierda) y Γ -invariante (a derecha) es constante μ c.t.p. Donde μ es la medida de Haar en G .*

En el capítulo 7 usaremos estos dos resultados para probar la existencia de una medida Γ -invariante y luego deducir el Teorema 1.1 vía el Teorema 1.3.

La prueba consiste en ver que la función ψ dada por el Teorema 1.4 es de hecho constante μ c.t.p. Para hacerlo separaremos en diferentes casos según la función ψ tenga su imagen en las medidas puramente atómicas para casi todo punto, o en las medidas puramente no atómicas para casi todo punto. El caso en que la imagen de ψ es mixta se deducirá de los dos anteriores.

La idea de la prueba es la construcción de diferentes funciones a partir de ψ que incrementen la propiedad de Γ equivarianza a una Γ invarianza y cuyo dominio sea difeomorfo a G/H para algún grupo cerrado no compacto H . Sobre estas nuevas funciones aplicaremos el Teorema 1.5 concluyendo que deben ser constante en casi todo punto. Habiendo elegido estas funciones convenientemente podremos concluir de lo anterior que de hecho ψ debe ser constante en casi todo punto.

Una referencia para la generalización de los resultados a $n \geq 3$ de los resultados aquí abordados se puede encontrar en [Mor15].

CAPÍTULO 2

Preliminares

1. Generalidades

1.1. El conmutador. Empezamos definiendo el conmutador ya que lo precisamos para enunciar el Teorema 1.3. Referimos a [Rot95] por más información.

Definición 2.1. Sea G un grupo definimos al conmutador de G como $[G : G] = \langle \{x \in G : x = ghg^{-1}h^{-1} \text{ con } g, h \in G\} \rangle$

Proposición 2.2. Dado un grupo G , $[G : G]$ es un subgrupo normal de G y $G/[G : G]$ es un grupo abeliano.

1.2. Grupos topológicos y grupos de Lie. Todos los subgrupos a considerar en esta monografía viven en un grupos de Lie: $SL(n, \mathbb{R})$. En esta subsección damos la definición de Grupo de Lie y probamos que $SL(n, \mathbb{R})$ la cumple. Por un contexto más amplio ver [Lee13].

Definición 2.3. Decimos que G es un grupo topológico si es un grupo equipado con una topología que hace continuas a las operaciones inversión y producto de G .

Definición 2.4. Decimos que G es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable real con una estructura de grupo tal que las operaciones del grupo, inversión y producto, son continuas.

Ejemplo 2.5. $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo de Lie. Es claramente una variedad diferenciables real. Las operaciones: $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\cdot^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $+(a, b) = a + b$ y $\cdot^{-1}(a) = -a$ son continuas.

Un grupo de Lie más interesante y con el que estaremos trabajando en esta monografía es el del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 1\}$ es un grupo de Lie. Para verlo consideremos la función determinante donde veremos al espacio de matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sabemos que la función determinante es un polinomio en las entradas de la matriz:

$$(2.1) \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma_i} \right),$$

donde $S_n = \{\sigma : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ biyectivas}\}$ y $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ es la función que a cada σ le asigna la paridad del número de transposiciones necesaria para

obtener σ .

Y por lo tanto es una función diferenciable. Una expresión equivalente del determinante es la siguiente:

$$(2.2) \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\text{Adj}(A)_{ij}).$$

donde la matriz $\text{Adj}(A)_{ij}$ es la resultante de sacarle a A la fila i y la columna j .

Al calcular la derivada respecto a la entrada (i, j) de la expresión 2.2 obtenemos:

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}} = \det(\text{Adj}(A)_{ij}) (-1)^{i+j}.$$

Para ver que $SL(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable, veamos primero que 1 es un valor regular de $\det$.

Sea $A \in \det^{-1}(\{1\})$, entonces existe (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$ tales que $\det(\text{Adj}(A)_{ij}) (-1)^{i+j}$ no es cero, pues de lo contrario usando 2.2 vemos que sería $\det(A) = 0$. Luego al menos una derivada parcial es distinta de cero y por ser $\det$ una función real su diferencial calculado en A será sobreyectivo. Por lo tanto 1 es un valor regular. Usando el Teorema del valor regular deducimos que $\det^{-1}(\{1\})$ es una variedad diferenciable, osea que $SL(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable.

Veamos que las operaciones producto e inversión de $SL(n, \mathbb{R})$ son continuas.

Las entradas del producto entre dos matrices A y B se escribe como un polinomio en la entradas de ambas matrices, por lo tanto el mapa $(A, B) \rightarrow AB$ es diferenciable.

Dada una matriz A , cada columna de la inversa de A es la solución de un sistema lineal cuyos coeficientes son las entradas de A . Como el mapa que manda los coeficientes de un sistema lineal en sus raíces es diferenciable, entonces el mapa $A \rightarrow A^{-1}$ también lo es.

Entonces $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ es una variedad diferenciable con el producto y la inversión continuos, por lo tanto es un grupo de Lie.

1.3. Acciones. En esta subsección recordaremos la definición de acción de un grupo G sobre un espacio topológico X , junto con otras definiciones relativas a acciones. Luego demostramos la Proposición 2.10 que será útil en el capítulo 6 para identificar espacios en los que podemos aplicar el Teorema de ergodicidad de Moore.

Definición 2.7. Una acción $\mathcal{A}$ de un grupo G en un conjunto X es una función $\mathcal{A} : G \times X \rightarrow X$ que cumple:

- $\mathcal{A}(e, x) = x$ para todo $x \in X$, siendo e el neutro de G .
- $\mathcal{A}(g, \mathcal{A}(h, x)) = \mathcal{A}(g \cdot h, x)$ para todo $x \in X$, $g, h \in G$.

En general notamos la acción $\mathcal{A}(g, x)$ por $g \cdot x$ o gx .

En los casos en que el espacio X tiene una topología (resp. estructura diferenciable) diremos que $\mathcal{A}$ actúa por homomorfismos (resp. difeomorfismos) si el mapa $\mathcal{A}(g, -)$ es un homeomorfismo (resp. difeomorfismo) para todo $g \in G$.

Si además el grupo en cuestión tiene una topología, por ejemplo, es un grupo de Lie, diremos que la acción es continua (resp. diferenciable) si el mapa $\mathcal{A}(-, x)$ es continuo (resp. diferenciable).

Definición 2.8. Decimos que un homomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ preserva orientación si dados $x, y, z \in S^1$ tal que z pertenece al arco antihorario $[x, y]$ entonces $f(z)$ pertenece al arco antihorario $[f(x), f(y)]$.

Definición 2.9. Sea $\mathcal{A}$ una acción por homeomorfismos del grupo G sobre el espacio topológico S^1 . Decimos que la acción preserva orientación si el homeomorfismo $\mathcal{A}(g, -)$ preserva orientación para todo $g \in G$.

Proposición 2.10. Si G es un grupo topológico (rep. de Lie) que actúa por homeomorfismo (resp. difeomorfismos) sobre un espacio topológico (resp. variedad diferenciable) X , $x_0 \in X$, y $H = \text{Stab}(x_0)$, entonces G/H es homeomorfo (resp. difeomorfo) a $\text{Orb}(x_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Defino $\phi : G/H \rightarrow \text{Orb}(x_0)$ dada por $\phi([g]) = g \cdot x_0$. Está bien definida pues si g y g' están en la misma clase entonces $g^{-1}g' \in \text{Stab}(x_0)$, luego $g^{-1}g'x_0 = x_0$, por lo que mandan x_0 al mismo punto $g'x_0 = gx_0$. Como estas implicancias son equivalencias entonces también tenemos la inyectividad. Además ϕ es sobreyectiva por como está definido el codominio. Entonces es biyección.

Veamos ahora que es abierta y continua. Sea A un abierto de G/H entonces $A = \pi(A')$ con A' abierto de G , entonces $\phi(A) = A' \cdot x_0$ que es abierto pues la acción es abierta. Entonces ϕ es abierta.

A su vez como la acción es continua si defino $\hat{\phi} : G \rightarrow \text{Orb}(x_0)$ como $\hat{\phi}(g) = g \cdot x_0$, $\hat{\phi}$ es continua. Como H es tal que $\hat{\phi}(gH) = \{\hat{\phi}(g)\}$ entonces $\phi^{-1}(A) = \hat{\phi}^{-1}(A)$ que es abierto para todo A abierto. Luego hemos probado que es un homeomorfismo.

La prueba para estructura diferenciable es similar. $\square$

1.4. Medidas. En esta sección recordamos que es una medida y definimos medida de Haar. Al final damos una descripción de la medida de Haar en $G = SL(n, \mathbb{R})$. Esta medida será la medida con la que equiparemos a G el resto de la monografía.

Definición 2.11. Sea X un conjunto una σ -álgebra sobre X es una familia Σ no vacía de subconjuntos de X que cumple que:

- $\emptyset \in \Sigma$.
- Si $E \in \Sigma$ entonces $E^c \in \Sigma$.
- $E_1, E_2, E_3, \dots$ es una sucesión numerable de elementos de Σ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico el álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos de X . Es decir es el álgebra definida como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a los abiertos de X .

Notación 2.13. A los elementos $B \in \mathcal{B}(X)$ los llamamos conjunto de Borel.

Definición 2.14. Una medida de Borel sobre un conjunto X es una función $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ que es numerablemente aditiva es decir: Si $A_1, A_2, A_3, \dots$ son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

A partir de ahora solamente haremos referencia a medidas de Borel por lo que usaremos los términos medida y medida de Borel indistintamente.

Definición 2.15. Decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es Borel medible si para todo abierto A de Y , $f^{-1}(A)$ es un conjunto de Borel de X .

Definición 2.16. Sea μ una medida sobre un espacio X . Decimos que μ es atómica si el conjunto $A = \{x \in X : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ es no vacío. De lo contrario decimos que μ es no atómica. A los elementos de A los denominamos átomos de μ .

Definición 2.17. Decimos que una medida en un espacio de medida $(X, \mathcal{B}(X))$ es inner regular si para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ se tiene que:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$$

Definición 2.18. Decimos que una medida μ en X es una medida de probabilidad si $\mu(X) = 1$ y μ es inner regular.

Definición 2.19. Decimos que una medida μ en X es σ -finita si X es la unión de numerables conjuntos con medida finita.

Definición 2.20. Sea μ una medida sobre el espacio topológico X , definimos $\text{sop}(\mu) = \bigcap \{C : C \text{ es cerrado y } \mu(C^c) = 0\}$

Definición 2.21. Sea G un grupo de Lie, decimos que μ es una medida de Haar de G si μ es una medida de Borel σ -finita en G tal que:

- (1) $\mu(C)$ es finito para todo compacto C de G .
- (2) $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo conjunto de Borel A de G y todo $g \in G$

El siguiente teorema se puede encontrar en [Lee13]

Teorema 2.22. Si G es un grupo de Lie entonces existe una forma de volumen en G cuya medida inducida es una medida de Haar a izquierda en G . Además dos medidas de Haar a izquierda difieren en un escalar.

Ejemplo 2.23. La medida de Lebesgue es una medida de Haar en $(\mathbb{R}, +)$.

1.5. Lattices. En esta subsección introduciremos la definición de Lattice y algunas nociones elementales para caracterizar los lattices que pueden encontrarse en [Mor15].

Definición 2.24. Si Λ es un subgrupo discreto de G decimos que $\mathcal{F}$ es un dominio fundamental para G/Λ en G si $\mathcal{F}$ es un conjunto de Borel de G tal que el mapa natural definido por $g \rightarrow g\Lambda$ es una biyección.

Definición 2.25. Sea G un grupo actuando en un espacio X . Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice G -invariante a izquierda si $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in X$, $g \in G$.

Proposición 2.26. Sea Λ un subgrupo discreto de un grupo de Lie G y sea μ la medida de Haar en G . Existe una medida de Borel ν , σ -finita y G -invariante en G/Λ definida por:

$$\nu(A/\Lambda) = \mu(A \cap \mathcal{F})$$

para todo conjunto de Borel A de G , tal que $A\Lambda = A$.

Definición 2.27. La topología discreta de un conjunto X es aquella cuyos abiertos son todos los subconjuntos de X .

Definición 2.28. Decimos que un grupo G es discreto si es un grupo topológico con la topología discreta.

Definición 2.29. Decimos que Γ es un Lattice de un grupo de Lie G , si es un subgrupo de G cumpliendo:

- Γ es discreto con la topología que hereda de G .
- $\nu(G/\Gamma) < \infty$ donde ν es la medida inducida por la medida de Haar de G , como se especifica en la proposición 2.26. En este caso decimos que G/Γ tiene volumen finito.

Proposición 2.30. Sea Γ un grupo discreto de un grupo de Lie G y sea μ la medida de Haar en G . Son equivalentes:

- (1) Γ es un Lattice de G
- (2) Existe un dominio fundamental de G/Γ tal que $\mu(\mathcal{F}) < \infty$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.26 tenemos que $\nu(G/\Gamma) = \mu(\mathcal{F})$. Luego G/Γ tiene volumen finito si y solo si $\mu(\mathcal{F}) < \infty$. $\square$

Ejemplo 2.31. $\mathbb{Z}^n$ es un lattice de $\mathbb{R}^n$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.30 solo hay que probar que existe un dominio fundamental estricto de medida finita. Sea $\mathcal{G} = [0, 1]^n$ y $A \subset \partial\mathcal{G}$ n caras de $\mathcal{G}$ tales que no haya dos enfrentadas. Si $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup A$ entonces $\mathcal{F}$ tiene un representante de cada clase de $\mathbb{Z}^n$. La diferencia entre dos elementos de $\mathcal{F}$ nunca puede ser un entero por lo tanto no hay dos representantes de la misma clase. O sea el mapa inducido por la proyección restringida a $\mathcal{F}$ es biyectivo y por lo tanto $\mathcal{F}$ es dominio fundamental. Como la medida es la de Lebesgue $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{G}) = 1$. $\square$

Ejemplo 2.32. $SL(2, \mathbb{Z})$ es un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$

Una prueba de esto será parcialmente desarrollada en la siguiente subsección.

2. Dos ejemplos relevantes

2.1. La medida de Haar en $SL(2, \mathbb{R})$. En esta subsección describiremos la medida de Haar en $SL(2, \mathbb{R})$.

2.1.1. *Descomposición KAN.* Una referencia para esta subsección es [Mor15].

Definición 2.33. Definimos a los subgrupos K , A y N como:

- $K = SO(n)$ el subgrupo de las matrices que actúan por rotaciones.
- N el subgrupo de las triangulares superiores con unos en la diagonal.
- A el subgrupo de las matrices diagonales con entradas positivas.

Teorema 2.34. *Descomposición de KAN*

Sea $G = SL(n, \mathbb{R})$. Entonces, $G = KAN$ y la descomposición es única. Es decir, para todo $g \in G$ existen únicos $k \in K, a \in A, n \in N$ tal que $g = kan$. Además el mapa $\phi : K \times A \times N \rightarrow G$ definido por $\phi(k, a, n) = kan$ es un difeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. 2.34 Sea $\epsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base de $\mathbb{R}^n$. Entonces para todo $g \in G$, el conjunto $\{ge_1, \dots, ge_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Construyamos la base ortonormal $\{w_1, \dots, w_n\}$ correspondiente con el proceso de Gram-Schmidt. O sea, una vez definidos los primeros $i - 1$ vectores de $\{w_1, \dots, w_n\}$, definimos el i -ésimo como:

$$w_i^* = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j$$

y

$$w_i = \frac{1}{\|w_i^*\|} w_i^*$$

donde $v_i = ge_i$. Este proceso nos define $\{w_1, \dots, w_n\}$ ortonormal. Como $\{w_1, \dots, w_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ son bases ortonormales, existe una matriz $k \in O(n)$ tal que $kw_i = e_i$ para todo i . Ahora usando la definición de los w_i y luego la definición de k obtenemos:

$$kw_i^* = k\|w_i^*\|w_i = \|w_i^*\|kw_i = \|w_i^*\|e_i$$

Tomando a la matriz diagonal tal que $a_{ii} = \|w_i^*\|$ obtenemos que

$$kw_i^* = ae_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Veamos por inducción que:

$$(2.3) \quad w_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Como w_i^* y w_i son colineales esto es lo mismo que ver que $w_i^* \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$. Ya que $w_0^* = v_0$ se tiene que se cumple la base inductiva: $w_0^* \in \langle v_0 \rangle$. Supongamos ahora que para todo j menor a i se tiene que $w_j^*, w_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Por definición de w_i^* tenemos $w_i^* \in \langle w_1, \dots, w_{i-1}, v_i \rangle$ y a su vez por hipótesis inductiva que $w_1, \dots, w_{i-1} \in \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$, luego $w_i^* \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ como queríamos.

Ahora usemos la definición de w_i^* para escribir:

$$g^{-1}w_i^* = g^{-1}v_i - g^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, w_j \rangle w_j$$

y usando la observación 2.3 en el miembro derecho de la anterior ecuación tenemos que

$$g^{-1}w_i^* \in g^{-1}v_i + g^{-1}(\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle) = e_i + \langle e_1, e_2, \dots, e_{i-1} \rangle.$$

Entonces existe $u \in N$ tal que:

$$g^{-1}w_i^* = ue_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Luego

$$u^{-1}g^{-1}w_i^* = e_i = a^{-1}kw_i^*.$$

Entonces $u^{-1}g^{-1} = a^{-1}k$ y así

$$(2.4) \quad g = k^{-1}au^{-1}.$$

Como $g \in SL(n, \mathbb{R})$ se tiene:

$$(2.5) \quad 1 = \det(g) = \det(k^{-1})\det(a)\det(u^{-1}).$$

Ahora tomando cuenta que $k \in O(n)$, a es diagonal con entradas positivas y $u \in N$ se tiene $\det(k) = \pm 1$, $\det(a) > 0$ y $\det(u) = 1$. Con lo cual la única posibilidad que

satisface la ecuación 2.5 es que todos los determinantes sean 1. Luego hemos probado $k^{-1} \in SO(n)$, $a \in SL(n, \mathbb{R})$ y $u \in N$, en la descomposición de la ecuación 2.4.

La unicidad se sigue de que $K \cap AN = \{e\}$ y $A \cap N = \{e\}$ $\square$

2.1.2. G es unimodular.

Definición 2.35. Decimos que un grupo de Lie G es unimodular si la medida de Haar a izquierda es también medida de Haar a derecha.

El siguiente teorema puede encontrarse en [Kna02]:

Teorema 2.36. El grupo G es unimodular.

2.1.3. Descripción de μ . En esta sección describiremos la medida de Haar en G cuando $n = 2$, para eso asumiremos que todo grupo de Lie tiene medida de Haar a izquierda. Las referencias para esta subsección son [Mor15], [Lan85] y [Kna02]. Usaremos la descomposición de KAN para describir a la medida de Haar en G como el producto de las medidas de Haar en K , A y N a menos de una función modular. Para eso veámoslo primero para una descomposición en dos subgrupos:

Proposición 2.37. Sea G un grupo de Lie unimodular y S, T dos subgrupos de Lie, tales que $\phi : S \times T \rightarrow G$ dada por $\phi(s, t) = st$ es un difeomorfismo. Sean $\lambda_S, \lambda_T, \lambda_G$ las medidas de Haar a izquierda en los respectivos grupos. Si definimos $\hat{\phi} : S \times T \rightarrow G$ como $\hat{\phi}(s, t) = st^{-1}$ se tiene:

$$(2.6) \quad \hat{\phi}_*^{-1}(\lambda_S \times \lambda_T) = \lambda_G,$$

a menos de normalizar adecuadamente.

DEMOSTRACIÓN. 2.37 Sean $L_{(s_0, t_0)} : S \times T \rightarrow S \times T$, $L_{s_0} : G \rightarrow G$, definidas por $L_{(s_0, t_0)}(s, t) = (s_0 s, t_0 t)$, $L_{s_0}(g) = s_0 g$, y $R_{t_0}(g) = g t_0$. Entonces se tiene que:

$$(2.7) \quad \hat{\phi} \circ L_{(s_0, t_0)} = L_{s_0} \circ R_{t_0^{-1}} \circ \hat{\phi}.$$

Definamos $\mu = \hat{\phi}_*^{-1}(\lambda_G)$, medida en $S \times T$. Sabemos por 2.7 que

$$(2.8) \quad L_{(s_0, t_0)*} = \hat{\phi}_*^{-1} \circ L_{s_0} \circ R_{t_0^{-1}} \circ \hat{\phi}_*.$$

Dado que G es unimodular y la medida λ_G es invariante a izquierda, entonces también es invariante a derecha es decir:

$$(2.9) \quad L_{s_0} \circ R_{t_0^{-1}} \lambda_G = \lambda_G.$$

Usando la definición de μ junto con las ecuaciones 2.8 y 2.9.

$$(2.10) \quad L_{(s_0, t_0)*} \mu =$$

$$(2.11) \quad L_{(s_0, t_0)*} \hat{\phi}_*^{-1} \lambda_G =$$

$$(2.12) \quad \hat{\phi}_*^{-1} \circ L_{s_0} \circ R_{t_0^{-1}} \circ \hat{\phi}_* \circ \hat{\phi}_*^{-1} \lambda_G =$$

$$(2.13) \quad \hat{\phi}_*^{-1} \circ L_{s_0} \circ R_{t_0^{-1}} \lambda_G =$$

$$(2.14) \quad \hat{\phi}_*^{-1} \lambda_G =$$

$$(2.15) \quad \mu.$$

Con lo que hemos probado que μ es una medida de Haar a izquierda en el grupo $S \times T$. Entonces es a menos de un escalar igual a la medida de Haar $\lambda_S \times \lambda_T$. $\square$

Observación 2.38. Sea T un grupo de Lie y sea λ una medida de Haar a izquierda. Dado $t \in T$, definimos λ_t como la medida tal que:

$$(2.16) \quad \lambda_t(A) = \lambda(At^{-1}).$$

Por ser λ de Haar a izquierda, λ_t también lo es, luego por el Teorema 2.22 son iguales a menos de un escalar:

$$(2.17) \quad \lambda_t = \Delta(t)\lambda \text{ donde } \Delta(t) \text{ es el escalar correspondiente.}$$

Definición 2.39. En las condiciones de la observación anterior, definimos la función modular $\Delta : T \rightarrow \mathbb{R}$, como el mapa que a cada t le hace corresponder el escalar $\Delta(t)$.

Observación 2.40. La función modular es un morfismo.

Proposición 2.41. Sea T un grupo de Lie y sea λ una medida de Haar para T . Consideremos $\psi : T \rightarrow T$, tal que $\psi(t) = t^{-1}$. Entonces a menos de un escalar tenemos que:

$$(2.18) \quad \psi_*(d\lambda) = \Delta(\psi(t))d\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN. Véanse las notaciones empleadas en el Teorema 2.37.

Por el Teorema 2.22 alcanza con probar que $\psi_*^{-1}(\Delta(\psi(t))d\lambda)$ es de Haar a izquierda en G . Veamos entonces que $L_{t_0*}(\psi_*^{-1}(\Delta(\psi(t))d\lambda)) = \psi_*^{-1}(\Delta(\psi(t))d\lambda)$.

Para hacer la cuenta anterior tenemos que empujar una medida multiplicada por una densidad por un difeomorfismo. Para eso observamos que si φ es un difeomorfismo entre dos variedades M y N , $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una densidad, y λ es medida en M entonces:

$$(2.19) \quad \varphi_*(gd\lambda) = g\varphi^{-1}(\phi_*(d\lambda)).$$

Si consideramos $R_{t_0}^{-1}$ como difeomorfismo en T y $\Delta \circ \psi$ como función de densidad obtenemos:

$$(2.20) \quad R_{t_0}^{-1*}(\Delta(\psi)d\lambda) = \Delta\psi R_{t_0}(R_{t_0}^{-1*}(d\lambda)).$$

Además observamos que:

$$(2.21) \quad \psi \circ R_{t_0} = L_{t_0}^{-1} \circ \psi \text{ y } \psi = \psi^{-1}$$

Sumando las ecuaciones (2.20) y (2.21) con la definición de Δ tenemos:

$$(2.22) \quad L_{t_0*}(\psi_*(\Delta(\psi)d\lambda))$$

$$(2.23) \quad = \psi_* R_{t_0}^{-1*}(\Delta(\psi)d\lambda)$$

$$(2.24) \quad = \psi_*((\Delta\psi R_{t_0})R_{t_0}^{-1*}(d\lambda))$$

$$(2.25) \quad = \psi_*((\Delta L_{t_0}^{-1}\psi)R_{t_0}^{-1*}(d\lambda))$$

$$(2.26) \quad = \psi_*((\Delta L_{t_0}^{-1}\psi)\Delta(t_0)(d\lambda))$$

Ahora como Δ es morfismo a $\mathbb{R}$ se tiene: $\Delta(t_0)\Delta \circ L_{t_0^{-1}} \circ \psi(t) = \Delta \circ \psi(t)$ Entonces sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación (2.26) obtenemos:

$$(2.27) \quad L_{t_0*}(\psi_*(\Delta(\psi)d\lambda)) = \psi_*(\Delta(\psi)d\lambda),$$

como queríamos probar. $\square$

Proposición 2.42. *Sea G un grupo de Lie unimodular y S, T dos subgrupos de Lie, tales que $\phi : S \times T \rightarrow G$ dada por $\phi(s, t) = st$ es un difeomorfismo. Sean $\lambda_S, \lambda_T, \lambda_G$ las medidas de Haar a izquierda en los respectivos grupos. Y Δ_T la función modular de T . Entonces se tiene:*

$$(2.28) \quad \int_G f(g)d\lambda_G = \int_S \int_T f(st)\Delta_T(t)d\lambda_T d\lambda_S.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.37 tenemos que:

$$(2.29) \quad \int_G f(g)d\lambda_G = \int_{\hat{\phi}^{-1}(G)} f \circ \hat{\phi}(s, t)d\lambda_T \times d\lambda_S = \int_S \int_T f \circ \hat{\phi}(s, t)d\lambda_T d\lambda_S$$

Ahora por la Proposición 2.41 tenemos que:

$$(2.30) \quad \int_S \int_T f \circ \hat{\phi}(s, t)d\lambda_T d\lambda_S = \int_S \int_T f \circ \hat{\phi}(s, \psi(t))\Delta_T(t)d\lambda_T d\lambda_S = \int_T \int_S f(st)\Delta_T(t)d\lambda_T d\lambda_S$$

Juntando la ecuación 2.29, con la ecuación 2.30, tenemos lo que queríamos probar. $\square$

Las siguientes tres proposiciones las podemos encontrar en [Lan85]:

Proposición 2.43. *Si P es el subgrupo de triangulares superiores, y A y N son como definimos al principio de la sección, $P = AN$. Además el mapa $\phi : A \times N \rightarrow P$ dado por $\phi(a, n) = an$ es un difeomorfismo.*

Proposición 2.44. *Sean λ_A y λ_N medidas de Haar en A y N , respectivamente, entonces $\lambda_A \times \lambda_N$ es medida de Haar en $P = AN$.*

Proposición 2.45. *La función modular de P solo depende de a . En el caso que $n = 2$ tenemos: que si*

$$(2.31) \quad h_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$(2.32) \quad \Delta_P(h_a n) = \Delta_P(h_a) = a^2.$$

Proposición 2.46. *Sea λ_G una medida de Haar en G y λ_K, λ_A , y λ_N , medidas de Haar en los subgrupos K, A y N , definidos en el Teorema 2.34. Si Δ_P es la función modular de P , entonces se tiene:*

$$(2.33) \quad \int_G f(g)d\lambda_G = \int_K \int_A \int_N f(kan)\Delta_P(a)d\lambda_N d\lambda_A d\lambda_K$$

DEMOSTRACIÓN. 2.46 Haremos la prueba para $n = 2$, la prueba en el caso general puede encontrarse en [Mor15]. Por la Proposición 2.43 junto con el Teorema 2.34, tenemos que $\phi : K \times P \rightarrow G$, dada por $\phi(k, p) = kp$ es un difeomorfismo. Además G es unimodular, luego podemos aplicar la Proposición 2.42 y obtenemos que:

$$(2.34) \quad \int_G f(g) d\lambda_G = \int_K \int_P f(kp) \Delta_P(p) d\lambda_P d\lambda_K$$

Ahora por la Proposición 2.44 $d\lambda_P = d\lambda_A \times d\lambda_N$: por lo que:

$$(2.35) \quad \int_K \int_P f(kp) \Delta_P(p) d\lambda_P d\lambda_K = \int_K \int_A \int_N f(kan) \Delta_P(an) d\lambda_N d\lambda_A d\lambda_K$$

Usando la Proposición 2.45 vemos que Δ_P solo depende de la coordenada en A y por lo tanto obtenemos $\Delta_P(an) = \Delta_P(a)$. Sustituyendo en la ecuación 2.35 obtenemos:

$$(2.36) \quad \int_K \int_P f(kp) \Delta_P(p) d\lambda_P d\lambda_K = \int_K \int_A \int_N f(kan) \Delta_P(a) d\lambda_N d\lambda_A d\lambda_K$$

Finalmente concatenando esta igualdad con la ecuación 2.34 obtenemos lo que queríamos probar. $\square$

2.1.4. *El plano hiperbólico y acciones definidas en él.* Las referencias para esta subsección son [Mil97] y [Mor15].

Definición 2.47. Sea el subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$, $H = \{Id, -Id\}$. Definimos $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/H$

Observación 2.48. La acción en $\mathbb{C}$ de $PSL(2, \mathbb{R})$ dada por asociar a cada matriz A el mapa ϕ_A definido como:

$$(2.37) \quad \phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

preserva el semiplano superior.

Definición 2.49. Definimos el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ como el semiplano superior de $\mathbb{C}$ con la métrica inducida por definir a $PSL(2, \mathbb{R})$ como las isometrías del espacio.

Las identificaciones de los siguientes enunciados se pueden encontrar en [Mil97]

Proposición 2.50. El tangente unitario de $\mathbb{H}^2$, $T^1\mathbb{H}^2$ es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{H}^2$.

Proposición 2.51. Sea la función $F : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow S^1 \times \mathbb{H}^2$ definida por: $F(g) = (k(x_0), an((0, i)))$ donde $g = kan$, x_0 es un punto cualquiera de S^1 , e i la unidad imaginaria. Entonces F es un difeomorfismo.

Observación 2.52. Si Γ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, como $PSL(2, \mathbb{R}) = Isom^+(\mathbb{H}^2)$ entonces Γ tiene una manera natural de actuar en $\mathbb{H}^2$ por isometrías.

Una referencia para los siguientes enunciados es [Mor15].

Se puede usar la descripción de la medida de Haar y las identificaciones anteriores para probar la siguiente proposición:

Proposición 2.53. Si un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{H}^2$ por isometrías como en 2.52 entonces induce una acción en $T^1\mathbb{H}^2$. Además se tiene que:

- Si la acción en $\mathbb{H}^2$ tiene dominio fundamental de medida finita la acción en $T^1\mathbb{H}^2$ también.
- La acción inducida en $T^1\mathbb{H}^2$ la podemos pensar, con las identificaciones de las Proposiciones 2.50 y 2.51, como una acción en $PSL(2, \mathbb{R})$. Dicha acción es la dada por el producto de Γ como subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$.

El siguiente es un corolario de la Proposición 2.53 y el hecho de que $PSL(2, \mathbb{R})$ tiene índice 2 en $SL(2, \mathbb{R})$.

Corolario 2.54. *Si un subgrupo discreto Γ de $SL(2, \mathbb{R})$ cumple que la acción natural de $\Gamma/\{Id, -Id\}$ en $\mathbb{H}^2$ tiene dominio fundamental de volumen finito. Entonces la acción Γ por el producto en $SL(2, \mathbb{R})$ también tiene dominio fundamental de volumen finito y por lo tanto es un lattice.*

2.1.5. $SL(2, \mathbb{Z})$ es un lattice de G . El siguiente Teorema es conocido y puede encontrarse en [Mor15].

Proposición 2.55. *La acción natural de $PSL(2, \mathbb{Z})$ en $\mathbb{H}^2$ tiene un dominio fundamental de medida finita.*

Proposición 2.56. *$SL(2, \mathbb{Z})$ es un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la proposición 2.55 finito y del Corolario 2.54. $\square$

2.2. Pin pon del grupo libre en dos generadores. Para esta subsección nos basamos en un ejemplo conocido: el pin pon del grupo libre en dos generadores.

Definición 2.57. *Decimos que una medida μ en X es invariante por una acción de un grupo G en X si para todo A medible de X y $g \in G$ se tiene que $\mu(A) = \mu(gA)$.*

Notación 2.58. *Dado un homeomorfismo de un espacio topológico X en si mismo, $f : X \rightarrow X$, notamos por $Fix(f)$ al conjunto de puntos fijos de f .*

Daremos un ejemplo de una acción del grupo libre en dos generadores sobre S^1 , que servirá para mostrar que no toda acción en S^1 tiene una medida invariante.

Proposición 2.59. *Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ tiene un conjunto finito y no vacío de puntos fijos, entonces toda medida μ f -invariante es combinación convexa de medidas atómicas soportadas sobre $Fix(f)$. Es decir si μ es f -invariante:*

$$(2.38) \quad \mu = \sum_{p \in Fix(f)} a_p \delta_p, \text{ con } a_p \text{ tales que } \sum a_p = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no, entonces existe una medida μ , f -invariante y un conjunto $A \subset (p_i, p_{i+1})$ compacto donde p_i, p_{i+1} son dos fijos consecutivos de f , tal que $\mu(A) > 0$. Como no hay fijos entre p_i y p_{i+1} la dinámica del homeomorfismo tiene que ser como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) &= p_i \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) &= p_{i+1} \\ \text{para todo } x &\in (p_i, p_{i+1}) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) &= p_{i+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) &= p_i \\ \text{para todo } x &\in (p_i, p_{i+1})\end{aligned}$$

Como además A es compacto deducimos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kn_0}(A) \cap A = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Y por lo tanto $f^{kn_0}(A) \cap f^{jn_0}(A) = \emptyset$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$. Ahora si μ es f -invariante cada una de los conjunto $f^{kn_0}(A)$ mide $\mu(A) > 0$, lo cual es absurdo porque μ es de probabilidad. $\square$

Por la Proposición 2.59, tomando dos homeomorfismos $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ tales que $Fix(f_1) \cap Fix(f_2) = \emptyset$, se tiene que la acción del grupo generado por $\{f_1, f_2\}$ no puede tener una medida invariante.

Ejemplo 2.60. Veamos un caso particular del ejemplo anterior en donde $\langle f_1, f_2 \rangle = \mathbb{F}^2$. No es difícil ver que dados dos intervalos disjuntos A, B de S^1 , A abierto, B cerrado, existe un difeomorfismo tal que $f(B^c) = A$ ($f^{-1}(A^c) = B$), con dos únicos fijos uno en A y otro en B .

Vamos a tomar 4 intervalos disjuntos A_1, B_1, A_2 y B_2 en S^1 . Consideramos dos difeomorfismos f_1, f_2 tales que cada f_i tiene dos fijos uno en B_i y otro en A_i y cumple:

$$f_i(A_i^c) = B_i, f_i^{-1}(B_i^c) = A_i, \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

Por la proposición 2.59 una medida f_1 -invariante tiene soporte en los fijos de f_1 y una medida f_2 -invariante tiene soporte en los fijos de f_2 . Como los intervalos A_1, A_2, B_1 y B_2 son disjuntos entonces no existen medidas $\langle f_1, f_2 \rangle$ invariantes.

Vamos a ver que $\Gamma = \langle f_1, f_2 \rangle$ es isomorfo $\mathbb{F}^2$. Para eso definimos el morfismo:

$$(2.39) \quad \rho : \mathbb{F}^2 \rightarrow \Gamma,$$

dado por $\rho(a_1) = f_1$, $\rho(a_2) = f_2$. Bastará con probar que ρ es inyectivo. Tomemos entonces una palabra reducida ω en $\mathbb{F}^2$ distinta de e . Para probar que $\rho(\omega) \neq id$ veamos que existe $x \in S^1$ tal que $\rho(\omega)(x) \neq x$.

Como $\omega \in \mathbb{F}^2 = \langle a_1, a_2 \rangle$, podemos escribir $\omega = a_{i_1}^{\pm 1} \dots a_{i_k}^{\pm 1}$, con $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2\}$, donde ningún a_i se multiplica por su inverso. Por definición de ρ tenemos $\rho(\omega) = f_{i_1}^{\pm 1} \dots f_{i_k}^{\pm 1}$. Haremos la prueba por inducción en k .

Consideramos $C = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$. Veamos que

$$(2.40) \quad f_i^{\pm 1}(C^c) \subset C \text{ para ambos valores de } i$$

Si tomamos $x \in C^c$, tenemos $x \in A_1^c \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2^c$ por lo tanto:

$$\begin{cases} x \in A_1^c \cap A_2^c, \text{ entonces } f_i(x) \in A_i \\ x \in B_1^c \cap B_2^c, \text{ entonces } f_i^{-1}(x) \in B_i. \end{cases} \quad \text{Por lo que en ambos casos } f_i^{\pm 1}(x) \in C$$

Esto prueba que el caso base de la siguiente:

Afirmación 2.61. $\rho(\omega)(C^c) \subset C$ para toda palabra reducida de largo k . Y si dado $x \in C^c$, $\rho(\omega)(x) \in A_i$ entonces el último homeomorfismo aplicado fue f_i . Análogamente si $\rho(\omega)(x) \in B_i$, entonces el último homeomorfismo aplicado fue f_i^{-1} .

Ahora supongamos que vale para $k - 1$ y probémoslo para k . Sea $v \in C^c$ y ω palabra reducida de largo k , tomemos i, j los índices correspondientes a los dos últimos homeomorfismos de $\rho(\omega)$ y f composición de $f_i^\pm$ tal que:

$$(2.41) \quad \rho(\omega)(v) = f_j^{\pm 1} f_i^{\pm 1} f(v)$$

Por hipótesis inductiva tenemos que $x = f_i^{\pm 1} f(v) \in C$, supongamos sin pérdida de generalidad que x se encuentra en A_1 . Entonces también por hipótesis inductiva debe ser $f_i^{\pm 1} = f_1$. Ahora observemos que tenemos las siguientes inclusiones:

$$(2.42) \quad f_1^{\pm 1}(A_1) \subset A_1 \subset C, f_2^{\pm 1}(A_1) \subset A_1 \subset C$$

Por lo tanto la única manera de que con $x \in A_1$ y $f_j^{\pm 1}(x)$ no este en C es que la última aplicación sea $f_1^{-1}(x)$. Entonces $j = i$, y la última aplicación es la inversa de la penúltima. Luego ω no era una palabra reducida. Finalmente $f_j^{\pm 1}(x)$ debe estar en C .

Hasta ahora ya tenemos una parte del ejemplo que en sí es relevante: existe una acción en S^1 sin medidas de probabilidad invariantes.

En el capítulo 3 introduciremos la importancia de las medidas invariantes en el contexto del Teorema 1.1, y al final del mismo retomaremos este ejemplo.

CAPÍTULO 3

Medidas invariantes y puntos fijos globales

1. Introducción

Este capítulo estará dedicado a probar el siguiente:

TEOREMA 1.3. *Si Γ es un grupo discreto tal que:*

- (1) *Su abelianización $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finita*
- (2) *Γ actúa en S^1 por homeomorfismos que preservan orientación, preservando una medida de probabilidad μ .*

Entonces Γ tiene al menos una órbita finita

Para esta prueba nos basamos en [Wit11]. Usando este último teorema es claro que para probar el Teorema 1.1 alcanza probar que un lattice de $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, que actúa en S^1 tiene una medida μ Γ -invariante y que su abelianizado es finito. Ambas afirmaciones van a fallar si $n = 2$. Al final del capítulo veremos un ejemplo de una acción de un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$ que no tiene abelianizado finito ni medida de probabilidad invariante.

Para probar el Teorema 1.3 vamos a separar en dos casos según la medida μ sea o no atómica. Para el caso en que μ tenga átomos se sigue fácilmente de la Γ -invarianza de μ que toda órbita atómica será finita. Para el caso en que no hay átomos se prueba que a menos de quedarnos solo con el soporte de la medida y suponer que la acción es fiel tenemos que el grupo debe necesariamente actuar por rotaciones y por lo tanto es abeliano. En este segundo caso usamos también la primer hipótesis del teorema que nos dice que el abelianizado es finito con lo cuál nuestro grupo era finito. Por lo tanto lo son sus órbitas $\mathcal{O}(x)$ para todo $x \in \text{sop}(\mu)$. Antes de probar el teorema veremos algunas generalidades.

2. Generalidades

La siguiente proposición se puede encontrar en [Fol99]:

Proposición 3.1. *Sea μ una medida de Borel regular en $\mathbb{R}$, entonces el mapa definido por:*

$$(3.1) \quad G(x) = \begin{cases} \mu([0, x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es una función creciente y continua a derecha.

De dónde vamos a concluir el siguiente:

Corolario 3.2. Sea $\mathcal{L}$ la medida de Lebesgue y ν una medida de probabilidad sin átomos y con soporte total, entonces existe un homeomorfismo $g : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\nu(A) = \mathcal{L}(g(A))$

DEMOSTRACIÓN. Podemos levantar la medida ν de S^1 a una medida μ , $\mathbb{Z}$ invariante en $\mathbb{R}$.

Por el Teorema 3.1 μ define una función G creciente y continua a derecha. Además por ser μ sin átomos se tiene que G también es continua a izquierda, por lo que es continua. Dado que μ tiene soporte total G es también estrictamente creciente. Por lo tanto es inyectiva. Ahora como μ es $\mathbb{Z}$ invariante entonces G es sobreyectiva.

Luego G es una función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva y continua. Podemos deducir usando herramientas de topología que es de hecho un homeomorfismo.

Ahora probemos que $\mathcal{L}(A) = \mu(G^{-1}(A))$, para todo A de Boreliano. Bastará probarlo en una familia de conjuntos que generen a los Borelianos, a saber los de la forma $[0, x)$ y $(-x, 0]$. Observamos que por ser G creciente y homeomorfismo se tiene que $G^{-1}([0, x)) = [0, G^{-1}(x))$. Entonces:

$$(3.2) \quad \mu(G^{-1}[0, x)) = \mu([0, G^{-1}(x))) = G(G^{-1}(x)) = x = \mathcal{L}([0, x)).$$

Por lo que las medidas $\mu(G^{-1})$ y $\mathcal{L}$ deben ser iguales en todos los Borelianos y por lo tanto son iguales. Como G proviene de una medida μ $\mathbb{Z}$ -invariante, entonces es una función $\mathbb{Z}$ -equivariante, por lo que baja al cociente. Además como G es un homeomorfismo, baja a un homeomorfismo g en S^1 y se puede ver que conjuga ν con $\mathcal{L}$ como queríamos. $\square$

Proposición 3.3. Sea Γ un grupo y $\hat{\Gamma}$ un subgrupo de Γ . Entonces la inclusión $i : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ induce una función inyectiva $r : \hat{\Gamma}/[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}] \rightarrow \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la proyección $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ y el mapa $\hat{r} = \pi \circ i$. Probemos que $\hat{r}$ es constante en las clases de equivalencia de $[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}]$.

Como $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ y $[\Gamma, \Gamma] = \langle \{x \in \Gamma : x = ghg^{-1}h^{-1} \text{ con } g, h \in \Gamma\} \rangle$ entonces $[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}] \subset [\Gamma, \Gamma]$. Sean $x, y \in \hat{\Gamma}$ tales que $xy^{-1} \in [\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}]$, entonces $xy^{-1} \in [\Gamma, \Gamma]$. Luego $\hat{r}(x) = \hat{r}(y)$ por lo que $\hat{r}$ es constante en las clases de equivalencia dadas por el subgrupo $[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}]$. Además como π es morfismo $\hat{r}$, también lo es. Luego por la propiedad universal del cociente existe:

$$r : \hat{\Gamma}/[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}] \rightarrow \Gamma/[\Gamma, \Gamma] \text{ morfismo tal que } r([x]) = \hat{r}(x).$$

Veamos que r es inyectivo. Como r es morfismo para ver la inyectividad resta ver que $r^{-1}[e] = [e]$. Lo que es lo mismo que ver que $\hat{r}^{-1}([e]) = [e]$ que a su vez es equivalente a ver que $i^{-1}([e]) = [\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}]$. Esto último se cumple ya que i es la inclusión. Entonces r es un morfismo inyectivo como queríamos. $\square$

3. Prueba del Teorema

PRUEBA DEL TEOREMA. 1.3 Dividiremos esta prueba en dos casos, según el conjunto $A = \{x \in S^1 : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ sea vacío o no, es decir, según la medida μ tenga o no tenga átomos.

3.1. Caso 1. Si μ tiene al menos un átomo p .

Sea

$$\Gamma_p = \{gp : g \in \Gamma\}$$

la órbita de p .

Cómo μ es Γ -invariante, tenemos $\mu(\{gp\}) = \mu(\{p\}) \forall g \in \Gamma$. Ahora por la aditividad en conjuntos disjuntos de μ tenemos que $\mu(\Gamma_p) = \#(\Gamma_p)(\mu(\{p\}))$. Por ser μ medida de probabilidad se tiene: $\mu(\Gamma_p) < \infty$. Combinando las dos últimas expresiones
$$\begin{cases} \mu(\Gamma_p) = \#(\Gamma_p)(\mu(\{p\})) \\ \mu(\Gamma_p) < \infty. \end{cases}$$
 obtenemos que debe ser $\#(\Gamma_p) < \infty$.

3.2. Caso 2. Si μ no tiene átomos.

Vamos a probar que podemos cambiar μ por otra medida con soporte total, para eso probaremos la siguiente:

Afirmación 3.4. *A partir de μ podemos construir una medida $\hat{\mu}$ y una nueva acción $\bullet$ de Γ en $(S^1, \hat{\mu})$ (por homeomorfismo que preservan orientación) tal que:*

- (1) $\hat{\mu}$ tiene soporte total.
- (2) $\hat{\mu}$ cumple la invarianza respecto de la acción $\bullet$ de Γ .
- (3) Si $(S^1, \hat{\mu})$ tiene un punto cuya órbita por la acción de Γ es finita, entonces (S^1, μ) tendrá un punto correspondiente cuya órbita por la acción $\cdot$ de Γ será finita.

DEMOSTRACIÓN. 3.2.

Haremos algunas definiciones preliminares para luego definir $\hat{\mu}$.

Tenemos que como $\text{sop}(\mu)$ es un cerrado, el conjunto $O = (\text{sop}(\mu))^c$, es abierto. Luego como los abiertos de S^1 son unión de a lo sumo numerables intervalos abiertos podemos escribir, $O = \cup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$. Sea la siguiente relación de equivalencia en S^1 :

$$x \sim y \text{ siempre que } x, y \in [a_n, b_n].$$

Definamos $f : \text{sop}(\mu) \rightarrow S^1$ como $f = \pi \circ i$ donde i es la inclusión $i : \text{sop}(\mu) \rightarrow S^1$ y $\pi : S^1 \rightarrow S^1 / \sim$ es la proyección inducida por la relación $\sim$. Observando que $S^1 / \sim = S^1$, el codominio de f es coherente con esta definición.

Consideremos $\hat{\mu}$ definida como:

$$\hat{\mu}(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

para todo B medible según μ . Así definida $\hat{\mu}$ tiene soporte total pues el dominio de f es el soporte de μ .

Observamos que si bien f no es inyectiva podemos invertirla sobre los puntos que nos interesan. Se tiene que para todo $x \in (S^1, \hat{\mu})$ tal que su clase de equivalencia no tiene un solo elemento, existe un único a_n tal que $x \sim a_n$. Por lo tanto podemos definir $h : (S^1, \hat{\mu}) \rightarrow (S^1, \mu)$ como sigue:

$$h([x]) = \begin{cases} x & \text{si } [x] \text{ tiene un solo elemento} \\ a_n & \text{si } x \sim a_n \end{cases}$$

Consideramos la acción $\bullet$ de Γ , sobre el par $(S^1, \hat{\mu})$, como la restricción de Γ al $\text{sop}(\mu)$ a menos de ir y volver por h . Formalmente:

$$g \bullet x = f(g \cdot h(x))$$

Como f y h preservan orientación y $\cdot$ preserva orientación entonces la nueva acción $\bullet$ preserva orientación.

Sea $S = \text{sop}(\mu) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n$. Vemos, por definición de la relación $\sim$, que todos los elementos de S pertenecen a una clase de equivalencia diferente por lo tanto la función f restringida a S es inyectiva. Además por como definimos h se tiene que restringiendo a S y $f(S)$, f y h son inversas:

$$(3.3) \quad (f|_S)^{-1} = h|_{f(S)}.$$

Veamos que $\hat{\mu}$ es Γ -invariante.

Observamos primero que por la Γ invarianza de μ los conjuntos $\text{sop}(\mu)$ y $\partial\text{sop}(\mu)$, son Γ -invariantes. Además Γ actúa preservando orientación con lo cuál se tiene $\Gamma \bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} b_n$. Esto prueba que entonces S es un conjunto Γ -invariante.

Vamos a probar primero que $\mu|_{f(S)}$ es Γ -invariante y luego que $\mu|_{f(S)^c}$ también es Γ -invariante.

Tomamos primero B medible tal que $B \subset f(S)$ y $g \in \Gamma$. Aplicando la definición de $\hat{\mu}$ y la observación de la ecuación 3.3 tenemos: $\hat{\mu}(g \bullet B) = \mu(h(g \bullet B))$. Ahora como en S , h es la inversa de f : $h(B) \subset S$. Como S es Γ -invariante, entonces $gh(B) \subset S$. Al aplicar la definición del producto $\bullet$ y la ecuación 3.3 obtenemos:

$$\mu(h(g \bullet B)) = \mu(h(f(gh(B)))) = \mu(gh(B))$$

Como μ es Γ -invariante lo anterior es

$$\mu(gh(B)) = \mu(h(B)) = \hat{\mu}(B)$$

Con lo que al final obtenemos:

$$\hat{\mu}(g \bullet B) = \hat{\mu}(B).$$

Ahora probemos la Γ -invarianza de μ en $f(S)^c$. Ya observamos que $f(S)$ es Γ -invariante por lo tanto también lo es $f(S)^c$. De donde si $A \subset f(S)^c$ entonces $gA \subset f(S)^c$. También observando que $f(S)^c \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n]$, se tiene $\hat{\mu}(f(S)^c) \leq \hat{\mu}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n]) = 0$ y por lo tanto $\hat{\mu}(f(S)^c) = 0$. Luego como $A, gA \subset f(S)^c$ también tenemos $\hat{\mu}(A) = 0 = \mu(\hat{g}A)$, lo que prueba que $\hat{\mu}$ es Γ -invariante es $f(S)^c$.

Hemos probado entonces que $\hat{\mu}$ es Γ -invariante.

Veamos que si la acción de Γ en $S^1 / \sim$ tiene una órbita finita entonces la acción original también.

Supongamos que existe p en S^1 tal que

$$\{g \bullet p : g \in \Gamma\} = \{f(g \cdot h(p)) : g \in \Gamma\}$$

es finito. Observamos que f es 1 a 1 restringida a S , 2 a 1 restringida a $\partial\text{sop}(\mu)$ y que $S \cup \partial\text{sop}(\mu) = \text{sop}(\mu)$. Deducimos que f restringida a $\text{sop}(\mu)$ manda conjuntos infinitos en conjuntos infinitos.

Por ser μ Γ -invariante, el soporte de μ es Γ -invariante y como $h(p) \in \text{sop}(\mu)$ por definición, entonces $g \cdot h(p) \in \text{sop}(\mu)$.

En suma, de los últimos dos párrafos deducimos que entonces:

$$\{g \cdot h(p) : g \in \Gamma\}$$

también es finito, y por lo tanto la acción original de Γ en S^1 tiene una órbita finita. En resumen hemos probado, en primer lugar, que si tenemos μ cumpliendo las hipótesis del presente teorema podemos construir una medida $\hat{\mu}$ que tenga soporte total y definir un acción de Γ , $\bullet$ en S^1 que también cumplan dichas hipótesis. Y en segundo lugar que si se cumple la tesis para la nueva acción entonces se cumple para la acción inicialmente definida.

□

Ahora podemos suponer que nuestra medida μ tiene soporte total.

Veamos que podemos suponer que la acción es fiel.

Ahora dado que μ tiene soporte total y no tiene átomos, tenemos por la Proposición 3.2 que existe $h : (S^1, \mu) \rightarrow (S^1, \mathcal{L})$ homeomorfismo tal que:

$$(3.4) \quad \mu(A) = \mathcal{L}(h(A)).$$

Definimos una nueva acción de Γ en $(S^1, \mathcal{L})$ como: $\Gamma \cdot x = h(\gamma \cdot h^{-1}(x))$. Como la acción $\cdot$ en (S^1, μ) es fiel y h es homeomorfismo entonces la acción $\cdot$ en $(S^1, \mathcal{L})$ es fiel. Veamos que $\mathcal{L}$ es Γ -invariante por la acción $\cdot$. Tomamos un conjunto A de Borel. Usando la propiedad 3.4 de h y la definición de la acción $\cdot$, tenemos:

$$(3.5) \quad \mathcal{L}(\gamma \cdot A) = \mu(h^{-1}(\gamma \cdot A)) = \mu(h^{-1}(h\gamma h^{-1}(A)))$$

$$(3.6) \quad = \mu(h^{-1}(h \gamma h^{-1}(A))) = \mu(\gamma h^{-1}(A)) = \gamma\mu(h^{-1}A)$$

$$(3.7) \quad = \gamma\mathcal{L}(A).$$

Entonces Γ es $\mathcal{L}$ -invariante de donde la imagen de Γ en $\text{Homeo}^+(S^1)$ es un subgrupo del grupo de rotaciones, por lo tanto es abeliano.

Ahora consideremos la siguiente relación de equivalencia:

$$g \equiv g' \text{ si } g \cdot x = g' \cdot x \quad \forall x \in S^1.$$

Cocientando por la misma obtendremos una acción fiel cuyo morfismo asociado tendrá la misma imagen que nuestra acción original y por lo tanto tendrá imagen abeliana. Ahora por ser esta nueva acción fiel, se tiene que $\Gamma / \equiv$ es también abeliano. Como el conmutador es el menor grupo por el que el cociente queda abeliano entonces la relación de equivalencia $\equiv$ debe contener a la relación de equivalencia dada por el conmutador. Luego como el abelianizado de Γ es finito por hipótesis entonces también lo es $\Gamma / \equiv$. Luego toda órbita que esté en el soporte de la medida es finita para esta nueva acción. Pero esta nueva acción tiene la misma imagen que la original y por lo tanto, toda órbita que esté en el soporte de la medida es finita para la acción original.

Ahora consideremos la siguiente relación de equivalencia:

$$g \equiv g' \text{ si } g \cdot x = g' \cdot x \quad \forall x \in S^1.$$

Cocientando por la misma obtendremos una acción fiel cuyo morfismo asociado tendrá la misma imagen que nuestra acción original. Esta acción tiene las mismas órbitas que Γ ya que tiene un representante de clase. Veamos que $\hat{\Gamma}$ tiene abelianizado finito:

De hecho en la Proposición 3.3 probamos que la inclusión $i : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ induce una función inyectiva $g : \hat{\Gamma}/[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}] \rightarrow \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$. Como Γ tiene abelianizado finito deducimos que Γ' también lo tiene.

Usando lo anterior podemos suponer que Γ actúa fielmente.

□

4. Acciones de lattice de $SL(2, \mathbb{R})$

Al final del capítulo anterior, en el Ejemplo 2.60, hemos construido una acción de $\mathbb{F}^2$ en S^1 que no tiene medidas invariantes, ni puntos con órbita finita.

Ahora vamos a ver que de hecho se puede definir esta acción para un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$ isomorfo a $\mathbb{F}^2$.

Esto muestra que el Teorema 1.1 no vale si $n = 2$. Además muestra de que forma falla la estrategia de usar el Teorema 1.3 para probar el Teorema 1.1: no se cumple la hipótesis de abelianizado finito, ya que el abelianizado de $\mathbb{F}^2$ es $\mathbb{Z}^2$, ni tampoco la hipótesis de la existencia de una medida de probabilidad invariante.

4.1. $\mathbb{F}^2$ es lattice de $SL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 3.5. *Existe un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$ isomorfo al grupo libre en dos generadores, cuyos generadores actúan en S^1 y tal que es un caso particular de la acción definida en el Ejemplo 2.60.*

DEMOSTRACIÓN. Para verlo, consideremos el semiplano superior de $\mathbb{C}$, como $\mathbb{H}^2$. Se puede ver que podemos tomar cuatro geodésicas que forman un cuadrado cuyos ángulos miden 0.

Llamémosle a_1 y a_2 a dos geodésicas enfrentadas en el cuadrado y b_1, b_2 a las otras dos. Tomemos γ_1 el elemento de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ que manda a_1 en a_2 y γ_2 el que manda b_1 en b_2 . La acción de γ_1 y γ_2 puede extenderse al borde de $\mathbb{H}^2$, que es S^1 , tomando límite. Sean C, D, E y F los vértices en S^1 del cuadrado geodésico, con $\gamma_1(C) = D$, $\gamma_1(E) = F$ y $\gamma_2(C) = E$, $\gamma_2(D) = F$.

Entonces esta acción es un caso particular de la acción descrita en el Ejemplo 2.60 donde los intervalos A_1, A_2, B_1 y B_2 son (a menos de los bordes):

$$A_1 = (C, E)$$

$$B_1 = (D, F)$$

$$A_2 = (C, D)$$

$$B_2 = (E, F),$$

ya que se tiene $\gamma_i(A_i^c) \subset \overline{B_i}$ para $i = 1, 2$ y los abiertos son disjuntos dos a dos.

Una leve modificación del argumento explicado en el Ejemplo 2.60 permite probar que el epimorfismo que manda los generadores de $\mathbb{F}^2$ en γ_1 y γ_2 es inyectivo. Por lo que obtenemos $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \mathbb{F}^2$.

Además por lo probado en el Ejemplo 2.60, la acción de $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \mathbb{F}^2$ en S^1 no deja

medidas de probabilidad invariantes ni tiene fijos.

Ahora falta ver que $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \mathbb{F}^2$ es un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$. Del Teorema de Gauss-Bonnet se deduce que en el caso particular de $\mathbb{H}^+$ que el área de un triángulo geodésico es π menos la suma de los ángulos interiores del mismo.

Ahora si dividimos el cuadrado en dos con una geodésica que conecte dos vértices no adyacentes, tenemos dos triángulos geodésicos ambos con ángulos internos iguales a cero. Por lo tanto tienen área π , siendo el área del cuadrado igual a 2π , en particular, es finita. Se puede ver que este cuadrado es un dominio fundamental de la acción definida por $\mathbb{F}^2$ en $\mathbb{H}^+$.

Como la acción de $\mathbb{F}^2$ en $\mathbb{H}^2$ tiene dominio fundamental de medida finita el Teorema 2.54 nos dice que $\mathbb{F}^2$ es lattice de G .

□

CAPÍTULO 4

Los Lattices del grupo lineal especial tienen abelianizado finito

1. Introducción

El objetivo de este capítulo es probar que:

(4.20) Un lattice Γ de $SL(n, \mathbb{R})$ tiene abelianizado finito para todo $n \geq 3$.

Esta afirmación no es cierta si tomamos $n < 3$. Para $n = 2$ se puede probar que el grupo libre en dos elementos $\mathbb{F}^2$ es un lattice de $SL(2, \mathbb{R})$. Por detalles de este ejemplo ver [Mor15].

Para probar 4.20 vamos a definir una propiedad relativa a los puntos fijos de acciones unitarias sobre espacios de Hilbert de algunos grupos: la propiedad de Kazhdan. Nos basaremos en un Teorema que afirma que $SL(n, \mathbb{R})$ tiene esta propiedad si $n \geq 3$ y también todos sus lattices.

El esquema de la prueba es como sigue. Usaremos que los lattices de $SL(3, \mathbb{R})$ tienen la propiedad de Kazhdan [Mor15] y probaremos que esta propiedad se hereda al cociente. Con esto deduciremos que el abelianizado de un lattice tiene la propiedad de Kazhdan. Probaremos que si un grupo discreto tiene la propiedad de Kazhdan entonces es finitamente generado. Ahora el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados nos permite concluir que si Γ es un lattice y $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es infinito entonces tenemos un cociente de $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ isomorfo a $\mathbb{Z}$. Usando una vez más que propiedad de Kazhdan se hereda al cociente llegaremos a un absurdo pues, como probaremos al principio del capítulo, $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad de Kazhdan.

La referencia para este capítulo es [Mor15].

2. Generalidades

Definición 4.1. Dado (X, μ) espacio de medida, definimos $L^2(X)$ al espacio de funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $|f|^2$ tiene integral finita.

Proposición 4.2. Dado (X, μ) espacio de medida, $L^2(X)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$.

Definición 4.3. Dado un espacio vectorial V , definimos $\mathcal{L}(V)$ como el espacio de las transformaciones lineales de V en V .

3. Propiedad de Kazhdan

3.1. Definición de la propiedad de Kazhdan. En esta sección definiremos la propiedad de Kazhdan y probaremos que el grupo $\mathbb{Z}$ no la tiene.

Definición 4.4. Sea G un grupo topológico. Una acción de G en un espacio vectorial normado $\mathcal{B}$ tiene vectores casi-invariantes si, para todo conjunto compacto C de G y todo $\epsilon > 0$, hay un vector unitario $v \in \mathcal{B}$ tal que $\|c \cdot v - v\| < \epsilon$ para todo $c \in C$.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, un operador lineal $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se dice unitario si es biyectivo y cumple que conserva el producto interno es decir: $\langle v, w \rangle = \langle U(v), U(w) \rangle$ para todos $u, v \in \mathcal{H}$.

Definición 4.6. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ denotamos $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al espacio de todos los operadores lineales unitarios de $\mathcal{H}$.

Definición 4.7. Sea H un grupo topológico. Decimos que un morfismo ρ es una representación unitaria de H si $\rho : H \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que el mapa $h \mapsto \rho(h)(v)$ es continuo para cada $v \in \mathcal{H}$. Consideramos la acción de H sobre $\mathcal{H}$ asociada a la representación ρ como: $\cdot : H \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $h \cdot v = \rho(h)(v)$

Definición 4.8. Decimos que Γ tiene la propiedad de Kazhdan si toda representación unitaria $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ de Γ , que tenga vectores casi-invariantes tiene un vector invariante no nulo.

Observación 4.9. La propiedad de Kazhdan se hereda al cociente. Si H es un subgrupo normal de Γ , todo morfismo $\rho : \Gamma/H \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ define otro morfismo $\tilde{\rho} : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, dado por $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi_H$. Supongamos que la representación ρ tiene vectores casi invariantes y veamos que tiene un vector invariante.

Para eso empecemos viendo que $\tilde{\rho}$ tiene vectores casi invariantes. Consideremos un compacto C de Γ y $\epsilon > 0$, entonces $[C]$ es un compacto de Γ/H , luego ρ tiene un vector v que es (C, ϵ) casi-invariante. Por como definimos $\tilde{\rho}$ este vector también es un vector (C, ϵ) casi-invariante para $\tilde{\rho}$.

Ahora usando que Γ tiene la propiedad de Kazhdan obtenemos que debe tener un vector invariante no nulo, entonces existe $v \in \mathcal{H}$ tal que:

$$(4.1) \quad \tilde{\rho}(\gamma)(v) = v \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

De nuevo por como definimos $\tilde{\rho}$ se tiene que v también es Γ/H -invariante, es decir:

$$(4.2) \quad \rho([\gamma])(v) = v \text{ para todo } [\gamma] \in \Gamma/H$$

Hemos probado que si ρ tiene vectores casi invariantes entonces existe un vector v invariante. Luego Γ/H tiene la propiedad de Kazhdan.

Ejemplo 4.10. $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad de Kazhdan.

Recordamos que el espacio $l^2(\mathbb{Z})$ es el espacio de sucesiones a $\mathbb{R}$ de cuadrado sumable y es un espacio de Hilbert. Además dado $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $U_n : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, definido como $U_n(f)(x) = f(x + n)$ es lineal unitario.

Definimos $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{U}(l^2(\mathbb{Z}))$ donde $\rho(n) = U_n$. Se tiene que ρ es una representación unitaria.

Veamos que tiene vectores casi invariantes pero no vectores invariantes. Sea $C \subset \mathbb{Z}$ un compacto y $\epsilon > 0$.

Dados $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{R}$, consideremos el vector unitario $f = \frac{1}{2n+1} \chi_{[-n, n]}$ y veamos que

ajustando n podemos obtener que f es un vector (C, ϵ) casi invariante. Dado $k \in C$ acotemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \|kf - f\| &= \left\| \frac{1}{2n+1} k\chi_{[-n,n]} - \frac{1}{2n+1} \chi_{[-n,n]} \right\| \\
 &= \frac{1}{2n+1} \|k\chi_{[-n,n]} - \chi_{[-n,n]}\| = \frac{1}{2n+1} \|\chi_{[-n-k, n-k]} - \chi_{[-n,n]}\| \\
 (4.3) \quad &= \frac{1}{2n+1} \|\chi_{[-n,n] \Delta [-n-k, n-k]}\| \text{ para todo } k \in C.
 \end{aligned}$$

Como C es compacto en un grupo discreto, tiene finitos elementos. Entonces la cantidad de elementos en el conjunto de la diferencia simétrica $\{[-n, n] \Delta [-n-k, n-k]\}$ está acotado por $2|C|$. Luego la expresión en la ecuación 4.3 está acotada por $\frac{1}{2n+1} 2|C|$ para todo $k \in C$. Entonces tomando n suficientemente grande, se tiene que:

$$\|kf - f\| < \epsilon \text{ para todo } k \in C.$$

Luego f es un vector (C, ϵ) -casi invariante.

Supongamos que ρ tiene un vector f invariante. Entonces $\rho(n)(f) = f$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $f(x+n) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Lo cual equivale a decir que f es constante. Como además f tiene cuadrado sumable entonces debe ser $f \equiv 0$. Luego ρ no tiene vectores invariante no nulos.

Deducimos que entonces $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad de Kazhdan.

Este ejemplo será importante ya que junto con la observación 4.9 nos permitirá identificar que los grupos que tienen la propiedad de Kazhdan no pueden tener cocientes isomorfos a $\mathbb{Z}$.

4. Propiedades de algunos grupos con la propiedad de Kazhdan

Definición 4.11. Dado un grupo Γ que actúa sobre un espacio X y $f : X \rightarrow Y$ para cada $\gamma \in \Gamma$ definimos $f_\gamma : X \rightarrow Y$ como la función dada por $f_\gamma(x) = f(\gamma^{-1}x)$.

Lemma 4.12. Todo grupo discreto con la propiedad de Kazhdan es finitamente generado.

DEMOSTRACIÓN. 4.12 Sea Γ un grupo discreto con la propiedad de Kazhdan y sea $\mathcal{C} = \{\Gamma_\alpha : \alpha \in I\}$ la colección de todos los grupos finitamente generados. Como Γ es discreto, entonces $\mathcal{C}$ es numerable. Es decir $\mathcal{C} = \{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

En Γ/Γ_n consideramos la medida ν_n Γ -invariante. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos el morfismo $\rho_n : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Gamma/\Gamma_n))$ dado por $\rho_n(\gamma)(f) = f_\gamma$ siendo $f_\gamma(x\Gamma_n) = f(\gamma^{-1}x\Gamma_n)$.

Afirmación 4.13. Se tiene que dado $\gamma \in \Gamma$ f_γ está efectivamente en $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ y de hecho ρ_n es una representación unitaria.

DEMOSTRACIÓN. 4.13 Para ver $f_\gamma \in L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ observamos que como f_γ es un trasladado de f entonces, si f es medible f_γ también lo es. Veamos que f_γ tiene cuadrado integrable:

$$\int_{\Gamma/\Gamma_n} \|f_\gamma(x)\|^2 d\nu_n(x) = \int_{\Gamma/\Gamma_n} \|f(\gamma^{-1}x)\|^2 d\nu_n(x) = \int_{\Gamma/\Gamma_n} \|f(x)\|^2 d\nu_n(x) < \infty,$$

donde hemos usado la Γ invarianza de ν_n y que f tiene cuadrado integrable.

Veamos que ρ_n es una representación unitaria, es decir que además de ser un morfismo se tiene que $\rho_n(\gamma)$ es un mapa unitario para todo $\gamma \in \Gamma$.

Veamos que $\rho_n(\gamma)$ preserva el producto interno:

$$\langle \rho_n(\gamma)(f), \rho_n(\gamma)(g) \rangle = \langle f_\gamma, g_\gamma \rangle = \int_{\Gamma/\Gamma_n} f(\gamma^{-1}x) \bar{g}(\gamma^{-1}x) d\nu_n = \int_{\Gamma/\Gamma_n} f(x) \bar{g}(x) d\nu_n = \langle f, g \rangle,$$

donde hemos usado la Γ invarianza de ν_n . La biyectividad de $\rho_n(\gamma)$ se sigue de que dicho mapa tiene inversa, a saber: $\rho_n(\gamma^{-1})$. $\square$

Consideremos al espacio normado $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\Gamma/\Gamma_n)$, con el producto interno entre dos puntos x e y dado por las serie de los productos internos de las respectivas componentes. Para que este producto interno este bien definido consideramos: $\mathcal{H} = \{v \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\Gamma/\Gamma_n) : \|v\| < \infty\}$, que con el producto interno que hereda es un espacio de Hilbert. Ahora podemos considerar el morfismo ρ que es la suma de los morfismos anteriores, es decir: $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ donde ρ en la componente n -ésima vale $\rho(\gamma)(f)_n = \rho_n(\gamma)(f_n)$.

Afirmación 4.14. *Se tiene que ρ es una representación unitaria.*

DEMOSTRACIÓN. 4.14 Veamos que $\rho(\gamma)$ es un mapa unitario para todo $\gamma \in \Gamma$. Para ver que preserva el producto interno calculamos:

$$\langle \rho(\gamma)(f), \rho(\gamma)(g) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho(\gamma)(f)_n, \rho(\gamma)(g)_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho_n(\gamma)(f_n), \rho_n(\gamma)(g_n) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle,$$

donde hemos usado que $\rho_n(\gamma)$ preserva el producto interno. Además la biyectividad de $\rho(\gamma)$ podemos verla observando que tiene inversa, a saber: $\rho(\gamma^{-1})$.

Como claramente ρ es un morfismo entonces hemos probado que es una representación unitaria. $\square$

Cualquier conjunto compacto C de Γ será finito ya que Γ es discreto. Tomemos un compacto cualquiera C .

Ya que el compacto C debe ser finito entonces el grupo generado por C , tiene que ser uno de los grupos de la familia $\mathcal{C}$, es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle C \rangle = \Gamma_n$.

Veremos que para la acción anterior existe un vector $(C, 0)$ casi-invariante y por lo tanto (Γ tiene la propiedad de Kazhdan), debe existir un vector no nula $g \in \mathcal{H}$ que es invariante. Veremos que su proyección no nula $g_m \in L^2(\Gamma/\Gamma_m)$ debe ser constante y finalmente que entonces Γ/Γ_m debe ser finito. Como cada Γ_m es finitamente generado Γ también lo será.

Empecemos viendo que la acción de $C \subset \Gamma_n$ por el producto fija al elemento $[e]$ de Γ/Γ_n : $c \cdot [e] = c \cdot \Gamma_n = \Gamma_n = [e]$ para todo $c \in C$, por lo tanto también deja invariante al conjunto de elementos que no son el neutro.

Tomemos $f \in L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ definida como $f = \delta_e$ y veamos que es un elemento fijo por la acción de C . Por la observación anterior la clase donde f vale 1 es invariante por la acción de C (al igual que la clase donde f vale 0). Usando esto veamos que f es C -invariante. Tenemos que $\rho_n(\gamma)(f) = f_\gamma$, por lo que:

$$\rho_n(c)(f)([x]) = \rho_n(c)(f)(x\Gamma_n) = f_c(x\Gamma_n) = f(c^{-1}x\Gamma_n) = f(x\Gamma_n) \quad \forall c \in C. \text{ Luego } c \cdot f =$$

$f \forall c \in C$, donde $\cdot$ es la representación unitaria vista como acción.

Extendamos f a un elemento $\hat{f}$ de $\mathcal{H}$, poniendo en 0 las otras coordenadas distintas de n . Ahora, es claro que $\hat{f}$ sigue siendo invariante por la acción de C . Entonces Γ tiene un vector $(C, 0)$ casi-invariante, luego por tener Γ la propiedad de Kazhdan, debe tener un vector $g \in \mathcal{H}$ Γ -invariante, no nulo, es decir:

$$\rho(\gamma)(g) = g \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

Como g es no nulo, tomemos $g_m \in L^2(\Gamma/\Gamma_m)$ proyección no nula de g . Al tenerse $\rho(\gamma)(g) = g$ para todo $\gamma \in \Gamma$ en particular se tiene que las m -ésimas coordenadas son iguales $\rho(\gamma)(g)_m = g_m$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Por como definimos la representación unitaria ρ , se tiene $\rho(\gamma)(g)_m = \rho_m(\gamma)(g_m)$, así que combinando estas dos igualdades tenemos que g_m es un vector invariante para la representación ρ_m :

$$\rho_m(\gamma)(g_m) = g_m \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Esto también se puede escribir como:

$$\rho_m(\gamma)(g_m)(x\Gamma_m) = g_m(x\Gamma_m) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, x \in \Gamma/\Gamma_m,$$

y usando la definición de ρ_m nos queda:

$$(4.4) \quad g_m(\gamma^{-1}x\Gamma_m) = g_m(x\Gamma_m) \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in \Gamma/\Gamma_m$$

Veamos que como la acción de Γ es transitiva en Γ/Γ_m entonces g_m debe ser constante: Si $x\Gamma_m, y\Gamma_m \in \Gamma/\Gamma_m$ tomando $\gamma = xy^{-1}$ tenemos que $g(x\Gamma_m) = g(xy^{-1}y\Gamma_m) = g(\gamma y\Gamma_m)$ y ahora usando la ecuación 4.4 tenemos que $g(\gamma y\Gamma_m) = g(y\Gamma_m)$. De donde

$$g(x\Gamma_m) = g(y\Gamma_m).$$

Ahora como g_m está en $L^2(\Gamma/\Gamma_m)$ entonces:

$$\sum_{x\Gamma_m \in \Gamma/\Gamma_m} \|g_m(x)\|^2 = \sum_{x\Gamma_m \in \Gamma/\Gamma_m} a^2 < \infty.$$

Luego Γ/Γ_m debe ser finito. Finalmente como $\Gamma = \cup_{i=1}^k x_i\Gamma_m$ y Γ_m es finitamente generado, también lo será Γ

□

Teorema 4.15. *Todo grupo abeliano finitamente generado e infinito tiene un cociente isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. 4.15 Por el Teorema de estructura un grupo abeliano finitamente generado es

$G = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \oplus \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}$ Como estamos suponiendo que además es infinito alguno de los sumandos debe ser un $\mathbb{Z}$, o sea podemos escribir $G = H \oplus \mathbb{Z}$, donde H es la suma directa de todos los grupos que no son el último $\mathbb{Z}$. Entonces G/H es isomorfo a $\mathbb{Z}$. □

Proposición 4.16. *Si Γ es un grupo discreto que tiene la propiedad de Kazhdan y es infinito entonces es no abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. 4.16 Sea Γ un grupo discreto infinito con la propiedad de Kazhdan. Supongamos que es abeliano. Por tener la propiedad de Kazhdan podemos usar el Lemma 4.12 para deducir que Γ es finitamente generado. Ahora por ser Γ infinito

podemos aplicar el Teorema 4.15, y sabemos que existe un cociente de Γ tal que $\Gamma/H = \mathbb{Z}$. Usamos ahora la observación 4.9 que nos dice que la propiedad de Kazhdan se hereda al cociente, para concluir que $\mathbb{Z}$ tendría la propiedad de Kazhdan. Pero esto contradice lo probado en el ejemplo 4.10 donde vimos que no la tiene. Luego deducimos que un grupo infinito con la propiedad de Kazhdan debe ser no abeliano. $\square$

5. El grupo lineal especial y la propiedad de Kazhdan

El siguiente resultado se puede encontrar en [Mor15]:

Teorema 4.17. *El grupo $SL(n, \mathbb{R})$ tiene la propiedad de Kazhdan para todo $n \geq 3$*

La siguiente proposición se puede encontrar en [Mor15]:

Proposición 4.18. *Si Γ es un lattice de un grupo G con la propiedad de Kazhdan entonces Γ tiene la propiedad de Kazhdan.*

La misma nos permite deducir el teorema a continuación:

Teorema 4.19. *Si Γ es un lattice de $SL(n, \mathbb{R})$ entonces Γ tiene la propiedad de Kazhdan.*

Teorema 4.20. *El cociente de un lattice Γ en $SL(n, \mathbb{R})$ $n \geq 3$ por su abelianizado es finito*

DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema 4.19 y la Proposición 4.16 podemos probarlo como sigue.

Sea Γ un lattice de $SL(n, \mathbb{R})$ $n \geq 3$, por la Proposición 4.19, Γ tiene la propiedad de Kazhdan. por la Observación 4.9 también la tiene su abelianizado. Ahora supongamos por absurdo que dicho abelianizado $A = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es infinito, entonces por la Proposición 4.16 A sería no abeliano y llegamos a un absurdo. Luego Γ debe tener abelianizado finito. $\square$

El Teorema 4.20 nos deja más cerca de usar el Teorema 1.3, para probar el Teorema 1.1 ya que ahora sabemos que si estamos en las hipótesis del Teorema 1.1, entonces cumplimos la hipótesis 1 del Teorema 1.3. Ahora tendríamos que ver que dado Γ existe una medida μ de S^1 que es Γ -invariante. Para eso vamos a trabajar con las dos propiedades que dan nombre al siguiente capítulo de las que tomaremos lo necesario para probar un teorema clave: el Teorema de Fustenberg.

CAPÍTULO 5

Promediabilidad y Solubilidad

1. Introducción

Antes de presentar el contenido de este capítulo haremos algunas definiciones que precisamos para establecer el resultado principal a demostrar en el mismo. A partir de ahora establecemos la siguiente notación:

Notación 5.1. Notaremos G al grupo $SL(3, \mathbb{R})$

Notación 5.2. Notaremos por P al subgrupo de G formado por las matrices diagonales superiores:

$$(5.1) \quad P = \left\{ A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} : A \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

Definición 5.3. Sea Γ un grupo actuando en espacios X e Y , y $f : X \rightarrow Y$ un mapa. Decimos que f es Γ -equivariante a izquierda si:

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

Definición 5.4. Sea Γ un grupo actuando en espacios X e Y , y $f : X \rightarrow Y$ un mapa. Decimos que f es Γ -equivariante a derecha si:

$$f(x\gamma^{-1}) = \gamma f(x) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

Denotaremos por $\text{Prob}(X)$ al conjunto de medidas de probabilidad sobre X . Ver la sección 4 de este capítulo por más contexto.

Sea una acción de un lattice Γ de G en un espacio topológico compacto y Hausdorff X . Consideraremos la acción de Γ en $\text{Prob}(X)$ dada por: $\gamma\mu$ es la medida tal que $\gamma\mu(A) = \mu(A\gamma^{-1})$, para todo $\gamma \in \Gamma$, A Boreliano de X .

Observación 5.5. La acción anterior es la restricción de la siguiente acción de Γ en $C(X)^*$: $\gamma\Lambda$ es el funcional que en f vale, $\gamma\Lambda(f) = \Lambda(f_\gamma)$. Donde $f_\gamma(x) = f(x\gamma^{-1})$.

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema cuya prueba fue tomada de [Wit11]:

TEOREMA 1.4 (Furstenberg). Si Γ actúa continuamente en un espacio compacto X entonces existe un mapa Γ -equivariante (a izquierda), P -invariante (a derecha) y Borel medible $\psi : G \rightarrow \text{Prob}(X)$.

ya que el mismo será una herramienta fundamental para ver que dado Γ lattice de $SL(n, \mathbb{R})$, con $n \geq 3$, actuando en S^1 existe una medida μ de S^1 que es Γ -invariante.

Comenzaremos definiendo dos propiedades que puede tener un grupo topológico: la promediabilidad y la solubilidad. Probaremos que el subgrupo P de $SL(3, \mathbb{R})$ de matrices triangulares es soluble. Luego veremos algunos resultados básicos que convergen en que todo grupo soluble es promediable, y de donde concluiremos que P es promediable.

Para probar Fustenberg combinamos la promediabilidad de P con una generalización del teorema de Banach-Alaoglu.

La idea principal es hacer actuar P en el espacio vectorial $L^\infty(G, C(X)^*)$ de funciones Borel medibles y acotadas. Ahora consideremos $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ como el subconjunto de las funciones de $L^\infty(G, C(X)^*)$ que además son Γ -equivariantes y tienen imagen en las medidas de probabilidad de X . Usaremos el teorema extendido de Banach-Alaoglu para probar que $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ es un espacio compacto. Probaremos que además es convexo, no vacío e invariante por la acción natural de P en $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$. Finalmente de la promediabilidad de P concluimos que dicha acción tiene un fijo. Este fijo será la función que buscamos.

Para este capítulo asumiremos conocimientos elementales sobre medida y sobre espacio vectoriales topológicos y de Hilbert que pueden encontrarse en [SS05] y [Rud91]. Además usaremos una generalización del teorema de representación de Riesz, el Teorema 5.25, que puede encontrarse en [Har83]. En [Zim78] se describe la topología de $L^\infty(G, C(X)^*)$ usada en la sección 4. Una referencia global del capítulo para las pruebas aquí desarrolladas es [Mor15].

2. Generalidades

Definición 5.6. Dado un grupo H . Definimos la siguiente sucesión de grupos $H^{(0)} = H$ y $H^{(i+1)} = [H_i, H_i] \forall i \geq 0$

Definición 5.7. Un grupo H se dice soluble si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H^{(n)} = \{e\}$

Definición 5.8. Supongamos que un grupo H actúa por operadores lineales en un espacio vectorial $\mathcal{V}$ localmente convexo. Un compacto C , convexo, no vacío e invariante por la acción, es llamado un H -espacio compacto y convexo.

Definición 5.9. Sea $\cdot_{\mathcal{A}}$ una acción de H sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ le asociamos a la acción el morfismo: $\mathcal{A} : H \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ dado por $\mathcal{A}(h)(v) = h \cdot_{\mathcal{A}} v$.

Definición 5.10. Un grupo H se dice promediable si para todo acción $\cdot$ de H en un espacio vectorial $\mathcal{V}$ localmente convexo, todo H -espacio compacto y convexo tiene un punto fijo por la acción.

3. El grupo P es promediable

3.1. P es soluble.

Lemma 5.11. El grupo P es soluble.

PRUEBA LEMA. 5.11

Sean $P^{(1)} = [P : P]$, $P^{(2)} = [P^{(1)} : P^{(1)}]$ y $P^{(3)} = [P^{(2)}, P^{(2)}]$. Vamos a ver que $P^{(3)} = e$. Sabemos que:

$$P^{(1)} = \langle \{ABA^{-1}B^{-1} : \text{con } A \text{ y } B \in P\} \rangle$$

Definamos el mapa $diag : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $diag\left(\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\right) = (a_{11}, a_{22}, a_{33})$

La diagonal del producto de dos matrices triangulares superiores A y B es el producto punto a punto entre las diagonales de A y de B .

Entonces si

$$\begin{aligned} diag(A) &= (a, b, c) \\ diag(B) &= (d, e, f) \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} diag(A^{-1}) &= (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}) \\ diag(B^{-1}) &= (d^{-1}, e^{-1}, f^{-1}) \end{aligned}$$

y

$$diag(ABA^{-1}B^{-1}) = (ada^{-1}d^{-1}, beb^{-1}e^{-1}, cfc^{-1}f^{-1}) = (1, 1, 1)$$

Entonces

$$si\ C\ es\ un\ generador\ de\ P^{(1)}\ se\ tiene\ diag(C) = (1, 1, 1).$$

A su vez como el producto de matrices triangulares superiores con diagonal formada por unos tiene diagonal formada por unos y los generadores de $P^{(1)}$ tienen diagonal formada por unos podemos decir:

$$si\ C \in P^{(1)}\ se\ tiene\ diag(C) = (1, 1, 1).$$

Ahora consideremos:

$$P^{(2)} = \langle \{ABA^{-1}B^{-1} : \text{con } A \text{ y } B \in P^{(1)}\} \rangle$$

Ahora observamos que la supradiagonal del producto de dos matrices A y B en $P^{(1)}$ es la suma de las supradiagonales de A y de B .

Entonces si definimos el mapa $supra : P^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $supra\left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & * \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (a_{12}, a_{23})$, se tiene que $supra(Id) = supra(AA^{-1}) = supra(A) + supra(A^{-1})$. Como $supra(Id) = (0, 0)$, entonces:

$$supra(A^{-1}) = -supra(A) \text{ para toda } A \in P^{(1)}$$

Luego se tiene:

$$\begin{aligned} supra(ABA^{-1}B^{-1}) &= supra(A) + supra(B) + supra(A^{-1}) + supra(B^{-1}) = (0, 0). \\ &\text{para todas } A, B \in P^{(1)} \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$si\ C\ es\ generador\ de\ P^{(2)} \leq P^{(1)}\ entonces\ diag(C) = (1, 1, 1) \text{ y } supra(C) = (0, 0)$$

Una vez más como el producto de matrices triangulares superiores C cumpliendo $diag(C) = (1, 1, 1)$ y $supra(C) = (0, 0)$ también cumple estas dos propiedades y los generadores de $P^{(2)}$ la cumplen entonces:

si $C \in P^{(2)} \leq P^{(1)}$ se tiene $\text{diag}(C) = (1, 1, 1)$ y $\text{supra}(C) = (0, 0)$.

Por último consideramos:

$$P^{(3)} = \langle \{ABA^{-1}B^{-1} : \text{con } A \text{ y } B \in P^{(2)}\} \rangle$$

Tomamos una vez más $A, B \in P^{(2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego los elementos de $P^{(3)}$ son los generados por:

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b-a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Vemos que $P^{(3)} = \{e\}$ y por lo tanto P es soluble.

□

3.2. Todo grupo soluble es promediable.

Teorema 5.12. *Si H tiene un subgrupo normal cerrado N tal que N y H/N son promediabiles entonces H es promediable.*

DEMOSTRACIÓN. 5.12 Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $\mathcal{A} : H \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})$ una acción continua de H en $\mathcal{V}$ y C un H -espacio compacto y convexo de $\mathcal{V}$. Podemos tomar la restricción de la acción a N , $\mathcal{A}|_N : N \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})$. Como C es H -invariante entonces es N -invariante (también compacto y convexo). Es decir es un N -espacio para la acción restringida.

Luego al ser N promediable el conjunto

$$C^N = \{v \in C : n(v) = v \ \forall n \in N\}$$

es no vacío.

Además es cerrado pues la acción es continua y luego es compacto pues es subconjunto del compacto C . También es convexo pues los operadores son lineales.

Ahora tomamos la acción dada por todo H sobre C^N . $\mathcal{A} : H \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})|_{C^N}$

Como los vectores de C^N son fijados por N entonces $\mathcal{A}(n) = \text{Id}|_{C^N} = e \quad \forall n \in N$. Donde notamos por e al elemento identidad del grupo $\text{Lin}(\mathcal{V})|_{C^N}$. Ahora, por la propiedad universal del cociente el morfismo dado por la acción $\mathcal{A}$ pasa al cociente:

$$\tilde{\mathcal{A}} : H/N \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})|_{C^N},$$

obteniendo una acción del grupo H/N sobre C^N .

Por definición $\tilde{\mathcal{A}}$ cumple $\tilde{\mathcal{A}} \circ \pi_N = \mathcal{A}$, entonces $\tilde{\mathcal{A}}([h]) = \mathcal{A}(h)$, luego $[h](w) = h(w) \quad \forall w \in C^N$.

Si consideramos $\langle C^N \rangle$, el espacio generado por C^N , en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V} = \langle C^N \rangle \oplus D$. Dónde D es el espacio generado por los vectores que es necesario agregarle a una base de C^N para completar a una base de $\mathcal{V}$. Con esto podemos definir el mapa $\mathcal{B} : \text{Lin}(\mathcal{V})|_{C^N} \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})$ como $\mathcal{B}(T) = T_{ext}$ donde $T_{ext}|_{\langle C^N \rangle} = T$ y $T_{ext}|_D = \text{Id}$. $\mathcal{B}$ es un morfismo por lo que $\mathcal{B} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ también lo es. Luego $\mathcal{B} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ sigue definiendo una acción.

Ahora como H/N es promediable debe existir $v \in C^N$ fijo por la acción, o sea:

$$[h](v) = v \quad \forall [h] \in H/N.$$

Al estar v en C^N y darse la anterior igualdad tenemos que v es fijado por la acción original ya que:

$$h(v) = [h](v) = v$$

Entonces encontramos un fijo para el H -espacio convexo y compacto arbitrario C . Luego H es promediable. □

Proposición 5.13. *Los grupos cíclicos son promediables.*

DEMOSTRACIÓN. 5.13 Sea H un grupo cíclico, tenemos que existe $a \in H$ tal que $H = \langle a \rangle$. Tomemos C un H -espacio compacto y convexo de una acción $\cdot \mathcal{A}$ de H sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ localmente convexo. Notaremos por a lo que formalmente sería el operador lineal $\mathcal{A}(a) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$.

Si elegimos c_0 cualquiera en C y consideramos:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a^i(c_0)$$

como C es compacto c_n debe tener un punto de acumulación $c \in C$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\lim_n c_n = c$

Veamos que c es fijo por la acción de a : Primero como a es continua :

$$a(c) = a(\lim_n c_n) = \lim_n a(c_n).$$

Como la acción es por operadores lineales tenemos:

$$\lim_n a(c_n) = \lim_n a \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a^i(c) \right) = \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a^{i+1}(c).$$

Separamos la última suma en dos y vemos que el segundo sumando tiene numerador acotado y cociente tendiendo a infinito con n , por lo que tiende a cero:

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a^{i+1}(c) = \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a^i(c) + \lim_n \frac{a(c)}{n+1} = \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} a^i(c)$$

Ahora multiplicamos por el cociente $\frac{n+1}{n+2}$, ya que tiende a uno y cancelamos los términos iguales:

$$= \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} a^i(c) = \lim_n \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} a^i(c) = \lim_n \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} a^i(c).$$

Finalmente tenemos que lo anterior coincide con la definición de c_{n+1} :

$$= \lim_n \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} a^i(c) = \lim_{n+1} c_{n+1} = c$$

Juntando las últimas ecuaciones hemos probado que $a(c) = c$. Luego c es fijo por la acción de a , esto implica que también es fijo por la acción de cualquier potencia de a y como $H = \langle a \rangle$, entonces c es fijo por la acción de todo H . Notamos que para esta prueba no hemos usado que la acción de H este definida en todo el espacio vectorial $\mathcal{V}$ si no que nos alcanzó con que esté definida en el H -espacio C para poder encontrar un fijo. $\square$

Teorema 5.14. *Si H es abeliano entonces es promediable.*

DEMOSTRACIÓN. 5.14. Probémoslo primero para los grupos abelianos H generados por dos elementos h y g . Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial localmente convexo y $\cdot$ una acción de H sobre $\mathcal{V}$ por operadores lineales. Sea C un H -espacio, compacto, convexo y no vacío. Entonces el espacio

$$C^g = \{c \in C : g(c) = c\}$$

es lo mismo que los elementos de C fijos por la acción del grupo $\langle g \rangle$ por lo que C es un $\langle g \rangle$ -espacio. Usando la proposición anterior, tenemos que C^g es no vacío. Ahora probemos que C^g es invariante por h . Como H es abeliano se tiene que $gh = hg$, de donde

$$gh \cdot c = hg \cdot c.$$

Ahora como g fija a los $c \in C^g$ esto último queda:

$$hg \cdot c = h \cdot c \quad \forall c \in C^g.$$

Usando la asociatividad de las acciones y juntando las igualdades anteriores: $g \cdot (h \cdot c) = gh \cdot c = h \cdot c \quad \forall c \in C^g$. Con lo que hemos probado $h \cdot c \in C^g$.

Ahora observemos que el conjunto C^g es cerrado:

Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^g$ tal que $\lim_n c_n = c$, entonces $g \cdot c_n = c_n$ para todo n . Aplicamos g

de los dos lados en el limite: $g(c) = g(\lim_n c_n)$ por continuidad de g lo último es igual a $g(\lim_n c_n) = \lim_n g(c_n)$. Finalmente $\lim_n g(c_n) = \lim_n c_n = c$ por lo que juntando estas igualdades tenemos: $g(c) = c$.

Luego al ser C^g subconjunto del compacto C también es compacto.

Ahora veamos que como la acción es por transformaciones lineales y C es convexo también lo es C^g . Sean c_1 y $c_2 \in C^g$ y $t \in [0, 1]$,

$$g \cdot (tc_1 + (1-t)c_2) = tg \cdot c_1 + (1-t)g \cdot c_2,$$

ya que g actúa por transformaciones lineales. Como c_1 y $c_2 \in C^g$ lo anterior se puede escribir:

$$tg \cdot c_1 + (1-t)g \cdot c_2 = tc_1 + (1-t)c_2,$$

poniendo juntas estas dos igualdades obtenemos:

$$g \cdot (tc_1 + (1-t)c_2) = (tc_1 + (1-t)c_2).$$

Como C es convexo $(tc_1 + (1-t)c_2) \in C$. Es decir $(tc_1 + (1-t)c_2)$ es un elemento de C fijo por g , luego está en C_g y hemos probado que C_g es convexo.

Consideremos al subgrupo $\langle h \rangle$ de H actuando en C^g .

De la Proposición 5.13 deducimos que existe un $c \in C^g$ fijo por $\langle h \rangle$, es decir $C^g \cap C^h \neq \emptyset$. Como c está en $C^g \cap C^h$ entonces es fijo por g y por h , luego lo es por todo H . Es decir si H es abeliano y generado por dos elementos entonces es promediable.

Para poder establecer la promediabilidad de los grupos abelianos en general empecemos probando la siguiente:

Afirmación 5.15. *Si los elementos $g_1, g_2, \dots, g_n$ conmutan entonces $D = \cap_{i=1}^n C_{g_i} \neq \emptyset$.*

Probaremos la afirmación por inducción en n . Primero probemos que si los elementos $g_1, g_2, \dots, g_n$ conmutan y $\cap_{i=1}^{n-1} C_{g_i} \neq \emptyset$ entonces $D = \cap_{i=1}^n C_{g_i} \neq \emptyset$.

Ya vimos que si h y g conmutan entonces C_g es $\langle h \rangle$ -invariante. Como g_n y g_i conmutan sabemos entonces que C_{g_i} es $\langle g_n \rangle$ -invariantes para todo $1 \leq i \leq n$. Luego su intersección, $D = \cap_{i=1}^{n-1} C_{g_i}$, es también $\langle g_n \rangle$ -invariante. Ahora como $D = \cap_{i=1}^{n-1} C_{g_i} \neq \emptyset$ usamos la Proposición 5.13 para ver que este conjunto tiene un elemento c fijo por la acción de g_n . Por lo tanto existe $c \in \cap_{i=1}^{n-1} C_{g_i}$ tal que $g_n c = c$ o sea $\cap_{i=1}^n C_{g_i} \neq \emptyset$.

El argumento para H abeliano generado por dos elementos, muestra que la intersección $C_{g_1} \cap C_{g_2} \neq \emptyset$, por lo que demuestra el caso base de la afirmación.

Veamos como extender este argumento a un grupo con un generador cualquiera. Sea C un compacto convexo, no vacío, y H -invariante. Por la Afirmación 5.15 la familia de compactos $\mathcal{F} = \{C_h : h \in H\}$ tiene la Propiedad de intersección finita. Luego como la familia esta incluida en un compacto C , entonces la intersección es no vacía. Es decir existe $c \in C$ tal que $g(c) = c \forall g \in H$. Hemos probado entonces que H es promediable. $\square$

Corolario 5.16. *Todo grupo soluble es promediable*

DEMOSTRACIÓN. 5.16 Sea H un grupo soluble, entonces existe n tal que $H^{(n)} = \{e\}$. Como cualquier acción del grupo trivial deja fijos todos los elementos, entonces $H^{(n)}$ es promediable. Además es cerrado. Probemos ahora que si H^i es cerrado y promediable entonces H^{i-1} también. Suponemos que $H^i \leq H^{i-1}$ es cerrado y promediable. Como H^{i-1}/H^i es abeliano, por la Proposición 5.14, tenemos que es promediable. Ahora tenemos que $H^i \leq H^{i-1}$ es cerrado y promediable y que H^{i-1}/H^i también es promediable, usando el Teorema 5.12 deducimos que H^i es promediable. Hemos probado inductivamente que $H^0 = H$ es promediable. $\square$

Corolario 5.17. P es promediable

DEMOSTRACIÓN. 5.17 Sabemos por el Lema 5.11 que P es soluble y por el Corolario 5.16 todo grupo soluble es promediable. Entonces P es promediable. $\square$

4. Prueba del teorema de Fustenberg

Definición 5.18. Si Y es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial normado, escribimos Y^* al espacio vectorial $Y^* = \{f : Y \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es una función lineal}\}$ equipado con la topología débil*.

Es decir la definida por la siguiente convergencia:

Para $f_n, f \in Y^*$ se tiene que $f_n \rightarrow_* f$ si y solo si $f_n(v) \rightarrow f(v)$ para todo $v \in Y$.

Definición 5.19. Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo con la topología inducida por dicha norma.

Definición 5.20. Recordamos que si X es un espacio topológico, $C(X)$ denota al espacio de las funciones continuas de X .

Teorema 5.21. Si X es compacto entonces el espacio vectorial $C(X)$ es un espacio de Banach separable con la norma de operadores.

El siguiente teorema se puede encontrar en [Rud91]:

TEOREMA 5.1. Si B es de Banach entonces el espacio dual de B , B^* tiene bola unidad compacta con la topología débil*.

Definición 5.22. Sea $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Decimos que Λ es positivo si para toda $f \in C(X)$ tal que $f(X) \subset [0, \infty]$ se tiene que $\Lambda(f) \in [0, \infty]$.

Definición 5.23. Dada una medida μ sobre un espacio topológico compacto X , definimos el funcional $\Lambda_\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\Lambda_\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$

Observación 5.24. Si μ es medida positiva entonces Λ_μ es positiva. Sean Λ_n funcionales positivos y Λ otro funcional tal que $\Lambda_n \rightarrow_* \Lambda$. Entonces Λ es positivo.

El siguiente teorema se puede encontrar en [Har83]:

Proposición 5.25. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Para cualquier funcional lineal positivo $\Lambda \in C(X)$, se tiene que existe una única medida de Radon en X tal que:

$$\Lambda(f) = \int_X f(x) d\mu(x) \text{ para toda } f \in C(X).$$

Además μ en los abiertos queda definida por

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda(f) : f \text{ esta soportada en } V \text{ y } \text{Im}(f) \subset [0, 1]\}.$$

Definición 5.26. Definimos $\text{Prob}(X)$ como el conjunto de medidas de probabilidad sobre X , con la topología inducida por $C(X)^*$

Corolario 5.27. Si X es compacto (y Hausdorff) $\text{Prob}(X)$ es compacto con la topología débil* que hereda de $C(X)^*$ y convexo como subespacio del espacio vectorial $C(X)^*$.

DEMOSTRACIÓN. 5.27 Para ver la compacidad será suficiente probar que $\text{Prob}(X)$ es cerrado, y que es un subconjunto de la bola unidad de $C(X)^*$. Esto es porque X está en las hipótesis del Teorema 5.1 que nos permite concluir que la bola unidad de $C(X)^*$ es compacta. Así, viendo que $\text{Prob}(X)$ es cerrado y esta incluido en dicha bola concluiremos que es un cerrado adentro de un compacto y por lo tanto es compacto. Para ver que $\text{Prob}(X)$ es cerrado tomemos una sucesión débil* convergente en $\text{prob}(X)$ y veamos que su límite está en $\text{Prob}(X)$. Sean $\mu_n \in \text{Prob}(X)$, tales que

$$(5.2) \quad \Lambda_{\mu_n} \rightarrow_* \Lambda, \text{ con } \Lambda \in C(X)^*$$

Por la Observación 5.24, se tiene que μ_n positivas implica Λ_{μ_n} positivas. Y que a su vez Λ_{μ_n} positivas tales que $\Lambda_{\mu_n} \rightarrow_* \Lambda$, implica Λ positiva. Concluimos que el límite Λ en la ecuación 5.2 debe ser un funcional positivo.

Luego estamos en las hipótesis del teorema 5.25 y podemos deducir que existe una medida μ positiva tal que $\Lambda = \Lambda_\mu$. Tenemos entonces que $\mu_n \rightarrow \mu$ y μ_n es de probabilidad para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que μ también es de probabilidad. Se tiene que por la convergencia débil* $\lim_n \mu_n(f) = \mu(f)$ para toda f continua. Como la característica en todo X es continua entonces $1 = \lim_n \mu_n(\chi_X) = \mu(\chi_X)$, luego $\mu(X) = 1$.

Para ver que $\text{Prob}(X)$ está incluido en la $B(0, 1)$ de $C(X)^*$ tomemos $\mu \in \text{Prob}(X)$. Como μ es de probabilidad entonces $\mu(A) \leq 1$ para todo A μ -medible. Sea $f \in C(X)$ tal que $\|f\| = 1$ podemos acotar $\mu(f)$ como sigue:

$$\mu(f) = \int f d\mu \leq \|f\| \mu(X) = \mu(X) = 1.$$

Luego $|\mu(f)| \leq 1$ para toda $f \in C(X)$ tal que $\|f\| = 1$. Por definición tenemos:

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| : f \in C(X) \text{ con } \|f\| = 1\}.$$

Luego $\|\mu\| \leq 1$ y por lo tanto $\text{Prob}(X)$ está incluido en la $B(0, 1)$ de $C(X)^*$.

Por último veamos que $\text{Prob}(X)$ es convexo. Sean $\mu, \nu \in \text{Prob}(X)$ y $t \in [0, 1]$. Evaluemos la medida $\beta = (t\mu + (1-t)\nu)$ en X :

$$\beta(X) = t\mu(X) + (1-t)\nu(X) = t + (1-t) = 1,$$

ya que μ y ν miden 1 en todo X . Además:

$$\beta(A) = (t\mu + (1-t)\nu)(A) = t\mu(A) + (1-t)\nu(A) \geq 0,$$

pues tanto ν como μ son positivas.

Ahora queremos ver que β es σ aditiva, tomemos $A_1, A_2, \dots$ sucesión de conjuntos de Borel. Se tiene:

$$(5.3) \quad \beta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = (t\mu + (1-t)\nu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = t\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + (1-t)\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Como μ y ν son σ -aditivas podemos escribir

$$\begin{aligned} t\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + (1-t)\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \\ t\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} t\mu(A_n) + (1-t)\nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(A_n) \end{aligned}$$

Lo que termina de mostrar la σ -aditividad de β y con ello que $\text{Prob}(X)$ es convexo. $\square$

Definición 5.28. Sea (X, μ) un espacio de medida. Decimos que un conjunto $\mathcal{F} \subset X$ es un abierto μ c.t.p si $\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ tiene medida cero.

Teorema 5.29. Sea Γ un lattice de G entonces existe $\mathcal{F}$ domino fundamental abierto c.t.p. de la acción de Γ en G . Es decir, $\mathcal{F}$ es un subconjunto de G tal que:

- $\mathcal{F}\Gamma = G$
- $\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ tiene medida cero.
- $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \cap \gamma \overset{\circ}{\mathcal{F}} = \emptyset$

DEMOSTRACIÓN. 5.29 Sabemos que G hereda la topología del espacio de matrices y por lo tanto hereda la métrica del mismo. Sea A un abierto de G tal que:

$$(5.4) \quad \gamma A \cap A = \emptyset \text{ para todo } \gamma \text{ diferente de } e$$

consideramos:

$$\begin{aligned} C_A &= \{r : \exists x \in G \text{ cumpliendo que } \tilde{A} = A \cup B(x, r) \text{ sigue corroborando 5.4} \} \\ &\text{y en caso de ser no vacío definimos } r_A = \sup C_A. \end{aligned}$$

Vamos a construir $\mathcal{F}$ de la siguiente manera: empezamos con $A_0 = \emptyset$, es claro que C_A es no vacío pues el grupo Γ es discreto. Entonces existe r_{A_0} y x_0 el punto correspondiente. Ahora tomamos $A_1 = B(x_0, r_{A_0}) \cup A_0$. En el siguiente paso si C_{A_1} es no vacío, tomamos r_{A_1} y construimos $A_2 = A_1 \cup B(x_1, r_{A_1})$. Seguimos haciendo esto para todo $n \in \mathbb{N}$ o hasta que C_{A_n} sea vacío.

Al final de la construcción, obtenemos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ donde es posible que los A_i sean vacíos a partir de un momento. Por como lo construimos es claro que A es abierto y que cumple la propiedad 5.4.

Tenemos que el borde del abierto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ esta incluido en la unión de los bordes de cada abierto A_n . Como son numerables abiertos con borde de medida cero entonces su unión tiene también medida cero. Por lo que, ∂A , que está incluido en dicha unión también tiene medida 0.

Vamos a ver que $\text{int}((\Gamma \partial A)^c)$ es vacío. Supongamos que $(\Gamma A)^c$ tiene interior. Sea $x \in (\Gamma A)^c$, entonces existe r tal que $B(x, r) \subset (\Gamma A)^c$.

Sea el caso en el que A tiene infinitas bolas.

Sea $\mathcal{G}$ un dominio fundamental de Γ en G . Por 5.4 se tiene que $\mu(A) < \mu(\mathcal{G})$ entonces $\mu(A) < \infty$. Es claro entonces que los radios de las bolas que forman a A , deben tender a cero. Luego existe un entero k de la construcción tal que $r_{A_k} < r$ contradiciendo la definición de r_{A_k} .

Sea el caso en el que $A = A_n$ tiene n bolas. Como $B(x, r)$ está en el interior de $(\Gamma A)^c$

entonces $r \in C_A$. Esto hace que C_A sea no vacío. Luego llegamos a un absurdo ya que por definición de A la construcción solo para en el paso n si C_{A_n} es vacío. Concluimos que el complemento de ΓA no tiene interior. O sea que:

$$G = \Gamma A \cup \partial \Gamma A = \Gamma(A \cup \partial A).$$

Dónde además, vimos que ∂A tiene medida 0. Por lo que si tomamos $\mathcal{F} = A \cup \partial A$ y observamos $\mathring{\mathcal{F}} = A$ tenemos que $\mathcal{F}$ es un dominio fundamental abierto c.t.p. $\square$

Definición 5.30. Definimos el espacio $L^1(G, B) = \{f : G \rightarrow B : f \text{ medible y } \int_G \|f(x)\| d\mu(x) < \infty\}$. Donde μ es la medida de Haar en G .

Definición 5.31. Definimos al espacio $L^\infty(G, B^*) = \{\psi : G \rightarrow B^* \text{ } \mu\text{-medibles y acotadas}\}$. Lo equiparemos con una topología que introduciremos después de la siguiente observación:

Observación 5.32. Sea $f \in L^1(G, B)$, $\psi \in L^\infty(G, B^*)$, entonces el mapa $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ dado por:

$$\alpha(g) = \psi(g)(f(g))$$

está en $L^1(G)$.

La siguiente topología esta extraída de [Zim78].

Equiparemos $L^\infty(G, B^*)$ con la topología inducida por la siguiente convergencia:

$$\psi_n \rightarrow_* \psi \text{ si y solo si } \int_G \psi_n(g)(f(g)) d\mu(g) \rightarrow_n \int_G \psi(g)(f(g)) d\mu(g) \text{ para toda } f \in L^1(G, B)$$

Donde μ es la medida de Haar en G .

Proposición 5.33. $L^\infty(G, B^*)$ es un espacio localmente convexo.

DEMOSTRACIÓN. 5.33 Dado $f \in L^1(G, B)$, definamos $\rho_f : L^\infty(G, B^*) \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\rho_f(\psi) = \int_G \psi(g)(f(g)) d\mu(g).$$

Notar que la topología inducida por la convergencia:

$$\psi_n \rightarrow_* \psi \text{ si y solo si } \int_G \psi_n(s)(f(s)) d\mu(s) \rightarrow_n \int_G \psi(s)(f(s)) d\mu(s) \text{ para toda } f \in L^1(G, B),$$

se puede describir como la topología débil inducida por la siguiente familia de funciones:

$$\mathcal{P} = \{\rho_f : f \in L^1(G, B)\}$$

Es decir la menor topología que hace continuas a dichas funciones. Sabemos que una base para los abiertos de una topología inducida por una familia de funciones puede escribirse como sigue:

$$\beta = \{O : O = \rho_{f_1}^{-1}(U_1) \cap \rho_{f_2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \rho_{f_n}^{-1}(U_n)\},$$

es decir si $O \in \beta$ tiene la forma:

$$O = \{\psi : |\rho_{f_i}(\psi) - \rho_{f_i}(\psi_0)| < \epsilon_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\},$$

para ciertas $\psi_0 \in L^\infty(G, B^*)$, $f_i \in L^1(G, B)$, y ciertos $\epsilon_i \in \mathbb{R}$.
Vamos a probar que:

(5.5) *los abiertos de la base de la forma: $O = \{\psi : |\rho_f(\psi) - \rho_f(\psi_0)| < \epsilon\}$ son convexos,*

y como una intersección de convexos es un convexo entonces habremos probado que $L^\infty(G, B^*)$ tiene una base de convexos.

Para probar lo establecido en la ecuación 5.5, tomemos $\psi_1, \psi_2 \in O$, $t \in [0, 1]$. Queremos ver que $\psi = t\psi_1 + (1 - t)\psi_2 \in O$. Es decir queremos ver que:

$$(5.6) \quad |\rho_f(\psi) - \rho_f(\psi_0)| < \epsilon.$$

Como la integral es lineal entonces ρ_f es lineal.

Acotemos entonces $|\rho_f(\psi) - \rho_f(\psi_0)|$ usando la linealidad de ρ_f :

$$\begin{aligned} |\rho_f(\psi) - \rho_f(\psi_0)| &= |\rho_f(t\psi_1 + (1 - t)\psi_2) - \rho_f(\psi_0)| = |t\rho_f(\psi_1) + (1 - t)\rho_f(\psi_2) - \rho_f(\psi_0)| \\ &= |t\rho_f(\psi_1) + (1 - t)\rho_f(\psi_2) - t\rho_f(\psi_0) + (1 - t)\rho_f(\psi_0)| \\ &\leq t|\rho_f(\psi_1) - \rho_f(\psi_0)| + (1 - t)|\rho_f(\psi_2) - \rho_f(\psi_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

ya que ψ_1 y $\psi_2 \in O$. □

Definición 5.34. Sea C un compacto en el dual de un espacio de Banach B^* y (G, μ) un grupo con su medida de Haar definimos $L^\infty(G, C)$ como

$$L^\infty(G, C) = \{f : G \rightarrow C : f \text{ } \mu\text{-medible}\}$$

con la topología débil que hereda de $L^\infty(G, B^*)$.

El siguiente teorema se puede encontrar en [Mor15]:

Teorema 5.35. (*Banach-Alaouglu extendido*)

Sea B un espacio de Banach separable y C un subconjunto compacto y convexo de B^* , entonces $L^\infty(G, C)$ es compacto con la topología explicitada en la definición 5.34

Ahora tenemos las herramientas para probar:

TEOREMA 1.4 (Fustenberg). Si Γ actúa continuamente en un espacio compacto X entonces existe un mapa Γ -equivariante (a izquierda), P -invariante (a derecha) y Borel medible $\psi : G \rightarrow \text{Prob}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. 1.4

Como X es compacto estamos en las hipótesis de la Proposición 5.27 que nos dice que entonces $\text{Prob}(X)$ es compacto y convexo de $C(X)^*$. Además $C(X)$ es un espacio de Banach separable, por lo que tomando al compacto C como $C = \text{Prob}(X)$ se tiene que $C \subset C(X)^*$. Eso nos deja en las hipótesis del Teorema 5.35, deduciendo que $L^\infty(G, \text{Prob}(X))$ es un subconjunto compacto de $L^\infty(G, C(X)^*)$.

Definamos el siguiente subconjunto:

$$L_\Gamma^\infty(G, \text{Prob}(X)) = \{\psi \in L^\infty(G, \text{Prob}(X)) \mid \psi \text{ es } \Gamma\text{-equivariante } \mu\text{c.t.p}\}$$

Donde μ es la mitad de Haar de G .

Afirmación 5.36.

$$L_\Gamma^\infty(G, \text{Prob}(X))$$

es un subconjunto, compacto y convexo de $L^\infty(G, \text{Prob}(X))$.

DEMOSTRACIÓN. 5.36 Probemos primero la convexidad. Sean $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ y $t \in [0, 1]$, queremos ver:

$$\beta = t\psi_1 + (1-t)\psi_2 \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X)).$$

Por la Proposición 5.27 el conjunto $\text{Prob}(X)$ es convexo, luego $\beta(x) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)$ que es combinación convexa de medidas de probabilidad es de probabilidad, por lo que β tiene codominio $\text{Prob}(X)$.

Además una combinaciones convexa de funciones medibles y acotadas es medible y acotada. Entonces $\beta \in L^\infty(G, \text{Prob}(X))$.

Resta ver que β es Γ -equivariante c.t.p. Si ν es una medida sabemos que la medida $t\nu$ es tal que $(t\nu)(A) = t\nu(A)$. La acción de Γ en $\text{Prob}(X)$ es la dada por $(\gamma\nu)(A) = \nu(\gamma^{-1}A)$. Luego actuar por Γ y multiplicar por t a la medida ν conmutan:

$$\gamma(t\nu)(A) = (t\nu)(\gamma^{-1}A) = t\nu(\gamma^{-1}A) = t(\gamma\nu)(A). \text{ Concluyendo } t\gamma\nu = \gamma t\nu.$$

Entonces podemos escribir la siguiente ecuación donde la segunda igualdad se cumple μ c.t.p x porque ψ_1 y ψ_2 son Γ -equivariantes μ c.t.p y la tercera por la conmutatividad entre t y γ que probamos antes:

$$(5.7) \quad \beta(\gamma x) = t\psi_1(\gamma x) + (1-t)\psi_2(\gamma x)$$

$$(5.8) \quad = t\gamma\psi_1(x) + (1-t)\gamma\psi_2(x)$$

$$(5.9) \quad = \gamma t\psi_1(x) + \gamma(1-t)\psi_2(x)$$

$$(5.10) \quad = \gamma(t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)) = \gamma(\beta(x))$$

$$\beta(\gamma x) = t\psi_1(\gamma x) + (1-t)\psi_2(\gamma x) = t\gamma\psi_1(x) + (1-t)\gamma\psi_2(x) = \gamma t\psi_1(x) + \gamma(1-t)\psi_2(x) = \gamma(t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)) = \gamma(\beta(x)).$$

Luego β es Γ -equivariante μ c.t.p.

Esto concluye la prueba de la convexidad de $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$.

Probemos ahora que $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ es cerrado.

Sea $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de mapas en $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ tal que $\psi_n \rightarrow_* \psi$. Queremos ver que $\psi \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$.

Entonces $\psi_n(x) \rightarrow_* \psi(x)$ para todo $x \in G$, donde la convergencia es la débil* de $\text{Prob}(X)$. Como $\text{Prob}(X)$ es cerrado entonces $\psi(x) \in \text{Prob}(X)$ para todo $x \in G$.

Como el límite puntual de funciones medibles es medible entonces ψ es medible. Además como $\text{Prob}(X)$ es acotado ψ debe ser acotada. Por lo tanto $\psi \in L^\infty(G, \text{Prob}(X))$.

Resta probar que ψ también es Γ -equivariante μ c.t.p.

Queremos ver entonces que dado $\gamma \in \Gamma$ se tiene $\psi(\gamma x) = \gamma\psi(x)$ μ c.t.p. x . Tenemos por un lado las siguientes dos convergencias:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \psi_n(x) &\rightarrow_* \psi(x) \\ \psi_n(\gamma x) &\rightarrow_* \psi(\gamma x) \end{aligned}$$

y por otro que como las ψ_n son Γ -equivariantes μ c.t.p entonces se tiene: $\psi_n(\gamma x) = \gamma \psi_n(x)$ μ c.t.p x . Es decir que las sucesiones en 5.11 son la misma, por lo que sus límites también lo son. Luego: $\psi(\gamma x) = \gamma \psi(x)$ μ c.t.p x . Concluyendo la Γ -equivarianza μ c.t.p de ψ .

Esto prueba que $\psi \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ como queríamos.

Por lo que deducimos que $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ es un cerrado del compacto $L^\infty(G, \text{Prob}(X))$, entonces es compacto. $\square$

Finalmente veremos que $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ es no vacío.

Por el Teorema 5.29 existe un dominio fundamental $\mathcal{F}$ abierto c.t.p del lattice Γ en G . Como $\mathcal{F}$ es un dominio fundamental y es abierto c.t.p entonces dados dos elementos distintos $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ se tiene que $\gamma\mathcal{F} \cap \gamma'\mathcal{F}$ tiene medida nula. Además $G = \Gamma\mathcal{F}$. De dónde se cumple que dado $x \in G$ existe un único γ que cumple $x \in \gamma\mathcal{F}$ μ c.t.p x . Fijemos un punto cualquiera $x_0 \in \mathcal{F}$ y usemos la última afirmación para definir $f : G \rightarrow \text{Prob}(X)$:

$$f(x) = \gamma \delta_{x_0}$$

donde γ es el único $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma^{-1}x \in \mathcal{F}$.

Por definición $\gamma \delta_{x_0}$ es $\delta_{\gamma^{-1}x_0}$, entonces la imagen de f son medidas atómicas. Por lo que $f(G) \subset \text{Prob}(X)$ y la definición es coherente con el codominio asignado.

Veamos que f es medible. Sea A un abierto de $\text{Prob}(X)$, $f^{-1}(A) = \{\gamma\mathcal{F} : \gamma \delta_{x_0} \in A\}$. Como $\mathcal{F}$ es abierto c.t.p y Γ numerable, entonces $f^{-1}(A)$ es unión numerable de abiertos c.t.p por lo que sigue siendo abierto c.t.p y por lo tanto Boreliano. Lo que prueba que f es medible.

Veamos finalmente que f es Γ -equivariante. Sea $x \in G$, y los correspondientes $y \in \mathcal{F}$ y $\hat{\gamma} \in \Gamma$ tales que $\hat{\gamma}^{-1}x = y$. Consideremos $\gamma \in \Gamma$ cualquiera, tenemos sustituyendo que:

$$f(\gamma x) = f(\gamma \hat{\gamma} y)$$

Por definición de f tenemos que:

$$f(\gamma \hat{\gamma} y) = \gamma \hat{\gamma} \delta_{x_0} = \gamma (\hat{\gamma} \delta_{x_0})$$

y de nuevo por definición de f se tiene que:

$$(\hat{\gamma} \delta_{x_0}) = f(y),$$

entonces juntando las igualdades tenemos:

$$f(\gamma x) = \gamma f(y).$$

Por lo tanto $f \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ y hemos probado entonces que $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ es no vacío.

Ahora definiremos una acción de G , respecto de la cual $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ será un conjunto invariante. Restringir la acción al grupo promediable P nos permitirá encontrarle un punto fijo que será la función que buscamos.

Consideremos ahora la acción a derecha de G en $L^\infty(G, C(X)^*)$ dada por:

$$(g\psi)(x) = (\psi)(xg^{-1}).$$

Para ver que la acción está bien definida veamos que si $\psi \in L^\infty(G, C(X)^*)$ entonces $g\psi \in L^\infty(G, C(X)^*)$. Es decir, tomemos $\psi : G \rightarrow C(X)^*$ tal que ψ es medible y acotada. Queremos ver que entonces $g\psi$ también es medible y acotada.

Observamos que por ser $g\psi$ un trasladado de ψ se tiene que: $Im(\psi) = Im(g\psi)$ y $\psi^{-1}(A) = (g\psi)^{-1}(A)g$. Luego ψ es acotada si y solo $g\psi$ lo es. Como la acción por g es un homeomorfismo entonces $\psi^{-1}(A)$ es de Borel si y solo si $(g\psi)^{-1}(A)$ es de Borel. Es decir, ψ es medible si y solo si $g\psi$ lo es. Por lo tanto $g\psi$ es medible y acotada. Luego la acción está bien definida.

Veamos ahora que la acción deja invariante al conjunto $L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$. Es decir, si $\psi \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ entonces $g\psi \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$.

Como tenemos que $Im(\psi) = Im(g\psi)$, entonces si ψ tiene imagen en $\text{Prob}(X)$ su trasladado también. Veamos que si ψ es Γ -equivariante, entonces $g\psi$ es Γ -equivariante. Sean $x, g \in G$, $\gamma \in \Gamma$ y $\psi \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ se tiene:

$$(g\psi)(\gamma x) = (\psi(\gamma x g^{-1})) = \gamma \psi(x g^{-1}) = \gamma((g\psi)(x)).$$

Luego $g\psi$ es Γ -equivariante.

Es claro que la acción es continua ya que el producto en G es continuo.

Ahora veamos que la acción es por operadores lineales.

Tomamos $x, g \in G$, $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$g(\alpha\psi_1 + \psi_2)(x) = (\alpha\psi_1 + \psi_2)(xg^{-1}) = \alpha\psi_1(xg^{-1}) + \psi_2(xg^{-1}) = \alpha g\psi_1(x) + g\psi_2(x),$$

lo que muestra que la acción es por operadores lineales.

Por el Teorema 5.17 el subgrupo P de las matrices triangulares superiores es promediabile. Por la proposición 5.33 tenemos que $L^\infty(G, C(X)^*)$ es localmente convexo, por lo que podemos aplicar la promediabilidad de P . Como tenemos una acción continua de P sobre el espacio vectorial localmente convexo $L^\infty(G, C(X)^*)$ que deja invariante al compacto, convexo y no vacío $C = L^\infty_\Gamma(G, \text{Prob}(X))$ entonces la acción debe tener un fijo $\psi_0 \in C$.

Es decir:

$$(g\psi_0)(x) = \psi_0(x), \text{ para todo } g \in P \text{ y } x \in G.$$

Como

$$(g\psi_0)(x) = \psi_0(xg^{-1}),$$

juntando las dos igualdades tenemos

$$\psi_0(x) = \psi_0(xg^{-1}) \text{ para todo } g \in P.$$

Entonces hemos probado que existe $\psi_0 : G \rightarrow \text{Prob}(X)$ medible, P -invariante y Γ -equivariante como queríamos. □

CAPÍTULO 6

Teorema de ergodicidad de Moore

1. Introducción

Comenzaremos introduciendo una definición necesaria para enunciar el Teorema principal del capítulo:

Definición 6.1. Sea H un grupo actuando en un espacio X , y $f : X \rightarrow Y$ un mapa. Decimos que f es H -invariante si:

$$f(hx) = f(x) \text{ para todo } h \in H$$

Recordamos la notación empleada a partir del capítulo anterior:
Notaremos G al grupo $SL(3, \mathbb{R})$

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema enunciado en el capítulo 1:

TEOREMA 1.5 (Teorema de ergodicidad de Moore). Si H es un subgrupo cerrado no compacto de G entonces toda función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ medible, H -invariante (a izquierda) y Γ -invariante (a derecha) es constante μ c.t.p. Donde μ es la medida de Haar en G .

Recordamos que en el capítulo anterior probamos el siguiente Teorema:

TEOREMA 1.4 (Furstenberg). Si Γ actúa continuamente en un espacio compacto X entonces existe un mapa Γ -equivariante (a izquierda), P -invariante (a derecha) y Borel medible $\psi : G \rightarrow \text{Prob}(X)$.

El objetivo global es probar que la función ψ que nos da Furstenberg cuando $X = S^1$ es constante μ c.t.p. Ya que ψ constante μ c.t.p implica que el punto μ con preimagen de medida positiva de ψ es una medida invariante por la acción de Γ .

El Teorema de ergodicidad de Moore va a ser útil para probar que ψ es constante μ c.t.p.

Comenzaremos la siguiente sección con algunos preliminares sobre la convergencia débil de operadores en espacios de Hilbert y luego vamos a probar el siguiente lema:

Lemma 6.2. (Decaimiento de coeficientes matriciales) Si:

- $G = SL(3, \mathbb{R})$
- Π es una representación unitaria de G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, de modo que ningún vector diferente de 0 está fijado por $\Pi(G)$
- si $\{g_j\}$ es una secuencia de elementos en G tal que $\|g_j\| \rightarrow \infty$

entonces $\langle \Pi(g_j)(\phi), \psi \rangle \rightarrow 0 \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$

Si bien haremos la prueba del Lema 6.2 solo para cuando el grupo G es $G = SL(3, \mathbb{R})$ vale tomando $G = SL(n, \mathbb{R})$ para cualquier n .

Finalmente usaremos el lema anterior para probar el Teorema de Ergodicidad de Moore.

En la sección final del capítulo, veremos algunas consecuencias del Teorema de ergodicidad de Moore. Al principio de dicha sección vamos a definir acción ergódica de un grupo H sobre un conjunto X . Luego probamos que el enunciado del Teorema de ergodicidad de Moore es equivalente a decir que la acción por el producto de un lattice Γ en G es ergódica. Además formulamos y probamos un teorema análogo al de Moore que nos será de interés. Lo que resta de la sección consecuencias servirá para identificar algunos espacios en los que nos será útil aplicar el Teorema de ergodicidad de Moore, para verlos como el cociente de G por un grupo cerrado no acotado vía la Proposición 2.10

La idea de la prueba del Teorema de Ergodicidad de Moore usando el Lema 6.2 es como sigue. Por un lado probamos que podemos reformular el Teorema de ergodicidad de Moore de la siguiente manera:

Si H es un subgrupo cerrado y no acotado de G y $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, Γ -invariante y H -invariante entonces es constante μ c.t.p. Luego probamos que vale esta última reformulación. Para hacerlo usamos el toerema de decaimiento de matrices. La existencia de una función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ medible, Γ -invariante y H -invariante que sea no constante μ c.t.p, permite llegar a una contradicción con el decaimiento de los coeficientes de la representación natural de G sobre $L^2(G/\Gamma)$.

En este capítulo asumiremos conocimientos elementales sobre espacios de Hilbert, álgebra lineal y medida que pueden encontrarse en [Rud91], [TB00] y [SS05]. Además usaremos un resultado sobre cocientes de grupos de Lie que siguen siendo variedades que se puede encontrar en [Lee13].

2. Generalidades

Definición 6.3. Sea B es un espacio de Banach. Recordamos que $B^* = \{f : B \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal y continua}\}$ con la topología de la convergencia puntual.

Recordamos el siguiente teorema cuya demostración podemos encontrar en [Rud91]:

Teorema 6.4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert entonces es isomorfo a su espacio dual $\mathcal{H}^*$, es decir existe una mapa biyectivo, lineal e isométrico de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}^*$. Dicho mapa está dado por $\Phi(v) = \langle v, - \rangle$.

Definición 6.5. Definimos $B(\mathcal{H})$ como el conjunto de operadores acotados de $\mathcal{H}$ en sí mismo. Consideramos la norma $\|T\| = \max\{\|T(v)\| : \|v\| = 1\}$ en $B(\mathcal{H})$. También consideramos la topología inducida por la siguiente convergencia débil*:

$$(6.1) \quad T_n \rightarrow_* T \text{ si y solo si } \langle T_n(v), w \rangle \rightarrow \langle T(v), w \rangle \text{ para todos } v, w \in \mathcal{H}.$$

Recordamos la siguiente proposición de Medida e integración.

Proposición 6.6. Sea un espacio de medida (E, μ) y sea $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones medibles. Supongamos que la secuencia converge puntualmente a f y esta dominada por cierta función integrable g en el siguiente sentido:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in E,$$

entonces f es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f - f_n| \rightarrow 0$$

El siguiente es un corolario del Teorema de Banach Alaoglu.

Corolario 6.7. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con base numerable. Si C es un subconjunto acotado respecto de la norma de $B(\mathcal{H})$, entonces C es secuencialmente compacto con la topología débil*; es decir: toda sucesión en C tiene un subsucesión convergente respecto de dicha convergencia.*

DEMOSTRACIÓN. 6.7 Sea C un subconjunto con norma acotada y sea T_n una sucesión en C . Significa que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n\| \leq M$. A menos de dividir a la sucesión por M podemos suponer que la cota es 1.

El espacio de hilbert $\mathcal{H}$ tiene una base ortonormal numerable $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ por hipótesis. Consideramos las sucesiones:

$$(6.2) \quad T_1(v_i), T_2(v_i), T_3(v_i), \dots \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

El objetivo es encontrar una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que todas las subsucesiones indexadas en $g(n)$ convergan.

Tenemos que como $\|T_n\| \leq 1$ para todo n , entonces fijado i , $\|T_n(v_i)\| \leq \|v_i\|$, es decir cada una de las sucesiones anteriores está acotada.

Observemos ahora lo siguiente: Sabemos por el Teorema 5.1 que la bola unidad de $\mathcal{H}^*$ es débil* compacta. Por ser $\mathcal{H}$ de Hilbert podemos aplicar el Teorema 6.4. El mapa Φ del Teorema 6.4 induce una topología débil* en $\mathcal{H}$ dada por:

$$v_n \rightarrow_* v \text{ si y solo si } \Phi(v_n) \rightarrow_* \Phi(v) \text{ para toda sucesión } v_n \in \mathcal{H} \text{ y } v \in \mathcal{H}.$$

Usando la definición de la convergencia débil en $\mathcal{H}^*$ y la del mapa Φ obtenemos:

$$v_n \rightarrow_* v \text{ si y solo si } \langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle.$$

Por como definimos esta topología se tiene que $B \subset \mathcal{H}$ es débil* compacto si y solo si $\Phi(B)$ lo es. Como $B(0, 1)$ de $\mathcal{H}^*$ es débil* compacta y Φ es una isometría entonces $B(0, 1)$ de $\mathcal{H}$ también es débil* compacta.

Consideramos la sucesión $T_n(v_1)$ dada por fijar $i = 1$ en la familia de sucesiones definida en 6.2. Como la sucesión está acotada por $\|v_1\| = 1$ entonces, está contenida en la $B(0, 1)$ y como por la observación anterior las bolas de $\mathcal{H}$ son débil* compactas entonces existe una subsucesión débil* convergente. Sea $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ el mapa correspondiente a los índices de la subsucesión anterior. Entonces la sucesión $T_{f_1(n)}(v_1)$ converge débil* a un elemento que llamaremos $T(v_1)$. Ahora consideramos la sucesión $T_{f_1(n)}(v_2)$ dada por fijar $i = 2$ en la familia de sucesiones definida en 6.2 y por quedarse solo con los índices en $im(f_1)$. Como la sucesión está acotada por $\|v_2\| = 1$ entonces, está contenida en la $B(0, 1)$ y como por la observación anterior $B(0, 1)$ de $\mathcal{H}$ es débil* compacta entonces existe una subsucesión débil* convergente. Sea $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ el mapa correspondiente a los índices de la subsucesión anterior. Entonces la sucesión $T_{f_1(f_2(n))}(v_2)$ converge débil* a un elemento que llamaremos $T(v_2)$. Seguimos esta construcción para todos los naturales, así tenemos que:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} &T_{g_k(n)}(v_k) \text{ converge débil-}^* \text{ a un elemento que llamamos } T(v_k) \\ &\text{donde } g_k = f_1 \circ f_2 \dots \circ f_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \\ &\text{y } \|T(v_k)\| \leq 1 \end{aligned}$$

Ahora definimos $g(n) = g_n(n)$, o sea la función que escoge los índices de la diagonal de las subsucesiones de la familia 6.3.

Como cada sucesión de la familia 6.3 tiene sus índices incluidos en los de las sucesiones anteriores, se tiene que $(T_{g(n)}(v_k))_{n \geq k}$ es subsucesión de la k -ésima sucesión de dicha familia y por lo tanto también converge débil* a $T(v_k)$. O sea $(T_{g(n)}(v_k))$ converge débil* a $T(v_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definimos la función $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que en v_k vale como la notación lo sugiere:

$$T(v_k) = \lim_n^{w^*} (T_{g(n)}(v_k)).$$

Si $v \in \mathcal{H}$ definimos $T(v)$ como:

$$(6.4) \quad T(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(v_i), \text{ si } v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$$

Para ver que T está bien definida veamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(v_i)$ converge. Sabemos que $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$. Acotemos la norma de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(v_i)$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(v_i) \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i T(v_i)\|^2.$$

Como por definición de T : $\|T(v_i)\| \leq \|v_i\| = 1$, entonces se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i T(v_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

y esto último es la norma de v al cuadrado, por lo que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(v_i) \right\|^2 \leq \|v\|^2.$$

Además como v_n es una base los α 's son únicos, por lo que T está bien definida. Ahora tomemos $w_n \in \mathcal{H}$ tal que $w_n \rightarrow_n w$ y veamos que $T(w_n) \rightarrow_n T(w)$. Por ser v_n base tenemos que existen $\alpha_i^{w_n}$ y α_i tales que:

$$w_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{w_n} v_i$$

y

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i.$$

Como $w_n \rightarrow w$ entonces $\|w_n - w\| \rightarrow 0$, es decir

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{w_n} - \alpha_i) v_i \right\| \rightarrow 0.$$

Por lo tanto $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i^{w_n} - \alpha_i|^2 \|v_i\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i^{w_n} - \alpha_i|^2 \rightarrow 0$.

Ahora calculemos: $\|T(w_n) - T(w)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{w_n} - \alpha_i)T(v_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|(\alpha_i^{w_n} - \alpha_i)T(v_i)\|^2$. Como $\|T(v_i)\| \leq \|v_i\| = 1$ entonces lo anterior se puede acotar por:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(\alpha_i^{w_n} - \alpha_i)T(v_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(\alpha_i^{w_n} - \alpha_i)|^2$$

que ya vimos que tiende a cero. Entonces $\|T(w_n) - T(w)\|^2 \rightarrow 0$, por lo que la función T es continua.

Probemos que T es lineal. Sean $v, w \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $v = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i v_i$ entonces

$$v + \lambda w = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \lambda \beta_i) v_i.$$

Luego por definición de T :

$$T(v + \lambda w) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \lambda \beta_i) T(v_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T(v_i) + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i T(v_i),$$

usando la definición de T una vez más:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T(v_i) + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i T(v_i) = T(v) + \lambda T(w).$$

Juntando estas igualdades obtenemos:

$$T(v + \lambda w) = T(v) + \lambda T(w),$$

por lo que T es lineal.

Probemos ahora que $T_{g(n)} \rightarrow^* T$. Dados $v, w \in \mathcal{H}$ queremos ver que

$$\langle T_{g(n)}(v), w \rangle \rightarrow \langle T(v), w \rangle,$$

usando que:

$$\langle T_{g(n)}(v_i), v \rangle \rightarrow \langle T(v_i), v \rangle,$$

por como definimos T . Para eso probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 6.8. Si $x_n \in \mathcal{H}$ con $\|x_n\| \leq M$ y $\langle x_n, v_i \rangle \rightarrow_n \langle x_0, v_i \rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces x_n tiende débil* a x_0 .

DEMOSTRACIÓN. Para verlo calculemos $\langle x_n - x_0, w \rangle$, siendo $w = \sum \alpha_k v_k$:

$$(6.5) \quad \langle x_n - x_0, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle x_n - x_0, v_k \rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle x_n - x_0, v_k \rangle + \sum_{k>N} \alpha_k \langle x_n - x_0, v_k \rangle$$

Ahora acotamos el segundo sumando usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

(6.6)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k>N} \alpha_k \langle x_n - x_0, v_k \rangle \right| &\leq \sum_{k>N} |\alpha_k \langle x_n - x_0, v_k \rangle| \leq \left(\sum_{k>N} \alpha_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k>N} |\langle x_n - x_0, v_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ (6.7) \qquad \qquad \qquad &\leq \left(\sum_{k>N} \alpha_k^2 \right)^{1/2} \|x_n - x_0\|, \end{aligned}$$

como la primera serie en la ecuación 6.7 es la cola de la norma de w entonces se tiende a cero con N , por lo que al multiplicar por algo acotado, también tiende a cero. Entonces tomando N suficientemente grande la segunda suma de la ecuación 6.5 es tan chica como se quiera. Fijado ese N , la primera suma de 6.5 tiene finitos sumandos, cada uno de ellos tendiendo a cero con n . Luego toda la expresión tiende a cero con n como queríamos probar. $\square$

Veamos primero que dado $v \in \mathcal{H}$ se tiene $\langle T_n(v), v_i \rangle \rightarrow \langle T(v), v_i \rangle$.

Tenemos que como $\langle T_n(v_j), v_i \rangle \rightarrow_n \langle T(v_j), v_i \rangle$, para todos i, j , entonces $\langle v_j, T_n^*(v_i) \rangle \rightarrow_n \langle v_j, T_n^*(v_i) \rangle$. Tomando $x_n = T_n^*(v_i)$, vemos que está acotada porque T_n lo está, entonces usando (6.8) podemos deducir que dado $v \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle v, T_n^*(v_i) \rangle \rightarrow_n \langle v, T_n^*(v_i) \rangle.$$

Lo cual es equivalente a:

$$\langle T_n(v), v_i \rangle \rightarrow \langle T(v), v_i \rangle.$$

Finalmente a partir de la convergencia anterior y el hecho de que la norma de $T_n(v)$ está acotada por la norma de v , aplicamos la Afirmación 6.8 y deducimos que dado $w \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle T_n(v), w \rangle \rightarrow \langle T(v), w \rangle,$$

como queríamos. $\square$

Proposición 6.9. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A, B \subset \mathcal{H}$, entonces:

$$(A \cap B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp$$

DEMOSTRACIÓN. 6.9

Sabemos que podemos escribir a $\mathcal{H}$ como:

$$\mathcal{H} = A \oplus A^\perp = A \cap B \oplus A \cap B^\perp \oplus A^\perp$$

Si tomo $v \in (A \cap B)^\perp$ entonces $v = w_1 + w_2 + w_3$ con $w_1, w_2, w_3 \in A^\perp, A \cap B^\perp$ y $A \cap B$ respectivamente. Vamos a probar que $w_3 = 0$. Como $\langle v, w_3 \rangle = 0$ y usando la descomposición de v obtenemos $\langle w_1 + w_2, w_3 \rangle + \langle w_3, w_3 \rangle = 0$ tenemos que $\langle w_1 + w_2, w_3 \rangle = -\|w_3\|^2$. Ahora como $w_1, w_2 \in A^\perp, B^\perp$ respectivamente y $w_3 \in A \cap B$, entonces se tiene que $\langle w_1 + w_2, w_3 \rangle = 0$ y luego $w_3 = 0$ por lo que $v = w_1 + w_2$ estando entonces en $A^\perp + B^\perp$.

Por otro lado si $v \in A^\perp + B^\perp$ y tomamos $w \in A \cap B$, calculamos: $\langle v, w \rangle = \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = 0$ donde $v_1 \in A^\perp$ y $v_2 \in B^\perp$, entonces $v \in (A \cap B)^\perp$, con lo que hemos probado la doble inclusión. $\square$

3. Decaimiento de Matrices

3.1. Nociones previas.

Notación 6.10. Sea G un grupo y U, V subgrupos de G : Notamos por $\langle U, V \rangle$ al grupo generado por U y V , es decir el grupo más pequeño que contiene a U y a V .

Definición 6.11. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, G un grupo, $\pi : G \rightarrow \mathcal{H}$ una representación, y U un subgrupo de G . Definimos $\mathcal{H}^U$ como el conjunto de elementos de $\mathcal{H}$ fijados por $\pi(U)$:

$$\mathcal{H}^U = \{\phi : \pi(u)(\phi) = \phi \ \forall u \in U\}$$

Lemma 6.12. Sea G un grupo, y sean U y V subgrupos de G . En el contexto de la definición anterior se tiene: $\mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^V = \mathcal{H}^{\langle U, V \rangle}$

DEMOSTRACIÓN. 6.12 Vemos que si $\phi \in \mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^V$, y $w \in \langle U, V \rangle$ tenemos $w = u_1 \dots u_k$ con $u_i \in U$ o $\in V$, luego $\pi(u_i)$ fija ϕ para todo i , por lo que se tiene:

$$\pi(w)(\phi) = \pi(u_1 \dots u_k)(\phi) = \pi(u_1) \dots \pi(u_k)(\phi) = \pi(u_1) \dots \pi(u_{k-1})(\phi) = \dots = \pi(u_1)(\phi) = \phi$$

Lo que prueba $\mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^V \subseteq \mathcal{H}^{\langle U, V \rangle}$. Además tenemos que como $U, V \subseteq \langle U, V \rangle$, si ϕ es fijado por $\pi(\langle U, V \rangle)$, entonces también es fijado por $\pi(U)$ y por $\pi(V)$. Por lo que: $\mathcal{H}^{\langle U, V \rangle} \subseteq \mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^V$. $\square$

Recordamos el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [TB00].

Teorema 6.13. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, una matriz real. Entonces existen matrices M, K ortogonales y D diagonal, definida positiva tales que:

$$A = KDM$$

Observación 6.14. El espacio $O(n)$ de las matrices ortogonales es compacto. Esto se puede ver tomando el mapa continuo $T : \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ definido por:

$$T(A) = AA^T.$$

Observamos que $T^{-1}(\{Id\}) = O(n)$ y como $\{Id\}$ es un cerrado entonces se tiene que $O(n)$ también es cerrado. Además $O(n)$ es claramente acotado en $\mathcal{M}_{n \times n}$, entonces por la propiedad de Heine-Borel, $O(n)$ es compacto.

3.2. Demostración. Para probar el Lema 6.2 probaremos los siguientes enunciados:

Lemma 6.15. Si

- $G = SL(3, \mathbb{R})$
- Π es una representación unitaria de G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, de modo que ningún vector diferente de 0 está fijado por $\Pi(G)$
- si $\{g_j\}$ es una secuencia de matrices diagonales y definidas positivas en G tal que $\|g_j\| \rightarrow \infty$

entonces $\langle \Pi(g_j)(\phi), \psi \rangle \rightarrow 0 \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$

Proposición 6.16. El Lema 6.15 implica el Lema 6.2.

Empecemos probando la Proposición 6.16 y luego probaremos el Teorema 6.15.

DEMOSTRACIÓN. 6.16

Probemos el Lema 6.2 asumiendo que vale la Proposición 6.15.

Sean g_j matrices como en las hipótesis de 6.2 y supongamos que:

$$(6.8) \quad \langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle \text{ no tiende a } 0.$$

Veamos que a menos de tomar una subsucesión la expresión en 6.8 tiende a $r \neq 0$.

Como $|\langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle| \leq \|\pi(g_j)\phi\| \|\psi\| = \|\phi\| \|\psi\|$ se tiene que $\langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle$ está acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente a un valor r distinto de 0.

Por el Teorema 6.13 se tiene que cada g_j puede descomponerse como $g_j = m_j d_j k_j$ donde k_j y m_j son ortogonales y d_j es diagonal y definida positiva.

Observamos que como $\langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle \rightarrow r$ y $\pi(g_j) = \pi(m_j)\pi(d_j)\pi(k_j)$ entonces:

$$\langle \pi(m_j)\pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \psi \rangle = \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m_j^{-1})\psi \rangle \rightarrow r.$$

Por la observación 6.14 se tiene que a menos de tomar una subsucesión podemos suponer que $k_j \rightarrow k$ y $m_j \rightarrow m$.

Consideremos $\hat{\phi} = \pi(k^{-1})\phi$ y $\hat{\psi} = \pi(m^{-1})\psi$. Como estamos suponiendo que el Teorema 6.2 vale para matrices diagonales y definidas positivas entonces mostrando lo enunciado a continuación habremos terminado la demostración de la presente proposición.

Afirmación 6.17. $\langle \pi(d_j)\hat{\phi}, \hat{\psi} \rangle \rightarrow r$

DEMOSTRACIÓN. Por ser la sucesión $\pi(d_j)\hat{\phi}$ acotada en norma por $\|\hat{\phi}\|$, entonces tiene un límite en la topología débil*. Sea $\phi_0 = \lim_j^w \pi(d_j)\hat{\phi}$. Por las definiciones de ϕ_0 , $\hat{\phi}$ y $\hat{\psi}$ se tiene que:

$$(6.9) \quad \langle \phi_0, \hat{\psi} \rangle = \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k)\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle$$

Reescribamos esta última expresión sumándole y restándole lo mismo:

$$\begin{aligned} & \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k)\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle \\ &= \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k)\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle \\ &+ \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle - \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle \\ &+ \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m_j^{-1})\psi \rangle - \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m_j^{-1})\psi \rangle \end{aligned}$$

Agrupamos los términos de la ecuación anterior como sigue:

$$(6.10) \quad \langle \phi_0, \hat{\psi} \rangle$$

$$(6.11) \quad = \lim_j \langle \pi(d_j)(\pi(k) - \pi(k_j))\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle$$

$$(6.12) \quad + \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, (\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1}))\psi \rangle$$

$$(6.13) \quad + \lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, \pi(m_j^{-1})\psi \rangle$$

Vamos a ver que las expresiones 6.11 y 6.12 tienden a cero, luego usar que 6.13 tiende a r para deducir que entonces 6.10 tiende a r también. Con eso habremos probado la

presente afirmación.

Acotemos 6.11 usando que π es unitaria:

$$\begin{aligned} \lim_j |\langle \pi(d_j)(\pi(k) - \pi(k_j))\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle| &= \lim_j |\langle (\pi(k) - \pi(k_j))\phi, \pi(d_j^{-1})\pi(m^{-1})\psi \rangle| \leq \\ &\lim_j \|(\pi(k) - \pi(k_j))\phi\| \|\pi(d_j^{-1})\pi(m^{-1})\psi\| = \lim_j \|(\pi(k) - \pi(k_j))\phi\| \|\psi\| \end{aligned}$$

Como $\|\psi\|$ no depende de j y además $k_j \rightarrow k$ entonces se tiene que $\|(\pi(k) - \pi(k_j))\phi\| \|\psi\| \rightarrow 0$, por lo que:

$$\lim_j \langle \pi(d_j)(\pi(k) - \pi(k_j))\phi, \pi(m^{-1})\psi \rangle = 0$$

Similarmente acotemos 6.12 usando que π es unitaria:

$$\begin{aligned} &\lim_j |\langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, (\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1}))\psi \rangle| \\ &\leq \lim_j \|\pi(d_j)\pi(k_j)\phi\| \|(\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1}))\psi\| = \lim_j \|\phi\| \|\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1})\psi\| \end{aligned}$$

Por la continuidad de la inversa en el grupo de Lie G , se tiene que $m_j \rightarrow m$ implica $m_j^{-1} \rightarrow m^{-1}$. Como $\|\phi\|$ no depende de j y $m_j^{-1} \rightarrow m^{-1}$, entonces se tiene que $\|\phi\| \|(\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1}))\psi\| \rightarrow 0$, por lo que:

$$\lim_j \langle \pi(d_j)\pi(k_j)\phi, (\pi(m^{-1}) - \pi(m_j^{-1}))\psi \rangle = 0$$

Hemos probado entonces que:

$$\langle \pi(d_j)(\phi), \hat{\psi} \rangle \rightarrow r \neq 0,$$

lo cual es absurdo pues estamos suponiendo que el Lema 6.15 vale. □

□

Entonces alcanza con probar el Lema 6.15 para obtener el Lema 6.2.

DEMOSTRACIÓN. 6.15 Por simplicidad vamos a suponer que el espacio de Hilbert es real, por lo que la propiedad de hermiticidad del producto interno, a saber que:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle} \quad \text{para todos } \psi, \phi \in \mathcal{H}$$

se convierte en una simetría:

$$(6.14) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \quad \text{para todos } \psi, \phi \in \mathcal{H}$$

La sucesión de operadores $\pi(g_n) \subset B(\mathcal{H})$ es acotada ya que al ser π una representación unitaria todos tienen norma uno, luego por el Corolario 6.7 tiene una subsucesión convergente con la topología débil* a un cierto operador E . A menos de pasar a una subsucesión podemos suponer que:

$$\langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle \rightarrow \langle E\phi, \psi \rangle \quad \text{para todos } \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

Alcanzará con probar que $\ker(E) = \mathcal{H}$.

Afirmación 6.18.

$$(6.15) \quad \langle E^*\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \psi \rangle \quad \text{para todos } \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que:

$$\langle E^* \phi, \psi \rangle = \langle \phi, E \psi \rangle$$

Por la ecuación simetría del producto interno y la definición de E se tiene:

$$\langle \phi, E \psi \rangle = \langle E \psi, \phi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j) \psi, \phi \rangle = \lim_j \langle \phi, \pi(g_j) \psi \rangle.$$

Aplicando $\pi(g_j^{-1})$ de los dos lados, obtenemos

$$\lim_j \langle \phi, \pi(g_j) \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1}) \phi, \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H},$$

ya que la transformación $\pi(g_j)$ es unitaria para todo j y π es un morfismo. Juntando las igualdades obtenemos que

$$\langle E^* \phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1}) \phi, \psi \rangle \quad \text{para todos } \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

como queríamos. □

Definamos

$$U = \{u \in G : g_j u g_j^{-1} \rightarrow e\}$$

y

$$U^- = \{v \in G : g_j^{-1} v g_j \rightarrow e\}.$$

Definimos también $\mathcal{H}^U$ (resp. $\mathcal{H}^{U^-}$) como los vectores de $\mathcal{H}$ que son U -invariantes (resp. U^- -invariantes)

$$\mathcal{H}^U = \{\phi \in \mathcal{H} : \pi(u)(\phi) = \phi \quad \forall u \in U\}$$

y

$$\mathcal{H}^{U^-} = \{\phi \in \mathcal{H} : \pi(v)(\phi) = \phi \quad \forall v \in U^-\}$$

Ahora probaremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 6.19. $Im(E^*) \subset \mathcal{H}^U$

Afirmación 6.20. $Im(E) \subset \mathcal{H}^{U^-}$

AFIRMACIÓN. 6.19 Queremos ver que $\pi(U)$ fija a los elementos en la imagen de E^* . Para hacerlo veremos que se tiene:

$$(6.16) \quad \pi(u)E^* \phi = E^* \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{H}, u \in U.$$

Por definición del adjunto podemos escribir lo siguiente: $\langle \pi(u)E^* \phi, \psi \rangle = \langle E^* \phi, \pi(u)^* \psi \rangle$, ahora por la ecuación 6.15 se tiene que $\langle E^* \phi, \pi(u)^* \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1}) \phi, \pi(u)^* \psi \rangle$. Estas dos observaciones juntas nos permiten deducir

$$(6.17) \quad \langle \pi(u)E^* \phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1}) \phi, \pi(u)^* \psi \rangle$$

Como $\pi(g_j)$ es unitaria se tiene que:

$$(6.18) \quad \langle \pi(u g_j^{-1}) \phi, \psi \rangle = \langle \pi(g_j) \pi(u g_j^{-1}) \phi, \pi(g_j) \psi \rangle$$

Como u está en U entonces $\lim_j u g_j u g_j^{-1} = e$, por lo que tomando límite en 6.18 se tiene:

$$\lim_j \langle \pi(u g_j^{-1}) \phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j) \pi(u g_j^{-1}) \phi, \pi(g_j) \psi \rangle = \lim_j \langle \phi, \pi(g_j) \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1}) \phi, \psi \rangle$$

Es decir que:

$$(6.19) \quad \lim_j \langle \pi(ug_j^{-1})\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \psi \rangle.$$

Volviendo a aplicar la definición de la adjunta, y las ecuación 6.15 y 6.19:

$$\lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \pi(u)^*\psi \rangle = \lim_j \langle \pi(u)\pi(g_j^{-1})\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \psi \rangle = \langle E^*\phi, \psi \rangle.$$

Es decir

$$(6.20) \quad \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \pi(u)^*\psi \rangle = \langle E^*\phi, \psi \rangle.$$

Juntando 6.17 con 6.20 obtenemos:

$$\langle \pi(u)E^*\phi, \psi \rangle = \langle E^*\phi, \psi \rangle$$

$$\forall \psi, \phi \in \mathcal{H} \ u \in U$$

Por lo tanto los operadores son iguales, es decir,

$$\pi(u)E^*\phi = E^*\phi \ \forall \phi \in \mathcal{H}, u \in U$$

Y hemos probado que:

$$Im(E^*) \subset \mathcal{H}^U$$

□

DEMOSTRACIÓN. 6.20 De manera análoga veamos que $\pi(u)E\phi = E\phi$ para todos $\phi \in \mathcal{H}, v \in U^-$.

Por definición de la adjunta y del operador E se tiene:

$$(6.21) \quad \langle \pi(v)E\phi, \psi \rangle = \langle E\phi, \pi(v)^*\psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j)\phi, \pi(v)^*\psi \rangle$$

Como $\pi(g_j)$ es unitaria entonces:

$$(6.22) \quad \langle \pi(vg_j)\phi, \psi \rangle = \langle \pi(g_j^{-1})\pi(vg_j)\phi, \pi(g_j^{-1})\psi \rangle.$$

Sabemos que v está en U^- entonces $\lim_j g_j^{-1}vg_j = e$, por lo que si tomamos limite en la ecuación 6.22 obtenemos:

$$(6.23) \quad \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\pi(vg_j)\phi, \pi(g_j^{-1})\psi \rangle = \lim_j \langle \phi, \pi(g_j^{-1})\psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j^{-1})\phi, \psi \rangle.$$

Por lo que juntando 6.21 con 6.22 obtenemos:

$$(6.24) \quad \lim_j \langle \pi(v)\pi(g_j)\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle$$

Ahora usando la definición de adjunto, la ecuación 6.24 y la definición de E , obtenemos:

$$(6.25) \quad \lim_j \langle \pi(g_j)\phi, \pi(v)^*\psi \rangle = \lim_j \langle \pi(v)\pi(g_j)\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j)\phi, \psi \rangle = \langle E\phi, \psi \rangle \forall \psi, \phi \in \mathcal{H} \ v \in U^-$$

Entonces juntando las ecuaciones 6.25 y 6.21 se tiene:

$$\langle \pi(v)E\phi, \psi \rangle = \langle E\phi, \psi \rangle \forall \psi, \phi \in \mathcal{H} \ v \in U^-$$

Por lo que:

$$\pi(v)E\phi = E\phi \ \forall \phi \in \mathcal{H} \ v \in U^-$$

Con lo que probamos que:

$$Im(E) \subset \mathcal{H}^{U^-}$$

□

Por definición de E^* se tiene $\langle E\phi, \psi \rangle = \langle \phi, E^*\psi \rangle$. Entonces deducimos que:

$$\begin{aligned} im(E^*)^\perp &= Ker(E) \\ im(E)^\perp &= Ker(E^*) \end{aligned}$$

Luego si en las inclusiones de las afirmaciones 6.19 y 6.20 tomamos $\perp$ de los dos lados se tiene:

$$(6.26) \quad \mathcal{H}^{U^\perp} \subseteq im(E^*)^\perp = Ker(E)$$

$$(6.27) \quad \mathcal{H}^{U^{-\perp}} \subseteq im(E)^\perp = Ker(E^*).$$

Ya que tomar el perpendicular revierte la inclusión.

Como por hipótesis tenemos que g_j definida positiva y diagonal, entonces el subgrupo generado por $\pi(\{g_j\})$ es conmutativo. Como π es unitaria entonces: $\langle \pi(g_k)\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \pi(g_k^{-1})\psi \rangle$. Entonces por definición del operador adjunto se tiene $\pi(g_k)^* = \pi(g_k^{-1})$. Luego $\pi(g_j)$ conmuta con $\pi(g_k)$ y con $\pi(g_k)^*$ para todos j, k . Esto significa que conmutan en el límite:

Afirmación 6.21. $EE^* = E^*E$

DEMOSTRACIÓN. Veamoslo probando que $\langle EE^*\phi, \psi \rangle = \langle E^*E\phi, \psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$.

Sean $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Por definición de E se tiene:

$$(6.28) \quad \langle EE^*\phi, \psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j)E^*\phi, \psi \rangle.$$

Ahora usando que $\pi(g_j)$ es unitaria, y la ecuación 6.15 obtenemos:

$$(6.29) \quad \begin{aligned} \lim_j \langle \pi(g_j)E^*\phi, \psi \rangle &= \lim_j \langle E^*\phi, \pi(g_j^{-1})\psi \rangle \\ &= \lim_j \lim_k \langle \pi(g_k^{-1})\phi, \pi(g_j^{-1})\psi \rangle = \lim_j \lim_k \langle \phi, \pi(g_k)\pi(g_j^{-1})\psi \rangle. \end{aligned}$$

Ahora usamos que $\pi(g_j)$ y $\pi(g_k)$ conmutan:

$$(6.30) \quad \lim_j \lim_k \langle \phi, \pi(g_k)\pi(g_j^{-1})\psi \rangle = \lim_j \lim_k \langle \phi, \pi(g_j^{-1})\pi(g_k)\psi \rangle$$

Volvemos a aplicar que $\pi(g_k)$ es unitaria y la ecuación 6.14, además de las definiciones de E y E^* :

$$(6.31) \quad \begin{aligned} \lim_j \lim_k \langle \phi, \pi(g_j^{-1})\pi(g_k)\psi \rangle &= \lim_j \lim_k \langle \pi(g_j)\phi, \pi(g_k)\psi \rangle = \lim_j \langle \pi(g_j)\phi, E\psi \rangle \\ &= \lim_j \langle E\phi, E\psi \rangle = \langle E^*E\phi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Juntando las ecuaciones 6.28, 6.29, 6.30, y 6.31 llegamos a que:

$$\langle EE^*\phi, \psi \rangle = \langle E^*E\phi, \psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

Y por lo tanto que $E^*E = EE^*$.

□

Como $EE^* = E^*E$ se tiene que:

$$\|E\phi\|^2 = \langle E\phi, E\phi \rangle = \langle E^*E\phi, \phi \rangle = \langle EE^*\phi, \phi \rangle = \langle E^*\phi, E^*\phi \rangle = \|E^*\phi\|^2$$

Y por lo tanto $\text{Ker}(E^*) = \text{Ker}(E)$.

Luego usando las ecuaciones 6.20 y 6.19 obtenemos:

$$(6.32) \quad \text{Ker}(E) = \text{Ker}(E) + \text{Ker}(E^*) \supseteq (\mathcal{H}^U)^\perp + (\mathcal{H}^{U^-})^\perp.$$

Ahora usando la proposición 6.9 podemos expresar la suma de espacios perpendiculares como el espacio perpendicular a la intersección por lo que:

$$(6.33) \quad (\mathcal{H}^U)^\perp + (\mathcal{H}^{U^-})^\perp = (\mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^{U^-})^\perp.$$

Además observando que U y U^- son grupos, podemos usar el Lema 6.12 para deducir que:

$$(6.34) \quad \mathcal{H}^U \cap \mathcal{H}^{U^-} = \mathcal{H}^{<U, U^->}$$

Poniendo las ecuaciones 6.32, 6.33 y 6.34 juntas obtenemos:

$$(6.35) \quad \text{Ker}(E) \supseteq (\mathcal{H}^{<U, U^->})^\perp.$$

Ahora el objetivo es ver que $<U, U^-> = G$. Luego usaremos que en $\mathcal{H}$ no hay fijos no triviales por $\pi(G)$ entonces tendremos $\mathcal{H}^G = \{0\}$. Y finalmente podremos deducir que:

$$(6.36) \quad \text{Ker}(E) \supseteq (\mathcal{H}^G)^\perp = (\{0\})^\perp = \mathcal{H},$$

concluyendo la demostración. Como estamos asumiendo que g_j diagonales entonces:

$$(6.37) \quad g_j = \begin{pmatrix} a_j & 0 & 0 \\ 0 & b_j & 0 \\ 0 & 0 & c_j \end{pmatrix}$$

Queremos describir a los grupos U y U^- . Para eso probemos primero la siguiente afirmación:

Afirmación 6.22. *Existen subsucesiones de a_n , b_n , y c_n tales que:*

$$a_{n_j} \geq b_{n_j} \geq c_{n_j} \forall j$$

Y tal que se dé al menos uno de los siguientes límites:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n_j \frac{c_{n_j}}{b_{n_j}} = \infty$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n_j \frac{b_{n_j}}{a_{n_j}} = \infty$$

.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los conjuntos $A = \{n : a_n \geq b_n\}$ y $B = \{n : b_n \geq c_n\}$ $D = \{n : a_n \geq c_n\}$. Vemos que o bien A o bien A^c es infinito ya que $A \cup A^c = \mathbb{N}$. Razonando igual, uno de los siguientes conjuntos es infinito ya que la unión de ellos da $\mathbb{N}$:

- $(B \cap A)$
- $B^c \cap A \cap D$
- $B^c \cap A \cap D^c$
- $B \cap A^c \cap D$
- $B \cap A^c \cap D^c$
- $(B^c \cap A^c)$

Sea E el conjunto infinito de arriba. Como los conjuntos anteriores cumplen las siguientes inclusiones:

- $(B \cap A) \subseteq (B \cap A)$
 - $B^c \cap A \cap D \subseteq B^c \cap D$
 - $B^c \cap A \cap D^c \subseteq A \cap D^c$
 - $B \cap A^c \cap D \subseteq A^c \cap D$
 - $B \cap A^c \cap D^c \subseteq B \cap D^c$
 - $(B^c \cap A^c) \subseteq B^c \cap A^c$
- (1)

Entonces existe F en la fila de la derecha de la lista 1, tal que $E \subset F$. Observamos que para cualquier conjunto H en la fila de la derecha de la lista 1, la subsucesión de g_n indexadas en H cumple las siguientes desigualdades para alguna reordenación de los vectores de la base:

$$a_{n_j} \geq b_{n_j} \geq c_{n_j} \forall j$$

Luego también lo cumple para la subsucesión indexada en E . A partir de ahora trabajamos sobre esta subsucesión.

Pasamos de nuevo a una subsucesión para que existan los límites en $\mathbb{R} \cup \infty$

- $\lim a_{n_j} = a$
- $\lim b_{n_j} = b$
- $\lim c_{n_j} = c$

Como $\det(g_j) = 1$ entonces $a_j \cdot b_j \cdot c_j = 1 \forall j$. Además como $\|g_j\| \rightarrow \infty$, una de las tres sucesiones debe tender a infinito. Estas tres condiciones nos dejan solo las siguientes opciones para a , b y c :

a	b	c
∞	∞	0
∞	$\alpha \neq 0$	0
∞	0	0

De nuevo, trabajaremos a partir de ahora suponiendo que nuestra sucesión cumple lo anterior.

Si fuera $\lim \sup_j \frac{a_j}{b_j} \neq \infty$ y $\lim \sup_j \frac{b_j}{c_j} \neq \infty$ entonces se tendría que

$$\lim \sup_j \frac{a_j}{c_j} \neq \infty$$

lo cual es absurdo porque hemos probado que las única opción para los límites de a_j y c_j son: $\lim_j a_j = \infty$ y $\lim_j c_j = 0$.

Además a menos de tomar una subsucesión tenemos que se cumple al menos una de la siguientes convergencias:

$$\lim_j \frac{b_j}{a_j} = 0$$

$$\lim_j \frac{c_j}{b_j} = 0$$

□

Vamos a hallar subconjunto de U y U^- que prueben que $\langle U, U^- \rangle = G$ para el caso en que $\lim \frac{b_j}{a_j} = 0$.

De hecho probemos que:

$$U \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 \end{pmatrix} : d, e \in \mathbb{R} \right\} = V$$

$$U^- \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : d, e \in \mathbb{R} \right\} = V^-$$

Sea $u \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 \end{pmatrix} : d, e \in \mathbb{R} \right\}$, entonces $g_j u g_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d \frac{b_j}{a_j} & 1 & 0 \\ e \frac{c_j}{a_j} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\lim_j \frac{b_j}{a_j} =$

0 y $c_j \leq b_j$ entonces $\lim_j \frac{c_j}{a_j} = 0$. Luego $g_j u g_j^{-1} \rightarrow e$, es decir $u \in U$

Luego se tiene

$$U \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 \end{pmatrix} : d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

Análogamente se ve que

$$U^- \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : e, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Para el caso en que $\lim \frac{c_j}{b_j} = 0$ las cuentas son análogas y obtendremos que U y U^- tienen

como subconjuntos a: $U \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f & g & 1 \end{pmatrix} : f, g \in \mathbb{R} \right\} = W, U^- \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : f, g \in \mathbb{R} \right\} =$

W^- .

Es posible verificar que $\langle V, V^- \rangle = G$. y $\langle W, W^- \rangle = G$. Por las inclusiones antes probadas deducimos que $\langle U, U^- \rangle = G$. Luego por la ecuación 6.36 hemos probado, que $\ker(E) = \mathcal{H}$, como queríamos. □

4. Ergodicidad de Moore

4.1. Previas.

Definición 6.23. Recordamos que G/Γ es un espacio de medida con la medida ν definida por:

$$\nu(A) = \mu(A \cap \mathcal{F}),$$

dónde $\mathcal{F}$ es un dominio fundamental de la acción de Γ en G y μ es la medida de Haar en G .

Observación 6.24. G tiene una representación unitaria natural en el espacio de Hilbert $L^2(G/\Gamma)$ dada por $\Pi(g)(f) = g_*f$ donde $g_*f(x) = f(g^{-1}x)$.

El siguiente Teorema se puede encontrar en [Lee13].

Teorema 6.25. Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo cerrado de G . Entonces el espacio cociente G/H tiene una estructura de variedad diferenciable que hace al mapa $\pi : G \rightarrow G/H$ diferenciable.

Definición 6.26. Si H es un subgrupo cerrado de G entonces por el Teorema 6.25 G/H es una variedad diferenciable. Notaremos por μ_H a una medida de volumen en G/H .

4.2. Demostración. Para probar el Teorema 1.5 vamos a probar dos enunciados explicitados a continuación. El primero es una reformulación del Teorema de ergodicidad de Moore:

Teorema 6.27. Sea H un subgrupo cerrado y no acotado de G . Sea Γ un lattice de G . Entonces para todo mapa $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ Borel medible, H -invariante (a izquierda) y Γ -equivariante (a derecha), se tiene que ψ es constante μ -c.t.p, donde μ es la medida de Haar de G .

y el segundo afirma que efectivamente el Teorema 6.27 es una reformulación del Teorema de ergodicidad de Moore:

Proposición 6.28. Si vale el Teorema 6.27 entonces vale el Teorema 1.5.

Empezaremos probando primero la Proposición 6.28 y luego el Teorema 6.27.

DEMOSTRACIÓN. 6.28 Sea $f : G/H \rightarrow \mathbb{R}$, Γ -invariante y medible, sabemos que induce $\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{R}$, Γ -invariante, H -invariante y medible. Usando la proposición 6.25 tenemos que la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ es diferenciable por lo que si $AH \subset G$ tiene medida de volumen cero, entonces la medida de volumen de AH/H en G/H también es cero. Eso prueba que si $\hat{f}$ es constante μ_H -c.t.p entonces f es constante μ -c.t.p. $\square$

Para probar esta reformulación usaremos el Lema 6.2.

DEMOSTRACIÓN. 6.27 Supongamos que existe una función $\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{R}$, H -invariante, medible y que no es constante μ -casi todo punto.

La Γ -invarianza de $\hat{f}$ significa que dado $\gamma \in \Gamma$ y $x \in G$ $\hat{f}(\gamma x) = \hat{f}(x)$. A su vez esto es lo mismo a decir que, si definimos la relación de equivalencia:

$$x \equiv_{\Gamma} y \text{ si y solo si existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } x = \gamma y,$$

entonces $\hat{f}$ es constante en las clases de equivalencia.

Ahora podemos decir, por el Teorema universal del cociente, que $\hat{f}$ induce $f : G/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ Borel medible. Además por definición de ν y por ser $\hat{f}$ no constante μ -c.t.p, entonces f no es constante ν -c.t.p.

Por otro lado como $\hat{f}$ es H -invariante, entonces f también es H -invariante.

O sea que bajo la existencia de $\hat{f}$ también existe una función $f : G/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, H -invariante, medible y que no es constante ν -casi todo punto.

Afirmación 6.29. *Podemos tomar a f esencialmente acotada sobre G/Γ .*

DEMOSTRACIÓN. 6.29 Como f no es constante ν c.t.p existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $G_M = \{x \in G/\Gamma : |f(x)| \leq M\}$, entonces G_M y G_M^c tienen medida positiva. Por la invarianza de f , G_M^c es H -invariante por lo que podemos definir g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} M + 1 & \text{si } x \in G_M^c \\ f(x) & \text{si } x \in G_M \end{cases}$$

La función g es medible H -invariante y no constante c.t.p. □

Es decir podemos suponer $|f(x)| \leq M + 1$ para todo $x \in G/\Gamma$. Como G/Γ tiene medida finita y podemos suponer f esencialmente acotada, entonces $f \in L^2(G/\Gamma)$ ya que su integral queda acotada por:

$$\int_{G/\Gamma} |f|^2 d\nu \leq (M + 1)^2 \mu(G/\Gamma) < \infty.$$

Ahora consideremos el subespacio vectorial de funciones constantes ν c.t.p de $L^2(G/\Gamma)$, a saber $L_0^2(G/\Gamma)$. Como $L^2(G/\Gamma)$ es un espacio de Hilbert podemos considerar también a su complemento ortogonal, sea $L_1^2(G/\Gamma) = (L_0^2(G/\Gamma))^\perp$.

Si llamamos $\bar{f}$ a la proyección ortogonal de f sobre el espacio $L_1^2(G/\Gamma)$, y escribimos $f = \bar{f} + f - \bar{f}$ se tiene que $f - \bar{f}$ es la proyección de f sobre $L_0^2(G/\Gamma)$ por lo que es una función constante c.t.p. Como f no es constante c.t.p entonces $\bar{f}$ no es 0. Con lo que podemos normalizar $\bar{f}$ para que tenga norma 1.

Sea $\Pi : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G/\Gamma))$ la representación unitaria de G en $L^2(G/\Gamma)$ definida en la Observación 6.24. Si tomamos $h \in H$, la H -invarianza de f implica $f(x) = f(h^{-1}x)$ para todo $x \in G/\Gamma$. Por lo tanto se tiene:

$$\Pi(h)(f) = h_*(f) = f.$$

Es decir que f es un elemento invariante por la acción de $\Pi(H)$.

Vamos a probar ahora que $\bar{f}$ también es un elemento invariante por la acción de $\Pi(H)$. Sea $h \in H$, observamos que como $f - \bar{f}$ es constante c.t.p entonces $\Pi(h)(f - \bar{f}) = f - \bar{f}$. Luego tenemos que:

$$(6.38) \quad f = \Pi(h)f = \Pi(h)(f - \bar{f} + \bar{f}) = \Pi(h)(f - \bar{f}) + \Pi(h)(\bar{f}) = f - \bar{f} + \Pi(h)(\bar{f})$$

Despejando en la ecuación anterior se tiene:

$$(6.39) \quad \bar{f} = \Pi(h)(\bar{f})$$

Con lo que hemos probado que $\bar{f}$ es $\Pi(H)$ -invariante. Como H es no acotado existe $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in H$ tal que $\|h_j\| \rightarrow \infty$. Usando la $\Pi(H)$ -invarianza de $\bar{f}$ podemos escribir:

$$(6.40) \quad \langle \Pi(h_j)(\bar{f}), \bar{f} \rangle = \langle \bar{f}, \bar{f} \rangle = 1,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Afirmación 6.30. *Ningún vector distinto de cero de $L_1^2(G/\Gamma)$ es fijado por $\Pi(G)$,*

DEMOSTRACIÓN. 6.30 Sea $\phi \in L_1^2(G/\Gamma)$ tal que es $\Pi(G)$ - invariante. Entonces $\square$

La representación natural π , junto con la elección de los elementos $h_j \in H$ y la Afirmación 6.30 muestran que estamos en las hipótesis del Teorema de decaimiento de coeficientes matriciales 6.2. Esto implica que:

$$(6.41) \quad \langle \Pi(h_j)(\bar{f}), \bar{f} \rangle \rightarrow_j 0$$

Lo cuál es una contradicción con lo obtenido en la ecuación 6.40. $\square$

5. Consecuencias

Al final de esta sección probaremos algunas consecuencias del Teorema de ergodicidad. Para ellos calculamos estabilizadores de ciertas acciones, que nos darán junto con el Teorema 2.10, espacios homeomorfos a nuestro espacios de interés escritos como el cociente de G por un grupo cerrado no compacto.

Definición 6.31. *Sea G un grupo actuando en un espacio topológico con una medida de Borel (X, μ) , decimos que la acción de G sobre X es ergódica si para todo función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ G -invariante y μ -medible f es constante μ -c.t.p.*

En la última subsección usaremos el Teorema de ergodicidad para afirmar la ergodicidad de algunas acciones en X y otros espacios de interés. Estableceremos una equivalencia para que una acción sea ergódica:

Proposición 6.32. *Sea G un grupo actuando continuamente sobre un espacio topológico medible (X, μ) , con μ no idénticamente 0. Toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ G -invariante y medible en X es constante si y solo si todo subconjunto $A \subseteq X$, G -invariantes tiene medida nula o total.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que toda función G -invariante y medible en X es constante y sea $A \subseteq X$ invariante por la acción de G . Supongamos que $\mu(A) \neq 0$. Considero $f = \frac{\chi_A}{\mu(A)}$. Por ser A un conjunto G -invariante se tiene que $x \in A$ si y solo si $gx \in A$ para todo $g \in G$. Y como $g \cdot f(x) = f(gx)$, entonces f es G -invariante. Luego debe ser constante c.t.p x por hipótesis. Además f es cero c.t.p x si y solo si $\mu(A) = 0$. Como supusimos que la medida de A no era cero debe ser $f(x) = \frac{1}{\mu(A)}$ c.t.p x . Entonces $\chi_A(x) = 1$ c.t.p x y por lo tanto $\mu(A) = 1$

Supongamos que todo conjunto G -invariante tiene medida nula o total, quiero ver que si ϕ es medible y G -invariante en X entonces es constante c.t.p x . Lo probaremos para ϕ de integral nula y se seguirá que es cierto para cualquier valor de integral ya que si consideramos la función ϕ' como ϕ menos el valor de su integral, se tiene: si ϕ es

G -invariante entonces ϕ' también y si ϕ' constante c.t.p x entonces ϕ lo es. Considero entonces el conjunto $A = \{x : \phi(x) \geq 0\}$. Veamos que como ϕ es G -invariante, A también.

Sea $x \in A$, se tiene $\phi(x) = (g \cdot \phi)(x) = \phi(gx)$. Entonces $\phi(x) \geq 0$ si y solo si $\phi(gx) \geq 0$. Luego A es G -invariante por lo que $\mu(A)$ es 0 o es total. Como ϕ integra 0:

$$0 = \int \phi \, d\mu = \int_A \phi \, d\mu + \int_{A^c} \phi \, d\mu$$

Luego si $\mu(A) = 0$ entonces $\int_{A^c} \phi \, d\mu = 0$. Considerando que $A^c = \{x : \phi(x) < 0\}$ esto implica que $\mu(A^c) = 0$, lo cual es absurdo por ser μ no idénticamente nula.

Si $\mu(A)$ es total entonces $\mu(A^c) = 0$, luego $\int_A \phi \, d\mu = 0$. Sea $B = \{x : \phi(x) > 0\} \subseteq A$, se tiene:

$$0 = \int_A \phi \, d\mu = \int_B \phi \, d\mu + \int_{B^c \cap A} \phi \, d\mu.$$

Como en $B^c \cap A$ la función ϕ vale 0, entonces:

$$0 = \int_B \phi \, d\mu.$$

Como ϕ es estrictamente positiva en B , entonces $\mu(B) = 0$. Entonces $\phi(x) = 0$ c.t.p x como queríamos. $\square$

Definición 6.33. Sea Y el espacio de las tríadas de puntos en S^1 cocientadas por tener la misma orientación, es decir:

$$Y = (S^1)^3 / \sim$$

donde $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ si y solo si existe $h \in \text{Homeo}^+(S^1)$ tal que $h(x_i) = y_i$.

Proposición 6.34. Sea $[x]$ la clase de x según la relación de equivalencia de la definición anterior. Sea (x, y) el intervalo abierto de S^1 que va de x a y en sentido antihorario. El espacio $(S^1)^3$ tiene finitas clases de equivalencia a saber:

$$\begin{aligned} [x_1] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } a \neq b = c\} \\ [x_2] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } a = c \neq b\} \\ [x_3] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } a = b \neq c\} \\ [x_4] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } b \in (a, c)\} \\ [x_5] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } c \in (a, b)\} \\ [x_6] &= \{(a, b, c) \in (S^1)^3 \text{ con } a = b = c\} \end{aligned}$$

Además $[x_i]$ es un conjunto de Borel para todo i .

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que $[x_4]$ y $[x_5]$ son conjuntos abiertos y $[x_6]$, $[x_6] \cup [x_i]$ son conjuntos cerrados para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sea $x = (a_1, a_2, a_3) \in (S^1)^3$ tal que $[x] = [x_4]$ o $[x] = [x_5]$, entonces a_1, a_2, a_3 son todos distintos. Entonces existen abiertos U_1, U_2, U_3 tales que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Sean $V = (U_1 \cup U_2 \cup U_3)^c$, $U = U_1 \times U_2 \times U_3$, y tomemos $y = (b_1, b_2, b_3) \in U$. Es claro que existen homeomorfismos $f_i : U_i \rightarrow U_i$ cumpliendo $f_i(a_i) = b_i$ que preservan la orientación de U_i . Definimos $h : S^1 \rightarrow S^1$ como $h|_{U_i} = f_i$ y $h|_V = \text{id}$. Se puede ver que $h \in \text{Homeo}^+(S^1)$. Como h cumple por definición $h(a_i) = b_i$ hemos probado que $[x] = [y]$. Como tomamos $y \in U$ cualquiera tenemos $[x] = [y]$ para todo $y \in U$. Luego

dado $x \in [x_i]$ con $i = 4$ o $i = 5$ existe abierto $U \subset [x] = [x_i]$ por lo que hemos probado $[x_4]$ y $[x_5]$ abiertos.

Tomemos $y = (b_1, b_2, b_3) \in [x_6]^c$ entonces usando la afirmación 6.34 tenemos que y tiene al menos dos de sus entradas distintas. Luego tomemos U_1 y U_2 dos abiertos de dichas entradas que sean disjuntos y U_3 un abierto de la entrada restante, y consideremos el abierto $U = U_1 \times U_2 \times U_3$. Tomamos $z = (c_1, c_2, c_3) \in U$ y se sigue cumpliendo que tiene dos entradas diferentes. Por lo que si $(a_1, a_2, a_3) \in [x_6]$ no puede existir $h \in \text{Homeo}^+(S^1)$ tal que $h(a_i) = c_i$ luego $z \in [x_6]^c$ y como z era arbitrario entonces $U \subset [x_6]^c$. Probamos que $y \in [x_6]^c$ cualquiera tiene abierto que sigue incluido allí por lo que $[x_6]^c$ es abierto y $[x_6]$ es cerrado.

Observamos que si $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces $[x_i]$ tiene a los elementos de $(S^1)^3$ con dos entradas iguales y la i -ésima distinta a estas dos. Además los elementos de $[x_6]$ tienen todas la entradas iguales. Luego $x \in [x_6] \cup [x_i]$ si y solo si las dos entradas diferentes de i son iguales.

Sea $i \in \{1, 2, 3\}$, tomemos $y = (b_1, b_2, b_3) \in ([x_6] \cup [x_i])^c$ entonces tenemos que y tiene la coordenada j -ésima, diferente de la k -ésima, donde $j, k \neq i$. Luego tomemos U_j y U_k dos abiertos de dichas entradas que sean disjuntos y U_i un abierto de la entrada restante, y consideremos el abierto $U = U_1 \times U_2 \times U_3$ (i, j, k son reordenación de $1, 2, 3$). Tomamos $z = (c_1, c_2, c_3) \in U$ y se sigue cumpliendo que tiene las entradas j y k diferentes. Luego si tomo $x = (a_1, a_2, a_3) \in ([x_6] \cup [x_i])$ no puede existir $h \in \text{Homeo}^+(S^1)$ tal que $h(a_i) = c_i$ pues x tiene la entrada j igual a la k -ésima. Luego $z \in ([x_6] \cup [x_i])^c$ y como z en U era arbitrario entonces $U \subset ([x_6] \cup [x_i])^c$. Probamos que dado $y \in ([x_6] \cup [x_i])^c$ cualquiera, existe abierto que sigue incluido allí por lo que $[x_6] \cup [x_i]$ es cerrado. Ahora si $i \in \{1, 2, 3\}$ se puede escribir $[x_i] = ([x_6] \cup [x_i]) \cap [x_6]^c$ que es intersección de un cerrado con un abierto y por lo tanto es de Borel. Si $i = 4$ o $i = 5$ ya probamos que $[x_i]$ es abierto y ya probamos que $[x_6]$ es cerrado, por lo que son de Borel. $\square$

Proposición 6.35. *Sea G una acción continua sobre un espacio topológico medible (X, μ) . Si la acción es ergódica entonces toda función $h : X \rightarrow Y$ que sea G -invariante y medible es constante μ -c.t.p.*

DEMOSTRACIÓN. Sea una tal función $h : X \rightarrow Y$ G -invariante y medible. Como $[x_i]$ es de Borel para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $A_i = h^{-1}(\{x_i\})$ es medible de X . Como h es G -invariante, entonces A_i también:

sea $g \in G$ y $x \in gA_i$, $h(x) = h(ga_i) = h(a_i) = x_i$, entonces $x \in A_i$. Es decir $gA_i \subset A_i$. Como G es un grupo esta inclusión también implica la inclusión en el otro sentido. Luego $A_i = gA_i$. Entonces A_i es medible y Γ -invariante para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por la Proposición 6.32 se tiene que $\mu(A_i)$ tiene medida 0 o total para todo i . Como son las preimágenes de puntos, estos conjuntos son disjuntos por lo tanto existe un único i para el cual $\mu(A_i)$ tiene medida total y el resto mide 0. Esto prueba que h es constante μ c.t.p. $\square$

5.1. Estabilizadores de algunas acciones.

5.1.1. *El espacio de banderas.* En esta sección escribiremos algunos espacios de interés, como un cociente de G por un subgrupo cerrado y no acotado para poder aplicar la ergodicidad de Γ sobre algunos mapas que tengan como dominio a dichos espacios.

Proposición 6.36. Sea $\mathcal{F} = \{(l, \pi) : l \text{ recta}, \pi \text{ plano de } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } l \subset \pi\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es difeomorfo a G/P .

DEMOSTRACIÓN. 6.36 Para probar la proposición usaremos el Teorema 2.10. Hallaremos una acción diferenciable y transitiva de G sobre $\mathcal{F}$ y veremos que su estabilizador es P . Definimos la acción de G en $\mathcal{F}$ como:

$$(6.42) \quad g \cdot (l, \pi) = (g(l), g(\pi))$$

Veamos que la acción es transitiva. Dados $(l_1, \pi_1), (l_2, \pi_2) \in X$ construiremos dos bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ ortonormales ordenadas de $\mathbb{R}^3$. El primer vector de cada base es un vector normal director de l_1 y l_2 respectivamente, el segundo, es otro vector normal director de π_1 y π_2 respectivamente (ortonormal al anterior) y el tercer vector es el producto cuña de los primero dos. La transformación lineal que manda $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ ordenadamente, está en G pues es unitaria y preserva orientación. Y se tiene $g \cdot (l_1, \pi) = (l_2, \pi)$ entonces la acción es transitiva en $\mathcal{F}$

Veamos que el estabilizador de $F_0 = (l_0, \pi_0) = ((*, 0, 0), (*, *, 0))$ por la acción es el subgrupo P de las diagonales superiores:

Si la matriz $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R})$ fija l_0 entonces d y g son 0. Y si además fija π_0 , h también es 0. Entonces g es triangular superior. Luego hay una biyección $\phi : G/P \rightarrow X$ dada por $\phi([g]) = g \cdot F_0$, que como vemos en la 2.10 es un difeomorfismo y hemos probado la afirmación. $\square$

5.1.2. *Ternas de banderas.* Empezamos probando un lema.

Lemma 6.37. La acción de $GL(2, \mathbb{R})$ es transitiva sobre las ternas de rectas distintas de $\mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACIÓN. 6.37 Tomemos dos ternas de rectas distintas dos a dos en $\mathbb{R}^2$. Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ vectores directores de las tres primeras rectas y $\{w_1, w_2, w_3\}$ de las segundas tres rectas. Como cada una de las ternas tiene sus tres rectas en un mismo plano, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tales que:

$$v_1 = \lambda_1 v_2 + \mu_1 v_3 \text{ y } w_1 = \lambda_2 w_2 + \mu_2 w_3.$$

Como las tres rectas son diferentes todos los coeficientes son no nulos y también v_2 y v_3 son linealmente independientes, entonces podemos definir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(v_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_2 \text{ y } T(v_3) = \frac{\mu_2}{\mu_1} w_3.$$

Y obtenemos $T(v_1) = T(\lambda_1 v_2 + \mu_1 v_3) = \lambda_1 T(v_2) + \mu_1 T(v_3) = \lambda_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_2 + \mu_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} w_3 = \lambda_2 w_2 + \mu_2 w_3 = w_1$. Con lo que T manda las tres primeras rectas en las tres segundas rectas. Como T manda una base en una base, entonces su determinante es no nulo, luego $T \in GL(2, \mathbb{R})$. $\square$

Proposición 6.38. Sea $X = \{((l_1, \pi), (l_2, \pi), (l_3, \pi)) : (l_i, \pi) \in \mathcal{F}, l_i \text{ distintas dos a dos}\}$ entonces existe un subgrupo H cerrado y no acotado de G tal que X es difeomorfo a G/H .

DEMOSTRACIÓN. 6.38 Sea la acción de G en X dada por actuar en cada coordenada como fue definido en la proposición anterior. Haremos lo mismo que en la proposición anterior, probar que la acción es transitiva y probar que su estabilizador está en las hipótesis de H .

Probaremos la siguiente afirmación:

Afirmación 6.39. *La acción de G sobre X es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que G es transitiva en X :

Sean $a = ((l_1, \pi), (l_2, \pi), (l_3, \pi))$ y $b = ((l'_1, \pi'), (l'_2, \pi'), (l'_3, \pi')) \in X$. Vimos que la acción de G en $\mathcal{F}$ es transitiva, en particular es transitiva en planos. Por lo tanto existe $g_1 \in G$ tal que $g_1(\pi) = \pi'$. Luego $g_1 a = ((l''_1, \pi'), (l''_2, \pi'), (l''_3, \pi'))$

Ahora vamos a usar el Lema 6.37 que nos dice que $GL(2, \mathbb{R})$ es triplemente transitiva en las rectas que estén en un mismo plano, para ver que podemos encontrar g_2 en G que fija el plano y mueve la rectas como queremos. Ahora considero $\{u_1, u_2\}$ base del plano π y u_3 ortonormal a $\{u_1, u_2\}$. $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lleva (l''_1, l''_2, l''_3) en (l'_1, l'_2, l'_3) Escribiendo g_2 en la base $\mathcal{B}$ como

$$g_2 = \mathcal{B} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\det(T)} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

se tiene que g_2 fija π' y manda l''_i en l'_i para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces $g_2 \cdot g_1(a) = b$ y probamos que la acción de G en X es transitiva. $\square$

Ahora queremos ver que dado $x_0 \in X$, $Stab_G(x_0)$ es no compacto y cerrado. Sea $x_0 = ((l_1, \pi_0), (l_2, \pi_0), (l_3, \pi_0))$ donde $\pi_0 = (*, *, 0)$ y l_1, l_2, l_3 son 3 rectas distintas cualesquiera de π_0 . Alcanza ver que $H = Stab_G(x_0)$ contiene a un conjunto no acotado ya que no acotado implica no compacto y los estabilizadores de acciones continuas siempre son cerrados. Sea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

$\Rightarrow A$ es no acotado

Todo elemento $h \in A$ manda π_0 en π_0 : Si $x \in \pi_0$ $h(x) = h(*, *, 0) = (a*, a*, 0) \in \pi_0$ y además actúa como una homotésia $\Rightarrow$ fija las rectas de $\pi_0 \Rightarrow h \in H$.

Con lo que usando la Proposición 2.10 obtenemos $X \cong G/H$ con H cerrado, no compacto. Ahora podemos usar Teorema de ergodicidad y deducir que la acción de Γ en G/H es ergódica. $\square$

Proposición 6.40. *Sea $Y = \{((l, \pi_1), (l, \pi_2), (l, \pi_3)) : (l, \pi_i) \in \mathcal{F}, \pi_i \text{ distintos}\}$ entonces existe un subgrupo K cerrado y no acotado de G tal que Y es difeomorfo a G/K .*

DEMOSTRACIÓN. Al igual que antes la estrategia será definir una acción continua de G en Y , ver que es transitiva y que el estabilizador de un punto está en las condiciones de K .

La acción en Y será la dada por actuar por G en cada coordenada. Veamos que

la acción es transitiva: Sean a y b dos elementos de Y : $a = ((l, \pi_1), (l, \pi_2), (l, \pi_3))$
 $b = ((l', \pi'_1), (l', \pi'_2), (l', \pi'_3))$. Tomamos las siguientes 6 rectas: $(l_i) = (\pi_i)^\perp$ $i \in \{1, 2, 3\}$
con los 3 vectores directores respectivos v_i y $(l'_i) = (\pi'_i)^\perp$ $i \in \{1, 2, 3\}$ con los 3 vectores
directores respectivos w_i . Veamos que como los 3 planos se intersectan en l , entonces
las 3 rectas están en un mismo plano: $l \subseteq \pi_i$ entonces $l_i = \pi_i^\perp \subseteq l^\perp = \pi$ Del mismo
modo, como: $l' \subseteq \pi'_i$ entonces $l'_i = \pi'^{\perp}_i \subseteq l'^\perp = \pi'$

Hemos probado en 6.37 que $GL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en las triplas de rectas, luego si
miramos π y π' como $\mathbb{R}^2$ podemos considerar una matriz T en $GL(2, \mathbb{R})$ que manda las
tres rectas l_i en las tres rectas l'_i . Para construir $g \in G$ que manda a en b consideremos
la matriz que al restringirla a π es T y tal que manda el espacio perpendicular a π a
saber l en el espacio perpendicular a π' a saber l' rescalando para que el determinante
sea 1. Entonces la acción es transitiva.

Veamos que la acción tiene estabilizador no compacto:

Sea $x_0 = (((*, *, 0), (*, 0, 0)), ((*, *, 0), (0, *, 0)), ((*, *, 0), (k, k, 0))) \in Y$

El estabilizador de x_0 por la acción es:

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \text{ tales que } e + f = a + c \right\}$ En particular la familia de ma-
trices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset H$ es no acotada. Por lo que H es no compacto, ahora tenemos

por la proposición 2.10 que $G/H \cong Y$ □

5.1.3. Banderas en posición general.

Proposición 6.41. Sea $\mathcal{F}_0 = \{((l_1, \pi_1), (l_2, \pi_2)) : \text{tales que } l_1 \not\subseteq \pi_2, l_2 \not\subseteq \pi_1\}$, entonces
 $\mathcal{F}_0$ es difeomorfo a G/D , donde D es el subgrupo de las matrices diagonales.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es similar a las anteriores. □

Proposición 6.42. F_0^2 tiene medida total en $(G/P)^2$

5.2. Consecuencias del Teorema de ergodicidad.

Proposición 6.43. Para las acciones de G definidas en la sección anterior sobre los
espacios $\mathcal{F}$, X , Y , y $\mathcal{F}_0$ la acción heredada por Γ es ergódica.

DEMOSTRACIÓN. Observar que para cada uno de ellos hemos probado que es home-
omorfo a G cocientado por un subgrupo cerrado, (ya que son todos estabilizadores de
acciones continuas), y no acotado. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 1.5 y deducir
que la acción de Γ es ergódica. □

CAPÍTULO 7

Prueba del Teorema de la órbita finita

1. Introducción

En este capítulo usaremos los dos resultados probados en los capítulos 5 y 6:

TEOREMA 1.4 (Furstenberg). *Si Γ actúa continuamente en un espacio compacto X entonces existe un mapa Γ -equivariante (a izquierda), P -invariante (a derecha) y Borel medible $\psi : G \rightarrow \text{Prob}(X)$.*

TEOREMA 1.5 (Teorema de ergodicidad de Moore). *Si H es un subgrupo cerrado no compacto de G entonces toda función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ medible, H -invariante (a izquierda) y Γ -invariante (a derecha) es constante μ c.t.p. Donde μ es la medida de Haar en G .*

para probar que si Γ es un lattice de G con una acción continua en S^1 por $\text{Homeo}^+(S^1)$, entonces existe una medida de probabilidad μ en S^1 Γ -invariante. Esto terminará de probar el

TEOREMA 1.1. *Si Γ es un lattice de $SL(3, \mathbb{R})$, entonces toda acción por homeomorfismos de Γ en S^1 tiene al menos una órbita finita.*

vía el

TEOREMA 1.3. *Si Γ es un grupo discreto tal que:*

- (1) *Su abelianización $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finita*
- (2) *Γ actúa en S^1 por homeomorfismos que preservan orientación, preservando una medida de probabilidad μ .*

Entonces Γ tiene al menos una órbita finita

Para eso probaremos que la función ψ dada por el Teorema 1.4 es de hecho constante c.t.p. Separaremos en dos casos el problema:

- (1) ψ cumple $\psi(x)$ atómica c.t.p x
- (2) ψ cumple $\psi(x)$ no atómica c.t.p x

el caso en el que la función ψ es mixta (no cae en el caso (1) ni en el caso (2)) se prueba fácilmente luego de probar los dos casos enumerados arriba.

En cada caso construimos a partir de ψ funciones que resulten convenientes para aplicar la ergodicidad de Γ en G y deducir que estas nuevas funciones son constantes. Particularmente construimos funciones cuyos dominios sean los espacios identificados en la sección consecuencias del capítulo anterior. Finalmente probaremos que el hecho de que estas nuevas funciones auxiliares sean constantes c.t.p implica que ψ lo es.

1.1. Generalidades.

Notación 7.1. Notamos por $\mathcal{L}$ a la medida de Lebesgue en S^1 .

Teorema 7.2 (Teorema de Luisin). Sea (X, μ) un espacio topológico con una medida de Radon e Y un espacio topológico con una base numerable. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función medible. Entonces para todo ϵ positivo existe un subconjunto E medible de X tal que:

- $\mu(X \setminus E) < \epsilon$.
- f restricta a E es continua.

Proposición 7.3 (Teorema de la medida sin átomos). Sea μ una medida de probabilidad sin átomos en S^1 . Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que todo intervalo I de largo menor a δ cumple $|\mu(I)| < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no existe dicho δ , entonces hay algún $\epsilon > 0$ para el que existen intervalos $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de largo menor a $1/k$ y $\mu(I_k) > \epsilon$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomo $x_k \in I_k$. Como S^1 es compacto, a menos de tomar una subsucesión podemos suponer que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x_∞ . También a menos de tomar subsucesiones podemos suponer que converge monótonicamente (pensando en un orden en un entorno de x_∞ definido por darle una orientación al círculo). Sin pérdida de generalidad suponemos que es creciente, con lo que $[x_{k+1}, x_\infty] \subset [x_k, x_\infty]$. También podemos suponer que $I_{k+1} \subseteq [x_k, x_\infty]$ ya que el diámetro de los intervalos tiende a cero y tienen un punto que tiende a x_∞ . Sea $\hat{I}_k = I_k \cup [x_k, x_\infty]$. Entonces $\hat{I}_{k+1} \subseteq \hat{I}_k$, por lo que $\{\hat{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia de compactos encajados con diámetro tendiendo a cero, en un espacio compacto. Por lo tanto se intersectan en un punto, como x_∞ pertenece a todos por definición, entonces :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \hat{I}_k = \{x_\infty\}.$$

Luego se tiene para todo n que:

$\epsilon < \mu(\hat{I}_n) = \mu(\bigcap_{k=1}^n \hat{I}_k)$. Ahora haciendo tender n a infinito y usando (monotonía) obtenemos que $\mu(\bigcap_{k=1}^n \hat{I}_k) \rightarrow \mu(\{x_\infty\})$. Finalmente tenemos que $0 < \epsilon < \mu(x_\infty)$ llegando a un absurdo ya que μ no era atómica.

□

Proposición 7.4. Sean μ_n una sucesión de medidas de probabilidad no atómicas en S^1 , tal que converge en la topología débil a la medida μ de probabilidad y no atómica. Entonces dado un intervalo I cualquiera de S^1 se tiene que:

$$\mu_n(I) \rightarrow \mu(I)$$

cuando n tiende a infinito.

DEMOSTRACIÓN. Como μ es no atómica podemos usar el Lema 7.3. Por lo que dado ϵ existe δ tal que para todo intervalo $I \subset S^1$, si $\mathcal{L}(I) < \delta$ entonces $\mu(I) < \epsilon/2$. Tomando un intervalo $I \subset J$ tal que $\mathcal{L}(J \setminus I) < \delta$ tenemos que:

$$\mu(J) = \mu(I) + \mu(J \setminus I) < \mu(I) + \epsilon.$$

Ahora tomamos f continua que este soportada en J y valga 1 en I . Probaremos que

$$(7.1) \quad \limsup \mu_n(I) < \mu(I) + \epsilon < \liminf \mu_n(I).$$

Por construcción f cumple $\chi(I) < f < \chi(J)$ entonces las medidas de probabilidad μ y μ_n cumplen: $\mu_n(\chi_I) < \mu_n(f)$ y $\mu(f) < \mu(\chi_J)$. Para probar la primer desigualdad en la ecuación 7.1 usamos la anterior afirmación, la convergencia débil de μ_n y la elección inicial de J :

$$\limsup \mu_n(I) < \limsup \mu_n(f) = \mu(f) < \mu(J) < \mu(I) + \epsilon.$$

Análogamente dado ϵ puedo tomar un intervalo $K \subset I$ tal que $\mu(I \setminus K) < \delta$ y por lo tanto $\mu(K) > \mu(I) - \epsilon$. Consideremos g una función continua que valga 1 en K y esté soportada en I , por lo que g cumple $\chi_I > g > \chi_K$. Luego las medidas de probabilidad μ y μ_n cumplen: $\mu_n(I) > \mu_n(g)$ y $\mu(g) > \mu(K)$. Para probar la segunda desigualdad en la ecuación 7.1 usamos la observación anterior, la convergencia de μ_n y la elección de K :

$$\liminf \mu_n(I) > \liminf \mu_n(g) = \mu(g) > \mu(K) > \mu(I) - \epsilon.$$

Esto prueba la ecuación 7.1.

Como la ecuación 7.1 se cumplen para todo ϵ entonces concluimos que:

$$\liminf \mu_n(I) > \mu(I) > \limsup \mu_n(I).$$

Por lo que tenemos que $\lim \mu_n(I) = \mu(I)$. □

2. Prueba del Teorema

En este capítulo vamos a probar:

TEOREMA 1.1. *Si Γ es un lattice de $SL(3, \mathbb{R})$, entonces toda acción por homomorfismos de Γ en S^1 tiene al menos una órbita finita.*

usando el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3. *Si Γ es un grupo discreto tal que:*

- (1) *Su abelianización $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finita*
- (2) *Γ actúa en S^1 por homeomorfismos que preservan orientación, preservando una medida de probabilidad μ .*

Entonces Γ tiene al menos una órbita finita

2.1. Reducción a la existencia de una medida de probabilidad Γ -invariante.

Teorema 7.5. *La demostración del Teorema 1.1 se puede reducir a probar que existe una medida de probabilidad μ en S^1 , que es Γ -invariante.*

DEMOSTRACIÓN. 7.5 Vamos a probar que estamos en las hipótesis del Teorema 1.3.

- Como Γ es un lattice de $SL(n, \mathbb{R})$ con $n \geq 3$ podemos usar el Teorema 4.20 para deducir que $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finito.

- Observar que si tomamos $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ preserva orientacion}\}$ y tomamos un elemento a que no preserve orientación de Γ obtenemos que $\Gamma = \Gamma' \cup a\Gamma'$. Ya que si $g \notin \Gamma' \Rightarrow a^{-1}g \in \Gamma'$ de donde $g \in a\Gamma'$. Luego deducimos que $Orb_{\Gamma}(x) = Orb_{\Gamma'}(x) \cup aOrb_{\Gamma'}(x)$. Esto nos permite concluir que Γ' también es un lattice de G , ya que si $\mathcal{F}$ es dominio fundamental para Γ entonces $\mathcal{F} \cup a\mathcal{F}$ es dominio fundamental para Γ' . Además $\Gamma = \Gamma' \cup a\Gamma'$ muestra que si $x \in S^1$ tiene órbita finita por Γ' entonces tiene órbita finita por Γ . Podemos suponer entonces que Γ actúa preservando orientación en S^1 . Entonces si tuvieramos también que existe una medida de probabilidad μ de S^1 que es Γ -invariante, alcanza aplicar el Teorema 1.3 para probar que hay una órbita finita.

□

2.2. Existe una medida invariante por la acción.

Teorema 7.6. *Hay una medida de probabilidad μ de S^1 que es Γ -invariante.*

DEMOSTRACIÓN. 1.1

Queremos probar que si Γ es un lattice de $SL(n, \mathbb{R})$ con $n \geq 3$, que actúa en S^1 por homeomorfismo que preservan orientación entonces:

Hay una medida de probabilidad μ de S^1 que es Γ -invariante.

Como Γ actúa continuamente en S^1 sabemos por el teorema de 1.4 que existe un mapa medible P -invariante y Γ -equivariante $\psi_0 : G \rightarrow \text{Prob}(S^1)$

Será suficiente probar que:

(7.2) ψ_0 es constante c.t.p., donde en G consideramos la medida de Haar

Pues en ese caso tendríamos una medida de probabilidad invariante por S^1 : sea $\psi(x) = \mu$, c.t.p. x , luego $\mu = \psi(x\gamma^{-1}) = \gamma\psi(x) = \gamma\mu$, $\forall \gamma \in \Gamma$ y para casi todo $x \in G$, con lo que μ es Γ -invariante.

Tenemos que ψ_0 es P -invariante, consideremos desde ahora la función ψ como la inducida por pasar al cociente en G : $\psi : G/P \rightarrow \text{Prob}(X)$ y vamos a probar equivalentemente que ψ es constante μ_P c.t.p. x . Donde μ_P es la medida inducida por una forma de volumen G -invariante.

Para probar la afirmación 7.2 vamos a trabajar con los siguientes tres casos posibles para ψ :

- (1) $\psi(x)$ atómica para casi todo x respecto a la medida de Haar.
- (2) $\psi(x)$ sin átomos para casi todo x respecto a la medida de Haar.
- (3) $\psi(x)$ mixta (no está en caso (1) ni (2))

2.2.1. *Caso 1.* $\psi(x)$ atómica c.t.p. x

Probaremos que Γ manda átomos de $\psi(x)$ en átomos de $\psi(\gamma^{-1}x)$ sin cambiarles el peso.

Para $x \in G/P$ se pueden definir:

- $P_x = \{m \in [0, 1] : \psi(x)(\{a\}) = m \neq 0, a \in S^1\}$.

- $A_x = \{a_x \in S^1 : \psi(x)(\{a_x\}) = \max P_x\}$. O sea A_x son los átomos con mayor peso de $\psi(x)$.
- $\hat{\psi}(x) = \frac{1}{|A_x|} (\sum_{a_x \in A_x} \delta_{a_x})$. Notar que como $\psi(x)$ toma valores en $[0, 1]$ entonces $|A_x| < \infty$.

Observación 7.7. $P_x = P_{\gamma x}$ para todo $x \in G/P$, $\gamma \in \Gamma$. Tenemos que $\psi(\gamma x)(\{a\}) = \gamma\psi(x)(\{a\}) = \psi(x)(\{\gamma^{-1}a\}) \forall a \in S^1$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in G/P$.

Observación 7.8. Se tiene que $\gamma A_x = A_{\gamma x}$. Si tomo $x \in G/P$ y $a_x \in A_x$ entonces $\max P_x = \psi(x)(\{a_x\}) = \psi(\gamma x)(\{\gamma^{-1}a_x\})$ y como $P_x = P_{\gamma x}$ sus máximos son iguales con lo cual $\max P_{\gamma x} = \psi(\gamma x)(\{\gamma a_x\})$. Eso muestra que $\gamma a_x \in A_{\gamma x}$ por definición de $A_{\gamma x}$. O sea probamos $\gamma A_x \subseteq A_{\gamma x}$. Y como Γ es grupo, formulando lo anterior al revés nos queda la otra inclusión, es decir: $\gamma A_x = A_{\gamma x}$.

Ahora vamos a ver que podemos quedarnos solo con los átomos de mayor peso, para eso probaremos que $\hat{\psi}$ mantiene las propiedades de ψ . Probaremos primero que $\hat{\psi}$ también es Γ -equivariante.

En la siguiente ecuación comenzamos usando la definición de $\hat{\psi}$, luego la observación 2.2.1 y en las siguiente igualdades aplicamos definiciones.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\gamma x) &= \frac{1}{|A_x|} \sum_{a_y \in A_{\gamma x}} \delta_{a_y} = \frac{1}{|A_x|} \sum_{a_y \in \gamma A_x} \delta_{a_y} = \frac{1}{|A_x|} \sum_{a_x \in A_x} \delta_{\gamma a_x} \\ &= \frac{1}{|A_x|} \sum_{a_x \in A_x} \gamma \delta_{a_x} = \gamma \left(\frac{1}{|A_x|} \sum_{a_x \in A_x} \delta_{a_x} \right) = \gamma \hat{\psi}(x) \end{aligned}$$

Luego $\hat{\psi}$ es Γ -equivariante.

Definamos $A_n = \{x \in G/P : |A_x| = n\}$. Como $\gamma A_x = A_{\gamma x}$ entonces $|A_x| = |A_{\gamma x}|$ por lo que A_n es Γ -invariante. Sabemos por la proposición 6.32 que si una acción es ergódica entonces todo conjunto invariante tiene medida cero o uno. Por ser P compacto no acotado entonces Γ actúa ergódicamente sobre G/P , luego se tiene que para cada natural n la medida de A_n es o cero o total. Ahora como $G/P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y son disjuntos entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que la medida de A_n es total es decir $\mu(A_n^c) = 0$, luego la cantidad de átomos con peso mayor de $\psi(x)$ es constante c.t.p. x . Además podemos probar que $\hat{\psi}$ es medible Haar. Con lo que $\hat{\psi}$ es una función medible, Γ -invariante con finitos átomos todos del mismo peso.

Entonces a menos de reducir $\psi(x)$ a $\hat{\psi}(x)$ puedo suponer que $\psi(x)$ tiene n átomos, todos con el mismo peso, c.t.p x .

Para simplificar supondremos que $\psi(x)$ tiene un solo átomo c.t.p x . El caso general se puede encontrar en [Ghy99]. En ese caso podemos ver a $\psi : G/P \rightarrow S^1$ donde ahora la imagen de un x es el punto de S^1 sobre el que esta soportada la medida $\psi(x)$.

Para probar que es constante, combinaremos que Γ preserva orientación, (o sea que las ternas de puntos con orientación positiva son Γ -invariantes) con el hecho de que Γ actúa ergódicamente sobre G/P (1.5). Con eso veremos que la función que es cocientar por la misma orientación a las tríadas de puntos en la imagen de ψ es constante c.t.p. x . Pero si suponemos que $\psi(x)$ no es constante c.t.p x entonces claramente habrá más

de un clase. Así que $\psi(x)$ debe ser constante. Usaremos la Proposición 6.36 para ver a G/P como el espacio $\mathcal{F} = \{(l, \pi) : l \text{ recta, } \pi \text{ plano de } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } l \subset \pi\}$ al que llamamos el espacio de banderas.

Definimos ahora $\hat{\psi}_3 : (G/P)^3 \rightarrow (S^1)^3$ como $\hat{\psi}_3 = (\psi(x), \psi(y), \psi(z))$ que también es Γ -equivariante y medible. Consideramos en S^1 la relación

$$[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3] \text{ si y solo si } \exists h \in \text{Homeo}^+(S^1) \text{ tal que } h(x_i) = y_i$$

Y ahora definamos $\psi_3(x, y, z) = [\hat{\psi}_3(x, y, z)]$, en dónde consideramos la acción de Γ definida como la acción en cada coordenada. Veamos que es Γ -invariante:

Por definición de la acción y de $\hat{\psi}_3$ tenemos la primeras dos igualdades, mientras que las dos últimas son por la Γ -invarianza de ψ y porque Γ actúa respetando orientación: $\psi_3(\gamma(x, y, z)) = \psi_3((\gamma x, \gamma y, \gamma z)) = [\psi(\gamma x), \psi(\gamma y), \psi(\gamma z)] = [\gamma\psi(x), \gamma\psi(y), \gamma\psi(z)] = [\psi(x), \psi(y), \psi(z)] = \psi_3((x, y, z))$.

De la Γ -invarianza de ψ_3 y la ergodicidad de la acción de Γ sobre X probada en 6.43 deducimos que ψ_3 restringida a X es constante. Usaremos esto para probar que ψ no depende del plano.

Como es constante en particular se tiene que:

$$[\psi(x), \psi(y), \psi(z)] = [\psi(z), \psi(y), \psi(x)].$$

Si llamamos $(a, b, c) = (\psi(x), \psi(y), \psi(z))$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b \in [a, c]$. Como $[a, b, c] = [c, b, a]$ tenemos que existe $h \in \text{Homeo}^+(S^1)$ tal que $h(a) = c$, $h(c) = a$, $h(b) = b$. Como h preserva orientación $b \in [a, c]$ implica $h(b) = b \in [h(a), h(c)] = [c, a]$. Y finalmente $b \in [a, c] \cap [c, a]$ implica $b = a$ o $b = c$. Supongamos que es el caso $b = a$ y usemos ahora que también es cierto $[b, a, c] = [c, b, a]$. Por lo que existe un homeomorfismo g que preserva orientación tal que $g(b) = c$, $g(a) = b$ y $g(c) = a$. Pero como $b = a$ entonces $c = g(b) = g(a) = b$. Entonces los tres puntos son iguales. El caso $b = c$ es análogo. Hemos probado que $\psi(x) = \psi(y) = \psi(z)$ c.t.p $(x, y, z) \in X$. En esencia que dos banderas con el mismo plano tienen la misma imagen por ψ . Veremos de modo similar que dos banderas con la misma recta tienen la misma imagen por ψ . Entonces ya tendremos que ψ es cte. c.t.p x .

Recordamos que en la proposición 6.40 definimos a Y como

$$Y = \{((l, \pi_1), (l, \pi_2), (l, \pi_3)) : (l, \pi_i) \in \mathcal{F} \text{ y } \pi_i \text{ distintos}\}$$

y en 6.43 vimos que Γ actúa ergodicamente sobre Y . Luego ψ_3 restringida a Y es constante. Ahora usando el mismo argumento de orientación que antes tenemos que $\psi(x) = \psi(y) = \psi(z)$ c.t.p $(x, y, z) \in Y$, o sea dos banderas con la misma recta tienen la misma imagen. Entonces tomemos $x, y \in G/P$ con distinto plano entonces $x = (\pi, l)$ y $y = (\pi', l')$ con distinto plano y $r = \pi \cap \pi'$. Luego $\psi((\pi, l)) = \psi((\pi, r)) = \psi((\pi', r)) = \psi((\pi', l'))$ c.t.p x . Donde la primera y la última igualdad son pues ψ no depende de la recta, y la segunda es pues ψ no depende del plano. Luego ψ es cte c.t.p.

2.2.2. *Caso 2.* $\psi(x)$ es no atómica c.t.p.

Sea $\text{Prob}_0(S^1) = \{\mu \in \text{Prob}(S^1) : \mu \text{ no tiene átomos}\}$. Por hipótesis tenemos que $\psi : G/P \rightarrow \text{Prob}_0(S^1)$ mapa Γ -equivariante entonces podemos definir $\psi^2 : (G/P)^2 \rightarrow \text{Prob}_0(S^1)^2$ por $\psi^2(x, y) = (\psi(x), \psi(y))$. Tenemos que ψ^2 igual que ψ es Γ -equivariante y medible Borel.

Definamos $d : (\text{Prob}_0(S^1))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $d(\mu_1, \mu_2) = \sup\{|\mu_1(J) - \mu_2(J)| : J \text{ intervalo de } S^1\}$. Como Γ es un grupo que actúa por homeomorfismos entonces en particular, contiene al elemento identidad y manda intervalos en intervalos por lo que:

$$\{\gamma(I) : I \text{ intervalo de } S^1\} = \{J : J \text{ intervalo de } S^1\}$$

Usando esto veamos que d es Γ -invariante:

$d(\gamma\mu_1, \gamma\mu_2) = \sup|\gamma\mu_1(I) - \gamma\mu_2(I)| = \sup|\mu_1(\gamma^{-1}I) - \mu_2(\gamma^{-1}I)| = \sup|\mu_1(J) - \mu_2(J)| = d(\mu_1, \mu_2)$. Ahora vamos a probar que d es continua respecto de la topología débil* en $\text{Prob}_0(S^1)$: tomamos $\mu \in \text{Prob}_0(S^1)$ y $\epsilon > 0$. Sea $id : ((\text{Prob}_0(S^1))^2, \tau_*) \rightarrow ((\text{Prob}_0(S^1))^2, \tau_d)$. Donde τ_* y τ_d son la topología débil* y la inducida por la distancia, respectivamente. Escribamos a la función distancia $d : ((\text{Prob}_0(S^1))^2, \tau_*) \rightarrow \mathbb{R}$, como $d = D \circ id$, donde $D : ((\text{Prob}_0(S^1))^2, \tau_d) \rightarrow \mathbb{R}$. Es claro que D será continua porque le pusimos la topología definida por la distancia al dominio. Luego si probamos que id es continua tendremos que d es continua. Para eso alcanza probar la siguiente inclusión entre las topologías:

$$\tau_* \subseteq \tau_d$$

Esto es lo mismo que probar que los cerrados de τ_* son cerrados de τ_d . Para eso alcanza ver que la convergencia en τ_* implica la convergencia en τ_d .

Afirmación 7.9. *Sea $\{\mu_n\} \subset \text{Prob}_0(S^1)$ una sucesión de medidas que converge en la topología débil estrella a una medida $\mu \in \text{Prob}_0(S^1)$. Entonces μ_n converge a d en la topología inducida por la distancia d .*

Sea $\mu_n \rightarrow_* \mu$. Por la Proposición 7.4 se tiene que para todo $\epsilon > 0$ y para todo $I \subset S^1$, existe n_0 tal que:

$$(7.3) \quad |\mu_n(I) - \mu(I)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Luego para todo ϵ y para toda partición finita $\mathcal{P}$ de S^1 en intervalos existe un n_0 tal que: $|\mu_n(I) - \mu(I)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y todo intervalo I que es unión de intervalos en $\mathcal{P}$. Esto ya que el conjunto de intervalos que se escriben como unión de intervalos en $\mathcal{P}$ es finito, luego podemos tomar n_0 como el máximo de los n 's que nos da la ecuación 7.3 para cada intervalo, haciendo que se cumpla dicha ecuación para todos los intervalos en simultáneo.

Tomemos $\epsilon > 0$ y veamos que existe n_0 tal que:

$$|\mu(J) - \mu_n(J)| < \epsilon$$

para cualquier intervalo J de S^1 y $n \geq n_0$. Sea $\epsilon' = \epsilon/20$. Por la Proposición 7.3 existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{L}(I) < \delta$ entonces $\mu(I) < \epsilon'$. Luego si tomo una partición $\mathcal{P}$ con intervalos de medida lebesgue más chica que δ se tiene:

$$(7.4) \quad \mu(I) < \epsilon' \text{ para todo } I \in \mathcal{P}.$$

Y por lo demostrado en el párrafo anterior se tiene que para dicha partición existe n_0 cumpliendo:

$$(7.5) \quad |\mu_n(I) - \mu(I)| < \epsilon' \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } I \text{ unión de intervalos en } \mathcal{P}.$$

Ahora tomemos un intervalo J cualquiera de S^1 . Como $\mathcal{P}$ es partición de S^1 podemos escribir a J como:

$$J = N_1 \cup I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k \cup N_2,$$

donde $N_1 \subset I_0$, $N_2 \subset I_{k+1}$ y $I_j \in \mathcal{P}$ para todo j .

Entonces $|\mu_n(J) - \mu(J)| = |\mu_n(N_1 \cup I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k \cup N_2) - \mu(N_1 \cup I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k \cup N_2)|$. Acotemos $|\mu_n(J) - \mu(J)|$, por desigualdad triangular y aditividad de las medidas se tiene:

$$|\mu_n(J) - \mu(J)| \leq |\mu(N_1)| + |\mu_n(N_1)| + |\mu(N_2)| + |\mu_n(N_2)| + |(\mu - \mu_n)(I_1 \cup \dots \cup I_k)|.$$

Ahora usando que $N_1 \subset I_0$, $N_2 \subset I_{k+1}$ y que las medidas μ y μ_n son positivas se tiene:

- $\mu(N_1) \leq \mu(I_0)$
- $\mu(N_2) \leq \mu(I_{k+1})$
- $\mu_n(N_1) \leq \mu_n(I_0)$
- $\mu_n(N_2) \leq \mu_n(I_{k+1})$

Combinemos esto último con la siguiente desigualdad triangular:

$$|\mu_n(I)| \leq |\mu_n(I) - \mu(I)| + |\mu(I)|$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned} & |\mu(N_1)| + |\mu_n(N_1)| + |\mu(N_2)| + |\mu_n(N_2)| + |(\mu - \mu_n)(I_1 \cup \dots \cup I_k)| \\ & \leq |\mu(I_0)| + |\mu_n(I_0)| + |\mu(I_{k+1})| + |\mu_n(I_{k+1})| + |(\mu - \mu_n)(I_1 \cup \dots \cup I_k)| \\ & \leq |\mu_n(I_0) - \mu(I_0)| + 2|\mu(I_0)| + |\mu_n(I_{k+1}) - \mu(I_{k+1})| + 2|\mu(I_{k+1})| + |(\mu - \mu_n)(I_1 \cup \dots \cup I_k)| \end{aligned}$$

. En esta última ecuación usaremos la afirmación 7.5 para acotar el primero, el tercer y el último término por ϵ' y la afirmación 7.4 para acotar el segundo y el cuarto termino por ϵ' , obteniendo finalmente que:

$$|\mu_n(J) - \mu(J)| \leq 7\epsilon' < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0$$

como queríamos. □

Como ψ^2 es medible y d continua $\Rightarrow d \circ \psi^2$ es medible. Y como ψ^2 es Γ -equivariante y d es Γ -invariante $\Rightarrow d \circ \psi^2$ es Γ -invariante.

En la proposición 6.41 definimos el conjunto de pares de banderas en posición general como $F_0^2 = \{((l_1, \pi_1), (l_2, \pi_2)) : l_1 \not\subset \pi_2, l_2 \not\subset \pi_1\}$. Definimos allí la acción de Γ como la acción en cada bandera y vimos que G/D es difeomorfo a F_0^2 , donde D es el subgrupo de matrices diagonales de G . Por lo que en el Teorema 6.43 deducimos que la acción de Γ en F_0^2 es ergódica. Además usando la Proposición 6.42 tenemos que F_0^2 tiene medida total en $(G/P)^2$ entonces lo deducido para F_0^2 vale para c.t.p x en $(G/P)^2$. O sea que toda función Γ -invariante sobre F_0^2 sea constante c.t.p x implica que toda función Γ -invariante sobre $(G/P)^2$ es constante c.t.p.

En particular tenemos que $d \circ \psi^2$ es constante c.t.p x

Digamos que $d \circ \psi^2 = c$ c.t.p $x, y \in (G/P)^2$ queremos ver que $c = 0$, osea

$$\psi(x) = \psi(y) \text{ para c.t.p } x, y \in (G/P)^2$$

Por el Teorema 7.2 tenemos que tomando ϵ menor a uno ψ es continua en un conjunto K de medida positiva.

Luego $d \circ \psi^2$ es continua en $K \times K$. Como $d(\psi^2(x, x)) = 0$ para todo $x \in K$ entonces

$$d(\psi^2(x, y)) = 0$$

para todo $(x, y) \in K \times K$. Como K tiene medida positiva entonces

$$d \circ \psi^2(x, y) = 0$$

para c.t.p. $(x, y) \in (G/P)^2$ como queríamos.

2.2.3. Caso 3. El caso que nos queda es en el que ψ no es puramente atómica (i.e no se tiene $\psi(x)$ atómica c.t.p), ni puramente no atómica (i.e no se tiene $\psi(x)$ no atómica c.t.p). Dado $x \in G/P$, vamos a descomponer a $\psi(x)$ en dos medidas: una atómica $\psi_a(x)$ y una no atómica $\psi_{na}(x)$ como sigue:

Tomamos $A = \{a \in S^1 : \psi(x)(\{a\}) \neq 0\}$ osea los átomos de $\psi(x)$ y definimos:

- $\psi_a(x)(B) = \psi(x)(B \cap A)$ y
- $\psi_{na}(x) = \psi(x) - \psi_a(x)$.

Tenemos que $\psi_a(x)$ es una medida ya que es combinación lineal de deltas y $\psi_{na}(x)$ también pues es diferencia de dos medidas. Ahora $\psi_a(x)$ es atómica por definición y para $\psi_{na}(x)$ tenemos:

$\psi_{na}(x)(\{p\}) = \psi(x)(\{p\}) - \psi_a(x)(\{p\}) = \psi(x)(\{p\}) - \psi(x)(\{p\} \cap A) = 0$ Tanto si $p \in A$ como si $p \notin A$, con lo que $\psi_{na}(x)$ es no atómica.

Haciendo esto para todo $x \in G/P$ tenemos dos mapas: ψ_a y ψ_{na} cuya suma da ψ y que van al espacio de las medidas atómicas y no atómicas c.t.p x respectivamente. Casi al final de esta sección probaremos que se puede rescalar cada función para que de hecho vayan al espacio de medidas de probabilidad.

Ahora queremos probar que tanto ψ_a como ψ_{na} son Γ -equivariantes y medibles. Luego usaremos el Teorema 1.5 para deducir que podemos rescalar las funciones y finalmente aplicaremos lo probado en los casos 1 y 2 a cada sumando. Tendremos así que ambos sumandos son funciones constantes c.t.p x con lo cual ψ será constante c.t.p. x

Probemos la Γ -equivariancia de ψ_a :

Sea $x \in G/P$, $\gamma \in \Gamma$ y B medible de S^1 $\psi_a(\gamma \cdot x)(B) = \psi(\gamma \cdot x)(B \cap A) = \gamma \cdot \psi(x)(B \cap A) = \gamma \cdot \psi_a(x)(B)$

Para ver la Γ -equivariancia de ψ_{na} :

Sea $x \in G/P$, $\gamma \in \Gamma$ y B medible de S^1 $\psi_{na}(\gamma \cdot x)(B) = \psi(\gamma \cdot x)(B) - \psi_a(\gamma \cdot x)(B) = \gamma \cdot \psi(x)(B) - \gamma \cdot \psi_a(x)(B) = \gamma \cdot (\psi(x) - \psi_a(x))(B) = \gamma \psi_{na}(x)(B)$.

Luego ψ_a y ψ_{na} son Γ -equivariantes.

Se puede probar que por como definimos, ψ_a y ψ_{na} , estas también son medibles.

Sea $A = \{x \in G/P : \psi_a(x) \neq 0\}$, A es un conjunto Γ -invariante ya que al ser ψ_a Γ -invariante entonces $\text{sop}(\psi_a(x)) = \text{sop}(\psi_a(\gamma x))$. Entonces por la ergodicidad de Γ actuando en G/P tenemos $\mu(A) = 0$ o $\mu(A^c) = 0$. Pero no puede ser 0 pues si así lo fuera la función ψ estaría en el caso 2 (sería no atómica c.t.p x). Entonces tiene que ser $\mu(A) = 1$. Luego $\psi_a(x)(S^1) > 0$ c.t.p x . Entonces se puede normalizar y obtener una medida de probabilidad: $\psi'_a(x) = \frac{\psi_a(x)}{\psi_a(x)(S^1)}$.

De manera análoga tomamos $C = \{x \in G/P : \psi_{na}(x) \neq 0\}$, C es un conjunto Γ -invariante ya que al ser ψ_{na} Γ -invariante entonces $\text{sop}(\psi_{na}(x)) = \text{sop}(\psi_{na}(\gamma x))$. Luego por la ergodicidad de Γ actuando en G/P tenemos $\mu(C)$ es cero o total. Pero no puede ser cero pues si fuera así, la función ψ estaría en el caso 1 (sería atómica c.t.p x). Entonces tiene que ser $\mu(C)$ total. Luego $\psi_{na}(x)(S^1) > 0$ c.t.p x . Entonces se puede normalizar y obtener una medida de probabilidad: $\psi'_{na}(x) = \frac{\psi_{na}(x)}{\psi_{na}(x)(S^1)}$.

Ahora sabemos que ψ'_a y ψ'_{na} son medidas de probabilidad, Γ -invariantes que están en los casos 1 y 2 respectivamente por lo tanto son constantes c.t.p. x . Para ver que esto implica que ψ_a y ψ_{na} son constante también veamos que $\psi_a(x)(S^1)$ es constante. De hecho el conjunto $A_q = \{x \in G/P : \psi_a(x)(S^1) \leq q\}$ es Γ -invariante para todo $q \in \mathbb{Q}$ pues si tomamos $x \in A_q$ y $\gamma \in \Gamma$:

$$\psi_a(\gamma x)(S^1) = \gamma \psi_a(x)(S^1) = \psi_a(x)(\gamma \cdot S^1) = \psi_a(x)(S^1) \leq q.$$

Entonces por la ergodicidad de Γ actuando en G/P se tiene que A_q debe tener medida cero o total. Ahora como $G/P = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q \Rightarrow$ existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que A_q tiene medida total. Tomando $r = \inf\{q \in \mathbb{Q} : A_q \text{ tiene medida total}\}$ Entonces se tiene que $\{x \in G/P : \psi_a(\gamma x)(S^1) = r\}$ tiene medida total. Luego $\psi'_a(x)$ es un rescalado de $\psi_a(x)$, con lo que tener ψ'_a constante c.t.p x , implica ψ_a constante c.t.p. El mismo razonamiento puede ser replicado para ψ'_{na} y concluir que ψ_{na} es constante c.t.p x . Luego $\psi(x)$ es constante c.t.p x .

Bibliography

- [Zim78] Robert J. Zimmer. “Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks”. English. In: *J. Funct. Anal.* 27 (1978), pp. 350–372. ISSN: 0022-1236. DOI: 10.1016/0022-1236(78)90013-7.
- [Har83] Donald G. Hartig. “The Riesz representation theorem revisited”. English. In: *Am. Math. Mon.* 90 (1983), pp. 277–280. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2975760.
- [Lan85] S. Lang. *SL₂(R)*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1985. URL: <https://books.google.com.uy/books?id=GUxivQEACAAJ>.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis*. English. 2nd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1991. ISBN: 0-07-054236-8.
- [Rot95] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. English. 4th ed. Vol. 148. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 0-387-94285-8.
- [Mil97] John M. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint. Based on notes by David W. Weaver*. English. Revised 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997. ISBN: 0-691-04833-9.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis. Modern techniques and their applications*. English. 2nd ed. Pure Appl. Math., Wiley-Intersci. Ser. Texts Monogr. Tracts. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Ghy99] Étienne Ghys. “Lattice actions on the circle”. French. In: *Invent. Math.* 137.1 (1999), pp. 199–231. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/s002220050329.
- [TB00] Lloyd N. Trefethen and David Bau. *Numerical linear algebra*. English. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. ISBN: 0-89871-487-7.
- [Ghy01] Étienne Ghys. “Groups acting on the circle.” English. In: *Enseign. Math.* (2) 47.3-4 (2001), pp. 329–407. ISSN: 0013-8584.
- [Kna02] A.W. Knap. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2002. ISBN: 9780817642594. URL: <https://books.google.com.uy/books?id=U573NrppkA8C>.
- [SS05] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces*. English. Vol. 3. Princeton Lect. Anal. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005. ISBN: 0-691-11386-6.
- [Wit11] David Witte Morris. “Can lattices in $SL(n, \mathbb{R})$ act on the circle?” English. In: *Geometry, rigidity, and group actions. Selected papers based on the presentations at the conference in honor of the 60th birthday of Robert J. Zimmer, Chicago, IL, USA, September 2007*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 2011, pp. 158–207. ISBN: 978-0-226-23788-6.

- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. English. 2nd revised ed. Vol. 218. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 2013. ISBN: 978-1-4419-9981-8. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5. URL: zenodo.org/record/4461500.
- [Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. English. [s.l.]: Deductive Press, 2015. ISBN: 978-0-9865716-0-2.
- [DH20] Bertrand Deroin and Sebastian Hurtado. *Non left-orderability of lattices in higher rank semi-simple Lie groups*. 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2008.10687. URL: <https://arxiv.org/abs/2008.10687>.