

TRABAJO MONOGRÁFICO

CLAUSURA DE ÓRBITAS EN DINÁMICA
HOMOGENEA

AUTOR:

PEDRO ERNIAGA SCHIAFFARINO

ABRIL 2024

ORIENTADORES:

LEÓN CARVAJALES

RAFAEL POTRIE

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

Al estudiar la dinámica de un grupo G actuando en un espacio topológico X el objetivo principal es el de entender las clausuras de las órbitas y como estas se distribuyen en ella. En dinámica homogénea, es decir, donde la dinámica está dada por la acción de un subgrupo en un cociente de un grupo de Lie, los teoremas de Ratner dan una respuesta muy precisa a este objetivo.

Los resultados de Benoist-Quint son los primeros en obtener descripciones precisas de clausuras de órbitas cuando el grupo que actúa no es necesariamente generado por unipotentes.

En esta monografía, daremos la demostración planteada por Yves Benoist y Hee Oh, de un caso particular del teorema de Benoist-Quint. Concretamente, demostraremos que, dado un subgrupo Γ_1 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ convexo cocompacto y un subgrupo Γ_2 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ cocompacto y sin torsión, las órbitas en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por la acción a derecha de Γ_1 son o bien densas o bien finitas.

When studying the dynamics of a group G acting on a topological space X , the main objective is to understand the closures of the orbits and how they are distributed within it. In homogeneous dynamics, that is, where the dynamics are given by the action of a subgroup on a quotient of a Lie group, Ratner's theorems provide a very precise answer to this objective.

The results of Benoist-Quint are the first to obtain precise descriptions of orbit closures when the acting group is not necessarily generated by unipotents.

In this monograph, we will present the proof outlined by Yves Benoist and Hee Oh, of a particular case of Benoist-Quint's theorem. Specifically, we will demonstrate that, given a convex cocompact subgroup Γ_1 of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ and a torsion-free cocompact subgroup Γ_2 of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, the orbits in $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ under the right action of Γ_1 are either dense or finite.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas y grupos que han sido fundamentales en la realización y éxito de mi trabajo de fin de carrera:

En primer lugar a mis tutores, León y el Gordo, por su orientación experta y apoyo constante a lo largo de este proceso académico. Al tribunal evaluador, Santi, Sergi y León, por sus comentarios constructivos y su contribución a mejorar mi trabajo. A todos mis docentes, cuya dedicación y conocimientos han sido inspiradores y enriquecedores para mi formación académica. A mis compañeros de clase, por compartir conmigo este viaje educativo y por el apoyo mutuo que nos hemos brindado.

Además, a quienes asistieron a la defensa de mi trabajo, por su interés y sus preguntas que me ayudaron a reflexionar aún más sobre mi trabajo. A mi novia, Georgina, por su amor, paciencia y apoyo incondicional durante todo este tiempo. A mi familia, por su constante aliento, comprensión y sacrificio para que pudiera alcanzar mis metas académicas. Su apoyo ha sido fundamental para alcanzar este logro.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo monográfico daremos la demostración planteada por Yves Benoist y Hee Oh en su artículo [1], de un caso particular del teorema de Benoist-Quint [2]. Concretamente, demostraremos que, dado un subgrupo Γ_1 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ convexo cocompacto y un subgrupo Γ_2 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ cocompacto y sin torsión, se cumple el siguiente resultado.

Teorema 1.0.1. *Toda órbita por la acción a derecha de Γ_1 en el cociente $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es finita o densa.*

Al estudiar la dinámica de un grupo Γ actuando en un espacio topológico X el objetivo principal es el de entender las clausuras de las órbitas y como estas se distribuyen en ella. En dinámica homogénea, es decir, donde la dinámica está dada por la acción de un subgrupo en un cociente de un grupo de Lie, los teoremas de Ratner dan una respuesta muy precisa a este objetivo (ver [7]). Un ejemplo de esto consta de la acción de un grupo a un parámetro de \mathbb{R}^2 , que siempre son unipotentes, en el cociente de \mathbb{R}^2 por un retículo como por ejemplo \mathbb{Z}^2 . Es claro que la clausura de las órbitas es o bien isomorfa a \mathbb{S}^1 o bien densa, dependiendo de si la pendiente es racional o irracional respectivamente.

Los resultados de Benoist-Quint [2] son los primeros en obtener descripciones precisas de clausuras de órbitas cuando el grupo que actúa no es necesariamente generado por unipotentes. En particular, en el Teorema 1.0.1 podemos considerar a Γ_2 fundamental de una superficie [5] y Γ_1 generado solo por transformaciones hiperbólicas.

Ejemplo 1.0.2. *Si Γ_2 es el grupo fundamental de una superficie hiperbólica y $\Gamma_1 = \Gamma_2$.*

En este ejemplo el elemento $\Gamma_2 e$ es fijo por la acción de Γ_1 y por lo tanto finita. También se pueden construir ejemplos de órbitas finitas de cardinal mayor que uno.

Ejemplo 1.0.3. *Sea Γ es un subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ cocompacto, Γ_2 es un subgrupo cocompacto de índice finito de Γ .*

En este ejemplo la órbita de $\Gamma_2 e$ por la acción de Γ a derecha tiene cardinal menor o igual al índice de $[\Gamma : \Gamma_2]$.

Otra observación importante es que se puede ver que siempre existen órbitas densas.

Observación 1.0.4. *Si Γ_1 grupo convexo cocompacto y Γ_2 grupo cocompacto, existe una órbita infinita de la dinámica inducida por la acción a derecha de Γ_1 en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En efecto, existe un*

r en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que $\Gamma_2 r$ no es periódico para el flujo geodésico en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Si g es una transformación hiperbólica de Γ_1 , y por lo tanto conjugada a una diagonal $g = pdp^{-1}$. Tenemos entonces que $\Gamma_2 r p^{-1} g^n = \Gamma_2 r d^n p^{-1}$. Si este conjunto es finito tenemos que existen n_0 y n_1 distintos tal que $\Gamma_2 r d^{n_0} = \Gamma_2 r d^{n_1}$ lo que implica que sería periódico por el flujo geodésico.

También se pueden construir ejemplos en los que todas las órbitas sean densas.

Ejemplo 1.0.5. Sea Γ_2 un grupo cocompacto y Γ_1 un grupo convexo cocompacto dado por

$$\Gamma_1(\phi) = \left\langle \left[\begin{array}{cc} 100 & 0 \\ 0 & 100^{-1} \end{array} \right], R_\phi \left[\begin{array}{cc} 100 & 0 \\ 0 & 100^{-1} \end{array} \right] R_{-\phi} \right\rangle$$

con

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo, para casi todo ϕ cerca de $\pi/4$ ninguna órbita de la dinámica inducida por la acción de $\Gamma_1(\phi)$ a derecha en el $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es finita. Esto se debe a que el flujo geodésico y el flujo geodésico conjugado por R_ϕ no comparten órbitas periódicas para muchos valores de ϕ .

La prueba del Teorema 1.0.1 se basa en una generalización del Teorema de Ratner basada en trabajos recientes de McMuller-Mohammadi-Oh [6] que clasifican clausura de órbitas de la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en cocientes de volumen infinito de ciertos grupos de Lie. Precisamente veremos que el Teorema 1.0.1 se deduce del siguiente resultado

Teorema 1.0.6. Toda órbita por la acción de H a derecha en $\Gamma \backslash G$ es cerrada o densa.

Siendo

$$H = \{(h, h) : h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\},$$

$$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2,$$

$$\Gamma \backslash G = \Gamma_1 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Con el Teorema 1.0.6 y un resultado clásico de acciones de subgrupos en cocientes de subgrupos topológicos, que demostraremos en la Sección 2.1 y que afirma

Proposición 1.0.7. Si H_1 y H_2 son subgrupos de un grupo topológico G y g un elemento de G , entonces son equivalentes:

1. La órbita de gH_2 en G/H_2 por la acción de H_1 a izquierda es densa (resp. cerrada).
2. El conjunto $H_1 g H_2 = \{h_1 g h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ es denso (resp. cerrada) en G .
3. La órbita de $H_1 g$ en $H_1 \backslash G$ por la acción de H_2 a derecha es densa (resp. cerrada).

es fácil demostrar el Teorema 1.0.1.

Demostración del Teorema 1.0.1. Consideremos un elemento $x = \Gamma_2 g$ en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. A menos de conjugar Γ_1 por g^{-1} podemos asumir que $x = \Gamma_2 e$, siendo e la identidad en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Entonces, por la Proposición 2.1.7 sabemos que $\Gamma(e, e)H$ es denso (resp. cerrado) en $\Gamma \backslash G$ si y solo si $\Gamma(e, e)H$ es denso (resp. cerrado) en G/H .

Por otro lado, como el mapa $f: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G/H$ dado por $g \mapsto (g, e)H$ es cerrado y continuo con inversa cerrada continua y $(\Gamma_2 \Gamma_1 \times \{e\})H = (\Gamma_2 \times \Gamma_1)H$ en G/H , tenemos que $\Gamma(e, e)H$ es denso (resp. cerrado) en G/H si y solo si $\Gamma_2 \Gamma_1$ es denso (cerrado) en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Por último, nuevamente por la Proposición 2.1.7 sabemos que $\Gamma_2 \Gamma_1$ es denso (cerrado) en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ si y solo si $\Gamma_2 \Gamma_1$ es denso (resp. cerrado) en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Por último, en el caso que la órbita es cerrada, como Γ_1 es un grupo convexo cocompacto y por lo tanto discreto en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, tenemos que la órbita también es discreta. Luego como Γ_2 es un grupo cocompacto, sabemos que el cociente $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es compacto. Por lo tanto, como la órbita es cerrada y discreta en un compacto, necesariamente es finita. \square

La estrategia para la demostración del Teorema 1.0.6 se basa en, dado un elemento x en $\Gamma \backslash G$, buscar invariancia adicional en la clausura de su órbita asumiendo que esta no es cerrada. Concretamente, si $\overline{xH} \neq xH$, vamos a encontrar un elemento $z = (z_1, z_2)$ en \overline{xH} tal que zU_2^+ esté contenido en \overline{xH} siendo

$$U_2^+ = \{e\} \times U$$

y con U el subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que define el flujo horocíclico en $\Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Es importante observar que la acción de U_2^+ fija la primera coordenada de z y traslada la segunda por el flujo horocíclico futuro. Por un corolario del Teorema de Hedlund (ver Corolario 3.1.5) vamos a demostrar que la órbita futura por el flujo horocíclico es densa en la segunda coordenada, y por lo tanto $\{z_1\} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \overline{zU_2^+} \subset \overline{xH}$. Luego de obtener esta invariancia adicional la demostración del Teorema 1.0.6 es directa, por lo que el trabajo de la monografía se centra principalmente en encontrar este z en las clausuras de las órbitas no cerradas xH .

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Grupos topológicos y acciones de grupos

En esta sección daremos algunas definiciones básicas sobre grupos topológicos y acciones de grupos.

Dado un grupo topológico G y dos subgrupos del mismo H_1 y H_2 , daremos un resultado que relaciona la dinámica inducida por la acción de H_1 en G/H_2 a izquierda, con la inducida por la acción de H_2 en $H_1 \backslash G$ a derecha. Concretamente veremos que la órbita de un elemento gH_2 es densa si y sólo si lo es la órbita de H_1g . Este resultado nos va a permitir estudiar la densidad de las órbitas de una acción en un cociente, estudiando otra dinámica en un espacio donde tengamos mayor conocimiento tanto dinámico como geométrico.

Otro resultado importante que veremos en esta sección, es uno que nos permitirá construir homeomorfismos equivariantes entre espacios topológicos en los que actúa el mismo grupo. Esto también nos será de utilidad para estudiar la dinámica por la acción de grupos en contextos en los que tengamos un mayor entendimiento.

Referimos al lector a la referencia [8] por más información de esto.

Definición 2.1.1. *Un grupo topológico es una terna (G, τ, \cdot) donde:*

1. *El par (G, τ) es un espacio topológico.*
2. *El par (G, \cdot) es un grupo.*
3. *El mapa $G \times G \rightarrow G$ dado por $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ es continuo.*
4. *El mapa de $G \rightarrow G$ dado por $g \mapsto g^{-1}$ es continuo.*

Normalmente notaremos simplemente G a los grupos topológicos dejando implícitos la topología y el producto.

Observación 2.1.2. *Si G es un grupo topológico y g es un elemento de G entonces el mapa $R_g : G \rightarrow G$ dado por $R_g(h) = h \cdot g$ es continuo por ser composición de mapas continuos. En efecto, este mapa es igual a incluir a G en $G \times \{g\}$ considerando a este espacio como subespacio de $G \times G$. Luego incluir a $G \times \{g\}$ en $G \times G$ y finalmente de aplicar el mapa continuo del punto 3 de la Definición 2.1.1.*

Por otro lado, $R_{g^{-1}}$ es la inversa de R_g , por lo que el mapa R_g es un homeomorfismo.

De manera análoga se demuestra que el mapa $L_g : G \rightarrow G$ dado por $L_g(h) = g.h$ también es un homeomorfismo.

Definición 2.1.3. Si G es grupo topológico y H es subgrupo de G entonces la relación

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H : g_1 = g_2 h$$

es una relación de equivalencia en G . Por lo tanto, el conjunto de las clases de equivalencia G/H , es un espacio topológico con la topología cociente, que denominamos cociente de G por H a derecha. Dado g en G denotamos gH su clase de equivalencia. Análogamente se puede definir otra relación de equivalencia

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H : g_1 = h g_2$$

definiendo otro espacio topológico con la topología cociente, que notamos $H \backslash G$ y denominamos cociente de G por H a izquierda. Dado g en G denotamos Hg su clase de equivalencia.

En general los cocientes de grupos por subgrupos no son necesariamente grupos.

Definición 2.1.4. Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G , definimos $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección canónica que a cada elemento de G lo mapea en su clase de equivalencia.

Observar que si U es un abierto de G y $UH := \pi(U)$ su proyección en G/H , entonces $\pi^{-1}(UH)$ es un abierto de G , en efecto:

$$\pi^{-1}(UH) = \bigcup_{h \in H} Uh$$

con $Uh = \{uh : u \in U\} = R_h(U)$. Por la Observación 2.1.2 este conjunto es abierto de G y por definición de topología cociente UH es abierto de G/H . En otras palabras, el mapa π es un mapa abierto.

La definición y observación anteriores son análogas para el cociente a izquierda.

Dado un grupo G y un conjunto X , decimos que G actúa sobre el conjunto X por el mapa $\Phi : G \times X \rightarrow X$ si:

1. Dado un elemento x de X y e el elemento neutro de G , entonces $\Phi(e, x) = x$.
2. Dado un elemento x de X y dos elementos g y h de G , entonces $\Phi(gh, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$.

Usualmente dado g en G y x en X denotaremos $g \cdot x := \Phi(g, x)$ o simplemente gx . Decimos que la acción es transitiva si dados x e y elementos de X , existe un g en G tal que $gx = y$. Si X es un espacio topológico y G es un grupo topológico, decimos que la acción es continua si el mapa Φ lo es.

Dado un elemento x de X , definimos su estabilizador por la acción de G como:

$$G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Por otro lado, definimos su órbita por la acción de G como:

$$Gx = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Observar que dado x en X su estabilizador es un subgrupo de G y su órbita un subconjunto de X . Definimos $f_x : G/G_x \rightarrow X$ el mapa orbital de x dado por $gG_x \mapsto gx$. El mapa está bien definido ya que no depende del representante de la clase elegida y tiene como imagen la órbita de x .

Definición 2.1.5. Dado un grupo G que actúa en un espacio topológico X , decimos que la acción:

1. Defina una dinámica transitiva si existe un elemento x de X tal que la órbita de x por la acción de G es densa en X .
2. Defina una dinámica minimal si para todo elemento x de X , su órbita Gx es densa en X .

Ejemplo 2.1.6. Si H_1 y H_2 son subgrupos de un grupo topológico G , entonces el mapa de $H_1 \times G/H_2 \rightarrow G/H_2$ dado por $(h_1, gH_2) \mapsto h_1gH_2$, define una acción de H_1 en G/H_2 que denominamos acción a izquierda de H_1 en G/H_2 . De manera similar se define la acción a derecha de H_2 en $H_1 \backslash G$ dada por el mapa $(h_2, H_1g) \mapsto H_1gh_2^{-1}$. En la acción a derecha tenemos que colocar el inverso del elemento para que se cumpla la definición de acción.

Proposición 2.1.7. Si H_1 y H_2 son subgrupos de un grupo topológico G y g un elemento de G , entonces son equivalentes:

1. La órbita de gH_2 en G/H_2 por la acción de H_1 a izquierda es densa.
2. El conjunto $H_1gH_2 = \{h_1gh_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ es denso en G .
3. La órbita de H_1g en $H_1 \backslash G$ por la acción de H_2 a derecha es densa.

Demostración. 1 \Rightarrow 2) Sea U un abierto de G . Por la Observación 2.1.4 sabemos que $\pi(U) = UH_2$ la proyección de U en G/H_2 es abierto. Como la órbita de gH_2 es densa en G/H_2 , entonces existe h_1 en H_1 tal que $h_1 \cdot gH_2$ pertenece a UH_2 . Esto implica que existe h_2 en H_2 tal que h_1gh_2 se mapea por π en un elemento de UH y por lo tanto h_1gh_2 pertenece a $\pi^{-1}(UH) = \bigcup_{h \in H} Uh$. Consecuentemente existe un h en H_2 tal que h_1gh_2 pertenece a Uh y por lo tanto $h_1gh_2h^{-1}$ en U . Esto demuestra la densidad de H_1gH_2 en G .

2 \Rightarrow 1) Como el conjunto H_1gH_2 es denso en G se tiene que $\pi(H_1gH_2)$ es denso en G/H_2 . Como este conjunto es exactamente la órbita de gH_2 en G/H_2 por la acción de H_1 a izquierda, esto demuestra la implicación.

2 \Leftrightarrow 3) Se demuestra análogamente a las partes anteriores. □

Definición 2.1.8. Dados dos espacios topológicos X e Y y un grupo G que actúa sobre ambos, una función $f : X \rightarrow Y$ se dice G -equivariante si se comporta bien con la acción de G , es decir

$$g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$$

para todo x en X y todo g en G .

Proposición 2.1.9. Si G es un grupo que actúa en un conjunto X de manera transitiva y x es un elemento de X , entonces el mapa orbital $f_x : G/G_x \rightarrow X$ dado por $gG_x \mapsto gx$ es una biyección G -equivariante. Más aún, si G es grupo topológico con numerables componentes conexas que actúa de manera continua y X es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto entonces el mapa es un homeomorfismo.

Demostración. Primero veamos que el mapa orbital es biyectivo. Dado que la acción de G en X es transitiva, se tiene que dado un elemento y de X , existe un elemento g_y en G tal que $y = g_y \cdot x$.

Consecuentemente $f_x(g_y \cdot G_x) = g_y \cdot x = y$, lo que demuestra la sobreyectividad del mapa. Por otro lado, consideremos dos elementos g_1G_x y g_2G_x de G/G_x tales que $f_x(g_1G_x) = f_x(g_2G_x)$. Como la imagen de estos elementos por el mapa orbital de x coincide, se tiene que $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ y por lo tanto $g_2^{-1}g_1 = g \in G_x$. De esto se concluye que $g_1 = g_2g$ y por lo tanto $g_1G_x = g_2G_x$ lo que demuestra la inyectividad del mapa.

La G -equivarianza del mapa se deduce de manera directa, en efecto:

$$f_x(g \cdot hG_x) = f_x(ghG_x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot f_x(hG_x)$$

siendo g y h elementos de G .

Veamos ahora la continuidad del mapa orbital. Para ver la continuidad de f_x basta con probar la continuidad del mapa $\hat{f}_x : G \rightarrow X$ dado por $g \mapsto g \cdot x$. En efecto, si $\pi : G \rightarrow G/G_x$ es la proyección canónica y U es un abierto de X , entonces $\pi \hat{f}_x^{-1}(U) = f_x^{-1}(U)$. Como π es un mapa abierto, si $\hat{f}_x^{-1}(U)$ es un abierto de G , entonces $f_x^{-1}(U)$ es un abierto de G/G_x .

Para ver que $\hat{f}_x^{-1}(U)$ es abierto utilizaremos únicamente la hipótesis de continuidad de la acción de G . Esto significa que el mapa que define la acción $\Phi : G \times X \rightarrow X$ es continuo y por lo tanto $\Phi^{-1}(U)$ es abierto de $G \times X$ en la topología producto. De esto se deduce que $U_x = \Phi^{-1}(U) \cap G \times \{x\}$ es un abierto de $G \times \{x\}$ con la topología heredada de $G \times X$.

Por otro lado, el mapa $\iota : G \times \{x\} \rightarrow G$ dado por $(g, x) \mapsto g$ es un homeomorfismo de espacios topológicos y por lo tanto, como U_x es un abierto de $G \times \{x\}$, entonces $\iota(U_x)$ es un abierto de G . Por último, notando que $\hat{f}_x^{-1}(U) = \iota(U_x)$ obtenemos el resultado que buscábamos.

□

Que el mapa sea un homeomorfismo lo demostraremos únicamente en los casos con los que trabajaremos en las Secciones 2.2, 3.1 y 3.2. Para ver la demostración general de este teorema se puede ver la referencia [8].

Si G es un grupo topológico que actúa en un espacio topológico X y x es un elemento de X , entonces G actúa en la órbita de x transitivamente, por lo que estamos en las hipótesis de la Proposición 2.1.9. Además si X es de Hausdorff, localmente compacto y la órbita de x es cerrada, entonces la órbita de x es de Hausdorff y localmente compacta. En este caso podemos aplicar la Proposición 2.1.9 a la restricción de la acción a Gx .

Ejemplo 2.1.10. Sea $G = \mathbb{Z}$ grupo aditivo, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ espacio topológico con la topología cociente inducida por la topología usual de \mathbb{R} y un número irracional α . El grupo G actúa en \mathbb{S}^1 mediante:

$$n \cdot x = x + \alpha n$$

Consideremos $X = \{n \cdot 1 : n \in G\} \subset \mathbb{S}^1$ con la topología inducida por \mathbb{S}^1 . Si restringimos la acción de G a X , entonces G actúa transitivamente y por Proposición 2.1.9 el mapa de G/G_1 a X es una biyección, continua y G -equivariante. Por otro lado X no es localmente compacto y el mapa no es abierto.

2.2. Geometría hiperbólica

Definiremos en esta sección el plano hiperbólico y identificaremos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ como su grupo de isometrías que preservan la orientación. Dado que en este trabajo vamos a estudiar la dinámica inducida por la acción de subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por otros subgrupos, en esta sección estudiaremos la estructura geométrica del plano hiperbólico, además de caracterizar a los elementos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y dar una noción geométrica de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ como grupo topológico. Un resultado importante que vamos a ver en esta sección es la caracterización geométrica de los elementos hiperbólicos 2.2.17. Estos elementos tendrán un rol destacado en este trabajo ya que estudiaremos grupos cocompactos y convexos cocompactos. Una característica importante de estos grupos es que todos sus elementos distintos de la identidad son hiperbólicos.

Esta sección se basa fuertemente en el libro "Fuchsians Grups" de Svetlana Katok [5].

Plano hiperbólico

Sea \mathbb{H} el semiplano superior de \mathbb{C} , es decir

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Observar que \mathbb{H} es una variedad de dimensión dos con una parametrización global dada por el mapa $(x, y) \mapsto x + iy$ con (x, y) en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ abierto de \mathbb{R}^2 . Podemos darle a \mathbb{H} una estructura de variedad Riemmaniana definiendo un producto interno en $T_z\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^2$ para todo $z = x + iy \in \mathbb{H}$ dado por

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle,$$

siendo $\langle v, w \rangle$ el producto interno usual en \mathbb{R}^2 . Observar que este producto está definido para todo z en \mathbb{H} y varía diferenciablemente si variamos z . Observar que en $T_z\mathbb{H}$ podemos definir una norma inducida por el producto interno dada por

$$\|v\|_z = \langle v, v \rangle_z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{y} \|v\|,$$

siendo $\|v\|$ la norma inducida por el producto interno usual en \mathbb{R}^2 .

Es claro que \mathbb{H} no es una variedad compacta. La compactificación que vamos a usar sera extendiendo el conjunto \mathbb{H} agregándole su borde $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y extendiendo su topología. Dado un elemento z en \mathbb{R} agregaremos una base de entornos dadas por las bolas euclidianas de \mathbb{C} centradas en z restringidas a \mathbb{H} y para ∞ definimos una base de entornos como el complemento de bolas euclídeas compactas de centro cero restringidas a \mathbb{H} . Con esta extensión de la topología de \mathbb{H} tenemos que la clausura de \mathbb{H} es topológicamente homomorfo a un disco compacto y su borde es topológicamente homomorfo a \mathbb{S}^1 .

Definición 2.2.1. Dado un intervalo I de \mathbb{R} y una curva suave $\phi : I \rightarrow \mathbb{H}$ definimos su longitud como

$$h(\phi) = \int_I \|\phi'(t)\|_{\phi(t)} dt = \int_I \frac{1}{y(t)} \|\phi'(t)\| dt,$$

siendo $y(t)$ la parte imaginaria de $\phi(t)$.

Observar que esta definición se puede extender a curvas suaves a trozos integrando en los intervalos donde la derivada está definida.

Definición 2.2.2. Dados dos puntos z_1 y z_2 en \mathbb{H} definimos la distancia hiperbólica entre ellos, que denotamos $d(z_1, z_2)$, como el ínfimo de las longitudes de las curvas suaves a trozos definidas en un intervalo cerrado $[t_1, t_2]$ tal que la imagen de t_i por la curva es z_i para $i = 1, 2$.

Observar que esta definición cumple la propiedad de ser una distancia completa en \mathbb{H} .

Definición 2.2.3. Decimos que un difeomorfismo $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es una isometría si preserva la métrica en \mathbb{H} , es decir, si para todo z en \mathbb{H} se cumple que el diferencial de f en z , $df_z : T_z\mathbb{H} \rightarrow T_{f(z)}\mathbb{H}$, satisface,

$$\langle df_z(v), df_z(w) \rangle_{f(z)} = \langle v, w \rangle_z,$$

para todo v, w en $T_z\mathbb{H}$. Equivalentemente,

$$d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$$

para todo z_1 y z_2 en \mathbb{H} .

Definición 2.2.4. Dado $z = x + iy$ en \mathbb{H} y dos vectores v y w en $T_z\mathbb{H}$, definimos el coseno del ángulo ϕ entre los vectores como:

$$\cos(\phi) = \frac{\langle v, w \rangle_z}{\|v\|_z \|w\|_z} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Esto implica que las nociones de ángulos para la métrica hiperbólica y la métrica euclídea son la misma.

Transformaciones de Moebius

Consideremos el conjunto

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

de las matrices de determinante igual a uno, de tamaño 2×2 y con coeficientes reales. A este conjunto lo podemos equipar con una estructura de grupos dada por el producto matricial y una estructura topológica dada por la topología usual de \mathbb{R}^4 considerando sus coordenadas.

Por otro lado, consideremos el conjunto

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

de las transformaciones que denominaremos de Moebius. A este conjunto lo podemos equipar con una estructura de grupo dada por la composición de funciones y una estructura topológica heredada de la topología usual en \mathbb{R}^4 de igual manera que hicimos con $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Este conjunto está bien definido ya que dada una transformación T en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y un punto $z = x + iy$ en \mathbb{H} , entonces la parte imaginaria de $T(z)$ es de la forma $\frac{y}{|cz+d|^2} > 0$.

Observar que el mapa de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que mapea la matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en la transformación T definida por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es un morfismo sobreyectivo y continuo de grupos. Además si g se mapea en T también lo hace $-g$. De manera más general, el núcleo de este mapa está dado por el grupo $\{e, -e\}$ donde e es la matriz identidad. De esto se deduce que el grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es isomorfo como grupo a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{e, -e\}$. Es importante observar que las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se extienden de manera continua a $\partial\mathbb{H}$, de hecho dado $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ si consideramos a $T : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$ entonces este mapa es un difeomorfismo.

Como existe la identificación entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y el cociente de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mencionado arriba, a la transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dada por $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ la denotaremos

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Definición 2.2.5. *Definimos el mapa traza, $tr : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$tr \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = |a + d|.$$

Observar que cada transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tiene exactamente dos matrices asociadas, $\pm g$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Como $tr(-g) = -tr(g)$ y el mapa que definimos mapea a g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en el valor de la traza de su matriz asociada, el mapa traza está bien definido.

Definición 2.2.6. *Dada una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ distinta de la identidad decimos que:*

- *La transformación g es elíptica si $tr(g) < 2$.*
- *La transformación g es parabólica si $tr(g) = 2$.*
- *La transformación g es hiperbólica si $tr(g) > 2$.*

Alternativamente tenemos la siguiente caracterización geométrica.

Dada la transformación

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, si z en $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ es un punto fijo por g , es decir $g(z) = z$, si y solo si

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{tr(T)^2 - 4}}{2c}.$$

Es importante enfatizar que $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Por lo que si g es una transformación elíptica, entonces únicamente existe un z en \mathbb{H} fijo por g . Si es parabólica, únicamente existe un punto fijo en el borde de \mathbb{H} y si es hiperbólica, existen exactamente dos puntos fijos en el borde de \mathbb{H} . Un corolario inmediato de esto es que si una transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ fija tres puntos, entonces necesariamente es la identidad.

Observación 2.2.7. *Las transformaciones del tipo $z \mapsto -(z)^{-1}$, $z \mapsto \alpha z$ y del tipo $z \mapsto z + \beta$ pertenecen a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ para todo α mayor que cero y β real.*

Proposición 2.2.8. *El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ está contenido en el grupo de isometrías de \mathbb{H} .*

Demostración. Sea g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que dado un $z = x + iy$ en \mathbb{H} lo mapea en $\frac{az+b}{cz+d}$, sabemos que su diferencial $d_z g : T_z \mathbb{H} \rightarrow T_{T(z)} \mathbb{H}$ va a mapear un vector v en el vector $\frac{v}{(cz+d)^2}$. Entonces dados $v, w \in T_z \mathbb{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle dT_z(v), dT_z(w) \rangle_{T(z)} &= \frac{1}{\mathrm{Im}(T(z))^2} \left\langle \frac{v}{(cz+d)^2}, \frac{w}{(cz+d)^2} \right\rangle \\ &= \frac{|cz+d|^4}{y^2} \left\langle \frac{v}{(cz+d)^2}, \frac{w}{(cz+d)^2} \right\rangle = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_z, \end{aligned}$$

lo que prueba la proposición. \square

Geodésicas del plano hiperbólico

Definición 2.2.9. Decimos que un mapa suave $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ es una geodésica de \mathbb{H} si está parametrizada por longitud de arco y la restricción de la curva a un intervalo cerrado es una curva que realiza la distancia entre las imágenes de los extremos del mismo. Es decir, dados $t_1 < t_2$ dos números reales, se cumple que:

$$t_2 - t_1 = d(\phi(t_1), \phi(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\mathrm{Im}(\phi(t))} \|\phi'(t)\| dt = h(\phi|_{[t_1, t_2]})$$

En algunos casos llamaremos geodésica a la imagen de una geodésica.

Definición 2.2.10. Dados dos puntos distintos z_1 y z_2 en \mathbb{H} decimos que una curva que los une es un segmento geodésico si existe una geodésica que lo contenga en su imagen. A este segmento lo denotaremos $[z_1, z_2]$.

Dado un punto z en \mathbb{H} y un punto ξ en el borde de \mathbb{H} decimos que una curva ϕ definida en $[0, \infty)$ es un rayo geodésico de z a ξ si su imagen está contenida en una geodésica, $\phi(0) = z$ y $\phi(t)$ tiende a ξ cuando t tiende a infinito.

Observación 2.2.11. Como las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías, mapean geodésicas en geodésicas.

Proposición 2.2.12. La curva $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ definida por $\phi(t) = ie^t$ es una geodésica.

Demostración. Sean $t_1 < t_2$ dos números reales distintos, veamos que se cumplen las condiciones que definen una geodésica,

$$h(\phi|_{[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\mathrm{Im}(\phi(t))} \|\phi'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{e^t} \|ie^t\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1.$$

Para terminar resta ver que la distancia hiperbólica entre $e^{t_1}i$ y $e^{t_2}i$ es $t_2 - t_1$. Sea $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva suave a trozos tal que $\gamma(s_j) = e^{t_j}i$ con $j = 1, 2$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Entonces

$$h(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{y(t)} \|\gamma'(t)\| dt \leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{y(t)} |y'(t)| dt \leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{y'(t)}{y(t)} dt \leq \int_{e^{t_1}}^{e^{t_2}} \frac{dt}{t} = t_2 - t_1,$$

lo que demuestra la proposición. \square

Observación 2.2.13. *De esta demostración se deduce que, dados dos puntos distintos sobre el eje imaginario, el semieje que los une es el único posible segmento geodésico que los conecta. De manera más general, dados dos puntos distintos sobre el eje imaginario, la única geodésica que los contiene es el eje imaginario.*

Proposición 2.2.14. *Dada una semirrecta o arco de circunferencia en \mathbb{H} perpendicular al eje real y que tienen sus extremos sobre el mismo, existe una transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que lo mapea en el eje imaginario.*

Demostración. Dada una semirrecta L_1 en \mathbb{H} perpendicular al eje real y que se encuentra con el mismo en el punto α en \mathbb{R} , la transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forma $z \mapsto z - \alpha$ la mapea en el eje imaginario. Además si L_2 es un arco de circunferencia en \mathbb{H} perpendicular al eje real con uno de sus extremos en el punto β en \mathbb{R} , la transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forma $z \mapsto -(z - \beta)^{-1}$ la mapea en un segmento de la forma de L_1 , lo que demuestra la proposición. \square

Corolario 2.2.15. *Las geodésicas de \mathbb{H} son semirrectas o arcos de circunferencias perpendiculares al eje real.*

Demostración. Consideremos z_1 y z_2 dos puntos en \mathbb{H} y consideremos a L la única semirrecta o arco de circunferencia perpendicular al eje real que los contiene. Por la Proposición 2.2 existe una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que mapea a L en el eje imaginario. Por la Observación 2.2.13 sabemos que el único segmento geodésico entre $g(z_1)$ y $g(z_2)$ es el segmento del eje imaginario que los une. Además sabemos que las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mapean geodésicas en geodésicas por ser isometrías, lo que demuestra el corolario. \square

Dados dos puntos distintos de \mathbb{H} , existe una única geodésica que los contiene. En efecto, dados dos puntos distintos en \mathbb{H} existe una única semirrecta o arco de circunferencia perpendicular al eje real que pase por ellos.

De igual manera, dado un punto z de \mathbb{H} y un vector v en el tangente a \mathbb{H} por z , existe una única geodésica por z , cuya velocidad en el punto es v .

Proposición 2.2.16. *El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es un subgrupo de las isometrías de \mathbb{H} de índice dos. Más aún, es el subgrupo de las isometrías de \mathbb{H} que preservan la orientación.*

Demostración. Sea ϕ una isometría de \mathbb{H} y sea I la parte del eje imaginario contenida en \mathbb{H} . Como ϕ es una isometría, mapea geodésicas en geodésicas. Como I es una geodésica, se tiene que $\phi(I)$ es una geodésica. Por la Proposición 2.2.14 sabemos que existe una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que mapea a $\phi(I)$ en I . Además, a menos de componer con transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ del tipo $z \mapsto \frac{-1}{z}$ o $z \mapsto \alpha z$ con α real positivo, podemos asumir que $g\phi$ mapea i en i y 0 en 0 . De esto se deduce que para todo z en \mathbb{H} y para todo t real positivo, se cumple que

$$d(z, it) = d(g\phi(z), g\phi(it)) = d(g\phi(z), it).$$

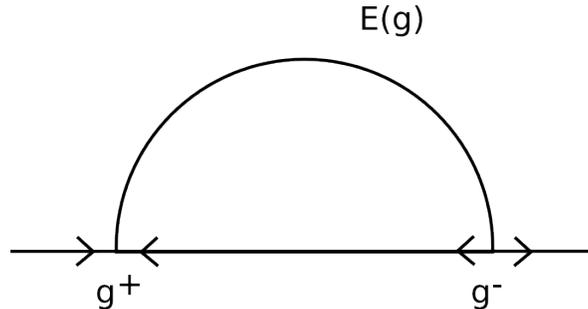
Como esto se cumple para todo t , necesariamente $g\phi(z)$ es igual a z o \bar{z} siendo siempre el mismo caso para todos los z de \mathbb{H} por ser $g\phi$ una isometría. Si $g\phi(z) = z$, entonces $\phi = g^{-1}$ es un elemento de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Si $g\phi(z) = \bar{z}$, entonces $\phi = fg^{-1}$ siendo f el mapa dado por $z \mapsto -\bar{z}$. Consecuentemente ϕ pertenece al conjunto $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^- = \{fg : g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\}$. Para ver que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es un grupo de índice dos solamente resta ver que f no pertenece a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Esto se deduce del hecho de que f no preserva

orientación, mientras que toda transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sí lo hace. De esta observación también se deduce que todas las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^-$ no preservan orientación, lo que demuestra la proposición. \square

Caracterización geométrica de las transformaciones hiperbólicas

Dada una transformación hiperbólica g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, vimos que fija exactamente dos puntos en $\partial\mathbb{H}$. Como las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se extienden continuamente al borde de \mathbb{H} y mapean geodésicas en geodésicas, entonces g mapea la única geodésica con extremos en sus puntos fijos en sí misma. De hecho, será la única geodésica invariante, de lo contrario g fijaría al menos tres puntos, lo cual es una contradicción. Por otro lado, como g no fija puntos en \mathbb{H} como vimos luego de la Definición 2.2.6, g restringida a esta geodésica define un sistema dinámico sin puntos fijos, por lo que uno de los puntos fijos en el borde es atractor y el otro repulsor de esta dinámica. De hecho, si vemos la dinámica que g induce en el borde de \mathbb{H} , que es topológicamente \mathbb{S}^1 , esta es una dinámica con dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor, que coincide con los atractores y repulsores de la dinámica de g restringida a la geodésica que fija.

Definición 2.2.17. *Sea g una transformación hiperbólica de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Definimos su eje, que denotamos $E(g)$, como la única geodésica invariante por g . Definimos el atractor y repulsor de g que denotamos g^+ (resp. g^-), como el único punto que fija g en el borde y es atractor (resp. repulsor) de la dinámica de g restricto al borde.*



Tangente unitario del plano hiperbólico

Definición 2.2.18. *Definimos el fibrado tangente unitario de \mathbb{H} como*

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) : z \in \mathbb{H}, v \in T_z\mathbb{H}, \|v\|_z = 1\}.$$

Observar que $T^1\mathbb{H}$ es una variedad homeomorfa a $\mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$ por el mapa $(z, v) \mapsto (z, \frac{1}{y}v)$ siendo y la parte imaginaria de z .

Proposición 2.2.19. *El grupo topológico $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es homeomorfo al tangente unitario de \mathbb{H} .*

Demostración. El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ actúa en $T^1\mathbb{H}$ mediante

$$g \cdot (z, v) = (g(z), dg_z(v)).$$

Como las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías de \mathbb{H} , la acción está bien definida. Veamos que esta acción es continua y transitiva. Para la transitividad es suficiente ver que dado (z, v) en $T^1\mathbb{H}$

existe una transformación g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que $g \cdot (i, i) = (z, v)$. Ya vimos que las geodésicas de \mathbb{H} son semirrectas y semicírculos perpendiculares al eje real, por lo que dado un (z, v) en $T^1\mathbb{H}$ existe una geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma'(0) = v$. También, por la Proposición 2.2.14, sabemos que existe una transformación g_1 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que mapea a γ en el eje imaginario. Esto implica que existe un real positivo a tal que $g_1 \cdot (z, v) = (ia, ia)$. Notar que la transformación g_2 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dada por $z \mapsto az$ cumple que $g_2 \cdot (i, i) = (ia, ia)$. Se deduce que $g_1^{-1}g_2 \cdot (i, i) = (z, v)$.

Que la acción es continua es directo del hecho de que dada una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dada por $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ y un (z, v) en $T^1\mathbb{H}$, tenemos que $g \cdot (z, v) = (g(z), dg_z(v)) = (\frac{az+b}{cz+d}, \frac{1}{(cz+d)^2}v)$.

Por la Proposición 2.1.9 podemos afirmar entonces que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $T^1\mathbb{H}$. En efecto, el estabilizador de (i, i) es $\{e\}$ siendo e la identidad en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. \square

Proposición 2.2.20. *Dada una transformación g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, g se puede factorizar en tres transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de forma que*

$$g = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Demostración. Dada una transformación g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, g mapea a i en un punto $z = x + iy$ de \mathbb{H} . Consideremos la transformaciones u y a de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$u = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces que $au(z) = i$ y consecuentemente $aug \cdot (i, i) = (i, v)$. Si ϕ es el ángulo entre v e i en el tangente de \mathbb{H} en i y consideramos la transformación k de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$k = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sen(\phi) \\ \sen(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

tenemos que $kaug \cdot (i, i) = (i, i)$. De esto se deduce que kau es el inverso de g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y consecuentemente

$$g = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sen(\phi) \\ -\sen(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

\square

Disco unitario

Veamos ahora un modelo isométrico al plano hiperbólico que denominaremos el modelo del disco unitario. En el modelo del plano hiperbólico teníamos como elemento destacado un punto en el borde que era el infinito. Como vimos en esta sección, a menos de conjugar el grupo con el que estemos trabajando, siempre que quisiéramos destacar un punto en el borde, podíamos considerar que este punto era el infinito. En el modelo del disco, vamos a poder destacar un punto en el interior del espacio métrico.

Sea \mathbb{U} el disco de centro cero y radio uno de \mathbb{C} , es decir

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

De igual manera que en \mathbb{H} , \mathbb{U} es una variedad de dimensión dos con una parametrización global. Por otro lado, el mapa $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}$ dado por $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$, es un biyección, por lo que induce una estructura de variedad Riemmaniana en \mathbb{U} , dada por:

$$\langle v, w \rangle_z = \langle df_z^{-1}(v), df_z^{-1}(w) \rangle_{f^{-1}(z)} = \frac{1}{1 - |z|^2} \langle v, w \rangle,$$

con z un punto de \mathbb{U} y v, w vectores de $T_z\mathbb{U}$ el tangente de \mathbb{U} en z .

Al igual que \mathbb{H} , \mathbb{U} no es una variedad compacta, para compactificarlo es necesario agregar su borde $\partial\mathbb{U}$ y extender su topología. Si consideramos a \mathbb{U} como un subconjunto de \mathbb{C} , su borde es \mathbb{S}^1 . Si extendemos la topología agregando para cada punto z en \mathbb{S}^1 una base de entornos dada por bolas euclídeas de centro z intersectadas con \mathbb{U} ya tendremos una compactificación de \mathbb{U} . La compactificación que hicimos de \mathbb{H} se mapea en esta por el mapa f .

Por construcción, el mapa f es una isometría entre \mathbb{H} y \mathbb{U} . De esto se concluye que las isometrías de \mathbb{U} que preservan la orientación son $f^*(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) = \{fgf^{-1} : g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\}$ y las geodésicas de \mathbb{U} son las imágenes por f de las geodésicas de \mathbb{H} . De esto se deduce que el diámetro de i a $-i$ es una geodésica de \mathbb{U} , ya que es la imagen del eje imaginario por f , que sabemos que es una geodésica de \mathbb{H} . Por razonamientos análogos a los usados en el estudio las geodésicas de \mathbb{H} , podemos concluir que las geodésicas de \mathbb{U} son diámetros y arcos de circunferencia perpendiculares al borde de \mathbb{U} .

2.3. Grupos Fuchsianos

En este trabajo vamos a estudiar acciones de subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por otros subgrupos. Una característica que le vamos a pedir a los subgrupos por los cuales actuaremos y cocientaremos en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es que sean subconjuntos discretos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Vamos a ver que esta definición es equivalente a que los subgrupos actúen propiamente discontinua en \mathbb{H} . Esto nos va a dar una noción de la dinámica que éstos inducen en \mathbb{H} y consecuentemente en los cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Además vamos a estudiar cómo son los puntos de acumulación de las órbitas por las acciones de estos subgrupos en \mathbb{H} . Esto nos va a permitir estudiar y deducir propiedades de los grupos cocompactos y convexos cocompactos, que son centrales en este trabajo.

Al igual que la Sección 2.2, esta se basa fuertemente en el libro "Fuchsians Grups" de Svetlana Katok [5].

Grupos discretos y acción propiamente discontinua

Definición 2.3.1. *Un subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se dice Fuchsiano si es discreto.*

Recordar que a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ lo habíamos equipado con la topología heredada de \mathbb{R}^4 , por lo que cuando decimos que un subgrupo es discreto nos referimos respecto a esta topología. Es decir, un subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es discreto si para todo elemento de Γ existe un entorno del elemento en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que no contiene a otro elemento de Γ .

Equivalentemente, Γ es Fuchsiano si dada una sucesión de transformaciones $\{g_n\}$ en Γ que convergen a la identidad, a partir de un n se tiene que $g_n = e$ siendo e la identidad en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En efecto, si

existiese una sucesión de este tipo de elementos de Γ , es claro que el grupo no sería discreto, ya que la identidad es un elemento de Γ y el grupo no sería discreto. Recíprocamente, si suponemos que Γ no es discreto, entonces existe un elemento g en Γ y una sucesión $\{g_n\}$ de elementos distintos entre sí y a g en Γ que converja a g . Esto lleva a una contradicción ya que $\{g_n g^{-1}\}$ sería una sucesión de elementos distintos de la identidad en Γ que converge a la identidad.

Definición 2.3.2. *Sea X un espacio métrico, una familia $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ contenida en X es localmente finita si para todo K en X compacto, se cumple que $x_\alpha \in K$ solamente para finitos α en A .*

Definición 2.3.3. *Sea X un espacio métrico, un grupo G de isometrías de X actúa en X propiamente discontinua si para todo x en X su órbita por la acción Gx , como familia indexada en G , es localmente finita. Es decir, para todo compacto K de X y para todo x en X la cantidad de elementos g de G tal que gx pertenece a K es finita.*

Observar que dado un espacio métrico X y G un grupo de isometrías de X , si el grupo G actúa propiamente discontinua en X entonces para todo x en X el cardinal de su estabilizador es finito, ya que si vemos a Gx como familia indexada en G , sus elementos se repiten tantas veces como el cardinal del estabilizador de x . Además, la órbita es discreta.

El objetivo ahora es ver que un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y solo si actúa propiamente discontinua.

Lema 2.3.4. *Dado un elemento z_0 de \mathbb{H} y un subconjunto compacto K de \mathbb{H} , el conjunto*

$$E = \{g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) : g(z_0) \in K\}$$

es compacto.

Demostración. Como $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm e\}$ existe una proyección canónica $\pi : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ continua. Por lo que si definimos $E' = \pi^{-1}(E)$ y probamos que E' es compacto, entonces E también lo es, ya que $E = \pi(E')$. Como la topología de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ es la heredada de \mathbb{R}^4 , para probar la compacidad de E' basta con ver que el conjunto de las coordenadas de sus elementos es cerrado y acotado en \mathbb{R}^4 .

Para ver que E' es un conjunto cerrado consideremos el mapa continuo $\beta : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}$ dado por $g \mapsto \pi(g)(z_0)$. Como K es un compacto de \mathbb{H} con la topología inducida por la métrica hiperbólica que coincide con la inducida por la euclidiana, K es un conjunto cerrado. Por lo tanto, como $E' = \beta^{-1}(K)$ se puede concluir que es un conjunto cerrado.

Por otro lado, como K es compacto, sabemos que existen m_1 y m_2 reales positivos tales que $|z| \leq m_1$ y $m_2 \leq \text{Im}(z)$ para todo z en K . De lo contrario podríamos construir una sucesión en K sin subsucesiones convergentes. Consecuentemente si $z_0 = x + iy$, como $E' = \beta^{-1}(K)$, si consideramos a

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un elemento de E' tenemos que:

$$\begin{cases} c^2 y^2 + (cx + d)^2 = |cz_0 + d|^2 \leq \frac{y}{m_2} \\ a^2 y^2 + (ax + b)^2 = |az_0 + b|^2 \leq m_1^2 \frac{y}{m_2} \end{cases}$$

Ya que la parte imaginaria de $\beta(g)$ es igual a $\frac{y}{|cz_0+d|^2}$. Esto permite concluir que las coordenadas de los elementos de E' están acotadas y por lo tanto E' es compacto. \square

Lema 2.3.5. *Sea Γ un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, si Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} y p en \mathbb{H} es fijo para algún elemento de Γ , entonces existe un entorno abierto W contenido en \mathbb{H} de p tal que para todo punto distinto de p en W no es fijo para ningún elemento de Γ .*

Demostración. Sea g una transformación de Γ que fija p , es decir $g(p) = p$. Supongamos que para todo entorno abierto de p existe un punto distinto de p en el entorno y una transformación de Γ que fija ese punto. Esta suposición nos permite construir una sucesión de puntos $\{p_n\}$ en \mathbb{H} que convergen a p y una sucesión de transformaciones $\{g_n\}$ en Γ tal que $g_n(p_n) = p_n$. Consideremos el compacto $K = \overline{B}(p, 3\epsilon)$ la clausura de la bola hiperbólica de centro p y radio 3ϵ . Como Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} tenemos que Γp la órbita de p interseca finitas veces K . Consecuentemente para un N suficientemente grande $g_n(p)$ no va a pertenecer a K para todo n mayor que N . De manera equivalente $d(g_n(p), p) > 3\epsilon$ para todo $n > N$. Por otro lado, como p_n tiende a p , se puede considerar N suficientemente grande para que $d(p_n, p) < \epsilon$ para todo n mayor que N y por lo tanto

$$3\epsilon < d(g_n(p), p) \leq d(g_n(p), p_n) + d(p_n, p) = d(g_n(p), g_n(p_n)) + d(p_n, p) = d(p, p_n) + d(p_n, p) < 2\epsilon,$$

lo cual es una contradicción. \square

Teorema 2.3.6. *Sea Γ un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. El grupo Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} si y sólo si Γ es Fuchsiano.*

Demostración. Primero veamos que si Γ es Fuchsiano entonces actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} . Para eso consideremos un punto z y un compacto K en \mathbb{H} y veamos que Γz la órbita de z interseca finitas veces K como familia indexada en Γ . Si consideramos el conjunto $E = \{g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) : g(z) \in K\}$, por el Lema 2.3.4 sabemos que E es un conjunto compacto de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Luego, notando que $\#\Gamma z \cap K = \#E \cap \Gamma$ y por lo tanto la intersección de un compacto y un discreto, podemos concluir la órbita de z interseca finitas veces K .

Veamos ahora que si Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} entonces es Fuchsiano. Para eso supongamos por absurdo que Γ no es discreto, equivalentemente supongamos que existe una sucesión de transformaciones $\{g_n\}$ contenida en Γ distintas entre sí y a la identidad, que convergen a la identidad. Por Lema 2.3.5 podemos encontrar un z en \mathbb{H} no fijo para todo elemento distinto de la identidad de Γ . Tenemos entonces que la sucesión $\{g_n(z)\}$ converge a z y por lo tanto, en toda bola compacta centrada en z hay infinitos puntos de la órbita de z , lo que contradice que Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} . \square

Corolario 2.3.7. *Sea Γ un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. El grupo Γ es Fuchsiano si y sólo si para todo z en \mathbb{H} su órbita Γz es discreta en \mathbb{H} .*

Demostración. Si Γ es Fuchsiano, por el Teorema 2.3.6, el grupo Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} y por lo tanto, dado un z en \mathbb{H} su órbita es localmente finita. De esto se deduce de manera directa que Γz es un conjunto discreto.

Recíprocamente, supongamos por absurdo que Γ no es discreto. Repitiendo los argumentos de la demostración del Teorema 2.3.6, podemos encontrar un z en \mathbb{H} y una sucesión de transformaciones distintas $\{g_n\}$ en Γ tal que $g_n(z)$ converge a z . De esto se deduce de manera directa que Γz no un conjunto discreto, lo que es una contradicción. \square

Corolario 2.3.8. Sea Γ un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Si Γ es un grupo Fuchsiano entonces los puntos fijos de los elementos elípticos de Γ no acumulan en \mathbb{H} .

Demostración. Supongamos que existe una sucesión de transformaciones elípticas distintas $\{g_n\}$ en Γ con puntos fijos $\{z_n\}$ respectivamente que convergen a un punto z en \mathbb{H} . Esto implica que para un N suficientemente grande se cumple que $d(z_n, z) < \epsilon$ para todo n mayor que N . Luego, como las transformaciones de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías, se cumple que

$$d(g_n(z), z) \leq d(g_n(z), g_n(z_n)) + d(g_n(z_n), z) = 2d(z, z_n) < 2\epsilon$$

para todo n mayor que N . Si consideramos $K = \overline{B(z, 2\epsilon)}$ la clausura de la bola de centro z y radio 2ϵ , tenemos que Γz intersecta a K infinitas. Esto es una contradicción ya que por el Teorema 2.3.6 Γ actúa propiamente discontinua. en \mathbb{H} . \square

Región fundamental y región de Dirichlet

Definición 2.3.9. Dado un espacio métrico X y subgrupo G de isometrías de X , decimos que un subconjunto cerrado F de X es una región fundamental de G si:

1. Se cumple que $\bigcup_{g \in G} g(F) = X$.
2. Se cumple que $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset$ para todo g en G distinto de la identidad.

Equivalentemente, F es una región fundamental si contiene un elemento de cada órbita de la acción de G en X y a lo sumo un elemento de cada órbita en su interior.

Decimos que la familia $\{g(F) : g \in G\}$ es una teselación de X .

Teorema 2.3.10. Sea Γ un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ y F_1 y F_2 dos regiones fundamentales de Γ . Si $\mu(F_1)$ el área de F_1 es finita y $\mu(\partial F_1) = \mu(\partial F_2) = 0$ entonces $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

Demostración. Como la medida de los bordes de ambas regiones es nulo, si notamos por \mathring{F}_i al interior de F_i , se tiene que $\mu(F_i) = \mu(\mathring{F}_i)$, con $i = 1, 2$.

Como la familia $\{g(F_2) : g \in \Gamma\}$ es una teselación de \mathbb{H} se tiene que

$$F_1 \supseteq F_1 \cap \bigcup_{g \in \Gamma} g(\mathring{F}_2) = \bigcup_{g \in \Gamma} (F_1 \cap g(\mathring{F}_2)).$$

De esto y que las transformaciones de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ preservan áreas, se deduce que

$$\mu(F_1) \geq \sum_{g \in \Gamma} \mu(F_1 \cap g(\mathring{F}_2)) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g^{-1}(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g(F_1) \cap \mathring{F}_2).$$

Por último, como $\bigcup_{g \in \Gamma} g(F_1) = \mathbb{H}$ se tiene que $\bigcup_{g \in \Gamma} (g(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \mathring{F}_2$, y por lo tanto

$$\sum_{g \in \Gamma} \mu(g(F_1) \cap \mathring{F}_2) \geq \mu \left(\bigcup_{g \in \Gamma} (g(F_1) \cap \mathring{F}_2) \right) = \mu(\mathring{F}_2) = \mu(F_2).$$

Con un razonamiento igual, intercambiando F_1 y F_2 se concluye que $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. \square

Definición 2.3.11. Dado un subgrupo Γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, decimos que un punto p de \mathbb{H} es de órbita libre por la acción de Γ si dada una transformación g de Γ distinta de la identidad, se tiene que $g(p) \neq p$.

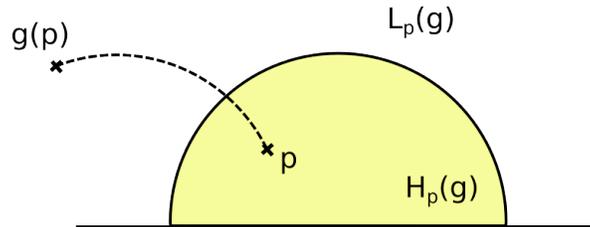
Definición 2.3.12. Dado un grupo Fuchsiano Γ y un punto p de \mathbb{H} de órbita libre por la acción de Γ , definimos la región de Dirichlet de Γ centrada en p como

$$\begin{aligned} D_P(\Gamma) &= \{z \in \mathbb{H} : d(z, p) \leq d(z, g(p)), \forall g \in \Gamma\} \\ &= \{z \in \mathbb{H} : d(z, p) \leq d(g(z), p), \forall T \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

Es importante notar que por Lema 2.3.5 sabemos que existe un punto de órbita libre por la acción de Γ .

Definición 2.3.13. Dados z_1 y z_2 puntos de \mathbb{H} , denotamos al segmento geodésico que los une como $[z_1, z_2]$. Definimos la mediatriz hiperbólica de $[z_1, z_2]$ como la única geodésica que pasa por el punto medio del segmento y lo corta perpendicularmente. Esta mediatriz queda definida por la ecuación $d(z, z_1) = d(z, z_2)$ [5].

Definición 2.3.14. Dado una transformación g de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ y un punto p de \mathbb{H} que no sea fijo por g , denotamos $L_p(g)$ a la mediatriz hiperbólica del segmento $[p, g(p)]$ y $H_p(g)$ a la región de \mathbb{H} que contiene a p y tiene como borde la geodésica $L_p(g)$.



Observación 2.3.15. Dado un grupo Fuchsiano Γ y un punto p de \mathbb{H} de órbita libre por la acción de Γ , la región fundamental de Γ centrada en p queda determinada por

$$D_p(\Gamma) = \bigcap_{g \in \Gamma - \{Id\}} H_p(g).$$

Por construcción las regiones $H_p(g)$ son regiones cerradas, convexas y conexas, consecuentemente $D_p(\Gamma)$ también lo es.

Teorema 2.3.16. Si Γ es grupo Fuchsiano y p un punto de \mathbb{H} de órbita libre por la acción de Γ , entonces la región de Dirichlet de Γ centrada en p es una región fundamental convexa y conexa.

Demostración. Por la Observación 2.3.15 ya sabemos que $D_P(\Gamma)$, la región de Dirichlet de centro p , es una región cerrada, convexa y conexa. Falta ver que por cada órbita de la acción de Γ en \mathbb{H} , la región $D_p(\Gamma)$ contiene al menos un elemento y a lo sumo uno en su interior. Veamos primero que contiene un elemento por cada órbita. Dado z un punto de \mathbb{H} , como Γ es un grupo Fuchsiano, sabemos que Γz la órbita de z , es un conjunto discreto de \mathbb{H} . Consecuentemente, existe un z_0 en Γz que minimiza la distancia con p , es decir, $d(p, z_0) \leq d(p, g(z))$ para todo g en Γ y consecuentemente $d(p, z_0) \leq d(p, g(z_0))$ para todo g en Γ ya que $\Gamma z = \Gamma z_0$. Como las transformaciones de Γ son isometrías de \mathbb{H} , tenemos que $d(p, z_0) \leq d(g^{-1}(p), z_0)$ para todo g en Γ , por lo que z_0 pertenece a la región $H_p(g^{-1})$ para todo g en

Γ . Como $D_p(\Gamma) = \bigcap_{g \in \Gamma - \{Id\}} H_p(g)$, podemos concluir que z_0 pertenece a $D_p(\Gamma)$.

Veamos ahora que por cada órbita de la acción de Γ en \mathbb{H} hay a lo sumo un elemento en el interior de $D_p(\Gamma)$. Consideremos un elemento z en el interior de $D_p(\Gamma)$. Supongamos que existe g elemento distinto de la identidad de Γ tal que $d(p, z) = d(p, g(z))$. De esto se deduce que $d(p, z) = d(g^{-1}(p), z)$ y por lo tanto, z pertenece a $L_p(g^{-1})$ y por lo tanto al borde de $H_p(g^{-1})$. Como $D_p(\Gamma) = \bigcap_{g \in \Gamma - \{Id\}} H_p(g)$ se concluye que z no pertenece al interior de $D_p(\Gamma)$, lo cual es absurdo. Esto demuestra que para todo elemento g distinto de la identidad de Γ , $d(p, z) < d(p, g(z))$. Si z_0 es otro elemento de la órbita de z que también pertenece al interior de $D_p(\Gamma)$, tendríamos que $d(p, z) < d(p, z_0)$ y $d(p, z_0) < d(p, z)$, lo cual es una contradicción. \square

Conjunto límite

Definición 2.3.17. *Dado un subgrupo Γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, definimos su conjunto límite, que notamos $\Lambda(\Gamma)$, como el conjunto de los puntos de acumulación en la clausura de \mathbb{H} de las órbitas Γz con z en \mathbb{H} .*

Observar que si Γ es un grupo Fuchsiano, por el Lema 2.3.5 sabemos que las órbitas por la acción de Γ son conjuntos discretos en \mathbb{H} . De esto se deduce que su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ está contenido en $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ el borde de \mathbb{H} .

Además si z_0 un punto cualquiera de \mathbb{H} , se tiene $\overline{\Gamma z_0} - \Gamma z_0 = \Lambda(\Gamma)$. En efecto, por construcción $\overline{\Gamma z_0} - \Gamma z_0$ está contenido en $\Lambda(\Gamma)$. Recíprocamente, si ξ es un elemento de $\Lambda(\Gamma)$, por definición existe una sucesión $\{g_n\}$ de elementos de Γ y un z en \mathbb{H} tal que $g_n(z) \rightarrow \xi$. Luego, a menos de tomar subsucesión $g_n(z_0)$ va a converger a un punto del borde, que necesariamente tiene que ser ξ ya que la distancia entre $g_n(z)$ y $g_n(z_0)$ es constante.

De esta observación se deduce que $\Lambda(\Gamma)$ es un conjunto cerrado de la compactificación de \mathbb{H} . En efecto, $\overline{\Gamma z_0}$ es cerrado y Γz_0 es discreto, consecuentemente Γz_0 es un abierto de $\overline{\Gamma z_0}$.

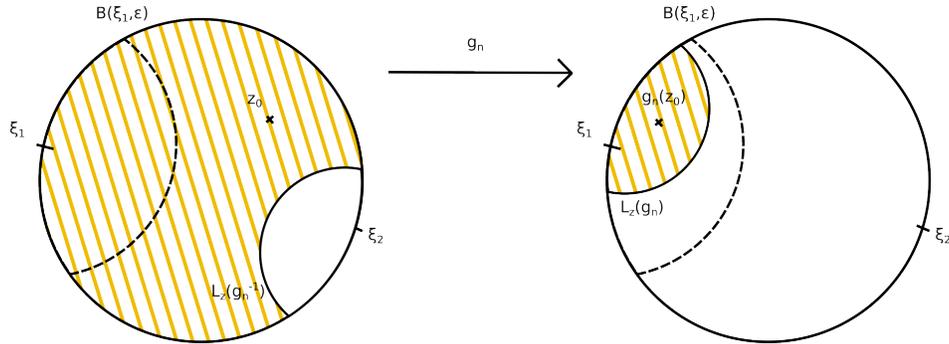
En el caso de grupos cocompactos y convexos cocompactos no elementales tenemos que sus conjuntos límites tienen cardinal mayor que dos. En lo que queda de la sección veremos que cuando los conjuntos límites tienen esta característica, se pueden deducir muchas características de ellos. Concretamente, que son la clausura del conjunto de los puntos atractores de las transformaciones hiperbólicas del grupo y que son o bien todo el borde del disco unitario o bien un conjunto perfecto de interior vacío.

Lema 2.3.18. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, $\{g_n\}$ una sucesión de elementos distintos de Γ y z un punto de \mathbb{H} tal que $g_n(z) \rightarrow \xi_1$ y $g_n^{-1}(z) \rightarrow \xi_2$ con ξ_1 y ξ_2 en $\partial\mathbb{H}$, entonces para todo z_0 en la compactificación de \mathbb{H} distinto de ξ_2 se tiene que $g_n(z_0) \rightarrow \xi_1$.*

Demostración. Consideremos $L_z(g_n)$ la mediatriz hiperbólica y p_n el punto en \mathbb{H} al que equidista de los extremos del segmento geodésico $[z, g_n(z)]$. Como la distancia entre z y $g_n(z)$ tiende a infinito y $g_n(z)$ converge a un punto del borde de \mathbb{H} , entonces p_n también lo hace. Luego, como $L_z(g_n)$ en el modelo del disco es un arco de circunferencia perpendicular a $\partial\mathbb{U}$, su radio tiende a cero. Por otro lado, $g_n(z)$ converge a ξ_1 y $g_n(z)$ pertenece a $H_z(g_n)^c$ la región de borde $L_z(g_n)$ que no contiene a z , por lo que los centros de los arcos de circunferencia $L_z(g_n)$ también tienden a ξ_1 . Este mismo razonamiento se aplica a las mediatrices $L_z(g_n^{-1})$. De esto se puede concluir que, dado un z_0 distinto de ξ_2 en la compactificación de \mathbb{H} y un ϵ mayor que cero, existe un natural N tal que para todo $n > N$ se cumple que:

1. La región $H_z(g_n)^c$ está contenida en $B(\xi_1, \epsilon)$, la bola euclidiana de centro ξ_1 y radio ϵ .
2. El punto z_0 pertenece a $H_z(g_n^{-1})$ la región de borde $L_z(g_n^{-1})$ que contiene a z .

Luego, como g_n mapea $L_z(g_n^{-1})$ en $L_z(g_n)$ y z en $g_n(z)$ y por lo tanto $H_z(g_n^{-1})$ en $H_z(g_n)^c$, podemos concluir que $g_n(z_0)$ pertenece a $B(\xi_1, \epsilon)$ para todo n mayor que N . Esto prueba que $g_n(z_0)$ converge a ξ_1 . \square



Lema 2.3.19. Dado Γ un grupo Fuchsiano y ξ , ξ_1 y ξ_2 puntos distintos de $\partial\mathbb{U}$ el borde del disco unitario, tal que ξ pertenece a $\Lambda(\Gamma)$ conjunto límite de Γ , entonces ξ es punto de acumulación de $\Gamma\xi_1$ o $\Gamma\xi_2$, las órbitas de la acción de Γ en $\partial\mathbb{U}$ de ξ_1 y ξ_2 respectivamente.

Demostración. Como ξ es un elemento de $\Lambda(\Gamma)$, existe una sucesión $\{g_n\}$ de elementos de Γ y un punto z de \mathbb{H} tal que $g_n(z) \rightarrow \xi$. Luego, a menos de tomar subsucesión, sabemos que $g_n^{-1}(z) \rightarrow \xi^-$ con ξ^- elemento de $\partial\mathbb{U}$. Como ξ_1 y ξ_2 son elementos distintos, al menos uno de ellos es distinto de ξ^- , podemos suponer sin perder generalidad que este es ξ_1 . Finalmente, por Lema 2.3.18 sabemos que $g_n(\xi_1) \rightarrow \xi$, lo que demuestra el lema. \square

Lema 2.3.20. Si Γ es un grupo Fuchsiano con todos sus elementos distintos de la identidad elípticos, entonces todos los elementos de Γ tienen el mismo punto fijo.

Demostración. Supongamos que g y h elementos elípticos de Γ que fijan puntos distintos, entonces el conmutador de estos elementos $hgh^{-1}g^{-1}$ es un elemento no elíptico y distinto de la identidad. En efecto, a menos de conjugar el grupo, podemos suponer que g fija a i , de lo que se deduce que

$$g = \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix}.$$

Si además denotamos a h como

$$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tenemos que la traza del conmutador será $2r^2 + s^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Observar que si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ es mayor o igual a dos, entonces la traza del conmutador será mayor o igual a dos veces el determinante de h y por lo tanto el conmutador no será un elemento elíptico.

Veamos que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ es mayor o igual a dos. Para eso veamos a h como su matriz asociada. Si h^t es la traspuesta de h , se tiene que hh^t es una matriz simétrica de determinante uno y traza

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Por teorema espectral sabemos que hh^t tiene dos valores propios reales. Por otro lado, su polinomio característico es

$$x^2 - \text{tr}(hh^t)x + \det(hh) = x^2 - \text{tr}(hh^t)x + 1,$$

por lo que su discriminante es $\text{tr}(hh^t)^2 - 4$. Como tiene valores propios reales, el discriminante debe ser positivo, por lo que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ es mayor o igual a dos.

Solamente resta ver que el conmutador es distinto de la identidad. Supongamos que es igual a la identidad. En ese caso se tiene que las dos transformaciones g y h conmutan y por lo tanto

$$h(0) = h(g(0)) = g(h(0)).$$

Pero g únicamente fija al 0, por lo que $h(0) = 0$, lo que es una contradicción ya que por hipótesis g y h no fijan el mismo punto. \square

Teorema 2.3.21. *Dado un grupo Fuchsiano Γ , si su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de un punto, entonces $\Lambda(\Gamma)$ es la clausura de los puntos fijos de las transformaciones hiperbólicas de Γ .*

Demostración. Primero veamos que Γ tiene al menos un elemento hiperbólico. Si Γ solamente tiene elementos elípticos, por Lema 2.3.20 todos tienen el mismo punto fijo. De esto se deduce que $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$ ya que para todo punto en \mathbb{H} , como las transformaciones de Γ son isometrías, los puntos de su órbita van a distar un valor constante del punto fijo de las transformaciones de Γ y por lo tanto no acumulan en el borde.

Supongamos ahora que existe un elemento parabólico g en Γ , que a menos de conjugar Γ podemos suponer que fija el infinito. De esto se deduce que g es de la forma $z \mapsto z + k$ con $k \in \mathbb{R}$ no nulo. Si todos los elementos de Γ sólo fijan el infinito entonces se deduce que $\Lambda(\Gamma) = \{\infty\}$. Esto contradice la hipótesis inicial, por lo que existe un elemento h en Γ que no fija el infinito, es decir

$$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

con $c \neq 0$. Tenemos entonces que $\text{tr}(g^n h) = |a + d + nkc|$ por lo que para un n suficientemente grande, $g^n h$ es un elemento hiperbólico de Γ .

Ahora que sabemos que Γ tiene un elemento hiperbólico veamos que se cumple el resultado. Sea $H = \{g^+ : g \in \Gamma, \text{tr}(g) > 2\}$ el conjunto de los puntos atractores de los elementos hiperbólicos de Γ . Es claro que $\overline{H} \subset \Lambda(\Gamma)$, veamos que se cumple la otra inclusión. Sea ξ un elemento de $\Lambda(\Gamma)$ y sean g^+ y h^+ puntos atractores de elementos hiperbólicos de Γ distintos. Sabemos que existen dos distintos ya que Γ tiene al menos un elemento hiperbólico, y el repulsor de este elemento es el atractor de su inverso. Si ξ es igual a g^+ o h^+ entonces $\xi \in H$. Si ξ es no igual a g^+ o h^+ entonces por Lema 2.3.19 sabemos que ξ es punto de acumulación de la órbita de g^+ o la de h^+ y consecuentemente $\xi \in \overline{H}$. \square

Teorema 2.3.22. *Dado un grupo Fuchsiano Γ , su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es invariante por transformaciones de Γ .*

Demostración. Sea ξ un elemento de $\Lambda(\Gamma)$. Por definición existe una sucesión $\{g_n\}$ de transformaciones de Γ y un z en \mathbb{H} tal que $g_n(z) \rightarrow \xi$. Sea g una transformación de Γ , entonces $gg_n g^{-1}(g(z)) \rightarrow g(\xi)$ y por lo tanto $g(\xi)$ pertenece a $\Lambda(\Gamma)$ lo que muestra la invarianza. \square

Teorema 2.3.23. *Dado un grupo Fuchsiano Γ , se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ tiene cardinal menor o igual a dos.*
2. *Su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es todo el borde del disco unitario $\partial\mathbb{U}$*
3. *Su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es un subconjunto perfecto de interior vacío de $\partial\mathbb{U}$.*

Demostración. Supongamos que su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de dos puntos por lo que no estamos en el primer caso. En el segundo y tercer caso $\Lambda(\Gamma)$ es perfecto, por lo que empezamos por demostrar eso. Ya sabemos que es cerrado, resta ver que todos sus puntos son de acumulación. Sean ξ , ξ_1 y ξ_2 elementos distintos de $\Lambda(\Gamma)$ y veamos que ξ es de acumulación. Por Lema 2.3.19 sabemos que ξ es de acumulación de la órbita de ξ_1 o la de ξ_2 . Luego, como $\Lambda(\Gamma)$ es Γ -invariante, estas órbitas están contenidas en $\Lambda(\Gamma)$ y por lo tanto ξ es de acumulación.

Para terminar, veamos que si $\Lambda(\Gamma)$ es distinto de $\partial\mathbb{U}$ entonces tiene interior vacío. Sea ξ un elemento de $\partial\mathbb{U}$ que no está en $\Lambda(\Gamma)$. Como $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, su complemento es abierto y por lo tanto existe un entorno abierto V de ξ en el complemento de $\Lambda(\Gamma)$. Dado un ζ en $\Lambda(\Gamma)$, por el Lema 2.3.19 sabemos que existe un ξ_0 en V y una sucesión de transformaciones $\{g_n\}$ en Γ tal que $g_n(\xi_0) \rightarrow \zeta$. Por último $g_n(V)$ es un entorno abierto de $g_n(\xi_0)$ en el complemento de $\Lambda(\Gamma)$ y por lo tanto $g_n(\xi_0)$ no pertenece a $\Lambda(\Gamma)$ para todo n . Consecuentemente ζ no es un punto interior, lo que demuestra el teorema. \square

Definición 2.3.24. *Dado un grupo Fuchsiano Γ , decimos que es un grupo elemental si existe una órbita finita por la acción de Γ en la compactificación de \mathbb{H} .*

Proposición 2.3.25. *Dado un grupo no elemental Γ , su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de dos puntos.*

Demostración. Si $\Lambda(\Gamma)$ no tiene ningún punto, entonces Γ no puede tener elementos hiperbólicos ni parabólicos. Por el Lema 2.3.20, Γ será un grupo de elementos elípticos con un mismo punto fijo. Pero esto contradice que Γ es no elemental, ya que la órbita de este punto fijo sería sólo sí mismo.

Si $\Lambda(\Gamma)$ tiene solamente un punto, entonces Γ sólo puede tener elementos parabólicos que fijan un mismo punto. Si tuviese elementos parabólicos con otros puntos fijos, estos también pertenecerían a $\Lambda(\Gamma)$. Si tuviese elementos hiperbólicos sus atractor y repulsor serían dos elementos distintos en $\Lambda(\Gamma)$. Si tuviese un elemento h elíptico, necesariamente tendría que tener algún elemento g parabólico que fijen el punto de $\Lambda(\Gamma)$, luego hgh^{-1} también sería un elemento parabólico del grupo que fija el único elemento de hgh^{-1} , lo cual implica que h también fija el punto de $\Lambda(\Gamma)$ lo cual es una contradicción.

Que Γ tenga solo elementos parabólicos que fijan un mismo punto también lleva a una contradicción ya que la órbita de este punto también sería sólo este punto.

En el caso de que $\Lambda(\Gamma)$ tenga exactamente dos puntos en el borde ξ_1 y ξ_2 , los elementos de Γ solamente pueden ser transformaciones hiperbólicas que los fijen o elípticas que los intercambien. Consecuentemente, $\Gamma\xi_1$ a lo sumo contiene a ξ_1 y ξ_2 , lo cual contradice que sea no elemental. \square

2.4. Grupos cocompactos y convexos cocompactos

En este trabajo estudiaremos acciones de subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por otros subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En ocasiones le pediremos a estos subgrupos que sean cocompactos o convexos

cocompactos. Es esta sección vamos a estudiar, entre otras cosas, como son los elementos y conjuntos límites de estos grupos.

Esta sección se basa fuertemente en el libro "Fuchsians Grups" de Svetlana Katok [5].

Grupos cocompactos

Definición 2.4.1. *Decimos que un grupo Fuchsiano Γ es cocompacto si el espacio cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es compacto.*

Observar que la función $d : \Gamma \backslash \mathbb{H} \times \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(\Gamma z_1, \Gamma z_2) = \inf\{d(g_1(z_1), d(g_2(z_2))) : g_1, g_2 \in \Gamma\}$$

define una distancia en $\Gamma \backslash \mathbb{H}$.

Teorema 2.4.2. *Si Γ es un grupo cocompacto, entonces Γ no tiene elementos parabólicos.*

Demostración. Definamos la función continua $\nu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ que mapea z en el ínfimo de las distancias entre z y la imagen de z por transformaciones de Γ no elípticas y distintas de la identidad, es decir

$$\nu(z) = \inf\{d(z, g(z)) : g \in \Gamma - \{e\}, tr(g) \geq 2\}.$$

Como la órbita de z por la acción de Γ es un conjunto discreto de \mathbb{H} , tenemos que $\nu(z) > 0$ para todo z en \mathbb{H} . Por otro lado, si consideramos z en \mathbb{H} y una transformación h en Γ tenemos que $\nu(z) = \nu(hz)$. En efecto, si g es una transformación no elíptica y distinta de la identidad de Γ , tenemos que hgh^{-1} también lo es, y consecuentemente

$$d(z, g(z)) = d(h(z), hg(z)) = d(h(z), hgh^{-1}(h(z))).$$

De esto se concluye que podemos definir la función ν en el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Luego, como este espacio es compacto, tenemos que la imagen de ν está contenida en un intervalo compacto de los reales positivos. Consecuentemente, existe un k_ν real positivo tal que $\nu(z) > k_\nu$ para todo z en \mathbb{H} .

Supongamos ahora que existe un elemento parabólico u de Γ . A menos de conjugar el grupo Γ y tomar el inverso de u , podemos suponer que u es de la forma $z \mapsto z + 1$. Luego $d(z, u(z)) = d(z, z + 1)$ tiende a cero si la parte imaginaria de z tiende a infinito, lo cual contradice lo que demostramos anteriormente. \square

Proposición 2.4.3. *Dado un grupo cocompacto Γ , su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es todo el borde de \mathbb{H} .*

Demostración. Consideremos ξ un punto del borde de \mathbb{H} , veamos que ξ pertenece a $\Lambda(\Gamma)$. Como Γ es cocompacto, existe un real d positivo tal que dados z_1 y z_2 en \mathbb{H} , la distancia entre Γz_1 y Γz_2 es menor que d . Consecuentemente, el conjunto de las bolas de radio d con centro en elementos de la órbita de i por la acción de Γ cubre todo \mathbb{H} . Por lo que si consideramos $\{x_i\}$ una sucesión de puntos en \mathbb{H} que tiende a ξ en el infinito, existe una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que $d(x_n, g_n(0)) < d$. De esto se concluye que la sucesión $\{g_n(0)\}$ también converge a ξ por lo que ξ pertenece a $\Lambda(\Gamma)$. \square

Observación 2.4.4. *Dado un grupo cocompacto Γ , el conjunto de los puntos atractores de los elementos hiperbólicos de Γ es denso en el borde de \mathbb{H} . En efecto, por la Proposición 2.4.3, el conjunto límite de Γ es todo el borde. Luego, por el Teorema 2.3.21, sabemos que el conjunto límite es la clausura del conjunto de los puntos fijos de los elementos hiperbólicos de Γ y cada fijo por un elemento g de Γ es atractor para g o su inverso.*

Corolario 2.4.5. *Dado un grupo cocompacto Γ y dos abiertos U y V en el borde de \mathbb{H} , existe un elemento hiperbólico de Γ tal que su atractor y repulsor pertenecen a U y V respectivamente.*

Demostración. A menos de tomar abiertos más pequeños si es necesario, podemos considerar que U y V son disjuntos. Como Γ es cocompacto, por el Corolario 2.4.4 sabemos que existen dos transformaciones hiperbólicas g_1 y g_2 en Γ tal que g_1^+ , el atractor de g_1 , pertenece a U y g_2^- , el atractor de g_2^{-1} , pertenece a V . Además sabemos que g_1^- es distinto de g_2^+ , en efecto si fuesen iguales, a menos de conjugar el grupo podemos suponer que $g_1^- = g_2^+ = \infty$ y por lo tanto

$$g_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{bmatrix},$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & b \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{bmatrix}$$

con $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ y b distinto de cero. Tenemos entonces que

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 b (\lambda_1^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lo que es una contradicción ya que implicaría que Γ tiene un elemento parabólico lo que contradice que Γ sea cocompacto.

Sea I un entorno de g_2^+ tal que g_1^- no pertenece a I . Como g_2 es una transformación hiperbólica, existe un natural N tal que para todo $n > N$ se cumple que $g_2^n(U)$ está contenido en I , ya que g_2^- no pertenece a U . Nuevamente, como g_1 es una transformación hiperbólica, existe un natural M tal que para todo $m > M$ se cumple que $g_1^m(I)$ está contenido en U . Por lo que para $n > N$ y $m > M$ se cumple que $g_1^m g_2^n(U)$ está contenido en U . De esto se deduce que el atractor de $g_1^m g_2^n$ pertenece a U . Repitiendo estos razonamientos podemos concluir que existen N' y M' tal que para todo $n > N'$ y $m > M'$, se cumple que $(g_2^{-1})^n (g_1^{-1})^m(V)$ está contenido en V . Por lo tanto su atractor, que es el repulsor de $g_1^m g_2^n$. Para demostrar el corolario basta con tomar $n > \max\{N, N'\}$ y $m > \max\{M, M'\}$. \square

Grupos Convexos cocompactos

Dado un grupo Fuchsiano Γ , definimos el conjunto C_Γ como la unión de todas geodésicas con extremos en el conjunto límite de Γ . Como el conjunto límite es invariante por Γ y las transformaciones de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ mapean geodésicas en geodésicas, tenemos que C_Γ también es Γ -invariante.

Definición 2.4.6. *Un grupo Fuchsiano Γ se dice convexo cocompacto si es un grupo no elemental y el cociente $\Omega_\Gamma = \Gamma \backslash C_\Gamma$ es compacto.*

El conjunto Ω_Γ se puede ver que es el conjunto no errante por el flujo geodésico [8] en el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ por lo que en ocasiones lo denominaremos no errante de Γ por el flujo geodésico o simplemente no errante de Γ .

Proposición 2.4.7. *Dado un grupo convexo cocompacto Γ , su conjunto límite es todo el borde de \mathbb{H} o un conjunto perfecto con interior vacío del borde de \mathbb{H} .*

Demostración. Por el Teorema 2.3.23, para probar esta afirmación basta sólo con probar que $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de dos puntos. Por la Proposición 2.3.25, como Γ es un grupo elemental, tenemos que $\Lambda(\Gamma)$ tiene más de dos puntos. \square

Si consideramos un grupo convexo cocompacto Γ con $\Lambda(\Gamma)$ conjunto perfecto con interior vacío del borde de \mathbb{H} , entonces, como $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, su complemento es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos J_i . Observar que los intervalos J_i se mapean por las transformaciones de Γ en intervalos J_j .

Definición 2.4.8. *Dado un intervalo I en el borde de \mathbb{H} , definimos la envolvente convexa de I , que denotamos $\text{hull}(I)$, como la región de \mathbb{H} que tiene como borde el intervalo I y la geodésica que tiene como extremos los extremos del intervalo.*

Observar que la envolvente convexa de I es una región convexa de \mathbb{H} .

Proposición 2.4.9. *Dado un grupo convexo cocompacto Γ con su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ perfecto con interior vacío del borde de \mathbb{H} , existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\delta \leq d(\text{hull}(J_i), \text{hull}(J_j)),$$

para todo par I y J de intervalos maximales distintos del complemento de $\Lambda(\Gamma)$.

Demostración. Dado dos intervalos en el borde de \mathbb{H} , la distancia entre sus envolventes convexas es nula solamente si comparten un punto en el borde. Luego, si esto ocurriese para dos intervalos del complemento de $\Lambda(\Gamma)$, este punto en común no sería de $\Lambda(\Gamma)$, lo cual es una contradicción. Por lo que la distancia entre $\text{hull}(I)$ y $\text{hull}(J)$ es positiva.

Resta ver que la distancia entre dos intervalos distintos está uniformemente acotada interiormente. Supongamos ahora por absurdo que existe una sucesión de pares de estos intervalos distintos J_n^1 y J_n^2 tal que la distancia entre $\text{hull}(J_n^1)$ y $\text{hull}(J_n^2)$ es menor que $1/n$ para todo n . De esto se concluye que existe una sucesión de pares de puntos z_n^1 y z_n^2 con z_n^i perteneciente al borde geodésico de $\text{hull}(J_n^i)$ para $i = 1, 2$ y tal que la distancia entre z_n^1 y z_n^2 es menor que $1/n$. Por otro lado, como $\Gamma \setminus C_\Gamma$ es compacto, existe un $d > 0$ tal que para todo par de puntos en C_Γ , la distancia entre sus órbitas por la acción de Γ es menor que d . Consecuentemente, dado un z_0 en C_Γ , a menos de trasladar por transformaciones de Γ , la sucesión z_n^1 está contenida en $B(z_0, d)$ la bola de centro z_0 y radio d . Consecuentemente la sucesión z_n^2 está contenida en $\overline{B(z_0, d+1)}$ la clausura de la bola de centro z_0 y radio $d+1$. Por compacidad, a menos de tomar subsucesiones, las sucesiones z_n^1 y z_n^2 son convergentes a un punto en \mathbb{H} . Luego, como la distancia entre z_n^1 y z_n^2 tiende a cero, ambas sucesiones convergen al mismo punto z .

Consideremos un $\epsilon > 0$ y denotemos B_ϵ a la bola de centro z y radio ϵ . Notamos $B_{\epsilon,x}$ a la proyección euclidiana de B_ϵ sobre el eje real, es decir el conjunto de las partes real de los elementos de B_ϵ ; x_ϵ a la longitud euclidiana del intervalo $B_{\epsilon,x}$ y y_ϵ a la distancia euclídea entre cero y la proyección de B_ϵ sobre el eje imaginario. Podemos ajustar el ϵ de modo que $x_\epsilon < 2y_\epsilon$.

Como las sucesiones z_n^1 y z_n^2 convergen a z , existe un N tal que z_n^1 y z_n^2 pertenecen a B_ϵ para todo $n > N$. Si consideramos $n_0 > N$, los conjuntos $\text{hull}(J_{n_0}^1)$ y $\text{hull}(J_{n_0}^2)$ intersectan a B_ϵ . Por otro lado, como los intervalos $J_{n_0}^1$ y $J_{n_0}^2$ son distintos, la distancia entre $\text{hull}(J_{n_0}^1)$ y $\text{hull}(J_{n_0}^2)$ es positiva y por lo tanto existe un $n_1 > n_0$ tal que

$$d(\text{hull}(J_{n_0}^1), \text{hull}(J_{n_0}^2)) > \frac{1}{n_1}.$$

De esto se concluye que los pares $\{J_{n_0}^1, J_{n_0}^2\}$ y $\{J_{n_1}^1, J_{n_1}^2\}$ son distintos. Supongamos sin perder generalidad que $J_{n_1}^1$ es distinto de $J_{n_0}^1$ y $J_{n_0}^2$. Como $n_1 > N$, tenemos que $\text{hull}(J_{n_1}^1)$ intersecta a B_ϵ .

Finalmente, a menos de conjugar el grupo, podemos asumir que ∞ no pertenece a ninguno de los tres intervalos. Consecuentemente $J_{n_0}^1$, $J_{n_0}^2$ y $J_{n_1}^1$ intersectan a $B_{\epsilon, x}$.

Tenemos entonces que tres intervalos disjuntos $J_{n_0}^1$, $J_{n_0}^2$ y $J_{n_1}^1$ intersectan al intervalo $B_{\epsilon, x}$. De esto se concluye que al menos uno de estos tres intervalos está contenido en $B_{\epsilon, x}$, por lo que su borde geodésico es un arco de circunferencia de radio a lo sumo la mitad de $x_\epsilon < 2y_\epsilon$, lo cual contradice que su envolvente convexa intersecta a $B_{\epsilon, x}$. \square

2.5. Flujos homogéneos

En esta sección vamos a definir dos flujos en el tangente unitario de \mathbb{H} ; el flujo geodésico y el flujo horocíclico. Primero veremos construcciones geométricas de estos flujos y luego veremos caracterizaciones algebraicas de los mismos. Por la identificación que dimos entre el tangente unitario de \mathbb{H} y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ en la Proposición 2.2.19, esto nos ayudará a estudiar la dinámica en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Definición 2.5.1. *Dado un espacio topológico X , decimos que una función $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es un flujo si define una acción continua de \mathbb{R} como grupo aditivo en X . Usualmente notaremos $\phi_t(x) = \phi(t, x)$.*

Flujo geodésico

Definición 2.5.2. *Definimos un flujo g_t en el tangente unitario $T^1\mathbb{H} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$ que denominaremos flujo geodésico en \mathbb{H} . Este se define como $g_t((z, v)) = (\phi(t), \phi'(t))$ siendo ϕ la única geodésica de \mathbb{H} tal que $\phi(0) = z$ y $\phi'(0) = v$.*

Observación 2.5.3. *Si consideramos el vector (i, i) en el tangente unitario de \mathbb{H} , sabemos que la única geodésica que pasa por ese punto con esa velocidad en cero es $\phi(t) = ie^t$. Por lo que el flujo geodésico en este vector queda definido por $g_t((i, i)) = (ie^t, ie^t)$. Por otro lado, si consideramos el subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$A = \left\{ a_t = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

tenemos que $g_t((i, i)) = (ie^t, ie^t) = (a_t(i), d_i a_t(i))$.

Por otro lado, sabemos de la Proposición 2.2.19 que $T^1\mathbb{H}$ es homeomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por el mapa que mapea g en $g \cdot (i, i) = (g(i), dg_i(i))$ para todo g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Luego, como las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías de \mathbb{H} , dado un $(v, z) = g \cdot (i, i)$ en $T^1\mathbb{H}$ tenemos que $g_t((v, s)) = g \cdot g_t(i, i)$. Por lo que si definimos la acción del subgrupo A en $T^1\mathbb{H}$ dada por

$$a_t \cdot (g \cdot (i, i)) = g \cdot ((ie^t, ie^t)) = g \cdot ((a_t(i), d_i a_t(i))) = g \cdot a_t \cdot (i, i),$$

tenemos que el flujo geodésico en $T^1\mathbb{H}$ queda definido por $g_t(g \cdot (i, i)) = g \cdot a_t \cdot (i, i)$.

Definición 2.5.4. *Definimos el flujo geodésico g_t en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dado por $g_t(g) = ga_t$.*

Este mapa es un flujo ya que es el pull back por el mapa dado en la Proposición 2.2.19, del flujo geodésico en $T^1\mathbb{H}$ por el homeomorfismo anterior. Dada una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, su órbita por el flujo geodésico es gA .

Flujo horocíclico

Definición 2.5.5. Dado un punto ξ en el borde de \mathbb{H} y un punto z_1 en \mathbb{H} , existe una única geodésica ϕ tal que $\phi(0) = z_1$ y $\phi(t)$ converge a ξ cuando t tiende a infinito. Definimos la función de Busemann centrada en ξ , $b_\xi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$b_\xi(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t), z_2) - t = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t), z_2) - d(\phi(t), z_1).$$

Veamos que la función de Busemann está bien definida. Dado un punto ξ en el borde de \mathbb{H} y un punto z_1 en \mathbb{H} , por desigualdad triangular tenemos que

$$d(\phi(t), z) - d(\phi(t), z_0) \geq -d(z, z_0)$$

para todo z en \mathbb{H} , siendo ϕ como en la Definición 2.5.5. Por lo que, dado un z , la función de Busemann centrada en ξ y evaluada en (z_1, z) está acotada inferiormente por la distancia entre z y z_1 . Por otro lado, si $s > t$ dos reales, tenemos que

$$s - d(\phi(s), z) - (t - d(\phi(t), z)) = s - t + d(\phi(t), z) - d(\phi(s), z) \geq s - t - d(\phi(s), \phi(t)) = s - t + t - s = 0.$$

Por lo que la función $t - d(\phi(t), z)$ es decreciente en t . De estas dos observaciones se deduce que la función de Busemann está bien definida.

Proposición 2.5.6. Dado un punto $z = x + iy$ en \mathbb{H} , la función de Busemann centrada en infinito y evaluada en (i, z) vale menos el logaritmo de la parte imaginaria de z . Es decir,

$$b_\infty(i, z) = -\log(y).$$

Demostración. La geodésica que pasa por i en tiempo cero y converge a infinito en tiempo infinito es $\phi(t) = ie^t$. Dado un $t > 0$ vamos a acotar la distancia entre ie^t y z superior e inferiormente por valores que converjan a $-\ln(y)$ cuando t tiende a infinito. La curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ dada por $\varphi(s) = sie^t + (1-s)z$ es una curva con $\varphi(0) = ie^t$ y $\varphi(1) = z$, por lo que

$$\begin{aligned} d(ie^t, z) &\leq \int_0^1 \frac{\|\varphi'(s)\|}{\text{Im}(\varphi(s))} ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{(e^t - y)^2 + x^2}}{s(e^t - y) + y} ds = \\ &\frac{\sqrt{(e^t - y)^2 + x^2}}{e^t - y} \int_y^{e^t} \frac{1}{u} du = \frac{\sqrt{(e^t - y)^2 + x^2}}{e^t - y} (t - \ln(y)). \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos el segmento geodésico $[z, x + ie^t]$, su longitud va a ser menor o igual que la del segmento $[z, ie^t]$. En efecto, a menos que z pertenezca al eje imaginario, al calcular la longitud de $[z, ie^t]$ la integral será la misma que la que define la longitud de $[z, ie^t]$, más una componente en la dirección paralela al eje real. De esto se concluye que

$$d(ie^t, z) \geq d(x + ie^t, z) = t - \log(y).$$

Tenemos entonces que

$$-\ln(y) \leq d(ie^t, z) - t \leq \frac{\sqrt{(e^t - y)^2 + x^2}}{e^t - y} (t - \ln(y)) - t,$$

por lo que tomando el límite con t tendiendo a infinito tenemos que

$$-\ln(y) \leq b_\infty(i, z) \leq -\ln(y).$$

□

Repitiendo estos mismos argumentos se demuestra que, dados z_1 y z_2 dos puntos de \mathbb{H} , se cumple que

$$b_\infty(z_1, z_2) = \ln(\operatorname{Im}(z_1)) - \ln(\operatorname{Im}(z_2)),$$

siendo $\operatorname{Im}(z_1)$ y $\operatorname{Im}(z_2)$ la parte imaginaria de z_1 y z_2 respectivamente. Por otro lado, por la Proposición 2.5.6 podemos concluir que el conjunto

$$H_{\infty, i} = \{z \in \mathbb{H} : b_\infty(i, z) = 0\}$$

es la recta paralela al eje real por i .

Definición 2.5.7. Dado un punto ξ en el borde de \mathbb{H} y un punto z_0 en \mathbb{H} , definimos el horociclo por z_0 centrado en ξ como

$$H_{\xi, z_0} = \{z \in \mathbb{H} : b_\xi(z_0, z) = 0\}.$$

Dado un punto ξ en el borde de \mathbb{H} y un punto z_0 en \mathbb{H} , existe una única geodésica ϕ tal que $\phi(0)$ y $\phi(t)$ tiende a ξ cuando t tiende a infinito. Luego, existe una transformación g en $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que $g\phi$ es la única geodésica con $g\phi(0) = i$ y $g\phi(t)$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito. Como las transformaciones de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías de \mathbb{H} tenemos que

$$H_{\xi, z_0} = gH_{\infty, i} = \{gz \in \mathbb{H} : b_\infty(i, z) = 0\}.$$

Por otro lado, el conjunto $H_{\infty, i}$ puede parametrizarse por longitud de arco por la curva $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ con $\nu(t) = i + t$. Esta curva corta perpendicularmente todas las geodésicas con un extremo en infinito y sus extremos convergen a infinito.

Como las transformaciones de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ son conformes y se extienden de manera continua al borde de \mathbb{H} , tenemos que H_{ξ, z_0} será una curva parametrizada por longitud de arco por $g\nu$, que corta perpendicularmente todas las geodésicas con un extremo en ξ y con sus extremos convergiendo a ξ . Estas características geométricas nos permiten concluir que, cuando ξ es distinto de infinito, H_{ξ, z_0} es el único círculo en \mathbb{H} tangente al eje real por ξ que contiene a z_0 . Si ξ es infinito, entonces H_{ξ, z_0} es la recta paralela al eje real por z_0 . De esto también se concluye que, fijado el punto ξ en el borde de \mathbb{H} , todo punto de \mathbb{H} está contenido en un único horociclo centrado en ξ , por lo que el siguiente flujo está bien definido.

Definición 2.5.8. Definimos un flujo h_t en el tangente unitario $T^1\mathbb{H} = \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$ que denominaremos flujo horocíclico en \mathbb{H} . Este se define como $h_t((z, v)) = (\nu(t), v_t)$ siendo ν la parametrización por longitud de arco del horociclo $H_{\xi, z}$ tal que $\nu(0) = z$ y v_t el único vector del tangente unitario de \mathbb{H} en $\nu(t)$ tal que la geodésica por $\nu(t)$ con velocidad en este punto igual a v_t , converja en el infinito a ξ .

Por un razonamiento análogo al del flujo geodésico, como el flujo horocíclico en (i, i) queda definido por $h_t(i, i) = (i + t, i) = u_t \cdot (i, i)$ con

$$u_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si definimos el subgrupo de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ u_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

y la acción de U en $T^1\mathbb{H}$ dada por

$$u_t \cdot (g \cdot (i, i)) = g \cdot u_t \cdot (i, i),$$

tenemos que el flujo horocíclico en \mathbb{H} queda definido por $h_t(g \cdot (i, i)) = g \cdot u_t \cdot (i, i)$.

Definición 2.5.9. *Definimos el flujo horocíclico h_t en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dado por $h_t(g) = gu_t$.*

Este mapa es un flujo ya que es el pull back por el mapa dado en la Proposición 2.2.19, del flujo horocíclico en \mathbb{H} . Dada una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, su órbita por el flujo horocíclico es gU .

Si Γ es un subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, los flujos geodésicos y horocíclicos se mapean bien en el cociente $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En efecto, estos flujos están definidos por componer por transformaciones a derecha, mientras que las clases están definidas por componer a izquierda.

Capítulo 3

Dinámica del flujo horocíclico

3.1. Caso cocompacto: Teorema de Hedlund

En esta sección veremos un resultado importante sobre el flujo horocíclico en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por grupos cocompactos sin torsión. Concretamente, demostraremos el teorema de Hedlund, que afirma que las órbitas por el flujo horocíclico en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por grupos cocompactos sin torsión son densas. Además veremos un corolario del teorema de Hedlund, concretamente demostraremos que no sólo las órbitas por el flujo horocíclico son densas en cocientes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por grupos cocompactos sin torsión, sino que también las órbitas futuras por este flujo lo son. Este resultado lo usaremos para la demostración de la invarianza del conjunto zU_2^+ dentro de la clausura de las órbitas no cerradas de los elementos de $\Gamma \backslash G$ por la acción de H . La demostración del teorema de Hedlund que veremos se basa en los resultados del capítulo 5 del libro "Geodesic and horocyclic trajectories" de Françoise Dal'Bo [3].

Definición 3.1.1. *Decimos que un subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es sin torsión si no tiene elementos elípticos.*

En general la torsión de un grupo es el subconjunto de los elementos de orden finito del mismo. En el contexto de subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ este subconjunto está conformado por los elementos elípticos del grupo.

Teorema 3.1.2 (Hedlund [4]). *Si Γ es un grupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, cocompacto y sin torsión, entonces el flujo horocíclico en $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es minimal.*

Para poder demostrar el teorema de Hedlund lo que haremos será primero ver la minimalidad de la dinámica inducida por la acción de Γ en el cociente $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/U$ con

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

el subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que define el flujo horocíclico. Si probamos esto, la Proposición 2.1.9 nos permite demostramos el Teorema 3.1.2 de manera directa. Para probar ese resultado, primero veremos la minimalidad de la dinámica inducida por la acción de Γ' en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\hat{U}$, siendo Γ' la preimagen de Γ por la proyección canónica entre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y

$$\hat{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, la proyección canónica entre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mapea a Γ' en Γ y a \tilde{U} en U . Consecuentemente mapea las órbitas por la acción de \tilde{U} en $\Gamma' \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en las órbitas por el flujo horocíclico en $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, por lo que si la dinámica definida en $\Gamma' \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es minimal también lo va a ser la dinámica del flujo horocíclico en $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Para estudiar la minimalidad de la acción de Γ' en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\hat{U}$ necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces $\Gamma' = \pi^{-1}(\Gamma)$ actúa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por transformaciones lineales induciendo una dinámica minimal, donde $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es la proyección canónica.*

Si asumimos el Teorema 3.1.3, mediante la siguiente identificación, terminaremos de demostrar el teorema de Hedlund. El Teorema 3.1.3 lo demostraremos en la siguiente sección.

Lema 3.1.4. *Si consideremos la acción de Γ' en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por transformaciones lineales, entonces el mapa de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\hat{U}$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $g\hat{U} \mapsto g \cdot (1, 0)$ es un homeomorfismo Γ' -equivariante.*

Demostración. Primero veamos que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por transformaciones lineales de manera transitiva. Sean v y w dos vectores en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para todo t real, la matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

actúa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ mapeando al vector (x, y) en $(x + ty, y)$. Por lo que, si la segunda coordenada de v no es nula, eligiendo adecuadamente el t , podemos suponer que el módulo de u_tv es el mismo que el del vector w . En el caso de que la segunda coordenada de v sea nula, como v es un vector distinto de cero y por lo tanto su primera coordenada es necesariamente no nula, basta con actuar con la traspuesta de la matriz u_t para suponer que el módulo de u_tv es el mismo que el del vector w . En este caso la acción mapea (x, y) en $(x, y + tx)$. Supongamos entonces, sin perder generalidad, que la norma de v y w son la misma y sea ϕ el ángulo entre v y w . Tenemos entonces que la matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$h_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sen(\phi) \\ \sen(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

actúa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ rotando los vectores en un ángulo ϕ respecto al origen. Consecuentemente el vector $h_\phi v = w$. Por otro lado, el estabilizador del vector $(1, 0)$ por esta acción, es el subgrupo \hat{U} definido anteriormente. Por Proposición 2.1.9 sabemos que el mapa de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\hat{U}$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $g\hat{U} \mapsto g \cdot (1, 0)$ es una biyección Γ' -equivariante. En este caso, como la acción es por transformaciones lineales, el mapa es continuo con inversa continua y por lo tanto un homeomorfismo. \square

Hasta acá se deduce la minimalidad de la acción de U , sin embargo el resultado se puede refinar un poco más para deducir la minimalidad de U^+ . Este resultado corresponde al Lema 2.6 del artículo de Benoist y Oh [1].

Corolario 3.1.5. *Sea U^+ el semigrupo $\{u_t : t \geq 0\}$. Si el cociente $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es compacto, entonces toda U^+ -órbita es densa en el cociente.*

Demostración. Sea x un elemento de $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y consideremos la sucesión $x_n = xu_n$ en xU^+ . Como $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es compacto, a menos de tomar subsección, sabemos que la sucesión converge a un

elemento z .

Por otro lado, consideremos un elemento zu_t en zU . Tenemos que xu_{n+t} converge a zu_t . Luego, a partir de un n_0 tenemos que $n+t$ es positivo, y por lo tanto zu_t pertenece a la clausura de xU^+ . De esto se concluye que zU está contenido en la clausura de xU^+ .

Finalmente, por Teorema 3.1.2 sabemos que zU es densa en $\Gamma \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y por lo tanto xU^+ también lo es. \square

3.2. Demostración del Teorema 3.1.3

Para demostrar el Teorema 3.1.3, primero veremos que Γ actúa en el proyectivo de \mathbb{R}^2 por transformaciones lineales definiendo una dinámica minimal. Luego usaremos esto para ver que Γ' actúa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ definiendo una dinámica transitiva y finalmente veremos el teorema.

Dinámica minimal en el proyectivo del plano

Recordemos la definición del proyectivo de \mathbb{R}^2 . En $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ podemos definir una relación de equivalencia donde dos vectores están relacionados si son colineales. Es decir, dos vectores v y w están relacionados si existe un número real λ no nulo, tal que $v = \lambda w$. Definimos el espacio proyectivo de \mathbb{R}^2 como el espacio de las clases de equivalencia de esta relación, que denotamos $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Este espacio equipado con la topología cociente es homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Si Γ es un subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, entonces Γ actúa por transformaciones lineales en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Es decir el mapa $\Phi : \Gamma \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ dado por $(g, [v]) \mapsto [gv]$, considerando a g como su matriz asociada en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, define una acción. En efecto, dada una transformación g en Γ , esta tiene asociada dos matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, g y $-g$. Luego, dado un elemento $[v]$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, tenemos que $[-gv] = [gv]$, por lo que el mapa está bien definido. Que cumple la definición de acción es directo.

Antes de entrar en la demostración, veamos un lema que nos permitirá conocer la dinámica en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ por la acción de Γ estudiando la dinámica de $\partial\mathbb{H}$ por la acción de Γ .

Lema 3.2.1. *Si Γ es grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces existe un homeomorfismo Γ -equivariante entre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, con la acción de Γ por transformaciones lineales, y $\partial\mathbb{H}$ el borde de \mathbb{H} , con la acción de Γ con transformaciones de Moebius.*

Demostración. Primero veamos que existe un homeomorfismo Γ -equivariante entre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$, siendo

$$UA = \left\{ \begin{bmatrix} e^{s/2} & t \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Veamos que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ por transformaciones lineales de manera transitiva. Sean v y w dos elementos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ y sea ϕ el ángulo entre v y w . La transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$g_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

actúa en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ rotando los vectores un ángulo ϕ . Consecuentemente $g_\phi v = w$. Por otro lado, el estabilizador de $(1, 0)$ por esta acción es el subgrupo UA de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Entonces por la Proposición 2.1.9, sabemos que el mapa de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ dado por $gUA \mapsto g(1, 0)$ es una biyección Γ -equivariante. Por otro lado, como la topología de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es la heredada de \mathbb{R}^4 , la acción es por transformaciones lineales y la topología de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ es la heredada de \mathbb{R}^2 , este mapa es continuo con inversa continua.

Veamos ahora que existe un homeomorfismo Γ -equivariante entre $\partial\mathbb{H}$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$. Es fácil ver que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ actúa en el borde de \mathbb{H} por transformaciones de Moebius de manera transitiva y el estabilizador de ∞ también es UA . De esto se deduce, por Proposición 2.1.9, que el mapa de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$ en $\partial\mathbb{H}$ dado por $gUA \mapsto g\infty$ es una biyección Γ -equivariante. Además, por las topologías de estos espacios, este mapa también es continuo con inversa continua. □

Lema 3.2.2. *Si Γ es grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces la acción de Γ por transformaciones lineales en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, el proyectivo de \mathbb{R}^2 , define una dinámica minimal.*

Demostración. Por el Lema 3.2.1 sabemos que existe un homeomorfismo Γ -equivariante entre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, con la acción de Γ por transformaciones lineales, y $\partial\mathbb{H}$ el borde de \mathbb{H} , con la acción de Γ con transformaciones de Moebius. Tenemos entonces que demostrar la minimalidad de la dinámica de la acción de Γ por transformaciones lineales de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ es equivalente a probar la minimalidad de la dinámica de su acción en $\partial\mathbb{H}$ por transformaciones de Moebius.

Para ver la minimalidad en el borde de \mathbb{H} consideremos un x en $\partial\mathbb{H}$ y un intervalo abierto V de $\partial\mathbb{H}$. Como Γ es un grupo cocompacto, por la Observación 2.4.4 sabemos que existe un elemento hiperbólico g en Γ tal que g^+ , el atractor de g , está en V y quedaría demostrado el resultado. Si x distinto de g^- entonces existe un natural n en \mathbb{N} tal que $g^n x$ pertenece a V . Si x es igual a g^- , como Γ cocompacto y sin torsión, por el Corolario 2.4.5 sabemos que Γ no tiene puntos fijos globales en el borde y por lo tanto existe una transformación f de Γ tal que $fx \neq x$. Consecuentemente, existe un natural n tal que $g^n fx$ pertenece a V , lo que demuestra la minimalidad. □

Dinámica transitiva en el plano pinchado

Dada una transformación hiperbólica g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, sabemos que su traza es mayor que dos y su determinante es uno. Por lo tanto sus matrices asociadas tienen dos valores propios distintos. A su vez, como su determinante es uno, se deduce que uno de los valores propios λ es mayor que uno en valor absoluto. El otro valor propio es λ^{-1} que en valor absoluto pertenece al intervalo $(0, 1)$. De esto se concluye que las matrices asociadas a g tienen dos subespacios propios de dimensión uno. Además como las matrices asociadas a g son g y $-g$, estos subespacios son los mismos para ambas matrices, cambiando únicamente que en una de ellas los valores propios son positivos y en la otra negativos. Denotamos entonces E_g^+ al subespacio propio asociado al valor propio λ y E_g^- al subespacio propio asociado a λ^{-1} . Notar que estos subespacios propios se proyectan en puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Denotamos v_g^+ y v_g^- a las proyecciones en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ de E_g^+ y E_g^- respectivamente. Una observación importante es que, vía la identificación vista en el Lema 3.2.1, v_g^+ y v_g^- se mapean en g^+ y g^- respectivamente.

En lo que queda de esta sección, siempre que consideremos una matriz g en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ asociada a un elemento g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, consideraremos la matriz con valores propios positivos.

Lema 3.2.3. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces la acción de $\Gamma' = \pi^{-1}(\Gamma)$ por transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ define una dinámica transitiva.*

Demostración. Sabemos de la demostración del Lema 3.2.1 que el mapa de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ dado por $gUA \mapsto g(1, 0)$ y el mapa de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/UA$ en $\partial\mathbb{H}$ dado por $gUA \mapsto g(\infty)$ son homeomorfismos Γ -equivariantes. De esto se deduce que el mapa $\psi : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \partial\mathbb{H}$ dado por $g(1, 0) \mapsto g(\infty)$ también es un homeomorfismo Γ -equivariante.

Utilicemos este mapa para demostrar que dados dos abiertos U y V de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, existe una transformación hiperbólica g en Γ tal que las proyecciones de sus subespacios propios cumplen que v_g^+ pertenece a U y v_g^- pertenece a V . Por Corolario 2.4.5 sabemos que existe una transformación hiperbólica g en Γ tal que su atractor g^+ pertenece a $\psi(U)$ y su repulsor g^- pertenece a $\psi(V)$. Como el mapa ψ es Γ -equivariante tenemos que

$$g\psi^{-1}(g^+) = \psi^{-1}(g(g^+)) = \psi^{-1}(g^+)$$

y

$$g\psi^{-1}(g^-) = \psi^{-1}(g^-).$$

Además, como ψ es un homeomorfismo, $\psi^{-1}(g^+)$ y $\psi^{-1}(g^-)$ son elementos distintos y consecuentemente $\psi^{-1}(g^+)$ y $\psi^{-1}(g^-)$ son v_g^+ y v_g^- respectivamente. Sabemos entonces que dados dos abiertos U y V de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe una transformación g en Γ tal que v_g^- pertenece a $\pi(U)$, la proyección de U en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, y v_g^+ pertenece a $\pi(V)$, la proyección de V en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Esto implica que existe un punto x en U que pertenece a E_g^- , el subespacio propio de g . Además Como U es abierto, también podemos encontrar un y en U distinto de x tal que $y - x$ pertenece a E_g^+ y el intervalo $[x, y]$ está contenido en U . Si consideramos a g como su matriz asociada en Γ' , por la elección de x e y sabemos que $g^n(x)$ converge a 0 y $|g_n(y - x)|$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito. De esto se deduce que $|g_n(y)|$ tiende a infinito con n , y por lo tanto, $g^n([x, y])$ tiende a una semirrecta por cero contenida en E_g^+ . Luego, como V es abierto, a menos de elegir y para que el vector $y - x$ tenga la dirección contraria, existe un n y un z en $[x, y]$ tal que $g^n(z)$ pertenece a V . De esto podemos concluir que $g^n(U) \cap V$ es distinto de vacío, y por lo tanto la dinámica es transitiva. \square

Demostración del resultado

Ahora que tenemos la minimalidad de la dinámica en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ y la transitividad de la dinámica en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ vamos a demostrar el Teorema 3.1.3. Primero lo demostraremos para vectores de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ que pertenecen a subespacios propios de transformaciones de Γ . Luego veremos que dado cualquier elemento de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ su órbita por la acción de Γ acumula en un vector no nulo de el subespacio propio de una transformación de Γ . Para ver la acumulación de las órbitas primero necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.2.4. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces para todo vector v en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe una sucesión $\{g_n\}$ de transformaciones de Γ' tal que g_nv converge al vector nulo.*

Demostración. Recordemos que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ se identifica con $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/U$ mediante el homeomorfismo Γ' -equivariante que, dado un elemento gU de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/U$ lo mapea en $g \cdot (1, 0)$, considerando la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ por transformaciones lineales.

Para probar el resultado alcanza con probar que, dada una transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, existe una sucesión de elementos $\{g_n\}$ en Γ tal que $b_{g_n \cdot \infty}(g_i, g_n i)$ la función de Busemann centrada en infinito y

evaluada en $(gi, g_n i)$, tiende a menos infinito. Veamos que si demostramos esta afirmación podemos demostrar el Lema.

Consideremos un vector $v = g \cdot (1, 0)$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y supongamos primero que g es la identidad. Por Proposición 2.2.20, para todo n existe una transformación elíptica k_n que fija i , una transformación a_n en A y una transformación u_n en U tal que

$$g_n = u_n a_n k_n.$$

Luego, como $k_n i = i$ para todo n , tenemos que

$$b_\infty(i, g_n i) = b_\infty(i, u_n a_n k_n i) = b_\infty(i, u_n a_n i).$$

Por otro lado, como vimos en la Sección 2.5, sabemos que la acción por u_n no cambia el resultado de la función de Busemann, por lo que

$$b_\infty(i, g_n i) = b_\infty(i, a_n i).$$

Como a_n es un elemento de A para todo n , sabemos que es de la forma

$$a_n = \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix},$$

por lo que

$$b_\infty(i, g_n i) = b_\infty(i, \lambda_n^2 i) = -\ln(\lambda_n^2).$$

Como esta sucesión tiende a menos infinito, tenemos que λ_n tiende a infinito en valor absoluto. Por otra parte, si actuamos en $v = (1, 0)$ con la sucesión $\{g_n^{-1}\}$ en Γ' , siendo g_n alguna de las matrices asociadas en $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ a g_n , tenemos que

$$\|g_n^{-1}v\| = \|k_n^{-1}a_n^{-1}u_n^{-1}(1, 0)\|.$$

Como k_n^{-1} actúa por transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por rotaciones respecto al origen y consecuentemente no modifica la norma de los vectores y $u_n^{-1}(1, 0) = (1, 0)$, tenemos que

$$\|g_n^{-1}v\| = \|a_n^{-1}(1, 0)\| = \|(\lambda_n^{-1}, 0)\| = |\lambda_n^{-1}|$$

y por lo tanto $g_n^{-1}v$ converge al vector nulo.

Si g es distinto de la identidad, que exista una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que $b_{g \cdot \infty}(gi, g_n i)$ tienda a menos infinito es equivalente a que exista una sucesión $\{g_n\}$ en $g^{-1}\Gamma$ tal que $b_\infty(i, g_n i)$ tienda a menos infinito.

Razonando de igual manera que en la parte anterior, sabemos que $g_n = u_n a_n k_n$ con

$$a_n = \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

y λ_n tendiendo a infinito en valor absoluto. Luego $\{(gg_n)^{-1}\} = \{g_n^{-1}g^{-1}\}$ es una sucesión de Γ' , siendo g_n una matriz en $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ asociada a g_n , tal que

$$g_n^{-1}g^{-1}v = g_n^{-1}g^{-1}g(1, 0) = g_n^{-1}(1, 0),$$

que por construcción converge al vector nulo, lo que demuestra el resultado.

Resta ver que para toda transformación g en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ existe una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que $b_{g,\infty}(gi, g_n i)$ tiende a menos infinito. Supongamos primero que g es igual a la identidad. En este caso tenemos que

$$b_\infty(i, g_n i) = -\ln(\mathrm{Im}(g_n i)),$$

siendo $\mathrm{Im}(g_n i)$ la parte imaginaria de $g_n i$. Para demostrar la afirmación basta con encontrar una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que $\mathrm{Im}(g_n i)$ tienda a infinito. Como Γ es un grupo cocompacto, existe un número real $d > 0$ tal que dados z_1 y z_2 dos puntos en \mathbb{H} , la distancia entre z_1 y la órbita de z_2 por la acción de Γ es menor que d . Consecuentemente, para todo natural n , existe una transformación g_n en Γ tal que la distancia entre $g_n i$ y ni es menor que d , lo que demuestra la afirmación.

En el caso que g es distinto de la identidad, queremos encontrar una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que

$$b_{g,\infty}(i, g_n i)$$

tienda a menos infinito. Equivalentemente, queremos encontrar una sucesión $\{g_n\}$ en $g^{-1}\Gamma$ tal que

$$b_\infty(gi, g_n i) = \ln(\mathrm{Im}(gi)) - \ln(\mathrm{Im}(g_n i))$$

tienda a menos infinito. Nuevamente, para demostrar la afirmación basta con que la parte imaginaria de $g_n i$ tienda a infinito. Como g es una isometría de \mathbb{H} , dados z_1 y z_2 en \mathbb{H} tenemos que

$$d(z_1, g^{-1}\Gamma z_2) = d(gz_1, \Gamma z_2) < d.$$

Por lo que repitiendo el argumento de la parte anterior podemos encontrar una sucesión de transformaciones $\{g_n\}$ de $g^{-1}\Gamma$ tal que la distancia entre $g_n i$ y ni es menor que d , lo que demuestra la proposición. \square

Veamos ahora la acumulación de las órbitas de elementos de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ en algún elemento no nulo de un subespacio propio de algún elemento de Γ .

Lema 3.2.5. *Si Γ es un grupo Fuchsiano, cocompacto y sin torsión, entonces para todo vector v en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y para toda matriz g en Γ' , la clausura de la órbita de v por la acción de Γ por transformaciones lineales interseca a E_g^+ , el espacio propio de g , en un vector no nulo.*

Demostración. Dado un vector v en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, por Lema 3.2.4 sabemos que existe una sucesión $\{g_n\}$ en Γ' tal que $g_n v$ converge al vector nulo. Además, dado una transformación g en Γ' podemos asumir que $g_n v$ no pertenece a E_g^- , el subespacio propio de g . En efecto, si $g_n v$ no pertenece a E_g^- para infinitos n , basta con tomar la subsucesión donde no ocurre. Si esto ocurre únicamente para una cantidad finita de valores, entonces consideremos una transformación h en Γ' tal que E_g^- sea distinto de E_h^+ y E_h^- . Sabemos que esto existe ya que las proyecciones de los pares (E_h^+, E_h^-) con h en Γ , son densos en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ por la Observación 2.4.4 y la identificación dada por el Lema 3.2.1. Luego, la sucesión $\{hg_n v\}$ tiene infinitos elementos fuera de E_g^- .

Supongamos entonces que $g_n v$ no pertenece a E_g^- , si escribimos $g_n v = v_n^+ + v_n^-$ con v_n^+ en E_g^+ y v_n^- en E_g^- , tenemos que v_n^+ será un vector no nulo para todo n . Consideremos un vector w no nulo en E_g^+ y denotemos λ al mayor valor propio de g . Tenemos entonces que el conjunto

$$\{|w|\lambda^{-p}, |w|\lambda^{-p+1}\} : p \in \mathbb{Z}\}$$

cubre toda la semirrecta real $(0, +\infty)$. De esto se deduce que, para todo n , existe un p_n tal que el módulo de v_n^+ pertenece a

$$[|w|\lambda^{-p_n}, |w|\lambda^{-p_n+1}].$$

Consecuentemente, el módulo de $g^{p_n}v_n^+$ pertenece al intervalo $[|w|, |w|\lambda]$. Por compacidad podemos concluir que, a menos de tomar subsucesiones, $g^{p_n}v_n^+$ converge a un vector no nulo v^+ en E_g^+ .

Por otro lado, como v_n^- pertenece a E_g^- para todo n y g_nv converge al vector nulo, podemos concluir que $g^{p_n}v_n^-$ también converge al vector nulo. Por último, como la acción de Γ' es por transformaciones lineales, tenemos que

$$g^{p_n}g_nv = g^{p_n}v_n^+ + g^{p_n}v_n^- \rightarrow v^+ + 0 = v^+,$$

lo que demuestra el lema. \square

Demostración del Teorema 3.1.3. Consideremos un vector v en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y veamos que su órbita por la acción de Γ' es densa. Por el Lema 3.2.5, sabemos que existe un g en Γ y un w en E_g^+ con w no nulo en la clausura de Γv . Consecuentemente, si la órbita de todos los vectores no nulos de E_g^+ es densa, la órbita de v también lo es.

Por otro lado, por el Lema 3.2.3 sabemos que existe un vector v_0 en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tal que su órbita es densa. Además, por el Lema 3.2.2 sabemos que que la órbita de la proyección de v en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ por la acción de Γ por transformaciones lineales, es densa. Consecuentemente, existe una sucesión $\{g_n\}$ en Γ tal que $[g_nv]$ converge a $[v_0]$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Esto implica que, si consideramos a g_n como sus matrices asociadas en $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ con valores propios positivos, entonces, a menos de tomar subsucesión, el ángulo entre g_nv y v_0 tiende a cero o π con n .

Luego, si consideramos a g como su matriz asociada en $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ con valores propios positivos y λ su valor propio mayor, la familia

$$\{[\lambda^p, \lambda^{-p+1}] : p \in \mathbb{Z}\}$$

cubre toda la semirrecta $(0, +\infty)$. Luego, para todo n existe un p_n tal que la norma de g_nv pertenece a $[\lambda^{p_n}, \lambda^{-p_n+1}]$. Por lo que, como v pertenece a E_g^+ , la norma de $g_n g^{p_n} v$ pertenece a $[1, \lambda]$. Por compacidad, a menos de tomar subsucesión, podemos afirmar que la norma de $g_n g^{p_n} v$ converge a un real positivo k en $[1, \lambda]$.

Combinando estos dos resultados, podemos afirmar que a menos de subsucesión, $g_n g^{p_n} v$ converge al vector kv_0 o al vector $\frac{-k}{\|v_0\|}v_0$. En cualquiera de los dos casos, como la órbita de v_0 es densa y la acción es por transformaciones lineales, v converge a un vector con órbita densa. Consecuentemente, la órbita de v es densa. \square

3.3. Caso convexo cocompacto

En esta sección veremos un resultado que nos permitirá notar cierta regularidad en el flujo horocíclico del cociente de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ por un grupo Γ convexo cocompacto. En concreto veremos que dado un grupo Γ convexo cocompacto, los elementos de Ω_Γ el no errante de Γ del flujo geodésico, retornan por el flujo horocíclico con una regularidad uniforme. Este resultado lo usaremos fuertemente en la siguiente sección en la que demostraremos el Teorema 1.0.6. Concretamente, lo usaremos en la demostración

de la existencia del semigrupo L^+ que mencionamos en la Introducción y en la demostración de la invarianza de zU_2^+ dentro del la clausura de la órbita por la acción de H de un elemento de $\Gamma \setminus G$. Sin duda un resultado muy poderoso.

Recordemos que el subgrupo U de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que define el flujo horocíclico es

$$U = \left\{ u_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La regularidad en el retorno de los puntos de Ω_Γ se formaliza en la siguiente definición.

Definición 3.3.1. *Dado un número real $K > 1$ y un subconjunto T de \mathbb{R} , decimos que T es K -grueso si para todo $t > 0$ se cumple que T interseca a $[-Kt, -t] \cup [t, Kt]$.*

Observación 3.3.2. *Dado un número real $K > 1$, si T es un conjunto K -grueso y $\lambda > 0$, entonces $\lambda T = \{\lambda t : t \in T\}$ es un conjunto K -grueso. En efecto, dado un $t > 0$, como T es K -grueso, existe un x en T tal que $|x| \in [\frac{t}{\lambda}, \frac{Kt}{\lambda}]$. Consecuentemente $|\lambda x| \in [t, Kt]$.*

Consideremos a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ como su identificación con $T^1\mathbb{H} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$, el tangente unitario de \mathbb{H} . Dado un grupo convexo cocompacto Γ , definimos su conjunto no errante Ω_Γ por el flujo geodésico, como el conjunto de los elementos (z, v) de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que la única geodésica de \mathbb{H} que pasa por z con velocidad v tiene sus puntos extremos en el borde de \mathbb{H} contenidos en el conjunto límite de Γ . El siguiente resultado corresponde al Lema 2.3 del artículo de Benoist y Oh [1].

Proposición 3.3.3. *Dado un grupo convexo cocompacto Γ , existe un $K > 1$ tal que para todo x en Ω_Γ , el conjunto $T(x) = \{t \in \mathbb{R} : xu_t \in \Omega_\Gamma\}$ es K -grueso.*

Demostración. Dado un x en Ω_Γ , a menos de conjugar Γ por un elemento de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, podemos asumir que x es (i, i) . De esto se deduce que la única geodésica definida por x es la parte positiva del eje imaginario. Esta geodésica tiene como extremos infinito y cero. Luego, como $u_t\infty = \infty$ y $u_t0 = t$, u_tx pertenece a Ω_Γ si y sólo si t pertenece al conjunto límite de Γ . Es decir

$$T(x) = \{t \in \mathbb{R} : t \in \Lambda(\Gamma)\}.$$

Como Γ es convexo cocompacto, por la Proposición 2.4.7, sabemos que $\Lambda(\Gamma)$ es o todo el borde o un conjunto perfecto de interior vacío del borde. Si es todo el borde, $T(x) = \mathbb{R}$ y por lo tanto es K -grueso para todo K . En el otro caso, como $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado, su complemento es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos J_i . Por la Proposición 2.4.9 sabemos que existe un δ positivo tal que la distancia entre las envolventes convexas de todo par de estos intervalos es mayor o igual a δ . Es decir, para todo $i \neq j$, se cumple que

$$\delta \leq d(\mathrm{hull}(J_i), \mathrm{hull}(J_j)).$$

Por otro lado, dado un $K > 1$, la distancia entre las envolventes convexas de $[-Kt, -t]$ y $[t, Kt]$ no dependen de t . En efecto, la transformación de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$a_t = \begin{bmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \sqrt{t}^{-1} \end{bmatrix}$$

mapea los intervalos $[1, K]$ y $[-K, -1]$ en $[t, Kt]$ y $[-Kt, -t]$ respectivamente. Consecuentemente mapea $\mathrm{hull}([1, K])$ y $\mathrm{hull}([-K, -1])$ en $\mathrm{hull}([t, Kt])$ y $\mathrm{hull}([-Kt, -t])$ respectivamente. Como las transformaciones de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ son isometrías de \mathbb{H} , esto demuestra la afirmación.

Veamos ahora que existe un $K > 1$ tal que la distancia entre $\text{hull}([1, K])$ y $\text{hull}([-K, -1])$ es menor que δ . Esto se concluye del hecho de que, cuando K tiende a infinito, $\text{hull}([1, K])$ y $\text{hull}([-K, -1])$ convergen a dos regiones disjuntas de \mathbb{H} con bordes las geodésicas paralelas al eje imaginario por uno y menos uno respectivamente. Como estas dos geodésicas comparten un extremo en el infinito, la distancia entre estas regiones es cero.

Ahora ya tenemos nuestro candidato a K . Supongamos por absurdo que $T(x)$ no es K -grueso para este K . Esto implica que existe un $t > 0$ tal que $[t, Kt]$ y $[-Kt, -t]$ no intersectan a $\Lambda(\Gamma)$. Como cero pertenece a $\Lambda(\Gamma)$ tenemos que existen $i \neq j$ tales que $[t, Kt]$ está contenido en J_i y $[-Kt, -t]$ está contenido en J_j . Consecuentemente $\text{hull}([t, Kt])$ está contenido en $\text{hull}(J_i)$ y $\text{hull}([-Kt, -t])$ está contenido en $\text{hull}(J_j)$. Como la distancia entre $\text{hull}(J_i)$ y $\text{hull}(J_j)$ es mayor o igual a δ , se concluye que la distancia entre $\text{hull}([t, Kt])$ y $\text{hull}([-Kt, -t])$ es mayor o igual a δ , lo cual contradice la elección del K . \square

Capítulo 4

Demostración del teorema central

Para demostrar el Teorema 1.0.6 primero demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 4.0.1. *Dado un x en $\Gamma \backslash G$ con xH no cerrada, existe un z en \overline{xH} y un semigrupo a un parámetro U_2^+ tal que zU_2^+ está contenido en \overline{xH} .*

Siendo U_2^+ el subconjunto de G de la forma:

$$U_2^+ = \{e\} \times U^+.$$

Una vez que tengamos este resultado, sumado al Corolario 3.1.5 de Hedlund, la demostración del Teorema 1.0.6 es directa.

Demostración del Teorema 1.0.6. Sea x un elemento de $\Gamma \backslash G$ y supongamos que xH no es cerrada. Por Proposición 4.0.1 sabemos que existe un elemento $z = (z_1, z_2)$ en \overline{xH} tal que zU_2^+ está contenido en \overline{xH} . Notemos que

$$zU_2^+ = \{(z_1, z_2 u_t) : t \geq 0\}.$$

Por Corolario 3.1.5 podemos concluir que

$$zU_2^+ = \{z_1\} \times \Gamma_1 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

y consecuentemente

$$zU_2^+ H = \Gamma \backslash G.$$

Luego, como zU_2^+ está contenido en la clausura de xH , tenemos que $zU_2^+ H$ también lo está y por lo tanto xH es denso. \square

Consideremos los subgrupos de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$\tilde{U} = \{\tilde{u}_t = (u_t, u_t) : u_t \in U\},$$

$$U_2 = \{e\} \times U,$$

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}_t = (a_t, a_t) : a_t \in A\},$$

Siendo A y U los subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que definen el flujo geodésico y horocíclico respectivamente.

Para demostrar la Proposición 4.0.1 primero veremos que, dado un conjunto Z contenido en \overline{xH} minimal por la acción de \tilde{U} respecto a un compacto Ω , existe un semigrupo a un parámetro L^+ en $\tilde{A}U_2$ tal que ZL^+ está contenido en Z . Luego distinguiremos entre todos los posibles semigrupos L^+ contenido en $\tilde{A}U_2$ y veremos que para todos los casos se demuestra la Proposición 4.0.1.

Recordemos la definición de semigrupo.

Definición 4.0.2. *Decimos que una terna $(G, *, e)$ es un semigrupo si G es un conjunto no vacío, $*$ es un mapa de $G \times G$ en G y e es un elemento de G tal que para todo g en G se cumple que*

$$g * e = g = e * g.$$

Usualmente denotaremos simplemente G a los semigrupos, dejando implícitos el mapa y el neutro.

Para demostrar la existencia del semigrupo L^+ la estrategia será construirlo a partir de una sucesión de elementos de $\tilde{A}U_2$ distintos de la identidad que convergen a la identidad y usando propiedades de la exponencial de matrices. Tenemos que demostrar entonces la existencia de una sucesión de ese tipo. Para eso probaremos primero que, para algún elemento z de Z , existe una sucesión de elementos g_n en $G - \tilde{U}$ distintos de la identidad que converja a la identidad y tal que zg_n pertenece a Z para todo n . Si la sucesión tiene una subsucesión de elementos que no esta en $\tilde{A}U_2U_2$, a menos de un pequeño ajuste, ya tendremos lo que buscábamos. En caso que no ocurra usaremos el segundo lemas de convergencia que demostraremos Sección 4.1 para construirla a partir de esta sucesión mediante las técnicas de drifteo polinomial planteadas por Ratner y usadas por Benoist y Oh en su artículo.

4.1. Lemas de convergencia

Esta sección se basa fuertemente en el Capítulo 2 y la Sección 3.1 del artículo de Benoist y Oh [1]. En esta sección veremos dos resultados importantes. El primero nos permite, dada una sucesión de elementos en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) - U$ que converge a la identidad, luego de conjugarla por elementos de U escogidos inteligentemente, podemos hacerla converger mediante un drifteo polinomial a un elemento de U distinto de la identidad. En segundo lugar veremos que dado una sucesión en $G - AU_1U_2$ que converge a la identidad y un entorno G_0 de la identidad, modificarla también mediante un drifteo polinomial, para que converja a un elemento de G_0 en $\tilde{A}U_2$. Esto va a ser necesario para construir el semigrupo L^+ que mencionamos en la Introducción.

Primer lema de convergencia

Para probar el primer resultado necesitaremos del siguiente resultado previo. La siguiente proposición y su corolario corresponden al lema 2.5 del artículo de Benoist y Oh [1].

Proposición 4.1.1. *Dado un número real $K > 1$ existe un k en el intervalo $(0, 1)$ tal que, dado un polinomio p con coeficientes reales, de grado a lo sumo dos y no constante con $|p(0)| \leq k$ y que cumple*

que

$$|p(1)| = \max_{t \in [-1, 1]} |p(t)| = 1,$$

y dado un conjunto T K -grueso, entonces existe un t en T tal que $k \leq |p(t)| \leq 1$.

Demostración. Supongamos que para todo real k en $(0, 1)$ existe un polinomio p_k en las hipótesis de la proposición y un conjunto K -grueso T_k tal que para todo t en T_k se cumple que $|p_k(t)|$ no pertenece a $[1, k]$. En particular, como por hipótesis $p_k(t)$ pertenece a $[-1, 1]$ para todo t en $[-1, 1]$, entonces $|p_k(t)|$ en $[0, k)$ para todo t en $[-1, 1] \cap T_k$. Consecuentemente, el supremo de $|p_{1/n}(t)|$ con t en $[-1, 1] \cap T_k$ está acotado por $1/n$ para todo n natural, y por lo tanto, tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Por otro lado, si

$$p_{1/n}(t) = c_n + b_n t + a_n t^2$$

y x_1, x_2, x_3 son tres puntos distintos en $[-1, 1]$, entonces las sucesiones $\{s_n^i = p_{1/n}(x_i)\}$ están contenidas en el intervalo $[-1, 1]$. Consecuentemente, a menos de tomar subsucesiones, las sucesiones convergen a un real s_i en $[-1, 1]$ para $i = 1, 2, 3$. Luego, cada elemento de la sucesión de sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} c_n + b_n x_1 + a_n x_1^2 = s_n^1 \\ c_n + b_n x_2 + a_n x_2^2 = s_n^2 \\ c_n + b_n x_3 + a_n x_3^2 = s_n^3 \end{cases}$$

tienen la misma matriz asociada A , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como determinante $\det(A) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$. Como los puntos x_i son distintos entre sí, el determinante de A es distinto de cero, y por lo tanto A es invertible. Consecuentemente el vector de coeficientes de los polinomios $p_{1/n}$ converge al vector $(c, b, a)^t = A^{-1}(s_1, s_2, s_3)^t$. Sea $p_0 = at^2 + bt + c$ un polinomio de coeficientes reales de grado a lo sumo dos. Observar que $|p_{1/n}(1)| = 1$ para todo n , y por lo tanto $|p_0(1)| = 1$.

Para finalizar, como los conjuntos $T_{1/n}$ son K -gruesos, podemos construir tres sucesiones de números reales $\{t_n^1\}$, $\{t_n^2\}$ y $\{t_n^3\}$ tal que t_n^i pertenezca a $T_{1/n}$ para $i = 1, 2, 3$ y para todo n . Además podemos construirlas de modo que, para todo n

$$\begin{aligned} |t_n^1| &\in [1/K, 1], \\ |t_n^2| &\in [1/K^3, 1/K^2], \\ |t_n^3| &\in [1/K^5, 1/K^4]. \end{aligned}$$

Por compacidad sabemos que a menos de tomar subsucesión estas sucesiones convergen a reales distintos t_1, t_2 y t_3 respectivamente. Por construcción sabemos que $|p_{1/n}(t_n^i)| \leq 1/n$ y por lo tanto las sucesiones $p_{1/n}(t_n^i)$ convergen a cero para $i = 1, 2, 3$. Consecuentemente $p_0(t_1) = p_0(t_2) = p_0(t_3) = 0$, lo cual es una contradicción ya que p_0 es un polinomio de grado a lo sumo 2 y $|p_0(1)| = 1$. \square

Observar que los mismos argumentos pueden repetirse para polinomios de grado menor o igual a d para todo $d \geq 1$. Basta con extender el argumento de la matriz A a una de tamaño $d + 1$ y considerar $d + 1$ sucesiones contenidas en los conjuntos K -gruesos y en el intervalo $[-1, 1]$ que converjan a puntos distintos, a menos de subsucesiones.

Corolario 4.1.2. *Dado un número real $K > 1$ y un número real $d \geq 1$, existe un k en el intervalo $(0, 1)$ tal que, dado un polinomio p con coeficientes reales, de grado a lo sumo d y no constante con $|p(0)| \leq k$ y dado T un conjunto K -grueso entonces existe un t en T tal que $k \leq |p(t)| \leq 1$.*

Demostración. Sea k el de la Proposición 4.1.1 para el K de las hipótesis adaptando su demostración a polinomios de grado a lo sumo d y sea p un polinomio cualquiera con coeficientes reales, de grado a lo sumo d y no constante con $|p(0)| \leq k$. Como p es no constante tenemos que el valor absoluto de $p(t)$ tiende a infinito cuando el valor absoluto de t lo hace. Además por hipótesis $|p(0)| \leq k < 1$. Por el teorema de Bolzano sabemos que existen reales $t_1 < 0 < t_2$ tal que $|p(t_1)| = |p(t_2)| = 1$. Además podemos suponer que $|p(t)| < 1$ para todo t en (t_1, t_2) . Definamos \hat{p} dependiendo en qué caso nos encontremos:

1. Si $|t_1| < |t_2|$ definimos $\hat{p}(t) := p(\frac{-t}{t_1})$.
2. Si $|t_1| \geq |t_2|$ definimos $\hat{p}(t) := p(\frac{t}{t_2})$.

Como p es un polinomio con coeficientes reales, de grado a lo sumo d y no constante con $|p(0)| \leq k$ entonces \hat{p} también es un polinomio de esas características. Además, por construcción

$$|\hat{p}(1)| = \max_{t \in [-1, 1]} |\hat{p}(t)| = 1,$$

es decir \hat{p} es un polinomio en las hipótesis de la Proposición 4.1.1.

Para finalizar, por Observación 3.3.2, dado un conjunto K -grueso T y un número real no nulo λ , tenemos que $\lambda T = \{\lambda x : x \in T\}$ es un conjunto K -grueso. Por la Proposición 4.1.1, independientemente de si λ es igual a $|t_1|$ o $|t_2|$ dependiendo de la definición de \hat{p} , tenemos que existe un λt en λT tal que $k \leq |\hat{p}(\lambda t)| = |p(t)| \leq 1$ con t en T . \square

Ahora si tenemos las herramientas necesarias para demostrar el resultado que buscábamos. Este resultado corresponde al lema 2.4 del artículo de Benoist y Oh [1].

Proposición 4.1.3. *Sea un número real $K > 1$ y T un conjunto K -grueso. Si $\{h_n\}$ es una sucesión de elementos de $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) - U$ tal que $h_n \rightarrow e$ entonces, a menos de tomar subsucesión, existe una sucesión $\{t_n\}$ en T y un elemento u en U distinto de la identidad tal que*

$$u_{-t_n} h_n u_{t_n} \rightarrow u.$$

Demostración. Si $q_n = u_{-t_n} h_n u_{t_n}$ y

$$h_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$q_n = \begin{pmatrix} a_n - c_n t_n & P_n(t_n) \\ c_n & d_n + c_n t_n \end{pmatrix}$$

siendo $P_n(t) = b_n + (a_n - d_n)t - c_n t^2$. Como h_n no pertenece a U para todo n , o bien $c_n \neq 0$, o bien $c_n = 0$ y $\det(h_n) = a_n d_n$. En este caso a_n y d_n son distintos de cero ya que h_n es un elemento de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ y por lo tanto su determinante es igual a 1. Por otro lado, tampoco es posible que $a_n = d_n = 1$ ya que h_n no pertenece a U . Por lo que a_n y d_n son reales distintos y no nulos.

En ambos casos P_n es un polinomio no constante de grado a lo sumo dos con coeficientes reales. Además como h_n tiende a la identidad, los coeficientes de P_n tienden a cero, en particular, dado un real $k > 0$ a partir de un n tenemos que $|P_n(0)| < k$. Si k es el del Corolario 4.1.2 para el K de las hipótesis, entonces podemos considerar una sucesión $\{t_n\}$ en T tal que $k \leq |P_n(t_n)| \leq 1$ a partir de un n .

Por otro lado,

$$1 = \det(q_n) = a_n d_n + (a_n - d_n + c_n t_n) c_n t_n - c_n P_n(t_n).$$

Si suponemos que, a menos de tomar subsucesión, $|c_n t_n| \rightarrow \infty$ entonces $\det(q_n) \rightarrow \infty$ y esto es una contradicción, por lo que los valores de $c_n t_n$ son acotados. Por compacidad, a menos de tomar subsucesión, tenemos que $c_n t_n \rightarrow r$ en \mathbb{R} y consecuentemente $1 = \det(q_n) \rightarrow 1 - r$ por lo que $r = 0$. En conclusión $c_n t_n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Finalmente, a menos de tomar una subsucesión de modo que $P_n(t_n)$ converja a un t en $[k, 1]$, se tiene que $q_n \rightarrow u = u_t$. \square

Segundo lema de convergencia

Si definimos $U_1 = U \times \{e\}$ un subgrupo de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tenemos que

$$AU_1U_2 = \left\{ (a_\lambda u_t, a_\lambda u_s) = \left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda t \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & \lambda s \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \right) : \lambda \neq 0, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

El siguiente resultado corresponde al Lema 3.1 del artículo de Benoist y Oh [1].

Lema 4.1.4. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión en $G - \tilde{A}U_1U_2$ que converge a e y sea T un subconjunto K -grueso de \mathbb{R} para algún $K > 1$. Entonces, para cualquier entorno G_0 de e en G , existen sucesiones $\{s_n\} \in T$ y $\{t_n\} \in \mathbb{R}$ tales que la sucesión $\tilde{u}_{-s_n} g_n \tilde{u}_{t_n}$ tiene un punto límite $q \neq e$ en $\tilde{A}U_2 \cap G_0$.*

Demostración. Denotemos a $g_n = (g_n^{(1)}, g_n^{(2)})$ con

$$g_n^{(i)} = \begin{bmatrix} a_n^{(i)} & b_n^{(i)} \\ c_n^{(i)} & d_n^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces que el producto $h_n = \tilde{u}_{-s_n} g_n \tilde{u}_{t_n} = (h_n^{(1)}, h_n^{(2)})$ está dado por

$$h_n^{(i)} = \begin{bmatrix} a_n^{(i)} - c_n^{(i)} s_n & (b_n^{(i)} - d_n^{(i)} s_n) - t_n (c_n^{(i)} s_n - a_n^{(i)}) \\ c_n^{(i)} & d_n^{(i)} + c_n^{(i)} t_n \end{bmatrix}.$$

Si consideramos a

$$t_n = \frac{b_n^{(1)} - d_n^{(1)} s_n}{c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}},$$

tenemos que

$$h_n - e = \frac{1}{c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}} P(s_n) = \frac{1}{c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}} (P_n^{(1)}(s_n), P_n^{(2)}(s_n)),$$

donde las matrices $P_n^{(i)}$ son matrices cuyas estradas son polinomios con coeficientes reales de grado a lo sumo dos evaluados en s_n . Concretamente, si

$$P_n^{(i)} = \begin{bmatrix} p_{1,n}^{(i)} & p_{2,n}^{(i)} \\ p_{3,n}^{(i)} & p_{4,n}^{(i)} \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
p_{1,n}^{(1)} &= -c_n^{(1)2} s_n^2 + (2a_n^{(1)} - 1)c_n^{(1)} s_n + (1 - a_n^{(1)})a_n^{(1)}, \\
p_{2,n}^{(1)} &= 0, \\
p_{3,n}^{(1)} &= c_n^{(1)2} s_n - c_n^{(1)} a_n^{(1)}, \\
p_{4,n}^{(1)} &= -c_n^{(1)} s_n + a_n^{(1)} - 1, \\
p_{1,n}^{(2)} &= -c_n^{(1)} c_n^{(2)} s_n^2 + (a_n^{(1)} c_n^{(2)} - c_n^{(1)} a_n^{(2)} - c_n^{(1)}) s_n + (1 - a_n^{(2)}) a_n^{(1)}, \\
p_{2,n}^{(2)} &= (d_n^{(1)} c_n^{(2)} - c_n^{(1)} d_n^{(2)}) s_n^2 + (c_n^{(1)} b_n^{(2)} + a_n^{(1)} d_n^{(2)} - d_n^{(1)} c_n^{(2)} - d_n^{(1)} a_n^{(2)}) s_n + (b_n^{(1)} a_n^{(2)} - a_n^{(1)} b_n^{(2)}), \\
p_{3,n}^{(2)} &= c d_n^{(1)} c_n^{(2)} s_n - a_n^{(1)} c_n^{(2)}, \\
p_{4,n}^{(2)} &= (c_n^{(1)} d_n^{(2)} - d_n^{(1)} c_n^{(2)}) s_n + (d_n^{(1)} c_n^{(2)} - a_n^{(1)} d_n^{(2)}).
\end{aligned}$$

Veamos que alguna coordenada de las matrices de las entradas de $P_n(s_n)$, es un polinomio no constante. En efecto, como las transformaciones g_n no pertenecen a AU_1U_2 , tenemos que $c_n^{(i)}$ no son simultáneamente nulas y por lo tanto $p_{1,n}^{(1)}$ es un polinomio de grado dos o $p_{4,n}^{(2)}$ es un polinomio de grado uno. Consecuentemente, si $\|P_n(s_n)\|$ es la norma de P_n evaluado en s_n como vector de \mathbb{R}^8 , tenemos que el mapa $q_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que mapea s_n en $\|P_n(s_n)\|^2$, es una función polinómica no constante de coeficientes reales y grado a lo sumo cuatro.

Por otro lado, sea k en $(0, 1)$ es la del Lema 4.1.2 para polinomios de grado a lo sumo cuatro. Dado un $\epsilon > 0$, como $\|P_n(0)\|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, a partir de un n los polinomios $\frac{1}{\epsilon^2} q_n$ estarán en las hipótesis del Lema 4.1.2. Consecuentemente, podemos encontrar una sucesión $\{s_n\}$ en T tal que

$$\epsilon\sqrt{k} \leq \|P_n(s_n)\| \leq \epsilon.$$

En particular, podemos concluir que $1/2 \leq |c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}| \leq 2$. En efecto, como la norma de $P_n(s_n)$ es menor que ϵ , el valor absoluto de $|p_{4,n}^{(1)}(s_n)| = |(c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}) + 1|$ también lo es, lo que demuestra la afirmación suponiendo que ϵ es menor que $1/2$.

Podemos concluir entonces que

$$\epsilon\sqrt{k}/2 \leq \|h_n - e\| \leq 2\epsilon,$$

y por lo tanto, a menos de tomar subsucesión, h_n converge a un elemento h distinto de la identidad. Además, como $p_{2,n}^{(1)}$, $p_{3,n}^{(1)}$ y $p_{3,n}^{(2)}$ tienden a cero cuando n tiende a infinito, eligiendo el ϵ para que la sucesión $\{h_n\}$ esté contenida en el entorno G_0 ; tenemos que $h = (h^{(1)}, h^{(2)})$ es un elemento de $A_1 A_2 U_2 \cap G_0$, siendo

$$A_1 = A \times \{e\},$$

$$A_2 = \{e\} \times A.$$

Veamos que podemos asumir que h es un elemento de $\tilde{A}U_2$. Para esto basta con observar que las coordenadas $(1, 1)$ de $h^{(1)}$ y $h^{(2)}$ la primera y segunda coordenada de h , son iguales. Supongamos por absurdo que las primeras coordenadas de $h^{(1)}$ y $h^{(2)}$ son distintas. Esto implica que si $c_n^{(i)} s_n$ converge a un real $c^{(i)}$, entonces $c^{(1)}$ y $c^{(2)}$ son distintos. Como los valores $c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}$ pertenecen en norma

al intervalo $(1/2, 2)$, podemos concluir que $c^{(1)}$ es distinto de uno y la sucesión $\{s_n\}$ es divergente en valor absoluto. Por otro, la coordenada $(2, 2)$ de $h^{(2)}$ esta dada por el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n^{(2)} - d_n^{(2)} s_n)(c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}) - (b_n^{(1)} - d_n^{(1)} s_n)(c_n^{(2)} s_n - a_n^{(2)})}{c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}},$$

que es equivalente al límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^{(2)} s_n - c_n^{(1)} s_n}{c_n^{(1)} s_n - a_n^{(1)}} s_n.$$

El primer factor del límite converge a un número real distinto de cero dado por

$$\frac{c^{(2)} - c^{(1)}}{c^{(1)} - 1}$$

mientras que el segundo factor diverge en norma, por lo que este límite diverge, lo cual es una contradicción. \square

4.2. Lema del Teorema 1.0.6

Ahora que ya tenemos la estructura de la demostración, comencemos a darle forma. Comencemos por ver la existencia del subconjunto Z que sea \tilde{U} -minimal respecto a un compacto Ω . Primero definamos que significa esto.

Definición 4.2.1. *Dado un grupo G que actúa en un espacio topológico X y un subconjunto compacto C de X , decimos que un subconjunto Y de X es G -minimal respecto a C si*

1. *El conjunto Y es cerrado G -invariante.*
2. *El conjunto Y tiene intersección no vacía con C .*
3. *Si Z es un subconjunto de Y que cumple (1) y (2), entonces $Z = Y$.*

Recordemos que, en el contexto que estamos trabajando Γ_1 es un grupo convexo cocompacto y Γ_2 es un grupo cocompacto sin torsión. Si Ω_{Γ_1} es el conjunto no errante de Γ_1 y denotamos

$$X = X_1 \times X_2 := \Gamma_1 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \Gamma_2 \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \Gamma \backslash G,$$

el conjunto

$$\Omega := \Omega_{\Gamma_1} \times X_2$$

es un subconjunto compacto de X . En efecto, como Γ_1 es un grupo convexo cocompacto, Ω_{Γ_1} es un subconjunto compacto de X_1 y como Γ_2 es un grupo cocompacto, X_2 es un conjunto compacto.

Por otro lado recordemos que denotábamos H y \tilde{U} a los subgrupos de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$H = \left\{ \tilde{h} = (h, h) : h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\tilde{U} = \{(u, u) : u \in U\},$$

siendo U el grupo que define el flujo horocíclico. Observar que X es un producto de cocientes a izquierda de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y por lo tanto podemos actuar con H por composición a derecha en X . Luego,

si consideramos a $x = (x_1, x_2)$ un elemento de X , tenemos que xH , la órbita de x por la acción de H , interseca a Ω . En efecto, si x es de la forma

$$x = (x_1, x_2) = (\Gamma_1 g_1, \Gamma_2 g_2)$$

y $\Gamma_1 g'$ es un elemento de Ω_{Γ_1} , entonces $x \cdot \tilde{g}_1^{-1} \tilde{g}'$ es un elemento de la órbita de x y de Ω .

De igual manera que H , el grupo \tilde{U} actúa a derecha en X . Además, por la Proposición 3.3.3, sabemos que dado un elemento z de Ω , su órbita por la acción de \tilde{U} retorna a Ω con cierta periodicidad.

Fijemos un elemento x en X y consideremos un subconjunto Y de la clausura de la órbita de x por la acción de H que sea H -minimal respecto a Ω . Además consideremos un subconjunto Z de Y que sea U -minimal respecto a Ω . Estos conjuntos existen por ser Ω compacto, en efecto, la clausura de xH es cerrada e invariante por la acción de H y además interseca el compacto Ω . Si no es H -minimal respecto a Ω es por que existe un elemento x_1 con $x_1 \bar{H}$ estrictamente contenida en \bar{xH} . Si en repitiendo este proceso finitas veces no encontramos un conjunto H -minimal respecto a Ω podremos construir una sucesión de compactos encajados $C_i = \overline{x_i H} \cap \Omega$. Consecuentemente, la intersección de los C_i es no vacío y cumple la condición de ser H -minimal respecto a Ω .

Este mismo argumento se puede repetir para construir el conjunto Y teniendo el cuidado construir la sucesión considerando elementos de Ω en cada paso.

En el resto de la monografía supondremos que la órbita de x por la acción de H no es cerrada en X .

Existencia del semigrupo L^+

Lema 4.2.2. *Dados un espacio topológico X no compacto, un subconjunto compacto K de X y un flujo ϕ en X , si x es un elemento no periódico de X tal que $\{t \in \mathbb{R} : \phi_t(x) \in K\}$ es un conjunto no acotado, entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ en \mathbb{R} tal que $\phi_{t_n}(x)$ converja a un punto de K que no pertenece a la órbita de x .*

Probemos entonces la existencia de la sucesión en $G - \tilde{U}$. Este resultado corresponde al lema 3.4 del artículo de Benoist y Oh [1].

Lema 4.2.3. *Dado un z en $Z \cap \Omega$, existe una sucesión $\{g_n\}$ en $G - \tilde{U}$ que converge a la identidad y tal que $z g_n$ pertenece a Z para todo n .*

Demostración. Si $z = (z_1, z_2) = (\Gamma_1 g_1, \Gamma_2 g_2)$, y nos fijamos en la segunda coordenada, tenemos que el conjunto $z_2 U$ es la órbita de z_2 del flujo horocíclico en $\Gamma_2 \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Esto implica que $z_2 U$ es una curva cerrada o una curva infinita que no se autointerseca. Supongamos que $z_2 U$ es una curva cerrada, esto implica que existen dos reales $t \neq s$ tal que $z u_t$ es igual a $z u_s$. Consecuentemente, existe un elemento g de Γ_2 tal que

$$g g_2 u_t = g_2 u_s$$

y por lo tanto

$$g = g_2 u_{s-t} g_2^{-1}.$$

Esto es una contradicción ya Γ_2 es un grupo cocompacto, por lo que no tiene elementos parabólicos. Por otro lado, por la Proposición 3.3.3 sabemos que $z \tilde{U}$ es recurrente en $Z \cap \Omega$ para valores de t tan

grandes como queramos en valor absoluto. De estas dos condiciones se deduce que

$$\{t \in \mathbb{R} : z\tilde{u}_t \in \Omega\}$$

es un conjunto no acotado. Consecuentemente, por el Lema 4.2.2 existe un punto de acumulación de $z\tilde{U}$ en $Z \cap \Omega$ no pertenece a $z\tilde{U}$.

Sea z' un elemento de $Z \cap \Omega$ que no pertenece a $z\tilde{U}$. Como Z es \tilde{U} -minimal, tenemos que $z'\tilde{U}$ es denso en Z y por lo tanto, existe una sucesión $\{\tilde{u}_{t_n}\}$ en \tilde{U} tal que $z'\tilde{u}_{t_n}$ converge a z , y consecuentemente, existe una sucesión $\{g_n\}$ en G tal que $z'\tilde{u}_{t_n} = zg_n$. Observar que por construcción zg_n pertenece a Z para todo n y g_n converge a la identidad. Por otro lado, si suponemos que para algún n , g_n pertenece a \tilde{U} , tenemos que $z' = zg_n\tilde{u}_{t_n}^{-1}$ pertenece a $z\tilde{U}$, lo cual es una contradicción. \square

Lo que vamos a ver ahora es que las transformaciones g de AU_2 se pueden escribir como la clase de la exponencial de matrices, es decir, existen matrices w en $M_{2 \times 2}$ tal que $g = \exp(w)$.

Para probar la existencia del semigrupo L hace falta trabajar un poco sobre las propiedades del mapa exponencial en matrices. Recordemos que podemos definir el mapa exponencial $\exp : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ dado por

$$\exp(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!}$$

donde g^0 es igual a la identidad. Una propiedad que vamos a usar de este mapa es su buen comportamiento con la conjugación, es decir que

$$\exp(hgh^{-1}) = h \exp(g) h^{-1}.$$

Veamos ahora que, para todo elemento $(a_\lambda, a_\lambda u_t)$ del subgrupo $\tilde{A}U_2$ de G existe un elemento (m_1, m_2) de $M_2 \times M_2$ tal que $(\exp(m_1), \exp(m_2))$ pertenece a $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ y su proyección en G es el vector $(a_\lambda, a_\lambda u_t)$.

Primero consideremos un elemento a_λ en A de la forma

$$a_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}.$$

Si consideramos la matriz el representante de a_λ de modo que λ sea mayor que cero, y consideramos la matriz b_λ diagonalizable de traza igual a cero de la forma

$$b_\lambda = \begin{bmatrix} \ln(\lambda) & 0 \\ 0 & -\ln(\lambda) \end{bmatrix},$$

tenemos que $\exp(b_\lambda) = a_\lambda$.

Por otro lado, si consideramos un elemento $a_\lambda u_t$ de AU de la forma

$$a_\lambda u_t = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda t \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Tenemos que su traza es igual a la de a_λ , por lo que va a ser un elemento hiperbólico. Además, λ es uno de sus valores propios, por lo que existe una transformación g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que $a_\lambda u_t = ga_\lambda g^{-1}$. Consecuentemente, si consideramos las matrices asociadas en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con valores propios positivos de $a_\lambda u_t$ y a_λ y cualquiera asociada a g , tenemos que $\exp(gb_\lambda g^{-1}) = g \exp(b_\lambda) g^{-1} = ga_\lambda g^{-1} = a_\lambda u_t$.

De estas dos observaciones se deduce que, si definimos el subconjunto de $M_2 \times M_2$ dado por

$$W_{AU_2} = \{(b_\lambda, gb_\lambda g^{-1}) : g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \lambda > 0\}$$

el mapa $\exp : W_{AU_2} \rightarrow AU_2$ dado por

$$\exp(b_\lambda, gb_\lambda g^{-1}) = \pi(a_\lambda, ga_\lambda g^{-1})$$

siendo π la proyección de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, está bien definido, es continuo y sobreyectivo. Como los elementos de W_{AU_2} son de la forma

$$w = \left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix} \right)$$

con x y s números reales, tenemos que el conjunto W_{AU_2} es un \mathbb{R} espacio vectorial y además un conjunto cerrado. Consecuentemente, si tenemos una sucesión $\{w_n\}$ en W_{AU_2} que converge a un elemento w , entonces w también pertenece a W_{AU_2} .

Definición 4.2.4. *Decimos que un semigrupo G es un semigrupo a un parámetro si existe un mapa continuo ϕ definido de los reales positivos en G tal que para todo par de reales positivos r y s se cumple que*

$$\phi(r + s) = \phi(r)\phi(s).$$

Ahora tenemos todas las herramientas para demostrar la existencia del semigrupo L . Este resultado corresponde la Proposición 3.5 del artículo de Benoist y Oh [1].

Proposición 4.2.5. *Existe un semigrupo a un parámetro L en $\tilde{A}U_2$ tal que ZL está contenido en Z .*

Demostración. Alcanza con encontrar una sucesión $\{h_n\}$ en $\tilde{A}U_2$ que converge a la identidad con todo elemento distinto de la identidad y tal que Zh_n este contenido en Z para todo n . En efecto, en ese caso sabemos que, para todo n , existe una matriz w_n en W_{AU_2} tal que

$$h_n = \exp(w_n).$$

Luego, la sucesión $\{w_n/\|w_n\|\}$ es una sucesión en W_{AU_2} contenida en un compacto, por lo que, a menos de tomar subsucesión, sabemos que converge a un elemento w no nulo en W_{AU_2} . Como W_{AU_2} es un \mathbb{R} espacio vectorial y por la propiedad aditiva de la exponencial, tenemos que el conjunto

$$L = \{\exp(sw) : s \geq 0\}$$

es un semigrupo a un parámetro contenido en $\tilde{A}U_2$. Más aún, ZL está contenido en Z . En efecto, consideremos un real positivo t_0 . Por la continuidad del mapa exponencial, tenemos entonces que

$$\exp(t_0 w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{t_0}{\|w_n\|} w_n\right).$$

Por otro lado, como $\|w_n\|$ tiende a cero, si l_n es la parte entera de $t_0/\|w_n\|$ tenemos que

$$\exp(t_0 w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(l_n w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(w_n)^{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{l_n}.$$

Consecuentemente, como Zh_n está contenido en Z para todo n , tenemos que $Zh_n^{l_n}$ está contenido en Z para todo n , y como Z es un conjunto cerrado $Z \exp(t_0 w)$ está contenido en Z , lo cual probaría el resultado.

Veamos ahora que existe la sucesión $\{h_n\}$. Consideremos un $z = (z_1, z_2)$ en Z , por el Lema 4.2.3 sabemos que existe una sucesión $\{g_n\}$ en $G - \tilde{U}$ que converge a la identidad con zg_n en Z para todo n . Consideremos primero el caso en que g_n es un elemento de $\tilde{A}U_1U_2$ para infinitos n . A menos de tomar subsucesión podemos considerar que $\{g_n\}$ está contenida en $\tilde{A}U_1U_2$. Si $g_n = (a_{\lambda_n} u_{-t_n}, a_{\lambda_n} u_{s_n})$ para todo n y consideramos la sucesión $\{\tilde{u}_{t_n}\}$ en \tilde{U} , tenemos que $h_n = g_n \tilde{u}_{t_n}$ es un elemento de AU_2 distinto de la identidad para todo n . Luego, como zg_n es un elemento de Z para todo n y Z es un conjunto \tilde{U} -minimal, tenemos que $zh_n = zg_n \tilde{u}_{t_n}$ es un elemento de Z para todo n . Por último, tenemos que

$$Zh_n = \overline{z\tilde{U}h_n} \subset \overline{zh_n\tilde{U}} = Z.$$

Consideremos ahora el caso en que g_n es un elemento de AU_1U_2 solamente para finitos n . A menos de tomar subsucesión, podemos suponer que g_n no pertenece a AU_1U_2 para todo n . Consideremos un entorno G_0 de la identidad en G , por la Proposición 3.3.3 y el Lema 4.1.4 tenemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ en $T(z_1)$ y una sucesión $\{t_n\}$ en \mathbb{R} tal que, a menos de tomar subsucesión, $\tilde{u}_{-s_n} g_n \tilde{u}_{t_n}$ converge a un elemento h en $AU_2 \cap G_0$ distinto de la identidad. Luego, la sucesión $\{z\tilde{u}_{s_n}\}$ está contenida en $Z \cap \Omega$ y por compacidad, a menos de tomar subsucesión, converge a un elemento z' en $Z \cap \Omega$. Consecuentemente tenemos que

$$z'h = \lim_{n \rightarrow \infty} zg_n \tilde{u}_{t_n}.$$

Como zg_n pertenece a Z para todo n y Z es un conjunto \tilde{U} -minimal, tenemos que $z'h$ pertenece a Z . Finalmente, repitiendo el argumento del caso anterior, tenemos que Zh está contenido en Z . Tomando entornos G_0 con diámetros que converjan a cero, podemos construir la sucesión $\{h_n\}$ que estábamos buscando. \square

Demostración de la Proposición 4.0.1

Ahora que ya probamos la existencia del semigrupo L^+ veamos que para todos los posibles casos se cumple la Proposición 4.0.1. Para eso necesitamos unos resultados previos. Veamos primero que para todo y en Y podemos encontrar una sucesión de elementos $\{g_n\}$ en $G - H$ que converjan a la identidad y que yg_n siga contenido dentro de \overline{xH} . Este lema corresponde al Lema 3.2 del artículo de Benoist y Oh[1].

Lema 4.2.6. *Si \overline{xH} no es cerrada, para todo y en Y , el elemento identidad e en X es un punto de acumulación de*

$$\{g \in G - H : yg \in \overline{xH}\}.$$

Demostración. Consideremos primero el caso en el que y no pertenece a xH . Esto implica que existe una sucesión $\{\tilde{h}_n\}$ en H tal que $x\tilde{h}_n$ converge a y . Consecuentemente existe una sucesión $\{g_n\}$ en G tal que yg_n converge a la identidad. En efecto, si $x = (\Gamma_1 g_1, \Gamma_2 g_2)$ e $y = (\Gamma_1 g'_1, \Gamma_2 g'_2)$ basta con considerar

$$g_n = (g_1'^{-1} g_1 h_n, g_2'^{-1} g_2 h_n).$$

Observar que los elementos g_n no pertenecen a H , de lo contrario $y = x\tilde{h}_n g_n^{-1}$ pertenecería a xH . Además, $yg_n = xh_n$, por lo que pertenece a \overline{xH} . Esto demuestra el Lema en este caso, ya que g_n pertenece a $G - H$ para todo n y converge a la identidad y yg_n pertenece a \overline{xH} .

Consideremos ahora el caso en el que y pertenece a xH y supongamos que la afirmación no es verdadera. Esto implica que existe un entorno de la identidad G_0 en G tal que para todo elemento g de G_0 para el que yg pertenezca a \overline{xH} , se tiene que g pertenece a H . Consecuentemente, para todo yg en yG_0 tal que yg pertenezca a \overline{xH} se tiene que yg pertenece a yH . Como Y está contenida en \overline{xH} , entonces $G_0 \cap Y$ está contenida en yH . De esto se deduce que yH es un abierto de Y . En efecto, si consideramos $y\tilde{h}$ en $G_0 \cap Y$ y un elemento $y\tilde{h}'$ en yH , tenemos que $G_0\tilde{h}^{-1}\tilde{h}' \cap Y$ es un entorno abierto de $y\tilde{h}'$ en Y . Como Y es H -minimal entonces $yH = Y$, de lo contrario, el complemento de yH en Y sería un abierto de interior no vacío, lo que contradice que $\overline{yH} = Y$. Finalmente, como y pertenece a xH tenemos que $xH = yH = Y$ y por lo tanto xH es un subconjunto cerrado de X , lo que contradice las suposición de esta sección. \square

Con el Lema 4.2.6 podemos demostrar el siguiente resultado que usaremos luego para demostrar que la órbita de un z de Z en \overline{xH} por la acción del semigrupo U_2^+ está también contenida en \overline{xH} . El siguiente resultado corresponde al Lema 3.3 del artículo de Benoist y Oh [1].

Definamos el subgrupo $H_2 = \{e\} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Lema 4.2.7. *Existe un elemento v de U_2 distinto de la identidad tal que Zv está contenido en \overline{xH} .*

Demostración. Consideremos un elemento $z = (z_1, z_2)$ de $Z \cap \Omega$. Como Z es un subconjunto de Y , por el Lema 4.2.6 existe una sucesión $\{g_n\}$ en $G - H$ que converge a la identidad y que además cumple que zg_n pertenece a la clausura de xH para todo n . Podemos asumir, sin perder generalidad que la sucesión está contenida en H_2 . En efecto, si $g_n = (g_{1,n}, g_{2,n})$ y consideramos al elemento $\tilde{h}_n = (g_{1,n}^{-1}, g_{1,n}^{-1})$ de H , tenemos que $yg_n\tilde{h}_n$ es un elemento de la clausura de xH . Además, como la sucesión $\{g_n\}$ converge a la identidad las sucesiones $\{g_{1,n}\}$ y $\{g_{2,n}\}$ también lo hacen en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Además $g_{1,n}$ y $g_{2,n}$ son distintos para todo n , de lo contrario g_n sería un elemento de H . Consecuentemente la sucesión $g_n\tilde{h}_n = (e, g_{2,n}g_{1,n}^{-1})$ también converge a la identidad. Podemos suponer entonces que $g_n = (e, g'_n)$ con g'_n en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ distinto de la identidad para todo n .

Para encontrar el v primero consideremos el caso en el que existe un n_0 tal que g_{n_0} es un elemento de U_2 distinto de la identidad. En este caso consideremos a $v = g_{n_0}$. Como U es un grupo abeliano, tenemos que v conmuta con todo elemento de \tilde{U} . Por otro lado, como Z es \tilde{U} -minimal tenemos $\overline{zU} = Z$. Consecuentemente $Zv = \overline{zU}v = \overline{zvU}$ y como por construcción zv pertenece a la clausura de xH , tenemos que Zv está contenido en $\overline{xHU} = \overline{xH}$, lo que demuestra la afirmación.

Veamos ahora el caso en que todo g_n no pertenece a U_2 . Como z pertenece a Ω tenemos que z_1 es un elemento de Ω_{Γ_1} . Por la Proposición 3.3.3, sabemos que existe un $K < 1$ tal que el conjunto

$$T(z_1) = \{u_t : zu_t \in \Omega_{\Gamma_1}\}$$

es un conjunto K -grueso. Por otro lado, como g_n no pertenece a U_2 , tenemos que g'_n no pertenece a U , por lo que, por la Proposición 4.1.3 sabemos que existe una sucesión $\{t_n\}$ en $T(z_1)$ y un elemento v' en U distinto de la identidad, tal que

$$u_{-t_n}g'_n u_{t_n} \rightarrow v'.$$

Observar que, como t_n pertenece a $T(z_1)$ tenemos que $z_1 u_{t_n}$ pertenece a Ω_{Γ_1} para todo n . Consecuentemente, si definimos $\tilde{u}_{t_n} = (u_{t_n}, u_{t_n})$ en \tilde{U} , tenemos que $z\tilde{u}_{t_n}$ pertenece a Ω . Como Ω es compacto, a menos de tomar subsucesiones, podemos considerar que $z\tilde{u}_{t_n}$ converge a un vector z' en Ω . Finalmente, si notamos a $v = (e, v')$, tenemos que

$$z'v = \lim_{n \rightarrow \infty} z\tilde{u}_{t_n} \tilde{u}_{-t_n} g_n \tilde{u}_{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} z g_n \tilde{u}_{t_n}.$$

De esto se deduce que $z'v$ es un elemento de la clausura de xH , en efecto, por construcción para todo n sabemos que $z g_n$ es un elemento de \overline{xH} y \tilde{u}_{t_n} es un elemento de \tilde{U} , consecuentemente $z g_n \tilde{u}_{t_n}$ pertenece a \overline{xH} . Esto demuestra la afirmación ya que $Zv = \overline{z'U}v = \overline{z'vU}$ y por lo tanto está contenido en la clausura de xH . \square

Ahora ya tenemos todas las herramientas para demostrar el Teorema 4.0.1. Este resultado corresponde a la Proposición 3.6 del artículo de Benoist y Oh [1].

FIN.

Gracias por leer :)

Bibliografía

- [1] Y. Benoist and H. Oh. Fuchsian groups and compact hyperbolic surfaces. *Enseign. Math.*, 62(1-2):189–198, 2016.
- [2] Y. Benoist and J.-F. Quint. Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes. *Ann. of Math. (2)*, 174(2):1111–1162, 2011.
- [3] F. Dal’Bo. *Geodesic and horocyclic trajectories*. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2011. Translated from the 2007 French original.
- [4] G. A. Hedlund. Fuchsian groups and transitive horocycles. *Duke Mathematical Journal*, 2(3):530–542, 1936.
- [5] S. Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [6] C. T. McMullen, A. Mohammadi, and H. Oh. Geodesic planes in hyperbolic 3-manifolds. *Invent. Math.*, 209(2):425–461, 2017.
- [7] D. W. Morris. *Ratner’s theorems on unipotent flows*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2005.
- [8] T. Tao. *Hilbert’s fifth problem and related topics*, volume 153 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.