Trabajo monográfico

Estructuras Algebráicas de Grupos de Difeomorfismos Según su Regularidad

Matías Ures

Orientador:

Sébastien Alvarez

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Estructuras Algebráicas de Grupos de Difeomorfismos Según su Regularidad

Matías Ures

Índice general

Introducción

En la teoría de sistemas dinámicos se estudia la evolución de orbitas de funciones continuas $f : X \to X$ o flujos $\varphi : T \times X \to X, T \subset \mathbb{R}$ sobre un espacio topológico X, cuando f es un homeomorfismo o $T = \mathbb{R}$ podemos pensar en ellos como acciones de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ sobre X respectivamente. Por este motivo el estudio de acciones de grupos sobre espacios topológicos por homeomorfismos se podría considerar una generalización de los sistemas dinámicos.

Pero, ¿por qué estudiar grupos de difeomorfismos? Para responder esta pregunta veamos primero un teorema debido a Richard Patrick Filipkiewicz [5]:

Teorema. *Sean M y N dos variedades C^∞ sin borde y sean $\mathrm{Diff}^p(M)$ y $\mathrm{Diff}^q(N)$ para $1 \leq p, q \leq \infty$ los grupos de difeomorfismos C^p de M y difeomorfismos C^q de N respectivamente. Si*

$$\phi : \mathrm{Diff}^p(M) \to \mathrm{Diff}^q(N)$$

es un isomorfismo de grupos, entonces $p = q$ y existe un difeomorfismo C^p $w : M \to N$ tal que

$$\phi(f)(n) = wfw^{-1}(n)$$

para todo $f \in \mathrm{Diff}^p(M)$ y $n \in N$.

Este teorema nos dice que, incluso en una misma variedad, pedir más regularidad impone una restricción en la estructura del grupo de difeomorfismos. En teoría de grupos es normal estudiar grupos por acciones en conjuntos lindos, como las variedades, y generalmente cuanto más regularidad tenga las funciones por las que actúa el grupo, mejor. Sin embargo, por el teorema de Filipkiewicz, hay grupos que actúan en una variedad M por funciones con regularidad no mayor a cierto p. En esta monografía nos centraremos principalmente en las diferencias estructurales entre los grupos de difeomorfismos sobre variedades unidimensionales de regularidad C^1 o C^2.

En el capítulo 1 estudiamos los grupos que serán relevantes más adelantes, son resultados básicos sobre grupos nilpotentes, solubles y promediables. La primera sección es la única sección que se podría considerar enteramente algebráica en la monografía, ya que la segunda sección, si bien presenta resultados algebráicos, se demuestran usando mayoritariamente análisis. Este capítulo usa resultados del apéndice, el cual es opcional y está para que la monografía sea más autocontenida pero no es necesario para entender los resultados.

En el capítulo 2 comenzamos con resultados más dinámicos, y empezamos a estudiar acciones de grupos por homeomorfismos sobre el círculo. En la primera sección se prueba la generalización de un resultado clásico que nos permite separar a los subgrupos de $\mathrm{Homeo}(S^1)$ en tres categorías. Luego se presentan resultados sobre el número de rotación, y probamos el teorema de Hölder que da una condición suficiente sobre el orden de un grupo para que sea abeliano. El capítulo termina con un ejemplo de un homeomorfismo del círculo con un minimal excepcional y un subgrupo de $\mathrm{Homeo}(R)$ nilpotente no abeliano.

El capítulo 3 es el capítulo central de esta monografía, está centrado en acciones de grupos sobre el círculo por difeomorfismos $C^{1+\mathrm{Lip}}$. Comenzamos probando el teorema de Denjoy con argumentos de control de distorsión, este teorema prueba que no existen difeomorfismos $C^{1+\mathrm{Lip}}$ del círculo con un minimal excepcional, y probamos el teorema de Sacksteder que sería una generalización del teorema de Denjoy para subgrupos finitamente generados de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}$. Luego probamos el teorema principal de esta monografía, el teorema de Plante-Thurston, este teorema prueba que no existen subgrupos nilpotentes no abelianos de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}$. Al final del capítulo probamos que para todo $\tau \in (0,1)$ existe un difeomorfismo $C^{1+\tau}$ con un minimal excepcional y mostramos un ejemplo de un subgrupo nilpotente no abeliano de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$, justificando nuestra elección de la cota C^{1+} para la regularidad en el teorema de Denjoy y el teorema de Plante-Thurston.

En el cap'itulo 3 se utilizan métodos dinámicos para las demostraciones, ya que nos lo permite la rigidez de las funciones $C^{1+\mathrm{Lip}}$, sin embargo en el capítulo 4 estudiamos las restricciones C^1 por lo tanto haremos más uso de las estructuras de grupo. Primero vemos el teorema de Bonatti-Monteverde-Navas-Rivas que muestra que toda acción C^1 fiel de $BS(1,2)$ sobre $[0,1]$ sin puntos fijos globales en el interior es conjugada a la acción afín estándar (de $BS(1,2)$), y el elemento asociado a la multiplicación por 2 tiene derivada 2 en su único punto fijo, en esta prueba nos aprovechamos del crecimiento rápido del grupo $BS(1,2)$. Terminamos con el teorema de estabilidad de Thurston que estipula que si un grupo tiene una representación no trivial en $\mathrm{Diff}_+^1([0,1))$, entonces existe un homomorfismo no trivial del grupo a $(\mathbb{R},+)$, este teorema lo probamos tomándonos funciones que son casi homomorfismos sobre un subconjunto del grupo y hacemos que estas funciones converjan a un homomorfismo no trivial.

1. Grupos

En este capítulo veremos resultados básicos sobre grupos nilpotentes, solubles y promediables. Los grupos nilpotentes jugarán un papel importante en el capítulo 3, donde probamos el teorema de Plante-Thurston. Si bien los grupos solubles no son centrales en ninguna parte de la monografía, están fuertemente relacionados con los grupos nilpotentes, además el grupo $BS(1,2)$ es soluble y este grupo será importante en el capítulo 4. Los grupos promediables son relevantes principalmente en el segundo capítulo, en especial por su relación con el número de rotación.

1.1. Nilpotencia y solubilidad

En teoría de grupos, un grupo se dice que es nilpotente cuando es "casi abeliano". Un grupo abeliano Γ cumple que $[x,y] = id$ para todo $x, y \in \Gamma$, de manera similar un grupo Γ es nilpotente si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $x_1, ..., x_n \in \Gamma$ entonces $[x_1, [..., [x_{n-1}, x_n]...]] = id$, más formalmente:

Definición 1.1.1. Decimos que Γ es **nilpotente** si existe una serie central

$$\Gamma = \Gamma_1 \geq ... \geq \Gamma_n = \{id\}$$

donde $\Gamma_{k+1} = [\Gamma, \Gamma_k]$. La nilpotencia de Γ se define como el mínimo n tal que $\Gamma_{n+1} = \{id\}$.

De la definición se deduce inmediatamente que si Γ tiene nilpotencia 0 entonces es trivial, y si tiene nilpotencia 1 es abeliano. Si la nilpotencia de Γ es $n1$ entonces $Z(\Gamma)$ no es trivial ($\Gamma_n \leq Z(\Gamma)$). De hecho podemos obtener un resultado más fuerte:

Proposición 1.1.2. *Sea Γ un grupo nilpotente de nilpotencia $n > 0$, entonces $\Gamma/Z(\Gamma)$ es nilpotente de nilpotencia $n-1$.*

Demostración. Si Γ es abeliano la demostración es trivial. Supongamos que Γ no es abeliano, sea $\pi : \Gamma \to \Gamma/Z(\Gamma)$ la proyección al cociente. es fácil de ver que $\pi([G,H]) = [\pi(G), \pi(H)]$ para todo $G, H \leq \Gamma$, por lo que es suficiente con demostrar que $\pi(\Gamma_n) = \{id\}$ y $\pi(\Gamma_{n-1}) \neq \{id\}$. Como π es la proyección al cociente, $\ker(\pi) = Z(\Gamma) \geq \Gamma_n$ y tenemos que $\pi(\Gamma_n) = \{id\}$. Y como Γ_{n-1} no está contenido en $Z(\Gamma)$, $\pi(\Gamma_{n-1})$ no es trivial. □

La proposici'on anterior nos da una nueva definición de nilpotencia por inducción. De hecho si definimos $\Gamma^1 = \Gamma$ y $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k/Z(\Gamma^k)$, y si existe n tal que $\Gamma^{n+1} = \{id\}$ entonces Γ es nilpotente:

Proposición 1.1.3. *Sea n el mínimo natural tal que $\Gamma^{n+1} = \{id\}$ entonces Γ es nilpotente de nilpotencia n.*

Demostración. Probaremos esta proposición por inducción en la nilpotencia de Γ. Si Γ es abeliano entonces se concluye trivialmente. Supongamos que la proposición es cierta para $n-1$, y sea n el mínimo natural tal que $\Gamma^{n+1} = \{id\}$. Como $(\Gamma/Z(G))^n = \{id\}$ por hipótesis inductiva $\Gamma/Z(\Gamma)$ tiene nilpotencia $n-1$, por lo tanto

$$\{id\} \neq (\Gamma/Z(\Gamma))_{n-1} = \pi(\Gamma_{n-1})$$

Entonces Γ_{n-1} no esta incluido en el centro, en particular Γ_n no es trivial. Análogamente $\pi(\Gamma_n) = \{id\}$ y tenemos que $\Gamma_n \subset Z(\Gamma)$, concluimos que $\Gamma_{n+1} = \{id\}$. $\square$

Ejemplo 1.1.4. El grupo discreto de Heisenberg H es el grupo de las matrices triangulares inferiores 3×3 de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

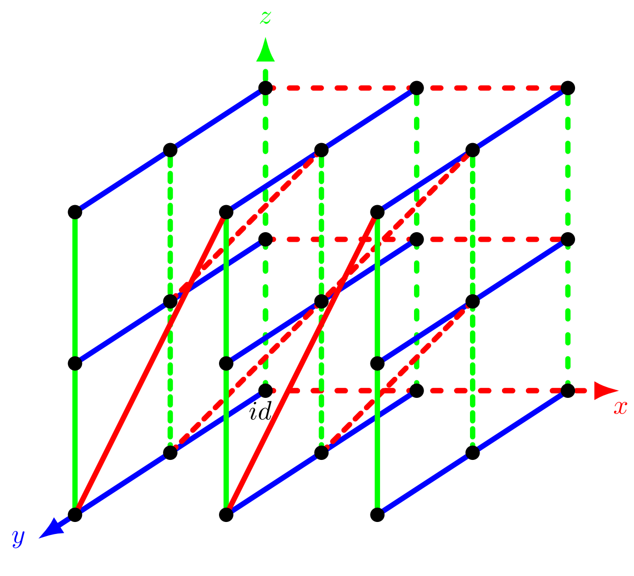
con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Este grupo es nilpotente de nilpotencia 2, ya que

$$Z(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in Z \right\}$$

y $H/Z(H)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ que es abeliano. Este grupo es generado por los elementos

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es igual a $[y, x]$, y toda matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ del grupo de Heisenberg es igual a $x^a z^c y^b$.



Esta es una porción del grafo de Cayley del grupo discreto de Heisenberg para los generadores x, y, z.

Va a ser de utilidad hablar un poco de los grupos solubles, para esto veremos primero lo que es una **serie derivada**. La serie derivada de un grupo Γ es la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ definida inductivamente por $A_1 = \Gamma$, $A_{n+1} = [A_n, A_n]$.

Definición 1.1.5. Decimos que un grupo es **soluble** si su serie derivada es finita, es decir que existe un n tal que $A_{n+1} = \{id\}$. Si n es el menor de los naturales que cumple esto entonces decimos que Γ tiene solubilidad n.

Ejemplo 1.1.6. Los grupos nilpotentes son solubles ya que claramente $A_n \subset \Gamma_n$.

Ejemplo 1.1.7. El grupo de Baumslag-Solitar $BS(1,2) = \langle a, b : aba^{-1} = b^2 \rangle$ es un grupo soluble. Primero veamos algo particular de este grupo, que para $n \in \mathbb{N}$ existe x tal que $x^{2^n} = b$, o sea $x = \sqrt[2^n]{b}$, por inducción en n si $n = 1$ tomamos $x = a^{-1}ba$ y tenemos que $x^2 = b$, luego si existe y tal que $y^{2^{n-1}} = b$ tomamos $x = a^{-1}ya$, por lo tanto

$$b = (axa^{-1})^{2^{n-1}} = ax^{2^{n-1}}a^{-1} \Rightarrow x^{2^{n-1}} = \sqrt{b}$$

y tenemos que $x^{2^n} = b$, es más $\sqrt[2^n]{b} = a^{-n}ba^n$, y obtenemos que para $n \in \mathbb{Z}, b^{2^n} = a^n ba^{-n}$. Si $\mathcal{G} = \{a, b\}$ tenemos que $< \mathcal{G} >= B$, por lo tanto

$$[B, B] =< \{g[s_1, s_2]g^{-1}, s_i \in \mathcal{G}, g \in B\} > .$$

$[a, b] = b$ y $[b, a] = b^{-1}$. Tomemos un $g \in B$ cualquiera, veamos que $gb^{\pm 1}g^{-1} = b^{2^n}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, esto es evidente para $g \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, supongamos ahora que g es representado por alguna palabra de longitud n y que lo que afirmamos es cierto para palabras de longitud $n-1$, entonces $g = sg'$ donde $s \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$ y g' esta representado por una palabra de longitud $n-1$, y tenemos que

$$gb^{\pm 1}g^{-1} = sg'b^{\pm 1}g'^{-1}s^{-1} = sb^{2^n}s^{-1}.$$

Si $s = b^{\pm 1}$ entonces ya concluimos porque b conmuta con sus potencias (aunque sea una potencia racional), si $s = a^{\pm 1}$ entonces $sb^{2^n}s^{-1} = b^{2^{n \pm 1}}$, de todo esto concluimos que $[B, B] = \{b^q : q \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\}$ y esto implica que $[B, B]$ es abeliano por ende B es soluble de solubilidad 2, los grupos de solubilidad menor o igual a 2 se llaman metabelianos.

Otra propiedad que podemos ver de este grupo es que no es nilpotente. Definamos la función $f : BS(1,2) \to [BS(1,2), BS(1,2)]/f(x) = [a, x]$. Ahora si $BS(1,2)$ fuera nilpotente existiría un n tal que $f^n(x) = id$ para todo $x \in BS(1,2)$, sin embargo $b \neq id$ y b es un punto fijo de f, por lo tanto $BS(1,2)$ no es nilpotente.

En particular probamos que ser nilpotente no es equivalente a ser soluble. Para leer más sobre grupos solubles y nilpotentes sugiero [12].

1.2. Grupos promediables

La promediabilidad es un concepto profundo de teoría de grupos en el que no entraremos muy en detalle, sin embargo tiene muchas aplicaciones dinámicas que usaremos más adelante, por lo que vale la pena ver algunos resultados de esta área. El objetivo principal de esta sección es demostrar que los grupos solubles son promediables.

Definición 1.2.1. Un grupo Γ es **promediable** si toda acción de Γ por homeomorfismos sobre un espacio métrico compacto admite una medida de probabilidad invariante.

Para poder entender un poco mejor esta definición veamos la demostración del teorema de Krylov–Bogolyubov [1], que afirma que para todo homeomorfismo f de un espacio métrico compacto M existe una medida de probabilidad μ invariante a f. Para demostrar esto tomemos una medida de probabilidad ν sobre M y tomamos la sucesión (μ_n) definida de la siguiente manera:

$$\mu_n = \frac{1}{n}[\nu + f(\nu) + ... + f^{n-1}(\nu)]$$

Como el espacio de las medidas de probabilidad sobre M es compacto bajo la topología débil*, existe una subsucesión (μ_{n_k}) que converge débilmente a una medida de probabilidad μ, esta medida es invariante a f ya que

$$f(\mu_{n_k}) = \mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}[f^{n_k}(\nu) - \nu]$$

y esto implica que

$$\begin{aligned} f(\mu) &= f\left(\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(\mu_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}[f^{n_k}(\nu) - \nu] = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} = \mu \end{aligned}$$

Ahora, si f preserva la medida μ, es evidente que f^n también la preserva para todo $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto todo grupo cíclico es promediable. Más aún, con la misma estrategia podemos obtener el siguiente resultado:

Proposición 1.2.2. *Todo grupo abeliano finitamente generado es promediable.*

Demostración. Lo probaremos por inducción en la cantidad de generadores $\#\mathcal{G}$ de Γ. Nótese que un grupo preserva una medida sii todos los generadores preservan dicha medida.

Si $\#\mathcal{G} = 1$ entonces Γ es cíclico y ya vimos que es promediable. Supongamos que todo grupo con n generadores es promediable, sea $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_{n+1}\}$, entonces (por hipótesis inductiva) existe una medida ν invariante por $g_1, ..., g_n$. Definamos ahora:

$$\mu_m = \frac{1}{m}[\nu + g_{n+1}(\nu) + ... + g_{n+1}^{m-1}(\nu)]$$

Y nuevamente tenemos una subsucesión que converge a μ invariante por g_{n+1}, sin embargo μ también es invariante por $g_1, ..., g_n$ ya que

$$\begin{aligned} g_i(\mu) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k}[\nu + (g_i \circ g_{n+1})(\nu) + ... + (g_i \circ g_{n+1}^{m_k-1})(\nu)] \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k}[\nu + (g_{n+1} \circ g_i)(\nu) + ... + (g_{n+1}^{m_k-1} \circ g_i)(\nu)] \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k}[\nu + g_{n+1}(\nu) + ... + g_{n+1}^{m_k-1}(\nu)] = \mu \end{aligned}$$

La siguiente proposicón nos permite extender el resultado a todos los grupos abelianos

Proposición 1.2.5. *Sea* $\Gamma = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ *tal que* Γ_i *es promediable para todo* $i \in I$ *y para todo* $i_1, i_2 \in I$ *existe* $j \in I$ *tal que* $\Gamma_{i_1} \cup \Gamma_{i_2} \subset \Gamma_j$*, entonces* Γ *es promediable.*

Demostración Sea M un espacio métrico compacto tal que Γ actúa por homeomorfismos en M, definimos M_i como el conjunto (compacto) de medidas invariantes por Γ_i. Probaremos que para $i_1, ..., i_n \in I$, $M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_n}$ no es vacío, podemos aplicar una cantidad finita de veces la hipótesis para encontrar un $j \in I$ tal que $\Gamma_{i_k} \subset \Gamma_j$ para $k = 1, ..., n$, como $M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_n} \supset M_j \neq \varnothing$ no es vacío, por lo tanto $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de compactos que cumplen la propiedad de intersección finita, lo que implica $\bigcap M_i \neq \varnothing$, es evidente que cualquier medida en ese conjunto es invariante bajo acciones de Γ. □

En particular si todos los subgrupos finitamente generados de Γ son promediables tenemos que Γ es promediable, por lo tanto todos los grupos abelianos son promediables.

Proposición 1.2.6. *Sea Γ un grupo con un subgrupo normal H promediable tal que Γ/H es promediable, entonces Γ es promediable.*

Demostración. Sea M un espacio métrico compacto tal que Γ actúa por homeomorfismos en M. Sea P el conjunto de medidas de probabilidad sobre M y $P_H \subset P$ el conjunto de las medidas de probabilidad invariantes bajo acciones de H, entonces Γ actúa en P definiendo $g\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ y P_H es invariante bajo acciones de Γ.

Como la primera afirmación es obvia probemos que P_H es Γ-invariante. Sea μ H-invariante entonces si $h \in H$ y $g \in \Gamma$, existe $h' \in H$ tal que $hg = gh'$, luego

$$h(g\mu) = (hg)\mu = (gh')\mu = g(h'\mu) = g\mu$$

por lo tanto $g\mu$ es H-invariante. Luego, por el mismo argumento, Γ/H actúa en P_H por $[g]\mu = g\mu$. Como P_H es cerrado y $P \supset P_H$ es compacto, P_H es compacto y hereda la métrica de P (A.3.), por lo tanto existe una medida de probabilidad Γ/H-invariante ξ sobre P_H.

Definimos la medida ν en M como

$$\nu(A) = \int_{P_H} \mu(A) d\xi.$$

Luego, para todo $g \in \Gamma$:

$$g\nu(A) = \int_{P_H} g\mu(A) d\xi = \int_{P_H} [g]\mu(A) d\xi = \int_{P_H} \mu(A) d\xi = \nu(A)$$

por lo tanto ν es Γ-invariante y concluimos que Γ es promediable. □

Corolario 1.2.7. *Los grupos solubles son promediables.*

Demostración. Sea Γ un grupo soluble, probaremos por inducción en la solubilidad que es promediable. Si un grupo tiene solubilidad 1 entonces es abeliano y por lo tanto es promediable. Si un grupo Γ tiene solubilidad n entonces $[\Gamma, \Gamma]$ tiene solubilidad $n-1$ y por hipótesis inductiva es promediable, luego $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es abeliano y por lo tanto promediable y por la proposición anterior Γ es promediable. □

2. Grupos de homeomorfismos del círculo

Antes de comenzar con las restricciones por regularidad es importante ver qué se cumple independientemente de la regularidad. Algunos conceptos y resultados se pueden ver en un curso de sistemas dinámicos, como el número de rotación o el ejemplo de un homeomorfismo con un minimal excepcional. También se ven conceptos nuevos como acciones por grupos nilpotentes sobre el segmento, o acciones por grupos ordenados.

2.1. Categorización

El grupo de rotaciones $SO(2,\mathbb{R})$ es el grupo más simple que actúa transitivamente en S^1 (para todo $x \in S^1$ la órbita de x es S^1). De hecho, excepto por conjugaciones topológicas, puede ser caracterizado como el grupo más grande que preserva medidas similares a la medida de Lebesgue. Una medida tiene **soporte total** si todo conjunto abierto tiene medida no nula, y no tiene **átomos** si los puntos tienen medida 0.

Proposición 2.1.1. *Sea Γ un subgrupo de $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ que preserva una medida de probabilidad con soporte total y sin átomos, entonces Γ es un conjugado topológico de de un subgrupo de $SO(2,\mathbb{R})$.*

Demostración. La medida Γ-invariante μ induce naturalmente una medida $\tilde{\mu}$ en $\mathbb{R}$ que cumple $\tilde{\mu}([x,x+1]) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \varphi(x) = \begin{cases} \tilde{\mu}([0,x]) & \text{si } x \geq 0 \\ -\tilde{\mu}([x,0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $\tilde{\mu}$ es una medida con soporte total sin átomos, φ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$. Para un $g \in \mathbb{R}$ tomamos un lift $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g}(0) > 0$. Para $x > 0$ tenemos que:

$$\varphi\tilde{g}\varphi^{-1}(x) = \tilde{\mu}([0,\tilde{g}(0)]) + \tilde{\mu}([\tilde{g}(0), \tilde{g}\varphi^{-1}(x)]) = \tilde{\mu}([0,\tilde{g}(0)]) + \tilde{\mu}([0,\varphi^{-1}(x)])$$

Por lo tanto $\varphi\tilde{g}\varphi^{-1}(x) = \tilde{\mu}([0,g(0)]) + x$, para $x < 0$ se deduce análogamente. Como $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$, φ induce un homeomorfismo de S^1, $\tilde{\varphi}$. Por lo probado anteriormente para todo $g \in \Gamma$ la conjugación por $\tilde{\varphi}$ da la rotación de S^1 por el ángulo $2\pi\tilde{\mu}([0,\tilde{g}(0)]) \mod 2\pi$. □

De hecho los grupos topológicos compactos cumplen esta propiedad, si Γ es un grupo compacto, podemos tomar la medida de Haar (normalizada) dg en Γ. Definimos la medida de probabilidad μ en S^1 de la siguiente manera

$$\mu(A) = \int_{g\in\Gamma} \mu_{Leb}(gA)dg$$

Esta medida es invariante por acciones de Γ, tiene soporte total y no tiene átomos, por lo tanto todo subgrupo compacto de $\text{Homeo}(S^1)$ es conjugado topológico de $SO(2,\mathbb{R})$.

Corolario 2.1.2. *Toda acción minimal del círculo por un subgrupo de* $\text{Homeo}_+(S^1)$ *que preserva una medida de probabilidad en el círculo es conjugado topológico de un subgrupo de* $SO(2,\mathbb{R})$.

Demostración. Sea Γ un subgrupo de $\text{Homeo}_+(S^1)$ minimal y que preserva una medida de probabilidad μ. Basta con probar que μ tiene soporte total y no tiene átomos. Sea U un abierto de S^1, por absurdo supongamos que $\mu(U) = 0$. Por minimalidad $\bigcup_{g\in\Gamma} g(U) = S^1$, como S^1 es compacto existen finitos $g_1, ..., g_n$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} g_i(U) = S^1$, pero como Γ preserva la medida μ, esto implica que $\mu(S^1) = 0$ lo que es absurdo. Supongamos ahora que $x \in S^1$ es unátomo, $\mu(\{x\}) = \varepsilon > 0$. Como Γ es minimal, $\Gamma(x)$ es denso en S^1, en particular existe una sucesión inyectiva $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Gamma(x)$. Como μ es invariante por Γ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon = \infty$$

y esto nuevamente es absurdo, por lo tanto μ tiene soporte total y no tiene átomos. Esto concluye la prueba. □

Un subconjunto Λ de S^1 es invariante bajo un subgrupo Γ de $\text{Homeo}_+(S^1)$ si $g(\Lambda) \subset \Lambda$ para todo $g \in \Gamma$. Un conjunto compacto invariante Λ es minimal si los únicos subconjuntos cerrados invariantes de Λ son el conjunto vacío y Λ.

Teorema 2.1.3. *Sea* Γ *un subgrupo de* $\text{Homeo}_+(S^1)$ *entonces una (y solo una) de las siguientes posibilidades ocurre:*

(I) *Existe una órbita finita.*

(II) *Todas las órbitas son densas.*

(III) *Existe un único conjunto minimal invariante que es homeomorfo al conjunto de Cantor (y esta contenida en el conjunto de los puntos de acumulación de todas las órbitas).*

Demostración. Sea Ω la familia de subconjuntos cerrados no vacíos de S^1, entonces Ω está ordenada por inclusión. Consideremos una cadena de Ω, es evidente que su intersección es invariante, además como todo elemento de Ωes compacto, la intersección de una cadena es no vacía, por lo tanto pertenece a Ω. Por el lema de Zorn, existe un cerrado minimal invariante . La frontera $\partial\Lambda$ y el conjunto Λ' de los puntos de acumulación de Λ son conjuntos cerrados invariantes contenidos en Λ. Por minimalidad de Λ una de las siguientes posibilidades ocurre:

(I) $\Lambda' = \varnothing$; en este caso Λ es una órbita finita.

(II) $\partial\Lambda = \varnothing$; en este caso $\Lambda = S^1$, lo que implica que todas sus órbitas son densas.

(III) $\Lambda = \Lambda' = \partial\Lambda$; en este caso Λ es un subconjunto cerrado con interior vacío y sin puntos aislados de S^1, o sea que es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Nos queda probar que en el último caso, Λ está contenido en el conjunto de los puntos de acumulación de todas las órbitas, lo que implica su unicidad. Sean $x \in S^1$ e $y \in \Lambda$. Tenemos que probar que existe una sucesión g_n en Γ tal que $g_n(x) \to y$. Para $x \in \Lambda$ esto es evidente por minimalidad de Λ. Si $x \in S^1 \setminus \Lambda$, consideremos el intervalo $I = (a,b) \subset S^1 \setminus \Lambda$ tal que $a, b \in \Lambda$ y $x \in I$. Como la órbita de a es densa en Λ, y Λ no tiene puntos aislados, existe una sucesión g_n tal que $g_n(a) \to y$ y $g_i(I) \cap g_j(I) = \varnothing$ si $i \neq j$. Como la longitud de $g_n(I)$ tiende a 0, $g_n(x) \to y$. Esto concluye la demostración. $\square$

2.2. Teoría de Poincaré

En está sección trataremos una invariante dinámica de los homeomorfismos del círculo introducida por Henri Poincaré, los números de rotación. Para definirlo correctamente empezaremos por demostrar el siguiente lema sobre sucesiones casi subaditivas.

Lema 2.2.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales. Asumamos que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq C.$$

Entonces existe un único $\rho \in \mathbb{R}$ tal que la sucesión $(|a_n - n\rho|)_{n\in\mathbb{Z}}$ es acotada. Este número ρ es igual al límite de la sucesión (a_n/n) cuando n tiende a $\pm\infty$ (en particular este límite existe).

Demostración. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ probemos que $|a_{mn} - ma_n| \leq (m-1)C$ por inducción en m. En efecto si $m = 1$ entonces

$$|a_{mn} - ma_n| = |a_n - a_n| = 0 = (1-m)C$$

y probamos el caso base. Si esta afirmación es correcta para m, entonces para $m+1$ tenemos que

$$\begin{aligned}|a_{(m+1)n} - (m+1)a_n| &= |a_{mn+n} - ma_n - a_n| = |a_{mn+n} - a_{mn} - a_n + a_{mn} - ma_n| \\ &\leq |a_{mn+n} - a_{mn} - a_n| + |a_{mn} - ma_n| \leq (m-1)C + C = mC.\end{aligned}$$

De esto deducimos que $a_{mn} + C \leq ma_n + mC$ y por lo tanto,

$$\frac{a_{mn} + C}{mn} \leq \frac{a_n + C}{n}.$$

Análogamente,

$$\frac{a_{mn} - C}{mn} \geq \frac{a_n - C}{n}.$$

Definamos el intervalo $I_n = \left[\frac{a_n - C}{n}, \frac{a_n + C}{n}\right]$, por lo previamente visto resulta claro que $I_{mn} \subset I_n$, luego por la propiedad de intersección finita $I = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$.

Sea $\rho \in I$, entonces $\rho \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - n\rho| \leq C, \tag{2.1}$$

o sea que $|a_n - n\rho|$ es acotada. Para probar la unicidad tomemos $\rho' \neq \rho$, luego

$$|a_n - n\rho'| = |(a_n - n\rho) + n(\rho - \rho')| \geq n|\rho - \rho'| - C$$

por lo tanto $|a_n - n\rho'|$ tiende a infinito. Por último si dividimos ambas partes de (2.1) por n y pasamos al límite tenemos que $\rho = \text{lím}(a_n/n)$. El caso $n < 0$ es análogo. $\square$

Ahora consideramos la parametrización de S^1 por $[0,1]$. Dado un homeomorfismo f de S^1, se da a entender que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un lift cualquiera de f a la recta real.

Proposición 2.2.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, el límite:*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe y no depende de x.

Demostración. Lo primero es ver que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$

$$||F^m(x) - x| - |F^m(y) - y|| \leq 2 \tag{2.2}$$

Como $F^m(x+n) = F^m(x) + n$ podemos tomar $x, y \in [0,1)$ y en este caso la desigualdad es trivial. Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos $a_n = F^n(x) - x$. Observamos que:

$$\begin{aligned} |a_{m+n} - a_m - a_n| &= |F^{m+n}(x) - x - (F^m(x) - x) - (F^n(x) - x)| \\ &= |F^m(F^n(x)) - F^n(x) - (F^m(x) - x)| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Por la proposición anterior el límite $\lim[F^n(x) - x]/n$ existe y por la desigualdad (2,2) el límite no depende de x. □

Si consideramos dos lifts de f a la recta real, entonces los límites dados por la proposición anterior difieren por un entero. Definimos el **número de rotación** de f por

$$\rho(f) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}[F^n(x) - x] \mod 1.$$

$\rho(f)$ es independiente del lift F de f y de x. Un ejemplo sencillo de verificar es que para una rotación del círculo de ángulo $\theta \in [0,1)$ el número de rotación $\rho(R_\theta) = \theta$.

También para todo homeomorfismo f del círculo, uno tiene que

$$\rho(f^m) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}[F^{mn}(x) - x] = m \cdot \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{mn}[F^{mn}(x) - x]$$

de donde uno concluye que $\rho(f^m) = m\rho(f) \mod 1$.

Si f tiene un punto periódico, entonces $\rho(f)$ es racional. En efecto si f tiene un punto periódico, existe $x \in R$ tal que $F^p(x) = q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{pn}[F^{pn}(x) - x] = \lim_{n\to\pm\infty}[(x + pn) - x] = \frac{q}{p},$$

de donde se concluye que $\rho(f) = \frac{q}{p} \mod 1$. Recíprocamente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Si $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ tiene número de rotación racional, entonces f tiene un punto periódico.*

Demostración. Como $\rho(g^m) = m\rho(g) \mod 1$ es suficiente demostrar que toda función con número de rotación 0 tiene un punto fijo. Asumamos que f no tiene punto fijo, sea F un lift de f tal que $F(0) \in (0,1)$. Como f no tiene punto fijo $F(x) - x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por continuidad y periodicidad tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para todo x:

$$\delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta$$

Además como $F^n(x) - x = \sum_{i=0}^{n-1} F^{i+1} - F^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F(F^i(x)) - F^i(x)$ observamos:

$$\delta \leq \frac{F^n(x) - x}{n} \leq 1 - \delta$$

Si pasamos al límite tenemos que $\delta \leq \rho(f) \leq 1 - \delta$, y concluimos que si f no tiene punto fijo, $\rho(f) \neq 0$. □

Si $f : S^1 \to S^1$ es continua, el **grado** de f es $F(1) - F(0)$ para cualquier lift F de f a la recta real. Es claro que el grado de cualquier homeomorfismo del círculo es 1.

Definición 2.2.4. Sean f y g dos homeomorfismos del círculo, decimos que f es **semiconjugada** a g si existe una función continua de grado 1 $\varphi : S^1 \to \mathbb{S}^1$, tal que todo lift de φ es creciente (en el sentido no estricto) y $\varphi f = g\varphi$.

Proposición 2.2.5. *Si f es semiconjugada a g, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

Demostración. Sea $\varphi f = g\varphi$ y F, G' y Φ lifts de f, g y φ respectivamente, tal que $\Phi(0) \in [0, 1)$. Veamos que ΦF es un lift de $g\varphi$:

$$\pi\Phi F = \phi\pi F = \varphi f \pi = g\varphi\pi.$$

Como ΦF es un lift de $g\varphi$, tenemos que $\Phi F = G'\Phi + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos el lift G de g tal que $G = G' + k$, entonces $\Phi F = G\Phi$.

Probemos por inducción que $\Phi F^n = G^n\Phi$, es evidente que se cumple para el caso $n = 1$, así que asumamos que $\Phi F^{n-1} = G^{n-1}\Phi$, luego

$$\begin{aligned}
\Phi F^n &= \Phi F^{n-1}F \\
&= G^{n-1}\Phi G \\
&= G^{n-1}G\Phi \\
&= G^n\Phi
\end{aligned}$$

lo que concluye nuestra demostración por inducción.

Como $\Phi(0) \in [0, 1)$ y para $x \in [0, 1)$, $0 \leq \Phi(0) \leq \Phi(x) \leq \Phi(1) = H(0) + 1 < 2$ tenemos que $-1 < H(x) - x < 2$ para todo $x \in [0, 1)$. Como Φ es el lift de una función de grado 1, $H(x) - x$ es periódica de período 1, y tenemos que $|H(x) - x| < 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora usemos el hecho de que $G^n(x + m) = G^n(x) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Sea $|x - y| < 2$ entonces $x - 2 < y < x + 2$, y como G^n es estríctamente creciente,

$$G^n(x) - 2 = G^n(x - 2) < G^n(y) < G^n(x + 2) < G^n(x) + 2$$

y concluimos que $|G^n(x) - G^n(y)| < 2$ cuando $|x - y| < 2$. En particular tenemos que

$$|G^n\Phi(x) - G^n(x)| < 2.$$

Ahora, para finalizar:

$$\begin{aligned}
|F^n(x) - G^n(x)| &= |F^n(x) - \Phi F^n(x) + \Phi F^n(x) - G^n(x)| \\
&= |F^n(x) - \Phi F^n(x) + G^n\phi(x) - G^n(x)| \\
&\leq |F^n(x) - \Phi F^n(x)| + |G^n\phi(x) - G^n(x)| \\
&< 2 + 2
\end{aligned}$$

por lo tanto $\frac{|F^n(x)-G^n(x)|}{n} < \frac{4}{n}$, pasando al límite tenemos que $\rho(f)=\rho(g)$. $\square$

Como consecuencia de esto, las funciones de número de rotación p/q ($\text{mcd}(p,q)=1$) están determinadas por este número, la topología del conjunto $\text{Per}(f)$ de los puntos periódicos de f, y la dirección de las dinámicas de f^q en cada componente conexa del complemento de Per(f).

Sin embargo para número de rotación irracional θ, tenemos que todas las órbitas de la rotación de ángulo θ son densas, esto nos puede hacer creer que las funciones con número de rotación θ son iguales a menos de conjugación topológica. Sin embargo, no es muy complicado construir un homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional que no es conjugado topológico de su correspondiente rotación. Por ejemplo, tomemos $x\in S^1$, y reemplacemos cada punto $R_\theta^n(x)$, $n\in\mathbb{Z}$ por un intervalo de longitud $2^{-|n|}$. Con esto obtenemos un círculo mas "largo" S_x^1, y la rotación R_θ induce un homeomorfismo $R_{\theta,x}$ de S_x^1 extendiendo R_θ de manera afín en cada intervalo que le agregamos al círculo original (esta construcción se verá con mayor detalle en la construcción del contraejemplo de Denjoy). El mapa $R_{\theta,x}$ es semiconjugado a R_θ, por lo tanto tiene número de rotación θ. Sin embargo ninguna de sus órbitas es densa, en particular $R_{\theta,x}$ no es conjugado topológico de R_θ. Aún así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.6. *Sea el número de rotación de $f\in \text{Homeo}_+(S^1)$ irracional, entonces f es semiconjugado a la rotación de ángulo $\rho(f)$. La semiconjugación es una conjugación si y solo si todas las órbitas de f son densas.*

Demostración. Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un lift tal que $F(0)\in[0,1)$, como vimos en las proposiciones anteriores la sucesión $|F^n(x)-n\rho(f)|$ es acotada para todo x, por lo tanto la función

$$\varphi(x)=\sup_{n\in\mathbb{Z}}(F^n(x)-n\rho(F))$$

tiene un valor finito para todo $x\in\mathbb{R}$. Además se verifica fácilmente que la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(I) Es creciente (en el sentido no estricto).

(II) $\varphi(x+1)=\varphi(x)+1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(III) $\varphi(F(x))=\varphi(x)+\rho(F)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Por la propiedad (I) y (II) tenemos que si φ es una función continua, entonces es una semiconjugación, la propiedad (III) nos garantiza que si φ es una semiconjugación entonces la proyección al círculo es una semiconjugación de f a $R_{\rho(f)}$. Por la propiedad (I) deducimos que $\varphi^{-1}(x)$ es un punto o un intervalo. Definimos $\widetilde{\text{Plan}}(F)$ como la unión de dichos intervalos y $\widetilde{\text{Salt}}(F)$ como el interior del complemento de $\varphi(\mathbb{R})$. Por la propiedad (II) tanto $\widetilde{\text{Plan}}(F)$ como $\widetilde{\text{Salt}}(F)$ son invariantes por traslaciones enteras y, por lo tanto, se proyectan en subconjuntos del círculo $\text{Plan}(f)$ y $\text{Salt}(f)$ respectivamente. La propiedad (III) nos garantiza que $\text{Salt}(f)$ es $R_{\rho(f)}$-invariante, pero como $\rho(f)$ es irracional, $\text{Salt}(f)=\varnothing$. Esto último implica que φ es continua, y tenemos que φ es una semiconjugación de f a $R_{\rho(f)}$. Para terminar podemos concluir de la propiedad (III) que $\text{Plan}(f)$ es f-invariante, por lo tanto si las órbitas de f son densas $\text{Plan}(f)=\varnothing$ y deducimos que φ es un homeomorfismo y por ende una conjugación entre f y $R_{\rho(f)}$. $\square$

2.3. Números de rotación y medidas invariantes

Por el teorema de Krylov-Bogolyubov, todo homeomorfismo del círculo f preserva una medida de probabilidad μ. Nótese que $\mu([x, f(x)))$ es independiente de $x \in S^1$. Por ejemplo, si $y \in S^1$ es tal que $y < f(x) < f(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\mu([y, f(y))) &= \mu([y, f(x))) + \mu([f(x), f(y))) \\ &= \mu([y, f(x))) + \mu([x, y)) = \mu([x, f(x)).\end{aligned}$$

El resto de los casos se demuestra de manera similar. A este valor se lo denota por $\rho_\mu(f)$.

Teorema 2.3.1. $\rho(f) = \rho_\mu(f) \mod 1$

Demostración. La medida μ se levanta a una medida σ-finita $\tilde{\mu}$ en $\mathbb{R}$. Nótese que cualquier lift F de f preserva la medida $\tilde{\mu}$. Tomemos un punto y en S^1 y una de sus preimágenes en $\mathbb{R}$, x. Tenemos que $\tilde{\mu}([x, x+k)) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto, si $F^n(x) \in [x+k, x+k+1)$ entonces:

$$F^n(x) - x - 1 \leq k \leq \tilde{\mu}([x, F^n(x))) \leq k + 1 \leq F^n(x) - x + 1$$

Por esto es evidente que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\mu}([x, F^n(x)))}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\mu}(F^i(x), F^{i+1}(x)))$$

Y como $\tilde{\mu}$ es F-invariante $\tilde{\mu}([F^i(x), F^{i+1}(x))) = \tilde{\mu}([x, F(x)))$ para todo $i \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \tilde{\mu}([x, F(x)))$$

Por lo tanto $\rho(f) = \rho_\mu(f) \mod 1$. □

Dado un homeomorfismo f es útil conocer el soporte $sop(\mu)$ de una medida de probabilidad invariante μ. Si $\rho(f)$ es racional, entonces f tiene puntos periódicos y $sop(\mu) \subset Per(f)$. Si $\rho(f)$ es irracional tenemos dos casos: f admite un minimal excepcional Λ, en ese caso $sop(\mu) = \Lambda$ y μ no tiene átomos, o todas las órbitas de f son densas, en ese caso $sop(\mu) = S^1$ y μ tampoco tiene átomos.

Si f y g preservan la misma medida μ entonces $\rho_\mu(fg) = \rho_\mu(f) + \rho_\mu(g) \mod 1$, ya que

$$\rho_\mu(fg) = \mu([x.fg(x))) = \mu([x, g(x))) + \mu([g(x), fg(x))) = \rho_\mu(f) + \rho_\mu(g)$$

donde la segunda igualdad está garantizada módulo 1.

Si Γ es un subgrupo promediable de $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$, entonces preserva una medida μ en S^1. Como consecuencia, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *La restricción de la función **número de rotación** a todo subgrupo promediable de* $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ *es un homomorfismo de grupo en* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2.4. Teorema de Hölder

Los siguientes resultados se deben principalmente a Otto Hölder. Veremos que un grupo que actúa libre en $\mathbb{R}$ admite un orden bi-invariante arquimedeano, y a su vez estos grupos son isomorfos a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Definición 2.4.1. Sea $(\Gamma, \preceq)$ un grupo ordenado, decimos que el orden es bi-invariante si para todo $g, h \in \Gamma$ tal que $g \preceq h$, tenemos que $fg \preceq fh$ y $gf \preceq hf$ para todo $f \in \Gamma$.

Definición 2.4.2. Decimos que el orden es arquimedeano si para todo $g, h \in \Gamma$ tal que $g \neq id$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n \succ h$.

Proposición 2.4.3. *Todo grupo que admite un orden arquimedeano bi-invariante es isomorfo a un subgrupo de* $(\mathbb{R}, +)$*, en particular es abeliano.*

Demostración. Asumamos que Γ es un grupo no trivial con un orden arquimedeano bi-invariante $\preceq$. Tomamos un elemento positivo $f \in \Gamma$, para cada $g \in \Gamma$ definimos $q_g(p)$ para $p \in \mathbb{N}$ como el único entero tal que $f^{q_g(p)} \preceq g^p \prec f^{q_g(p)+1}$.

(i). La sucesión $q_g(p)/p$ converge a un número real.

$$\text{Si } f^{q_g(p_1)} \preceq g^{p_1} \prec f^{q_g(p_1)+1} \text{ y } f^{q_g(p_2)} \preceq g^{p_2} \prec f^{q_g(p_2)+1}, \text{ entonces}$$
$$f^{q_g(p_1)+q_g(p_2} \preceq g^{p_1+p_2} \prec f^{q_g(p_1)+q_g(p_2)+2}.$$

Por la definición de q_g tenemos $q_g(p_1+p_2) \leq q_g(p_1) + q_g(p_2) \leq q_g(p_1+p_2) + 1$, y tenemos que $|q_g(p_1+p_2) + q_g(p_1) + q_g(p_2)| \leq 1$ por lo tanto $q(p)/p$ converge.

(ii) Si definimos $\phi(g)$ como el límite de $q_g(p)/p$ entonces $\phi : \Gamma \to (\mathbb{R}, +)$ es un homomorfismo.

Sean $g_1, g_2 \in \Gamma$ tal que $g_1 g_2 \preceq g_2 g_1$ (el caso $g_2 g_1 \preceq g_2 g_1$ es análogo). Como $\preceq$ es bi-invariante tenemos que:
$$f^{q_{g_1}(p)+q_{g_2}(p)} \preceq g_1^p g_2^p \preceq (g_1 g_2)^p \preceq g_2^p g_1^p \prec f^{q_{g_1}(p)+q_{g_2}(p)+2}$$

Por ende deducimos:
$$\begin{aligned}\phi(g_1+g_2) &= \lim_{p\to\infty} \frac{q_{g_1}(p)+q_{g_2}(p)}{p} \\ &\leq \phi(g_1 g_2) \\ &\leq \lim_{p\to\infty} \frac{q_{g_1}(p)+q_{g_2}(p)+1}{p} = \phi(g_1)\end{aligned}$$

Y tenemos que $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2)$.

(iii) El homomorfismo ϕ es inyectivo.

Es fácil de ver que ϕ preserva el orden de Γ, y que $\phi(f) = 1$. Supongamos que existe $h \neq \mathrm{Id}$ tal que $\phi(h) = 0$, entonces existe n tal que $h^n \succeq f$, y tenemos que:

$$0 = n\phi(h) = \phi(h^n) \geq \phi(f) = 1$$

Que es absurdo, por lo tanto $\phi(h) = 0$ sii $h = \mathrm{Id}$, por lo tanto ϕ es biyectivo sobre la imagen y esto concluye la demostración de que ϕ es un isomorfismo. □

Como consecuencia de esta proposición tenemos el teorema de Hölder.

Teorema 2.4.4. (Hölder) *Si un grupo Γ actúa libremente por homeomorfismos de $\mathbb{R}$, entonces Γ es abeliano.*

Demostración. Es suficiente con demostrar que Γ admite un orden arquimedeano bi-invariante. Como Γ actúa libremente, si $f \neq g$ entonces $f(0) > g(0)$ o $f(0) < g(0)$, esto nos permite definir un orden total $\preceq$ en Γ.

(i) $\preceq$ es bi-invariante.

Como Γ actúa libremente por homeomorfismos tenemos, por el teorema de Bolzano, que si $f(0) < g(0)$ entonces $f(x) < g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular todos los elementos de Γ preservan la orientación, de esto se deduce trivialmente que $\preceq$ es bi-invariante.

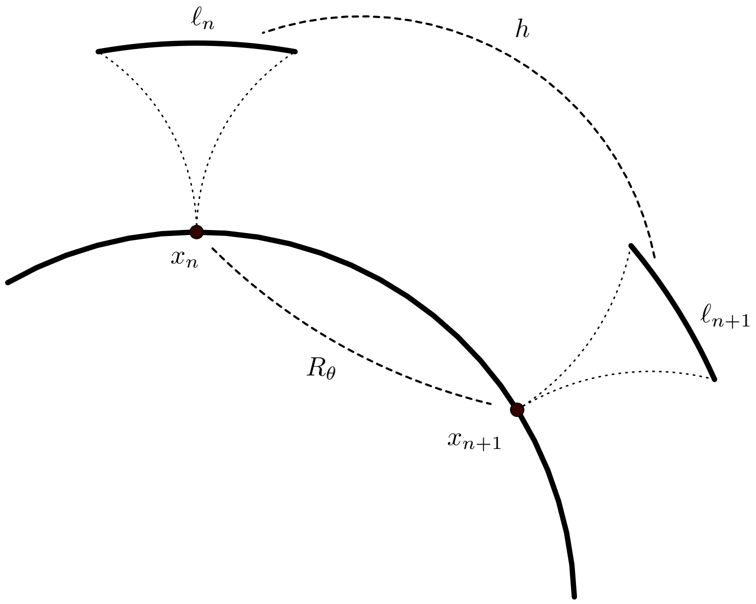
(ii) $\preceq$ es arquimedeano.

Sea $g \succ f$ siendo f un elemento positivo de Γ (si es negativo es suficiente con tomar f^{-1}). Como $f(x) > x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión $f^n(0)$ es creciente, si dicha sucesión convergiera a p entonces $f(p) = p$ lo que contradice la hipótesis, por lo tanto $f^n(0) \to \infty$, y con esto concluimos que existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n \succ g$. $\square$

2.5. Ejemplos

Esta sección está dedicada a presentar dos ejemplos importantes de acciones por homeomorfismos, ambas construcciones tienen versiones de mayor regularidad que se verán más adelante, pero ahora veremos sus versiones continuas. Uno es el contraejemplo de Denjoy, una acción de $\mathbb{Z}$ sobre S^1, que tiene un conjunto invariante minimal excepcional y prueba la existencia de acciones con estos invariantes minimales. El otro es una acción del grupo de Heisenberg sobre $[0,1]$, un ejemplo de una acción de un grupo nilpotente no abeliano.

Ejemplo 2.5.1. (Contraejemplo de Denjoy) Elijamos $\theta \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ y consideremos $R_\theta : S^1 \to S^1$ su rotación del circulo asociada y fijemos x_0. Ahora tomemos una sucesión entera positiva ℓ_n tal que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ reemplazamos $x_n = R_\theta^n(x_0)$ por un intervalo I_n de longitud ℓ_n. La rotación original induce un homeomorfismo h de S^1 tomando $h(x) = (x - a_n)\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} + a_{n+1}$ para $x \in I_n = [a_n, b_n]$ y extendiendo continuamente a todo el círculo.



Pensemos ahora en el círculo original, tomemos la función $\pi : S^1 \to S^1$ definida por $\pi(x) = x_n$ si $x \in I_n$ y extendiendo continuamente al resto del círculo. Además $\pi \circ h = R_\theta \circ \pi$ por lo tanto $\rho(h) = \theta$. Como el interior de I, I^o es invariante $(I^o)^c$ es invariante también esto implica que existe un conjunto cerrado invariante distinto de S^1 y de $\varnothing$, y h no tiene puntos periódicos por tener número de rotación irracional, esto prueba que h tiene un cantor minimal invariante $(I^o)^c$.

Ejemplo 2.5.2. Consideremos el grupo de Heisenberg, H o sea las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Este grupo actúa de una manera particular en $\mathbb{Z}^2$. Sea $\pi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2 / \pi(x, y, z) = (y, z)$ consideremos la acción de H en Z^2 dada por

$$g(x, y) = \pi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 & 0 \\ g_3 & g_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \right) = (x + g_1, y + xg_2 + g_3)$$

entonces todo elemento de H actúa en $\mathbb{Z}^2$ preservando el orden lexicográfico. Para construir nuestra acción sobre $[0, 1]$ tendremos que partir el segmento $[0, 1]$ en segmentos indexados por Z^2, $I_{(n,m)}$ y que respeten el orden lexicográfico. Tomemos una sucesión entera ℓ_n tal que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$, esto implica que $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \ell_n \ell_m = 1$, donde $\ell_n \ell_m > 0$. Definamos $s : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ como

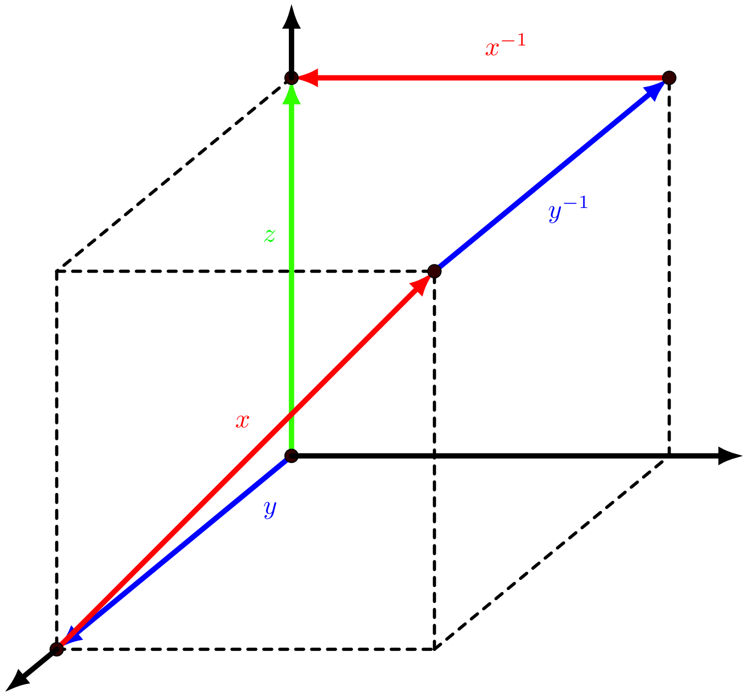
$$s(n, m) = \sum_{(i,j) \prec (n,m)} \ell_i \ell_j$$

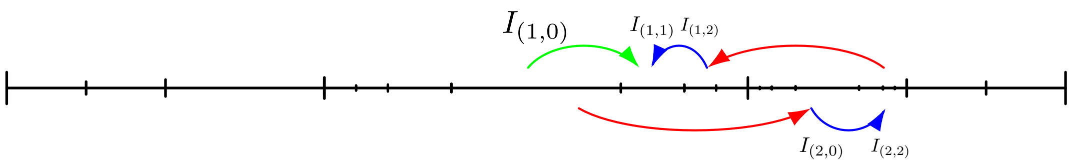
y sea el intervalo $I_{(n,m)} = [s(n, m), s(n, m + 1)]$, como $s(n, m) < s(i, j)$ cuando $(n, m) \prec (i, j)$, $I_{(n,m)} \cap I_{(i,j)} = \varnothing$ cuando $(i, j) \succ (n, m+1)$ e $I_{(n,m)} \cap I_{(n,m+1)} = \{s(n, m+1)\}$. Existe un conjunto cerrado y numerable J tal que $J \cup \left(\bigcup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} I_{(n,m)}\right) = [0,1]$, para ver esto es suficiente ver que

$$I_n = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} I_{(n,m)} = \left(\lim_{m\to-\infty} s(n,m), \lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = \left(\sum_{-\infty}^{n-1} \ell_i, \sum_{-\infty}^{n} \ell_i\right)$$

y tenemos que $\bigcup_n I_n$ es abierto y $J = \left(\bigcup_n I_n\right)^c = \{\sum_{-\infty}^{n} \ell_i : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0,1\}$.

Definimos $h_g : [0,1] \to [0,1]$ como $h_g(x) = (x - s(n,m))\frac{|I_{g(n,m)}|}{|I_{(n,m)}|} + s(g(n,m))$ si $x \in I_{(n.m)}$ ($h_g|_{I_{(n,m)}} : I_{(n,m)} \to I_{g(n,m)}$ es afín), $h_g\left(\sum_{-\infty}^{n} \ell_i\right) = \sum_{-\infty}^{n+g_1} \ell_i$, $h_g(0) = 0$ y $h_g(1) = 1$.





Grafo de Cayley y movimientos de intervalos por homeomorfismos correspondientes a

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Recordar que el grafo de Cayley sigue la dirección de la multiplicación por derecha y la acción sigue la dirección de la multiplicación por izquierda)

Si $x = s(n, m+1)$ tenemos dos definiciones para el valor $h_g(x)$, así que para verificar que h_g

está bien definida tenemos que comprobar que

$$(s(n,m+1)-s(n,m))\frac{|I_{g(n,m)}|}{|I_{(n,m)}|}+s(g(n,m))=s(g(n,m+1))$$

Pero esto se comprueba fácilmente sabiendo que $g(n,m+1)=g(n,m)+(0,1)$, luego por definición tenemos que $|I_{(n,m)}|=s(n,m+1)-s(n,m)$, por lo tanto $|I_{g(n,m)}|=s(g(n,m+1))-s(g(n,m))$. Por que acabamos de ver h_g es continua en J^c, y si $x\in (I_{(n,m)})^o$ e $y\in (I_{(i,j)})^o$ entonces $x<y$ si $(n,m)\prec(i,j)$, y como g preserva el orden lexicográfico, h_g es estrictamente creciente y en J^c. Lo que precisamos para demostrar que h_g es un homeomorfismo es que h_g es continua en cada punto de J.

Para verificar que h_g es continua en cada punto de la forma $\sum_{-\infty}^{n}\ell_i$ tenemos que comprobar que

$$\lim_{x^{\pm}\to\sum_{-\infty}^{n}\ell_i} h_g(x)=\sum_{-\infty}^{n+g_1}\ell_i$$

Sea $y=\sum_{-\infty}^{n}\ell_i$, primero verifiquemos que $\lim_{x^+\to y}h_g(x)=\sum_{-\infty}^{n+g_1}\ell_i$, como y es el borde inferior del intervalo I_{n+1}, existe ε tal que $(y,y+\varepsilon)\subset I_{n+1}$, por lo que si verificamos que para todo $\{x_i\}\subset I_{n+1}$ tal que $x_j\to y$, $h_g(x_j)\to\sum_{-\infty}^{n+g_1}\ell_i$, el límite converge al valor deseado. Sea $\{x_j\}$ como describimos, entonces para todo $j\in\mathbb{Z}$ existe $m_j\in\mathbb{Z}$ tal que $s(n+1,m_j)\le x_j\le s(n+1,m_j+1)$ y $m_j\to-\infty$. Como h_g es creciente en I_{n+1},

$$s(g(n+1,m_j))=h_g(s(n+1,m_j))\le h_g(x_j)\le h_g(s(n+1,m_j+1))=s(g(n+1,m_j+1)).$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}s(g(n+1,m_j))&=\lim_{j\to\infty}\sum_{(k,l)\prec(n+1+g_1,m_j+ng_2+g_3)}\ell_k\ell_l=\lim_{j\to\infty}\sum_{k\le n+g_1}\ell_k+\sum_{l<m_j+ng_2+g_3}\ell_{n+1+g_1}\ell_l\\&=\sum_{k\le n+g_1}\ell_k+\lim_{j\to\infty}\sum_{l<m_j+ng_2+g_3}\ell_{n+1+g_1}\ell_l\end{aligned}$$

De la misma manera llegamos a

$$\lim_{j\to\infty}s(g(n+1,m_j+1))=\sum_{k\le n+g_1}\ell_k+\lim_{j\to\infty}\sum_{l<m_j+1+ng_2+g_3}\ell_{n+1+g_1}\ell_l$$

y como $m_j\to-\infty$ y las colas de las series convergentes van a 0, obtenemos la igualdad

$$\sum_{k\le n+g_1}\ell_k=\lim_{j\to\infty}s(g(n+1,m_j))\le\lim_{j\to\infty}h_g(x_j)\le\lim_{j\to\infty}s(g(n+1,m_j))=.\sum_{k\le n+g_1}\ell_k$$

y se verifica la convergencia por derecha. La convergencia por izquierda es análoga.

Para ver la continuidad en 0 (resp. 1) usaremos una estrategia parecida, si $x_j\to 0$ (resp. 1), para todo $j\in\mathbb{Z}$ existe $n_j\in\mathbb{Z}$ tal que $x_j\in I_{n_j}$ y $n_j\to-\infty$ (resp. $+\infty$), por lo tanto $\sum_{k\le n_j}\ell_k\le x_j\le\sum_{k\le n_j}\ell_k$, y como h_g es creciente $\sum_{k\le n_j+g_1}\ell_k\le h_g(x_j)\le\sum_{k\le n_j+1+g_1}\ell_k$, y tenemos que

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k\le n_j+g_2}\ell_k=\sum_{k\le n_j+1+g_1}\ell_k=\sum_{k\in\varnothing}\ell_k=0\ \left(\text{resp. }\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ell_k=1\right)$$

o sea que h_g es un homeomorfismo de $[0,1]$ y H actúa en $[0,1]$ por $\Phi(g) = h_g$, concluimos que H es homomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$

En ambos ejemplos extendimos las funciones de las mencionadas acciones a todo el dominio, las condiciones para hacer eso son más restrictivas cuanto mayor es la regularidad de la acción. Por este motivo una pregunta que surge naturalmente es si existe una función C^1 en el círculo con un minimal excepcional, o más regular que C^1, como C^2 o C^∞. Lo mismo nos podemos preguntar sobre las acciones del grupo de Heisenberg, ¿es posible encontrar un subgrupo de $\mathrm{Diff}_+([0,1])$, o de $\mathrm{Diff}^2_+([0,1])$ o $\mathrm{Diff}^\infty_+([0,1])$? Este es uno de los temas centrales de los próximos capítulos.

3. Restricciones $C^{1+\mathbf{Lip}}$

Este capítulo está dedicado a ver las diferencias estructurales entre $\mathrm{Diff}_+^1(S^1)$ y $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}$, nótese que $\mathrm{Diff}_+^2(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}(S^1)$. Por el teorema de Denjoy encontraremos restricciones a qué tipo de funciones podemos encontrar, esto jugará un papel importante en el teorema de Plante-Thurston que impone una restricción en los subgrupos de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}$.

3.1. Teorema de Denjoy y teorema de Sacksteder

En el capítulo anterior vimos que existen homeomorfismos que admiten conjuntos minimales excepcionales. Sin embargo, en esta sección veremos que esto no es posible en regularidades mas altas. Este es el resultado de un teorema debido a Denjoy, que dice que ninguna función $C^{1+\mathrm{Lip}}$ acepta un conjunto minimal excepcional (en realidad podemos reducir la regularidad a $C^{1+\mathrm{bv}}$, pero no precisaremos más que Lipschitz).

Algo a tener en cuenta para la demostración es que si f es un difeomorfismo de S^1 con derivada Lipschitz entonces $\log(f')$ es Lipschitz, ya que log es Lipschitz en compactos y $f'(S^1)$ es un compacto contenido en $\mathbb{R}^+$.

Teorema 3.1.1. (Denjoy) *Si f es un difeomorfismo $C^{1+\mathrm{Lip}}$ del círculo con número de rotación irracional, entonces f es conjugado topológico de $R_{\rho(f)}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}$ con un cantor minimal invariante Λ. Definamos también C tal que

$$|\log f'(x) - \log f'(y)| \leq C|x-y|$$

para todo $x, y \in S^1$. Tomamos un intervalo $I = [a,b]$ tal que $(a,b) \subset S^1 \setminus \Lambda$ y $a, b \in \Lambda$. Lo primero que veremos es que $f^n(I) \cap I = \varnothing$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}^*$, en efecto si $f^n(I) \cap I \neq \varnothing$ como $I \cap \Lambda = \{a,b\}$ y Λ es invariante, entonces $f^n(a) = b$ o $f^n(b) = a$ (ya que f no puede tener puntos periódicos), pero como Λ no tiene puntos aislados $(b, f^n(b))$ o $(f^n(a), a)$ contiene algún punto de Λ y esto es absurdo por la definición de Λ, así que efectivamente $f^n(I) \cap I = \varnothing$. De esto se deduce que $f^n(I) \cap f^m(I) = \varnothing$ por lo tanto $\sum |f^n(I)| \leq 1$.

Definimos $\ell = \frac{|I|}{2e^{2C}}$ y el intervalo $I' = [a - 2\ell, a]$, a partir de este punto demostramos por inducción:

$(i)_n$ $\sup_{x,y \in I \cup I'} \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \leq e^{2C}$
$(ii)_n$ $|f^n(I')| \leq |f^n(I)|$

$(i)_0$ es trivial e $(ii)_0$ se deduce directamente de la definición de I' y ℓ. Aumamos ahora que $(i)_k$ e $(ii)_k$ se cumple para $k < n$, y $x, y \in I \cup I'$:

$$\begin{aligned}\left|\log \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)}\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\log f'(f^{k-1}(x)) - \log f'(f^{k-1}(y))| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{n} |f^{k-1}(x) - f^{k-1}(y)| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{n} |f^{k-1}(I)| + |f^{k-1}(I')| \\ &\leq 2C \sum_{k=1}^{n} |f^{k-1}(I)| \leq 2C\end{aligned}$$

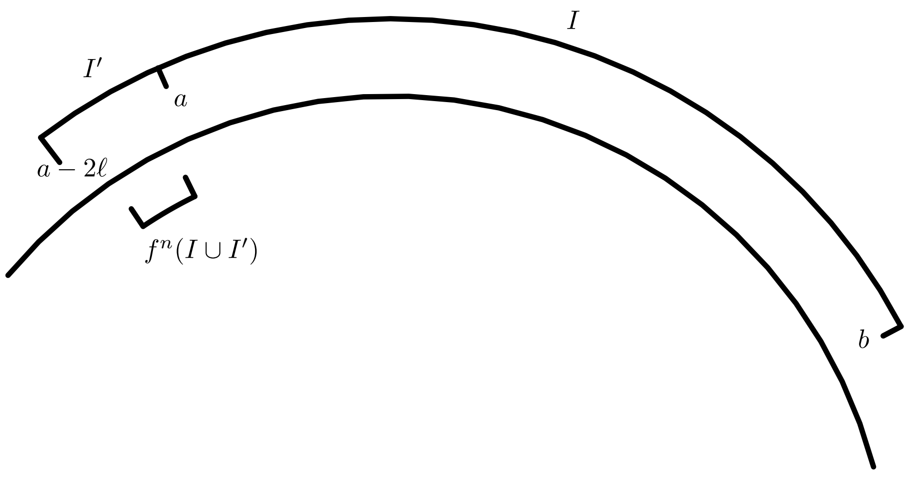
Esto demuestra $(i)_n$, luego por el teorema de valor medio de Lagrange tenemos que existen $x \in I'$ e $y \in I$ tal que:

$$|f^n(I')| = (f^n)'(x)|I'| \text{y} |f^n(I)| = (f^n)'(y)|I|$$

Y con esto probamos que

$$\frac{|f^n(I')|}{|f^n(I)|} = \frac{(f^n)'(x)|I'|}{(f^n)'(y)|I|} \leq \frac{e^{2C}|I'|}{|I|} = 1$$

Con esto probamos $(ii)_n$. Para terminar probaremos que existe n tal que $f^n(I) \subset [a-\ell, a]$. Como Λ es igual a los puntos de acumulación de todas las órbitas, existe n tal que $|f^n(a) - a| \leq \ell$, esto implica que $f^n(I) \subset [a-\ell, a]$. Por $(ii)_n$ tenemos que $f^n(I \cup I') \subset I \cup I'$, pero esto es absurdo porque esto implica que existe un punto fijo $p = \bigcap_k f^{kn}(I' \cup I)$ ($|f^n(I' \cup I)| \to 0$ ya que $|f^n(I)| \to 0$ y $|f^n(I' \cup I)| \leq 2f^n(I)$). Por lo tanto fue absurdo suponer que existía un cantor minimal invariante.$\square$



Con una estrategia muy similar podemos probar el teorema de Sacksteder. Sacksteder probó este teorema para pseudo-grupos $C^{1+\mathrm{Lip}}$ del círculo, nosotros probaremos la versión para grupos.

Teorema 3.1.2. (Sacksteder) *Si Γ es un subgrupo finitamente generado de $\mathrm{Diff}_{+}^{1+\mathrm{Lip}}(S^1)$ que admite un minimal excepcional, entonces existe $x \in S^1, g \in \Gamma$ tal que $g(x) = x$ y $g'(x) < 1$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un generador simétrico finito de Γ y Λ el minimal invariante. Como $\mathcal{G}$ es finito, existe $C > 0$ tal que $|\log h'(x) - \log h'(y)| \leq C|x - y|$ para todo $h \in G$. Sea (a, b) una componente conexa de Λ^c, $I = [a, b]$, tenemos que la órbita de a, $\Gamma(a)$ es densa en Λ. Sea $x \in \Gamma(a)$, definimos $k(x) = \text{mín}\{\|g\|_{\mathcal{G}} : g(a) = x\}$, como para todo $n \in \mathbb{N}$ existen finitos $x \in S^1$ tal que $k(x) = n$ podemos definir $L_n = \text{máx}\{|I_x| : k(x) = n\}$ donde $I_x = [x, y]$ y el interior de I_x es una componente conexa de Λ^c, tenemos que $\sum L_n \leq 1$. Definimos

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma : g(a) = x, \|g\|_{\mathcal{G}} = k(x)\}$$

obviamente $\Gamma_x \neq \varnothing$ para todo $x \in \Gamma(a)$. también definimos $\Gamma' = \bigcup \Gamma_x$.

Si $g = h_n \cdots h_1 \in \Gamma', h_i \in \mathcal{G}, \|g\|_{\mathcal{G}=\setminus}$, entonces $h_j \cdots h_1 \in \Gamma'$ para todo $j = 1, .., n$. Supongamos que esto no es cierto, $g \in \Gamma'$ si y solo si existe $x \in \Gamma(a)$ tal que $g(a) = x$ y para todo $g^* \in \Gamma$ tal que $g^*(a) = x$, $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|g^*\|_{\mathcal{G}}$. Si $g_j = h_j \cdots h_1 \notin \Gamma'$ para algún $j = 1, ..., n$, entonces existe $g^* \in \Gamma$ tal que $\|g^*\|_{\mathcal{G}} < \|g_j\|_{\mathcal{G}} = j$ y $g^*(a) = g_j(a)$, entonces $h_n \cdots h_{j+1} g^*(a) = x$. Pero

$$\|h_n \cdots h_{j+1} g^*\|_{\mathcal{G}} \leq n - j + \|g^*\|_{\mathcal{G}} < n = \|g\|_{\mathcal{G}}$$

y esto es absurdo, por lo tanto $g_j \in \Gamma'$. En particular si definimos $g_j = h_j \cdots h_1$ como arriba, tenemos que $g_j(I) \cap g_i(I) = \varnothing, \forall i, j \in 1, .., n$.

De manera similar al teorema de Denjoy, definimos $\ell = \frac{|I|}{2e^{2C}}$ y el intervalo $I' = [a - 2\ell, a]$, y demostramos para todo $g \in \Gamma'$:

(i) $\sup_{x,y \in I \cup I'} \frac{g'(x)}{g'(y)} \leq e^{2C}$

(ii) $|g(I')| \leq |g(I)|$

Lo probaremos por inducción en $\|g\|_{\mathcal{G}}$. Si $\|g\|_{\mathcal{G}} = 0$, entonces g es la identidad, por lo tanto (i) e (ii) se deducen trivialmente. Supongamos que (i) e (ii) se cumplen para todo $g \in \Gamma'$ tal que $\|g\|_{\mathcal{G}} < n$, tomamos $g \in \Gamma'$ tal que $\|g\|_{\mathcal{G}} = n$ y $x, y \in I \cup I'$ entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\log \frac{g'(x)}{g'(y)}\right| &= \left|\log \frac{(h_n \cdots h_1 h_0)'(x)}{(h_n \cdots h_1 h_0)'(y)}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\log h_k'(h_{k-1} \cdots h_0(x)) - \log h_k'(h_{k-1} \cdots h_k(y))| \\
&\leq C \sum |h_{k-1} \cdots h_0(x) - h_{k-1} \cdots h_0(y)| \\
&\leq C \sum_{k-1}^{n} |h_{k-1} \cdots h_0(I)| + |h_{k-1} \cdots h_0(I')| \\
&\leq 2C \sum_{k-1}^{n} |h_{k-1} \cdots h_0(I)| \leq 2C
\end{aligned}$$

Donde h_0 es la identidad. Esto prueba (i) para el caso $\|g\|_{\mathcal{G}} = n$, y por el teorema de valor medio de Lagrange, existen $x \in I'$ e $y \in I'$ tal que:

$$g(I') = g'(x)|I'|$$

$$g(I) = g'(y)|I|$$

Por lo tanto
$$\frac{|g(I')|}{|g(I)|} = \frac{g(x)|I'|}{g(y)|I|} \leq \frac{e^{2C}|I'|}{|I|} = 1$$

Con esto probamos (ii) para el caso $\|g\|_{\mathcal{G}} = n$ y por lo tanto para todo $g \in \Gamma'$. Como $\Gamma'(a) = \Gamma(a)$ es denso en Λ, existe $g \in \Gamma'$ tal que $g(a) \in [a-\ell, a]$ y $g(a) \neq a$ y por (ii) $g(I \cup I') \subset (I \cup I)$, de hecho $g(I') \subset I'$ ya que $g(I) \cap I = \varnothing$ porque $g(a) \neq a$. Esto prueba que existe $x \in I'$ tal que $g(x) = x$, nos queda probar que $g'(x) < 1$, para hacer esto tomamos $y \in I$ tal que $g'(y) = |g(I)|/|I| \leq \ell/|I|$. Ahora por (i) tenemos que:
$$g'(x) \leq e^{2C} g'(y) = \frac{e^{2C}\ell}{|I|} = \frac{1}{2}$$

Y esto concluye la prueba. □

Para concluir esta sección probaremos un corolario del teorema de Denjoy para grupos nilpotentes promediables finitamente generados.

Corolario 3.1.3. *Si Γ es un subgrupo finitamente generado de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}(S^1)$ que admite un minimal excepcional, entonces Γ no es promediable.*

Demostración. Supongamos que Γ admite un cantor minimal, y consideremos la acción de Γ en el círculo topológico S_Λ asociado a Λ. Sea μ una medida de probabilidad invariante por Γ en S_Λ, como Γ es una acción minimal en S_Λ, μ tiene soporte total, por lo tanto la acción de Γ en S_Λ es conjugado topológico a un grupo de rotaciones, lo que implica que Γ es homomorfo a un grupo de rotaciones. Si todos los generadores tienen número de rotación racional, entonces tienen orden finito, pero eso implica que el conjunto minimal invariante de Γ es finito, lo que es absurdo. Si existe un elemento en Γ con número de rotación irracional, por el teorema de Denjoy, es conjugado a una rotación irracional, y esto implica que Γ es una acción minimal en S^1, lo que es absurdo. Esto concluye la prueba. □

3.2. Teoremas de Plante-Thurston

El siguiente lema probado por Nancy Kopell [8] nos será útil para los teoremas que probaremos más adelante.

Teorema 3.2.1 (Kopell) *Sean $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}([0,1))$ y $g \in \mathrm{Diff}_+^1([0,1))$, tal que f y g conmutan. Si f no tiene puntos fijos en $(0,1)$ y g tiene al menos un punto fijo en $(0,1)$, entonces $g = \mathrm{Id}$.*

Demostración Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) < x$ $\forall x \in (0,1)$. Sea $b \in (0,1)$ un punto fijo de g y $a = f(b)$, además definimos $b_n = f^n(b)$. Como g conmuta con f

$$g(b_n) = gf^n(b) = f^n g(b) = f^n(b)$$

por lo tanto (b_n) es una sucesión de puntos fijos que converge a 0 ya que $f(x) < x$ y 0 es el único punto fijo de f, como consecuencia tenemos que:

$$g'(0) = \lim \frac{g(b_n) - g(0)}{b_n - 0} = 1$$

Sea $|\log f'(x) - \log f'(y)| \leq \delta |x-y|$ para todo $x, y \in [0,1)$. Si $u, v \in [a,b]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\log\left(\frac{(f')^n(u)}{(f')^n(v)}\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\log f'(f^{k-1})(u) - \log f'(f^{k-1})(v)| \\ &\leq \delta \sum_{k=1}^{n} |f^{k-1}(u) - f^{k-1}(v)| \leq \delta\end{aligned}$$

Sea $v = x \in [a,b]$ y $u = f^{-n} g f^n(x) = g(x) \in [a,b]$. Teniendo en cuenta la igualdad

$$(f^n)'(f^{-n} g f^n(x)) g'(x) = g'(f^n(x))(f^n)'(x)$$

Tenemos que

$$g'(x) = \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(g(x))} g'(f^n(x))$$

Si pasamos al límite en n podemos ver que $\sup_{x \in [a,b]} g(x) \leq e^{\delta}$. Ahora, como δ depende únicamente de f, si cambiamos g por g^j la última ecuación sigue siendo cierta, por lo que tenemos

$$\sup_{x \in [a,b]} (g^j)'(x) \leq e^{\delta}$$

Para todo $j \in \mathbb{Z}$, pero como $g([a,b]) = [a,b]$ esto es imposible salvo que $g|_{[a,b]} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$. Para terminar, como $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n([a,b]) = (0,1)$, tenemos que $g = \mathrm{Id}$ en todo el dominio. $\square$

Los siguientes teoremas se deben a Joseph Plante y William Thurston [10] y son dos teoremas centrales de esta monografía. Estos teoremas prueban que no hay subgrupos nilpotentes no abelianos de $[0,\infty)$ o S^1. En esta monografía no se va a demostrar pero para el caso de $[0,\infty)$ la condición de nilpotencia se puede extender a grupos con crecimiento polinomial.

Teorema 3.2.2. (Plante-Thurston para $[0,\infty)$) *Todo subgrupo nilpotente de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}([0,\infty))$ es abeliano.*

Demostración. Sea Γ un subgrupo nilpotente de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}([0,\infty))$. Si la restricción de Γ a $\mathbb{R}^+$ actúa sin puntos fijos, entonces es abeliano por el teorema de Hölder. Sea f un elemento no trivial de Γ con puntos fijos y g un elemento no trivial de $Z(\Gamma)$, además tomamos $a < b \leq \infty$ tal que $f(a) = a$ y $f(b) = b$ (si $b < \infty$) y f no tenga puntos fijos en (a,b). Asumamos (tomando el inverso si es necesario) que $f(x) < x$ para $x \in (a,b)$. Afirmamos que $g(x)$ es la identidad en $[a,b)$ o $g(x) \neq x$ para todo $x \in (a,b)$. En efecto si $g(x) = x$ para algún $x \in (a,b)$ entonces, como f y g conmutan, g fija a $f^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto fija también $a = \lim_{n\to\infty} f^{-n}(x)$ y $b = \lim_{n\to\infty f^n(x)}$, y por el lema de Kopell g es la identidad en $[a,b)$. Por el mismo argumento si invertimos los roles de f y g llegamos a que $g(a) = a$ y $g(b) = b$ en cualquiera de los dos casos. Sea K_1 la clausura del conjunto

$$\{x \in [0,\infty) : \exists f \in Z(\Gamma) / f(x) \neq x\}$$

El teorema de Hölder y lo que probamos arriba implica que Γ conmuta en K_1. Como $Z(\Gamma)$ actúa trivialmente en el complemento de K_1, la acción de Γ en el complemento de K_1 es equivalente a la acción de $\Gamma/Z(\Gamma)$. Si $\Gamma/Z(\Gamma)$ actúa trivialmente en el complemento de K_1 terminamos. Si no, como $\Gamma/Z(\Gamma)$ es nilpotente, repetimos el argumento de arriba y obtenemos un conjunto cerrado $K_2 \supset K_1$ ($\mathrm{K}_2 \neq K_1$) tal que Γ conmuta en K_2 y $Z(\Gamma/Z(\Gamma))$ actúa trivialmente en el complemento. Como Γ es nilpotente podemos repetir este proceso una cantidad finita de veces hasta que encontremos un conjunto cerrado K_j tal que Γ conmuta en K_j y actúa trivialmente en el complemento. Por lo tanto Γ es abeliano. $\square$

Teorema 3.2.3. (Plante-Thurston para S^1) *Todo subgrupo nilpotente de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}(S^1)$ *es abeliano.*

Demostración. Como los grupos nilpotentes son promediables, si Γ es un subgrupo nilpotente de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}(S^1)$, entonces preserva una medida de probabilidad μ en S^1. Vimos que en este caso el número de rotación $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un homomorfismo. Si Γ actúa minimalmente en S^1, entonces es conjugado a un grupo de rotaciones, por lo tanto es abeliano.

Supongamos que Γ admite un minimal invariante finito Λ, entonces $\Lambda \subset \cap_{g\in\Gamma}\mathrm{Per}(g)$. Si Γ no es abeliano, existen $f, g \in \Gamma$ tal que $h = [f, g] \in Z(\Gamma)$ no es trivial. Como ρ es un homomorfismo, $\rho(h) = 0$, por lo tanto tiene puntos fijos. De la igualdad $f^{-1}g^{-1}fg = h$ obtenemos $g^{-1}fg = fh$, por lo tanto $g^{-1}f^n g = f^n h^n$. Por conjugaciones múltiples de g deducimos $g^{-m}f^n g^m = f^n h^{mn}$, finalmente tenemos la igualdad

$$h^{mn} = f^{-n}g^{-m}f^n g^m$$

Si $x_0 \in \Lambda$ y m, n son tales que x_0 es un punto fijo de f^n y g^m, esto implica que $h(x_0) = x_0$. Tomemos la restricción al intervalo $[x_0, x_0 + 1)$ del grupo generado por f, g y h, como este grupo es nilpotente tiene que ser abeliano, pero esto implica que h es la identidad en el intervalo, y por lo tanto, en S^1.

Por último supongamos que Γ admite un minimal excepcional. Tomemos un subgrupo finitamente generado de Γ, este subgrupo no admite un minimal excepcional por el corolario 3.1.3, así que tiene que ser abeliano por lo que acabamos de probar. Como todo subgrupo finitamente generado de Γ es abeliano, Γ es abeliano. □

3.3. Contraejemplo $C^{1+\tau}$ de Denjoy

En el capítulo anterior vimos un ejemplo de una función C^0 que admite un minimal excepcional, sin embargo el teorema de Denjoy nos asegura que no existe una funci'$C^{1+\mathrm{Lip}}$ de esta forma. Haremos ahora una construcción de Michael Herman [7]. Resulta que $C^{1+\mathrm{Lip}}$ es una buena cota para la regularidad (aunque se puede reducir más, por ejemplo a $C^{1+\mathrm{bv}}$). Para ver esto definamos una noción de regularidad intermedia entre C^1 y $C^{1+\mathrm{Lip}}$, y probemos que para estas regularidades existen funciones que admiten un minimal excepcional.

Definición 3.3.1. Sea $\tau \in (0, 1)$, decimos que $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es **τ-Hölder continua** si existe una constante C tal que para todo x, y en $[0, 1]$,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y|^\tau$$

y definimos la norma C^τ de ψ como

$$\|\psi\|_\tau = \sup_{x\neq y}\left|\frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|^\tau}\right|.$$

De la definición es claro que la continuidad Hölder implica continuidad, y si tomamos $\tau = 1$ en la definición, vemos que coincide con la definición de continuidad Lipschitz. De hecho, $\tau < c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$|x - y|^c \leq |x - y|^\tau$$

para cualquier $x, y \in [0, 1]$, de esto se deduce que la continuidad Lipschitz implica continuidad Hölder de todos los órdenes. Si tomamos $\tau > 1$ en la definición, tenemos que ψ es derivable y tiene derivada 0, por lo tanto es constante.

Para la construcción seguiremos una estrategia parecida al caso C^0, pero controlando el módulo de continuidad de las derivadas de las funciones que usemos en cada intervalo del complemento de nuestro invariante minimal. Para eso usaremos el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Sea $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ una familia de intervalos cerrados en $[0,1]$ (resp. S^1) tal que el complemento de la unión tiene medida Lebesgue nula. Supongamos que φ es un homeomorfismo de $[0,1]$ (resp. S^1) tal que las restricciones a cada intervalo I_n son difeomorfismos $C^{1+\tau}$ que son tangentes C^1 a la identidad en los extremos de I_n, sus derivadas tienen norma τ-Hölder y están acotadas por una constante C. Entonces φ es un difeomorfismo $C^{1+\tau}$ de todo el intervalo $[0,1]$ (resp. S^1), y la norma τ-Hölder de su derivada es menor o igual a $2C$.*

Demostración. Vamos a demostrar el lema para el caso del intervalo, ya que el caso del círculo es análogo. Sea $x, y \in \bigcup I_n$ tal que $x < y$. Si pertenecen al mismo intervalo I_n entonces por hipótesis:

$$\frac{|\varphi'(y) - \varphi'(x)|}{|y-x|^\tau} \leq C$$

Ahora tomamos $x \in I_i = [x_i, y_i]$ e $y \in [x_j, y_j]$, con $y_i \leq x_j$. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi'(y) - \varphi'(x)|}{|y-x|^\tau} &= \frac{|(\varphi'(y) - 1) + (1 - \varphi'(x)|}{|y-x|^\tau} \\
&\leq \frac{|\varphi'(y) - \varphi'(x_j)|}{|y-x|^\tau} + \frac{|\varphi'(y_i) - \varphi'(x)|}{|y-x|^\tau} \\
&\leq C\left[\frac{|y-x_j|^\tau}{|y-x|^\tau} + \frac{|y_i - x|^\tau}{|y-x|^\tau}\right] \leq 2C
\end{aligned}$$

De esto obtenemos que el mapa $x \mapsto \varphi'(x)$ es uniformemente continuo en el conjunto denso $\bigcup I_n$ y por lo tanto se extiende a una función continua definida en $[0,1]$ con norma τ-Hölder acotada por $2C$. Como la medida Lebesgue de $I \setminus \bigcup I_n$ es nula, este mapa tiene que coincidir en todo punto con la derivada de φ. □

Ahora precisamos una buena familia de funciones para hacer uso de este lema.

Definición 3.3.3. Decimos que una familia $\{\varphi_{a,b} : [0,a] \to [0,b] : a > 0, b > 0\}$ de homeomorfismos es **equivariante** si $\varphi_{b,c} \circ \varphi_{a,b} = \varphi_{a,c}$ para todo a, b, c positivos.

Dada una familia equivariante y dos intervalos $I = [x_1, x_2]$, $J = [y_1, y_2]$, podemos definir $\varphi(I,J) : I \to J$ como el homeomorfismo

$$\varphi(I,J)(x) = \varphi_{x_2 - x_1, y_2 - y_1}(x - x_1) + y_1$$

Como $\varphi_{a,a}$ es la identidad en $[0,a]$, $\varphi(I,I)$ es la identidad en I.

La familia equivariante mas simple de estudiar es probablemente la familia de los mapas lineales $\varphi_{a,b}(x) = \frac{b}{a}x$, esta es la familia que usamos para la construcción C^0, sin embargo esta familia no nos sirve ya que no se comporta como queremos en los extremos y no podemos pegarlos de manera suave. Para construir una familia adecuada, vamos a introducir una estrategia general. Dada una familia de homeomorfismos $\{\varphi_a : (0,a) \to \mathbb{R} : a > 0\}$, definimos $\varphi_{a,b} = \varphi_b^{-1} \circ \varphi_a : (0,a) \to (0,b)$. Tenemos que

$$\varphi_{b,c} \circ \varphi_{a,b} = (\varphi_c^{-1} \circ \varphi_b) \circ (\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a) = \varphi_c^{-1} \circ \varphi_a = \varphi_{a,c}$$

Y si extendemos $\varphi_{a,b}$ continuamente al intervalo $[0,a]$, tomando $\varphi_{a,b}(0)=0$ y $\varphi_{a,b}(a)=b$, obtenemos una familia equivariante. Una familia útil es la familia equivariante asociada a

$$\varphi_a(x) = -\frac{1}{a}\cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

A esta familia se la conoce a veces como la familia de Yoccoz, en honor al matemático Jean-Christophe Yoccoz que la introdujo. Los elementos de esta familia satisfacen buenas propiedades diferenciables que veremos a continuación.

Sea $u=\varphi_a(x)$, tenemos que

$$\varphi'_{a,b}(x) = (\varphi_b^{-1})'(\varphi_a(x))\varphi'_a(x) = \frac{(\varphi_b^{-1})'(u)}{(\varphi_a^{-1})'(u)} = \frac{u^2+a^{-2}}{u^2+b^{-2}}$$

Si $x\to 0$ (resp. $x\to a$), entonces $u\to-\infty$ (resp. $u\to\infty$) y $\varphi'_{a,b}(x)\to 1$. Es más para $a\leq b$ (resp. $b\leq a$), la función $u\to\frac{u^2+a^{-2}}{u^2b^{-2}}$ alcanza su mínimo (resp. máximo) en $u=0$. Como este valor es $\frac{b^2}{a^2}$, tenemos:

$$\sup_{x\in[0,a]}|\varphi'_{a,b}(x)-1| = \left|\frac{b^2}{a^2}-1\right|$$

Para la derivada segunda de $\varphi_{a,b}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\varphi''_{a,b}(x)| &= \left|\frac{d\varphi'_{a,b}(x)}{du}\right|\cdot\left|\frac{du}{dx}\right| \\
&= \frac{|2u(u^2+b^{-2})-2u(u^2+a^{-2})|}{(u^2+b^{-2})^2}\pi(u^2+a^{-2}) \\
&= \pi\frac{u^2+b^{-2}}{(u^2+b^{-2})^2}|2u(b^{-2}-a^{-2})| \\
&= \pi\frac{u^2+a^{-2}}{u^2+b^{-2}}\frac{|2u(b^{-2}-a^{-2})|}{u^2+b^{-2}}
\end{aligned}$$

De esto se desprende que $\varphi_{a,b}$ es un difeomorfismo C^2 que cumple $\varphi''_{a,b}(0)=\varphi''_{a,b}(a)=0$. La desigualdad $\frac{2|u|}{u^2+t^2}\leq\frac{1}{t}$ aplicada a $t=\frac{1}{b}$ nos da

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq \pi\frac{u^2+a^{-2}}{u^2+b^{-2}}\left|b^{-2}-a^{-2}\right|b$$

Si $a\leq b$ esto implica

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq \pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)b = \frac{\pi b}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)$$

Por lo tanto si $a\leq b\leq 2a$, entonces

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq 6\pi\left|\frac{b}{a}-1\right|\frac{1}{a}$$

Análogamente, si $b\leq a\leq 2b$, entonces

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq \frac{\pi}{b}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) \leq 2\pi\left|\frac{b}{a}-1\right|\frac{1}{b} \leq 4\pi\left|\frac{b}{a}-1\right|\frac{1}{a}$$

Por lo tanto, en ambos casos tenemos

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq 6\pi\left|\frac{b}{a}-1\right|\frac{1}{a}$$

De esta desigualdad obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.3.4. *Sean $a, b > 0$ tal que $a/b \leq 2$, $b/a \leq 2$ y*

$$\left|\frac{b}{a} - 1\right| \frac{1}{a^\tau} \leq C$$

entonces la norma τ-Hölder de $\varphi'_{a,b}$ es menor o igual a $6\pi C$

Demostración. Por nuestra última desigualdad, para todo $x \in [0, a]$ tenemos

$$|\varphi''_{a,b}(x)| \leq \frac{6\pi C a^\tau}{a}$$

Para todo $y < z$ en $[0, a]$, existe $x \in [y, z]$ tal que

$$\varphi'_{a,b}(z) - \varphi'_{a,b}(y) = \varphi''_{a,b}(x)(y - z)$$

Como la función $s \mapsto s/s^\tau$ es creciente y $z - y \leq a$ tenemos que

$$\frac{|\varphi'_{a,b}(z) - \varphi'_{a,b}(y)|}{|z - y|^\tau} = |\varphi''_{a,b}(x)| \frac{|z - y|}{|z - y|^\tau} \leq |\varphi''_{a,b}(x)| \frac{a}{a^\tau} \leq 6\pi C$$

lo que demuestra el lema. □

Con este lema estamos en condiciones de encontrar contraejemplos de Denjoy con derivada τ-Hölder continua para todo $\tau \in (0, 1)$.

Teorema 3.3.5. (Contraejemplo de Denjoy) *Para todo $\tau \in (0, 1)$, θ ángulo irracional, existe $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\tau}(S^1)$ con número de rotación θ tal que f admite un conjunto minimal invariante excepcional.*

Demostración Para esta construcción fijemos un punto $x_0 \in S^1$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ reemplacemos cada punto $x_n = R_\theta^n(x_0)$ por un intervalo I_n de longitud

$$\ell_n = \frac{1}{(|n| + 2)[\log(|n| + 2)]^2}$$

La rotación R_θ induce un homeomorfismo $\tilde{f}$ de un círculo de longitud

$$\ell = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n$$

definiendo $\tilde{f}(x) = \varphi(I_n, I_{n+1})(x)$ para $x \in I_n$ y extendiendo la función continuamente al círculo. Para verificar que $\tilde{f}$ tiene derivada τ-Hölder continua es suficiente con acotar el valor de

$$\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \frac{1}{\ell_n^\tau}$$

Probaremos que la expresión de arriba está acotado para $n \geq 0$, para $n < 0$ se puede demostrar de manera similar.

$$\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \frac{1}{\ell_n^\tau} = \left|\frac{(n + 2)[\log(n + 2)]^2}{(n + 3)[\log(n + 3)]^2} - 1\right| (n + 2)^\tau [\log(n + 2)]^{2\tau}$$

Por el teorema de valor intermedio aplicado a $x \to x[\log x]^2$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \frac{1}{\ell_n^\tau} &\leq \frac{[\log(n+3)]^2 + 2\log(n+3)}{(n+3)[\log(n+3)]^2}(n+2)^\tau[\log(n+2)]^{2\tau} \\ &= \left(1 + \frac{2}{\log(n+3)}\right)\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^\tau \frac{[\log(n+2)]^{2\tau}}{(n+3)^{1-\tau}} \\ &\leq 3\frac{[\log(n+2)]^{2\tau}}{(n+3)^{1-\tau}} \leq 3\left(\frac{2\tau}{e(1-\tau)}\right)^{2\tau}\end{aligned}$$

El difeomorfismo $\tilde{f}$ que construimos actúa en el círculo de longitud ℓ. Por lo tanto para obtener un difeomorfismo f del círculo unitario basta con normalizar a $\tilde{f}$ por una función afín ϕ, y esto no afecta la regularidad, así que $f = \phi \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1}$ tiene derivada τ-Hölder. □

3.4. Subgrupos nilpotentes de $\mathbf{Diff}_+^1([0,1])$

El teorema de Plante-Thurston nos dice que no existen subgrupos nilpotentes (no abelianos) de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{Lip}}([0,1])$, sin embargo, al final del capítulo 2 encontramos un subgrupo nilpotente no abeliano de $\mathrm{Homeo}_+([0,1])$. Una pregunta que surge naturalmente de esto es si existen subgrupos nilpotentes de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1]), resultaquesí, yademásexistensubgruposnilpotentesde\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ de todos los órdenes de nilpotencia.

Seguiremos el ejemplo formulado por Farb y Franks [4].Para la construcción usaremos los grupos $\mathcal{N}^n$, formados por las matrices $n \times n$ triangulares superiores, estos grupos son nilpotentes de nilpotencia $n-1$. Para el caso C^0, probamos que existía un subgrupo isomorfo a $\mathcal{N}^3$. Para construir la acción, nos tomamos el intervalo $[0,1]$ y lo partimos por infinitos intervalos, luego a cada intervalo de la partición lo volvimos a partir por infinitos intervalos y en cada intervalo nos tomamos una función afín. La construcción para el caso C^1 va a ser similar, solo que nos tomaremos más particiones, cuidaremos cómo se contraen los intervalos y usaremos la familia de Yoccoz en lugar de funciones afines.

Una de las primeras cosas a tener en cuenta es que si tomamos $\mathbb{Z}^n$, entonces $\mathcal{N}^n$ actúa en $\mathbb{Z}^n$ por la acción lineal, y esta acción preserva el orden lexicográfico. En toda la sección $\varphi_{a,b}$ van a ser elementos de la familia de Yoccoz. Precisaremos el próximo resultado técnico.

Lema 3.4.1. *Sea n un entero positivo par y $K > 0$, entonces para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \frac{|(x+y)^n - y^n|}{x^{n+2} + y^n + K} = 0$$

También, dado $\varepsilon > 0$, para K suficientemente grande tenemos que

$$\frac{|(x+y)^n - y^n|}{x^{n+2} + y^n + K} < \varepsilon$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. El numerador $(x+y)^n - y^n$ es una suma de monomios de la forma $Cx^k y^{n-k}$, donde $0 < k \leq n$. Por lo tanto es suficiente demostrar

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \frac{|x^k||y|^{n-k}}{x^{n+2}y^n + K} = 0$$

para $0 < k \leq n$.

Si, para algún $\varepsilon \geq 0$

$$\frac{|x^k||y|^{n-k}}{x^{n+2}y^n + K} \geq \varepsilon$$

queremos probar que existe una cota superior para $|x|$ y $|y|$.

Primero observamos que

$$\frac{|x|^k}{|y|^k} = \frac{|x|^k|y|^{n-k}}{|y|^n} > \frac{|x^k||y|^{n-k}}{x^{n+2}y^n + K} \geq \varepsilon$$

o sea

$$|x| > \varepsilon^{1/k}|y|$$

De manera similar

$$\frac{|y|^{n-k}}{|x|^{n-k+2}} = \frac{|x|^k|y|^{n-k}}{|x|^{n+2}} > \frac{|x^k||y|^{n-k}}{x^{n+2}y^n + K} \geq \varepsilon$$

y esto implica que

$$|y|^{n-k} > \varepsilon|x|^{n-k+2}$$

y observamos que $n - k + 2 > 0$. Si tomamos $k = n$ la última desigualdad nos da que $|x|$ está acotado, y eso implica que $|y|$ está acotado. Sin embargo, cuando $k < n$ tenemos

$$|y| > E|x|^d$$

donde

$$E = \varepsilon^{\frac{1}{n-k}} \text{ y } d = \frac{n-k+2}{n-k} = 1 + \frac{2}{n-k}$$

Combinando las desigualdades obtenemos

$$|x| > \varepsilon^{1/k}|y| > \varepsilon^{1/k}E|x|^d$$

Como $d > 1$, esta desigualdad implica que $|x|$ está acotado, y por lo tanto $|y|$ está acotado, por una cota que depende únicamente de ε y n. De todo esto concluimos que si $\|(x, y)\|$ es suficientemente grande

$$\frac{|x|^k|y|^{n-k}}{x^{n+2} + y^n + K} < \varepsilon$$

que implica el límite deseado. Para probar nuestra segunda aserción, observamos que existe una cota M tal que

$$\frac{|(x-y)^n - y^n|}{x^{n+2} + y^n + K} < \varepsilon$$

para $\|(x, y)\| > M$. De hecho M es independiente de K. Por lo tanto es claro que para K suficientemente grande, esta desigualdad es cierta para todo (x, y). $\square$

Tomemos el grupo $\mathbb{Z}^n$ y equipémoslo con el orden lexicográfico, es decir $(x_1, ..., x_n) \prec (y_1, ..., y_n)$ si y solo si $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq k$ y $x_k < y_k$ para algún $0 \leq k \leq n$. Ahora podemos definir una familia de intervalos cerrados en correspondencia uno a uno con $\mathbb{Z}^n$ (que respete el orden lexicográfico). Usaremos el parámetro K en la definición para conseguir generadores de nuestra acción arbitrariamente cerca de la identidad.

Definición 3.4.2. Para $K > 0$ sea $B_K : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} B_K(q_1, ..., q_n) &= K + \sum_{j=1}^{n} q_j^{2n-2j+2} \\ &= q_1^{2n} + q_2^{2n-2} + \cdots + q_{n-1}^4 + q_n^2 + K \end{aligned}$$

y sea la constante S_K definida por

$$S_K = \sum_{(q_1,...,q_n)\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{B_K(q_1, ..., q_n)}$$

Para $(r_1, ..., r_n)$, definimos $S_K(r_1, ..., r_n)$ por

$$S_K(r_1, ..., r_n) = \sum_{(r_1,...,r_n)\prec(q_1,...,q_n)} \frac{1}{B_K(r_1, ..., r_n)}$$

Finalmente definimos el intervalo cerrado

$$I_K(r_1, ..., r_n) = [S_K(r_1, ..., r_n), S_K(r_1, ..., r_{n+1})]$$

La suma S_K converge, esto se puede demostrar por test de convergencia con integrales, por lo tanto S_K está bien definida. Si consideramos el intervalo $I_K = [0, S_K]$, observemos que I_K es casi la unión de los intervalos $I_K(r_1, ..., r_n)$.

Lema 3.4.3. *Existe un conjunto cerrado numerable $J_K \subset I_K$, tal que*

$$I_K = J_K \cup \left(\bigcup_{(q_1,...,q_n)\in\mathbb{Z}^n} I_K(q_1, ..., q_n) \right)$$

Demostración. Definimos J_K por la igualdad del lema. De la definición se deduce que todo punto en J_K es algún límite de la forma $\lim_{r_i\to\infty(-\infty)} S_K(r_1, ..., r_i, ..., r_n)$ donde r_j está fijado para $j \neq i$. De esto obtenemos que J_K es numerable. J_K es cerrado porque el complemento es claramente abierto. □

Observamos que los intervalos $I_K(q_1, ..., q_n)$ se colocan en el intervalo I_K respetando el órden lexicográfico. El interior de estos intervalos es disjunto dos a dos, pero cada intervalo intersecta a su sucesor en exactamente un punto, el extremo superior de $I(q_1, ..., q_n)$ y el inferior de $I_(q_1, ..., q_n+1)$.

Por esto podemos definir $\nu : I_K \setminus J_K \to \mathbb{Z}^n$ tal que $\nu(x) = (q_1, ..., q_n)$ si $x \in I_K(q_1, ..., q_n)$ y $x \notin I_K(q_1, ..., q_{n+1})$.

Lema 3.4.4. Si K es suficientemente grande, entonces para todo $\alpha \in \mathcal{N}^n$ existe un homeomorfismo $g_\alpha : I_K \to I_K$ tal que para todo $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Z}^n$.

(1) $g_\alpha(I_K(q_1, ..., q_n)) = I_K(\alpha(q_1, ..., a_n))$

(2) $g_{\alpha\beta}(x) = (g_\alpha \circ g_\beta)(x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{N}^n, x \in I_K$

(3) Para $x \in I_K(q_1, ..., q_n)$, $g_\alpha(x) = \varphi\Big(I_K(q_1, ..., q_n), I_K(\alpha(q_1, ..., q_n))\Big)(x)$

Demostración Definimos $g_\alpha(x) : I_K \setminus J_K \to I_K \setminus J_K$ tal que

$$g_\alpha(x) = \varphi\Big(I_K(\nu(x)), I_K(\alpha(\nu(x)))\Big)(x)$$

esta definición nos da inmediatamente (1) y (3). Esto nos da un homeomorfismo g_α de $I_K \setminus J_K$ a sí mismo que es creciente, como J_K es un subconjunto numerable y cerrado de I_K, podemos extender g_α a todo I_K tal que g_α es creciente y continua. Esto nos da que $g_\alpha : I_K \to I_K$ es un homeomorfismo.

Para probar (2), recordemos que $\varphi(J, K) \circ (I, J) = (I, K)$. Ahora, si $x \in I_K$, tenemos que $x \in I_K(\nu(x))$, entonces

$$\begin{aligned}
(g_\alpha \circ g_\beta)(x) &= g_\alpha\Bigg(\varphi\Big(I_K(\nu(x)), I_K(\beta(\nu(x)))\Big)(x)\Bigg) \\
&= \varphi\Big(I_K(\alpha(\nu(x))), I_K(\alpha(\beta(\nu(x))))\Big)\Bigg(\varphi\Big(I_K(\nu(x)), I_K(\beta(\nu(x)))\Big)(x)\Bigg) \\
&= \Bigg(\varphi\Big(I_K(\alpha(\nu(x))), I_K(\alpha\beta(\nu(x)))\Big) \circ \varphi\Big(I_K(\nu(x)), I_K(\beta(\nu(x)))\Big)\Bigg)(x) \\
&= \varphi\Big(I_K(\nu(x)), I_K(\alpha\beta(\nu(x)))\Big)(x) = g_{\alpha\beta}(x)
\end{aligned}$$

Como $g_\alpha \circ g_\beta = g_{\alpha\beta}$ en un denso, por continuidad la igualdad se sostiene en todo I_K. $\square$

Para $1 \leq i < n$ definimos $\sigma_i = (b_{j,k}) \in \mathcal{N}^n$ tal que $b_{j,j} = 1$ para todo $j = 1, ..., n$, $b_{i+1,i} = 1$, y $b_{j,k} = 0$ en el resto de los casos. $\{\sigma_i\}$ es un generador de $\mathcal{N}^n$. Definimos g_i como el homeomorfismo g_{σ_i}, nuestro objetivo es probar que g_i es un difeomorfismo C^1. Para esto precisaremos algunos lemas.

Lema 3.4.5. *Sea x_k una sucesión monótona en $I_K \setminus J_K$ que converge a un punto en J_K, entonces para $i = 1, ..., n-1$*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_K\Big(\sigma_i(\nu(x_k))\Big)}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} = 1$$

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que x_k es creciente. Para $1 \leq j \leq n$, $k \geq 0$, definimos $q_j(k)$ por $\nu(x_k) = (q_1(k), ..., q_j(k), ..., q_n(k))$. Existen $0 = k_0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n \leq \infty$, tal que $q_j(k)$ es creciente en $k \geq k_{j-1}$ y es constante en $k \geq k_j$, esto es una consecuencia directa del orden lexicográfico. $k_n = \infty$ ya que si $k_n = k'$, entonces la sucesión de intervalos $I_K(\nu(x_k))$ es eventualmente constante y el límite x_k no puede pertenecer a J_K. Sea $r = \max\{j + 1 : k_j < \infty\}$, entonces $q_r(j) \to \infty$ cuando $k \to \infty$, y $q_j(k)$ es eventualmente constante si $j < r$.

Observamos que

$$B_K\Big(\sigma_i(\nu(x_k))\Big) = B_K\Big(q_1(k), ..., q_i(k), q_{i+1}(k) + q_i(k), q_{i+2}, ..., q_n(k)\Big)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{B_K\Big(\sigma_i(\nu(x_k))\Big) - B_K\big(\nu(x_k)\big)}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} &= \frac{(q_{i+1}(k) + q_i(k))^{2n-2i} - q_{i+1}^{2n-2i}}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} \\
&= \frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} = y_k
\end{aligned}$$

Donde $P(x,y) = (x+y)^{2n-2i} - y^{2n-2i}$.

Primero evaluamos el caso $r > i+1$. Entonces, para k suficientemente grande tenemos que $P(q_i(k), q_{i+1}(k))$ es acotado (porque es constante), por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_K\Big(\sigma_i(\nu(x_k))\Big)}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} - 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{B_K\Big(\sigma_i(\nu(x_k))\Big) - B_K\big(\nu(x_k)\big)}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} = \lim_{k\to\infty} \frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} = 0$$

que es lo que queríamos probar.

En el caso $r = i$ o $r = i+1$, observamos

$$\frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} = \frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{q_1(k)^{2n} + \cdots q_n(k)^2 + K} \le \frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{q_i(k)^{2n-2i+2} + q_{i+1}(k)^{2n-2i} + K}$$

Y como $q_i(k) \to \infty$ o $q_{i+1}(k) \to \infty$, tenemos que $\|(q_i(k), q_{i+1}(k))\| \to \infty$, y por el lema 3.4.1, y_k converge a 0.

Finalmente, si $r < i$

$$\frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{B_K\big(\nu(x_k)\big)} \le \frac{P(q_i(k), q_{i+1}(k))}{q_r(j)^{2n-2r+2} + q_i(k)^{2n-2i+2} + q_{i+1}(k)^{2n-2i} + K}$$

Ahora, si $q_i(k)$ o q_{i+1} tiende a infinito, y_k converge a 0 por el lema 3.4.1, si $q_i(k)$ y q_{i+1} acotadas, entonces $P(q_i(k), q_{i+1}(k))$ acotada, por lo tanto $y_k \to 0$. $\square$

Recordemos que por definición $|I_K(q_1, ..., q_n)| = B_K(q_1, ..., q_n)$, entonces el lema 3.4.5 implica que si x_k es una sucesión monótona en $I_K \setminus J_K$ de que converge a un punto en J_K, entonces $\frac{\left|g_i\big(I_K(\nu(x_k))\big)\right|}{|I_K(\nu(x_k))|} \to 1$.

Recodemos también que $\sup_{x\in[0,a]} |\varphi'_{a,b}(x) - 1| = \left|\frac{b^2}{a^2} - 1\right| = \left|\frac{b}{a} - 1\right| \left|\frac{b}{a} + 1\right|$, por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\left|\frac{b}{a} - 1\right| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|\varphi'_{a,b}(x) - 1| < \varepsilon$, nótese que $\delta(\varepsilon)$ es independiente de a y b. Ahora si $x \in I_K$, como

$$g_i(x) = \varphi\Big(I_K\big(\nu(x)\big), I_K\big(\sigma_i(\nu(x))\big)\Big)(x) = \varphi_{B_K\big(\nu(x)\big), B_K\big(\sigma_i(\nu(x))\big)}\big(x - S_K\big(\nu(x)\big)\big) + S_K\big(\sigma_I(\nu(x))\big)$$

Tenemos que si $x \in I_K$ y si $\left|\frac{B_K\big(\sigma_i(\nu(x))\big)}{B_K\big(\nu(x)\big)} - 1\right| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|g'_i(x) - 1| < \varepsilon$. Con esto demostramos el siguiente lema.

Lema 3.4.6. *Sea x_k una sucesión monótona en $I_K \setminus J_K$* que converge a un punto en J_K, entonces para $i = 1, ..., n-1$

$$\lim_{k\to\infty} g'_i(x) = 1$$

Los lemas 3.4.5 y 3.4.6 son teoremas centrados en estimar valores para puntos cerca de J_K, los lemas 3.4.6 y 3.4.7 estarán centrados en estimar los mismos valores, pero uniformemente en todo x usando K.

Lema 3.4.7 *Sea $1 \le i < n$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $K_0 > 0$ tal que si $K > K_0$*

$$\left|\frac{B_K\big(\sigma_i(\nu(x))\big)}{B_K\big(\nu(x)\big)} - 1\right| < \varepsilon$$

para todo $x \in I_K \setminus J_K$.

Demostración. Para $1 \leq j \leq n$, sea $q_j(x)$ definida por $\nu(x) = (q_1(x), ..., q_j, ..., q_n(x))$. Recordemos de la demostración del lema 3.4.5 que

$$\left|\frac{B_K\big(\sigma_i(\nu(x))\big)}{B_K\big(\nu(x)\big)} - 1\right| = \frac{\big|P\big(q_i(x), q_{i+1}(x)\big)\big|}{B_K\big(\nu(x)\big)} \leq \frac{\big|P\big(q_i(x), q_{i+1}(x)\big)\big|}{q_i(x)^{2n-2i+2} + q_{i+1}^{2n-2i} + K} = y(x, K)$$

Por la segunda parte del lema 3.4.1, existe K_0 tal que si $K > K_0$, entonces $y(x, K) < \varepsilon$ uniformemente en $I_K \setminus J_K$. $\square$*Nuevamente, si* $\left|\frac{B_K\left(\sigma_i(\nu(x))\right)}{B_K\left(\nu(x)\right)} - 1\right| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|g_i(x) - 1| < \varepsilon$. Por el lema anterior, existe K_0 tal que si $K > K_0$, entonces $\left|\frac{B_K\left(\sigma_i(\nu(x))\right)}{B_K\left(\nu(x)\right)} - 1\right| < \delta(\varepsilon)$, lo que demuestra el siguiente lema.

Lema 3.4.7. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $K_0 > 0$ tal que si $K > K_0$, entonces para todo $x \in I_K \setminus J_K$, $i = 1, ..., n-1$*

$$|g_i'(x) - 1| < \varepsilon$$

Estamos en condiciones de probar que cada homeomorfismo g_i es un difeomorfismo.

Proposición 3.4.8. *Para K suficientemente grande el homeomorfismo $g_i : I_K \to I_K$ es un difeomorfismo C^1 con derivada 1 en los extremos. Dado $\varepsilon > 0$, existe $K_0 > 0$ tal que si $K > K_0$, entonces*

$$|g_i'(x) - 1| < \varepsilon$$

para todo $x \in I_K$.

Demostración. Sabemos que la función $f(x) = g_i'(x)$ existe y es continua en $I_K \setminus J_K$. Por el lema 3.4.5, podemos extender f continuamente a todo I_K definiendo $f(x) = 1$ si $x \in J_K$.

Definimos la función F(x) por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

claramente F es C^1, queremos probar que $F(x) = g_i(x)$. Sea $h(x) = g_i(x) - F(x)$, entonces h es una función continua y $h(0) = 0$. Como h es derivable en $I_K \setminus J_K$ y $h' = 0$ en $I_K \setminus J_K$, tenemos que h es constante en cada componente conexa de $I_K \setminus J_K$, pero como es un abierto, hay a lo sumo numerables componentes conexas, lo que implica que $h(I_K \setminus J_K)$ es numerable. Como J_K es numerable, $h(J_K)$ es numerable. De esto obtenemos que $h(I_K)$ es numerable, pero $h(I_K)$ es conexo, y los únicos subconjuntos conexos numerables de $\mathbb{R}$ son los puntos, por lo tanto $h = 0$. Concluimos que $g_i(x) = F(x)$ es una función C^1.

El lema 3.4.7 y el hecho de que $g_i'(x) = 1$ si $x \in J_K$ implica que existe K_0 tal que si $K > K_0$, entonces

$$|g_i'(x) - 1| < \varepsilon$$

para todo $x \in I_K$. Por último, si tomamos K suficientemente grande tal que $|g_i'(x) - 1| < 1$ para todo $x \in I_K$, entonces $g_i'(x) > 0$, y por el teorema de la función inversa, g_i es un difeomorfismo C^1.$\square$

4. Restricciones C^1

En el capítulo pasado usamos la restricción C^{1+} lo que nos permite hacer demostraciones más dinámicas como el control de distorsión. Sin embargo, al bajar la regularidad tenemos que prestar más atención a la estructura del grupo. En este capítulo mostraremos algunas diferencias de estructura entre el grupo de difeomorfismos y el grupo de homeomorfismos.

4.1. Teorema de Bonatti-Monteverde-Navas-Rivas

En esta sección nos centraremos en el grupo de Baumslag-Solitar $BS(1,2) = \langle a, b / aba^{-1} = b^2 \rangle$. $BS(1,2)$ es isomorfo al grupo $\langle A, B \rangle$ donde $A = 2x$ y $B = x+1$, llamaremos a la acción de $BS(1,2)$ sobre $\mathbb{R}$ por $a(x) = A(x)$, $b(x) = B(x)$ la acción afín estándar de $BS(1,2)$. Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1. (Bonatti-Monteverde-Navas-Rivas [2]) *Toda acción C^1 fiel de $BS(1,2)$ sobre $[0,1]$ sin puntos fijos globales en $(0,1)$ es conjugado a la acción afín estándar en $\mathbb{R}$. Más aún, el elemento correspondiente a la multiplicación por 2, tiene derivada igual a 2 en su único punto fijo en $(0,1)$.*

Precisaremos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.2. (Rivas [11]) *Supongamos que $BS(1,2)$ actúa en $\mathbb{R}$ sin puntos fijos globales. Si b no tiene puntos fijos, entonces la acción es semi-conjugada a la acción afín estándar. Si b tiene algún punto fijo, entonces a no tiene puntos fijos.*

Si b tiene un punto fijo $p \in \mathbb{R}$, entonces la relación $aba^{-1} = b^2$ implica que cada $a^n(p)$ es un punto fijo de b. Como la acción no tiene puntos fijos globales $\{a^k(p)\}$ acumula únicamente en $\pm\infty$, por lo tanto a no tiene puntos fijos en $\mathbb{R}$. El comportamiento de b está determinado por su comportamiento en un dominio fundamental $I = [p, a(p)]$ y por una elección de raíces cuadradas para las preimágenes $a^{-k}(I)$. Si b no tiene puntos fijos necesitaremos otra estrategia.

El elemento b tiene raíces cuadradas ya que $(a^{-1}ba)^2 = a^{-1}b^2a = b$, por lo tanto podemos definir el grupo $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]} = \{b^r : r \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\}$.

Lema 4.1.3. *El grupo $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ es semiconjugado al flujo de traslaciones $T_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / T_r(x) = x + r$ tal que $r \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. En particular, existe una medida de Radón sin átomos ν en $\mathbb{R}$ invariante por el grupo única a menos de multiplicaciíon por un escalar.*

Demostración. Definamos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{R}$,

$$x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x = b^n(y).$$

Como la acción de $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ es libre $\mathbb{R}/\sim$ es un círculo, $S^1_b = \mathbb{R}/\sim$., nótese que $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ actúa en S^1_b (con núcleo $b^{\mathbb{Z}}$), por lo tanto $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ actúa libre en S^1_b (obviando la excepción del núcleo de la acción). Como $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ es abeliano, preserva una medida de probabilidad μ, y como la acción es libre, μ no tiene átomos. Podemos levantar esa medida a una medida de Radón ν invariante por $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ en $\mathbb{R}$. Definimos:

$$rot_b(g) = \nu([0, g(0)]), g \in b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$$

con la convención $\nu([s,t]) = -\nu([t,s])$ si $t < s$. Tenemos que rot_b define un homomorfismo inyectivo de $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ a $\mathbb{R}$. Definimos $F(x) = \nu([0,x])$, entonces F es una semiconjugación de $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ a rot_b (como acción por traslaciones de R), ya que

$$\begin{aligned} F(g(x)) &= \nu([0, g(x)]) = \nu([g(0), g(x)]) + \nu([0, g(0)]) \\ &= \nu([0,x]) + \nu([0, g(0)]) = F(x) + rot_b(g). \end{aligned}$$

Como la medida Lebesgue es la única medida invariante por el subgrupo de traslaciones $F(b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]})$ a menos de multiplicación por un escalar, ν es única a menos de multiplicación por un escalar. □

Queremos formalizar la idea de que la relación $aba^{-1} = b^2$ implica que a actúa como la multiplicación por 2. Para formalizar esta idea, observemos que

$$\begin{aligned} a_*\nu([b(x), b(y)]) &= \nu([a^{-1}b(x), a^{-1}b(y)]) = \nu([b^{1/2}a(x), b^{1/2}a(y)]) \\ &= \nu([a(x), a(y)]) = a_*\nu([x,y]) \end{aligned}$$

por lo tanto $a_*\nu = \lambda_a \nu$ para algún escalar $\lambda_a > 0$. En general, dado $g \in BS(1,2)$, existe $\lambda_g > 0$ tal que $g_*\nu = \lambda_g \nu$. Más aún, la asignación $g \to \lambda_g$ es un homomorfismo de $BS(1,2)$ al grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*_+$.

Demostración de 4.1.2. Definamos el mapa $\varphi : BS(1,2) \to \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ (el grupo de las funciones afines que preservan orientación), definido por:

$$\varphi_g(x) = \frac{1}{\lambda_g} x + \nu([0, g(0)]).$$

Verifiquemos que es un homomorfismo, sean $g, h \in BS(1,2)$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{gh}(x) &= \frac{1}{\lambda_{gh}} x + \nu([0, gh(0)]) = \frac{1}{\lambda_g}\left(\frac{1}{\lambda_h} x + \nu([g^{-1}(0), h(0)])\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_g}\left(\frac{1}{\lambda_h} x + \nu([0, h(0)]) + \nu([g^{-1}(0), 0])\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_g}\left(\frac{1}{\lambda_h} x + \nu([0, h(0)])\right) + \frac{1}{\lambda_g}\nu([g^{-1}(0), 0]) \\ &= \frac{1}{\lambda_g}\left(\frac{1}{\lambda_h} x + \nu([0, h(0)])\right) + \nu([0, g(0)]) = \varphi_g \varphi_h(x) \end{aligned}$$

Por último probamos que $F(x) = \nu([0,x])$ define una semiconjugación de la acción de $BS(1,2)$ a la acción definida por φ:

$$\begin{aligned} F(g(x)) &= \nu([0, g(x)]) = \nu([g(0), g(x)]) + \nu([0, g(0)]) \\ &= \frac{1}{\lambda_g}\nu([0,x]) + \nu([0, g(0)]) = \varphi_g(F(x)) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Hasta este punto, los resultados probados arriba son ciertos para toda acción por homeomorfismos de $BS(1,2)$. A partir de ahora asumiremos que las acciones son C^1 y actúan en $[0,1]$ ya que precisamos la diferenciabilidad en los extremos.

Observación 4.1.4. La regla de la cadena nos garantiza que todo conmutador tiene derivada 1 en los extremos, más aún podemos suponer que todos los elementos del grupo tienen derivada 1 en los extremos conjugando por un homeomorfismo que sea localmente $-\frac{1}{\log(x)}$ en 0 y localmente $1+\frac{1}{\log(1-x)}$ en 1:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(-\log(f(e^{-\frac{1}{x}}))\right)^{-1}\right]' = \lim_{x\to 0}\frac{f'(e^{-\frac{1}{x}})e^{-\frac{1}{x}}}{x^2 f(e^{-\frac{1}{x}})\log(f(e^{-\frac{1}{x}}))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\log(f(e^{-\frac{1}{x}}))^2}$$

Solo tenemos que probar que el último término es 1.

$$\left|\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\log(f(e^{-\frac{1}{x}}))}\right| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{[x^{-1}]'}{[\log(f(e^{-\frac{1}{x}}))]'}\right| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{-\frac{1}{x}})}{f'(e^{-\frac{1}{x}})e^{-\frac{1}{x}}}\right| = 1$$

El caso $x=1$ es análogo.

Proposición 4.1.5. (Cantwell-Conlon [3], Guelman-Liousse [6]) *Supongamos que $BS(1,2)$ actúa en $[0,1]$ sin puntos fijos globales en $(0,1)$ tal que b tiene un punto fijo en $(0,1)$, entonces la acción no puede ser C^1. En particular, toda acción C^1 de $BS(1,2)$ en $[0,1]$ es semiconjugada a la acción afín estándar.*

Demostración. Ya vimos que si p es un punto fijo no trivial de b, entonces $I=(p,a(p))$ es un dominio fundamental para la acción de a y son invariantes por b. Como los intervalos $a^k(I)$ son preservados por b, b tiene derivada 1 en los extremos $0,1$. De hecho, usando la observación anterior podemos asumir algo más fuerte. Sea $\varepsilon>0$ tal que $(1-\varepsilon)^3>\frac{1}{2}$, entonces podemos asumir que existe k_0 tal que para todo $|k|>k_0$, las derivadas de $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ están ε-cerca de 1 en cada intervalo $a^k(I)$. Definimos $I'=a^{-k_0(I)}$.

Sea $x\in I'$ un punto no fijo por b, entonces el intervalo $J=(x,b(x))$ cumple que los intervalos $b^n(J), n\in\mathbb{Z}$ son disjuntos y están contenidos en I'.

Fijemos $m\in\mathbb{N}$. Dado $\underline{\epsilon}=(\epsilon_1,...,\epsilon_m)\in\{0,1\}^m$. Sea

$$B(\underline{\epsilon}) = a^m(b^{\epsilon_m}a^{-1})(b^{\epsilon_{m-1}}a^{-1})\cdots(b^{\epsilon_1}a^{-1}) = \prod_{i=1}^{m} a^i b^{\epsilon_i} a^{-i}$$

tenemos que $B(\underline{\epsilon}) = b^{-R(\underline{\epsilon})}$ donde $R(\underline{\epsilon})=\sum_{i=1}^m \epsilon_i 2^i$. Observamos:

(1) $B(\underline{\epsilon})$ pertenece a la bola de radio $3m$ respecto al generador $\{a,b\}$.

(2) Para cualquier $x\in J$, sea $B_i(\underline{\epsilon})(x)$ las i primeras imágenes intermedias de $B(\underline{\epsilon})(x)$. Entonces $B_i(\underline{\epsilon})(x)\in\bigcup_{k=k_0}^{\infty}a^{-k}(I)$ para todo $i=1,...,3m$, ya que las primeras $2m$ iteraciones mandan a x hacia atrás por a y luego las últimas m iteraciones lo devuelven a I'. Por nuestra condición en las derivadas y la regla de la cadena deducimos que

$$(1-\varepsilon)^{3m} \le B(\underline{\epsilon})'(x)$$

por lo tanto

$$(1-\varepsilon)^{3m}|J| \le |B(\underline{\epsilon})(J)|$$

(3) Para sucesiones diferentes $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^m$ los intervalos $B(\underline{\epsilon})(J)$ son disjuntos, por lo tanto:

$$2^m(1-\varepsilon)^{3m}|J| \leq \sum_{\underline{\epsilon}\in\{0,1\}^m} |B(\underline{\epsilon})(J)| \leq 1 = |[0,1]|$$

Sin embargo como $2(1-\varepsilon)^3 > 1$, el último punto no se puede cumplir para m suficientemente grande. □

En la demostración anterior nos aprovechamos del crecimiento exponencial de $BS(1,2)$, usaremos esta misma estrategia para demostrar el teorema central de esta sección.

Demostración de 4.1.1. Supongamos que $BS(0,1)$ actúa C^1 en el intervalo $[0,1]$ sin puntos fijos globales en $(0,1)$, por **4.1.2** sabemos que es semiconjugada a la acción afín estándar, para probar que la semiconjugación es una conjugación basta probar que la acción de $b^{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ no tiene ningún intervalo errante, se puede repetir la prueba de arriba para llegar a este resultado.

Sea p el único punto fijo de a, supondremos como en la demostración anterior que las derivadas de $a^{\pm1}, b^{\pm1}$ están ε-cerca de 1 en un entorno de los extremos del intervalo (elegiremos ε al final del resultado). Sea $I_0 = [p, b(p)]$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$, sea $I_m = a^{-m}(I_0) = [p, a^{-m}b(p)] = [p, b^{1/2^m}(p)]$.

Supongamos que $a'(p) < 2$, fijemos $\delta > 0$ y un entorno de p tal que $(a^{-1})'(x) > \frac{1}{2} + \delta$ para todo x en el entorno. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$|I_m| = |a^{-m}(I_0)| > C\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^m |I_0|$$

Dada una sucesión $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^m$, definimos

$$b(\underline{\epsilon}) = a^{-m}(b^{\epsilon_m}a)\cdots(b^{\epsilon_1}a) = \prod_{i=1}^{m} a^{-i}b^{\epsilon_i}a^i$$

que es igual a $b^{r(\underline{\epsilon})}$ donde $r(\underline{\epsilon}) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i 2^{-i}$. Obtenemos resultados similares a la demostración anterior:

(1) $b(\underline{\epsilon})$ pertenece a la bola de radio $3m$ respecto al generador $\{a,b\}$.

(2) Todas las imágenes intermedias de $b(\underline{\epsilon})(x)$ están a la derecha de x.

(3) Para sucesiones diferentes $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^m$, los intervalos $b(\underline{\epsilon})(I_m^\circ)$ son disjuntos y

$$\bigcup_{\underline{\epsilon}\in\{0,1\}^m} b(\underline{\epsilon})(I_m) = I_0$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ suficiente mente grande tal que $J_m = b^N(I_m)$ esté en el entorno de 1 donde tenemos controladas las derivadas de los generadores. Sea $D = \text{mín}_{[0,1]}(b^N)'$, entonces

$$|J_m| \geq DC\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^m |I_0|$$

Las observaciones anteriores para $b(\underline{\epsilon})$ se mantienen si nos restringimos a J_m ya que todos los $b(\underline{\epsilon})$ conmutan con b^N, en particular por el punto (3), los intervalos $b(\underline{\epsilon})(J_m^\circ)$ son disjuntos y

$$\bigcup_{\underline{\epsilon}\in\{0,1\}^m} b(\underline{\epsilon})(J_m) = J_0$$

Sin embargo ahora tenemos el control de derivadas, por lo tanto para todo $x \in J_m$ tenemos que

$$(1-\varepsilon)^{3m} \leq b(\underline{\epsilon})'(x)$$

por lo tanto

$$(1-\varepsilon)^{3m}|J_m| \leq |b(\underline{\epsilon})(J_m)|$$

Sumando en todas las posibles sucesiones tenemos

$$2^m(1-\varepsilon)^{3m}|J_m| \leq \sum_{\underline{\epsilon}\in\{0,1\}^m} |b(\underline{\epsilon})(J_m)| = |J_0| \leq 1$$

de donde obtenemos

$$2^m(1-\varepsilon)^{3m} DC\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^m |I_0| \leq 1$$

Si elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $2(1-\varepsilon)^3\left(\frac{1}{2}+\delta\right) > 1$ llegamos a una contradicción para m suficientemente grande.

Supongamos ahora que $a'(p) > 2$, igual que antes ε será elegido al final del resultado. Fijemos $\delta > 0$ y un entorno de p tal que $(a^{-1})'(x) < \frac{1}{2} - \delta$ para todo x en el entorno. Entonces existe C tal que

$$|I_m| = |a^{-m}(I_0)| < C\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^m |I_0|$$

Definimos $b(\underline{\epsilon})$ igual que arriba y llegamos a las mismas tres conclusiones, también definimos N igual que arriba y nuevamente las observaciones se mantienen si nos restringimos a J_m. Sea $E = \text{máx}_{[0,1]}(b^N)'$, entonces

$$|J_m| \leq EC\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^m |I_0|$$

Por el control de las derivadas sabemos que para todo $x \in J_m$

$$(1+\varepsilon)^{3m} \geq b(\underline{\epsilon})'(x)$$

por lo tanto

$$(1+\varepsilon)^{3m}|J_m| \geq |b(\underline{\epsilon})(J_m)|$$

y obtenemos un resultado parecido al de arriba

$$2^m(1+\varepsilon)^{m}|J_m| \geq \sum_{\underline{\epsilon}\in\{0,1\}^m} |b(\underline{\epsilon})(J_m)| = |J_0|$$

Sin embargo $|J_0| \geq D|I_0|$ ($D = \text{máx}_{[0,1]}(b^N)'$), por lo tanto llegamos a

$$2^m(1+\varepsilon)^{3m} EC\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^m |I_0| \geq |J_0| \geq DC|I_0|$$

que se puede reescribir como

$$2^m(1+\varepsilon)^{3m}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^m \frac{E}{D} \geq 1$$

Si elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $2(1+\varepsilon)^3\left(\frac{1}{2}-\delta\right) < 1$ llegamos a una contradicción para m suficientemente grande. Concluimos que $a'(p) = 2$ como queríamos demostrar. □

4.2. Teorema de estabilidad de Thurston

El teorema de Bonatti-Monteverde-Navas-Rivas es un resultado que está restringido a un grupo en particular, en esta sección probaremos una versión más débil del teorema probado por William Thurston [13] que es aplicable a más grupos.

Teorema 4.2.1, (Thurston) *Sea Γ un grupo finitamente generado. Si Γ no admite ningún homomorfismo no trivial a $(\mathbb{R},+)$, entonces toda representación $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1_+([0,1))$ es trivial.*

Definición 4.2.2. Sea B un subconjunto de Γ y $\varepsilon \geq 0$, decimos que $\phi : B \to \mathbb{R}$ es un (B,ε)-**homomorfismo** se para todo $g,h \in B$ tal que $gh \in B$ tenemos que

$$|\phi(g) + \phi(h) - \phi(gh)| \leq \varepsilon$$

Fijemos un generador simétrico $\mathcal{G}$ de Γ. Decimos que ϕ está normalizado si $\max_{g\in\mathcal{G}} |\phi(g)| = 1$. Para simplificar, definimos

$$\nabla\phi(g,h) = \phi(g) + \phi(h) - \phi(gh)$$

Observación 4.2.3. Una función $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo si y solo si es un $(\Gamma, 0)$-homomorfismo si y solo si $\nabla\phi$ es nulo.

Recordemos del primer capítulo que $B_{\mathcal{G}}(k)$ es la bola de radio k en Γ según el generador $\mathcal{G}$.

Lema 4.2.4. *Si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un $(B_{\mathcal{G}}(k), 1/k)$-homomorfismo normalizado, entonces existe un homomorfismo no trivial de Γ en $(\mathbb{R},+)$.*

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, sea ϕ_k un $(B_{\mathcal{G}}(k), 1/k)$-homomorfismo normalizado. Tenemos que si $n \geq k$ entonces $|\phi_n(g)| \leq k+1$ para todo $g \in B_{\mathcal{G}}(k)$, esto se verifica demostrando por inducción en la longitud de la palabra $\ell \leq k$ que si $n \geq k$ entonces $\varphi_n(g) \leq \ell\left(1+\frac{1}{n}\right)$ para toda palabra g de longitud ℓ menor o igual a k. Si $\ell = 1$ entonces $|\phi_n(g)| \leq 1$ por ser ϕ_n normalizada, sea g de longitud $\ell + 1 \leq k$ y supongamos que toda palabra de longitud ℓ cumple la desigualdad, ahora como $g = g'h$ donde g' tiene longitud ℓ y $h \in \mathcal{G}$ tenemos que

$$|\phi_n(g)| - |\phi_n(g') + \phi_n(h)| \leq |\phi_n(g) - \phi_n(g') - \phi_n(h)| \leq \frac{1}{n}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |\phi_n(g)| &\leq \frac{1}{n} + |\phi_n(g') + \phi_n(h)| \leq \frac{1}{n} + |\phi_n(g')| + |\phi_n(h)| \\ &\leq \ell\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{n} = (\ell+1)\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad, y como $\ell \leq k$ y $n \geq k$ tenemos que $|\phi_n(g)| \leq k+1$.

Esta desigualdad implica que la sucesión $\{\phi_n(g)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para todo $g \in \Gamma$. Como Γ es finitamente generado existe una subsucesión $\phi_{n^1_j}$ de ϕ_n tal que $\phi_{n^1_j}(g)$ converge para todo $g \in B_{\mathcal{G}}(1)$, definimos inductivamente la sucesión $\phi_{n^{k+1}_j}$ como la subsucesión de $\phi_{n^k_j}$ tal que $\phi_{n^{k+1}_j}(g)$ converge para todo $g \in B_{\mathcal{G}}(k+1)$. Como $\phi_{n^j_j}$ es una subsucesión de $\phi_{n^k_j}$ para todo k para j suficientemente grande, tenemos que $\phi_{n^j_j}$ converge puntualmente a una función en Γ, definimos $\phi = \lim_{j\to\infty} \phi_{n^j_j}$.

Por convergencia tenemos que $\nabla\phi = 0$ y $\max_{g\in\mathcal{G}} |\phi| = 1$, por lo tanto $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo no trivial. $\square$

Sea $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1_+([0,1))$ una representación no trivial, y sea $x \in [0,1)$ un punto en la frontera del conjunto de los puntos fijos de $\mathcal{G}$ (y por lo tanto por todo elemento de Γ). Para cada punto $y \in [0,1)$ que no está fijo por $\mathcal{G}$, sea la función

$$\phi_y(g) = \frac{1}{C(y)}[\Phi(g)(y) - y]$$

donde $C(y) = \max_{g\in\mathcal{G}} |\Phi(g)(y) - y|$. El siguiente lema prueba que si $\Phi(g)'(x) = 1$ para todo $g \in \Gamma$, entonces para todo y cerca de x (no fijo por $\mathcal{G}$) ϕ_y se comporta infinitesimalmente como un homomorfismo de Γ a $(\mathbb{R}, +)$.

Lema 4.2.5. *Bajo las condiciones de arriba, supongamos que $\Phi(g)'(x) = 1$ para todo $g \in \Gamma$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $\phi_y|_{B_{\mathcal{G}}(n)}$ es un $(B_{\mathcal{G}}(n), \varepsilon)$-homomorfismo normalizado.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, definimos inductivamente

$$\lambda_0(0, \varepsilon') = 0, \qquad \lambda_0(k+1, \varepsilon') = 1 + \lambda_0(k, \varepsilon')(1 + \varepsilon')$$

Sea $\varepsilon' > 0$ suficientemente chico tal que $\varepsilon'\lambda_0(n, \varepsilon') \le \varepsilon$ y sea $\delta' > 0$ tal que $\Phi(g)'(y) - 1 \le \varepsilon'$ para todo $g \in B_{\mathcal{G}}(n)$ y para todo $y \in [0,1]$ tal que $|x - y| < \delta'$. Finalmente, sea $\delta \in (0, \delta')$ tal que si $|x - y| \le \delta$, entonces $|\Phi(g)(y) - x| < \delta'$ para todo $g \in B_{\mathcal{G}}(n)$. Probaremos que δ verifica el lema.

Primero probaremos que para todo $k \le n$ y todo $g \in B_{\mathcal{G}}(k)$,

$$|\phi_y(g)| \le \lambda_0(k, \varepsilon') \tag{4.1}$$

esto es evidente para $k = 0$ y $k = 1$, supongamos que es cierto para $k = i$. Si $g \in B_{\mathcal{G}}(i+1)$, entonces $g = h_1 h_2$ para algún $h_1 \in \mathcal{G}$ y $h_2 \in B_{\mathcal{G}}(i)$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\phi_y(g)| &= \frac{1}{C(y)}|\Phi(g)(y) - y| \\
&= \frac{1}{C(y)}|\Phi(h_1)\Phi(h_2)(y) - \Phi(h_2)(y) + \Phi(h_2)(y) - y| \\
&\le \frac{1}{C(y)}|\Phi(h_1)(h_2)(y) - \Phi(h_2)(y)| + |\phi_y(h_2)|. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

De la igualdad

$$\Phi(h_1)\Phi(h_2)(y) - \Phi(h_2)(y) = \int_y^{\Phi(h_2)(y)} [\Phi(h_1)'(s) - 1]ds + [\Phi(h_1)(y) - y]$$

Deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C(y)}\Phi(h_1)\Phi(h_2)(y) - \Phi(h_2)(y) &\le \frac{1}{C(y)}\left|\int_y^{\Phi(h_2)(y)} |\Phi(h_1)'(s) - 1|ds\right| + \frac{1}{C(y)}|\Phi(h_1)(y) - y| \\
&\le \max_{|x-s|\le\delta'} |\Phi(h_1)'(s)| \cdot \frac{1}{C(y)}|\Phi(h_2)(y) - y| + 1
\end{aligned}$$

Usando (4.2) y la hipótesis inductiva concluimos que

$$|\phi_y(g)| \leq \varepsilon' \lambda_0(i, \varepsilon') + \lambda_0(i, \varepsilon') + 1 = \lambda_0(i+1, \varepsilon')$$

Lo que demuestra la desigualdad (4.1).

Ahora estimaremos el valor de $\nabla\phi_y$. Para $h_1, h_2 \in B_{\mathcal{G}}(n)$ tal que $h_1 h_2 \in B_{\mathcal{G}}(n)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_y(h_1, h_2) &= \frac{1}{C(y)}[\Phi(h_1)(y) - y + \Phi(h_2)(y) - y - \Phi(h_1)\Phi(h_2)(y) + y] \\
&= -\frac{1}{C(y)}[\Phi(h_1)\Phi(h_2)(y) - \Phi(h_2)(y) - (\Phi(h_1)(y) - y)] \\
&= -\frac{1}{C(y)}\int_y^{\Phi(h_2)(y)} [\Phi(h_1)'(s) - 1] ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\nabla\phi_y(h_1, h_2)| &\leq \left| \frac{1}{C(y)}[\Phi(h_2)(y) - y] \right| \cdot \max_{|x-s| \leq \delta'} |\Phi(h_1)'(s) - 1| \\
&\leq \varepsilon' \lambda_0(n, \varepsilon') \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

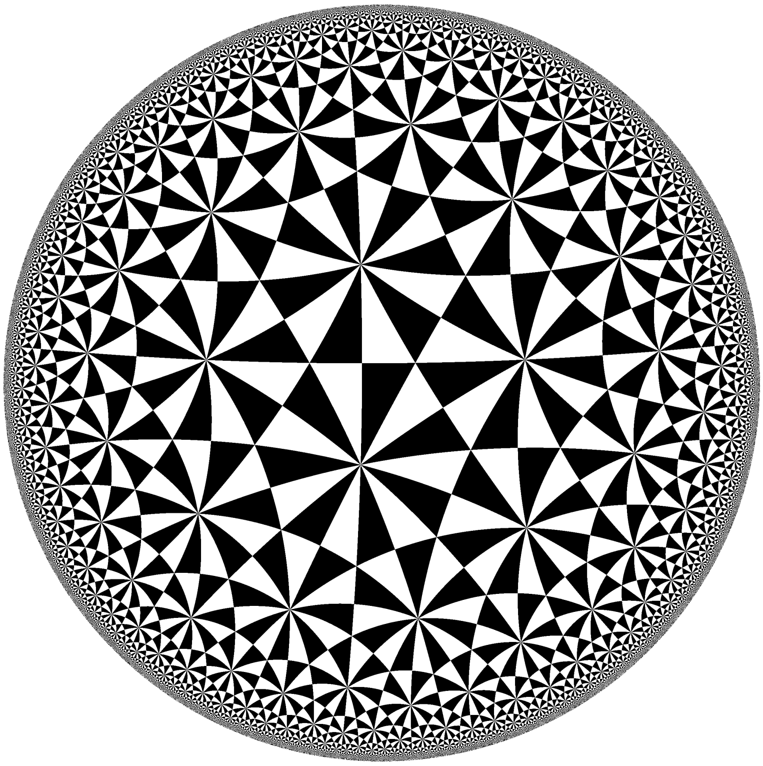
Concluimos que $\phi_y|_{B_{\mathcal{G}}}$ es un $(B_{\mathcal{G}}(n), \varepsilon)$-homomorfismo normalizado. □

Demostración de 4.2.1. Supongamos que $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1_+([0,1))$ es una representación no trivial, y sea x un punto en la frontera del conjunto de los puntos fijos globales. Tenemos que $g \to \Phi(g)'(x)$ es un homomorfismo. Si no es trivial obtenemos el homomorfismo que buscábamos, si es trivial entonces se cumple la hipótesis del Lema 4.2.5 y por el Lema 4.2.4 tenemos que existe un homomorfismo de Γ en $(\mathbb{R}, +)$. □

Ahora veremos que el teorema de estabilidad de Thurston no se extiende a subgrupos de homeomorfismos. Sea $\Gamma = \langle f, g, h : f^2 = g^3 = h^7 = fgh \rangle$, este grupo tiene una acción no trivial por homeomorfismos en la recta sin embargo todo homomorfismo $\Phi : \Gamma \to (\mathbb{R}, +)$ es trivial. Sea $\Phi : \Gamma \to (\mathbb{R}, +)$ un homomorfismo, es fácil de ver que si $\Phi(f) = 0$ entonces Φ es trivial. Si $\Phi(f) \neq 0$, como la multiplicación por izquierda es un isomorfismo de grupo en $(\mathbb{R}, +)$, podemos asumir que $\Phi(f) = 1$, pero esto implica que $g = \frac{2}{3}$ y $h = \frac{2}{7}$, sin embargo $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{41}{21} \neq 2$.

Ahora construiremos una acción no trivial de Γ en $[0,1]$ por homeomorfismos. Consideremos primero el teselado del disco de Poincaré por triángulos hiperbólicos de ángulo $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{7}$.

Sea G el subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ que preserva el teselado, como G actúa en el círculo podemos definir $\tilde{G}$ el grupo de lifts de G. Resulta que $\tilde{G}$ es isomorfo a Γ y actúa en $\mathbb{R}$, si pensamos en $[0,1]$ como la compactificación por dos puntos de $\mathbb{R}$ tenemos que Γ actúa por homeomorfismos en $[0,1]$, sin embargo no actúa por difeomorfismos ya que la obstrucción de la diferenciabilidad se encuentra en los extremos.



Imágen sacada de https://en.wikipedia.org/wiki/(2,3,7)_triangle_group

A. Espacios Métricos Compactos

Esta sección está dedicada a algunos resultados sobre espacios métricos compactos (EMC), que se utilizan a lo largo de la monografía, el objetivo de esta sección es probar que si (X, d) es un EMC entonces el espacio de las medidas de probabilidad de sobre (X, d) es compacto bajo la topología débil*.

Recordemos que un espacio topológico es separable si contiene un conjunto numerable y denso, un resultado que nos será útil es que los EMC son son separables.

Proposición A.1. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces existe $A \subset M$ numerable tal que $\overline{A} = X$.*

Demsotración. Sea $B(x, 1/n)$ la bola abierta de centro x y radio $1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, como $X = \bigcup_{x\in X} B(x, 1/n)$ y X es compacto, existe una colección finita de puntos $X_n \subset X$ tal que $X = \bigcup_{x\in X_n} B(x, 1/n)$. Definimos $A = \bigcup X_n$, como X_n es finito para todo n, A es numerable.

Para ver que A es denso en X fijemos $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y veamos que existe $y \in A$ tal que $y \in B(x, \varepsilon)$. Tomemos $n \in \mathbb{N} : 1/n < \varepsilon$, como $X = \bigcup_{y\in X_n} B(y, 1/n)$ existe $y \in X_n$ tal que $x \in B(y, 1/n)$ por lo tanto $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$, y esto implica que $y \in B(x, \varepsilon)$. □

También resulta evidente que un EMC es completo, ya que un espacio métrico es compacto sii es secuencialmente compacto. Luego dada una sucesión de Cauchy, esta tiene una subsucesión convergente y la sucesión converge al límite de la subsucesión.

Para todo espacio topológico compacto (X, τ) se puede definir $C(X)$ como la familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología heredada de la norma infinito ($\|f\| = \text{máx}_{x\in X} |f(x)|$). Una consecuencia del teorema de Stone-Weierstrass es el siguiente resultado.

Proposición A.2. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces C(X) es separable.*

Demostración. Por la proposición anterior, (X, d) es separable. Sea $\{x_n\}$ un subconjunto numerable y denso de X. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ $d_n : X \to \mathbb{R}/d_n(x) = d(x_n, x)$, es evidente que d_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} q_i \prod_{j=0}^{m_i} d_{i_j} + q : n, m_i, i_j \in \mathbb{N}, q_i, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

Fácilmente se verifica que este conjunto es una subálgebra de $C(X)$, también contiene una constante no nula ($q_i = 0$ en $i = 0, ..., n$ y $q \neq 0$).

Para usar Stone-Weierstrass y concluir que A es denso tenemos que ver que A separa puntos, es decir para cualquier $x, y \in X : x \neq y$ existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Sea $d(x, y) = \varepsilon$ y x_n tal que $d(x, x_n) < \varepsilon/2$, luego por desigualdad triangular $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ o sea

$$d_n(y) = d(x_n, y) \geq d(x, y) - d(x, x_n) > \varepsilon/2 > d(x_n, x) = d_n(x)$$

y como $d_n \in A$, tenemos que A separa puntos por lo tanto A es denso en $C(X)$.

Para ver que A es numerable podemos definir $P_n = \{q \prod_{i=0}^{n} d_{k_i} : k_i \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}\}$ donde la sobreyección de $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}^{n+1}$ en P_n es clara, y $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. Luego sea $S_n = \{\sum_{i=0}^{n} g_i : g_i \in \}$ y $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ que es numerable por el mismo argumento usado en P. Por último $A = \{f + q : q \in \mathbb{Q}, f \in S\}$, por lo tanto A es numerable.$\square$

Ahora procederemos a demostrar que el espacio de las medidas de probabilidad $M(X)$ sobre X es compacto. Decimos que $\mu_n \rightharpoonup \mu$ (μ_n converge débil* a μ) si $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$ para todo $f \in C(X)$. La separabilidad de $C(X)$ nos permite construir una métrica en $M(X)$ dada por

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \left| \int f_n \, d\mu - \int f_n \, d\nu \right|$$

que es compatible con la topología débil*, τ^*, donde $\{f_n\}$ es un subconjunto denso numerable de $C(X)$. En la demostración se usará el teorema de Riez-Markov que estipula que, si X es un espacio métrico compacto, entonces para toda funcional lineal continua $\psi : C(X) \to R$ existe una medida regular de borel μ en X tal que $\psi(f) = \int f \, d\mu$, y μ es positiva sii $\forall f \geq 0, \psi(f) \geq 0$. La siguiente demostración es de Walkden [15].

Teorema A.3. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces $(M(X), \tau^*)$ es compacto.

Demostración. Como $(M(X), \tau^*)$ es metrizable, es compacto sii es secuencialmente compacto, por conveniencia escribiremos $\mu(f) = \int f \, d\mu$.

Sea $\{f_n\}$ un subconjunto numerable y denso de C(X) y μ_n una sucesión en $M(X)$. Como la sucesión $\mu_n(f_1)$ está acotada por $\|f_1\|_\infty$ tiene una subsucesión convergente $\mu_n^{(0)}(f_0)$. Luego apliquemos la sucesión de $\mu_n^{(0)}$ a f_1 y tomamos la sucesión $\mu_n^{(0)}(f_1)$. Nuevamente como $\mu_n^{(0)}(f_1) \leq \|f_1\|_\infty$ tiene una subsucesión acotada $\mu_n^{(1)}(f_1)$.

Inductivamente definimos $\{\mu_n^{(i)}\} \subset \{\mu_n^{(i-1)}\}$ tal que $\mu_n^{(i)}(f_j)$ es convergente para $j \leq i$. Ahora consideremos la sucesión diagonal $\mu_n^{(n)}$. Como para $n \geq i$ $\mu_n^{(n)}$ es un subsucesión de $\mu_n^(i)$, $\mu_n^{(n)}(f_i)$ converge para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ahora, usando el hecho de que $\{f_i\}$ es probaremos que $\mu_n^{(n)}(f)$ converge para todo f en $C(X)$. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos f_i tal que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Como $\mu_n^{(n)}(f_i)$ es convergente, existe N tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| < \varepsilon$$

. Entonces si $n, m \geq N$ tenemos que

$$|\mu_n^{(n)}(f) - \mu_m^{(m)}(f)| \leq |\mu_n^{(n)}(f) - \mu_n^{(n)(f_i)}| + |\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| + |\mu_m^{(m)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f)| < 3\varepsilon$$

y como $M(X)$ es completo, $\mu_n^{(n)}$ es convergente. Para terminar definimos $\psi(f) = \lim \mu_n^{(n)}(f)$. Probaremos que ψ satisface las hipótesis del teorema de Riesz-Markov y corresponde a la integral respecto a una medida de probabilidad.

(i) Por construcción ψ es lineal: $\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g)$.
(ii) Como $|\psi(f)| \leq \|f\|_\infty$, tenemos que ψ es continua.
(iii) Se verifica fácilmente que $\psi(f) \geq 0$ para todo $f \geq 0$.
(iv) Es evidente que $\psi(1) = 1$.

Y por el teorema de Riesz-Markov tenemos una medida (de probabilidad por (iii) y (iv)) μ tal que $\mu(f) = \psi(f)$, y por construcción $\mu_n^{(n)}$ converge a ν, por lo tanto toda sucesión tiene una subsucesión convergente. $\square$

Bibliografía

[1] N. N. Bogoliubov y N. M. Krylov, La theorie generalie de la mesure dans son application a l'etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire, *Annals of Mathematics*, 38(1), 65-113, 1937

[2] C. Bonatti, I. Monteverde, A. Navas, C. Rivas, Rigidity for C^1 actions on the interval arising from hyperbolicity I: solvable groups, *Mathematische Zeitschrift*, 286(3-4), 919–949, 2017.

[3] J. Cantwell y L. Conlon, An interesting class of C^1 foliations, *Topology Appl.* 126, 281–297, 2002.

[4] B. Farb y J. Franks, Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: nilpotent subgroups, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(5), 1467-1484, 2003.

[5] R. P. Filipkiewicz, Isomorphisms between diffeomorphism groups, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2(2), 159-171, 1982.

[6] N. Guelman and I. Liousse, C^1-actions of Baumslag–Solitar groups on S^1, *Algebr. Geom. Topol.* 11, 1701–1707. 2011.

[7] M. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. de l'IHES*, 49, 5–234, 1979.

[8] N. Kopell, Commuting diffeomorphisms, *Global Analysis*, 165-184, 1968.

[9] A. Navas, Groups of Circle Diffeomorphisms, *University of Chicago Press*, 2011.

[10] J. F. Plante y W. P. Thurston, Polynomial Growth in Holonomy Groups of Foliations, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 39(51), 567-584, 1976.

[11] C. Rivas, On spaces of Conradian group orderings, *J. Group Theory*, 13, 337–353, 2010.

[12] J. P. Serre, Finite Groups: An Introduction, *Collège de France*, 29-46, 2016.

[13] W. Thurston, A generalization of the Reeb stability theorem, *Topology*, 13, 347–352, 1974.

[14] M. Triestino, Groups of Affine and Piecewise Affine Homeomorphisms, *Institut de Mathématiques de Bourgogne*, 2017.

[15] C. Walkden, Ergodic Theory, *University of Manchester*, 10, 2018.