



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Glueballs en un modelo de gluones masivos

Nicolás Horvath

Programa de Posgrado en PEDECIBA  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Marzo de 2024



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Glueballs en un modelo de gluones masivos

Nicolás Horvath

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en PEDECIBA, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en PEDECIBA.

Director:

D.Sc. Prof. Nicolás Wschebor

Codirector:

D.Sc. Prof. Guzmán Hernández

Montevideo – Uruguay

Marzo de 2024

Horvath, Nicolás

Glueballs en un modelo de gluones masivos / Nicolás Horvath. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2024.

XIII, 106 p. 29, 7cm.

Director:

Nicolás Wschebor

Codirector:

Guzmán Hernández

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en PEDECIBA, 2024.

I. Wschebor, Nicolás,*et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en PEDECIBA. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

D.Sc. Prof. Arturo Lezama

---

D.Sc. Prof. Marcela Peláez

---

D.Sc. Prof. Lucía Duarte

---

D.Sc. Prof. Ricardo Faccio

---

D.Sc. Prof. Guzmán Hernández

Montevideo – Uruguay

Marzo de 2024

# Agradecimientos

Esta es la parte del trabajo en la que puedo ser yo mismo, exponer mi parte humana y expresarme sin un formato, reglas, o limitaciones preestablecidas. Así que decidí no restringirme y dejé fluir el teclado. Espero que no se haga muy largo !

En el trayecto que he recorrido a lo largo de mi maestría he pasado por varias etapas, entre las cuales ha habido muchos momentos de alegría y de motivación, pero también muchos momentos difíciles, de desilusión, indecisión, desmotivación, y de sentirme insuficiente. Me he dado cuenta que la física teórica, además de muy satisfactoria, puede tornarse a veces extremadamente abstracta, frustrante y abrumadora. Es por ello que es muy importante estar rodeado de personas que nos hagan sentir acompañados, que nos apoyen y nos ayuden a seguir adelante, brindándonos una mano cuando la necesitamos. A todas aquellas personas, que de algún modo u otro han contribuido su granito de arena en este camino de aprendizaje, desarrollo y crecimiento personal que ha sido la maestría, quiero dedicarles una mención y unas palabras en esta sección.

Quiero empezar mencionando a mi madre, que en todo este proceso siempre se preocupó por mí, por mi avance en este trabajo y principalmente porque yo me sintiera a gusto con lo que hago. Aunque, por supuesto, ella no entienda de gluones, lagrangianos o simetrías de gauge, siempre intentó darme una mano desde donde ella podía, y aún en momentos en los que yo puedo mostrarme muy distante y cerrado, ella nunca dejó de demostrar su apoyo incondicional. Gracias por todo, especialmente por soportarme tantos años!

Por otro lado, y aunque no haya contribuido de manera directa a mi desarrollo durante la maestría, quiero mencionar a mi padre, que lamentablemente ya no nos acompaña desde hace mucho tiempo, pero sé que estaría orgulloso.

Mi hermana Nati y a mi cuñado Maxi no se pueden quedar sin mención, porque también me han mostrado su gran apoyo todo este tiempo. Particularmente importante ha sido toda la ayuda que me brindaron luego de mi operación de rodilla, cuando prácticamente, por más de un mes, apenas podía desplazarme. Fue en ese tiempo de recuperación que

escribí la mayor parte de esta tesis, día tras día, horas y horas (no podía caminar, que otra cosa iba a hacer, ja!), mientras que ellos me cuidaron y se aseguraron constantemente, durante todo ese tiempo, que siempre estuviera a gusto y no me faltara nada, para que pudiera avanzar en la tesis y recuperarme de la operación (por supuesto mi madre también ayudo muchísimo!). Lo valoro un montón, gracias!

Dejemos de lado la familia para darle paso a las amistades. Para empezar quiero mencionar especialmente a Tom Urruzola, quien se ha convertido en mi mayor compañero de estudio y con quien, además, he compartido incontables e interesantes discusiones sobre física, generalmente mediadas entre alfajores y café. Sin su compañía, es difícil saber si hubiera sobrevivido a los cursos de la maestría. Haberlo tenido como compañero de estudio fue clave y necesario para poder hacer frente y entender (bueno, un poco al menos!) la complejidad de dichos cursos.

Mi amigo Facu Gutiérrez se merece otra mención especial, porque en mis etapas de mayor desmotivación con la tesis, y con la física en general, en momentos en los que me sentía plenamente insuficiente, él siempre luchó por ayudarme a recuperar el interés y la motivación, e hizo todo lo que tuvo a su alcance por ayudarme a salir de ese pozo. Su vocación y dedicación por la física me ha servido como inspiración.

Otra regalo que me ha dejado la física es mi amigo Juanma Diaz, que lo conocí en una escuela de física en Brasil. Juanma es otra persona que conoció mi desmotivación y siempre se esforzó por ayudarme. Nunca fue una carga para él sentarnos a hablar de estos temas personales, y aparte, siempre es capaz de sacarme una sonrisa (nunca dejó de sorprenderme la cantidad de boludeces que puede llegar a decir por minuto si se lo propone!).

No podía faltar Seba Montolli, otro amigo que me dejó la física. Compañero de clase durante toda la licenciatura y la maestría, pero no fue hasta finales de la maestría que afianzamos una linda amistad. Es otro compañero de charlas profundas, que me enseñó a valorarme por todo el esfuerzo que conlleva esta carrera y lo difícil que realmente es. Sobre todo, me enseñó (o al menos lo intentó!) a no sentirme menos e insuficiente, cosa que me sucede con regularidad al pensar en lo abstracta e infinita que puede ser la física.

También se merece una mención mi amigo “el Z”, que nos conocemos desde chiquitos. Siempre fue un gran apoyo y las juntadas con él han sido, en muchas ocasiones, momentos necesarios para distenderse, para descargarse, y de introspección personal. Particularmente necesarias en la pandemia, momento en que yo había recién arrancado con mi maestría. La modalidad virtual me hacía sentir muchas veces perdido, y convertía el camino en una pendiente cuesta arriba. Pero ronquito o fernet mediante, una juntada con el Z aplanaba un poco ese camino.

Muchos otros amigos, tanto de la facultad como del liceo, también merecen un lugar en esta sección, porque sus amistades son siempre un fuerte pilar sobre el que apoyarse, y sin dudas han hecho mucho más alegre y llevadero mi proceso de aprendizaje y crecimiento. A todos ellos les agradezco un montón por siempre estar cuando se los necesita.

También me gustaría mencionar a todas las personas que conocí en las escuelas y congresos de física a los que he ido en el correr de la maestría. He conocido gente maravillosa con la que he cultivado lindas relaciones. En general, considero que me han ayudado a empaparme con distintos puntos de vista y percepciones sobre la física, la investigación, y bueno, sobre la vida en general.

Sin dudas debo agradecer a mis orientadores, que hicieron esto posible y que siempre estuvieron dispuestos a darme una mano y aclarar mis dudas, por más repetitivas y pesadas que pudieran haber sido. Sobre todo debo agradecerles por su paciencia, porque sé que no fui el estudiante más ejemplar y que muchas veces (probablemente demasiadas) tuvieron que presionarme más de la cuenta para que yo avanzara al ritmo esperado, o incluso para que les hiciera más consultas, en vez de intentar responderme todo por mi propia cuenta (muchas veces sin éxito, obvio). Quiero hacer una especial mención a Guzmán, a quien le he golpeado la puerta de la oficina infinitas veces (no me sorprendería si hubiera tenido pesadillas conmigo!) para discutir sobre temas varios de física, muchas veces única y exclusivamente por curiosidad. Por más que un poco se quejaba de mi presencia, él siempre recibió mis consultas, a veces un tanto exóticas, con los brazos abiertos, y dispuesto a razonar y discutir juntos, como colegas, por el tiempo que fuera necesario. Además, su enorme pasión por la física me ha servido en ocasiones como fuente de inspiración.

Por último, muchas gracias a la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) por la beca que me fue otorgada.

## RESUMEN

Las interacciones entre partículas elementales constituyen la base para comprender el universo. A día de hoy son cuatro las interacciones fundamentales conocidas: la gravedad, la interacción electromagnética, y las interacciones nucleares débil y fuerte. La interacción nuclear fuerte es la responsable de mantener unidos a los núcleos atómicos, y por ello, su comprensión es esencial para entender los mecanismos de formación de la materia. La teoría que describe esta interacción es la Cromodinámica Cuántica (QCD), y las partículas sensibles a ella son los quarks y gluones, que se ligan a través de esta interacción para formar otras partículas, como hadrones, formados por quarks, o glueballs, formados por gluones.

Los mecanismos de formación de hadrones y glueballs, y por tanto de gran parte de la materia, no están bien comprendidos. La cromodinámica cuántica se vuelve extremadamente compleja a bajas energías, en las escalas de energía de formación de dichas partículas, y los métodos matemáticos tradicionales no son aplicables. Por este motivo, la teoría a bajas energías se ha vuelto analíticamente inaccesible, y muchos investigadores han intentado aproximarse desde enfoques más fenomenológicos, proponiendo modelos y poniendo a prueba sus predicciones. Aún así, todavía no existen resultados claros sobre como tratar esta teoría analíticamente a bajas energías.

Afortunadamente, los enfoques numéricos no están sujetos a las mismas limitaciones y pueden ser usados como una herramienta para acceder a la teoría a bajas energías. Un primer paso para entender este problema es estudiarlo en el marco de la teoría de Yang-Mills Pura, es decir, QCD pero sin incluir la dinámica de quarks. Algunos estudios numéricos recientes han presentando resultados prometedores al respecto. Uno de ellos indica la posibilidad de que la constante de acoplamiento de Yang-Mills Pura se mantiene en valores relativamente pequeños a bajas energías. Esto podría habilitar el uso de desarrollos perturbativos en dicha escala, proporcionando una herramienta útil y ya conocida para el estudio de la interacción fuerte. Otro estudio indica que los gluones presentan características comúnmente asociadas a partículas masivas. Ambos resultados han sido aprovechados para la construcción de nuevos modelos fenomenológicos en donde los gluones son considerados como partículas masivas y en los que algunas técnicas perturbativas podrían ser aplicables. Estos modelos abren una nueva vía en un esfuerzo por comprender Yang-Mills Pura y QCD.

El objetivo de esta tesis es verificar si diversos modelos que se pueden construir fenomenológicamente a partir de la masividad del gluon, pueden describir ciertos aspectos de la física de Yang-Mills Pura o QCD a bajas energías, particularmente el espectro de glueballs formados por dos gluones. En una primera instancia exploramos una vía que emerge, en base a los resultados numéricos recién mencionados, como una posible opción para recuperar una ecuación de Schrödinger en una teoría con campos de gauge masivos en un régimen no relativista. Basamos este desarrollo en un modelo fenomenológico de gluones masivos llamado modelo de Curci-Ferrari, agregando además una suposición ad-hoc. En una segunda instancia, y como punto central del trabajo, estudiamos las predicciones al espectro de glueballs formados por dos gluones, en un modelo fenomenológico previamente propuesto en la literatura por J.M. Cornwall y A.Soni, en 1982, así como en una leve modificación del mismo, propuesta en este trabajo. Estos modelos pretenden describir la interacción entre gluones masivos en un régimen no relativista. Basamos el cálculo del espectro en la ecuación de Schrödinger y en técnicas perturbativas. Comparamos los resultados con datos recientes de simulaciones numéricas de dicho espectro para ajustar los parámetros libres de los modelos y evaluar las predicciones.

## ABSTRACT

The interactions between elementary particles constitute the basis for the understanding of the universe. As of today, there are four known fundamental interactions: gravity, electromagnetic interaction, and weak and strong interactions. The strong interaction is responsible for keeping atomic nuclei together, and therefore, its understanding is essential to comprehend the mechanisms of matter formation. The theory that describes this interaction is called Quantum Chromodynamics (QCD), and the particles sensitive to it are quarks and gluons, which bind together through this interaction to form other particles, such as hadrons, formed by quarks, or glueballs, formed by gluons.

The mechanisms behind the formation of hadrons and glueballs, and therefore of a large portion of matter, are not well understood. Quantum chromodynamics (QCD) becomes extremely complex at the energy scales of such particle formation, and traditional mathematical methods are not applicable. Consequently, the theory at low energies has become analytically inaccessible, leading many researchers to attempt approaches from more phenomenological perspectives, proposing models and testing their predictions. Nonetheless, clear results on how to treat this theory analytically at low energies still do not exist.

Fortunately, numerical approaches are not subject to the same limitations and can be used as a tool to access the theory at low energies. A first step to understand this problem is to study it within the framework of Pure Yang-Mills theory, i.e., QCD without the inclusion of quark dynamics. Some recent numerical studies have presented promising results. One of them indicates the possibility that the pure Yang-Mills coupling constant remains at relatively small values at low energies. This could enable the use of perturbative expansions, providing a useful and already known tool for the study of the strong interaction. Another study indicates that gluons exhibit some characteristics usually associated with massive particles. Both results have been exploited for the construction of new phenomenological models in which gluons are considered as massive particles and where some perturbative techniques could be applicable. These models open up a new avenue in the effort to understand pure Yang-Mills and QCD.

The aim of this thesis is to verify if various models, which can be constructed phenomenologically based on the massiveness of the gluon, can describe certain aspects of Pure Yang-Mills or QCD physics at low energies, particularly the spectrum of glueballs

formed by two gluons. Initially, we explore a avenue that emerges, based on the numerical results just mentioned, as a possible option to recover a Schrödinger equation in a theory with massive gauge fields in a non-relativistic regime. We base this development on a phenomenological model of massive gluons called the Curci-Ferrari model, while also introducing an ad-hoc assumption. Secondly, as the central focus of the work, we study the predictions for the glueball spectrum formed by two gluons, in a phenomenological model previously proposed in the literature by J.M. Cornwall and A. Soni in 1982, as well as in a slight modification thereof, proposed in this work. These models aim to describe the interaction between massive gluons in a non-relativistic regime. We base the spectrum calculation on the Schrödinger equation and perturbative techniques. We compare the results with recent data from numerical simulations of the spectrum to adjust the free parameters of the models and evaluate their prediction.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoría de Yang-Mills Pura</b>	<b>5</b>
2.1	Simetría de gauge: grupo de Lie $SU(3)$ . . . . .	5
2.2	Lagrangiano . . . . .	7
2.3	Gauge de Lorenz y lagrangiano de Faddeev-Popov . . . . .	8
2.4	Funciones de correlación e integrales de caminos . . . . .	11
2.5	Teoría de perturbaciones en Yang-Mills Pura . . . . .	13
2.5.1	Desarrollo perturbativo en términos de diagramas de Feynman en el gauge de Lorenz . . . . .	14
2.6	Parámetro de acoplamiento de QCD a altas y bajas energías según cálculos analíticos . . . . .	19
2.7	QCD y Yang-Mills Pura a altas y bajas energías según cálculos numéricos	20
2.7.1	Parámetro de acoplamiento numérico . . . . .	22
2.7.2	Función de correlación numérica del gluón . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Marco teórico: Modelo fenomenológico de Cornwall</b>	<b>26</b>
3.1	Modelos fenomenológicos con gluones masivos . . . . .	26
3.2	El modelo y su Hamiltoniano . . . . .	28
3.3	Modificación del modelo mediante un potencial lineal . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Estados ligados no relativistas en teorías cuánticas con campos de gauge masivos</b>	<b>35</b>
4.1	Polología de funciones de correlación . . . . .	36
4.2	Modelo de Curci-Ferrari . . . . .	37
4.3	Función de correlación en aproximación Ladder . . . . .	38
4.4	Ecuación de Bethe-Salpeter para glueballs en modelo de Curci-Ferrari y en aproximación Ladder . . . . .	49

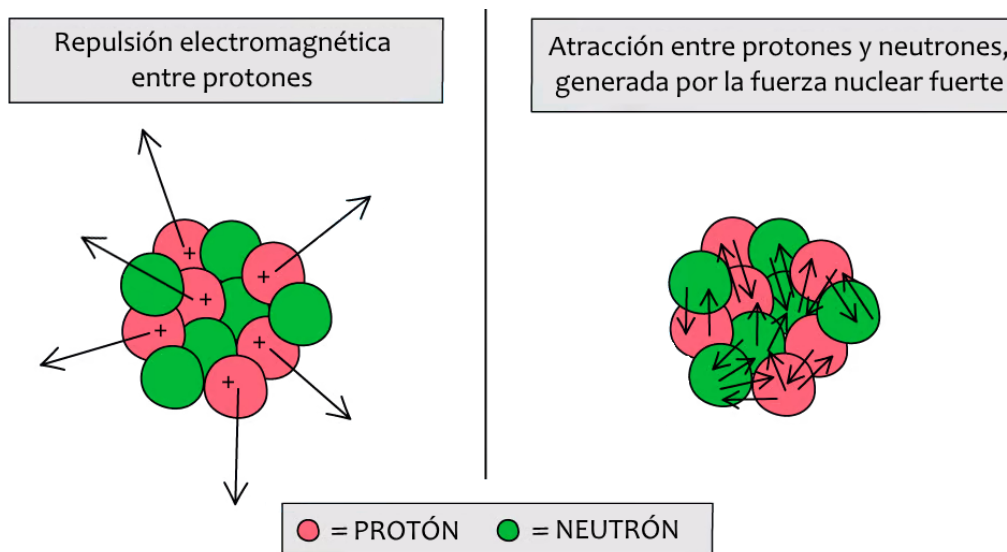
4.4.1	Ecuación de Schrödinger y potencial de Yukawa a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Niveles de energía de glueballs en modelos fenomenológicos</b>	<b>56</b>
5.1	Ecuación de Schrödinger en potencial central . . . . .	58
5.2	Cálculo analítico de las correcciones a las energías . . . . .	60
5.2.1	Perturbaciones $H^{(p_i)}$ y sus correcciones $E^{(p_i)}$ a las energías . . . . .	61
5.2.2	Perturbación $H^{(p_{ii})}$ y sus correcciones $E^{(p_{ii})}$ a las energías . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Metodología numérica y resultados</b>	<b>71</b>
6.1	Métodos numéricos para la obtención del espectro de glueballs . . . . .	71
6.1.1	Implementación de los algoritmos . . . . .	75
6.2	Comparación con las predicciones del lattice . . . . .	76
6.3	Glueballs en el modelo propuesto por Cornwall . . . . .	78
6.4	Otros aspectos sobre el modelo propuesto Cornwall . . . . .	83
6.4.1	Sensibilidad del modelo de Cornwall respecto al orden cero en teoría de perturbaciones . . . . .	83
6.4.2	Reproducibilidad de resultados presentados en el artículo de J.M. Cornwall y A.Soni . . . . .	84
6.5	Glueballs en una modificación del modelo propuesto por Cornwall . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Conclusiones y perspectiva a futuro</b>	<b>89</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>92</b>
	Apéndice 1 . . . . .	93
	Apéndice 2 . . . . .	95
	Apéndice 3 . . . . .	97
	Apéndice 4 . . . . .	99
	<b>Anexos</b>	<b>101</b>
	Bibliografía . . . . .	102

# Capítulo 1

## Introducción

Desde las diminutas partículas subatómicas que conforman la materia hasta las enormes galaxias que pueblan el universo, nuestra comprensión del cosmos se construye sobre la base de fuerzas fundamentales que rigen la interacción entre estas entidades elementales. Estas interacciones, aunque a menudo pasan desapercibidas en nuestra vida cotidiana, son los pilares que rigen la complejidad y el funcionamiento de todo lo que nos rodea. Entrelazadas en un delicado equilibrio que mantiene la estabilidad del cosmos, gobiernan el comportamiento del universo. A lo largo de la historia, la curiosidad humana ha sido guiada por el deseo de comprender estas interacciones. En este contexto, emergen cuatro interacciones fundamentales conocidas a día de hoy, a veces también llamadas fuerzas fundamentales: la gravedad, la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil, cada una con sus propias características.

La gravedad, la más familiar para nosotros por su influencia en la caída de los objetos y la órbita de los planetas, se encarga de la atracción entre objetos con masa. La interacción electromagnética es responsable de las interacciones entre partículas cargadas eléctricamente, y que da lugar a la electricidad, el magnetismo y la luz. La interacción nuclear débil, mucho menos cotidiana para nosotros, pero no menos importante, está involucrada en procesos de desintegración radioactiva y ciertas interacciones nucleares. Por último, la interacción fuerte, que constituye el eje central de esta tesis, es la responsable de mantener la estabilidad de los núcleos atómicos, contrarrestando la repulsión entre los protones del núcleo y evitando su desintegración inmediata (una representación gráfica se muestra en la figura 1.1). También se encarga de mantener unidos a los quarks que conforman a los protones, neutrones, y otras partículas similares denominadas hadrones. Es una interacción intensa pero de muy corto alcance, por lo que a grandes escalas comparadas con el tamaño del núcleo atómico, como en la vida cotidiana, no percibimos sus efectos directos.



**Figura 1.1:** Repulsión en el núcleo atómico por fuerzas electromagnéticas y atracción por fuerzas nucleares fuertes.

Así como los objetos sensibles a fuerzas electromagnéticas son las partículas con carga eléctrica, los objetos sensibles a fuerzas nucleares fuertes son las partículas que tienen una propiedad llamada *color*. A pesar de su nombre, esta propiedad no está relacionada con los colores que percibe el ojo humano en base a las frecuencias de la luz (salvo por algunas simetrías similares). Además, al igual que en el electromagnetismo las fuerzas que se ejercen partículas eléctricamente cargadas se suelen describir como intercambios de fotones, las fuerzas nucleares fuertes se pueden describir como intercambios de partículas elementales llamadas *gluones*. Por este motivo se suele decir que los gluones son las partículas responsables de generar la interacción nuclear fuerte. A raíz de esto y de que esta fuerza se encarga de mantener unidos a los quarks dentro de los hadrones, surge el nombre gluón, que hace alusión a “pegamento”, en inglés: “glue”.

Los gluones no son sensibles a fuerzas electromagnéticas porque no están cargados eléctricamente. Sin embargo sí tienen color, por lo que ellos mismos también son afectados por la interacción nuclear fuerte e interactúan entre sí. Esta es una gran diferencia respecto a los fotones, que no interactúan entre sí de forma directa pues no tienen carga eléctrica.

Algunas propiedades fundamentales de los gluones es que son bosones de espín 1 y pueden tener ocho tipos distintos de “colores”. La existencia de una masa para estas partículas es un tema de debate abierto a día de hoy, y de hecho es el punto central que motiva este trabajo. Desde un punto de vista analítico, estas partículas no tienen masa intrínseca en el modelo fundamental de las interacciones fuertes, y tampoco está claro un mecanis-

mo por el cual puedan adquirir masa. Desde un punto de vista experimental, la dificultad para medir e identificar las propiedades de los gluones nos ha impedido hacer mediciones concluyentes al respecto a día de hoy. Desde el punto de vista de las simulaciones numéricas, hay numerosos resultados que indican que estas partículas sí son masivas.

Un aspecto fenomenológico esencial es el hecho de que las partículas con color jamás han sido observadas de forma aislada en la naturaleza, sino que únicamente parecen existir formando estados ligados. Un estado ligado es un conjunto de dos o más partículas en el que, por causa de las interacciones mutuas entre ellas, forman una estructura en la que permanecen unidas y restringidas a ocupar una región acotada del espacio. Un ejemplo elemental puede ser el protón, que está formado por quarks. Otros ejemplos a mayor escala pueden ser los átomos o moléculas. Los estados que se observan en la naturaleza siempre tienen color “blanco” o “neutro”. Otra forma de decirlo es que solo se observan estados que son singletes de color. Este fenómeno, aún incomprendido a día de hoy, lleva el nombre de *confinamiento*.

Dentro de los posibles estados de color neutro que se pueden formar existen *mesones*, *bariones* y *glueballs*:

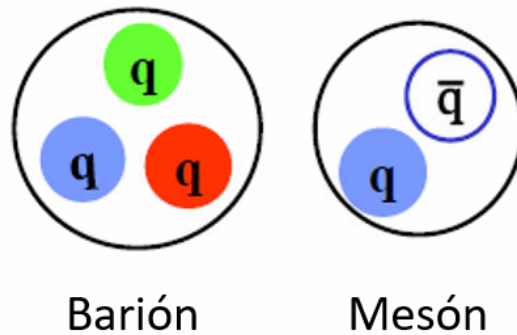
- **Bariones**: son partículas formadas por tres quarks y conforman gran parte de la materia ordinaria. Los quarks pueden tener color azul, rojo, verde o sus respectivos anticolores, y deben distribuirse de forma que el conjunto tenga color “blanco”, como azul-verde-rojo o antiazul-antiverde-antirrojo <sup>1</sup>. Una representación gráfica se muestra en la figura 1.2. Ejemplos conocidos son el protón (p) y el neutrón (n).
- **Mesones**: son partículas formadas por un quark y un antiquark, los cuales tienen uno el anticolor del otro, de modo que en su conjunto el estado es un singlete. <sup>2</sup> Una representación gráfica se muestra en la figura 1.2. Ejemplos conocidos pueden ser piones ( $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^+$ ) y Kaones ( $K^-$ ,  $K^0$ ,  $K^+$ ).
- **Glueballs**: son partículas constituidas por varios gluones. Estos estados ligados nunca se han podido detectar de forma concluyente en los experimentos, pero están teóricamente permitidos e incluso han sido observados en simulaciones numéricas. En la práctica son extremadamente difíciles de identificar porque se mezclan con estados mesónicos que tienen los mismos números cuánticos. Se cree que el confinamiento también aplica para glueballs.

La teoría que describe la interacción entre partículas con color (gluones y quarks), es la Cromodinámica Cuántica (QCD). A altas energías esta teoría es bien entendida y los

---

<sup>1</sup>En realidad están en una combinación antisimétrica de los otros.

<sup>2</sup>En realidad están en una combinación simétrica de las tres parejas color-anticolor.



**Figura 1.2:** Representación gráfica de un barión y un mesón, a la izquierda y derecha respectivamente. La letra  $q$  en cada partícula indica que es un quark, mientras que  $\bar{q}$  es un antiquark.

experimentos sustentan las predicciones teóricas con un alto grado de precisión. Un panorama distinto ocurre a bajas energías, donde la teoría no está bien comprendida porque analíticamente es mucho más compleja. En consecuencia, la formación de estados ligados en QCD, el confinamiento y la posible masa del gluón no han podido ser estudiados de forma concluyente. Sin embargo, estudios numéricos sobre la teoría revelan algunos aspectos prometedores que podrían abrir la puerta al estudio de QCD a bajas energías. Si esto fuera posible, el confinamiento, los estados ligados y la masa del gluón podrían ser finalmente comprendidos.

Una versión más simplificada de QCD, aunque con los mismos (o similares) obstáculos teóricos, es la teoría de Yang-Mills Pura, que describe el comportamiento e interacción de los gluones entre sí, sin incluir la dinámica de quarks u otros tipos de materia. En esta, los quarks son fuentes estáticas que no intervienen en la dinámica. Sin embargo, aún sin la inclusión de estos, entender la teoría de Yang-Mills Pura es esencial para comprender los aspectos más fundamentales de la interacción fuerte y de los gluones. Esta teoría, aún siendo una simplificación de QCD, es una buena aproximación, proporcionando predicciones como el espectro hadrónico que se desvían en torno al 10% - 15% de las observaciones experimentales [1, 2]. Para los propósitos de este trabajo no se aspira a una precisión tal que requiera la inclusión de interacciones con quarks, por lo que es suficiente con enfocarnos en Yang-Mills Pura.

# Capítulo 2

## Teoría de Yang-Mills Pura

### 2.1. Simetría de gauge: grupo de Lie SU(3)

La Teoría de Yang-Mills Pura es una teoría cuántica de campos con simetría de gauge. Esta simetría implica que bajo ciertas transformaciones de los campos, la física se mantiene invariante. Estas transformaciones dependen de las coordenadas del espacio-tiempo, son continuas y se pueden describir con grupos de Lie. En QCD, y por ende en Yang-Mills Pura, el grupo de la simetría de gauge es SU(3): el grupo de Lie de matrices unitarias complejas 3x3 de determinante igual a 1. La teoría es invariante bajo la acción de este grupo sobre los campos. Se suele decir que SU(3) es el grupo de gauge de Yang-Mills Pura, o que Yang-Mills Pura es una teoría de gauge de grupo SU(3).

A continuación, algunos aspectos importantes de SU(3).

$$SU(3) = \{U \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \mid UU^\dagger = U^\dagger U = Id, \det(U) = 1\} \quad (2.1)$$

donde  $U^\dagger$  es la matriz transpuesta y conjugada de  $U$ .

Todo elemento de  $SU(3)$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$U = e^{i \sum_{a=1}^8 \alpha_a \lambda^a} \quad (2.2)$$

donde  $\lambda^a$  son ciertas matrices 3x3 complejas y hermíticas ( $(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a$ ) de traza nula, llamadas matrices de Gell-Mann, y  $\alpha_a$  pueden ser cualquier numero real. La elección de los  $\alpha_a$  determina por completo al elemento  $U$ .

Entre los elementos  $U \in SU(3)$ , los que generan transformaciones de gauge, son aquellos cuyos  $\alpha_a$  son funciones continuas del espacio-tiempo, es decir los elementos de la forma:

$$U = e^{\frac{i}{2} \sum_{a=1}^8 \alpha_a(x) \lambda^a} \equiv e^{\frac{i}{2} \alpha_a(x) \lambda^a} \quad (2.3)$$

Aquí hemos hecho uso de la *convención de la suma de Einstein*, que se utilizará siempre de ahora en adelante: cuando en un producto se repite un índice significa que hay una suma en el mismo.

La cantidad de matrices de Gell-Mann que hay y por ende el límite superior de la sumatoria en el índice  $a$ , en este caso 8, es exactamente la dimensión del espacio vectorial formado por las matrices 3x3 complejas y hermíticas de traza nula, y coincide con la cantidad de colores que pueden tener los gluones. Este espacio vectorial, junto con una operación que luego veremos, se llama *álgebra de Lie* del grupo, en este caso de  $SU(3)$ , y se denota como  $\mathfrak{su}(3)$ . Por estos motivos se dice que el índice  $a$  es un *índice del álgebra de Lie* o un *índice de color*.

Las matrices  $\lambda^a$ , que son los elementos de la base de  $\mathfrak{su}(3)$ , determinan al grupo  $SU(3)$  y juegan un rol importante en la descripción de QCD y de la teoría de Yang-Mills Pura. Veremos que aparecen indirectamente en el lagrangiano y por tanto en la dinámica de los gluones.

Por convención, se suele definir

$$T_a \equiv \frac{\lambda_a}{2} \quad (2.4)$$

Las matrices  $T_a$  cumplen lo que se llama el *corchete de Lie*, que es una operación bilineal del álgebra de Lie sobre sí misma  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(3)$ . Siempre es posible elegir una base vectorial de  $\mathfrak{su}(3)$  tal que el corchete de Lie queda definido por:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T_c \quad (2.5)$$

$f^{abc}$  son denominadas *constantes de estructura* y cumplen la propiedad de ser totalmente antisimétricas, lo que quiere decir que cambian de signo bajo permutaciones de cualesquiera de sus índices. En la base usual del grupo  $SU(3)$  dada por las matrices de Gell-Mann, los valores que toman pueden obtenerse a partir de los siguientes mediante permutaciones:

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \\ f^{147} &= f^{165} = f^{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

mientras que todas las demás  $f^{abc}$  que no puedan ser relacionadas con estas por permutaciones de cualesquiera de los índices, son cero.

Las relaciones (2.6) determinan por completo el álgebra del grupo, por lo que las constantes de estructura están fuertemente relacionadas con las matrices  $T_a$  y por tanto con  $\lambda_a$ .

## 2.2. Lagrangiano

Una teoría queda determinada por su *lagrangiano*, una función matemática denotada con  $L$ , que se construye a partir de los campos y sus propiedades, y codifica la información sobre la dinámica y las interacciones entre las partículas.

El lagrangiano se suele escribir en términos de la *densidad lagrangiana*,  $\mathcal{L}$ , definida mediante:

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}[\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)] dV, \quad (2.7)$$

donde se usó  $x$  para denotar coordenadas espacio temporales o cuadvectores de posición  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ , donde  $x_0$  es el tiempo y el resto son tres las coordenadas espaciales. Esta convención se usará durante todo el trabajo, a menos que en algún momento se explicita por conveniencia la separación espacial y temporal.  $\phi_j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  para denotar que  $\mathcal{L}$  puede depender de distintos tipos de partículas o campos. Las simetrías de la teoría se manifiestan directamente en  $\mathcal{L}$ , siendo esta invariante bajo transformaciones de gauge y de Lorentz.

En la teoría de Yang-Mills Pura:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde la expresión para  $F_{\mu\nu}^a$  es <sup>1</sup>:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (2.9)$$

Aquí  $g$  es un parámetro que regula la intensidad de las interacciones, y  $A_\mu^a(x)$  es el campo asociado al gluón, que tiene índices latinos que recorren la base vectorial de  $\mathfrak{su}(3)$ , o en otras palabras, los colores de  $SU(3)$ , e índices griegos que recorren la base vectorial de coordenadas espacio-temporales  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \sim (0, 1, 2, 3)$ . A partir de ahora usaremos esta convención, aunque en ocasiones resulta práctico escribir los índices de tiempo y

---

<sup>1</sup>La expresión (2.9) es una generalización del tensor de Maxwell del electromagnetismo para teorías donde el grupo de simetrías de gauge es  $SU(3)$ .

espacio por separado, en cuyo caso usaremos la letra griega únicamente para el tiempo y recurriremos nuevamente a letras latinas para las coordenadas del espacio tridimensional. En esos casos discernir entre índices espaciales y de color puede resultar un poco más complicado, pero quedará sobreentendido por el contexto.

Si se sustituye (2.9) en (2.8), desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{a\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{a\nu} \\ & - \frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A los primeros dos términos en (2.10) se les llama *términos cinéticos* pues se encargan de describir como los gluones libres se propagan en el espacio. Los términos cinéticos siempre son los que involucran únicamente dos campos del mismo tipo (en este caso campos de gluones). Por otro lado, los últimos dos términos, que involucran más de dos campos, se encargan de describir cómo los gluones interactúan entre ellos y se les llama naturalmente *términos de interacción*.

Observemos que en (2.10) aparecen las constantes de estructura  $f^{abc}$  del álgebra del grupo de Lie, involucradas con los dos términos de interacción del lagrangiano, jugando un rol fundamental en la interacción entre gluones. Matemáticamente hablando aparecen de forma natural al pedir que el lagrangiano de la teoría sea invariante de gauge por transformaciones del campo  $A_\mu^a$  de gluones bajo la acción de SU(3).

Si  $U = e^{i\alpha_a(x)T^a} \in SU(3)$ , la acción de SU(3) sobre el campo gluónico  $A_\mu^a$  es:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu^a(x) \equiv A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) \alpha^c(x). \quad (2.11)$$

Esta es la transformación de gauge del campo  $A_\mu^a$  en esta teoría. Bajo esta regla de transformación se puede demostrar que la física se mantiene invariante, o en otras palabras, que la densidad Lagrangiana no cambia:

$$\mathcal{L}[\tilde{A}_\mu^a] = \mathcal{L}\left[\tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c\right] = \mathcal{L}[A_\mu]. \quad (2.12)$$

### 2.3. Gauge de Lorenz y lagrangiano de Faddeev-Popov

Exploremos ahora un poco más el significado y las consecuencias de (2.11) y (2.12): En términos de los campos  $A_\mu^a$ , ¿Cuál es el significado de que la física sea invariante bajo

la transformación dada por (2.11)? Significa que todas las configuraciones de campo que están relacionadas entre sí por transformaciones de este tipo son físicamente equivalentes. Este hecho tiene implicaciones importantes a la hora de hacer cálculos matemáticos en teoría cuántica de campos, porque muchas veces es necesario sumar en “todos los caminos posibles que podría recorrer una partícula”. A esto se le suele llamar *integral de caminos*. Si efectuamos para una teoría de gauge esta suma de forma ingenua, el resultado será infinito, es decir que no podremos calcular cantidades físicas. Lo que sucede es que al hacer esta integral se está sumando también en todas las configuraciones de campo  $A_\mu^a$  físicamente equivalentes, o dicho de otro modo, estamos contando de más configuraciones que son matemáticamente distintas pero físicamente equivalentes. Este sobreconteo en la suma implica agregar una cantidad infinita de términos redundantes que se manifiestan como una divergencia en el resultado. Por tanto y para evitar ese sobreconteo, debemos elegir una de entre todas las configuraciones de campo equivalentes dadas por la transformación (2.11) y trabajar bajo esa restricción. Este proceso de elección es conocido como *fijación de gauge*.

En general la elección de cómo fijar el gauge es en gran medida arbitraria, aunque dependiendo de la naturaleza del problema en cuestión y del objetivo que se busque, algunas de ellas podrían ser útiles para simplificar los cálculos y hacer la operatoria más manejable, o bien hacer explícita en mayor medida alguna propiedad que sea de interés.

Para QCD o para la teoría de Yang-Mills Pura se suele utilizar un método llamado *procedimiento de Faddeev-Popov* [3] en un intento de fijar el gauge (luego veremos que hay algunos inconvenientes en el proceso [4]), a costo de modificar el lagrangiano mediante la introducción de nuevos términos de interacción y cinéticos, e incluso nuevos campos auxiliares llamados “ghosts”. Los ghosts no están asociados a partículas reales, sino más bien son un artilugio matemático necesario para garantizar que la física no dependa de la elección del gauge. Es decir que aparecen como partículas ficticias en los cálculos intermedios pero nunca como objetos reales en predicciones físicas.

Todos los desarrollos y fundamentos teóricos usados en este trabajo están basados en una fijación de gauge particular llamada *gauge de Lorenz* o a veces también *gauge de Landau* en la literatura, que es una forma particular de elegir cómo se describen los campos. La fijación del gauge de Lorenz implica tomar de entre todos los campos gluónicos  $A_\mu^a$  físicamente equivalentes según la condición (2.11), aquellos que cumplan con la siguiente condición:

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0, \tag{2.13}$$

donde  $a$  es un índice de color y hay una suma en el índice espacio-temporal  $\mu$ .

Es necesaria una observación importante, y es que aunque por convención se suele decir que (2.13) es una condición de fijación de gauge, la realidad es que en general por sí sola no es suficiente para fijar por completo el gauge, es decir, para quedarse con una única opción de entre todas las posibles según (2.11).

En algunas teorías como la electrodinámica cuántica (QED) imponer una condición adicional sobre los campos es suficiente para lograr la fijación completa. Esta condición extra que se agrega es físicamente natural, y es imponer que los campos de gauge  $A$  tiendan a cero en el infinito espacial: es aceptable pensar que el valor de un campo debe ser despreciable si nos alejamos infinitamente.

$$A^\mu(|\vec{x}| \rightarrow \infty) \sim 0. \quad (2.14)$$

Para la electrodinámica cuántica la manera de entender por qué esto permite fijar el gauge es que agregar la segunda condición restringe las posibilidades e implica que de entre todas las equivalentes según (2.11) hay una única que puede satisfacer (2.13) y (2.14) a la vez.

¿Vale el mismo razonamiento también en QCD o en la teoría de Yang-Mills Pura? Desafortunadamente no. Las transformaciones de gauge son matemáticamente distintas en QCD y en Yang-Mills Pura que en QED, de tal manera que en esta teoría (2.13) y (2.14) no fijan por completo el gauge, lo cual significa que estas dos ecuaciones tienen más de una solución equivalente de gauge, comúnmente conocidas como *copias de Gribov* [4]. Como consecuencia, el procedimiento de Faddeev-Popov no está debidamente justificado ni en QCD ni en Yang-Mills Pura y podría llevar a resultados incorrectos. Por otro lado, según algunos estudios, los efectos de las copias de Gribov se manifiestan de forma significativa en el régimen infrarrojo o de bajas energías, pero tienen considerablemente menor relevancia en el sector ultravioleta o de altas energías [4, 5]. Consecuentemente es esperable que el procedimiento de Faddeev-Popov y por lo tanto el lagrangiano obtenido por este método, comúnmente llamado *lagrangiano de Faddeev-Popov*, reproduzca de manera fiable la física de QCD o de Yang-Mills Pura a altas energías, pero no a bajas. Esto implica que si se estudia la teoría fijada de gauge en base al procedimiento de Faddeev-Popov, se debe tener precaución al interpretar los resultados y cálculos que se hagan en dicho sector.

Más adelante veremos cómo los síntomas de este problema aparecen en la teoría, y será necesario buscar otros medios en un intento de acceder al régimen de bajas energías de QCD o de Yang-Mills Pura. Estudiar este régimen es necesario para poder entender

aspectos importantes de la teoría como la formación de estados ligados y sus propiedades, el fenómeno de confinamiento y otros aspectos.

Dicho esto, teniendo elegida la condición de gauge a utilizar e ignorando por el momento el posible inconveniente del método a bajas energías, volvamos al procedimiento de Faddeev-Popov y veamos como queda el lagrangiano luego de imponer la condición de gauge de Lorenz (2.13) mediante dicho método. El nuevo lagrangiano de la teoría es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP} &= \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 + (\partial^\mu \bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 + (\partial^\mu \bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{a\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{a\nu} \\
&\quad - \frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 + (\partial^\mu \bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

dónde  $\xi$  es un parámetro que tiende a cero en el caso del gauge de Lorenz,  $c$  son los campos “ghosts” y  $\bar{c}$  los “antighosts”, y  $D_\mu^{ab}$  es una notación para lo que se suele llamar *derivada covariante*:

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu + g A_\mu^c f_c^{ab}. \tag{2.16}$$

Al igual que fue mencionado en la descripción de (2.10), aquí se siguen las mismas líneas de razonamiento: Los términos que involucran única y exclusivamente dos campos del mismo tipo corresponden a términos cinéticos de partículas libres, y los que involucran más de dos campos, sin importar el tipo, son interacciones. Una observación importante es que todos los términos de interacción involucran potencias del parámetro  $g$ . Volveremos sobre ello más adelante en la sección 2.5.

## 2.4. Funciones de correlación e integrales de caminos

Muchas cantidades importantes en teoría cuántica de campos como tasas de decaimiento de partículas, secciones eficaces, amplitudes de transición entre distintos estados cuánticos e incluso masas de los posibles estados ligados admitidos por la teoría, se pueden extraer de objetos llamados *funciones de correlación*. En términos generales, una función de correlación es un promedio estadístico o cuántico de un producto entre dos o más operadores. En el contexto de la teoría cuántica de campos, estos pueden ser los campos cuánticos que describen las partículas. Matemáticamente se obtienen como valores esperados en el vacío de productos de operadores de campo y están dadas por la siguiente

expresión:

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2) \dots \hat{\Phi}(x_n) \} | \Omega \rangle. \quad (2.17)$$

Aquí  $\hat{\Phi}$  se está usando para denotar operadores (en la representación de Heisenberg) asociados a campos en principio arbitrarios, que podrían ser bosónicos o fermiónicos.  $T$  es el *operador de tiempo ordenado*, cuya función es ordenar los operadores desde menor a mayor tiempo de derecha a izquierda<sup>2</sup>, y  $|\Omega\rangle$  es el vacío de la teoría, o en otras palabras, el estado de menor energía posible. Además,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  son todos cuadvectores de posición en los cuales están evaluados los operadores de campos.

La expresión (2.17) puede escribirse como una integral de caminos, que en términos generales, es una suma sobre todos los valores posibles que pueden tomar los campos, ponderados por una función exponencial que le asocia un “peso” en la integral a cada una de las combinaciones posibles. Expresado matemáticamente:

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\Phi}(x_1) \hat{\Phi}(x_2) \dots \hat{\Phi}(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int D\Phi \Phi(x_1) \Phi(x_2) \dots \Phi(x_n) e^{iS[\Phi]}}{\int D\Phi e^{iS[\Phi]}}, \quad (2.18)$$

donde  $D\Phi = \prod_x d\Phi(x)$  y  $S[\Phi]$  es la acción de la teoría, que se define como una integral temporal del lagrangiano:

$$S[\Phi] = \int dt L(t) = \int dt \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \mathcal{L}[\Phi(t, \vec{x})]. \quad (2.19)$$

En el caso particular aquí presentado, que es el de una función de correlación, la integral temporal sobre debe efectuarse entre  $t = -\infty$  y  $t = +\infty$  y con condiciones de borde apropiadas [45].

Las definiciones y expresiones recién descritas son genéricas para cualquier teoría cuántica de campos. En particular si quisiéramos adaptarlo para Yang-Mills Pura fijada en el gauge de Lorenz, tendríamos que sustituir (2.15) en (2.19) y (2.19) en (2.18) si quisiéramos calcular la integral de caminos. Además, en ese caso los campos  $\Phi$  serían campos gluónicos  $A_\mu^a$ .

¿Cómo calcular este tipo de integrales? En general se saben resolver de forma exacta en teorías libres, es decir, teorías en las que no hay interacción entre las partículas. Esto puede traducirse en que el lagrangiano está compuesto únicamente de términos cuadráticos (cinéticos), y en ese caso las integrales son Gaussianas. Sin embargo en el caso más típico e interesante donde las partículas sí interactúan, en general estas integrales no se

---

<sup>2</sup>En el caso de operadores fermiónicos este proceso de ordenamiento requiere de la introducción de algunos signos.

saben resolver analíticamente de forma exacta, y la única manera de proceder es recurrir a métodos que permitan obtener cálculos aproximados. Este es el caso de la Cromodinámica Cuántica o de Yang-Mills Pura, donde ya vimos que los gluones interactúan entre sí. El método de aproximación más comúnmente usado para estos cálculos se llama *teoría de perturbaciones*. En esos casos se dice que la teoría se puede resolver perturbativamente o de forma perturbativa. En general, como en cualquier método de aproximación, se encuentra sujeto a limitaciones y sólo es aplicable dentro de ciertas condiciones, que suelen ser bastante restrictivas. En particular, este método no suele ser válido en cualquier rango de energías. Ahondaremos en ese asunto más adelante.

## 2.5. Teoría de perturbaciones en Yang-Mills Pura

La idea del método de teoría de perturbaciones para resolver de forma aproximada integrales como (2.18) es desarrollar la exponencial y ver que cuando se cumplen ciertas condiciones, es posible quedarse sólo con algunos términos en el desarrollo y despreciar el resto. Claramente, cuantos más términos se tengan en cuenta mejor será la aproximación y por lo tanto más precisión tendrá el resultado, aunque la contraparte es que el cálculo se vuelve cada vez más complicado.

Veamos como entender someramente estas ideas. Para empezar separemos la acción (2.19) en sus términos cinéticos que corresponden a la teoría libre y en sus términos de interacción. Los agruparemos en lo que llamaremos  $S_{libre}$  y  $S_{int}$  respectivamente. De este modo la acción  $S$  puede escribirse como:

$$S = S_{libre} + S_{int}. \quad (2.20)$$

Ahora podemos reescribir la exponencial de (2.18) como

$$e^{iS} = e^{iS_{libre}} e^{iS_{int}} = e^{iS_{libre}} \left( 1 + iS_{int} - \frac{S_{int}^2}{2!} - i\frac{S_{int}^3}{3!} + \frac{S_{int}^4}{4!} + i\frac{S_{int}^5}{5!} - \dots \right). \quad (2.21)$$

El enfoque de teoría de perturbaciones es el siguiente: si  $S_{int}$  es “pequeño”, en algún sentido que se precisará más adelante, cada término sucesivo en la suma es menor que el anterior en módulo, de modo que las contribuciones son cada vez menores, permitiendo, dependiendo del grado de precisión que se requiera, truncar la serie en cierto punto y quedarse únicamente con una cantidad finita de sumandos.<sup>3</sup> Hecho esto, el problema de

---

<sup>3</sup>En realidad, este procedimiento suele ser más delicado pues para muchas teorías de campos la serie suele no converger.

resolver (2.18) se reduce a calcular una cantidad finita de funciones de correlación en la teoría libre porque :

$$\begin{aligned}
\int D\Phi \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_n)e^{iS[\Phi]} &\approx \int D\Phi \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_n)e^{iS_{libre}[\Phi]} \sum_{n=0}^N \frac{(iS_{int}[\Phi])^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \int D\Phi \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_n)(S_{int})^n e^{iS_{libre}[\Phi]} \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \langle \Omega | T \{ \hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\dots\hat{\Phi}(x_n)(S_{int}[\Phi])^n \} | \Omega \rangle_{libre} \int D\Phi e^{iS_{libre}[\hat{\Phi}]} .
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Aquí se usó el subíndice “libre” en la función de correlación para indicar que esta siendo calculada en la teoría con acción asociada  $S_{libre}$ , es decir, en la teoría libre.

Las funciones de correlación en la teoría libre pueden ser calculadas de forma exacta mediante el uso de un teorema llamado *Teorema de Wick*. Este permite escribir cualquier función de correlación de  $N$  campos, también llamadas *funciones de correlación a  $N$  puntos*, en la teoría libre, expresándola únicamente en términos de funciones de correlación a dos puntos en la teoría libre, usualmente llamadas *propagadores*.<sup>4</sup> Los propagadores se pueden calcular como integrales Gaussianas, lo que los hace fácilmente calculables a partir de la acción de cada teoría. Como resultado, cantidades como (2.22) se pueden expresar como sumatorias de integrales espacio-temporales de distintas combinaciones de propagadores. También se puede trabajar con estas cantidades en el espacio de cuadrimomentos mediante transformaciones de Fourier, en cuyo caso las integrales serán en cuadrimomentos en vez de en coordenadas espacio-temporales.

A continuación veremos un método para representar estas expresiones de manera conveniente.

### 2.5.1. Desarrollo perturbativo en términos de diagramas de Feynman en el gauge de Lorenz

Los diagramas de Feynman son una manera útil de representar visualmente el tipo de expresiones que acabamos de describir, por lo que pueden usarse como una herramienta para obtener cálculos perturbativos de funciones de correlación, amplitudes de scattering, u otras cantidades en la teoría. La forma de proceder es que cada componente que forma

<sup>4</sup>También se le llama propagadores a las funciones de correlación a dos puntos en teorías con interacciones, o a veces "propagadores completos". En general, dependiendo del contexto se sobreentiende si se está haciendo referencia a la teoría libre o no.

parte de un diagrama tiene asociado un cierto tipo de factor y a su vez hay algunas reglas extra que hay tener en cuenta a la hora de interpretar un diagrama. La idea es que teniendo en cuenta estas normas básicas, llamadas *reglas de Feynman* uno pueda reconstruir una expresión matemática. Cada teoría tiene sus propias reglas de Feynman, que además también dependen de la elección del gauge y de la convención que se utilice para la métrica minkowskiana. En nuestro caso, ya se mencionó que trabajaremos el gauge de Lorenz, y la convención que usaremos para la métrica es:

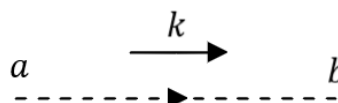
$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

A continuación se muestran las reglas de Feynman en el espacio de momentos para la teoría de Yang-Mills Pura en el gauge de Lorenz y con la convención de la métrica recién descrita.

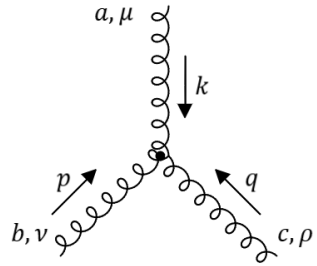
#### Propagador gluónico

$$a, \mu \xrightarrow{k} b, \nu \sim G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$


#### Propagador del ghost

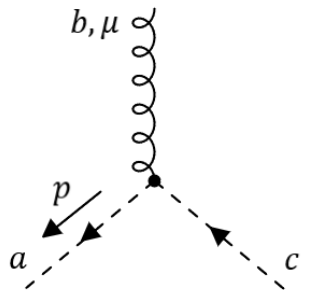
$$a \xrightarrow{k} b \sim G^{ab}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon}$$


#### Vértice de 3 gluones



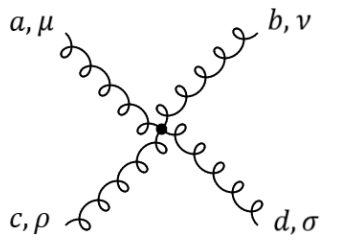
$$\sim V_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q, k) = gf^{abc} [\eta_{\mu\nu}(k-p)_\rho + \eta_{\nu\rho}(p-q)_\mu + \eta_{\rho\mu}(q-k)_\nu]$$

Vértice gluon-ghost-ghost



$$\sim V_\mu^{abc}(p) = gf^{abc} p_\mu$$

Vértice de 4 gluones



$$\sim V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma})]$$

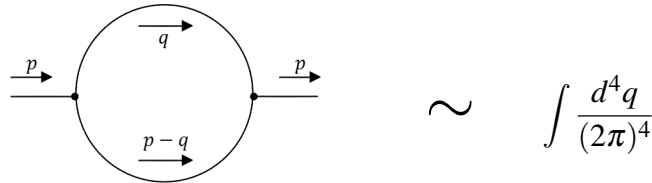
Estos son los constituyentes elementales de los cuales se puede construir un diagrama arbitrario en esta teoría. Para pasar de un diagrama construido a partir de estos elementos a una expresión matemática, debemos agregar algunos pasos a seguir:

1. Por cada uno de estos elementos que constituyen al diagrama, agregar su respectiva expresión matemática.
2. Imponer conservación de momento en cada vértice:

$$\sum_{r=0}^m (-1)^{s_r} p_r = 0$$

donde  $s_r$  puede ser 2 o 1 dependiendo de si el momento  $p_r$  es entrante o saliente al vértice respectivamente.

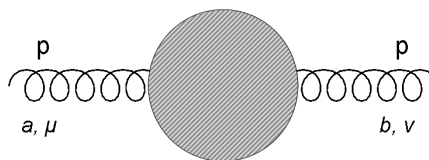
**3.** Integrar en todos los momentos internos que no queden determinados por la conservación de momentos, o lo que es equivalente, agregar una integral en cada cuadrimomento correspondiente a una línea cerrada o loop en el diagrama: <sup>5</sup>



The diagram shows a circle representing a loop. On the left, an arrow labeled  $p$  points into the circle. On the right, an arrow labeled  $p$  points out of the circle. Inside the circle, the top arc has an arrow labeled  $q$  pointing clockwise, and the bottom arc has an arrow labeled  $p-q$  pointing clockwise. To the right of the circle is a tilde symbol  $\sim$  followed by the integral expression  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ .

**4.** Multiplicar por el factor de simetría que corresponda en cada caso en particular. Los factores de simetría tienen que ver con la cantidad de maneras distintas en que se puede obtener el mismo diagrama.

Un ejemplo concreto del uso de estos diagramas puede ser el cálculo de funciones de correlación a dos puntos en el espacio de momentos. En términos de diagramas esta función puede calcularse como una suma de todos los diagramas posibles que se pueden construir entre dos propagadores. Una representación esquemática de esto es:

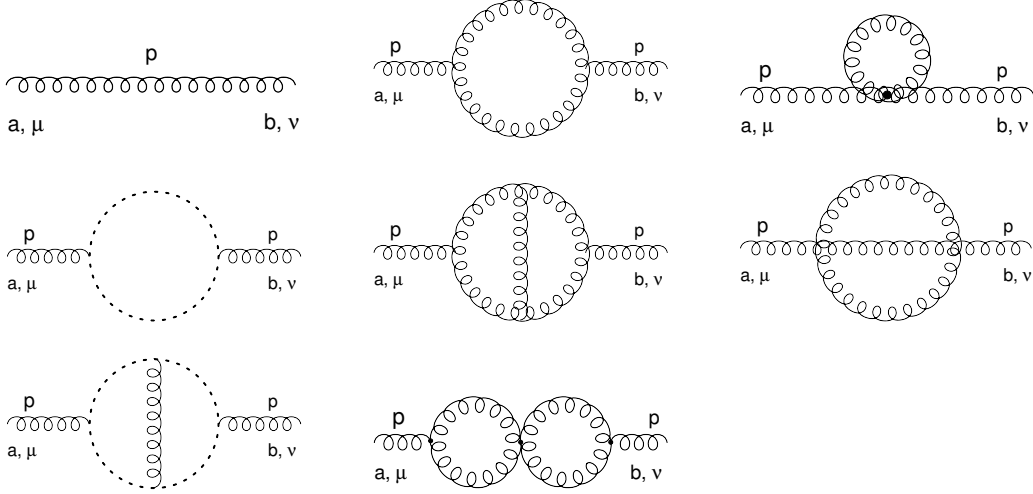
$$\int d^4 r e^{ip \cdot r} \langle \Omega | T \{ \hat{A}_\mu^a(r) \hat{A}_\nu^b(0) \} | \Omega \rangle = \text{Diagram} \quad (2.24)$$


The diagram shows two wavy lines representing propagators. The left one is labeled  $a, \mu$  and the right one is labeled  $b, \nu$ . Both have momentum  $p$  indicated by arrows. They are connected to a central shaded circle representing a sum of all possible Feynman diagrams.

, donde la notación que se está usando es que la circunferencia rayada significa una suma de todos los diagramas de Feynman que pueden formarse entre los dos propagadores gluónicos externos de cuadrimento  $p$  y mismos índices que  $\hat{A}_\mu^a$  y  $\hat{A}_\nu^b$ . En la expresión anterior se usó invariancia bajo traslaciones ( $r \equiv x - y$ ). Se puede desarrollar (2.24) explícitamente como sumas (infinitas) de composiciones de diagramas 1 PI, que son los

<sup>5</sup>En esta representación se usó por simplicidad el mismo tipo de línea para todos los propagadores, indistintamente de si corresponden a clases diferentes de partículas o no, porque lo único que se quiere representar es que cuando hay un loop hay que integrar en el cuadrimento que circula.

diagramas conexos que no pueden separarse en dos, cortando una única línea interna. Algunos de los diagramas 1 PI que contribuyen a la expresión son, por ejemplo: <sup>6</sup>:



Este desarrollo implica infinitos términos, porque siempre es posible agregar más vértices y propagadores para formar otros diagramas. Sin embargo, si fuera válido un desarrollo perturbativo de la teoría en el cual diagramas más complejos contribuyen cada vez menos, podríamos truncar la suma en cierto punto y quedarnos con un número finito y manejable de términos en la sumatoria.

Pero, ¿se puede estudiar Yang-Mills Pura de forma perturbativa? O quizás una mejor pregunta sería: ¿Existe algún régimen en que Yang-Mills Pura admita un desarrollo perturbativo?

Nos dirigimos a discutir las condiciones bajo las cuales un desarrollo de este tipo podría estar, o no, correctamente justificado. Una forma de abordar el problema, aunque sujeto a algunas limitaciones que veremos enseguida, es pensar en el desarrollo (2.21) como un desarrollo en potencias del parámetro  $g$  que regula las interacciones (véase (2.15)). En la medida en que este factor sea menor que 1, mayores órdenes en el desarrollo de la exponencial serán cada vez más pequeños, cumpliendo con los requisitos que validan la aplicabilidad de un tratamiento perturbativo. Sin embargo, se puede mostrar que en realidad  $g$  siempre aparece en la combinación  $\frac{g^2 N}{16\pi^2} \equiv \tilde{g}^2$ , por lo que el factor que efectivamente regula el desarrollo perturbativo no es exactamente  $g$ , sino  $\tilde{g}^2$ . Es decir, que el factor que tiene que ser menor que 1 para validar el desarrollo perturbativo es  $\tilde{g}^2$ . En el caso de QCD o Yang-Mills Pura,  $N$  vale 3, pues resulta de considerar una teoría con simetría de gauge  $SU(N = 3)$ .

<sup>6</sup>Decidimos no incluir todas las posibilidades a dos loops porque son muchos. Se presentan algunos a modo de ejemplo.

En términos de diagramas de Feynman, un desarrollo perturbativo es equivalente a considerar un desarrollo en el número de loops en los diagramas. En otras palabras, potencias más altas en  $\tilde{g}^2$  se relacionan directamente con diagramas que contienen un mayor número de loops. Esto implica que si un desarrollo perturbativo es válido, podremos limitarnos a un número finito de diagramas, que serán aquellos que se pueden construir con un número máximo determinado de loops.

Pero, ¿es  $\tilde{g}^2$  menor que 1? En realidad, el parámetro  $g$ , y por lo tanto  $\tilde{g}^2$ , dependen de la escala de energía del proceso que esté siendo tenido en cuenta. Entonces, la pregunta correcta sería: ¿Como depende  $\tilde{g}^2$  de la energía y en qué rangos es efectivamente pequeño? Resolveremos esta pregunta en las siguientes secciones, en base a algunos resultados de QCD y Yang-Mills Pura.

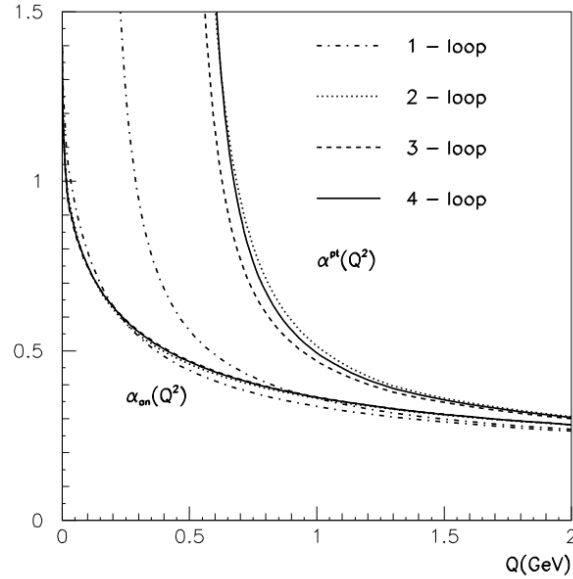
## 2.6. Parámetro de acoplamiento de QCD a altas y bajas energías según cálculos analíticos

Según cálculos analíticos en QCD basados en el procedimiento de Faddeev-Popov,  $\tilde{g}^2$  tiende asintóticamente a cero a altas energías pero crece monótonamente a medida que se disminuye la energía [6, 7, 8]. En la figura 2.1 extraída de [8], se puede observar el comportamiento analítico para el factor  $\alpha$ , definido en dicho artículo como  $\alpha \equiv \frac{g^2}{4\pi} = \frac{4\pi\tilde{g}^2}{N}$ .

Según estos resultados, la intensidad de las interacciones es mayor a energías cada vez más pequeñas, pero disminuye a altas energías y tiende a cero, de modo que la teoría se vuelve asintóticamente libre. Este fenómeno lleva el nombre de *libertad asintótica*. En la siguiente sección veremos que simulaciones numéricas muestran un comportamiento diferente a bajas energías.

En términos de teoría de perturbaciones, el comportamiento observado en las gráficas se traduce en que no es admisible un tratamiento perturbativo en el infrarrojo, porque el parámetro de desarrollo aumenta monótonamente en un entorno cercano al cero. Sin embargo, a escalas de energía mayores, donde el parámetro es suficientemente pequeño, el desarrollo perturbativo es válido. Por supuesto, dicha conclusión tiene sentido en la medida en que estos resultados que se basan en el procedimiento de Faddeev-Popov sean fiables. Pero... ¿Lo son?

En la sección 2.3 mencionamos que el procedimiento de Faddeev-Popov es cuestionable a bajas energías, que es exactamente el sector en principio no perturbativo según los resultados de los cálculos basados en este mismo procedimiento. Esto permite poner en duda entonces el comportamiento del parámetro  $\tilde{g}^2$  observado en la gráfica 2.1, y permite



**Figura 2.1:** Comportamiento analítico del parámetro  $\alpha \equiv \frac{4\pi\tilde{g}^2}{N}$  de QCD, en función de la energía, en GeV.  $\alpha_{an}$  y  $\alpha^{pt}$  son cálculos de  $\alpha$  obtenidos mediante distintos métodos. Los diferentes estilos de línea se corresponden con cálculos hechos hasta distintos órdenes en teoría de perturbaciones. Figura extraída de [8].

también cuestionarse si esta tendencia monótona creciente a bajas energías es una propiedad intrínseca de la teoría, o si es, quizá, un síntoma que emerge por el hecho de estar utilizando un lagrangiano incorrecto, incapaz de describir adecuadamente la física de la teoría a esa escala. Queda abierta la posibilidad de que incluso el parámetro  $\tilde{g}^2$  pudiera ser suficientemente pequeño en el infrarrojo, de modo que admita también un tratamiento perturbativo allí. Eso sería muy prometedor y abriría una vía que facilitaría el estudio de este sector de la teoría, mediante el uso de herramientas ya conocidas y entendidas en la literatura. Por supuesto que el abordaje de este tema seguiría siendo complejo por muchos otros aspectos, pero contar con métodos de cálculo viables y conocidos constituiría un punto de apoyo fundamental para abordar este tema de investigación con mayor certeza.

Pero, ¿existen indicios no basados en el procedimiento de Faddeev-Popov que puedan respaldar y aportar credibilidad a esta idea?

## 2.7. QCD y Yang-Mills Pura a altas y bajas energías según cálculos numéricos

Una alternativa para abordar problemas que aún no se comprenden completamente desde un enfoque analítico es a través de simulaciones numéricas en lo que comúnmente

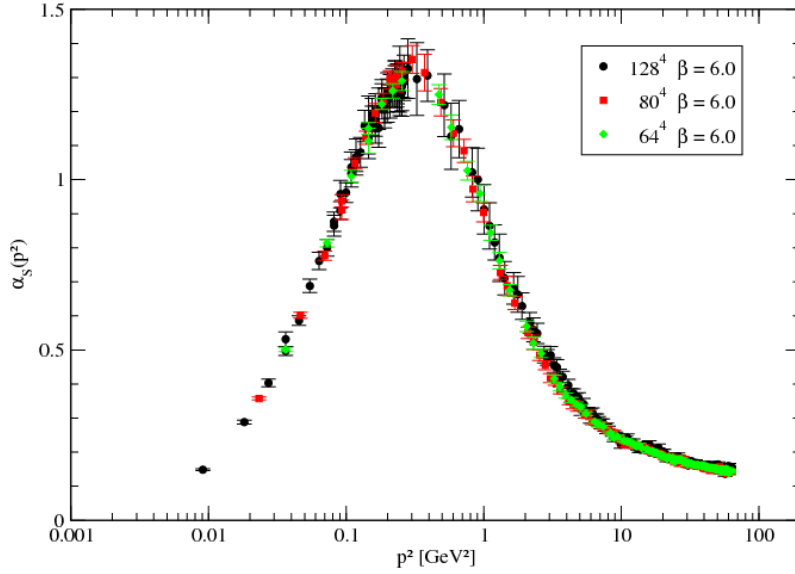
se conoce como el *lattice*, que significa “red” o “grilla” en inglés [1]. Este nombre proviene de la idea de explorar teorías de campos de forma numérica, donde, debido a la imposibilidad de simular espacios continuos, se utilizan espacios discretos compuestos por una red de puntos. Naturalmente, cuanto más cerca estén los puntos entre sí en la red más precisión tendrán los resultados porque se asemejará más al espacio continuo que percibimos. Es importante distinguir entre dos tipos distintos de simulaciones en el *lattice*, las que trabajan sobre un gauge fijado y las que no. Utilizaremos algunos resultados de ambos enfoques.

Las simulaciones numéricas que trabajan sobre la teoría fijada de gauge permiten calcular cantidades que no son físicamente medibles porque dependen de la elección del gauge. Un ejemplo concreto son las funciones de correlación. A diferencia de los enfoques analíticos, los tratamientos numéricos permiten, según se afirma en la literatura, evadir los problemas de fijación de gauge asociados a las copias de Gribov mediante ciertas técnicas numéricas. [9, 10, 11, 12]

Por otro lado, las simulaciones en las que no se fija el gauge, evaden de forma directa cualquier posible dificultad asociada al proceso de fijación, porque no lo utilizan. La limitación en este caso es que solo permiten el cálculo de cantidades invariantes de gauge, es decir, cantidades físicas. Ejemplos concretos pueden ser masas de partículas o espectros de energías de estados ligados.

Una de las principales cualidades de las simulaciones en el *lattice* es que los métodos numéricos que utilizan son no perturbativos, lo que quiere decir que no requieren del uso de teoría de perturbaciones. Al no estar limitado por métodos perturbativos ni por inconvenientes asociados a procesos de fijación de gauge, estas simulaciones permiten el acceso a resultados numéricos sólidos incluso en el régimen de bajas energías de QCD o de Yang-Mills Pura, dónde somos en principio incapaces de acceder desde un punto de vista analítico utilizando la acción de Faddeev-Popov. No obstante, las simulaciones en el *lattice* se ven limitadas por otros factores. Suelen ser extremadamente costosas en tiempo de cálculo, están sujetas a incertidumbres asociadas a la discretización del espacio-tiempo y de volúmenes finitos, y se destacan por brindar resultados cuantitativos en lugar de analíticos. Respecto al último punto, significa que son muy útiles para obtener información sobre comportamientos de cantidades, como por ejemplo el del acoplamiento o de propagadores en diversos rangos de energías, y sin embargo, son incapaces de proporcionar soluciones analíticas a cuestiones fundamentales, como pueden ser: la determinación precisa del lagrangiano fijado de gauge adecuado en la teoría de Yang-Mills Pura o la aplicación apropiada del procedimiento de Faddeev-Popov a bajas energías.

En nuestro caso esto significa que aún teniendo una gráfica obtenida por medio de



**Figura 2.2:** Comportamiento de  $\alpha$  en función de la escala de impulsos euclidianos, obtenido a partir de simulaciones numéricas en el lattice con igual espaciado y distintos volúmenes. Figura extraída de [13].

simulaciones en el lattice, que describa cuantitativamente el comportamiento del parámetro de acoplamiento, faltaría entender de forma analítica la razón de ese comportamiento y como describirlo matemáticamente desde primeros principios. Solo de esa manera podríamos acceder y explorar analíticamente y sin ambigüedades un rango mayor de escalas energéticas de la teoría y entender aspectos ya mencionados anteriormente como los estados ligados, la hadronización, el fenómeno de confinamiento y otros aspectos.

### 2.7.1. Parámetro de acoplamiento numérico

¿Qué dicen las simulaciones numéricas en el lattice sobre el comportamiento del acoplamiento  $\tilde{g}^2$ ? Resultados numéricos obtenidos en Yang-Mills Pura muestran que a bajas energías el parámetro  $\alpha = \frac{4\pi\tilde{g}^2}{N}$  exhibe un máximo local y tiende a cero para energías menores. Este comportamiento puede observarse en la figura 2.2, extraída de [13]. Dicha curva de  $\alpha$  fue obtenida a partir del vértice de interacción ghost-gluón-gluón en el gauge de Lorenz.

Fundamentalmente se pueden observar dos aspectos importantes. El primero es el comportamiento a bajas energías, que discrepa con los resultados analíticos extraídos del procedimiento de Faddeev-Popov (véase Fig. 2.1). Como ya mencionamos, los cálculos analíticos no son confiables en esa zona por posibles inconsistencias en la fijación de gauge, por lo que una discrepancia no es sorprendente. El segundo punto es que reproduce la

libertad asintótica a altas energías. En dicho régimen la fijación de gauge está bien fundamentada y una correspondencia entre resultados numéricos y analíticos era esperable.

A efectos de este trabajo, el punto más importante de la figura 2.2 es que el valor máximo alcanzado por  $\alpha$  es aproximadamente  $\alpha_{max} \approx 1.5$ . Esto quiere decir que el parámetro  $\tilde{g}^2$  toma un valor máximo de aproximadamente  $\tilde{g}_{max}^2 = \frac{3\alpha_{max}}{4\pi} \approx \frac{4.5}{4\pi} \approx 0.36$ . En la sección 2.5 mencionamos que una condición necesaria para que pueda ser válido un tratamiento perturbativo en QCD o en la teoría de Yang-Mills Pura, es que el parámetro de desarrollo  $\tilde{g}^2$  tome valores menores a 1. Los resultados extraídos del lattice confirman que nos encontramos dentro de las condiciones de aplicabilidad de este método, aunque el parámetro no es particularmente pequeño cerca del máximo local ( $\tilde{g}_{max}^2 \approx 0.36$ ), por lo que, si bien la correcciones perturbativas están suprimidas, podrían no ser tan pequeñas.

A pesar de ello, e incluso contando con un tratamiento perturbativo y disponiendo de los resultados del lattice para el parámetro de acoplamiento, no es suficiente para proponer un posible método de abordaje en un esfuerzo por acceder al sector infrarrojo de QCD o Yang-Mills Pura. Aún no conocemos qué apariencia podría tener el lagrangiano de la teoría a bajas energías una vez fijado el gauge, debido a los problemas mencionados anteriormente [4]. Se requiere aún algún elemento adicional que sugiera un posible enfoque analítico desde el cual abordar este último obstáculo.

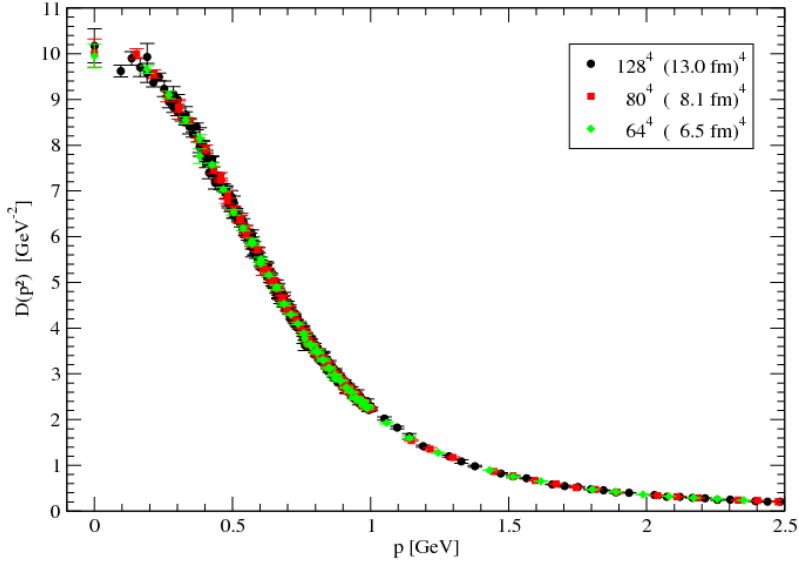
A continuación exploraremos resultados del lattice en relación a la función de correlación a dos puntos del campo del gluón  $A_\mu^a$ , que nos ofrecen una posible vía de solución.

### 2.7.2. Función de correlación numérica del gluón

Además de los resultados numéricos para el parámetro acoplamiento, hay otro punto que será parte de la base de este trabajo, y es el comportamiento que exhibe la función de correlación a dos puntos del gluón en el sector infrarrojo, según cálculos hechos en el lattice fijado de gauge. Por simplicidad le llamaremos a veces también “propagadores” a las funciones de correlación a dos puntos, como la introducida en (2.24). El paralelismo surge de que los propagadores como (2.5.1) y las funciones de correlación como (2.24) son cantidades análogas, con la única diferencia de que una es calculada en la teoría libre y la otra en la teoría con interacciones. En general, dependiendo del contexto se sobreentenderá a cual de ellas estamos haciendo referencia.

En el gauge de Lorenz se puede escribir el propagador o función de correlación a dos puntos en el espacio de momentos de la siguiente forma:

$$\int d^4r e^{ip \cdot r} \langle \Omega | T \{ A_\mu^a(r) A_\nu^b(0) \} | \Omega \rangle = D(p^2) i \delta^{ab} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (2.25)$$



**Figura 2.3:** Dressing function del gluón en función del impulso euclideo  $p$ , obtenido a partir de simulaciones numéricas en Yang-Mills Pura fijada en el gauge de Lorenz, para grillas de igual espaciado y distintos volúmenes. Gráfico extraído de [13].

donde  $D(p^2)$  es una función que depende de  $p^2$ .

Según varios estudios hechos a partir de simulaciones en el lattice fijado de gauge,  $D(p^2)$  tiende a un valor finito para  $p^2 \rightarrow 0$  [14, 15, 16, 17]. Este comportamiento se puede observar en la figura 2.3, que está representada mediante el uso de una métrica euclidea ( $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \rightarrow p_0^2 + \vec{p}^2$ ). Este tipo de comportamiento en funciones de correlación a dos puntos es típico en partículas masivas, porque en general para una partícula masiva  $D(p^2)$  tiene la forma:

$$D(p^2) \propto \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}, \quad (2.26)$$

donde  $m_0$  es la masa de la partícula en la teoría libre, es decir, la masa que tendría la partícula si no interactuara con otras, y  $\Sigma$  es una cierta función de  $p^2$  llamada usualmente *auto-energía*. Su significado físico es que, cuando se la evalúa en el polo del propagador, da la masa que adquiere la partícula a través de las interacciones.

Para el gluón,  $m_0 = 0$  porque no tiene masa en la teoría libre. Tomando el límite  $p^2 \rightarrow 0$ , la ecuación (2.26) tiende a  $D(p^2) \propto \frac{-1}{\Sigma(0)}$ . Asumiendo  $\Sigma(0) \neq \{0, \infty\}$ ,  $D(p^2)$  tiende a un valor finito, lo cual concuerda, al menos cualitativamente, con el comportamiento en  $p^2 \rightarrow 0$  de la figura 2.3. Esto podría sugerir, como una posible vía de explicación para estos resultados numéricos, que el gluón adquiere masa por algún mecanismo que involucra a las interacciones. La naturaleza de este mecanismo se desconoce y es un tema de debate abierto a día de hoy. Algunas posibles explicaciones son estudiadas en [18, 19, 20, 21, 22,

[23](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#)].

Varios estudios han aprovechado este fenómeno en un intento por construir modelos que describan o se aproximen a describir de forma adecuada la física de la teoría de Yang-Mills Pura y QCD a bajas energías.

## Capítulo 3

# Marco teórico: Modelo fenomenológico de Cornwall

### 3.1. Modelos fenomenológicos con gluones masivos

Los enfoques fenomenológicos son frecuentes en física. Bajo la falta de un método analítico basado en principios fundamentales para obtener el lagrangiano adecuado de la teoría, es decir, aquel que es capaz de describir correctamente la física a toda escala de energías, se proponen modelos construidos a partir de fundamentos fenomenológicos. Estos podrían ser por ejemplo intentar reproducir ciertos datos numéricos o experimentales. Por supuesto, enfoques así sólo cobran sentido a posteriori, si logran describir de forma satisfactoria el fenómeno en cuestión. Siendo ese el caso, pueden usarse como un primer acercamiento a intentar comprender también otros aspectos de la teoría, que no sean entendidos desde primeros principios. Alternativamente, cuando un modelo no logra reproducir ciertos resultados experimentales o numéricos, es una fuerte indicación de que el enfoque no es el adecuado y de que el modelo debe ser descartado o modificado.

Naturalmente, estas aproximaciones no logran resolver uno de los problemas, que es la obtención del lagrangiano fijado de gauge correcto. Sin embargo pueden servir como una herramienta para acceder al sector infrarrojo de QCD, al menos de forma aproximada, y para intentar extraer información útil sobre la física en ese sector. Esto podría aportar indicios claves para entender cómo llegar de forma analítica al lagrangiano adecuado de la teoría. Si, por ejemplo, el comportamiento de la física en el rango de bajas energías nos permitiera descubrir alguna condición adicional a imponer sobre los campos gluónicos, que nos habilitara a fijar por completo el gauge, podríamos evadir así, a costa de nuevas restricciones físicas, problemas asociados a las copias de Gribov.

Aunque aún no está claro desde principios fundamentales cuál es el mecanismo por el cual el gluón parece adquirir masa, existen diversos modelos que incluyen de una manera u otra gluones masivos. Una primera estrategia para afrontar el problema puede ser incluir manualmente un término de masa en la teoría. Hay varios modos de llevar esto a cabo, cada uno de los cuales da lugar a un modelo matemático diferente. Uno de ellos fue propuesto por J.M. Cornwall y A. Soni en 1982 [33], y es en el que nos basaremos mayoritariamente en esta tesis. En su publicación se calcula el espectro de estados ligados de dos gluones en este modelo <sup>1</sup>. Es uno de los primeros modelos fenomenológicos para glueballs de la literatura, y de los únicos en que se han hecho cálculos para el espectro de estas partículas. Desafortunadamente no queda completamente clara la metodología utilizada para estos cálculos en la publicación [33]. Esto lo convierte en un tema de interés para ser estudiado en mayor profundidad. Los resultados obtenidos en ese momento no reproducen satisfactoriamente los datos de simulaciones numéricas actuales, pero consideramos que puede ser valioso reevaluar el modelo variando algunos parámetros del mismo e implementando algunas modificaciones. Pretendemos rehacer este estudio implementando algunas variantes, tanto en la metodología como en el propio modelo en sí. El objetivo es estudiar cómo cambian los resultados bajo estas modificaciones, y si son capaces de proporcionar una descripción más precisa del espectro de glueballs medido en el lattice.

También existen otros modelos, como el *Modelo de Curci-Ferrari* [34], que han tenido un éxito considerable a la hora de reproducir algunas cantidades de simulaciones numéricas. Algunos estudios han logrado reproducir, a partir de este modelo, los fenómenos observados en las figuras 2.2 y 2.3 con un grado considerable de precisión [35, 36], además de muchas otras cantidades. Desafortunadamente, no hay artículos donde se realicen cálculos sobre el espectro de glueballs en este modelo. Un estudio así sería importante para poner a prueba sus predicciones sobre cantidades físicas. A pesar de ello, preferimos analizar el modelo de Cornwall en este trabajo <sup>2</sup>, aunque dado el éxito del modelo de Curci-Ferrari para reproducir algunos aspectos de la teoría de Yang-Mills Pura, recurriremos ocasionalmente a él para motivar y fundamentar algunas suposiciones que precisaremos en el trabajo.

A continuación presentamos el modelo de Cornwall y los fundamentos teóricos sobre los cuales se sustenta.

---

<sup>1</sup>También hay cálculos para los estados de tres gluones, pero no son de interés en esta tesis.

<sup>2</sup>Creemos que un tratamiento similar al que usaremos en esta tesis podría servir para obtener el espectro de glueballs en el modelo de Curci-Ferrari.

## 3.2. El modelo y su Hamiltoniano

A diferencia del formalismo que hemos usado hasta el momento para motivar este trabajo, el modelo propuesto por Cornwall se encuentra expresado en el formalismo canónico de la mecánica cuántica, que se basa en el operador Hamiltoniano ( $H$ ). En este, los estados físicamente permitidos del sistema están representados por vectores, que son los autovectores de  $H$ , y sus correspondientes autovalores son las energías de los respectivos estados. Matemáticamente esto se traduce de la siguiente manera:  $|e_n\rangle$  es estado del sistema  $\iff H|e_n\rangle = E_n|e_n\rangle$  y en ese caso  $E_n$  es la energía de dicho estado.

Una implicación directa de esta manera de representar los estados físicos es que el Hamiltoniano es el operador que corresponde al observable energía, y por tanto también codifica las interacciones entre los elementos del sistema. Como la energía de un sistema es una cantidad real,  $H$  debe ser hermítico ( $H^\dagger = H$ ) para que sus autovalores sean reales. Además, los autovectores de  $H$  se pueden elegir ortonormales entre sí y en conjunto forman una base de un espacio vectorial llamado *espacio de Hilbert*, denotado por  $\mathcal{H}$ .

El hamiltoniano que define a este modelo pretende representar a un sistema de dos gluones masivos que interactúan entre sí en un régimen poco relativista, en el cual las energías de interacción involucradas son mucho menores que las masas de los gluones. La viabilidad de un enfoque no relativista en un sistema cuántico de este tipo podría ser válida porque el gluón es masivo en este marco teórico. Es razonable que si las energías de interacción son suficientemente bajas, el sistema admita una descripción de bajas velocidades. Simulaciones en el lattice respaldan esta idea para estados ligados de dos gluones: las masas de los gluones que se observan en estas simulaciones resultan ser aproximadamente la mitad de la masa del glueball más liviano [37, 38], de modo que, al menos para este, se puede esperar que las energías de interacción y cinética relativa entre los gluones sean mucho menor que la masa de los mismos. El estudio del régimen poco relativista resulta interesante porque suele ser más fácil de tratar, y aún así permite estudiar muchos fenómenos que se dan en dicho sector, para los cuales no es necesaria una descripción completa del sistema.

La deducción del operador Hamiltoniano de este modelo, que se construye a partir de la energía cinética y potencial de interacción del sistema, se basa en un enfoque con una gran componente fenomenológica, que pretende incluir ciertos aspectos razonables como el confinamiento o la interacción espín-orbita o espín-espín entre partículas. Expresaremos todas las cantidades en un sistema de unidades en que la velocidad de la luz ( $c$ ) y la constante de Planck toman el valor 1.

El potencial en este modelo es:

$$\begin{aligned}
V = & 2m(1 - e^{-mr\beta}) - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} \left( \frac{2s - 7m^2}{6m^2} + \frac{1}{3}S^2 \right) + \frac{\pi\lambda\delta(\vec{r})}{3m^2} \left( \frac{4m^2 - 2s}{m^2} + \frac{5}{2}S^2 \right) \\
& - \frac{3\lambda}{2m^2} L \cdot S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-mr}}{r} + \frac{\lambda}{2m^2} \left[ (S \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}S^2 \nabla^2 \right] \frac{e^{-mr}}{r},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

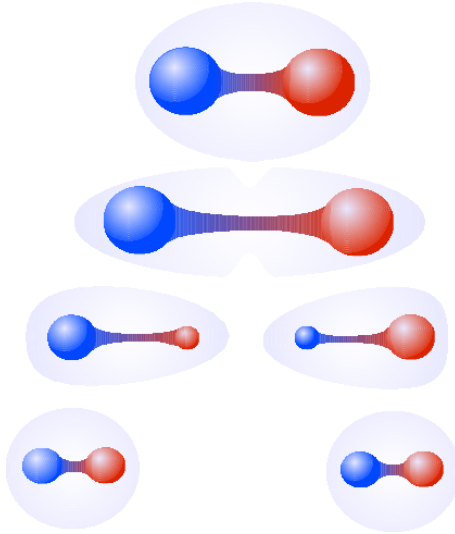
donde se pueden identificar términos que tienen distinto origen:

$$V_\beta \equiv 2m(1 - e^{-mr\beta}) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
V_\lambda \equiv & - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} \left( \frac{2s - 7m^2}{6m^2} + \frac{1}{3}S^2 \right) + \frac{\pi\lambda\delta(\vec{r})}{3m^2} \left( \frac{4m^2 - 2s}{m^2} + \frac{5}{2}S^2 \right) \\
& - \frac{3\lambda}{2m^2} L \cdot S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-mr}}{r} + \frac{\lambda}{2m^2} \left[ (S \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}S^2 \nabla^2 \right] \frac{e^{-mr}}{r}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En estas expresiones  $m$  es la masa del gluón,  $r$  el operador que representa la distancia entre los dos gluones,  $S = S_1 + S_2$  es el operador de espín total del sistema,  $L$  es el operador de momento angular orbital,  $\lambda$  es un parámetro indeterminado que regula la intensidad de las interacciones,  $\beta$  es otro parámetro indeterminado que podría, según el artículo, relacionarse con una escala característica del confinamiento, y  $s = 4m^2 + \mathcal{O}(v^2/c^2)$ . Aquí (y en todo el trabajo)  $\mathcal{O}(v^2/c^2)$  significa “términos de orden  $v^2/c^2$ ”, donde  $v$  es el operador de velocidad relativa entre las partículas y  $c$  es la velocidad de la luz.

Ambos potenciales (3.2) y (3.3) tienen interpretaciones físicas y bases teóricas distintas. De acuerdo con el artículo, el potencial (3.2) pretende modelar el fenómeno de confinamiento de los gluones: a distancia infinita  $V_\beta$  tiende a  $2m$ , que representa la energía necesaria para materializar un nuevo par de gluones que “apantallen” los colores de los gluones originales. En otras palabras, pretende simular el hecho de que al intentar separar o desligar completamente al estado, llegará un momento en que habremos inyectado suficiente energía al sistema como para crear dos gluones nuevos. Estos nuevos gluones se unirían a los originales formando como resultado dos glueballs, ambos de color neutro. Este proceso está representado de forma gráfica en la figura 3.1, aunque los colores en ella son meramente ilustrativos y no deben interpretarse de forma literal. El origen ma-



**Figura 3.1:** Posible representación gráfica del fenómeno de confinamiento.

temático para este potencial surge del modelo de Schwinger en dimensión  $d=1+1$  (una espacial y otra temporal) [39]. Dicho modelo es en realidad una versión simplificada de la electrodinámica cuántica (QED), pero se ha usado a lo largo de la historia como un prototipo para el estudio de QCD en mayores dimensiones, porque comparte algunas similitudes conceptuales, como un fenómeno de confinamiento o la generación de masa, y es matemáticamente más simple.

Según se afirma en el artículo, el potencial (3.3) tiene un origen diferente a (3.2). Surge de la *aproximación de Born* aplicada en un modelo de QCD que incluye gluones masivos mediante el agregado de un término de masa en el lagrangiano, y el añadido de nuevos campos escalares para mantener la invariancia de gauge [40, 41]. La aproximación de Born consiste en extraer un potencial de interacción entre partículas a partir de amplitudes de scattering, calculadas en teoría de perturbaciones al orden más bajo. Una deducción de  $V_\lambda$  es tratada en [42]. El potencial obtenido pretende modelar los siguientes aspectos fenomenológicos:

1. Interacción espín-espín: surge por los efectos de interacción entre los momentos cromomagnéticos asociados al espín de cada una de las dos partículas, que pueden pensarse en analogía a dos imanes interactuando entre sí.
2. Interacción espín-órbita: Para partículas cargadas eléctricamente hay una interpretación intuitiva y es que el momento magnético asociado al espín interactúa con el momento magnético generado por el movimiento orbital de la propia partícula cargada. En el caso de los gluones, hay un momento mag-

nético de color que cumple un rol análogo al eléctrico y genera este tipo de interacción.

3. Interacción de Yukawa: en teorías donde el campo de gauge es masivo se puede esperar un decaimiento exponencial en algunos de los términos del potencial. La inclusión de un término de masa en el lagrangiano, modifica los propagadores de la teoría y el potencial entre partículas (más adelante motivaremos con más rigor esta afirmación, basándonos en el modelo de Curci-Ferrari). En general a este tipo de potenciales se les llama *potencial de Yukawa*. Físicamente hablando, este comportamiento permite reproducir el hecho de que la interacción fuerte es de muy corto alcance, porque el potencial decae rápidamente con la distancia.

4. Término de Darwin ( $\delta(\vec{r})$ ): el término que involucra un delta de Dirac en  $r$  se suele llamar *término de Darwin*. Aparece como producto de las interacciones no-locales que resultan de las aproximaciones no relativistas, al hacer desarrollos perturbativos en  $v^2/c^2$ , y se deben a rápidas fluctuaciones cuánticas en el campo de la partícula. En este caso, el campo gluónico.

Los aspectos mencionados motivan y aportan una noción de los orígenes e interpretaciones de estos dos potenciales, que son unificados en la expresión (3.1) para constituir el potencial de interacción que define al modelo.

Para obtener el Hamiltoniano, hay que tener en cuenta también la energía cinética de las dos partículas. Para ello, decidimos posicionarnos en el sistema de referencia en el cual el centro de masas está en reposo. Definimos la *masa reducida*  $\mu$  y el operador de momento relativo  $p$  entre las partículas como:

$$\begin{aligned}\mu &\equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ p &\equiv \mu(v_1 - v_2) \equiv \mu v = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2},\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde  $m_1, m_2$  son las masas de las partículas involucradas,  $v_1$  y  $v_2$  son los operadores asociados a sus respectivas velocidades,  $v \equiv v_1 - v_2$ ,  $p_1 \equiv m_1 v_1$  y  $p_2 \equiv m_2 v_2$ . En nuestro caso, ambos gluones tienen igual masa  $m_1 = m_2 \equiv m$ , por lo que las definiciones (3.4) se reducen a:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{2} \\ p &= \frac{p_1 - p_2}{2}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Consideraremos que los glueballs están descritos por un régimen poco relativista, por lo que desarrollamos la energía cinética hasta primer orden en  $v^2/c^2$  (respecto del “orden cero”, que ya es de orden  $v^2/c^2$ ). En este sistema de referencia y bajo esta aproximación, el Hamiltoniano del modelo resulta:

$$\begin{aligned}
H &= 2m + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{p^4}{32\mu^3} + V_\beta + V_\lambda \\
&= 2m + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{p^4}{32\mu^3} + 2m(1 - e^{-mr\beta}) - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} \left( \frac{2s - 7m^2}{6m^2} + \frac{1}{3}S^2 \right) - \frac{3\lambda}{2m^2} L \cdot S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-mr}}{r} \\
&\quad + \frac{\pi\lambda\delta(\vec{r})}{3m^2} \left( \frac{4m^2 - 2s}{m^2} + \frac{5}{2}S^2 \right) + \frac{\lambda}{2m^2} \left[ (S \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}S^2\nabla^2 \right] \frac{e^{-mr}}{r},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

que pretende representar a un sistema de dos gluones que interactúan entre si mediante fuerzas de naturaleza fuerte, en un régimen poco relativista.

A través de este operador es posible explorar propiedades y fenómenos vinculados con el sistema en consideración. Una de las características esenciales que se pueden estudiar es el espectro de energías permitidas en el modelo. En este contexto el espectro de energías son los autovalores de los autoestados de  $H$ , y representan los niveles energéticos que podrían caracterizar a las glueballs. Estas cantidades podrían ser contrastadas con medidas experimentales y de simulaciones numéricas, y servir como referencia para la identificación de glueballs en la naturaleza, tarea que hasta el momento ha sido imposible de lograr. Esta es una de las principales razones por las que es importante investigar las predicciones sobre el espectro de glueballs en modelos fenomenológicos, y por ello es el tema central que abarca esta tesis. Al igual que en el artículo original, estudiaremos los niveles energéticos partiendo de la ecuación de Schrödinger, que parece un punto de partida razonable teniendo en cuenta que el modelo es en sí mismo una aproximación de bajas energías. El procedimiento utilizado en el artículo para el cálculo de los autoestados de  $H$  no resulta totalmente claro al lector, pero creemos que difiere del tratamiento perturbativo estándar de mecánica cuántica. Sin embargo, basándonos nuevamente en la naturaleza no relativista del modelo, es razonable pensar que algunos términos del Hamiltoniano estén suprimidos respecto a otros por factores de  $v^2/c^2$ , en cuyo caso se esperaría que un tratamiento perturbativo estándar funcionara correctamente.

En esta tesis decidimos partir desde este enfoque perturbativo para analizar, en una primera instancia, en qué medida dependen los resultados de esta elección, lo que nos aportará información sobre cuán consistentes son las aproximaciones no relativistas que sustentan a este modelo. Para ello, veremos si mediante este otro método y usando los mismos valores de los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  que se utilizan en el artículo, logramos reproducir

sus resultados. Si no fuera el caso, sería un indicio de que tratar en el Hamiltoniano como un desarrollo perturbativo no relativista (al menos para esos valores de  $\lambda$  y  $\beta$ ) podría ser cuestionable, aun si esto parecería ir, en principio, en contra de la fenomenología esperada. Otra posible opción podría ser que el modelo fuera incapaz de describir de forma razonable la física de glueballs a bajas energías, y esto podría manifestarse como una aparente contradicción entre la fenomenología esperada y los resultados.

En una segunda instancia, y teniendo en cuenta que actualmente contamos con datos actualizados de simulaciones en el lattice sobre el espectro de glueballs (con los que no contaban en el año de la publicación [33]), decidimos también variar los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  para determinar si algún par de valores  $\{\lambda, \beta\}$  es capaz de describir dichos datos con un grado razonable de correlación. De ser así, podría ser que el modelo describa de forma razonable algunos aspectos de QCD si se usan los parámetros adecuados.

También nos proponemos estudiar el espectro de glueballs en una modificación del modelo de Cornwall, que presentamos a continuación.

### 3.3. Modificación del modelo mediante un potencial lineal

Además del potencial (3.2) que se propone en el artículo para intentar modelar el fenómeno de confinamiento, existen otras opciones que han sido propuestas a lo largo de la historia. Una de las que ha tenido mayor aceptación en la comunidad científica, discutida en artículos como [43], propone la existencia de un potencial lineal entre partículas con color, como los gluones. Decidimos explorar también esta opción con miras a comparar con un modelo de referencia más comúnmente utilizado. Consideraremos entonces también una modificación del modelo de Cornwall que consiste en sustituir el potencial (3.2) por:

$$V_\beta = m^2 \beta r. \quad (3.7)$$

Bajo esta modificación, el Hamiltoniano resulta:

$$\begin{aligned} H = 2m + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{p^4}{32\mu^3} + V_\beta + V_\lambda = 2m + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{p^4}{32\mu^3} + m^2 \beta r - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} \left( \frac{2s - 7m^2}{6m^2} + \frac{1}{3} S^2 \right) \\ + \frac{\pi \lambda \delta(\vec{r})}{3m^2} \left( \frac{4m^2 - 2s}{m^2} + \frac{5}{2} S^2 \right) - \frac{3\lambda}{2m^2} L \cdot S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-mr}}{r} + \frac{\lambda}{2m^2} \left[ (S \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3} S^2 \nabla^2 \right] \frac{e^{-mr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para este modelo estudiaremos también si algún par  $\{\lambda, \beta\}$  es capaz de describir con buena correlación los datos del lattice.

## Capítulo 4

# Estados ligados no relativistas en teorías cuánticas con campos de gauge masivos

En teorías cuánticas de campos la cantidad de partículas no se conserva, porque las leyes de la relatividad permiten la conversión de materia en energía y viceversa. Como resultado, la descripción de los estados en términos de funciones de onda continuas, que caracterizan la evolución de los mismos, deja de tener sentido. Sin embargo, si nos encontráramos en un régimen en el que el número de partículas fuera conservado, la descripción del sistema en términos de funciones de onda cobraría sentido nuevamente, y con ello también la existencia de una ecuación que las rijan, como por ejemplo una ecuación de Schrödinger. Si el gluón tiene masa, la teoría de Yang-Mills Pura debería admitir un régimen de partículas conservadas en un régimen de bajas energías, donde la energía disponible no sea suficiente para crear nuevos gluones. <sup>1</sup>

En este capítulo investigaremos un método para estudiar estados ligados en teorías cuánticas con campos de gauge masivos (gluones en nuestro caso), en un régimen no relativista. Particularmente veremos cómo a partir de funciones de correlación es posible deducir una ecuación de Schrödinger bajo ciertas suposiciones, que además predice una interacción de Yukawa a orden dominante entre los gluones, al igual que en los modelos fenomenológicos con gluones masivos.

Basaremos estos cálculos en el modelo de Curci-Ferrari, que tiene mayor sustento por parte de las simulaciones del lattice, pero un procedimiento análogo también debería ser aplicable en el modelo de Cornwall para obtener del mismo modo una ecuación de Schrödinger y justificar los términos de Yukawa en su Hamiltoniano. De hecho, como se comentó en el capítulo 3, en el artículo original de J.M. Cornwall y A. Soni [33] afirman

---

<sup>1</sup>Igualmente para QCD, pero pidiendo que la energía no sea suficiente ni para crear gluones ni quarks.

haber hecho su propia deducción del potencial, basándose en la aproximación de Born (aunque no lo demuestran). Consideramos valioso complementarlo con otro punto de vista. Nos basaremos en la *ecuación de Bethe-Salpeter*, que a diferencia de la aproximación de Born, es un enfoque más general por ser no perturbativo.

En un caso ideal, si tanto el modelo de Curci-Ferrari como el modelo de Cornwall fueran una buena descripción de la física de QCD a bajas energías, se podría esperar que deduciendo el potencial entre gluones a partir del modelo de Curci-Ferrari se obtuviera el potencial que rige al modelo de Cornwall, o al menos un potencial con características similares. Sin embargo, en este trabajo no apuntamos a ello, y nos limitaremos a estudiar el orden dominante del potencial.

Partiremos desde algunos aspectos sobre la estructura de polos, o polología, de funciones de correlación a dos puntos, que enunciamos a continuación.

## 4.1. Polología de funciones de correlación

Consideremos un operador  $\Theta$  escalar bajo transformaciones de Lorentz y de gauge (por simplicidad). En teorías cuánticas de campos, una manera usual de descomponer funciones de correlación entre operadores  $\Theta(x)$  y  $\Theta(y)$  es la llamada *representación espectral de Källén–Lehmann* [44, 45]:

$$\int d^4r e^{ip \cdot r} \langle \Omega | T \{ \Theta(r) \Theta(0) \} | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \Theta(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \frac{1}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon}. \quad (4.1)$$

Aquí  $r \equiv x - y$  (se usó invariancia bajo traslaciones), el índice  $\lambda$  en la sumatoria recorre todos los posibles estados  $|\lambda_0\rangle$  con tri-momento nulo de la teoría, y que tienen los mismos números cuánticos que el operador  $\Theta$ . El factor  $m_{\lambda}$  representa la masa del estado  $|\lambda_0\rangle$ .

Esta descomposición resulta especialmente útil porque muestra que las masas de estados ligados se manifiestan como polos en las transformadas de Fourier de funciones de correlación.

Por otra parte, estos polos aparecen únicamente al tener en cuenta infinitos diagramas [45]. Esto es particularmente importante para nuestro análisis porque implica que, para poder estudiar estados ligados a partir de funciones de correlación, no podremos restringir la serie a un número finito de diagramas. Genéricamente hay que tener en cuenta todos, pero luego veremos que bajo ciertas suposiciones sobre la cinemática de los gluones, podría ser justificable restringirse a un subconjunto (aunque también infinito) de ellos, conocidos como diagramas “Ladder”, término que proviene de “escalera” en inglés.

Otro punto clave es que en un régimen no relativista en el que una descripción en términos de una ecuación de Schrödinger pueda ser válida, los residuos de los polos en la función de correlación aparecen factorizados como (o proporcionalmente a)  $\bar{\psi}_\lambda \psi_\lambda$ ,<sup>2</sup> donde  $\psi_\lambda$  es la función de onda del estado en cuestión. Además, si pensamos en las divergencias de la expresión (4.1) como polos en  $p_0$ , la ubicación de los mismos se da en  $p_0 = E_\lambda(p)$ , donde  $E_\lambda(p) \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2}$  es la energía del estado. Cada polo en la función de correlación aparece entonces factorizado como [46, 47, 48]:

$$\frac{C_\lambda \bar{\psi}_\lambda \psi_\lambda}{p_0 - E_\lambda(p)}, \quad (4.2)$$

donde agregamos un posible factor  $C_\lambda$  de proporcionalidad.

En resumen, se destacan dos puntos importantes en esta sección. El primero es que, con el fin de estudiar estados ligados, que se presentan como polos en la función de correlación, es necesario considerar una suma de infinitos diagramas de Feynmann en el desarrollo perturbativo de la misma. El segundo es que en un régimen no relativista las funciones de onda de los estados aparecen en los residuos de los polos de funciones de correlación.

En la siguiente sección definiremos el marco teórico en el cual trabajaremos para deducir la ecuación de Schrodinger y el potencial de Yukawa: el modelo de Curci-Ferrari<sup>3</sup>

## 4.2. Modelo de Curci-Ferrari

Como se ha comentado anteriormente en el capítulo 3, el modelo de Curci-Ferrari es un modelo fenomenológico de QCD o Yang-Mills que incluye gluones masivos, y que ha tenido considerable éxito a la hora de reproducir resultados del lattice, como los comportamientos observados en las figuras 2.2 y 2.3. [35, 36] Varios artículos han discutido las características de este modelo en profundidad. Una recopilación de gran parte de estos estudios se puede encontrar en [37]. Usaremos este marco teórico para complementar la motivación de la existencia de un potencial de Yukawa entre gluones, y la deducción de una ecuación de Schrödinger a bajas energías.

La densidad lagrangiana del modelo de Curci-Ferrari se obtiene a partir de Yang-Mills

<sup>2</sup>Aquí no hay una suma en  $\lambda$ . Simplemente es un índice que identifica un estado  $|\lambda\rangle$  de la teoría.

<sup>3</sup>Los resultados vistos en esta sección, y también la ecuación de Bethe-Salpeter son válidos en cualquier teoría de campos. En particular, en esta tesis nos interesa estudiar sus aplicaciones a modelos específicos.

fijada en el gauge de Lorenz mediante el procedimiento de Faddeev-Popov y el agregado de un término de masa para el gluón:

$$\mathcal{L}_{CF} \equiv \mathcal{L}_{FP} - \frac{m^2}{2} A_a^\mu A_\mu^a. \quad (4.3)$$

Aquí  $\mathcal{L}_{FP}$  es el lagrangiano de Faddeev-Popov en el gauge de Lorenz (ec. (2.15)),  $A_\nu^a$  son los campos del gluón y  $m$  es la masa de los gluones en este modelo.

Como modelo fenomenológico, no está claro como obtener este Lagrangiano desde primeros principios, pero se piensa que el término de masa  $\frac{m^2}{2} A_a^\mu A_\mu^a$  podría surgir como consecuencia del procedimiento de fijación de gauge correcto.

Las reglas de Feynman en este modelo son las mismas que en QCD, presentadas en la sección 2.5.1, con la única diferencia que hay que modificar el propagador del gluón con un termino de masa. El nuevo propagador gluónico es:

$$a, \mu \xrightarrow{k} b, \nu \quad \sim \quad G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

### 4.3. Función de correlación en aproximación Ladder

Motivaremos que bajo ciertas suposiciones, los diagramas dominantes en funciones de correlación en un régimen de glueballs no relativistas, son los diagramas “Ladder”, que son aquellos de la forma:

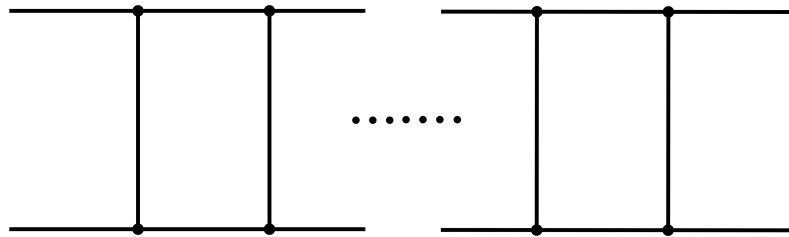


Figura 4.1: Diagramas Ladder

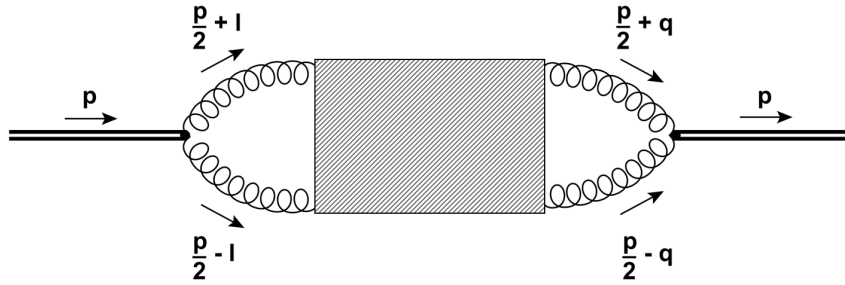
Según vimos en la sección 4.1, los estados que se presentan como polos en funciones de correlación tienen los mismos números cuánticos que los operadores  $\Theta$  que se insertan entre los estados de vacío  $|\Omega\rangle$ . Para tener en cuenta glueballs, partículas formadas por gluones, necesitamos operadores que estén compuestos por campos gluónicos  $A_\mu^a$  y que tengan los números cuánticos de las glueballs. Si el confinamiento también aplica para estas partículas, estas deben ser singletes de color, por lo que buscamos un operador que sea

invariante bajo la acción del grupo SU(3). La opción más simple es  $\Theta(x) = F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x)$ , que también es escalar bajo transformaciones de Lorentz.

La función de correlación que tendremos en cuenta entonces es, en el espacio de Fourier:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) F_{\eta\rho}^b(0) F_b^{\eta\rho}(0) \} | \Omega \rangle, \quad (4.4)$$

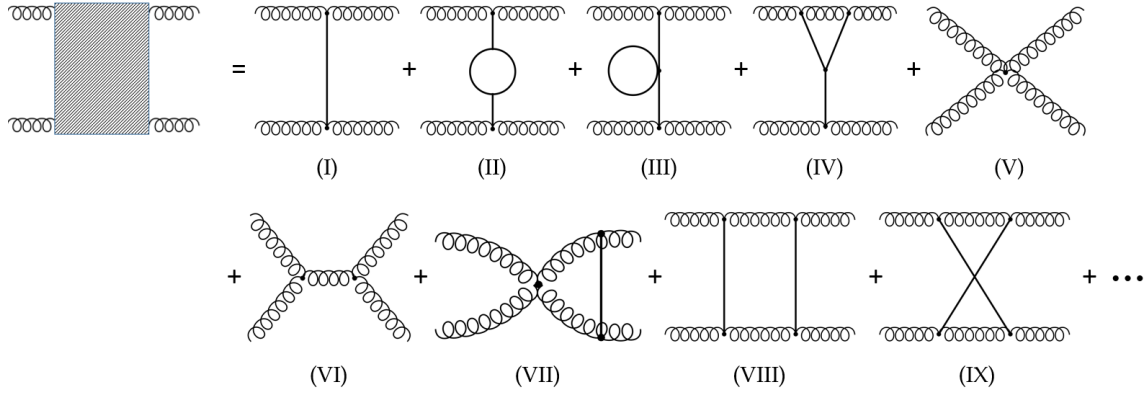
que se puede representar diagramáticamente de la siguiente manera <sup>4</sup>:



**Figura 4.2:** Representación diagramática de la función de correlación (4.4). El rectángulo rayado representa una suma de todos los infinitos diagramas que se puedan formar.

donde las líneas dobles en negrita representan un glueball de momento  $p$  y el rectángulo rayado representa una suma infinita de todos los diagramas posibles que se puedan formar. De forma genérica, esta suma incluye diagramas que involucran propagadores de gluones y de ghosts. Sin embargo, para este trabajo no hemos tenido en cuenta los ghosts. Aunque no lo hemos demostrado, trabajamos bajo la hipótesis de que su contribución es subdominante (como sucede en la aproximación de Born), por lo que los hemos despreciado. Teniendo esto en cuenta, el rectángulo rayado en la figura 4.2 se puede desarrollar como una suma de diagramas en la que únicamente contribuyen propagadores de gluones:

<sup>4</sup>Aquí se incluyen sólo los diagramas de orden dominante. El operador  $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$  también da lugar a términos con tres y cuatro gluones.



**Figura 4.3:** Algunas de las estructuras internas a nivel árbol y a un loop que contribuyen a la función de correlación (4.4).

En esta figura se muestran algunos de los diagramas posibles. Tanto las líneas en espiral como las líneas rectas son propagadores de gluones. Se representan de forma distinta por una razón que se especificará más adelante.

Siguiendo con la fenomenología esperada de partículas masivas, supondremos un régimen cinemático poco relativista para desarrollar estos diagramas. El análisis que haremos es análogo a algunos razonamientos discutidos en publicaciones como [46, 49] para QED, donde, en general, la aproximación Ladder es bien entendida debido a que el campo de gauge no tiene masa [45, 50]. Si el gluón tiene masa, la validez de esta aproximación no resulta evidente, y aunque no tenemos claro cómo demostrarlo desde principios fundamentales, creemos que un tratamiento análogo debería poder aplicarse también en QCD o Yang-Mills pura. Por esta razón impondremos una condición extra (detallada más adelante), que aunque más inusual, resulta esencial para poder lograr esta analogía. Veremos que, bajo estas premisas, la contribución principal a la función de correlación proviene del subconjunto de diagramas “Ladder”.

Como se mencionó en el capítulo 3, la consideración de un régimen poco relativista requiere que las energías de interacción y cinética relativa entre los dos gluones que constituyen al glueball sean mucho menores que sus masas. Entonces, si  $p = (p_0, \vec{p})$  es el cuadrimomento del glueball de los estados iniciales y finales en el diagrama de la figura 4.2, supondremos, en analogía con el formalismo de estados ligados en QED [46, 49]:

$$p_0 = 2m + m\mathcal{O}(\tilde{g}^4), \quad (4.5)$$

donde  $\tilde{g}$  es el parámetro de desarrollo de las series perturbativas, que introdujimos en la sección 2.5 y  $\mathcal{O}(\tilde{g}^4)$  significa “términos de orden  $\tilde{g}^4$ ”. Recordemos lo que indican los resultados del lattice (sección 2.7.1):  $\tilde{g}^2$  puede tomar como valor máximo  $\tilde{g}_{max}^2 \approx 0.36$ ,

por lo que  $(\tilde{g}_{max})^4 \approx \frac{1}{10}$ . Nuestra aproximación implica entonces que, como máximo, las energías de interacción y cinética relativa entre los gluones son del orden de  $\frac{1}{10}$  de la masa. Sin pérdida de generalidad podemos imponer también  $\vec{p} = 0$ , que equivale a elegir como sistema de referencia aquel en el que el centro de masas está en reposo. Bajo esta elección,  $p = (p_0, \vec{0})$ .

Dentro del esquema de aproximaciones no relativistas también supondremos que para algunos gluones intercambiados, la contribución dominante a los diagramas proviene de la región de energías y trimomentos de orden  $\tilde{g}^4$  y  $\tilde{g}^2$  respectivamente. En términos de diagramas de Feynman, esto se traduce en que algunas de las integrales en loops están dominadas principalmente por las regiones de integración que cumplen con estas aproximaciones cinemáticas no relativistas.

Además, con el fin de mantener un razonamiento análogo al que se usa en QED, donde las partículas ligadas tienen masa (electrones o protones) y las intercambiadas no (fotones), deberemos suponer que los gluones intercambiados en los diagramas tienen una masa  $\tilde{m}$  más pequeña que los otros, del orden de  $\tilde{m} = m\mathcal{O}(\tilde{g}^2)$ . Esto debe considerarse nada más que como un artilugio matemático al que recurrimos bajo la falta de un método riguroso para justificar desde primeros principios nuestros desarrollos.<sup>5</sup>

En resumen, el esquema de aproximaciones que utilizamos es el siguiente:

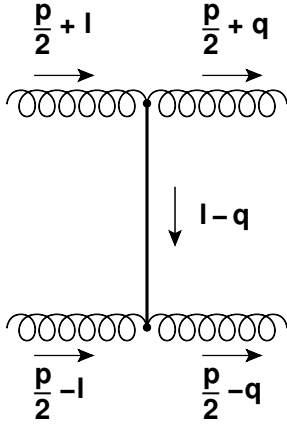
$$\begin{aligned}
 \text{(A) Cuadrimomento del glueball:} & \quad \begin{cases} p = (p_0, \vec{0}) \\ p_0 = 2m + m\mathcal{O}(\tilde{g}^4) \end{cases} \\
 \text{(B) Cuadrimomentos intercambiados:} & \quad \begin{cases} k = (k_0, \vec{k}) \\ k_0 = m\mathcal{O}(\tilde{g}^4) \\ |\vec{k}| = m\mathcal{O}(\tilde{g}^2) \end{cases} \\
 \text{(C) Masa de gluones intercambiados:} & \quad \tilde{m} = m\mathcal{O}(\tilde{g}^2)
 \end{aligned}$$

Estudiaremos, en términos de  $\tilde{g}$ , de qué orden son los diagramas que pueden contribuir a la función de correlación (4.2). Veremos que bajo este régimen algunos de ellos están “amplificados” respecto al conteo perturbativo típico, y por lo tanto son dominantes. Estudiaremos los diagramas de la figura 4.3 y luego generalizaremos el resultado. Como convención, no se incluirán los propagadores “iniciales” y “finales” de los diagramas, porque son comunes a todos ellos y su contribución es siempre la misma. El cuadrimomento del

---

<sup>5</sup>El hecho de que podamos deducir una ecuación de Schrödinger gobernada por un potencial de Yukawa a partir de esta premisa, podría respaldar la idea de que, de alguna manera, quizá sea una suposición razonable.

glueball es  $p$ , que respeta las relaciones (A) y el resto de cuádrimomentos  $(q, l, t)$  cumplen (B). Representaremos los propagadores  $G_{\mu\nu}^{ab}$  de masa  $m$  con líneas en espiral y los propagadores  $\tilde{G}_{\mu\nu}^{ab}$  de masa  $\tilde{m}$  con líneas rectas para diferenciarlos. Analicemos en profundidad el diagrama más sencillo posible para describir el tipo de razonamiento que seguimos.



Si no se incluyen los cuatro propagadores “iniciales” y “finales”, este diagrama está compuesto por un propagador  $\tilde{G}$  y dos vértices de tres gluones. La contribución de este diagrama es:

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(p/2+l, -p/2-q, q-l)\tilde{G}_{\mu_3\mu_4}^{a_3a_4}(l-q) \times V_{\mu_5\mu_6\mu_4}^{a_5a_6a_4}(p/2-l, -p/2+q, l-q)$$

Estudiamos de qué orden es esta expresión, desglosándola en sus componentes. Comencemos por los vértices:

**Figura 4.4:** Diagrama (I)

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(p/2+l, -p/2-q, q-l) = g f^{a_1a_2a_3} [\eta_{\mu_1\mu_2}(-p-q-l)_{\mu_3} + \eta_{\mu_2\mu_3}(p/2+2l+q)_{\mu_1} + \eta_{\mu_3\mu_1}(p/2+2q-l)_{\mu_2}]. \quad (4.6)$$

Estos siempre incluyen el factor  $g$  que, como se mencionó en la sección 2.5.1, al desarrollar la función de correlación siempre termina factorizándose en la combinación  $\frac{g\sqrt{3}}{4\pi} = \tilde{g}$ . Consideraremos entonces que el factor  $g$  contribuye  $\mathcal{O}(\tilde{g})$ . Además, los vértices siempre están contraídos con los propagadores contiguos, es decir que, al considerar  $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}$ , hay una suma implícita en los índices  $a_1, a_2, a_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Para estimar el orden que aporta el vértice al diagrama deberemos entonces simplemente considerar, de esa suma, el factor más grande (en valor absoluto), que en este caso son aquellos que incluyen a  $p_0 = 2m + \mathcal{O}(\tilde{g}^4)$ . La contribución de este vértice es entonces:  $\approx p_0\tilde{g} \approx 2m\mathcal{O}(\tilde{g}) + \mathcal{O}(\tilde{g}^3) \approx \mathcal{O}(\tilde{g})$ . El mismo razonamiento vale para el otro vértice.

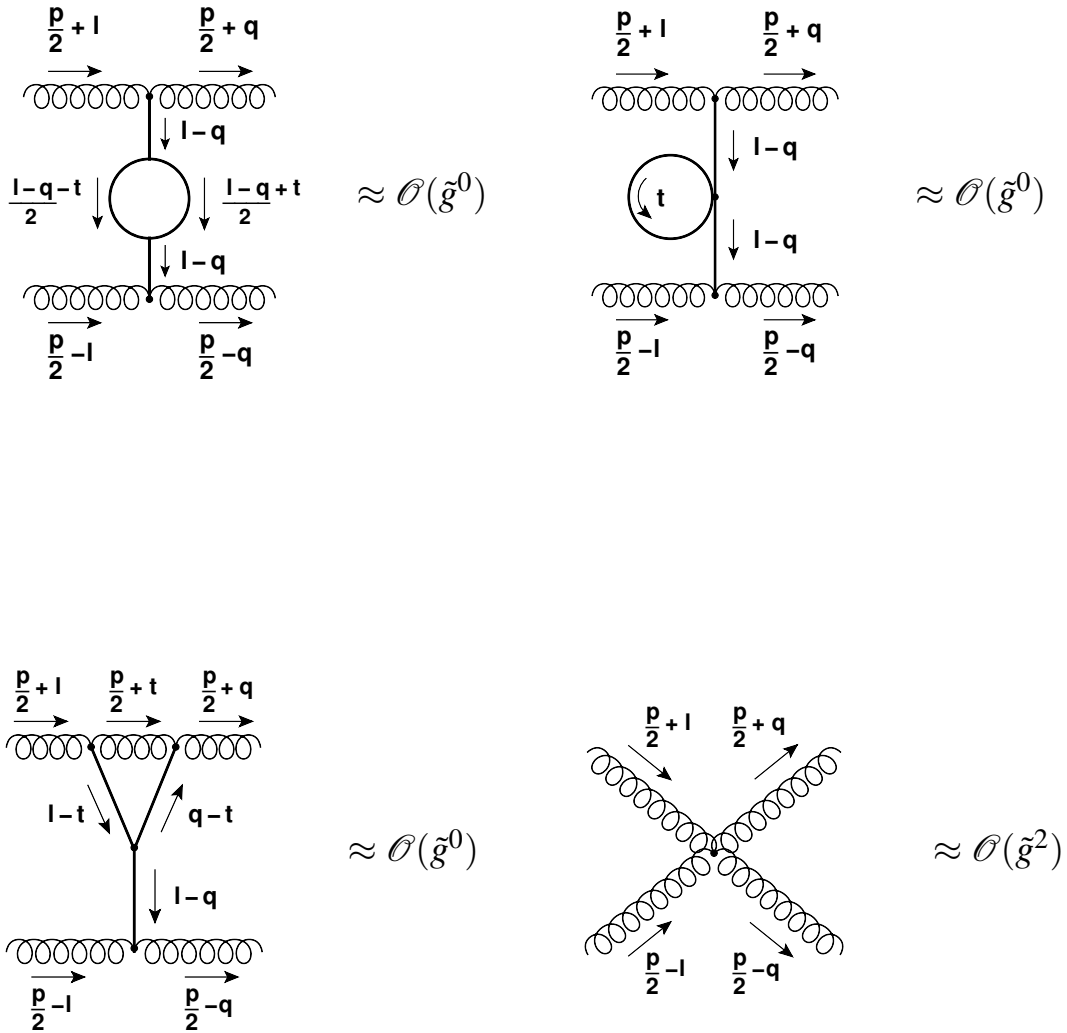
Analicemos el propagador  $\tilde{G}_{\mu_3\mu_4}^{a_3a_4}(l-q) = \frac{-i\delta^{a_3a_4}}{(l-q)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu_3\mu_4} - \frac{(l-q)_{\mu_3}(l-q)_{\mu_4}}{(l-q)^2} \right)$ . Al igual que el razonamiento anterior, por la contracción implícita en los índices hay que considerar los términos de mayor orden, que son aquellos donde  $\mu_3$  y  $\mu_4$  son índices espaciales. En ese caso:

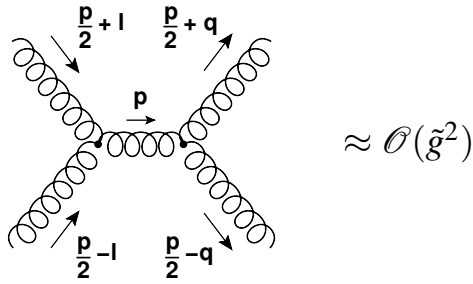
$$\begin{cases} \frac{(l-q)_i(l-q)_j}{(l-q)^2} = \frac{(l-q)_i(l-q)_j}{(l_0-q_0)^2 - (\vec{l}-\vec{q})^2} \approx \frac{\mathcal{O}(\tilde{g}^4)}{\mathcal{O}(\tilde{g}^4)} \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^0) \\ (l-q)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon = (l_0-q_0)^2 - (\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) \end{cases}$$

De esta manera, el propagador  $\tilde{G}$  contribuye:  $\approx \frac{1}{\mathcal{O}(\tilde{g}^4)} \mathcal{O}(\tilde{g}^0) = \mathcal{O}(\tilde{g}^{-4})$ . El orden del diagrama (I) resulta entonces:

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(p/2 + l, -p/2 - q, q - l) \tilde{G}_{\mu_3 \mu_4}^{a_3 a_4}(l - q) V_{\mu_5 \mu_6 \mu_4}^{a_5 a_6 a_4}(p/2 - l, -p/2 + q, l - q) \\ \approx \mathcal{O}(\tilde{g}) \mathcal{O}(\tilde{g}^{-4}) \mathcal{O}(\tilde{g}) \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^{-2}).$$

Siguiendo este mismo tipo de razonamientos es posible deducir el orden del resto de diagramas de la figura 4.3, y ver que esas estructuras son subdominantes respecto a la estructura de la figura 4.4. En dicho análisis hay que ser más cuidadosos porque algunos loops pueden estar dominados por la región relativista. Genéricamente hay que considerar todas las opciones posibles y quedarse con el orden mayor. Los resultados son:



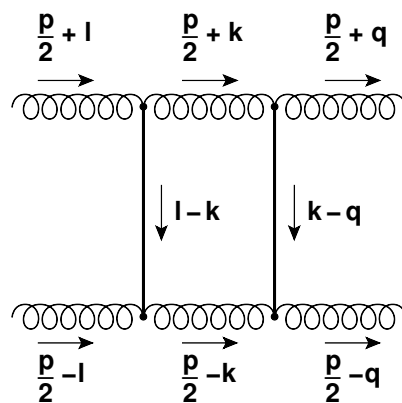


Generalizando, concluimos que los diagramas dominantes en la función de correlación (4.4) son aquellos que están constituidos a partir de estructuras de la forma del diagrama (I). Podemos distinguir entre dos maneras distintas en las que se pueden disponer estas estructuras para formar diagramas más complejos: “cruzando” líneas internas (ejemplo: diagrama IX de la figura 4.3) o sin “cruzarlas” (ejemplo diagrama VIII de la figura 4.3).

Desde el punto de vista del análisis que hemos usado hasta ahora para estimar órdenes, estos dos diagramas son equivalentes, lo que nos llevaría a concluir que ambos son de orden  $\tilde{g}^{-2}$  y que, por lo tanto, habría que tenerlos en cuenta por igual. Sin embargo, un análisis más profundo en base a la estructura de polos de los diagramas, permite determinar que esto no es exactamente así, y que el diagrama con líneas internas cruzadas es subdominante respecto al otro.

### Diagramas Ladder

Consideremos el siguiente diagrama:



**Figura 4.5:** Diagrama(VIII). Ladder a un loop.

La estructura de polos del diagrama queda completamente determinada por los propagadores. Para el siguiente análisis seremos explícitos con la estructura matemática de los mismos, pero no con la de los vértices porque no aportan polos. Llamemos

$M_{\mu_2\mu_4\mu_1\mu_1\mu_2}^{a_2a_4a_1a_1a_2}(p, l, q)$  a este diagrama, sin tener en cuenta los propagadores “iniciales” y “finales”. Siguiendo las reglas de Feynman:

$$\begin{aligned}
M_{\mu_2\mu_4\mu_1\mu_1\mu_2}^{a_2a_4a_1a_1a_2}(p, l, q) &= \int d^4k V_{\mu_2\mu_5\mu_7}^{a_2a_5a_7} \left( \frac{p}{2} + l, k - l, -\frac{p}{2} - k \right) V_{\mu_4\mu_6\mu_9}^{a_4a_6a_9} \left( \frac{p}{2} - l, l - k, -\frac{p}{2} + k \right) \\
&\times V_{\mu_8\mu_{11}\mu_{13}}^{a_8a_{11}a_{13}} \left( \frac{p}{2} + k, q - k, -\frac{p}{2} - q \right) V_{\mu_{10}\mu_{12}\mu_{15}}^{a_{10}a_{12}a_{15}} \left( \frac{p}{2} - k, k - q, -\frac{p}{2} + q \right) \\
&\times \frac{-i\delta^{a_7a_8}}{\left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu_7\mu_8} - \frac{\left(\frac{p}{2} + k\right)_{\mu_7} \left(\frac{p}{2} + k\right)_{\mu_8}}{\left(\frac{p}{2} + k\right)^2} \right) \frac{-i\delta^{a_9a_{10}}}{\left(\frac{p}{2} - k\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&\times \left( \eta_{\mu_9\mu_{10}} - \frac{\left(\frac{p}{2} - k\right)_{\mu_9} \left(\frac{p}{2} - k\right)_{\mu_{10}}}{\left(\frac{p}{2} - k\right)^2} \right) \frac{-i\delta^{a_5a_6}}{(l - k)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu_5\mu_6} - \frac{(l - k)_{\mu_5} (l - k)_{\mu_6}}{(l - k)^2} \right) \\
&\times \frac{-i\delta^{a_{11}a_{12}}}{(k - q)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \left( \eta_{\mu_{11}\mu_{12}} - \frac{(k - q)_{\mu_{11}} (k - q)_{\mu_{12}}}{(k - q)^2} \right). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Resolveremos explícitamente la integral en  $k_0$  por el teorema de residuos, suponiendo, como ya fue mencionado antes, que la contribución dominante de la integral viene de la región de cuatrimomentos que respeta las aproximaciones (A) y (B). Para aplicar este teorema es necesario conocer la posición en  $k_0$  de los polos de la ecuación 4.7, que quedan determinados por los denominadores de los propagadores:

1.  $\left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2 + i\epsilon = 0$
2.  $\left(\frac{p}{2} - k\right)^2 - m^2 + i\epsilon = 0$
3.  $(l - k)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon = 0$
4.  $(k - q)^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon = 0$

Tratemos una por una cada igualdad.

1.  $\left(\frac{p_0}{2} + k_0\right)^2 - \left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k}\right)^2 - m^2 + i\epsilon = 0 \iff k_0 \approx \pm \sqrt{\left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k}\right)^2 + m^2} - \frac{p_0}{2} \mp i\epsilon$ . Usando las aproximaciones y haciendo un desarrollo de Taylor de la raíz, resulta  $k_0 \approx \pm \frac{\left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k}\right)^2}{2m} + (-m \pm m) - \mathcal{O}(\tilde{g}^4) \mp i\epsilon$ , que implica dos polos:

- a)  $k_0^{(a)} \approx + \frac{\left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k}\right)^2}{2m} - \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon$ .
- b)  $k_0^{(b)} \approx - \frac{\left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{k}\right)^2}{2m} - 2m - \mathcal{O}(\tilde{g}^4) + i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - 2m + i\epsilon$ .

De estos dos, solo  $k_0^{(a)}$  contribuye a la integral, porque es el único que cumple con las aproximaciones cinemáticas en consideración ( $k_0$  de orden  $\tilde{g}^4$ ).

2. Es análogo al punto 1, cambiando el signo del cuatrivector  $k$ . El polo que contribuye es:

- c)  $k_0^{(c)} \approx - \frac{\left(\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k}\right)^2}{2m} + \mathcal{O}(\tilde{g}^4) + i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) + i\epsilon$ .

3. En este caso  $k_0 \approx \mp \sqrt{\left(\vec{l} - \vec{k}\right)^2 + \tilde{m}^2} + l_0 \pm i\epsilon \approx \mp \mathcal{O}(\tilde{g}^2) \pm i\epsilon$ . Esta expresión implica dos polos. Ninguno contribuye a la integral porque están fuera de la región de aproximaciones que están siendo consideradas.

4. Este punto es completamente análogo al anterior, bajo los cambios  $k \rightarrow -k$  y  $l \rightarrow -q$ , por lo que estos polos tampoco contribuyen a la integral.

De los puntos 1.  $\rightarrow$  4., los únicos polos que podrían contribuir a la integral  $\int dk_0$ , son entonces a) y c). Pero, como uno de ellos está por encima del eje real ( $+i\varepsilon$ ) y el otro por debajo ( $-i\varepsilon$ ), siempre es posible elegir un contorno de integración que contenga a uno de ellos en su interior y deje al otro fuera. Para integrar solo sobre el eje real, el contorno elegido debe ser tal que la integral fuera del eje real se anule. Según (4.7) esto sucede para  $|k_0| \rightarrow \infty$ , lo que indica que es equivalente cerrar el contorno de integración por encima o por debajo del eje real. Podemos elegir cualquiera de las dos opciones. Cerrémoslo por debajo, dejando al polo a) en su interior. Por el teorema de residuos, integrar en  $k_0$  es entonces calcular el residuo del polo a).

Por simplicidad, reescribamos temporalmente la ecuación (4.7) de una manera más compacta:

$$\begin{aligned} M_{\mu_2\mu_4\mu_{11}\mu_{12}}^{a_2a_4a_{11}a_{12}}(p, l, q) &= \int dk_0 \frac{1}{\left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2 + i\varepsilon} F(k_0, p, l, q) \\ &= \int dk_0 \frac{1}{(k_0 - k_0^{(a)})(k_0 - k_0^{(b)})} F(k_0, p, l, q). \end{aligned}$$

En esta expresión mantuvimos explícitamente el denominador que aporta los polos a) y b), y el resto del integrando es absorbido dentro de la definición de  $F(k_0, p, l, q)$ . Ocultamos los índices de Lorentz y de  $\mathfrak{su}(3)$  de la función  $F$  para alivianar la notación. Usemos esta expresión para calcular la integral mediante el teorema de residuos:

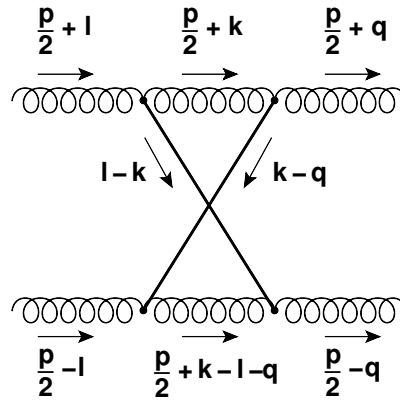
$$\begin{aligned} M_{\mu_2\mu_4\mu_{11}\mu_{12}}^{a_2a_4a_{11}a_{12}}(p, l, q) &= \text{Res}^{k_0^{(a)}} \left( \frac{1}{(k_0 - k_0^{(a)})(k_0 - k_0^{(b)})} F(k_0, p, l, q) \right) \\ &= \lim_{k_0 \rightarrow k_0^{(a)}} (k_0 - k_0^{(a)}) \frac{2\pi i}{(k_0 - k_0^{(a)})(k_0 - k_0^{(b)})} F(k_0, p, l, q) \\ &= \frac{2\pi i}{k_0^{(a)} - k_0^{(b)}} F(k_0^{(a)}, p, l, q). \end{aligned}$$

El denominador  $k_0^{(a)} - k_0^{(b)}$  es de orden  $\tilde{g}^0$  porque contiene un factor  $2m$ . Luego, es fácil ver que  $F(k_0^{(a)}, p, l, q)$  es de orden  $\tilde{g}^{-2}$ , teniendo en cuenta que  $k_0^{(a)} \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4)$  y que  $\vec{k} \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^2)$ . Concluimos entonces que el diagrama de la figura 4.5 efectivamente es de orden  $\tilde{g}^{-2}$ , al igual que el diagrama (I) de la figura 4.4, de modo que tienen que ser ambos tenidos en cuenta. De forma general, agregar cada vez más elementos como el del diagrama (I) de la figura 4.4, no altera el orden del diagrama. Esto es así

porque agregar ese tipo de elementos implica agregar siempre términos de la forma  $\int d^4k G(p+k)G(p-k)\tilde{G}(k-q)V_3(p)V_3(p) \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^{10})\mathcal{O}(\tilde{g}^{-4})\mathcal{O}(\tilde{g}^{-4})\mathcal{O}(\tilde{g}^{-4})\mathcal{O}(\tilde{g})\mathcal{O}(\tilde{g}) \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^0)$ . Por ende, independientemente de la cantidad de propagadores, todos los diagramas Ladder contribuyen  $\approx \mathcal{O}(\tilde{g}^{-2})$  y deben ser tenidos en cuenta en la función de correlación de la figura 4.2.

Veamos que para los diagramas con propagadores “cruzados” esto no es así.

#### Diagramas con propagadores “cruzados”



**Figura 4.6:** Diagrama (IX), con propagadores “cruzados” a un loop.

Aquí los propagadores de momentos  $l - k$  y  $k - q$  no se intersectan en un vértice, sino que pasan uno “por encima” del otro.

Recurriremos por analogía a los resultados obtenidos para el diagrama Ladder con el fin de simplificar este análisis. Los dos propagadores internos  $\tilde{G}_{\mu_5\mu_6}^{a_5a_6}(l - k)$  y  $\tilde{G}_{\mu_{11}\mu_{12}}^{a_{11}a_{12}}(k - q)$  son exactamente iguales a los que ya fueron tratados en el diagrama Ladder, cuyos polos no contribuían al teorema de los residuos por estar fuera de nuestro régimen de aproximaciones. Solo hace falta estudiar los polos de los propagadores  $G_{\mu_7\mu_8}^{a_7a_8}(\frac{p}{2} + k)$  y  $G_{\mu_9\mu_{10}}^{a_9a_{10}}(\frac{p}{2} + k - l - q)$ . A diferencia del diagrama Ladder recién estudiado, en este, el signo del cuadrivector  $k$  es el mismo en ambos propagadores. Como consecuencia, los dos polos que cumplen con el esquema de aproximaciones consideradas quedan del mismo lado del eje real. Esto permite que si se cierra el contorno de integración por el lado opuesto, ninguno de los polos queda contenido en su interior, y haciendo uso del teorema de residuos, la integral  $\int dk_0$  da cero al orden de aproximaciones que estamos considerando. Veámoslo. Las igualdades que determinan la posición de los polos son:

$$1. \left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2 + i\epsilon = 0.$$

$$2. \left(\frac{p}{2} + k - l - q\right)^2 - m^2 + i\epsilon = 0.$$

1. Una expresión igual se analizó en el diagrama Ladder. Aporta un único polo dentro de nuestro esquema de aproximaciones:

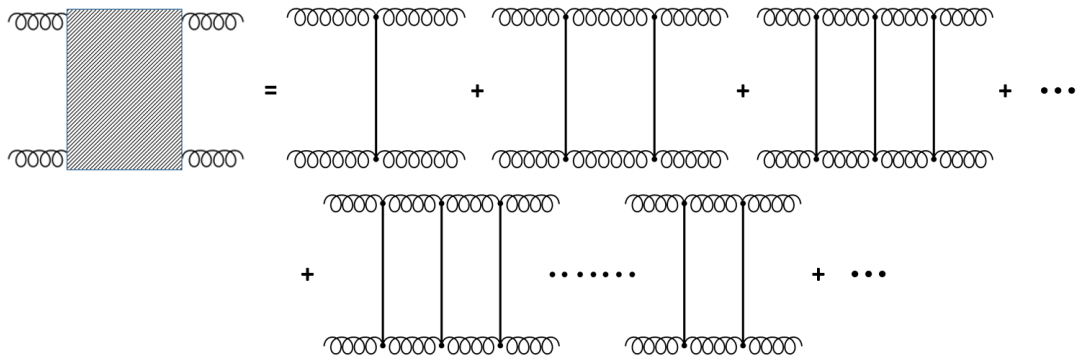
$$a) k_0^{(a)} \approx +\frac{(\frac{p}{2} + \vec{k})^2}{2m} - \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon.$$

2. Este caso es análogo pero bajo el cambio  $k \rightarrow k - l - q$ . Dentro de nuestras aproximaciones aporta el siguiente polo:

$$b) k_0^{(b)} \approx +\frac{(\frac{p}{2} + \vec{k} - \vec{l} - \vec{q})^2}{2m} + l_0 + q_0 - \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon \approx \mathcal{O}(\tilde{g}^4) - i\epsilon.$$

Ambos polos se encuentran debajo del eje real porque tienen parte imaginaria negativa ( $-i\epsilon$ ), y por lo tanto su contribución es subdominante respecto a los diagramas Ladder.

Concluimos de este análisis que bajo las suposiciones (A), (B) y (C), que pretenden reproducir un régimen de aproximaciones poco relativistas, y despreciando las contribuciones de ghosts, los diagramas dominantes en la función de correlación (Ec. (4.4)) son los Ladder. Esto significa que la figura 4.3 se reduce a:

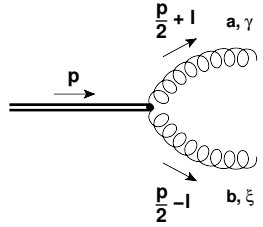


**Figura 4.7:** Diagramas que contribuyen a orden dominante, dentro de nuestras aproximaciones, a la función de correlación representada en la figura 4.3

Esta manera de aproximar la función de correlación se suele llamar “aproximación Ladder”. A partir de aquí, veamos cómo deducir la ecuación de Bethe-Salpeter, que nos permitirá deducir una ecuación de Schrödinger con un potencial de Yukawa.

## 4.4. Ecuación de Bethe-Salpeter para glueballs en modelo de Curci-Ferrari y en aproximación Ladder

Como primer punto para esta sección necesitamos deducir el vértice glueball-gluón-gluón<sup>6</sup>, que aparece en la función de correlación de la figura 4.3. El resultado de dicho cálculo, que se puede leer en el apéndice 1, es:



$$\equiv \delta^{ab} \tilde{v}_{\gamma\xi} \left( \frac{P}{2} + l, \frac{P}{2} - l \right) = \delta^{ab} \left( \left( \frac{P}{2} + l \right)_{\gamma} \left( \frac{P}{2} - l \right)_{\xi} - \left( \frac{P}{2} + l \right) \cdot \left( \frac{P}{2} - l \right) \delta_{\gamma\xi} \right).$$

En la figura 4.8 desarrollamos la función de correlación (4.4) como una suma de diagramas en la aproximación Ladder. En este desarrollo, se pueden reconocer estructuras diagramáticas que se repiten diagrama a diagrama de forma iterativa. El primer y segundo diagrama comparten la estructura marcada en rojo como  $\tilde{M}_{(0)}$  (omitimos los índices de Lorentz y de  $\mathfrak{su}(3)$ ), el segundo y el tercero comparten el recuadro verde marcado como  $\tilde{M}_{(1)}$ , y así sucesivamente:  $\tilde{M}_{(n-1)}$  siempre es un subdiagrama dentro de  $\tilde{M}_{(n)}$ . De forma genérica, el diagrama compuesto por  $n$  propagadores internos de masa  $\tilde{m}$  (o equivalentemente,  $n+1$  loops), que llamaremos  $\tilde{M}_{(n)}(p)$  (fig. 4.9), incluye una estructura interna  $\tilde{M}_{(n)}$  que a su vez esta compuesta por una anterior,  $\tilde{M}_{(n-1)}$ . Se puede observar este diagrama en la figura 4.9 y la expresión para el mismo en la ecuación 4.8.

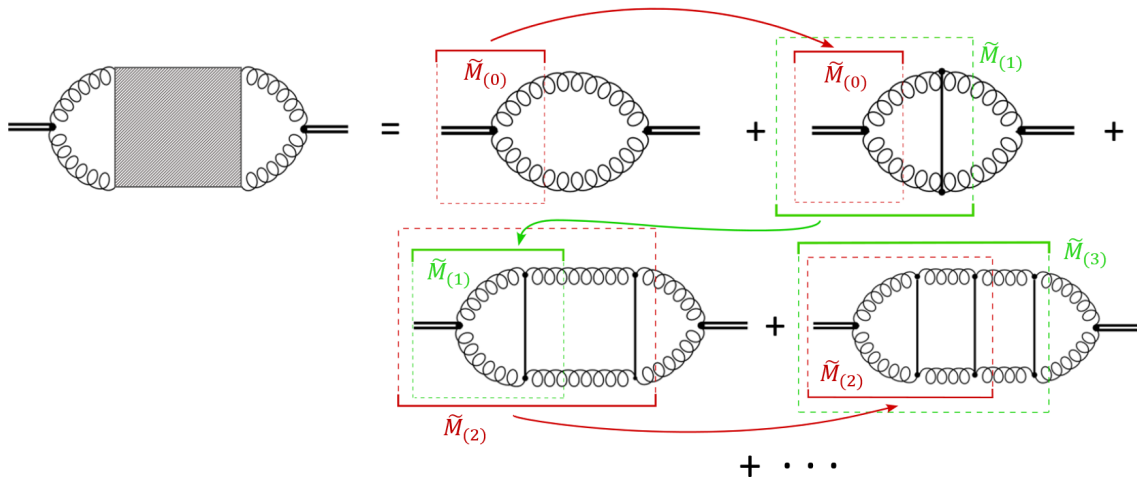


Figura 4.8

<sup>6</sup>También hay vértices glueball - 3 gluones o glueball - 4 gluones, que no se consideran aquí pues son de mayor orden en  $\tilde{g}$

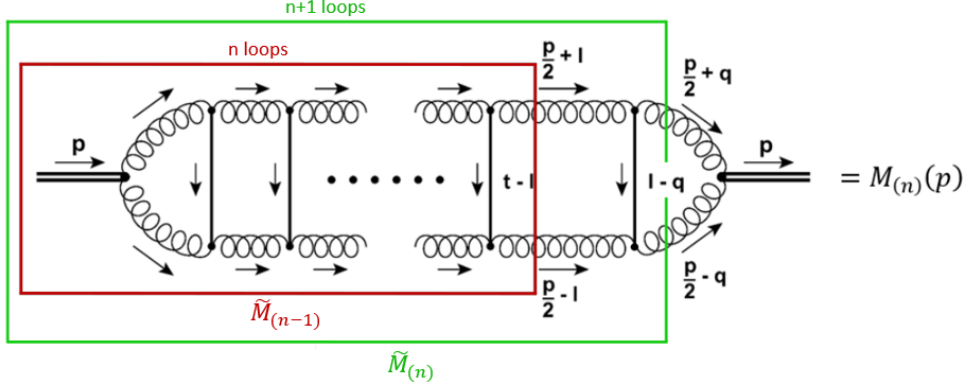


Figura 4.9

$$\begin{aligned}
M_{(n)}(p) &= \int d^4 q \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) G_{\gamma\theta}^{ag} \left(\frac{P}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}^{bh} \left(\frac{P}{2} - q\right) \tilde{v}_{\theta\lambda}^{gh} \left(\frac{P}{2} - q, -\frac{P}{2} + q\right) \\
&= \int d^4 l d^4 q \tilde{M}_{(n-1)\alpha\beta}^{de}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}^{daeb}(p, l, q) G_{\gamma\theta}^{ag} \left(\frac{P}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}^{bh} \left(\frac{P}{2} - q\right) \tilde{v}_{\theta\lambda}^{gh} \left(\frac{P}{2} - q, -\frac{P}{2} + q\right),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde se definió:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\gamma\beta\xi}^{daeb}(p, l, q) &\equiv G_{\alpha\rho}^{dc} \left(\frac{P}{2} + l\right) G_{\beta\sigma}^{ef} \left(\frac{P}{2} - l\right) V_{\rho\theta\gamma}^{cas} \left(\frac{P}{2} + l, q - l, -\frac{P}{2} - q\right) \tilde{G}_{\theta\lambda}^{su}(l - q) \\
&\quad \times V_{\sigma\lambda\xi}^{fub} \left(\frac{P}{2} - l, l - q, -\frac{P}{2} + q\right),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

y también se usó:

$$\tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) \equiv \int d^4 l \tilde{M}_{(n-1)\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q). \tag{4.10}$$

Es conveniente contraer de forma explícita todos los factores de “color” en la expresión 4.8. Para ello, manifestamos explícitamente todas las estructuras tensoriales con índices en el álgebra  $\mathfrak{su}(3)$  mediante las siguientes redefiniciones:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{ab} &= \delta^{ab} G_{\mu\nu}, \\
\tilde{G}_{\mu\nu}^{ab} &= \delta^{ab} \tilde{G}_{\mu\nu}, \\
V_{\mu\nu\lambda}^{abc} &= f^{abc} V_{\mu\nu\lambda}, \\
S_{\mu\nu\lambda\xi}^{abcd} &= f^{abu} f^{ucd} S_{\mu\nu\lambda\xi}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Bajo estas redefiniciones se puede ver que  $\tilde{M}_{(n-1)\mu\nu}^{ab}$  siempre se puede factorizar, sacando explícitamente los factores que vienen de las contracciones en los índices del álgebra,

como una función  $\tilde{M}_{(n)\mu\nu}$  que solo tiene índices de Lorentz, y un factor  $(N_c)^n \delta^{ab}$  :

$$\tilde{M}_{(n)\mu\nu}^{ab} = \tilde{M}_{(n)\mu\nu} (N_c)^n \delta^{ab}. \quad (4.12)$$

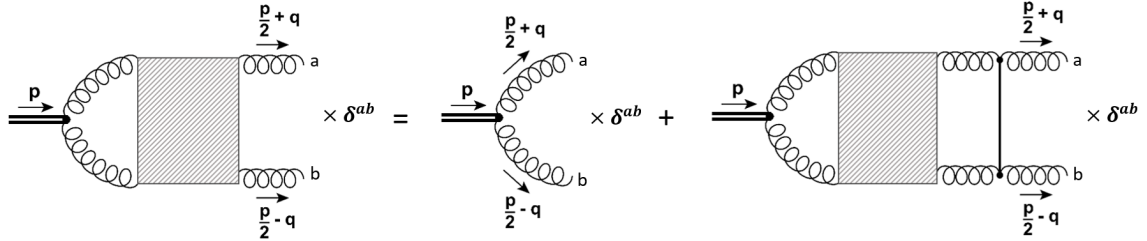
Aquí  $N_c = 3$  para  $SU(3)$ . La ecuación (4.8) se reescribe como:

$$\begin{aligned} M_{(n)}(p) &= (N_c)^n (N_c^2 - 1) \int d^4 q \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) G_{\gamma\theta}(\frac{p}{2} + q) G_{\xi\lambda}(\frac{p}{2} - q) \tilde{v}_{\theta\lambda}(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q) \\ &= (N_c)^n (N_c^2 - 1) \int d^4 l d^4 q \tilde{M}_{(n-1)\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) G_{\gamma\theta}(\frac{p}{2} + q) G_{\xi\lambda}(\frac{p}{2} - q) \\ &\quad \times \tilde{v}_{\theta\lambda}(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para obtener la función de correlación desarrollada en la figura 4.8, debemos sumar todos los diagramas  $M_{(n)}(p)$ . Haciendo esta suma y usando la ecuación recursiva (4.10) junto con (4.13), se puede obtener una ecuación para  $\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (N_c)^n \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q)$ , que llamamos ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea [46, 49, 50] (deducción en apéndice 2). Esta ecuación es:

$$\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) = \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) + N_c \int d^4 l \tilde{M}_{\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q). \quad (4.14)$$

Diagramáticamente se puede representar como en la figura 4.10.



**Figura 4.10:** Representación diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea

donde estamos siguiendo la convención de que la parte Lorentziana ( $G_{\mu\nu}$ ) de los propagadores “finales” (de momentos  $\frac{p}{2} + q$  y  $\frac{p}{2} - q$ ) no están siendo incluida, pero si sus factores de color ( $\delta^{ab}$ ).

Para llegar a lo que llamaremos ecuación de Bethe-Salpeter homogénea [46, 47], recurrimos a los resultados que fueron mencionados en la sección 4.1: la masa del glueball debe presentarse como un polo con residuo proporcional a  $\bar{\psi}\psi$ , donde  $\psi$  es la función de onda del estado (Ec. (4.2)). De esta manera,  $\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q)$  es algo de la forma:

$$\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) = \frac{\bar{\Psi}(p)\Psi(q)}{p_0 - E_p} h_{\gamma\xi}(p, q) + \dots, \quad (4.15)$$

donde  $h_{\gamma\xi}(p, q)$  es alguna función desconocida pero regular en  $p_0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$ , con  $M$  la masa del glueball. El resto de términos en la suma también son regulares en  $p_0 = E_p$ . Usando (4.15) en (4.14):

$$\left( \frac{\bar{\Psi}(p)\Psi(q)}{p_0 - E_p} h_{\gamma\xi}(p, q) + \dots \right) = \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) + N_c \int d^4l \left( \frac{\bar{\Psi}(p)\Psi(l)}{p_0 - E_p} h_{\alpha\beta}(p, l) + \dots \right) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q). \quad (4.16)$$

Tomamos el residuo de esta expresión, es decir,  $\lim_{p_0 \rightarrow E_p} (p_0 - E_p) \tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q)$ . La función  $\tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q)$  y todos los términos restantes en la sumatoria son regulares en  $p_0 = E_p$ , por lo que tienden a cero al tomar este límite, y los denominadores  $\frac{1}{p_0 - E_p}$  se cancelan con el factor que viene del residuo. Se obtiene:

$$\lim_{p_0 \rightarrow E_p} \bar{\Psi}(p)\Psi(q) h_{\gamma\xi}(p, q) = \lim_{p_0 \rightarrow E_p} N_c \int d^4l \bar{\Psi}(p)\Psi(l) h_{\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q). \quad (4.17)$$

$\bar{\Psi}(p)$  es un factor común a ambos lados y se puede cancelar. Además, redefinimos la función  $\Psi(q)$  sacando explícitamente factores  $p_0 - E_{q^+} - E_{q^-}$  y absorbiendo  $h_{\mu\nu}$ . Es decir,  $\Psi_{\mu\nu}(p, q) \equiv \Psi(q) h_{\mu\nu}(p, q) (p_0 - E_{q^+} - E_{q^-})$ . Aquí  $E_{q^\pm} = \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} \pm \vec{q})^2 + m^2}$ , con  $m$  la masa del gluón. La ecuación (4.17) queda:

$$\lim_{p_0 \rightarrow E_p} \Psi_{\gamma\xi}(p, q) (p_0 - E_{q^+} - E_{q^-}) = \lim_{p_0 \rightarrow E_p} N_c \int d^4l \Psi_{\alpha\beta}(p, l) (p_0 - E_{l^+} - E_{l^-}) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q). \quad (4.18)$$

Esta es la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea en la aproximación Ladder, deducida a partir de la función de correlación (4.4) en el modelo de Curci-Ferrari.

A continuación usaremos este resultado para deducir una ecuación de Schrödinger y la existencia de un potencial de Yukawa entre los gluones en este modelo fenomenológico.

#### 4.4.1. Ecuación de Schrödinger y potencial de Yukawa a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter

En esta sección mostraremos que en el límite no relativista, la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea se reduce a una ecuación de Schrödinger, en este caso mediada por un potencial de Yukawa [45].

Partimos de la ecuación (4.18). Desarrollamos  $S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q)$  explícitamente a orden dominante en  $\tilde{g}$ , lo que nos da una primera aproximación al potencial. Si se quisiera deducir también la estructura fina e hiperfina del mismo, sería necesario ir a los ordenes siguientes en  $S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q)$  (ec. (4.9)), donde la operatoria se vuelve considerablemente

más compleja. Nos limitamos al orden dominante en esta tesis.<sup>7</sup>

Ya hemos visto que las contracciones con los propagadores son  $\approx \mathcal{O}(\tilde{g}^{-4})$  a orden dominante en  $\tilde{g}$ , y las contracciones con el vértice  $\approx \mathcal{O}(\tilde{g})$ . Desarrollamos por Taylor todas las componentes de los propagadores y vértices hasta esos órdenes (ver apéndice 3) para obtener finalmente  $S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q)$  al orden dominante:

$$\begin{cases} S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \approx 0 & \text{si cualquier índice } \alpha, \gamma, \beta \text{ o } \xi \text{ es cero} \\ S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \approx \frac{i4m^2 g^2 \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\beta\xi}}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2 + i\epsilon} \frac{1}{(\frac{p}{2} + l)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(\frac{p}{2} - l)^2 - m^2 + i\epsilon} & \text{si } \alpha, \gamma, \beta, \xi \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.19)$$

Bajo esta aproximación, la ecuación de Bethe-Salpeter (4.18) queda:

$$\begin{aligned} & \psi_{ij}(p_0 = E_p, q) \times (E_p - E_{q^+} - E_{q^-}) \\ & = N_c \int d^4 l \psi_{ij}(p, l) \frac{E_p - E_{l^+} - E_{l^-}}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2 + i\epsilon} \frac{i4m^2 g^2}{(\frac{p}{2} + l)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(\frac{p}{2} - l)^2 - m^2 + i\epsilon} \Bigg|_{p_0=E_p} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Resolvemos la integral en  $l_0$  mediante el teorema de residuos. Al igual que vimos anteriormente, hay sólo dos polos que están dentro de nuestro régimen de aproximaciones, y son los únicos que podrían contribuir al teorema de residuos. Uno de ellos tiene parte imaginaria positiva y el otro negativa, de modo que cerrando el contorno de integración encima del eje real, el único polo que contribuye es el que proviene del denominador  $(\frac{p}{2} - l)^2 - m^2 + i\epsilon$ , que es:

$$l_0^{(0)} \equiv \frac{p_0}{2} - m - \frac{1}{2m} \vec{l}^2 + i\epsilon. \quad (4.21)$$

El denominador  $(\frac{p}{2} - l)^2 - m^2 + i\epsilon$  a orden dominante se puede escribir como  $(\frac{p}{2} - l)^2 - m^2 + i\epsilon \approx 2m(l_0^{(0)} - l_0)$ , factor que se cancelará al tomar el residuo. Además, el otro denominador a orden dominante es  $(\frac{p}{2} + l)^2 - m^2 + i\epsilon \approx \frac{p_0^2}{4} + p_0 l_0 - \vec{l}^2 - m^2 + i\epsilon$ . Integrando

---

<sup>7</sup>Vale la pena mencionar que el análisis al siguiente orden también fue hecho. Sin embargo, el resultado obtenido fue el mismo que a orden dominante, por lo que se concluye que la estructura fina se manifiesta recién a ordenes todavía mas altos en el desarrollo perturbativo.

en  $l_0$  mediante el teorema de residuos se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \psi_{ij}(p_0 = E_p, q) \times (E_p - E_{q^+} - E_{q^-}) \\
&= \frac{N_c}{2m} \int d^3 l \psi_{ij}(p_0 = E_p, l_0 = l_0^{(0)}, \vec{l}) \times \frac{(E_p - E_{l^+} - E_{l^-})}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2} \frac{(i4m^2 g^2)(-2\pi i)}{\frac{p_0^2}{4} + \frac{p_0^2}{2} - mp_0 - p_0 \frac{\vec{l}^2}{2m} - \vec{l}^2 - m^2} \Big|_{p_0=E_p} \\
&= N_c \int d^3 l \psi_{ij}(p_0 = E_p, l_0 = l_0^{(0)}, \vec{l}) \frac{(4\pi m g^2)}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2} \frac{(E_p - E_{l^+} - E_{l^-})}{\frac{3p_0^2}{4} - mp_0 - p_0 \frac{\vec{l}^2 - m^2}{2m} - \vec{l}^2 - m^2} \Big|_{p_0=E_p}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Manipulemos el último término dentro de la integral y definamos algunas cantidades:  $E_{l^\pm} = \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} \pm \vec{l})^2 + m^2} = \sqrt{\vec{l}^2 + m^2} \approx m + \frac{\vec{l}^2}{2m} \equiv E_l$ , donde utilizamos el referencial del centro de masas ( $\vec{p} = 0$ ) y en la última igualdad hicimos un desarrollo de Taylor a orden  $\tilde{g}^4$ . El numerador  $E_p - E_{l^+} - E_{l^-}$  se reescribe como  $E_p - E_{l^+} - E_{l^-} = E_p - 2E_l = E_p - 2m - \frac{\vec{l}^2}{m}$ . Se define la energía de ligadura como la diferencia entre la masa del glueball y las masas de los dos gluones que lo constituyen:

$$E_p - 2m = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} - 2m = M - 2m \equiv E_b, \tag{4.23}$$

de modo que el numerador queda  $E_p - E_{l^+} - E_{l^-} = (E_b - \frac{\vec{l}^2}{m})$ . Por otro lado, usando la definición de  $E_b$  y despreciando términos de orden  $\tilde{g}^8$ , el denominador queda:  $\frac{3p_0^2}{4} - mp_0 - p_0 \frac{\vec{l}^2}{2m} - \vec{l}^2 - m^2 \Big|_{p_0=E_p} \approx 2mE_b - 2\vec{l}^2 = 2m(E_b - \frac{\vec{l}^2}{m})$ , y la ecuación (4.22) resulta:

$$\psi_{ij}(E_p, q)(E_b - \frac{\vec{q}^2}{m}) = -2\pi g^2 N_c \int d^3 l \psi_{ij}(E_p, l_0^{(0)}, \vec{l}) \frac{1}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2}. \tag{4.24}$$

Tomando la transformada de Fourier de esta expresión, definiendo:

$$\psi_{ij}(r) \equiv \int d^3 q \psi_{ij}(E_p, q) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}. \tag{4.25}$$

Se obtiene (deducción detallada en apéndice 4):

$$(E_b + \frac{\nabla^2}{m}) \psi_{ij}(r) = -4\pi^3 g^2 N_c \psi_{ij}(r) \frac{e^{-mr}}{r}, \tag{4.26}$$

que es la ecuación de Schrödinger con masa reducida  $\mu \equiv \frac{m}{2}$  y con un potencial de Yukawa

con un potencial  $V(r) = -4\pi^3 g^2 N_c \frac{e^{-mr}}{r}$  entre los gluones:

$$E_b \psi_{ij}(r) = \left( -\frac{\nabla^2}{2\mu} - 4\pi^3 g^2 N_c \frac{e^{-mr}}{r} \right) \psi_{ij}(r). \quad (4.27)$$

La función de onda  $\psi_{ij}(r)$  corresponde al estado ligado.

Concluimos que a partir de ciertas aproximaciones y en un régimen no relativista en una teoría cuántica de campos, es posible recuperar, a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter a orden dominante, una descripción del sistema en términos de una ecuación de Schrödinger. En particular, dedujimos que a orden dominante los gluones son mediados por un potencial de Yukawa.

El tratamiento en sí fue desarrollado en el modelo de Curci-Ferrari, pero una deducción análoga debería ser aplicable también en el modelo de Cornwall para hallar su potencial a partir las teorías de campo que lo sustentan.

## Capítulo 5

# Niveles de energía de glueballs en modelos fenomenológicos

En el capítulo anterior nos centramos en motivar y dar una noción de como una teoría cuántica de campos puede admitir una descripción usual mediante una ecuación de Schrödinger en un régimen de partículas no relativistas. También sirvió para deducir un potencial de interacción en un modelo con gluones masivos, a partir de técnicas más generales que las que fueron utilizadas en el artículo original [33]. Basamos nuestro desarrollo en un resultado no perturbativo conocido como la ecuación de Bethe-Salpeter, bajo ciertas premisas y aproximaciones. Si bien el análisis fue elemental porque no consideramos las correcciones finas e hiperfinas al potencial, fue útil para apoyar la existencia de un potencial de Yukawa entre gluones y mostró como, al menos en principio, se podrían deducir correcciones a dicho potencial.

En este capítulo retomaremos el estudio de los niveles de energía del Hamiltoniano (3.6) del modelo de J.M. Cornwall y A. Soni, y de una modificación al mismo (ec. (3.8)), a partir de técnicas de mecánica cuántica usual, basadas en la ecuación de Schrödinger.

Al final del capítulo 3 se comentó qué, basándonos en la naturaleza no relativista de estos modelos, es razonable pensar que podría ser válido un tratamiento perturbativo para el cálculo de los niveles de energía alrededor del potencial de Yukawa. Teniendo esto en cuenta, trataremos los términos  $\frac{p^2}{2\mu} + 2m(1 - e^{-mr}) - \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r}$  del Hamiltoniano (3.6) y  $\frac{p^2}{2\mu} + m^2 \beta r - \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r}$  del Hamiltoniano (3.8) como términos de orden dominante, y el resto como correcciones perturbativas (pensadas como un desarrollo en  $\frac{v^2}{c^2}$  y en  $\tilde{g}^2$ ) a esos términos. Siguiendo con este razonamiento, también resulta razonable aproximar el factor  $s = 4m^2 + \mathcal{O}(v^2/c^2)$  que aparece en (3.6) y (3.8), por  $s \approx 4m^2$ , porque el otro término contribuye como una corrección sobre las propias correcciones, por lo que es mucho más

pequeño. Teniendo en cuenta estas consideraciones, los Hamiltonianos se pueden escribir como:

$$H = 2m + \frac{p^2}{2\mu} + V_0 + H^{(p)} \equiv H^{(0)} + H^{(p)}, \quad (5.1)$$

donde definimos  $V_0$  como  $V_0 \equiv V_\beta - \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r}$ , donde  $V_\beta$  es (3.2) o (3.7) dependiendo del modelo. También definimos el Hamiltoniano sin correcciones, o de orden cero, como  $H^{(0)} \equiv 2m + \frac{p^2}{2\mu} + V_0$ , y la corrección perturbativa  $H^{(p)}$  al Hamiltoniano como:

$$H^{(p)} \equiv -\frac{p^4}{32\mu^3} + V_\lambda + \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r} = -\frac{p^4}{32\mu^3} - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} \frac{1}{3} S^2 + \frac{\pi\lambda \delta(\vec{r})}{3m^2} \left( -4 + \frac{5}{2} S^2 \right) \\ - \frac{3\lambda}{2m^2} L \cdot S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-mr}}{r} + \frac{\lambda}{2m^2} \left[ (S \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3} S^2 \nabla^2 \right] \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (5.2)$$

Los niveles de energía permitidos por el modelo consistirán en la suma de las contribuciones de  $H^{(0)}$  y de  $H^{(p)}$ . La contribución dominante serán los niveles de energía provenientes del Hamiltoniano  $H^{(0)}$ , que dependen del valor del momento angular orbital  $L$  y posiblemente de algún número cuántico adicional, que denotaremos con  $n$ . Llamaremos a estas energías momentáneamente como  $E_{n,L}^{(0)}$ . Las perturbaciones  $H^{(p)}$  introducen correcciones subdominantes a  $E_{n,L}^{(0)}$ , que dependen también de otros números cuánticos como el espín  $S$ , dividiendo a los niveles  $E_{n,L}^{(0)}$  en nuevos subniveles  $E_{n,L,S,\dots} \equiv E_{n,L}^{(0)} + E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$ .

Para calcular  $E_{n,L}^{(0)}$  resolveremos numéricamente la ecuación de Schrödinger con los Hamiltonianos  $H^{(0)}$ , lo que nos dará las contribuciones dominantes a las energías de los estados ligados. Además, también obtendremos numéricamente las funciones de onda  $\psi(\vec{r})$  de esos estados, que serán necesarias luego para el cálculo de  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$ . Para estas últimas, hay que diagonalizar el operador  $H^{(p)}$  en cada subespacio de estados de  $H^{(0)}$  en donde  $E_{n,L}^{(0)}$  presente degeneración, y los autovalores son exactamente  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$ . Determinar el espectro de glueballs consta entonces de dos partes: el cálculo de  $E_{n,L}^{(0)}$  y de  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$ . Un ejemplo de este tipo de cálculos se puede leer el capítulo XII de [51] donde se calcula el espectro fino e hiperfino del átomo de hidrógeno, con la diferencia de que ese caso puede resolverse analíticamente.

Centrémonos primero en estudiar los aspectos analíticos necesarios para el cálculo de  $E_{n,L}^{(0)}$ .

## 5.1. Ecuación de Schrödinger en potencial central

La ecuación de Schrödinger para  $H^{(0)}$  es:

$$H^{(0)}\psi(\vec{r}) = \left( \frac{1}{2\mu}p^2 + V_0(r) \right)\psi(\vec{r}) = \left( -\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) \right)\psi(\vec{r}) = E^{(0)}\psi(\vec{r}), \quad (5.3)$$

donde aquí se usó que la acción del operador de momento  $p$  sobre la función de onda es  $p\psi = i\nabla\psi$  y elegimos el sistema de unidades donde  $\hbar = c = 1$ . Desarrollando el laplaciano en coordenadas esféricas e identificando el momento angular  $L$ , se puede escribir  $\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{r^2}L^2$ . Además escribiremos explícitamente la dependencia de  $\psi$  en las coordenadas esféricas. La ecuación (5.3) queda:

$$\left( -\frac{1}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{2\mu r^2}L^2 + V_0(r) \right)\psi_{n,L^2}(r, \theta, \phi) = E_{n,L^2}^{(0)}\psi_{n,L^2}(r, \theta, \phi), \quad (5.4)$$

donde también reescribimos  $E^{(0)} \rightarrow E_{n,L^2}^{(0)}$  y  $\psi \rightarrow \psi_{n,L^2}$  para hacer explícita la dependencia de la energía y las funciones de onda en el módulo del momento angular orbital, y en algún posible número cuántico adicional  $n$  que introducimos porque podría haber más de una solución a esta ecuación para un mismo valor de  $L^2$ .

Por completitud, y a efectos de definir notaciones, recordemos cómo resolver esta ecuación (ver capítulo VII de [52]): por simetría de rotación, todos los operadores que involucran únicamente a  $r$ , conmutan con  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ . A su vez, las tres componentes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  del operador de momento angular conmutan también con  $L^2$ . Como consecuencia cualquier operador que dependa únicamente de  $r$  conmutará con  $L^2, L_1, L_2$  y  $L_3$ . Como  $V_0$  es un potencial central para cualquiera de los dos  $V_\beta$  ((3.2) o (3.7)) posibles, cumple con estas relaciones. Por otro lado,  $p^2$  también conmuta con todas las componentes de  $L$ . En consecuencia,  $H^{(0)}$  conmuta con  $L^2, L_1, L_2$  y  $L_3$ , y en resumen:

$$\begin{cases} [L_j, H^{(0)}] = 0 & \forall j \in \{1, 2, 3\} \\ [L^2, H^{(0)}] = 0 \\ [L_j, L^2] = 0 & \forall j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (5.5)$$

Si además tenemos en cuenta que las componentes  $L_j$  no conmutan entre sí, estas relaciones implican que existe una base del espacio de estados  $\mathcal{E}_r$  de  $H^{(0)}$ , compuesto por las funciones propias comunes a  $H^{(0)}, L^2$  y a alguna de las tres componentes de  $L$ . Como es usual, elegimos a  $L_3$ . En esta base de funciones propias  $\psi$  comunes a  $H^{(0)}, L^2$  y  $L_3$  se

cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} L^2 \psi_{n,l,m_l} = l(l+1) \psi_{n,l,m_l} \\ L_3 \psi_{n,l,m_l} = m_l \psi_{n,l,m_l} \\ H^{(0)} \psi_{n,l,m_l} = \left( -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} l(l+1) + V_0(r) \right) \psi_{n,l,m_l} = E_{n,l}^{(0)} \psi_{n,l,m_l} \end{cases} \quad (5.6)$$

donde  $l$  es un número entero y positivo tal que  $l(l+1)$  es el valor propio de  $L^2$ , y  $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$  es el valor propio de  $L_3$ . Además renombramos el índice  $L^2 \rightarrow l$  en las funciones y en la energía, porque  $l$  determina por completo a los posibles valores de  $L^2$ . También agregamos un nuevo subíndice  $m_l$  pues la segunda ecuación implica que las funciones de onda dependen también de este número.

El cálculo de las funciones de onda  $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$  se reduce entonces a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (5.6). Es un resultado conocido que cualquier función que cumpla las últimas dos ecuaciones en (5.6) se puede desarrollar en una base de la forma:

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi), \quad (5.7)$$

donde  $Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$  son los *armónicos esféricos*, y describen la dependencia angular de las funciones de onda bajo cualquier potencial central. Las funciones  $R_{n,l}(r)$  dependen de la forma específica del potencial y deben ser determinadas. Sustituyendo (5.7) en la tercera ecuación de (5.6), se llega a:

$$\left( -\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} l(l+1) + V_0(r) \right) R_{n,l}(r) = E_{n,l}^{(0)} R_{n,l}(r), \quad (5.8)$$

que es la *ecuación radial de Schrödinger*. Nos basaremos en ella para obtener numéricamente las funciones  $R_{n,l}(r)$  y por lo tanto  $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$ .

Reescribimos esta ecuación de un modo que resulta conveniente. Se definen funciones  $u_{n,l}(r)$  tal que  $R_{n,l}(r) = \frac{1}{r} u_{n,l}(r)$ . En términos de ellas, la ecuación queda [52]:

$$\left( -\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2\mu r^2} l(l+1) + V_0(r) \right) u_{n,l}(r) = E_{n,l}^{(0)} u_{n,l}(r). \quad (5.9)$$

Observemos que, escrita de esta manera, (5.9) es análoga a una ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula de masa  $\mu$  en un potencial  $\frac{1}{2\mu r^2} l(l+1) + V_0(r)$ , que es relativamente simple de resolver numéricamente.

A esta ecuación hay que agregarle una condición extra para asegurar el comportamiento adecuado de las soluciones en  $r = 0$ . Para ello hay que imponer que en un entorno

infinitesimal centrado en el origen, las soluciones se comportan como [52]: <sup>1</sup>

$$u_{n,l}(r \rightarrow 0) \approx r^{l+1}, \quad (5.10)$$

donde  $l$  es el número asociado al momento angular orbital.

Por último, las funciones de onda  $\psi_{n,l,m_l}$  deben estar normalizadas, lo cual implica que también  $u_{n,l}$  lo estén:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)|^2 r^2 dr d\Omega = \int_0^\infty r^2 |R_{n,l}(r)|^2 dr \int_{S^2} |Y_l^{m_l}(\theta, \phi)|^2 d\Omega \\ &= \int_0^\infty |rR_{n,l}(r)|^2 dr = \int_0^\infty |u_{n,l}(r)|^2 dr. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aquí, en la penúltima igualdad se usó que los armónicos esféricos están normalizados en las variables  $\theta$  y  $\phi$ .

Para hallar los niveles de energía a orden dominante  $E_{n,l}^{(0)}$  y las funciones de onda  $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$  es necesario entonces resolver la ecuación (5.9) bajo las condiciones (5.10) y (5.11). Abordamos este problema numéricamente. Los detalles de la metodología y la resolución numérica se presentan más adelante en el capítulo 6. Por el momento, continuemos con el análisis teórico y centrémonos en encontrar expresiones analíticas para las correcciones  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$  a las energías, suponiendo las  $E^{(0)}$  y las  $\psi$  conocidas.

## 5.2. Cálculo analítico de las correcciones a las energías

Para calcular los autovalores de  $H^{(p)}$  buscaremos una base en la que este operador sea diagonal y luego calcularemos sus elementos de matriz. Comencemos separando el Hamiltoniano perturbativo  $H^{(p)}$  en  $H^{(p_i)} \equiv \frac{\lambda}{2m^2} (S \cdot \nabla)^2 \frac{e^{-mr}}{r}$  y en el resto de términos que no involucran a  $(S \cdot \nabla)^2$ , que llamaremos  $H^{(p_{ii})}$ . Además reescribimos  $L \cdot S$  en función del momento angular total, que se define como  $J \equiv L + S$ , de modo que  $L \cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$ . También calculamos explícitamente el laplaciano y la derivada  $\frac{\partial}{\partial r}$  en el Hamiltoniano, reescribimos  $\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$  y reordenamos términos. Entonces:

$$H^{(p)} = H^{(p_i)} + H^{(p_{ii})}, \quad (5.12)$$

<sup>1</sup>El laplaciano en coordenadas esféricas no está bien definido en  $r = 0$ , por lo que no cualquier solución a (5.4) es necesariamente una solución a (5.3). Para asegurarse que sí lo sea, las funciones  $R(r)$  deben ser suficientemente regulares en el origen. La condición (5.10) cumple esa función.

con:

$$H^{(p_i)} \equiv -\frac{p^4}{8\mu^3} + \frac{\lambda \delta(r)}{12m^2 r^2} \left( -4 + \frac{5}{2} S^2 \right) + \frac{3\lambda}{4m^2} (J^2 - L^2) \frac{e^{-mr}}{r^3} (mr + 1) - \lambda S^2 \frac{e^{-mr}}{r} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4m^2 r^2} (mr + 1) \right) \quad (5.13)$$

$$H^{(p_{ii})} \equiv \frac{\lambda}{2m^2} (S \cdot \nabla)^2 \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (5.14)$$

Estudiaremos (5.13) y (5.14) por separado porque requerirán tratamientos matemáticos distintos, por lo que también resultará conveniente separar a las energías  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$  en 2:

$$E_{n,L,S,\dots}^{(p)} = E_{n,L,S,\dots}^{(p_i)} + E_{n,L,S,\dots}^{(p_{ii})} \quad (5.15)$$

Empecemos diagonalizando  $H^{(p_i)}$  para calcular las correcciones  $E_{n,L,S,\dots}^{(p_i)}$ .

### 5.2.1. Perturbaciones $H^{(p_i)}$ y sus correcciones $E^{(p_i)}$ a las energías

Todos los términos en (5.13) dependen exclusivamente de los operadores  $p^2$ ,  $L^2$ ,  $S^2$ ,  $J^2$  y/o de funciones del operador distancia  $r$ . Estudiemos las relaciones de conmutación entre operadores. Para empezar  $L$  solo actúa en las variables angulares y  $S$  actúa solo en variables de espín, por lo que  $L^2$ ,  $S^2$ ,  $J^2$ ,  $L_3$ ,  $S_3$  y por lo tanto también  $J_3$ , conmutan con el operador  $r$  y con cualquier función que solo dependa de este. A su vez,  $S^2$  y  $S_j$  conmutan con  $L^2$ ,  $L_i$  y con  $p^2 \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$  por la misma razón que recién. Además, como se cumple que  $[S^2, S_j] = 0$  y  $[L^2, L_i] = 0 \forall i, j$ , entonces  $[S^2, J^2] = 0$ ,  $[S^2, J_3] = 0$ ,  $[L^2, J^2] = 0$  y  $[L^2, L_3] = 0$  (porque  $J^2 = S^2 + L^2 + 2L \cdot S$  y  $J_3 = S_3 + L_3$ ). No es difícil probar que también  $[L_j, p^2] = 0 \forall j$ , de modo que  $L^2$ ,  $J^2$  y  $J_3$  conmutan con  $p^2$ . Por último,  $[J^2, J_3] = 0$  pero  $J_3$  no conmuta con  $J_1$  ni con  $J_2$ . Este conjunto de relaciones implica que existe una base de autoestados común a  $L^2$ ,  $S^2$ ,  $J^2$  y  $J_3$  que diagonalizan a la expresión (5.13). Por el mismo tipo de razonamientos se puede concluir que también diagonalizan a  $H^{(0)}$ . De manera análoga a como se definieron para  $L^2$  y  $L_3$  en (5.6), se definen los autovalores de  $S^2$  como  $s(s+1)$ , los de  $J^2$  como  $j(j+1)$  ( $j \in \{|l-s|, |l-s+1|, \dots, l+s\}$ ) y los de  $J_3$  como  $m_j$  ( $m_j \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ ). En base a estas definiciones denotaremos a los elementos de la base recién mencionada como  $\{|n, l, s, j, m_j\rangle\}$ . Aquí, el índice  $n$  es heredado de las soluciones a (5.4). Todos los términos en (5.13) son diagonales en esta

<sup>2</sup>Más adelante veremos cuáles son exactamente los números que figuran en los subíndices  $n, L, S, \dots$

base, por lo que calcular las energías  $E_{n,L,S,\dots}^{(p)}$  se reduce a calcular los elementos de matriz  $\langle n, l, s, j, m_j | H^{(p_i)} | n, l, s, j, m_j \rangle$ . En esta expresión se observan explícitamente los números cuánticos de los que podrían depender las energías, de modo que a priori sería razonable escribirlas como  $E_{n,L,S,\dots}^{(p_i)} \rightarrow E_{n,l,s,j,m_j}^{(p_i)}$ . Sin embargo, si bien el observable  $J_3$  es diagonal en esta base,  $H^{(p_i)}$  realmente no depende de él. Esto significa que hay degeneración en  $m_j$ , es decir que para  $n, l, s$  y  $j$  fijos, todos los valores de  $m_j$  dan la misma energía. Nos restringiremos entonces a escribir simplemente  $E_{n,L,S,\dots}^{(p_i)} \rightarrow E_{n,l,s,j}^{(p_i)}$ . Bajo esta notación:

$$E_{n,l,s,j}^{(p_i)} = \langle n, l, s, j, m_j | H^{(p_i)} | n, l, s, j, m_j \rangle. \quad (5.16)$$

Luego veremos que esta base también diagonaliza a  $H^{(p_{ii})}$  y por eso es que tiene sentido usarla, aunque en ese caso es considerablemente más difícil de probar la diagonalidad.

A continuación procederemos a calcular los elementos (5.16). El objetivo es poder escribirlos en función de las soluciones  $\psi_{n,l,m_l}$  al sistema de ecuaciones (5.6). Estas funciones están escritas a partir de la base de autoestados de  $L^2$  y  $L_3$ , o equivalentemente también se pueden pensar como escritas a partir de la base  $|n, l, s, m_l, m_s\rangle = |n, l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$  de autoestados de  $L^2$ ,  $L_3$ ,  $S^2$  y  $S_3$  porque  $H^{(0)}$  también conmuta con las variables de espín. Entonces, para poder escribir las energías  $E_{n,l,s,j}^{(p_i)}$  en términos de  $\psi_{n,l,m_l}$ , deberemos escribir la base  $\langle n, l, s, j, m_j |$  que diagonaliza  $H^{(p_i)}$  en términos de la base  $|n, l, s, m_l, m_s\rangle$ . Estas dos se relacionan mediante coeficientes conocidos, que son la proyección de los elementos de una base sobre la otra, denominados *coeficientes de Clebsh-Gordan*:

$$C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} \equiv \langle n, l, s, m_l, m_s | n, l, s, j, m_j \rangle, \quad (5.17)$$

de modo que:

$$|n, l, s, j, m_j\rangle = \sum_{m_l, m_s} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} |n, l, s, m_l, m_s\rangle. \quad (5.18)$$

Los coeficientes de  $C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j}$  satisfacen varias relaciones que aseguran que se cumplan las reglas mecánico-cuánticas de suma de momentos angulares, por ejemplo que  $m_j = m_l + m_s$  o que  $j \in \{|l - s|, |l - s + 1|, \dots, l + s\}$ .

Comencemos por estudiar cómo se calcula de forma genérica los elementos de matriz de cualquiera de los términos de  $H^{(p_i)}$  (ec. (5.13)) que no sean  $-\frac{p^4}{32\mu^3}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos expresar cualquiera de ellos como una función  $f$  de los operadores  $L^2$ ,  $S^2$ ,  $J^2$  y  $r$ . Para ser más explícitos, escribiremos ahora el operador distancia como  $\hat{r}$ , y reservaremos  $r$  para su autovalor, que es una medición de la distancia, es decir, un número real. Cualquiera de estos términos se puede expresar entonces como  $f(L^2, S^2, J^2, \hat{r})$ , y

el objetivo es calcular  $\langle n, l, s, j, m_j | f(L^2, S^2, J^2, \hat{r}) | n, l, s, j, m_j \rangle$ . Comencemos insertando una identidad expresada como la proyección sobre el espacio de posiciones y sobre el subespacio de autoestados con valor de espín  $s$  fijo:

$$\begin{aligned} & \langle n, l, s, j, m_j | f(L^2, S^2, J^2, \hat{r}) | n, l, s, j, m_j \rangle \\ &= \sum_{m'_s} \int \langle n, l, s, j, m_j | f(L^2, S^2, J^2, \hat{r}) \left( |\vec{r}\rangle \otimes |s, m'_s\rangle \right) \left( \langle \vec{r}| \otimes \langle s, m'_s| \right) | n, l, s, j, m_j \rangle d\vec{r} \\ &= \sum_{m'_s} \int \langle n, l, s, j, m_j | \left( |\vec{r}\rangle \otimes |s, m'_s\rangle \right) \left( \langle \vec{r}| \otimes \langle s, m'_s| \right) | n, l, s, j, m_j \rangle f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) d\vec{r}. \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha usado explícitamente la acción de la base actuando sobre los operadores, por lo que se sustituyen  $L^2$ ,  $S^2$ ,  $J^2$  y  $\hat{r}$  por sus respectivos autovalores. A continuación usaremos el cambio de base (5.18) y que  $|n, l, s, m_l, m_s\rangle = |n, l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ , de modo que  $\langle n, l, s, m_l, m_s | (|\vec{r}\rangle \otimes |s, m'_s\rangle) = \langle n, l, m_l | \vec{r} \rangle \langle s, m_s | s, m'_s \rangle = \bar{\psi}_{n,l,m_l} \delta_{m_s, m'_s}$ . En la última igualdad se usó la ortogonalidad de los autoestados de  $S^2$ ,  $S_3$  y la definición de las funciones de onda  $\psi_{n,l,m_l}$ :

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = \langle \vec{r} | n, l, m_l \rangle. \quad (5.19)$$

La expresión anterior queda entonces:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m'_s, m_s, m''_s \\ m'_l, m_l}} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l,s,m'_l,m'_s}^{j,m_j} \int \langle n, l, s, m_l, m_s | \left( |\vec{r}\rangle \otimes |s, m'_s\rangle \right) \left( \langle \vec{r}| \otimes \langle s, m'_s| \right) | n, l, s, m'_l, m''_s \rangle \\ & \quad \times f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) d\vec{r} \\ &= \sum_{\substack{m'_s, m_s, m''_s \\ m'_l, m_l}} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l,s,m'_l,m'_s}^{j,m_j} \int \psi_{n,l,m_l} \bar{\psi}_{n,l,m'_l} f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) \delta_{m_s, m'_s} \delta_{m'_l, m''_l} d\vec{r} \\ &= \sum_{m_s, m'_l, m_l} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l,s,m'_l,m_s}^{j,m_j} \int \psi_{n,l,m_l} \bar{\psi}_{n,l,m'_l} f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) \delta_{m_s, m'_s} \delta_{m'_l, m''_l} d\vec{r} \\ &= \sum_{m_s, m'_l, m_l} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l,s,m'_l,m_s}^{j,m_j} \int |R_{n,l}(r)|^2 f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) r^2 dr \int Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \bar{Y}_l^{m'_l}(\theta, \phi) d\Omega. \end{aligned}$$

En la última igualdad se hizo uso de la expresión (5.7). Además, usando relaciones de ortonormalidad de los armónicos esféricos, la integral en las variables angulares da como resultado un delta de kronecker en  $m_l$  y  $m'_l$ . Por otro lado los coeficientes de Clebsch-Gordan satisfacen  $\sum_{m_s, m_l} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} = 1$ . La expresión final es:

$$\langle n, l, s, j, m_j | f(L^2, S^2, J^2, \hat{r}) | n, l, s, j, m_j \rangle = \int |R_{n,l}(r)|^2 f(l(l+1), s(s+1), j(j+1), r) r^2 dr. \quad (5.20)$$

Usando este resultado, la contribución a la energía que aporta la suma de términos de  $H^{(p_i)}$  (ec (5.13)) distintos a  $-\frac{p^4}{32\mu^3}$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2m^2} \int \frac{e^{-mr}}{r^3} |u_{n,l}(r)|^2 \left\{ -s(s+1)m^2r^2 + \frac{3}{2} \left( j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) (mr+1) \right\} dr \\ & + \frac{\lambda}{12m^2} \left( -4 + \frac{5}{2}s(s+1) \right) |R_{n,l}(0)|^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Falta calcular únicamente  $\langle n, l, s, j, m_j | -\frac{p^4}{32\mu^3} | n, l, s, j, m_j \rangle$ . Mediante la definición (5.1) de  $H^{(0)}$  se puede despejar el operador  $p^2$  como:

$$p^2 = 2\mu(H^{(0)} - V_0(\hat{r})). \quad (5.22)$$

De donde se obtiene que:

$$-\frac{p^4}{32\mu^3} = \frac{-1}{8\mu} \left( (H^{(0)})^2 - H^{(0)}V_0(\hat{r}) - V_0(\hat{r})H^{(0)} + (V_0(\hat{r}))^2 \right), \quad (5.23)$$

y los elementos de matriz quedan:

$$\begin{aligned} & \langle n, l, s, j, m_j | -\frac{p^4}{32\mu^3} | n, l, s, j, m_j \rangle \\ & = \frac{-1}{8\mu} \langle n, l, s, j, m_j | \left( (H^{(0)})^2 - H^{(0)}V_0(\hat{r}) - V_0(\hat{r})H^{(0)} + (V_0(\hat{r}))^2 \right) | n, l, s, j, m_j \rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Los elementos  $\{|n, l, s, j, m_j\rangle\}$  son autoestados de  $H^{(0)}$  con autovalores  $\{E_{n,l}^{(0)}\}$ . La expresión anterior se reduce entonces a:

$$\frac{-1}{8\mu} (E_{n,l}^{(0)})^2 + \frac{E_{n,l}^{(0)}}{4\mu} \langle n, l, s, j, m_j | V_0(\hat{r}) | n, l, s, j, m_j \rangle - \frac{1}{8\mu} \langle n, l, s, j, m_j | V_0(\hat{r})^2 | n, l, s, j, m_j \rangle. \quad (5.25)$$

Los términos en esta expresión tienen la forma  $\langle n, l, s, j, m_j | f(L^2, S^2, J^2, \hat{r}) | n, l, s, j, m_j \rangle$ , que ya vimos en detalle cómo calcular. Usando esos resultados:

$$\langle n, l, s, j, m_j | -\frac{p^4}{32\mu^3} | n, l, s, j, m_j \rangle = \frac{-1}{8\mu} (E_{n,l}^{(0)})^2 + \frac{1}{4\mu} \int |u_{n,l}(r)|^2 V_0(r) \left( E_{n,l}^{(0)} - \frac{1}{2} V_0(r) \right) dr. \quad (5.26)$$

Finalmente, de (5.21) y (5.26) se obtienen las expresiones para las correcciones perturbativas  $E_{n,l,s,j}^{(p_i)}$  a las energías  $E_{n,l}^{(0)}$ , en función de las soluciones  $u_{n,l}(r)$  (y equivalentemente

$R_{n,l}(r)$  y  $E_{n,l}^{(0)}$  a la ecuación de Schrödinger (5.9):

$$E_{n,l,s,j}^{(p_i)} = \frac{\lambda}{2m^2} \int \frac{e^{-mr}}{r^3} |u_{n,l}(r)|^2 \left\{ -s(s+1)m^2 r^2 + \frac{3}{2} \left( j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) (mr+1) \right\} dr$$

$$+ \frac{\lambda}{12m^2} \left( -4 + \frac{5}{2}s(s+1) \right) |R_{n,l}(0)|^2 + \frac{1}{4\mu} \int |u_{n,l}(r)|^2 V_0(r) \left( E_{n,l}^{(0)} - \frac{1}{2}V_0(r) \right) dr$$

$$- \frac{1}{8\mu} (E_{n,l}^{(0)})^2. \quad (5.27)$$

Cómo se mencionó anteriormente,  $u_{n,l}(r)$  y  $E_{n,l}^{(0)}$  deben ser hallados de forma numérica, proceso que detallaremos en la sección 6.1.

Retomando la ecuación (5.15), aún falta hallar una expresión para las correcciones  $E^{(p_{ii})}$ . Procedamos a ello en la siguiente sección.

### 5.2.2. Perturbación $H^{(p_{ii})}$ y sus correcciones $E^{(p_{ii})}$ a las energías

El término  $H^{(p_{ii})} = \frac{\lambda}{2m^2} (S \cdot \nabla)^2 \frac{e^{-mr}}{r}$  resultó más complejo de estudiar, porque  $(S \cdot \nabla)^2$  actuando sobre  $\frac{e^{-mr}}{r}$  hace aparecer de forma explícita dependencias en las variables angulares y operadores como  $S_1, S_2, S_3$ , lo cual complica considerablemente el estudio de las relaciones de conmutación. Por este motivo optamos por estudiar este término mediante el *teorema de Wigner-Eckart*, que enunciaremos más adelante. Lo primero que precisamos es descomponer  $H^{(p_{ii})}$  como una suma de *operadores tensoriales esféricos*, que son un tipo particular de operadores  $T_q^{(k)}$  que, bajo rotaciones (tanto del espacio de posición como del espín), transforman como:

$$T_q^{(k)} \xrightarrow{R} T_q'^{(k)} = D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'} D_{q',q}^{(k)}(R) T_{q'}^{(k)}, \quad (5.28)$$

donde  $D(R)$  es el operador unitario que representa la acción de la rotación sobre el espacio de Hilbert, y  $D_{q',q}^{(k)}(R) \equiv \langle k, q' | D(R) | k, q \rangle$  son los elementos de matriz de ese operador en la base de momento angular (orbital o espín)  $K^2$  ( $K^2 | k, q \rangle = k(k+1) | k, q \rangle$ ) y con proyecciones  $k_3 = q, k'_3 = q'$  sobre el eje  $z$  ( $K_3 | k, q \rangle = q | k, q \rangle$ ). Se puede demostrar que la regla de transformación (5.28) es equivalente a que se satisfagan las siguientes relaciones de conmutación:

$$[K_3, T_q^{(k)}] = q T_q^{(k)}, \quad (5.29)$$

$$[K_\pm, T_q^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}, \quad (5.30)$$

donde  $K = (K_1, K_2, K_3)$  es el operador de momento angular, que puede ser orbital o espín, y  $K_{\pm}$  se define como: <sup>3</sup>

$$K_{\pm} \equiv K_1 \pm iK_2, \quad (5.31)$$

y actúa de la siguiente manera sobre los autoestados de  $K^2$  y  $K_3$ :

$$K_{\pm}|k, q\rangle = \sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}|k, q\pm 1\rangle. \quad (5.32)$$

Veamos como reescribir  $H^{(pii)}$  en función de operadores esféricos. Desarrollamos primero el factor  $(S \cdot \nabla)^2$  y calculamos de forma explícita las derivadas que actúan sobre la función  $\frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}}$ , definiendo el operador vectorial  $\hat{r}$  (no confundir con el operador distancia  $\hat{r}$ ) como  $\hat{r} = (X_1, X_2, X_3)$ . Se obtiene:

$$H^{(pii)} = \frac{\lambda}{2m^2} (S \cdot \nabla)^2 \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}} = -S^2 \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^3} (m\hat{r} + 1) + \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) \sum_{i,j} S_i S_j X_j X_i. \quad (5.33)$$

El primer sumando en esta expresión es análogo al tipo de términos que ya tratamos, por lo que su contribución a la energía se calcula de la misma forma que ya vimos, y es:

$$\langle n, l, s, j, m_j | -S^2 \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^3} (m\hat{r} + 1) | n, l, s, j, m_j \rangle = -s(s+1) \int |u_{n,l}(r)|^2 \frac{e^{-mr}}{r^3} (mr + 1) dr. \quad (5.34)$$

El segundo sumando de (5.33) es el que buscamos descomponer en operadores esféricos. Particularmente la parte que depende del espín y de las componentes de  $\hat{r}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} S_i S_j X_j X_i &= S_1^2 X_1^2 + S_2^2 X_2^2 + S_3^2 X_3^2 + S_1 S_2 X_1 X_2 + S_2 S_1 X_1 X_2 + S_1 S_3 X_1 X_3 \\ &+ S_3 S_1 X_1 X_3 + S_2 S_3 X_2 X_3 + S_3 S_2 X_2 X_3. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Reescribiremos esta expresión en términos de los operadores  $S_3, X_3, S_+, S_-, X_+, X_-$ , donde los últimos cuatro se definen de forma similar a (5.31):

$$\begin{aligned} S_{\pm} &\equiv \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (S_1 \pm iS_2), \\ X_{\pm} &\equiv \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 \pm iX_2), \end{aligned} \quad (5.36)$$

---

<sup>3</sup>La razón por la que estas relaciones valen tanto para el espín como para el momento angular orbital, es que las álgebras de Lie de  $SO(3)$  y  $SU(2)$  son isomorfas.

Bajo estas definiciones es posible probar que la ecuación (5.35) se puede escribir como:

$$\sum_{i,j} S_i S_j X_j X_i = S_+^2 X_-^2 + S_-^2 X_+^2 + \{S_+, S_-\} X_+ X_- - \{S_+, S_3\} X_- X_3 - \{S_-, S_3\} X_+ X_3 + S_3^2 X_3^2, \quad (5.37)$$

donde  $\{\cdot, \cdot\}$  son anti-conmutadores. Para descomponer esta expresión en términos de operadores esféricos, debemos ser capaces de llevarla a la siguiente forma:

$$\sum_{i,j} S_i S_j X_j X_i = \sum_{q=-2}^2 (-1)^q A_q^{(2)} B_{-q}^{(2)} + A_0^{(0)} B_0^{(0)}. \quad (5.38)$$

Donde los operadores  $A^{(2)}$  y  $A^{(0)}$  son esféricos respecto al momento angular orbital  $L$ , es decir que satisfacen (5.29) y (5.30) mediante el cambio  $K \rightarrow L$  y los operadores  $B^{(2)}$  y  $B^{(0)}$  son esféricos respecto al espín  $S$ , por lo que satisfacen relaciones análogas bajo el cambio  $K \rightarrow S$ .

Omitiremos la operatoria para llevar la ecuación (5.37) a la forma (5.38) porque resulta pesada y engorrosa. Se puede probar que bajo las siguientes definiciones, los operadores  $A^{(2)}$ ,  $A^{(0)}$ ,  $B^{(2)}$  y  $B^{(0)}$  satisfacen todas las relaciones de operadores esféricos:

- $A_{-2}^{(2)} = X_-^2$
- $B_2^{(2)} = S_+^2$
- $A_{-1}^{(2)} = \sqrt{2} X_- X_3$
- $B_1^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \{S_+, S_3\}$
- $A_0^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}} (X_3^2 + X_+ X_-)$
- $B_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\{S_+, S_-\} + 2S_3^2)$
- $A_1^{(2)} = \sqrt{2} X_+ X_3$
- $B_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{S_-, S_3\}$
- $A_2^{(2)} = X_+^2$
- $B_{-2}^{(2)} = S_-^2$
- $A_0^{(0)} = 2X_+ X_- - X_3^2$
- $B_0^{(0)} = \frac{1}{3} \{S_+, S_-\} - \frac{1}{3} S_3^2$

Haremos uso del Teorema de Wigner-Eckart, que provee una manera de descomponer y calcular los elementos de matriz de operadores esféricos. El enunciado es:

$$\langle n, j, m_j | T_q^{(k)} | n, j', m'_j \rangle = \langle n, j || T^{(k)} || n, j' \rangle C_{j', m'_j, k, q}^{j, m_j}, \quad (5.39)$$

donde  $C_{j', m'_j, k, q}^{j, m_j}$  es el coeficiente de Clebsch-Gordan que surge de sumar momentos angulares  $j'$  y  $k$  con proyecciones  $m'_j$  y  $q$  para obtener un momento angular total  $j$  con proyección  $m_j$ ; y  $\langle n, j || T^{(k)} || n, j' \rangle$  es un coeficiente denominado *elemento de matriz reducido* de  $T^{(k)}$ , que depende de  $n, j, k, j'$  pero no de  $m_j, q$  o  $m'_j$ . Esto ofrece una ventaja, y es que calcular el coeficiente para distintos valores de  $m_j, q, m'_j$  debe dar lo mismo, lo que permite chequear, en parte, que no hayan habido errores de operatoria en los desarrollos

previos. Otra particularidad es que este coeficiente se calcula a partir del mismo teorema.

Aplicamos este teorema luego de la descomposición 5.38 para hallar los elementos de matriz del último término de la ecuación (5.33). Se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \langle n, l, s, j, m_j | \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) \sum_{i,j} S_i S_j X_j X_i | n, l', s', j', m'_j \rangle \\
&= \sum_{\substack{m'_s, m_s \\ m'_l, m_l}} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l',s',m'_l,m'_s}^{j',m'_j} \sum_q (-1)^q \langle n, l | A^{(2)} \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) | n, l' \rangle C_{l',m'_l,2,q}^{l,m_l} \\
&\quad \times \langle n, s | B^{(2)} | n, s' \rangle C_{s',m'_s,2,-q}^{s,m_s} + \sum_{\substack{m'_s, m_s \\ m'_l, m_l}} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l',s',m'_l,m'_s}^{j',m'_j} \langle n, l | A^{(0)} \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) | n, l' \rangle \\
&\quad \times C_{l',m'_l,0,0}^{l,m_l} \langle n, s | B^{(0)} | n, s' \rangle C_{s',m'_s,0,0}^{s,m_s}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Analíticamente, no es evidente que esta expresión sea diagonal en la base  $\{|n, l, s, j, m_j\rangle\}$ , pero pudimos comprobarlo mediante cálculos numéricos. La contribución a la energía por este término es entonces calcular la ecuación (5.40) usando  $l = l'$ ,  $s = s'$ ,  $j = j'$  y  $m_j = m'_j$ . También pudimos comprobar numéricamente que no solo es diagonal en  $m_j$  si no que es independiente de este número, es decir que tomar distintos valores de  $m_j$  no provoca ningún cambio en la energía. <sup>4</sup>

Aún falta hallar expresiones para los elementos de matriz reducidos. Como se comentó recientemente, se calculan por medio del mismo teorema simplemente despejando de (5.39). Como no depende de  $q$ , podemos usar los distintos  $A_q^{(2)}$  y  $B_q^{(2)}$ , con  $q \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  para calcular los elementos reducidos de  $A^{(2)}$  y  $B^{(2)}$ . Lo hemos hecho con todos, y como es esperable llegamos a los mismos resultados. Incluiremos aquí solo los cálculos para  $q = 0$  a modo de ejemplo.

Comencemos con el cálculo de  $\langle n, j | A^{(2)} | n, j \rangle$ : Recordemos que  $A_0^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}}(X_3^2 + X_+ X_-)$ . Para alivianar la notación en el cálculo, escribiré  $\frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) \equiv f(\hat{r})$ . Es posible hallar una expresión para  $\langle n, l, m_l | \frac{2}{\sqrt{6}}(X_3^2 + X_+ X_-) f(\hat{r}) | n, l, m_l \rangle$  usando los mismos razonamientos que fueron aplicados en la sección (5.2.1). En este caso además reescribiremos  $\frac{2}{\sqrt{6}}(X_3^2 + X_+ X_-)$  en función de armónicos esféricos, lo cual es posible porque  $Y_1^0$  e  $Y_1^{\pm 1}$  se pueden escribir como  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} X_3 \frac{1}{r}$  y  $Y_1^{\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} X_{\pm} \frac{1}{r}$ . Se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \langle n, l, m_l | A_0^{(2)} f(\hat{r}) | n, l, m_l \rangle \\
&= \frac{8\pi}{3\sqrt{6}} \int |u_{n,l}(r)|^2 f(r) r^2 dr \int |Y_l^{m_l}(\theta, \phi)|^2 \left( (Y_1^0(\theta, \phi))^2 + Y_1^{-1}(\theta, \phi) Y_1^1(\theta, \phi) \right) d\Omega.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

<sup>4</sup>Ya era visible desde el Hamiltoniano que esta propiedad debía cumplirse.

Usando la relación dada por el Teorema de Wigner-Eckart (eq (5.39)) despejamos una expresión para el elemento reducido, que queda escrito en términos de integrales que pueden ser calculadas numéricamente:

$$\begin{aligned} & \langle n, l || A^{(2)} f(\hat{r}) || n, l \rangle \\ &= \frac{1}{C_{l, m_l, 2, 0}^{l, m_l}} \frac{8\pi}{3\sqrt{6}} \int |u_{n, l}(r)|^2 f(r) r^2 dr \int |Y_l^{m_l}(\theta, \phi)|^2 \left( (Y_1^0(\theta, \phi))^2 + Y_1^{-1}(\theta, \phi) Y_1^1(\theta, \phi) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Por otro lado, el elemento reducido  $\langle n, s || B^{(2)} || n, s \rangle$  se puede calcular a partir de  $\langle n, s, m_s | B_0^{(2)} | n, s, m_s \rangle$ , para lo cual basta con usar la acción de  $S_3$ ,  $S_+$  y  $S_-$  sobre los autoestados de  $S^2$  y  $S_3$  (relaciones (5.32)). Simplifiquemos la notación definiendo las funciones:

$$t_{\pm}(s, m_s) \equiv \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}. \quad (5.43)$$

El elemento de matriz reducido queda:

$$\langle n, s || B^{(2)} || n, s \rangle = \frac{1}{C_{s, m_s, 2, 0}^{s, m_s}} \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 2m_s^2 - \frac{1}{2} t_+(s, m_s - 1) t_-(s, m_s) - \frac{1}{2} t_-(s, m_s + 1) t_+(s, m_s) \right). \quad (5.44)$$

Siguiendo razonamientos análogos, los elementos de matriz reducidos  $\langle n, l || A^{(0)} f(\hat{r}) || n, l \rangle$  y  $\langle n, s || B^{(0)} || n, s \rangle$  quedan:

$$\begin{aligned} & \langle n, l || A^{(0)} f(\hat{r}) || n, l \rangle \\ &= \frac{1}{C_{l, m_l, 0, 0}^{l, m_l}} \frac{4\pi}{3} \int |R_{n, l}(r)|^2 f(r) r^4 dr \int |Y_l^{m_l}(\theta, \phi)|^2 \left( - (Y_1^0(\theta, \phi))^2 + 2Y_1^{-1}(\theta, \phi) Y_1^1(\theta, \phi) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\langle n, s || B^{(0)} || n, s \rangle = -\frac{1}{3C_{s, m_s, 0, 0}^{s, m_s}} \left( m_s^2 + \frac{1}{2} t_+(s, m_s - 1) t_-(s, m_s) + \frac{1}{2} t_-(s, m_s + 1) t_+(s, m_s) \right). \quad (5.46)$$

Ahora que hemos hallado expresiones analíticas para todos los términos, contamos con

todos los elementos necesarios para el cálculo de  $E_{n,l,s,j}^{(p_{ii})}$ . Juntando (5.34) y (5.40):

$$\begin{aligned}
E_{n,l,s,j}^{(p_{ii})} &= -s(s+1) \int |u_{n,l}(r)|^2 \frac{e^{-mr}}{r^3} (mr+1) dr + \sum_{\substack{m'_s, m'_s \\ m'_l, m'_l}} \sum_q (-1)^q C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l',s',m'_l,m'_s}^{j',m'_j} C_{s',m'_s,2,-q}^{s,m_s} C_{l',m'_l,2,q}^{l,m_l} \\
&\times \langle n,l || A^{(2)} \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) || n,l' \rangle \langle n,s || B^{(2)} || n,s' \rangle + \sum_{\substack{m'_s, m'_s \\ m'_l, m'_l}} C_{l,s,m_l,m_s}^{j,m_j} C_{l',s',m'_l,m'_s}^{j',m'_j} C_{l',m'_l,0,0}^{l,m_l} C_{s',m'_s,0,0}^{s,m_s} \\
&\times \langle n,l || A^{(0)} \frac{e^{-m\hat{r}}}{\hat{r}^5} (m^2 \hat{r}^2 + 3m\hat{r} + 3) || n,l' \rangle \langle n,s || B^{(0)} || n,s' \rangle.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Luego, se puede obtener explícitamente la expresión final para las correcciones  $E_{n,l,s,j}^{(p)}$  a las energías  $E_{n,l}^{(0)}$ , sumando las ecuaciones (5.27) y (5.47).

# Capítulo 6

## Metodología numérica y resultados

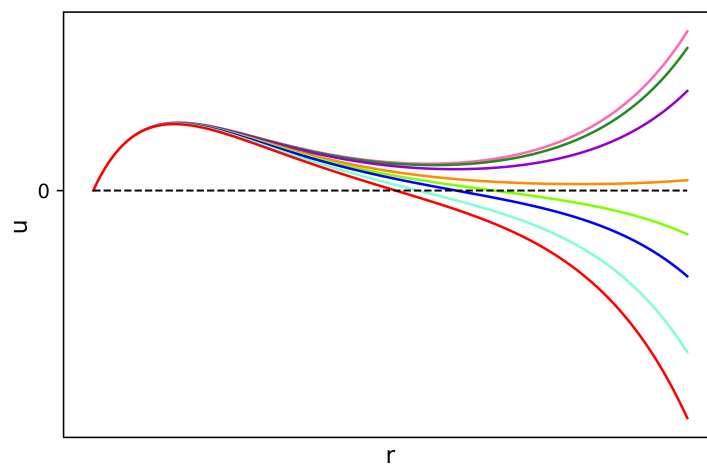
### 6.1. Métodos numéricos para la obtención del espectro de glueballs

Para evaluar las correcciones calculadas analíticamente en el capítulo previo, precisamos obtener las funciones de onda  $u_{n,l}(r)$  (o equivalentemente  $R_{n,l}(r)$ ). Estas funciones pueden obtenerse numéricamente resolviendo la ecuación (5.9), sujeta a la condición (5.10). En nuestro caso utilizamos el método Runge-Kutta de orden 4, con una variable discreta  $r$ .

Entre todas las soluciones matemáticas posibles a (5.9), las que tienen sentido físico son aquellas que cumplen con la unitariedad exigida por la mecánica cuántica, que son las soluciones normalizables. Desde esta visión mecánico-cuántica no relativista en la que nos situamos, los estados ligados se presentan como soluciones  $u_{n,l}(r)$  que tienden a cero fuera de una cierta región finita, lo que implica que la posición relativa de las partículas se encuentra restringida a una región acotada del espacio. Soluciones que no tienden a cero al aumentar  $r$  no cumplen con estas propiedades y no deben ser tenidas en cuenta.

Numéricamente, una forma de obtener estos estados ligados y sus respectivas energías, para valores  $l$  (momento angular orbital),  $\beta$  y  $\lambda$  (los parámetros del potencial  $V_0$ , ec. (5.1)) fijos, es resolver la ecuación de Schrödinger en un barrido de energías, y entre todas las soluciones, quedarse con las que respetan las restricciones físicas recién mencionadas. Todo valor de la energía que no corresponda a un estado físicamente permitido llevará a una solución que aumenta indefinidamente con  $r$ . En principio esta propiedad podría servir para reconocerlas y descartarlas, conservando únicamente las soluciones acotadas. Sin embargo, dado que solo es posible barrer un conjunto finito de valores en la energía, sería extremadamente improbable dar con el valor exacto para la energía de un estado, y

en general sólo podremos acercarnos a la misma con cierto nivel de precisión numérica. Esto implica que nunca podremos contar con el valor exacto de la energía, y que en realidad todas las soluciones que podemos obtener crecerán indefinidamente para  $r \rightarrow \infty$ , y debemos pensar en otro método para discernir al estado ligado. Una propiedad útil que nos permitirá lograrlo consiste en que, aproximarse a la energía del estado por derecha o por izquierda no es lo mismo, pues por continuidad siempre hay un cambio de signo en la parte no acotada de las soluciones entre ambos casos. Es posible identificar entonces la existencia de un estado ligado cada vez que se observe un cambio de signo en las soluciones a  $r \rightarrow \infty$ . Otro punto importante es que en un entorno infinitesimal de la energía del estado, la parte acotada de las soluciones varía infinitesimalmente, y cuanto más cerca estemos de dicha energía, la solución convergerá con mayor precisión a la solución exacta. Un ejemplo de este comportamiento se puede ver en la figura siguiente, donde se grafican algunas soluciones  $u(r)$  a la ecuación de Schrödinger con distintas energías, cercanas a la de un estado ligado:



**Figura 6.1:** Soluciones  $u(r)$  a la ecuación de Schrödinger para distintas energías, cercanas a la de un estado ligado. Las soluciones que divergen hacia los positivos corresponden a valores que se acercan por izquierda a la energía del estado ligado, y las que divergen hacia los negativos se acercan por derecha. La curva de color anaranjado es la que mejor converge a la solución exacta porque es la que se encuentra más cerca de la energía de ligadura.

Basándonos en este comportamiento, desarrollamos algoritmos numéricos para discernir y obtener las energías y funciones de onda de los estados ligados. A continuación, una descripción por pasos del funcionamiento de los mismos.

## Obtención de las energías y soluciones $u_{n,l}(\mathbf{r})$ aproximadas de los estados

1. El primer paso de este algoritmo consiste en realizar un primer barrido amplio y equiespaciado en las energías, que procuramos que sea suficientemente abarcativo como para no perder estados de baja energía (los de altas energías son menos importantes porque nos enfocaremos solo en estados de bajas energías). De aquí ubicamos los intervalos de energías  $\{[E_-, E_+]\}$  en los que las soluciones cambian de signo para  $r \rightarrow \infty$ , lo que nos provee una primer estimación de las ubicaciones de los estados.
2. La estimación del paso 1 suele ser demasiado gruesa y es necesario refinarla. Para ello, en cada uno de los intervalos  $\{[E_-, E_+]\}$  tomamos el punto medio  $\bar{E} \equiv \frac{E_- + E_+}{2}$ , resolvemos numéricamente la ecuación de Schrödinger para ese valor de la energía y comparamos el signo de la solución a  $r$  grande en  $\bar{E}$  respecto a los signos que presentaban en  $E_-$  y  $E_+$ . Tomamos ahora como nuevo intervalo, aquel donde se da el cambio de signo, que puede ser  $[\bar{E}, E_+]$  o  $[E_-, \bar{E}]$  dependiendo del caso. Esto acota la posición del estado ligado a un intervalo de la mitad del ancho que la estimación inicial.
3. Ahora se divide este nuevo intervalo en  $z$  subintervalos y se repite un procedimiento análogo al del punto anterior (el punto anterior es lo mismo tomando  $z = 2$ ).
4. De los pasos anteriores se obtienen intervalos para las energías de los estados ligados. A partir de estos nuevos intervalos se vuelven a repetir en forma concatenada los pasos 2 y 3 iterativamente  $N$  veces, para garantizar una precisión razonablemente buena en la convergencia de la parte acotada de las soluciones y en sus energías.

## Obtención de la parte acotada de las soluciones $u_{n,l}(\mathbf{r})$

La región no acotada de las funciones  $u_{n,l}(r)$  debe ser descartada porque no forma parte de la solución física. Este proceso se lleva a cabo con un algoritmo de convergencia variable y adaptativo a cada solución (porque las funciones  $u_{n,l}(r)$  son distintas y convergen también de formas diferentes, por lo que es inconveniente tratarlas por igual).

- 1) Como primer paso, este algoritmo toma el máximo local más grande en valor absoluto ( $\equiv u_{max}$ ) de la solución y lo divide entre un número grande  $D$ . Luego, si en alguna región el valor absoluto de la solución se mantiene por debajo de  $u_{max}/D$

por una cantidad de  $N_p$  pasos en la variable discreta  $r$ , se trunca la solución, conservando esa parte finita de la misma y descartando la parte para valores mayores de  $r$ .

- II) Si la solución no satisface esta condición en ninguna región de su dominio ( $|u_{n,l}| < \frac{u_{max}}{D}$  por al menos  $N_p$  pasos en  $r$ ) el algoritmo relaja un poco la exigencia, disminuyendo de forma iterativa a la mitad la cantidad de pasos que considera como “convergencia razonable” ( $N_p \rightarrow \frac{N_p}{2} \rightarrow \frac{N_p}{4} \rightarrow \dots$ ) hasta llegar a un cierto valor mínimo.
- III) Si la solución tampoco logra satisfacer ninguna de las condiciones del paso II), el valor que está siendo considerado como “convergencia razonable” ( $\frac{u_{max}}{D}$ ) es demasiado exigente para la solución en cuestión, de modo que el algoritmo procede a relajar dicha condición, disminuyendo el factor  $D$  un poco, pero manteniendo fijo el requisito de los  $N_p$  pasos de convergencia para no relajar de forma exagerada las condiciones.
- IV) Una vez aisladas las partes acotadas de las soluciones  $u_{n,l}(r)$  mediante los pasos anteriores, se normalizan de acuerdo a la ecuación (5.11).

En resumen, estos algoritmos dan como resultado un conjunto de funciones normalizadas  $u_{n,l}(r)$ , que tienden a cero a medida que aumenta  $r$ , y un conjunto discreto formado por sus respectivas energías  $E_{n,l}^{(0)}$  a orden cero. A partir de estos datos se calcula el espectro de energías (en principio para  $\lambda$  y  $\beta$  fijos) determinado por las expresiones (5.27) y (5.47), obtenidas previamente de forma analítica. Para ello es necesario variar el espín  $s$ , el momento angular orbital  $l$  y el momento angular total  $j$ , y luego reordenar las energías de menor a mayor. Estudiamos el espectro para distintos valores de  $\lambda$  y  $\beta$ . Para ello variamos dichos parámetros en una grilla de valores. Lo que se obtiene finalmente son los niveles de energías de glueballs (en realidad cada energía es un multiplete en  $m_j$ ) en función de  $\lambda$  y  $\beta$ , donde cada una de las energías queda a su vez identificada con valores  $\{n, l, s, j\}$ .

Una cantidad que también se calcula numéricamente en estos algoritmos, son promedios de los cuadrados de las velocidades relativas ( $\langle v^2 \rangle$ ) entre las partículas en cada uno de los estados. Dicha cantidad se calcula usando un razonamiento completamente análogo al que fue enunciado en la sección 5.2.1 para el cálculo de las correcciones a la energía generadas por el término  $-\frac{p^4}{32\mu^3}$ . En este caso, usando  $p^2$  en vez de  $p^4$  y despejando explícitamente  $v^2$ .

### 6.1.1. Implementación de los algoritmos

A continuación se especifican las parametrizaciones utilizadas en los algoritmos y otros aspectos cualitativos sobre ellos. Se procuró que la precisión en el procedimiento numérico fuera suficiente para que las incertidumbres provenientes del mismo sean despreciables respecto a los errores esperados del propio tratamiento teórico. La mayoría de las parametrizaciones utilizadas fueron elegidas para garantizar este nivel de precisión.

- Las energías están expresadas en unidades de la masa  $m$  del gluón, y las distancias en unidades del inverso de  $m$ , lo que es equivalente a considerar  $m = 1$ .
- La variable discreta  $r$  que modela la distancia entre los gluones tiene un paso de tamaño  $r_{n+1} - r_n = \frac{1}{500}$ . Truncamos las soluciones cuando alcanzan un valor absoluto  $|u_{n,l}| = 1 \times 10^4$ .
- La discretización usada para el primer barrido en las energías (punto 1) tiene un paso de tamaño  $E_{n+1} - E_n = \frac{1}{1000}$ . La energía mínima y máxima en el barrido depende de la naturaleza del potencial, por lo que usamos diferentes valores en los dos modelos que estudiamos. Los especificamos más adelante.
- La cantidad  $z$  de subintervalos en los que se divide  $[\bar{E}, E_+]$  o  $[E_-, \bar{E}]$  (punto 3) que fue elegida es  $z = 3$ . Esta elección es arbitraria.
- El número de veces  $N$  que se repiten los procesos de subdivisiones de los intervalos de energía (punto 4) es  $N = 8$ . Se eligió este número porque garantiza suficiente precisión en las energías  $E_{n,l}^{(0)}$  y en la convergencia de las funciones de onda.
- Los parámetros  $D$  y  $N_p$  (punto I) se eligieron como  $D = 4000$  y  $N_p = 2000$  con el propósito de aislar con la mejor precisión posible la parte finita de las soluciones  $u_{n,l}$ .
- En el punto II), la cantidad de pasos en  $r$  más pequeña que se admite es 125.
- En el punto III), el algoritmo puede relajar la exigencia de convergencia disminuyendo el divisor  $D$  del máximo en un factor de 10, hasta dos veces si es necesario ( $\frac{D}{10} \rightarrow \frac{D}{100}$ ).
- El espín ( $s$ ) se varía entre  $s \in \{0, 1, 2\}$  porque consideramos glueballs formadas por dos gluones, que tienen espín  $s = 1$  cada uno.
- Sólo consideraremos valores de momento angular total  $j \in \{0, 1, 2\}$  para ahorrar tiempo de cómputo. Por consistencia, el momento angular orbital ( $l$ ) se varía entre  $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- El cálculo de  $\langle v^2 \rangle$  proporciona información aproximada sobre cuán relativistas son los estados ligados y sobre el error sistemático cometido por causa del desarrollo

perturbativo teórico en las energías. Los tratamientos en los que nos hemos basado hasta el momento pueden ser razonables para estados de bajas velocidades, pero con seguridad fallarían si la velocidad es cercana a la de la luz, de modo que es importante tener una estimación de la misma.

## 6.2. Comparación con las predicciones del lattice

El espectro de glueballs ha sido estudiado mediante simulaciones numéricas en Yang-Mills pura discretizada en un lattice, en un artículo de Andreas Athenodorou y Michael Teper en el 2020 [38]. Sus resultados pueden verse en la tabla 6.1, extraída del artículo, en donde se muestran las energías más bajas por momento angular total  $j$  y clasificadas también según paridad (P) y conjugación de carga (C) de cada estado. Comparamos nuestros cálculos con estos resultados. Para ello, estudiamos si algún punto  $\{\lambda, \beta\}$  de la grilla logra reproducir, dentro de los errores esperados, el espectro de glueballs obtenido en el lattice. Los errores en el tratamiento perturbativo de las energías son del orden de las correcciones que no fueron incluidas, que están suprimidas por  $v^4/c^4$  respecto a  $H^{(0)}$  (que, de por sí, ya es de orden  $v^2/c^2$ ). Se espera que  $v^2/c^2$  sea del orden de  $\tilde{g}^2$ , por lo que esta incertidumbre en las perturbaciones es de aproximadamente  $\tilde{g}^4$ . El valor máximo para  $\tilde{g}^4$ , que daría la incertidumbre más grande, es  $\tilde{g}_{max}^4 \approx (0.36)^2 \approx 0.13$ , resultando en errores de 13% o menores. Aún así, estos razonamientos se basan en órdenes de magnitud, por lo que no deben ser tomados de forma exacta, sino más bien como un indicador del orden de magnitud que puede esperarse de las incertidumbres. Una estimación más realista es considerar que el entorno de incertidumbres puede ser un tanto mayor. Consideramos que es razonable esperar errores de hasta, aproximadamente, 25%.

Los glueballs formados por dos gluones tienen conjugación de carga positiva,<sup>1</sup> por lo que compararemos nuestros resultados con los estados  $C = +1$  del lattice.<sup>2</sup> Como se mencionó en la sección 6.1.1, solo consideramos  $j \leq 2$ .

Para comparar los resultados usamos una cantidad adimensional,  $\tilde{E}_{n,j}$ , definida como la energía medida en unidades de la energía del estado fundamental  $E_0$ :

$$\tilde{E}_{n,j} \equiv \frac{E_{n,j}}{E_0}. \quad (6.1)$$

Estudiamos cuánto difieren nuestros resultados respecto a los del lattice usando el método

<sup>1</sup>Porque  $F_{\mu\nu}^{ab}(x)F_{ab}^{\mu\nu}(y)$  es invariante bajo conjugación de carga

<sup>2</sup>También existen glueballs asociados a operadores con tres  $F_{\mu\nu}^a$  que tienen  $C = -1$ , pero no fueron estudiados en este trabajo.

$M_G \text{ GeV}$				
$J$	P=+,C=+	P=-,C=+	P=+,C=-	P=-,C=-
0 gs	1.653(26)	2.561(40)		
0 ex1	2.842(40)	3.54(8)		
2 gs	2.376(32)	3.07(6)	4.24(8)*	3.92(9)
2 ex1	3.30(5)	3.97(7)		
1 gs		4.12(8)	2.944(42)	4.03(7)
1 ex1		4.16(8)*	3.80(6)	
1 ex2		4.20(9)*		
3 gs	3.74(7)*		3.53(8)	
4 gs	3.69(8)*		4.38(8)**	

**Tabla 6.1:** Espectro de glueballs en GeV obtenido a partir de simulaciones numéricas en el lattice. Tabla extraída de [38]. Se muestran las energías de las glueballs más livianas, clasificadas según el momento angular total (en esta tabla,  $J$  es el número  $j$ ), paridad ( $P$ ) y conjugación de carga ( $C$ ).

de mínimos cuadrados, con el que calculamos  $\sqrt{\chi^2}$ , que proporciona una medida de la discrepancia porcentual o error relativo entre los datos:

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{n,j} \frac{|\tilde{E}_{n,j} - \tilde{E}_{n,j}^{lattice}|^2}{|\tilde{E}_{n,j}^{lattice}|^2}. \quad (6.2)$$

En esta expresión,  $N$  es la cantidad de energías comparadas.

Calculamos  $\sqrt{\chi^2}$  en todos los puntos  $\{\lambda, \beta\}$  de la grilla usando las cinco energías ( $N = 5$ ) más bajas del lattice (con  $C = +1$ ), y realizamos un ajuste por mínimos cuadrados, es decir, determinamos los parámetros que minimizan  $\chi^2$ . La elección de usar las energías más bajas para el ajuste de parámetros es en cierta medida arbitraria. Usar sólo un subconjunto de los datos del lattice para el ajuste de los parámetros nos permite reservar los datos restantes para poner a prueba los resultados a modo de predicción. En última instancia, si el modelo describe satisfactoriamente el espectro de estados, se esperarí que un ajuste basado en cinco puntos fuera suficiente para dar los parámetros y las predicciones óptimas.

En el cálculo de  $\chi^2$  se deben comparar estados con los mismos números cuánticos discretos de paridad  $P$  y momento angular total  $j$ .<sup>3</sup> Para nuestros estados, la paridad se calcula como  $P = (-1)^l$ , donde  $l$  es el número cuántico asociado al momento angular orbital<sup>4</sup>. Una exigencia adicional que imponemos como requisito necesario es que el estado

<sup>3</sup>También conjugación de carga, pero como se comentó, todos los glueballs que podemos obtener tienen  $C = +1$ .

<sup>4</sup>La ecuación exacta es  $P = P_a P_b (-1)^l$ , donde  $P_a$  y  $P_b$  son las paridades intrínsecas de los gluones que componen al glueball. Tanto para gluones como para anti-gluones este número es -1, de modo que

fundamental debe tener  $j = 0$ , y excluirémos aquellos casos en los que esta condición no se cumpla. Varios estudios basados en simulaciones numéricas han determinado que esto debe ser así para glueballs [38, 53, 54].

Debido a las estimaciones previas en la literatura sobre la tensión de la cuerda [38] y la constante de acoplamiento [13], buscamos mínimos locales para  $\beta$  cercano a (del orden de) 1 y  $\lambda$  cercano a (del orden de) 2.

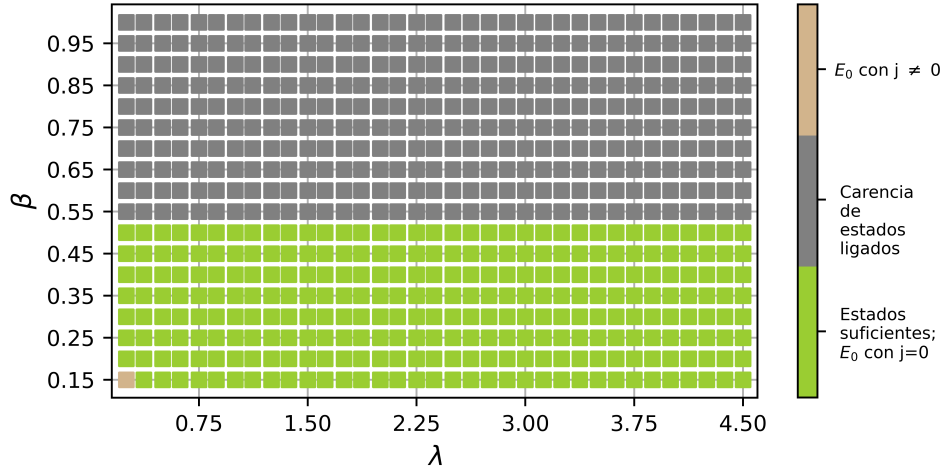
### 6.3. Glueballs en el modelo propuesto por Cornwall

Variamos  $\lambda$  desde 0.25 hasta 4.5 con un paso de 0.125 y  $\beta$  desde 0.15 hasta 1.0 con un paso de 0.05 (en este caso, no exploramos  $\beta$  mayores a 1 por razones que se precisarán en el análisis de los resultados), y variamos las energías desde  $E^{(0)} = -2$  hasta  $E^{(0)} = 4$  (por la forma de  $V_0$  en este modelo, no hay estados ligados (obtenidos a orden cero en el potencial) por encima de  $E^{(0)} = 4m$ ; tampoco parece haberlos por debajo de  $E^{(0)} = -2m$ ).

Lo primero que hicimos fue un análisis general sobre el comportamiento del espectro de energías en cada punto de la grilla, estudiando la cantidad de estados ligados encontrados y el momento angular total del estado fundamental. De este primer análisis identificamos y excluimos los puntos  $\{\lambda, \beta\}$  en los que, o no existen suficientes estados ligados para efectuar una comparativa con las cinco menores energías del lattice, o el estado fundamental tiene  $j$  no nulo. En la figura 6.2 se muestran con color gris los puntos a excluir por falta de estados ligados y con verde los puntos que cumplen con los requisitos necesarios para ser comparados con el lattice. En este modelo, a medida que  $\beta$  aumenta, se pierden estados ligados. Se puede observar que por encima de  $\beta = 0.5$  ningún punto tiene suficientes estados ligados para poder contrastar con las cinco menores energías del lattice, y particularmente hay un solo punto en el que el estado fundamental presenta  $j \neq 0$ . Calculamos  $\chi^2$  únicamente en la región de puntos verdes, que es la que cumple con los requisitos impuestos.

---

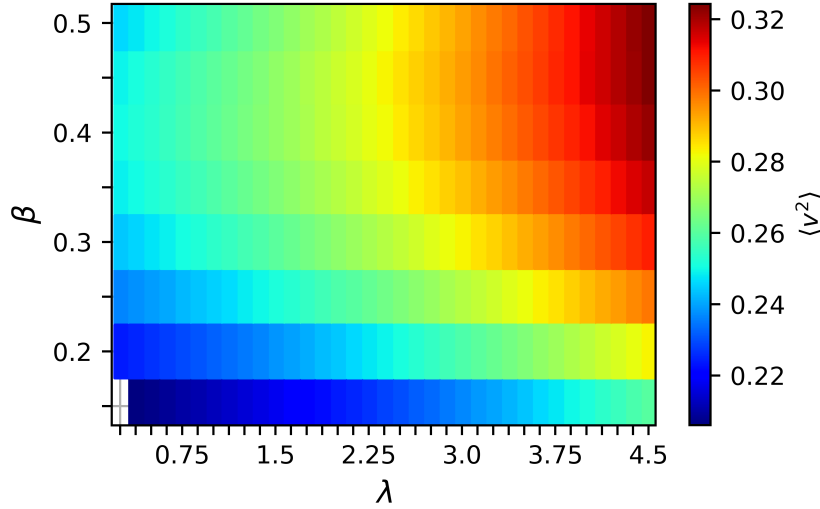
$P_a P_b = (-1)^2 = 1.$



**Figura 6.2:** Gráfico que representa con colores gris y beige, los puntos  $\{\lambda, \beta\}$  que no son comparables con los datos del lattice, por falta de estados ligados o por tener un estado fundamental con momento angular total no nulo. En verde, los puntos que cumplen con los requisitos necesarios para poder ser comparados con el lattice.

También graficamos, en la figura 6.3, las velocidades cuadráticas medias del estado fundamental en cada punto de la región verde indicada en la figura 6.2, con el fin de tener una estimación de cuán relativista es el régimen en cada punto. Esperamos que  $\langle v^2 \rangle^2$  concuerde con el orden de los errores previstos, de aproximadamente 25% o menores. Se observa que los valores medios para la velocidad al cuadrado se encuentran entre 0.20 y 0.3 aproximadamente. Esto indica valores para  $\langle v^2 \rangle^2$  cercanos a 0.10 en concordancia con los errores esperados.

En la figura 6.4 se representa con colores el valor de  $\sqrt{\chi^2}$  en cada punto, calculado teniendo en cuenta los cinco estados de menor energía. Se puede observar una región que tiende a minimizarlo, siendo  $\{\lambda_{min} = 3.75, \beta_{min} = 0.5\}$  el punto que efectivamente lo hace, con una discrepancia relativa de  $\sqrt{\chi_{min}^2} \sim 10\%$  respecto a las predicciones del lattice. Para esos valores de los parámetros, comparamos gráficamente los cinco pares de estados ( $\tilde{E}$ ) que se usaron para el ajuste y minimización de  $\chi^2$ , en la gráfica de la izquierda de la tabla 6.2. En la gráfica de la derecha comparamos, para estos mismos valores de  $\lambda$  y  $\beta$ , un mayor número de datos del lattice con los resultados de nuestra resolución numérica. Esta segunda gráfica puede considerarse como una predicción del modelo, porque hay datos en ella que no intervinieron en el ajuste de los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$ . Las cruces corresponden a los datos del lattice, mientras que los puntos y las estrellas son datos de nuestras simulaciones. Para cada  $j$ , los pares de datos que son comparados entre sí están identificados con el mismo color, lo que significa que tienen igual paridad. La paridad se representa con un  $+1$  o  $-1$  a la derecha de cada punto. La estrella es un estado

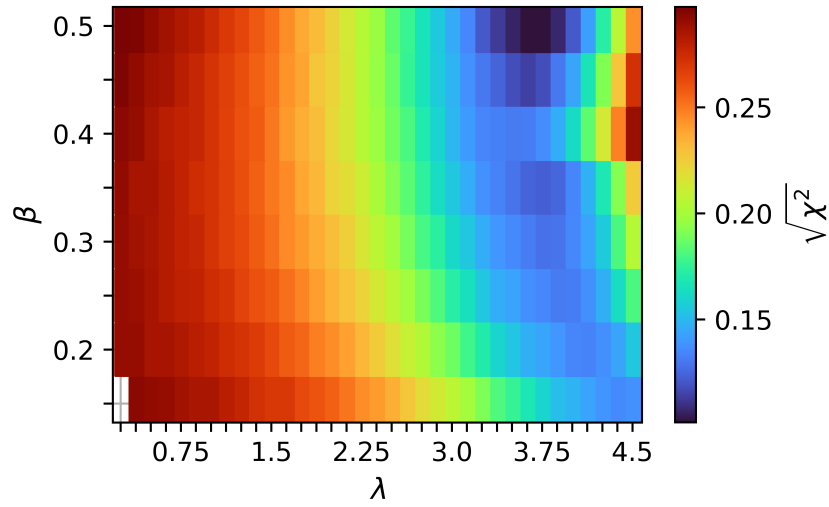


**Figura 6.3:** Gráfico en el que se presenta con colores el valor aproximado de  $\langle v^2 \rangle$  del estado fundamental en cada punto  $\{\lambda, \beta\}$ .

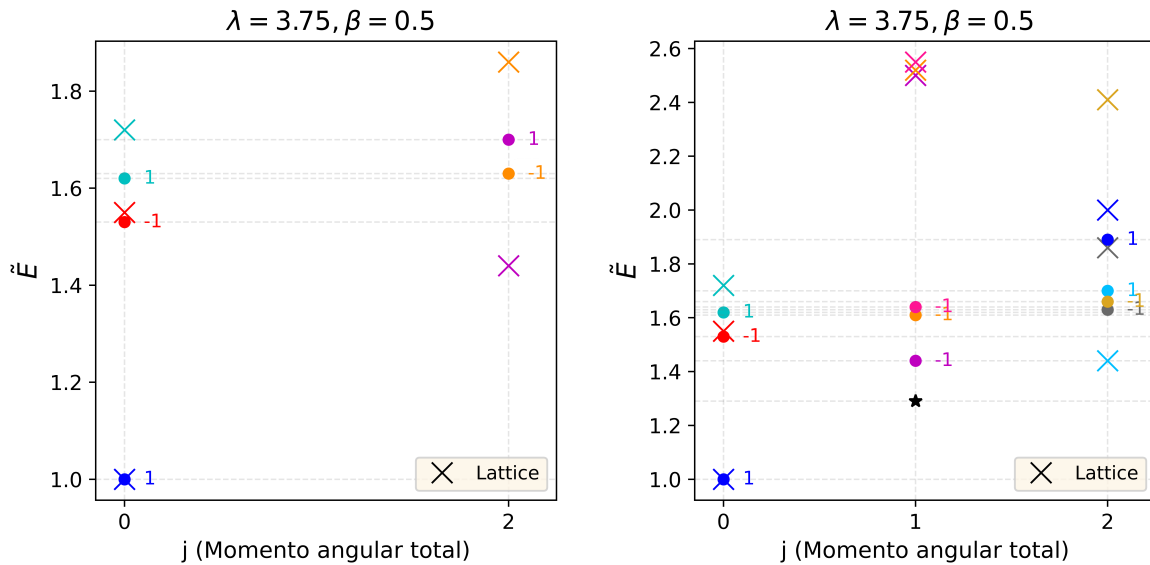
de nuestra resolución numérica que no tiene un correspondiente en los datos disponibles del lattice, por tener distintos números cuánticos.

Los datos de nuestra resolución numérica graficados en la figura del lado izquierdo, presentan una discrepancia  $\sqrt{\chi_{min}^2}$ , de 10% respecto a los datos del lattice. Los dos estados con  $j = 2$  aparentan a primera vista violar la jerarquía de los números cuánticos discretos que predice el lattice. Sin embargo, esta aparente violación se encuentra dentro de los errores esperados: considerando una incertidumbre de hasta 25% en cada dato, el orden de estos dos estados puede ser intercambiable.

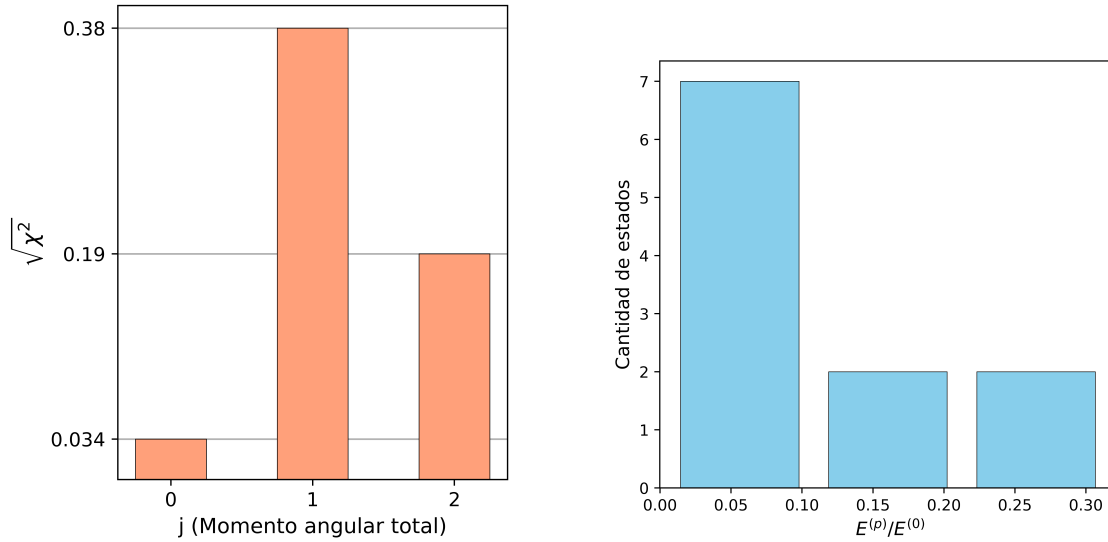
Por otro lado, los datos graficados en la figura del lado derecho presentan una discrepancia  $\sqrt{\chi_{min}^2}$ , de 24%, considerablemente mayor que para los cinco glueballs más livianos. Al igual que se comentó recién, las aparentes violaciones en la jerarquía de los números cuánticos discretos predichos por el lattice, en los estados con  $j = 2$ , se encuentran dentro de los errores esperados. Algo análogo sucede para el punto representado con una estrella, que no tiene un correspondiente en los datos del lattice, por tener  $j = 1$ ,  $P = +1$ ,  $C = +1$  (no hay estados con esos números cuánticos en la tabla 6.1). Dentro del margen de incertidumbres existentes, cabe la posibilidad de que dicho estado esté en realidad por encima del resto, de modo que podría tener un correspondiente en el lattice a mayores energías. Un escenario más desfavorable presentan los datos con  $j = 0$ , para los que el lattice asegura, al menos, la existencia de cuatro glueballs (ver tabla 6.1), mientras que solo logramos identificar tres (los graficados) en nuestros cálculos, en estos valores específicos de los parámetros. La incapacidad de generar este estado puede deberse a la



**Figura 6.4:** Gráfico en el que se presenta con colores el valor de  $\chi^2$  en cada punto  $\{\lambda, \beta\}$ .



**Tabla 6.2:** Espectro de energías del glueball según nuestros cálculos numéricos y predicciones del lattice. A la izquierda se contrastan los cinco pares de estados que se usaron para el ajuste y que minimizan  $\chi^2$ . A la derecha se contrastan, para esos mismos parámetros,  $\{\lambda_{min}, \beta_{min}\}$ , una mayor cantidad de estados. Las cruces corresponden a los datos del lattice, mientras que los puntos y las estrellas son datos de nuestras simulaciones. Para cada  $j$ , los pares de datos que son comparados entre sí están identificados con el mismo color. La paridad se representa con un  $+1$  o  $-1$  a la derecha de los puntos. La estrella es un estado de nuestra resolución numérica que no tiene un correspondiente en los datos disponibles del lattice.



**Tabla 6.3:** A la izquierda, el error porcentual por cada valor de momento angular total. A la derecha, un histograma con el tamaño de las correcciones perturbativas  $E^{(p)}$  respecto a las energías a orden cero  $E^{(0)}$ , para los estados de la gráfica derecha de la figura 6.2.

metodología usada para la obtención de los mismos, que se basa en estados a orden cero en el Hamiltoniano, sobre los que luego se calculan correcciones. Es probable que estados cercanos a la ionización se pierdan mediante este método, y que sólo sean accesibles resolviendo el sistema mediante cálculos exactos. Esto también puede tomarse como una posible explicación para el cambio abrupto de comportamiento de los datos por encima de  $\beta = 0.5$  (fig. 6.2).

Más allá de dicha circunstancia, si nos basamos en las discrepancias relativas de los datos graficados en la figura derecha de la tabla 6.2,  $j = 0$  es el caso que mejor se asemeja a las predicciones del lattice, seguido de  $j = 2$  y luego  $j = 1$ . En la figura de la izquierda de la tabla 6.3 se muestran las diferencias porcentuales por cada valor de momento angular total, donde se puede observar que  $j = 0$  y  $j = 2$  están dentro de los errores esperados, pero no  $j = 1$ , que presenta una discrepancia relativa de 38%.

También estudiamos el tamaño de las correcciones perturbativas  $E^{(p)}$  respecto a las energías a orden cero  $E^{(0)}$ , para verificar si están dentro del orden esperado. Como ya se mencionó, se espera  $\frac{E^{(p)}}{E^{(0)}} \approx v^2/c^2 \approx \tilde{g}^2$ , que es como máximo 0.36, es decir que se puede esperar  $\frac{E^{(p)}}{E^{(0)}} \leq 0.36$ , o incluso un poco mayores ya que nos basamos en órdenes de magnitud, no en cifras exactas. En la figura de la derecha de la tabla 6.3 se muestra un histograma con la distribución del tamaño de las correcciones respecto al orden cero ( $\frac{E^{(p)}}{E^{(0)}}$ ), para los estados de la gráfica derecha de la tabla 6.2. Todas las correcciones  $E^{(p)}$  se encuentran en concordancia con los tamaños esperados, incluso para  $j = 1$ .

En resumen, aunque nuestros cálculos no logran generar uno de los estados predichos por las simulaciones del lattice, para los que sí pudieron ser generados, el modelo describe en mejor medida el caso  $j = 0$  y  $j = 2$ , dando errores dentro de lo esperado. El caso peor descrito es  $j = 1$ , donde las diferencias entre las energías predichas por el lattice y por el modelo son mayores a lo esperado. Estas discrepancias en  $j = 1$  no parecen provenir de estados ultrarelativistas, porque las correcciones  $E^{(p)}$  sí tienen los tamaños previstos, que están en concordancia con los desarrollos perturbativos no relativistas. Esto podría indicar que la razón de las discrepancias es una incapacidad del modelo para describir de forma satisfactoria los estados con  $j = 1$ .

## 6.4. Otros aspectos sobre el modelo propuesto Cornwall

En esta sección de los resultados destacamos brevemente algunas consideraciones adicionales sobre el modelo de Cornwall que pudimos observar a lo largo del trabajo.

### 6.4.1. Sensibilidad del modelo de Cornwall respecto al orden cero en teoría de perturbaciones

Estudiamos cualitativamente en qué medida afecta a los resultados la elección del orden cero ( $V_0$ ) que se tome para el cálculo perturbativo de los niveles de energía. La opción más lógica es tomar  $V_0 = 2m(1 - e^{-mr\beta}) - \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r}$ , que es el que usamos en las secciones anteriores, porque los términos siguientes en el Hamiltoniano ya involucran interacciones que naturalmente se consideran relativistas, como contribuciones del espín y demás. Sin embargo, uno puede preguntarse en qué medida tomar un  $V_0$  diferente afecta a los resultados. Probamos con  $V_0 \equiv 2m(1 - e^{-mr\beta}) - \frac{\lambda e^{-mr}}{r} (\frac{1}{6} + \frac{1}{3} S^2)$  y observamos que esta elección altera significativamente a los estados, generando que la gran mayoría de estados fundamentales tengan  $j = 2$ , tanto a orden cero como a primer orden en las correcciones.

No es ilógico pensar que como el parámetro perturbativo ( $\tilde{g}$ ) puede no ser particularmente pequeño, ( $\tilde{g}_{max}^2 \approx 0.36$ ) el modelo presente una sensibilidad a la elección del orden cero, porque términos sucesivos en el Hamiltoniano no difieren de forma tan notoria respecto a los anteriores.<sup>5</sup> Como consecuencia, la elección del punto de partida natural para el cálculo perturbativo de las energías debe ser tomada con cuidado.

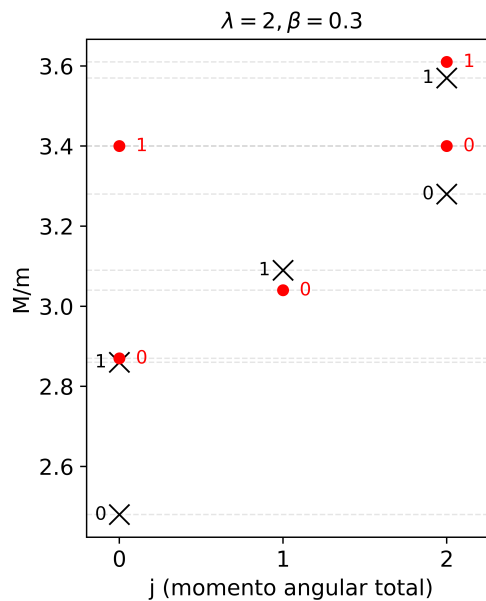
---

<sup>5</sup>Como por ejemplo en QED, donde el parámetro perturbativo es aproximadamente  $\frac{1}{137}$ .

### 6.4.2. Reproducibilidad de resultados presentados en el artículo de J.M. Cornwall y A.Soni

En el artículo de J.M. Cornwall y A.Soni [33] se calcula el espectro de glueballs para  $\{\lambda = 2.0, \beta = 0.3\}$ , siguiendo una metodología que no resulta del todo clara para el lector. Aún así, se esperaría que los distintos métodos de resolución utilizados convergieran, dentro de sus propios márgenes de error, a describir los mismos resultados. En esta sección contrastamos nuestros resultados con los del artículo.

En la figura 6.5 se muestran con cruces de color negro los niveles de energía obtenidos en artículo de J.M. Cornwall y A.Soni para  $\{\lambda = 2.0, \beta = 0.3\}$ , y con puntos rojos nuestros resultados, también para esos mismos valores de  $\lambda$  y  $\beta$ . Las energías están graficadas en unidades de la masa  $m$  del gluón. El número a la derecha de cada dato es el momento angular orbital del estado.



**Figura 6.5:** Comparación entre el espectro de glueballs para  $\{\lambda = 2.0, \beta = 0.3\}$  obtenido en el artículo [33] (cruces de color negro) y obtenido a partir de nuestros cálculos (puntos de color rojo). El número al costado de cada dato es el momento angular orbital ( $l$ ) del estado.

Las diferencias relativas entre los datos con  $j = 0$  y  $j = 2$  se encuentran dentro de los márgenes de error esperados, siendo de 17% y 3% respectivamente, y los números cuánticos de los estados coinciden. No es ese el caso de  $j = 1$ , para el que los números cuánticos de los estados de menor energía no coinciden entre sí, teniendo momento angular orbital  $l = 1$  según la predicción del artículo, y  $l = 0$  según nuestros cálculos. La explicación más probable es que en realidad existe un estado con los mismos números cuánticos que

los obtenidos en el artículo,  $j = 1, l = 1$ , que se encuentra levemente por encima del que tiene  $j = 1, l = 0$ , que es el que no concuerda (no presentamos este dato en la gráfica para evitar posibles confusiones, pero en efecto fue corroborado). En ese caso, dentro del margen de errores esperados, cabría la posibilidad de que en realidad, si se hicieran los cálculos con mayor precisión, el estado con  $j = 1, l = 1$  fuera efectivamente el de menor energía y momento angular total  $j = 1$ , en concordancia con los resultados presentados en el artículo. En todo caso, esta aparente discrepancia entre los resultados podría deberse a las diferencias entre las metodologías utilizadas. Como bien se mencionó en 6.4.1, el modelo es considerablemente sensible al punto de partida elegido para su resolución, y esto podría reflejarse como leves diferencias en estados que son cercanos entre sí.

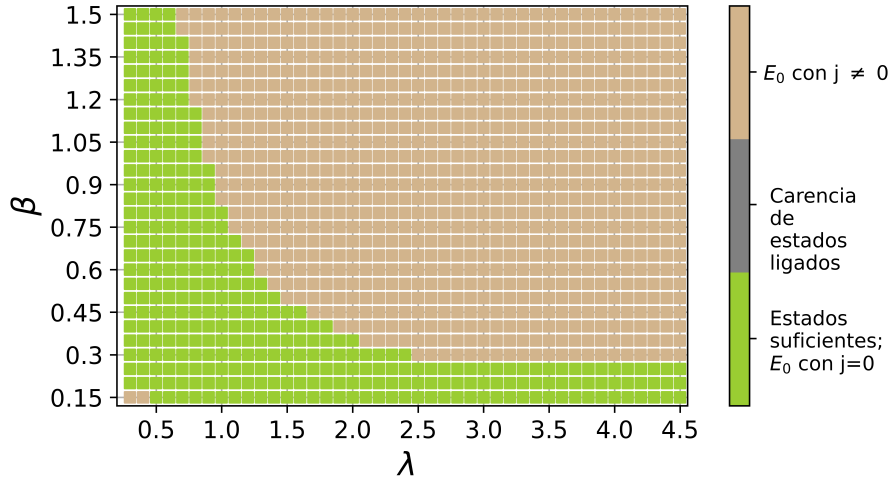
## 6.5. Glueballs en una modificación del modelo propuesto por Cornwall

En esta sección presentamos los resultados obtenidos usando la modificación del modelo de Cornwall mediante un potencial lineal, presentada en la sección 3.3.

Anteriormente, en la figura 6.2, observamos una propiedad característica del potencial del modelo de Cornwall a orden cero,  $V_0 = 2m(1 - e^{-mr\beta}) - \frac{1}{6} \frac{\lambda e^{-mr}}{r}$ , y es que este potencial pierde estados ligados a medida que se aumenta el parámetro  $\beta$ . Esto limita mucho la región disponible para el estudio. A diferencia de dicho caso, los potenciales lineales generan una cantidad infinita de estados ligados, de modo que se espera poder explorar una región de valores en  $\beta$  mayor usando esta modificación lineal al potencial.

Variamos  $\lambda$  desde 0.3 hasta 4.5 con un paso de 0.1,  $\beta$  desde 0.15 hasta 1.5 con un paso de 0.05, y la energía desde  $E^{(0)} = 2$  hasta  $E^{(0)} = 22$  (según determinamos, no parecen haber estados ligados a orden cero por debajo de  $E^{(0)} = 2m$ , e ir hasta  $E^{(0)} = 22m$  parece ser suficiente para nuestros fines).

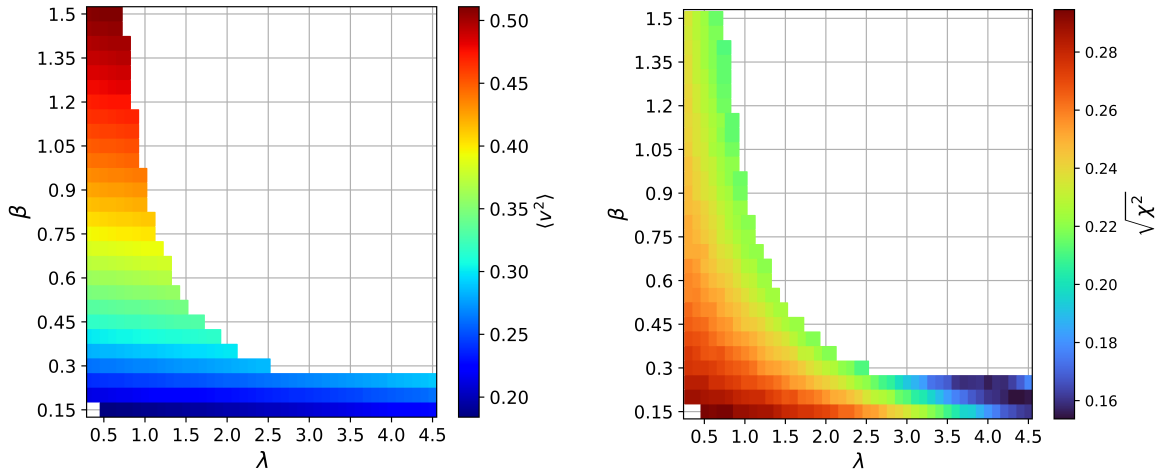
En la figura 6.6 estudiamos el conjunto de puntos que cumplen con los requisitos necesarios para poder realizar una comparativa con los datos del lattice. Como fue anticipado, la gráfica muestra que en este caso ninguno de los puntos presenta una cantidad insuficiente de estados ligados. A diferencia con el caso anterior, ahora se aprecian gran cantidad de puntos en los cuales el estado fundamental tiene momento angular total no nulo. Descartando dichos puntos, calculamos en cada  $\{\lambda, \beta\}$  el valor medio del cuadrado de la velocidad del estado fundamental, y el valor de  $\sqrt{\chi^2}$ , usando, al igual que antes, los cinco estados de menor energía. Estas gráficas se muestran en la tabla 6.4, en la parte izquierda y derecha respectivamente. En el gráfico de las velocidades cuadráticas medias (izq.), se



**Figura 6.6:** Gráfico que representa con verde los puntos  $\{\lambda, \beta\}$  que cumplen con los requisitos necesarios para poder ser comparados con los datos del lattice.

observa que a medida que aumenta  $\beta$ , los estados fundamentales son cada vez más relativistas. Los valores más altos de  $\beta$  dan velocidades del estado fundamental en el límite de lo previsto, de modo que, por consistencia, esperamos obtener un valor de  $\beta$  por debajo de 1.5. En la gráfica de  $\sqrt{\chi^2}$  en función de  $\{\lambda, \beta\}$  (der.), se determina que el punto con la discrepancia mínima respecto a las predicciones del lattice es  $\{\lambda_{min} = 4.3, \beta_{min} = 0.2\}$ , presentando un valor  $\sqrt{\chi_{min}^2} \sim 15\%$ , que se encuentra dentro del margen de error esperado, y con un valor característico para las velocidades medias también dentro de lo previsto ( $\langle v^2 \rangle \sim 0.27$ ). Es posible que explorando hacia  $\lambda$  mayores y  $\beta$  menores se pueda mejorar aún más el ajuste, pues la gráfica parece presentar esa tendencia en la esquina inferior izquierda. Sin embargo, eso implicaría ir por fuera de los límites de  $\{\lambda, \beta\}$  esperados según los estudios previos en la literatura. [13] [38]

En las figuras de la tabla 6.5 estudiamos el espectro de energías en el punto  $\{\lambda_{min}, \beta_{min}\}$ . En la figura de la izquierda, se muestran los datos que fueron ajustados (los cinco glueballs más livianos), que dan  $\chi_{min}^2$ . Nuevamente observamos que los glueballs con  $j = 2$  no quedan ordenados como en las predicciones del lattice, pero es esperable dentro de las incertidumbres existentes. En la figura del lado derecho comparamos un conjunto más grande de datos (todos los del lattice con  $C = +$ ), dando una discrepancia considerablemente mayor, de 32 %, que está por encima del margen de error esperado. Si se desglosan estos últimos en cada valor de momento angular total, se observa un comportamiento análogo al que presentan los resultados en el modelo de Cornwall, siendo los estados con  $j = 1$  los que presentan la mayor discrepancia respecto al lattice, de 51 %, fuera de los límites esperados. Por otro lado,  $j = 0$  y  $j = 2$  se encuentran dentro del margen



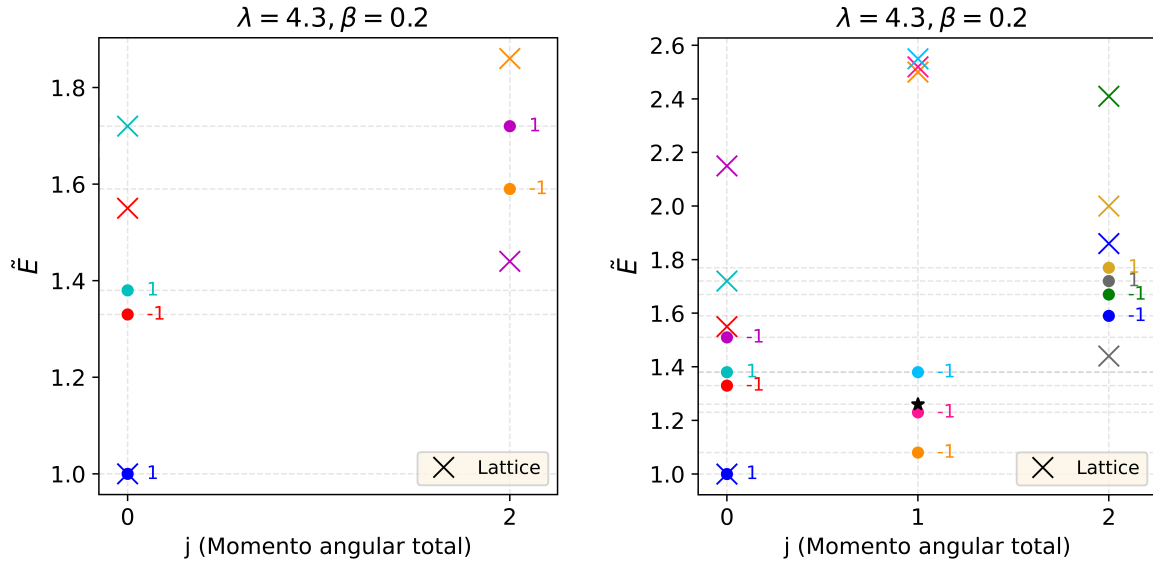
**Tabla 6.4:** A la izquierda se grafican las velocidades cuadráticas medias del estado fundamental en cada punto. A la derecha se grafica la discrepancia  $\sqrt{\chi^2}$  entre los 5 estados más livianos del lattice y sus correspondientes en nuestra resolución.

de error esperado, con discrepancias de 19% y 20% respectivamente.

El estado representado con una estrella no tiene un correspondiente en los estados que ofrece el lattice (tabla 6.1), porque tiene  $P = +1$  (y  $C = +1$ , como todos los estados que graficamos). Sin embargo, no es posible afirmar que viola la jerarquía de los números cuánticos que predice el lattice, pues dentro de los errores relativos esperados cabe la posibilidad de que dicho estado en realidad se encuentre por encima del punto de color celeste, en cuyo caso podría corresponderse con un estado de más alta energía del lattice. Algo parecido sucede con los puntos azul, verde y beige en  $j = 2$ , que tampoco siguen el orden predicho por el lattice, pero dentro del margen de error de los datos, su orden podría ser intercambiable.

Por otro lado, corroboramos que las correcciones perturbativas  $E^{(p)}$  cumplen con los tamaños esperados respecto a las energías a orden cero  $E^{(0)}$ , manteniéndose  $\frac{E^{(p)}}{E^{(0)}}$  por debajo de 0.36 para todos los datos. La gran mayoría se encuentran, de hecho, por debajo de 0.25.

Este modelo ofrece, en comparación con el modelo de Cornwall, discrepancias un tanto mayores respecto al lattice. Particularmente, los glueballs con  $j = 1$  son los que presentan discrepancias considerablemente mayores a las esperadas. Como las correcciones  $E^{(p)}$  tienen los tamaños esperados, que están en concordancia con los desarrollos perturbativos no relativistas, es difícil concluir que tales discrepancias provengan de este desarrollo. Una posibilidad a tener en cuenta es que tengan origen en la propia naturaleza del modelo, incapaz de describir satisfactoriamente la física esperada, al menos notoria-



**Tabla 6.5:** Espectro de energías del glueball según nuestros cálculos numéricos y según datos del lattice. A la izquierda se contrastan los cinco pares de estados que se usaron para el ajuste y minimización de  $\chi^2$  (los cinco glueballs más livianos). A la derecha se contrastan para  $\{\lambda_{min}, \beta_{min}\}$ , una mayor cantidad de estados.

mente para  $j = 1$ . Una ventaja de este modelo, sin embargo, es que al generar mayor cantidad de estados ligados no se presentan ambigüedades por falta de estados ligados, como sí parece suceder en el modelo de Cornwall, donde uno de los estados que predice el lattice no se pudo encontrar para los valores de  $\{\lambda, \beta\}$  que minimizaron  $\chi^2$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones y perspectiva a futuro

En este trabajo se estudió el espectro de glueballs, partículas constituidas por gluones. En particular, se consideró el caso de glueballs compuestos por dos gluones. Se estudiaron estas partículas en dos modelos fenomenológicos que involucran gluones masivos. Uno de estos modelos fue propuesto en un artículo de J.M. Cornwall y A.Soni en 1983, y el otro es una modificación del anterior por un potencial lineal. Ambos modelos pretenden describir un régimen de glueballs no relativistas, donde las energías de interacción son considerablemente menores que las masas de las partículas involucradas.

El marco teórico utilizado se desarrolla en torno a la ecuación de Schrödinger. Debimos justificar que la misma puede emerger en una teoría cuántica con campos de gauge masivos, bajo aproximaciones no relativistas e imponiendo una condición sobre las masas de los gluones intercambiados en funciones de correlación. Para esta última condición, que fue impuesta ad-hoc, carecemos de una justificación formal, aunque dicha condición es necesaria para reproducir la fenomenología esperada, al menos desde el enfoque utilizado en esta tesis. En otras teorías como QED, donde el fotón no tiene masa, estas aproximaciones son más fáciles de justificar. Las deducciones aquí tratadas fueron desarrolladas específicamente en el modelo de Curci-Ferrari, un modelo con gluones masivos distinto a los que principalmente estudiamos en este trabajo, pero que comparte similitudes y nos ofrece un marco teórico accesible para el desarrollo de estos cálculos.

Partiendo desde la ecuación de Schrödinger y mediante un tratamiento perturbativo de los Hamiltonianos de los modelos, calculamos el espectro de energías de glueballs, variando dos parámetros en los términos de interacción de los Hamiltonianos. Comparamos estos resultados con datos de simulaciones numéricas recientes, hechas en la teoría de Yang-Mills Pura discretizada en el lattice. Determinamos los valores de los parámetros que minimizan el error relativo entre los datos, y para esos parámetros analizamos el

espectro en mayor profundidad, estudiando los valores medios de las velocidades de los estados fundamentales, el “tamaño” de las correcciones perturbativas a las energías de los estados, y el error relativo entre los datos del lattice y nuestros resultados.

Para ambos modelos pudimos observar que los valores de las velocidades medias no cumplen exactamente con la cinemática que fue utilizada para justificar la deducción de una ecuación de Schrödinger en los capítulos previos, si no que resultan ser un tanto más relativistas. Aún así, se calculó el espectro de glueballs desde la ecuación de Schrödinger y las discrepancias observadas respecto a los datos del lattice concuerdan en ambos modelos con el error esperado, que es de 25% o menos. Para momento angular total  $j = 0$  y  $j = 2$ , los errores relativos obtenidos son de 20% o menores. Ambos modelos fallan, sin embargo, en la descripción de los estados con momento angular total  $j = 1$ , dando discrepancias mayores al 38% y 51% respecto a los datos del lattice. El origen exacto de estas discrepancias es desconocido, aunque parece ser una manifestación de la propia naturaleza de los modelos, una incapacidad para describir adecuadamente ese caso. Ambos modelos presentan resultados similares en cuanto al espectro de energías, aunque, teniendo en cuenta el error relativo, el modelo de Cornwall parece ofrecer resultados más precisos. Aún así, pudimos observar algunas particularidades en ambos modelos, por supuesto limitados también por nuestro método de cálculo. El modelo de Cornwall presenta en algunos casos menos estados ligados de los esperados, aunque es posible que este fenómeno esté directamente relacionado con nuestro tratamiento perturbativo, más que con la naturaleza del mismo. Por otro lado, el modelo con un potencial lineal presenta una tendencia a mejorar el ajuste con los datos del lattice para valores de parámetros que se encuentran por fuera de lo esperado según las estimaciones de la literatura, lo cual permite cuestionarse el rango de aplicabilidad del mismo. Por último, una particularidad común a ambos modelos es que los resultados parecen ser considerablemente sensibles a la elección del orden dominante de teoría de perturbaciones. Es posible que esta sensibilidad se deba a que el parámetro que regula los desarrollos perturbativos en QCD y en estos modelos, no es particularmente pequeño.

Como primer acercamiento, el modelo de Cornwall parece ser más fiable para comprender en mejor medida algunos aspectos de los gluones de más bajas energías, aunque las discrepancias en  $j = 1$  permiten cuestionarse el alcance del modelo y su rango de aplicabilidad. Un estudio más profundo es necesario para evaluar con mayor exactitud la aplicabilidad de este modelo, al menos para los valores de momento angular total que dieron resultados dentro de lo esperado. Disminuir el margen de error en los cálculos es necesario para poner a prueba su predictibilidad. Una opción para ello es entender en profundidad el origen del Hamiltoniano y deducir los siguientes términos perturbativos, o

un paso aún más allá podría ser estudiar el modelo desde el formalismo manifiestamente relativista a partir de las teorías de campo que los sustentan, sin limitarse al tratamiento vía ecuación de Schrödinger. También, comprender por qué el modelo es incapaz de describir los estados con  $j = 1$ , e inferir la masa del gluón a partir del espectro de glueballs son puntos interesantes que podrían ser estudiados. Aún así, es importante considerar que otras alternativas ya presentes en la literatura podrían ser más provechosas para su estudio, como por ejemplo el modelo de Curci-Ferrari, dado que han sido previamente investigadas en mayor profundidad y exitosamente puestas a prueba en algunos aspectos. Sería prudente considerar estas opciones, que pueden ofrecer una perspectiva más amplia y una base más sólida para sus investigaciones.

Otro aspecto más global que podría ser estudiado en mayor profundidad es la deducción de una ecuación de Schrödinger en un régimen no relativista para teorías cuánticas con campos de gauge masivos. Sería enriquecedor contar con desarrollos formalizados y fundamentados en base a primeros principios, que carezcan de suposiciones ad-hoc como la que se usó en esta tesis para las masas de los gluones intercambiados. Entender estos aspectos podría ser fundamental para el estudio del régimen de bajas energías de QCD.

# APÉNDICES

# Apéndice 1

## Vértice glueball-gluón-gluón a orden dominante

Calculamos el vértice glueball-gluón-gluón a orden dominante en  $g$ . Este vértice se calcula como:

$$\tilde{v}_{\rho\lambda}^{bc}(x, y, z) \equiv \frac{1}{4} \frac{\delta(F_{\mu\nu}^a(x))^2}{\delta A_\lambda^c(z) \delta A_\rho^b(y)} \quad (1.1)$$

Empecemos por la primer derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(F_{\mu\nu}^a(x))^2}{\delta A_\rho^b(y)} &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a(x) \frac{\delta F_{\mu\nu}^a(x)}{\delta A_\rho^b(y)} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a(x) \left( \delta_{\rho\nu} \delta_{ab} \partial_{x_\mu} \delta^4(x-y) - \delta_{\rho\mu} \delta_{ab} \partial_{x_\nu} \delta^4(x-y) + \mathcal{O}(g) \right) \\ &= F_{\mu\rho}^b(x) \partial_{x_\mu} \delta^4(x-y) + \mathcal{O}(g) \end{aligned} \quad (1.2)$$

A orden dominante podemos ignorar el término de orden  $g$ . Sustituyendo en (1.1), reescribiendo los deltas de dirac como integrales y usando invariancia bajo traslación para fijar  $x$  en cero:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\rho\lambda}^{bc}(x, y, z) &= \frac{\delta F_{\mu\rho}^b(x)}{\delta A_\lambda^c(z)} \partial_{x_\mu} \delta^4(x-y) = \delta_{\rho\lambda} \delta^{bc} \partial_{x_\mu} \delta^4(x-y) \partial_{x_\mu} \delta^4(x-z) \\ &- \delta^{bc} \partial_{x_\lambda} \delta^4(x-y) \partial_{x_\rho} \delta^4(x-z) = \delta_{\rho\lambda} \delta^{bc} \partial_{x_\mu} \int e^{i(x-y)\cdot q} d^4 q \partial_{x_\mu} \int e^{i(x-z)\cdot p} d^4 p \\ &- \delta^{bc} \partial_{x_\lambda} \int e^{i(x-y)\cdot q} d^4 q \partial_{x_\rho} \int e^{i(x-z)\cdot p} d^4 p = \delta_{\rho\lambda} \delta^{bc} \int (iq_\mu)(ip_\mu) e^{-i(y\cdot q+z\cdot p)} d^4 q d^4 p \\ &- \delta^{bc} \int (iq_\lambda)(ip_\rho) e^{-i(y\cdot q+z\cdot p)} d^4 q d^4 p = \int \left( -\delta_{\rho\lambda} \delta^{bc} q_\mu p_\mu + \delta^{bc} q_\lambda p_\rho \right) e^{-i(y\cdot q+z\cdot p)} d^4 q d^4 p \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otro lado, definimos el vértice en función de su transformada de Fourier y usamos invariancia bajo traslación para fijar  $x$  en cero:

$$\tilde{v}_{\rho\lambda}^{bc}(y, z) = \int \tilde{v}_{\rho\lambda}^{bc}(p, q) e^{-i(y \cdot q + z \cdot p)} d^4 q d^4 p \quad (1.4)$$

Comparando (1.3) y (1.4) obtenemos una igualdad para la transformada de Fourier del vértice:

$$\tilde{v}_{\rho\lambda}^{bc}(p, q) = \delta^{bc} \left( p_\rho q_\lambda - p \cdot q \delta_{\rho\lambda} \right) \quad (1.5)$$

# Apéndice 2

## Ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea

Podemos definir la función de correlación de la figura 4.8 como  $M(p) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} M_{(n)}(p)$ . Por un lado, podemos escribir esta suma en función de  $\tilde{M}_{(n)}$ , usando la primera igualdad de la ecuación (4.13):

$$M(p) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{(n)}(p) = (N_c^2 - 1) \int d^4 q \left( \sum_{n=0}^{\infty} (N_c)^n \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) \right) G_{\gamma\theta}\left(\frac{p}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}\left(\frac{p}{2} - q\right) \times \tilde{v}_{\theta\lambda}\left(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q\right) \quad (2.1)$$

Por otro lado, podemos desarrollar la misma suma pero separando el término  $n = 0$  del resto ( $n \neq 0$ ). Luego reescribir  $M_{(0)}$  usando la primera igualdad de la ecuación (4.13) y los términos con  $n \neq 0$  usando la segunda igualdad de esa misma ecuación. Haciendo eso se obtiene:

$$\begin{aligned} M(p) &= M_{(0)}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{(n)}(p) \\ &= (N_c^2 - 1) \int d^4 q \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) G_{\gamma\theta}\left(\frac{p}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}\left(\frac{p}{2} - q\right) \tilde{v}_{\theta\lambda}\left(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q\right) \\ &\quad + (N_c^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4 l \int d^4 q (N_c)^n \tilde{M}_{(n-1)\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) G_{\gamma\theta}\left(\frac{p}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}\left(\frac{p}{2} - q\right) \\ &\quad \times \tilde{v}_{\theta\lambda}\left(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q\right) \\ &= (N_c^2 - 1) \int d^4 q \left( \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) + N_c \int d^4 l \sum_{n=1}^{\infty} (N_c)^{n-1} \tilde{M}_{(n-1)\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \right) \\ &\quad \times G_{\gamma\theta}\left(\frac{p}{2} + q\right) G_{\xi\lambda}\left(\frac{p}{2} - q\right) \tilde{v}_{\theta\lambda}\left(\frac{p}{2} - q, -\frac{p}{2} + q\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Comparando (2.2) con (2.1) se concluye que los integrandos deben ser iguales. Luego redefinimos la suma bajo el cambio de variable  $n \rightarrow n - 1$  y usamos una nueva definición

$$\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (N_c)^n \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) :$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} (N_c)^n \tilde{M}_{(n)\gamma\xi}(p, q) = \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) \\ &+ N_c \int d^4l \left( \sum_{n=0}^{\infty} (N_c)^n \tilde{M}_{(n)\alpha\beta}(p, l) \right) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \\ &= \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) + N_c \int d^4l \tilde{M}_{\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

De modo que obtuvimos la ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea:

$$\tilde{M}_{\gamma\xi}(p, q) = \tilde{M}_{(0)\gamma\xi}(p, q) + N_c \int d^4l \tilde{M}_{\alpha\beta}(p, l) S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) \quad (2.4)$$

## Apéndice 3

### Aproximación de $S_{\alpha\gamma\beta\xi}$ a orden dominante

$$S_{\alpha\gamma\beta\xi}(p, l, q) = G_{\alpha\rho} \left( \frac{p}{2} + l \right) G_{\beta\sigma} \left( \frac{p}{2} - l \right) V_{\rho\theta\gamma} \left( \frac{p}{2} + l, q - l, -\frac{p}{2} - q \right) \tilde{G}_{\theta\lambda}(l - q) \\ \times V_{\sigma\lambda\xi} \left( \frac{p}{2} - l, l - q, -\frac{p}{2} + q \right) \quad (3.1)$$

El régimen cinemático es:

(A) Cuadrimomento del glueball:	$\begin{cases} p = (p_0, \vec{0}) \\ p_0 = 2m + m\mathcal{O}(\tilde{g}^4) \end{cases}$
(B) Cuadrimomentos intercambiados:	$\begin{cases} k = (k_0, \vec{k}) \\ k_0 = m\mathcal{O}(\tilde{g}^4) \\  \vec{k}  = m\mathcal{O}(\tilde{g}^2) \end{cases}$
(C) Masa de gluones intercambiados:	$\tilde{m} = m\mathcal{O}(\tilde{g}^2)$

Teniendo en cuenta este régimen cinemático, se desarrollan por Taylor las estructuras en la ecuación (3.1) hasta orden dominante en cada una. Se obtiene:

$$\mathbf{1)} \quad \begin{cases} G_{00} \left( \frac{p}{2} \pm l \right) \approx 0 \\ G_{jj} \left( \frac{p}{2} \pm l \right) \approx \frac{i}{\left( \frac{p}{2} \pm l \right)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ G_{j0} \left( \frac{p}{2} \pm l \right) \approx 0 \\ G_{jk} \left( \frac{p}{2} \pm l \right) \approx 0 \quad , \text{ si } j \neq k \end{cases} \Rightarrow G_{\mu\nu} \left( \frac{p}{2} \pm l \right) = \frac{i}{\left( \frac{p}{2} \pm l \right)^2 - m^2 + i\epsilon} (\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0})$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_{00}(l-q) \approx \frac{i}{-(\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \\ \tilde{G}_{jj}(l-q) \approx \frac{i}{-(\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \left( -1 + \frac{(l_j - q_j)^2}{(\vec{l}-\vec{q})^2} \right) \\ \tilde{G}_{j0}(l-q) \approx 0 \\ \tilde{G}_{jk}(l-q) \approx \frac{i}{-(\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \frac{(l_j - q_j)(l_k - q_k)}{(\vec{l}-\vec{q})^2} \quad , \text{ si } j \neq k \end{array} \right.$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_{\mu 0}(l-q) \approx \frac{i\delta_{\mu 0}}{-(\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \\ \tilde{G}_{jk}(l-q) \approx \frac{i}{-(\vec{l}-\vec{q})^2 - \tilde{m}^2 + i\epsilon} \left( -\delta_{jk} + \frac{(l_j - q_j)(l_k - q_k)}{(\vec{l}-\vec{q})^2} \right) \end{array} \right.$$

$$3) \quad V_{\mu\nu\rho} \left( \frac{p}{2} \pm l, \pm(q-l), -\frac{p}{2} \mp q \right) \approx mg(\eta_{\mu\nu}\delta_{0\rho} + \eta_{\nu\rho}\delta_{0\mu} - 2\eta_{\rho\mu}\delta_{0\nu})$$

A partir de estas aproximaciones es directo obtener la ecuación (4.19).

## Apéndice 4

### Ecuación de Schrödinger en el espacio de posición

Tomando la transformada de Fourier del lado izquierdo de la igualdad (4.24):

$$\int d^3q \psi_{ij}(E_p, q) \left(E_b - \frac{\vec{q}^2}{m}\right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \left(E_b + \frac{\nabla^2}{m}\right) \psi_{ij}(r) \quad (4.1)$$

El lado derecho da un poco más de trabajo:

$$-2\pi g^2 N_c \int d^3q \int d^3l \psi_{ij}(E_p, l_0^{(0)}, \vec{l}) \frac{1}{(\vec{l} - \vec{q})^2 + \tilde{m}^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (4.2)$$

Mediante un cambio de variable  $\vec{q} \rightarrow l + u$  se obtiene:

$$\begin{aligned} & -2\pi g^2 N_c \int d^3u \frac{1}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{i\vec{u}\cdot\vec{r}} \int d^3l \psi_{ij}(E_p, l_0^{(0)}, \vec{l}) e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}} \\ & = -2\pi g^2 N_c \psi_{ij}(r) \int d^3u \frac{1}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{i\vec{u}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La integral se puede hacer en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \int d^3u \frac{1}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{i\vec{u}\cdot\vec{r}} & = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{iur\cos\theta} \sin\theta d\phi d\theta du \\ & = 2\pi \int_1^{-1} \int_0^\infty \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{iur\nu} d\theta (-1) d\nu \\ & = -2\pi \int_0^\infty \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} (e^{-iur} - e^{iur}) \frac{1}{iur} du = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{u}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} \sin(ur) du \\ & = \frac{2\pi}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{u}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} \sin(ur) du = \text{Im} \left( \frac{2\pi}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{u}{\vec{u}^2 + \tilde{m}^2} e^{iur} du \right) \\ & = \frac{2\pi^2}{r} e^{-mr} \end{aligned} \quad (4.4)$$

La última igualdad se resolvió la integral por el teorema de residuos y se pasó de  $\tilde{m}$  a  $m$  levantando la aproximación que usamos en los pasos intermedios.

De (4.24), (4.1), (4.3) y (4.4) se obtiene la ecuación de Schrödinger en el espacio de posición:

$$(E_b + \frac{\nabla^2}{m})\psi_{ij}(r) = -4\pi^3 g^2 N_c \psi_{ij}(r) \frac{e^{-mr}}{r} \quad (4.5)$$

# **ANEXOS**

# Bibliografía

- [1] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.
- [2] C. Gattringer and C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice*, vol. 788. Springer, Berlin, 2010.
- [3] V. N. Popov and L. D. Faddeev, *Perturbation theory for gauge invariant fields*, pp.~40–60. 2005.
- [4] V. Gribov, “Quantization of non-abelian gauge theories”, *Nuclear Physics* **139** (1978) 1–19.
- [5] G. Dell’Antonio and D. Zwanziger, “Ellipsoidal Bound on the Gribov Horizon Contradicts the Perturbative Renormalization Group”, *Nucl. Phys. B* **326** (1989) 333–350.
- [6] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?”, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346–1349.
- [7] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343–1346.
- [8] A. I. Alekseev, “Strong coupling constant to four loops in the analytic approach to QCD”, *Few Body Syst.* **32** (2003) 193–217, [arXiv:hep-ph/0211339](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0211339).
- [9] J. Mandula and M. Ogilvie, “The gluon is massive: A lattice calculation of the gluon propagator in the landau gauge”, *Physics Letters B* **185** (1987) no.~1, 127–132. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387915413>.
- [10] J. E. Mandula and M. Ogilvie, “Efficient gauge fixing via overrelaxation”, *Physics Letters B* **248** (1990) no.~1, 156–158. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939090031Z>.

- [11] K. G. Wilson, *Monte-Carlo Calculations for the Lattice Gauge Theory*, pp.~363–402. Springer US, Boston, MA, 1980.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7571-5\\_20](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7571-5_20).
- [12] K. G. Wilson, “Confinement of quarks”, *Phys. Rev. D* **10** (Oct, 1974) 2445–2459.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>.
- [13] A. G. Duarte, O. Oliveira, and P. J. Silva, “Lattice Gluon and Ghost Propagators, and the Strong Coupling in Pure SU(3) Yang-Mills Theory: Finite Lattice Spacing and Volume Effects”, *Phys. Rev. D* **94** (2016) no.~1, 014502, [arXiv:1605.00594](https://arxiv.org/abs/1605.00594) [hep-lat].
- [14] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck, “Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green’s functions in the deep infrared”, *Phys. Lett. B* **676** (2009) 69–73, [arXiv:0901.0736](https://arxiv.org/abs/0901.0736) [hep-lat].
- [15] A. Cucchieri and T. Mendes, “Numerical test of the Gribov-Zwanziger scenario in Landau gauge”, *PoS QCD-TNT09* (2009) 026, [arXiv:1001.2584](https://arxiv.org/abs/1001.2584) [hep-lat].
- [16] A. Cucchieri and T. Mendes, “Landau-gauge propagators in Yang-Mills theories at beta = 0: Massive solution versus conformal scaling”, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 016005, [arXiv:0904.4033](https://arxiv.org/abs/0904.4033) [hep-lat].
- [17] D. Dudal, O. Oliveira, and N. Vandersickel, “Indirect lattice evidence for the Refined Gribov-Zwanziger formalism and the gluon condensate  $\langle A^2 \rangle$  in the Landau gauge”, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 074505, [arXiv:1002.2374](https://arxiv.org/abs/1002.2374) [hep-lat].
- [18] J. C. R. Bloch, “Two loop improved truncation of the ghost gluon Dyson-Schwinger equations: Multiplicatively renormalizable propagators and nonperturbative running coupling”, *Few Body Syst.* **33** (2003) 111–152, [arXiv:hep-ph/0303125](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0303125).
- [19] A. C. Aguilar and A. A. Natale, “A Dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations”, *JHEP* **08** (2004) 057, [arXiv:hep-ph/0408254](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0408254).
- [20] P. Boucaud, T. Bruntjen, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc, A. Y. Lokhov, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, “Is the QCD ghost dressing function finite at zero momentum?”, *JHEP* **06** (2006) 001, [arXiv:hep-ph/0604056](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0604056).
- [21] A. C. Aguilar and J. Papavassiliou, “Power-law running of the effective gluon mass”, *Eur. Phys. J. A* **35** (2008) 189–205, [arXiv:0708.4320](https://arxiv.org/abs/0708.4320) [hep-ph].

- [22] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, “Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations”, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 025010, [arXiv:0802.1870 \[hep-ph\]](#).
- [23] P. Boucaud, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, “On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator”, *JHEP* **06** (2008) 099, [arXiv:0803.2161 \[hep-ph\]](#).
- [24] J. Rodriguez-Quintero, “On the massive gluon propagator, the PT-BFM scheme and the low-momentum behaviour of decoupling and scaling DSE solutions”, *JHEP* **01** (2011) 105, [arXiv:1005.4598 \[hep-ph\]](#).
- [25] J. M. Pawłowski, D. F. Litim, S. Nedelko, and L. von Smekal, “Signatures of confinement in Landau gauge QCD”, *AIP Conf. Proc.* **756** (2005) no.~1, 278–280, [arXiv:hep-th/0412326](#).
- [26] C. S. Fischer and H. Gies, *JHEP*. **10** (2004) 048.
- [27] C. S. Fischer, A. Maas, and J. M. Pawłowski, *Annals Phys.* **324** (2009) 2408.
- [28] H. Verschelde, K. Knecht, K. Van Acoleyen, and M. Vanderkelen, “The Nonperturbative groundstate of QCD and the local composite operator  $A(\mu)^{**2}$ ”, *Phys. Lett. B* **516** (2001) 307–313, [arXiv:hep-th/0105018](#).
- [29] R. E. Browne and J. A. Gracey, “Two loop effective potential for  $\langle A(u)^{**\mu} \rangle$  in the Landau gauge in quantum chromodynamics”, *JHEP* **11** (2003) 029, [arXiv:hep-th/0306200](#).
- [30] D. Dudal, J. A. Gracey, S. P. Sorella, N. Vandersickel, and H. Verschelde, “The Landau gauge gluon and ghost propagator in the refined Gribov-Zwanziger framework in 3 dimensions”, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 125012, [arXiv:0808.0893 \[hep-th\]](#).
- [31] J. Serreau and M. Tissier, “Lifting the Gribov ambiguity in Yang-Mills theories”, *Phys. Lett. B* **712** (2012) 97–103, [arXiv:1202.3432 \[hep-th\]](#).
- [32] M. Tissier, “Gribov copies, avalanches and dynamic generation of a gluon mass”, *Phys. Lett. B* **784** (2018) 146–150, [arXiv:1711.08694 \[hep-th\]](#).
- [33] J. M. Cornwall and A. Soni, “Glueballs as Bound States of Massive Gluons”, *Phys. Lett. B* **120** (1983) 431.

- [34] G. Curci and R. Ferrari, “On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields”, *Nuovo Cim. A* **32** (1976) 151–168.
- [35] M. Tissier and N. Wschebor, “Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory”, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 101701, [arXiv:1004.1607 \[hep-ph\]](#).
- [36] J. A. Gracey, M. Peláez, U. Reinosa, and M. Tissier, “Two loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model”, *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.~3, 034023, [arXiv:1905.07262 \[hep-th\]](#).
- [37] M. Peláez, U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor, “A window on infrared QCD with small expansion parameters”, *Rept. Prog. Phys.* **84** (2021) no.~12, 124202, [arXiv:2106.04526 \[hep-th\]](#).
- [38] A. Athenodorou and M. Teper, “The glueball spectrum of SU(3) gauge theory in 3 + 1 dimensions”, *JHEP* **11** (2020) 172, [arXiv:2007.06422 \[hep-lat\]](#).
- [39] H. J. Rothe, K. D. Rothe, and J. A. Swieca, “SCREENING VERSUS CONFINEMENT”, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 3020.
- [40] J. M. Cornwall, “Quark Confinement and Vortices in Massive Gauge Invariant QCD”, *Nucl. Phys. B* **157** (1979) 392–412.
- [41] J. M. Cornwall, “Dynamical Mass Generation in Continuum QCD”, *Phys. Rev. D* **26** (1982) 1453.
- [42] W.-S. Hou, C.-S. Luo, and G.-G. Wong, “Glueball states in a constituent gluon model”, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 014028, [arXiv:hep-ph/0101146](#).
- [43] K. G. Wilson, “Confinement of Quarks”, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445–2459.
- [44] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [45] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.
- [46] P. Hoyer, “Bound states – from QED to QCD”, 2, 2014. [arXiv:1402.5005 \[hep-ph\]](#).
- [47] P. Hoyer, “Lectures on Bound states”, 5, 2016. [arXiv:1605.01532 \[hep-ph\]](#).

- [48] M. Gell-Mann and F. Low, “Bound states in quantum field theory”, *Phys. Rev.* **84** (1951) 350–354.
- [49] P. Hoyer, *Journey to the Bound States*. SpringerBriefs in Physics. Springer, 8, 2021. [arXiv:2101.06721](https://arxiv.org/abs/2101.06721) [hep-ph].
- [50] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, “A relativistic equation for bound-state problems”, *Phys. Rev.* **84** (Dec, 1951) 1232–1242. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.1232>.
- [51] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics Vol.2*. Wiley,, 1978.
- [52] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics Vol.1*. Wiley,, 1978.
- [53] Y. Chen *et al.*, “Glueball spectrum and matrix elements on anisotropic lattices”, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 014516, [arXiv:hep-lat/0510074](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0510074).
- [54] A. Chowdhury, A. Harindranath, and J. Maiti, “Physical observables from boundary artifacts: scalar glueball in Yang-Mills theory”, *JHEP* **02** (2016) 134, [arXiv:1509.07959](https://arxiv.org/abs/1509.07959) [hep-lat].