

TESIS DE MAESTRÍA

---

# Estabilidad asintótica de los espacio-tiempos de doble cúspide

---

Por: Alejandro Bellati  
Orientador: Martín Reiris



**UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY**

Maestría en Matemática  
PEDECIBA  
Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay



## Resumen

Desde los primeros años de la teoría de la Relatividad General se ha buscado comprender el comportamiento a largo plazo de las soluciones cosmológicas de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Soluciones con simetrías globales, o perturbaciones de ella, han sido fuertemente estudiadas y son razonablemente entendidas. Por otro lado, gracias a los trabajos de Fischer, Moncrief, y M. Anderson, se sabe que hay una estrecha relación entre la evolución futura de las soluciones y la descomposición de Thurston de la 3-variedad espacial subyacente. Consecuentemente, los espacio-tiempos cosmológicos desarrollando una simetría asintótica deberían representar una pequeña parte de la gran variedad de comportamientos a largo plazo que aún no son conocidos. Este trabajo revisita un programa iniciado por M. Reiris que apunta a construir un nuevo tipo de solución cosmológica que fue propuesta por M. Anderson. En esta solución, escalando adecuadamente, dos variedades hiperbólicas con una cúspide cada una se separan a través de un *cuello toroidal* que las conecta a través de sus cúspides.

En este trabajo se prueba que la solución llamada *dobles cúspides*, espacio-tiempo con simetría  $\mathbb{T}^2$  que modela el comportamiento esperado en el cuello, es estable bajo perturbaciones que preservan la simetría. La prueba se reduce a probar la estabilidad de un segmento geodésico como mapa de ondas en el plano hiperbólico, y se relaciona con el trabajo de Sideris en mapas de ondas y el trabajo de Ringström sobre las asintóticas a futuro de los espacio-tiempos de Gowdy  $\mathbb{T}^3$ .



## Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
1. Motivación	5
2. Doble cúspides y sus propiedades globales	8
3. Resultados	11
4. Organización de la tesis	14
Capítulo 2. Preliminares	15
1. Geometría	15
2. Relatividad General y el problema de Cauchy	20
3. Ecuaciones de onda	23
4. Más notación, espacios funcionales y desigualdades útiles.	27
Capítulo 3. Perturbaciones polarizadas de soporte compacto	29
1. La desigualdad básica de energía	29
2. Energías de orden superior	32
Capítulo 4. Perturbaciones no polarizadas de soporte compacto	39
1. Distancia acotada a la solución background.	39
2. Existencia para todo tiempo futuro de soluciones $C^\infty$	43
3. Estabilidad asintótica	45
Capítulo 5. Perturbaciones generales	55
1. Extensión de resultados	55
Apéndice	59
1. Pruebas de lemas técnicos.	59
Referencias	69



## Introducción

### 1. Motivación

La teoría de la Relatividad General es una teoría geométrica de la gravedad que provee una descripción clásica de la estructura del espacio-tiempo y la gravedad, la cual ha logrado una cantidad de predicciones acerca de nuestro universo. En esta teoría el universo es modelado por un espacio-tiempo, esto es, una 4-variedad conexa provista de una métrica de Lorentz, tiempo orientable, y satisfaciendo la ecuación de Einstein. Cada punto de la variedad representa un evento, *un momento y un tiempo dado*. En ausencia de *materia* la ecuación de Einstein dice que la curvatura de Ricci de la métrica es nula

$$\text{Ric} = 0.$$

Todos los universos que son físicamente posibles son solución de la ecuación de Einstein y por lo tanto estudiando las soluciones de la ecuación se obtienen predicciones del universo. Sin embargo, esta ecuación constituye un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales para la métrica  $g$  y por lo tanto no hay un procedimiento general para hallar soluciones de interés. Un método comúnmente empleado es asumir que el universo tiene ciertas simetrías. Estas simetrías reducen la ecuación de Einstein, incluso a veces a un sistema de EDOs. Ejemplos de esto son las soluciones de Friedmann-Robertson-Walker, la solución de Schwarzschild, la solución de Kerr, desarrollos de grupos de Lie, etc. Otros ejemplos provienen de tomar cocientes de estos. Respecto a ejemplos sin simetrías, un conjunto de ejemplos proviene de estudiar perturbaciones de soluciones simétricas. Sin embargo, estos ejemplos quedan cortos ante la aparente gran variedad de comportamientos que se pueden encontrar *a largo plazo*. Pasamos a explicar esto brevemente.

La ecuación de Einstein admite un problema de Cauchy, o formulación de valores iniciales. Los datos iniciales consisten de una hipersuperficie  $\Sigma$ , una métrica Riemanniana en esta superficie  $h$ , y un tensor 2-covariante simétrico  $k$ . El teorema de Choque-Bruhat-Geroch ([6]) asegura que para datos iniciales satisfaciendo las *ligaduras de energía y momento* existe un espacio-tiempo  $(M, g)$ , solución de la ecuación de Einstein en el vacío, de forma que  $\Sigma$  es una hipersuperficie encajada de  $M$  que además es de Cauchy. Como veremos en los preliminares, esto significa que toda curva causal inextendible intersecta a  $\Sigma$  una y sólo una vez. Además,  $h$  y  $k$  son la métrica y la segunda forma fundamental inducida en  $\Sigma$ . Más aún,  $(M, g)$  es maximal. Al espacio  $(M, g)$  se le llama desarrollo maximal globalmente hiperbólico de los datos  $(\Sigma, h, k)$ . Cuando se tiene una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  se puede ver que  $M$  es foliada por hipersuperficies de Cauchy todas difeomorfas a  $\Sigma$  y de hecho  $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ . La superficie de Cauchy  $\Sigma$  puede pensarse como un *instante de tiempo*. De hecho, dada una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ , existe una *función temporal*  $t$  tal que  $\Sigma$  es una hipersuperficie de nivel, y tal que todas sus curvas

de nivel son hipersuperficies de Cauchy. Por temporal nos referimos a que el gradiente es de tipo tiempo y dirigido hacia pasado (lo que implica que  $t$  es creciente a lo largo de toda curva temporal dirigida a futuro). El hecho de que hay varias superficies de Cauchy es un reflejo del hecho de que no hay una forma preferida de medir el tiempo.

La ecuación de Einstein puede pensarse como ecuaciones de evolución en una 3-variedad. Para ver esto, eligiendo un difeomorfismo particular se tiene que  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ , y  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  es proyectar en la primera coordenada. Sea  $T$  un campo unitario tipo tiempo, normal a  $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ , y dirigido a futuro, y sea  $N$  la función de lapso y  $X$  el vector de shift definidos por

$$\partial_t = NT + X$$

con  $X$  tangente a  $\Sigma_t$  para todo  $t$ . Conociendo  $N$ ,  $X$  y la métrica inducida,  $h(t)$ , en  $\Sigma_t$  uno puede reconstruir  $g$ , la métrica en el espacio-tiempo. De esta manera uno interpreta  $\partial_t$  como el flujo del tiempo. A medida que nos movemos en el tiempo nos movemos de una hipersuperficie  $\Sigma_0$  a  $\Sigma_t$ . La métrica inducida cambia de  $h(0)$  a  $h(t)$ . Si identificamos  $\Sigma_t$  con  $\Sigma_0$  a través de  $\partial_t$  podemos ver a la métrica  $h(t)$  en  $\Sigma_0$ . De esta manera, el efecto de avanzar en el tiempo lo vemos como el de cambiar la métrica espacial  $h(t)$  en  $\Sigma_0$ . Más aún, la ecuación de Einstein en el vacío, asumiendo suficiente regularidad, queda equivalente a un sistema de evolución en  $\Sigma_0$  para  $h$  y  $k$ , junto con las ligaduras de energía y momento, [3]. De esta manera uno estudia una curva  $t \mapsto (h, k)$  en una 3-variedad. La frase *comportamiento a largo plazo* cobra sentido. Por supuesto que también aparecen preguntas como cuál foliación de superficies de Cauchy utilizar o cuáles son los mejores  $N$  y  $X$  para entender la evolución.

Hay varios tipos de espacio-tiempos que han sido de interés a lo largo de los años, entre ellos se encuentran los espacio-tiempos cosmológicos que son aquellos que admiten una hipersuperficie de Cauchy compacta. Desde el principio de la teoría se ha buscado entender la evolución a largo plazo de los espacio-tiempos cosmológicos. Espacio-tiempos con simetrías, como los modelos espacialmente homogéneos de Bianchi o los espacio-tiempos  $\mathbb{T}^2$ -simétricos de Gowdy, han sido fuertemente estudiados a lo largo de los años y son razonablemente entendidos ([17], [9], [18]). También se han estudiado fuertemente perturbaciones de espacio-tiempos con simetrías. Estos modelos son valiosos, pero debido a los trabajos de Fischer, Moncrief, y M. Anderson ([7], [8], [1], [2]), se sabe que hay una relación entre el comportamiento a largo plazo de las soluciones y la topología de la hipersuperficie de Cauchy, en particular con su descomposición de Thurston. Esto muestra que espacio-tiempos desarrollando una simetría asintótica a futuro deben ser solo una parte despreciable de la gran cantidad de comportamientos que se pueden encontrar.

A modo de ejemplo, M. Anderson estudia la evolución de la métrica inducida a lo largo de una foliación de curvatura media constante<sup>1</sup> (CMC), bajo una renormalización adecuada, asumiendo que la foliación CMC cubre todo el futuro de  $\Sigma$ , y bajo ciertas hipótesis sobre la curvatura del espacio-tiempo. Concluye que la curva de métricas inducidas, y renormalizadas, sobre  $\Sigma$  tiene una subsucesión convergente a una geometrización débil de  $\Sigma$  ([1]). Motivado por este resultado y por otras consideraciones sobre la geometrización de Thurston, M. Anderson propone (ver el final de [2]) el problema de encontrar

---

<sup>1</sup>La curvatura media de una hipersuperficie es la traza del mapa de Gauss.



una solución exhibiendo este comportamiento. Una tal solución sería, vagamente, dos 3-variedades hiperbólicas con una cúspide<sup>2</sup> cada una, que se separan a lo largo de un  *cuello toroidal* que las conecta a través de las cúspides. En esta imagen, las hipersuperficies son de curvatura media constante  $k \in (-\infty, 0)$  y si las métricas inducidas se renormalizan por la curvatura media de manera que todas las hipersuperficies tengan curvatura media constante igual a  $-3$ , entonces, a medida que  $k \rightarrow 0$  (futuro), la geometría en las piezas hiperbólicas tiende a la hiperbólica, separándose a lo largo del cuello toroidal que va colapsando en volumen con curvatura acotada, y que desarrolla simetría asintótica  $\mathbb{T}^2$ . La figura 1 ilustra el comportamiento. Un espacio-tiempo de esta forma daría un nuevo ejemplo no trivial de solución cosmológica cuya geometría espacial (renormalizada) evoluciona implementando la geometrización de Thurston de su superficie de Cauchy.

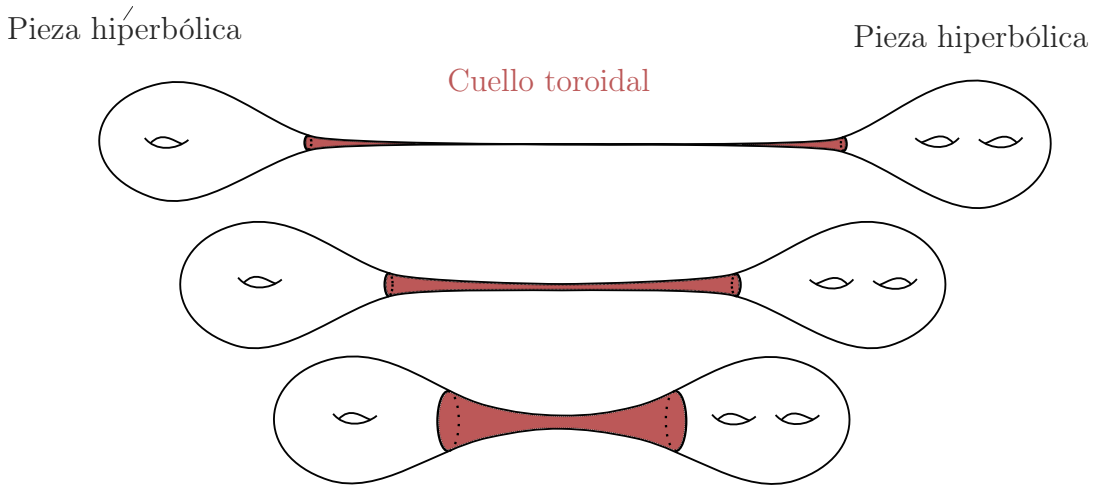


FIGURA 1. Comportamiento esperado del tipo de solución planteada en [2].

Los espacio-tiempos de  *doble cúspide*, o simplemente las doble cúspides, son espacio-tiempos que fueron introducidos en [14] y son soluciones explícitas con simetrías  $\mathbb{T}^2$ . Las mismas fueron diseñadas para modelar la evolución del cuello toroidal explicado arriba (la parte roja en la figura 1). Como mostraremos, tienen las propiedades adecuadas y son por eso una pieza crucial. Para estudiar la evolución combinada del cuello toroidal junto con las piezas hiperbólicas es necesario probar que las  *doble cúspides* son soluciones estables a futuro y además proveer estimaciones mostrando el decaimiento preciso. En este trabajo estudiamos la estabilidad a futuro de estos espacios bajo perturbaciones que preservan la simetría  $\mathbb{T}^2$ . Las ecuaciones de Einstein se reducen a una ecuación de onda simple, que se acopla a una ecuación de mapa de ondas y que luego se acoplan a ecuaciones de transporte. Por esta razón, el problema central que ataca este trabajo es la estabilidad asintótica a futuro de un segmento geodésico como solución de una ecuación de mapa de ondas desde una 3-variedad plana al espacio hiperbólico.

<sup>2</sup>Una cúspide es una 3-variedad de la forma  $(-\infty, 0] \times \mathbb{T}^2$  con una métrica hiperbólica de la forma  $g = dx^2 + e^{2x}g_T$ , donde  $g_T$  es una métrica plana (la curvatura de Riemann es cero) en  $\mathbb{T}^2$  que es independiente de  $x \in (-\infty, 0]$ .

Es importante mencionar que el problema de estabilidad de geodésicas como mapa de ondas fue estudiado por Sideris en [19], pero el problema allí planteado es diferente al nuestro. También es importante mencionar que la evolución futura de los espacio-tiempos de Gowdy  $\mathbb{T}^3$  han sido estudiados por Ringström [15], a través de un mapa de ondas que tiene el mismo origen que el nuestro. En ese caso, cada solución define una curva cerrada en el plano hiperbólico mientras aquí define una curva con los mismos finales que el segmento geodésico en consideración.

## 2. Doble cúspides y sus propiedades globales

Los espacio-tiempos llamados *doble cúspides* tienen métricas de la forma (ver [14])

$$(1) \quad g = e^{2a}(-dt^2 + dx^2) + R(e^{2W} + q^2e^{-2W})d\theta_1^2 - 2Rqe^{-2W}d\theta_1d\theta_2 + Re^{-2W}d\theta_2^2,$$

sobre la variedad  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_{\theta_1}^1 \times \mathbb{S}_{\theta_2}^1$ , donde  $a$ ,  $R$ , y  $q$  dependen únicamente de  $t$  y  $x$ . Las hipersuperficies de Cauchy, por ejemplo las dadas por  $t = 0$ , son difeomorfas a  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$  y son por lo tanto *cuellos toroidales*. Métricas de esta forma son similares a las métricas de los espacio-tiempos de Gowdy  $\mathbb{T}^3$ , [9], pero difieren de ellos en que  $R$  no se toma como coordenada, y en que  $x$  no es periódico. Presentaremos la forma explícita de  $a$ ,  $R$ , y  $q$  más abajo. Analizaremos su geometría global, explicando cómo la geometría se comporta a lo largo de la foliación CMC (las hipersuperficies con  $t$  constante no son CMC). Sin embargo, antes de hacer eso, presentamos las ecuaciones para  $R$ ,  $W$ ,  $q$ , y  $a$ . Estas ecuaciones, que se derivan de la ecuación de Einstein,  $\text{Ric} = 0$ , son,

$$(2) \quad R_{xx} - R_{tt} = 0,$$

$$(3) \quad W_{tt} - W_{xx} + \frac{R_t}{R}W_t - \frac{R_x}{R}W_x + \frac{(q_t^2 - q_x^2)}{2}e^{-4W} = 0,$$

$$(4) \quad q_{tt} - q_{xx} + \frac{R_t}{R}q_t - \frac{R_x}{R}q_x - 4q_tW_t + 4q_xW_x = 0,$$

$$(5) \quad a_{tt} - a_{xx} + \frac{R_x^2 - R_t^2}{4R^2} + W_t^2 - W_x^2 + \frac{1}{4}(q_t^2 - q_x^2)e^{-4W} = 0,$$

y,

$$(6) \quad a_t \frac{R_t}{R} + a_x \frac{R_x}{R} + \frac{1}{4} \left( \frac{R_x^2}{R^2} + \frac{R_t^2}{R^2} \right) - \frac{R_{xx}}{R} - (W_x^2 + W_t^2) - \frac{1}{4}e^{-4W}(q_x^2 + q_t^2) = 0,$$

$$(7) \quad a_x \frac{R_t}{R} + a_t \frac{R_x}{R} - \frac{R_{tx}}{R} + \frac{R_x R_t}{2R^2} + 2W_t W_x - \frac{1}{2}e^{-4W}q_x q_t = 0.$$

Las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) son ecuaciones dinámicas para  $R$ ,  $W$ ,  $q$  y  $a$ , y (6) y (7) son las llamadas ligaduras de energía y momento (los datos iniciales deben satisfacerlos en  $t = 0$ ). La ecuación para  $R$  se decopla del resto, y las ecuaciones dinámicas para  $W$  y  $q$  se decoplan de las de  $a$ . En ciertos casos, se puede despejar  $a_x$  y  $a_t$  de (6)-(7) y simplemente integrar para encontrar  $a$ . En estos casos,  $a$  es determinado por  $R$ ,  $W$ , y  $q$  a menos de una constante.

Es crucial, y también bien sabido, que las ecuaciones (3) y (4) son ecuaciones de mapa de ondas en el plano hiperbólico. Veamos esto. Pensamos el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  como  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$  con la métrica  $h = 4dy^2 + e^{-4y}dx^2$ . Por otro lado, consideramos la variedad  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_\phi^1$  con la métrica  $k = 4e^{4t}(-dt^2 + dx^2) + R^2(t, x)d\phi^2$  y denotamos

esta variedad Riemanniana como  $\mathbb{K}$ . Entonces  $W$  y  $q$  satisfacen las ecuaciones (3) y (4) si y sólo si el mapa  $\chi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H}$  dado por

$$(8) \quad \chi(t, x, \phi) = (q(t, x), W(t, x)),$$

es un mapa de ondas entre ambas variedades. Esto es, las ecuaciones (3) y (4) son las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción

$$(9) \quad S = \int \|D\chi\| dV_k = \int \partial_l \chi^i \partial_m \chi^j h_{ij} k^{lm} dV_k = 2\pi \int R(4(W_x^2 + W_t^2) + (q_x^2 + q_t^2)e^{-4W}) dt dx.$$

Veamos ahora la forma explícita de las doble cúspides. Primero, para todas las doble cúspides uno toma  $R(t, x) = R_0 e^{2t} \cosh 2x$  con  $R_0$  constante, lo cual por supuesto resuelve (2). Segundo, uno impone que  $W$  y  $q$  sean independientes de  $t$ , i.e.  $W = W(x)$  y  $q = q(x)$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para esos datos es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción,

$$(10) \quad F = \int_{\mathbb{R}} |\gamma'|^2 \cosh(2x) dx$$

donde  $\gamma(x) = \chi(x)$ , cuyas soluciones son segmentos geodésicos reparametrizados del plano hiperbólico. Cuando el segmento geodésico es vertical y por lo tanto tiene  $q$  constante, decimos que la doble cúspide es *polarizada*. Su forma explícita es

$$(11) \quad R = R_0 e^{2t} \cosh(2x),$$

$$(12) \quad W = W_1 + W_0 \arctan(e^{2x}),$$

$$(13) \quad q = q_0,$$

$$(14) \quad a = a_0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right) \frac{1}{2} \ln(\cosh(2x)) + \left(\frac{3}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right) t,$$

con  $R_0 > 0, W_0 \neq 0, W_1, q_0$  y  $a_0$  constantes. Las doble cúspides no polarizadas son obtenidas transformando las polarizadas por una isometría del plano hiperbólico (ver figura 2). Al transformar  $W$  y  $q$  por una isometría del plano hiperbólico, el nuevo mapa vuelve a ser una solución. Esto se debe a que la acción  $S$  es invariante por estas isometrías, y las ecuaciones para  $a$  involucran solo cantidades geométricas de  $W$  y  $q$  (y por lo tanto invariantes). La expresión no será particularmente relevante, ya que un cambio de coordenadas dado por esta isometría permite trabajar con el mismo sistema de EDPs pero asumiendo que estamos con una doble cúspide polarizada. De ahora en más, las soluciones de doble cúspide serán denotadas por  $R_b, W_b, q_b$  y  $a_b$ , donde ‘b’ denota ‘background’.

Formalmente hablando, el problema de estabilidad que enfrentamos en este trabajo es la estabilidad de  $R_b, W_b, q_b$  y  $a_b$  como soluciones particulares del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de arriba, y de hecho este es el punto de vista que tomamos. Primero estudiamos la ecuación de onda para  $R$ , luego la ecuación de mapa de ondas de  $(W, q)$ , y finalmente, estudiamos  $a$ . En el resto de la sección revisamos las propiedades globales de las doble cúspides.

Una propiedad crucial de las doble cúspides es que en sus dos finales se pueden definir coordenadas  $(t', x')$  y  $(t'', x'')$ , donde se puede observar que la geometría espacial

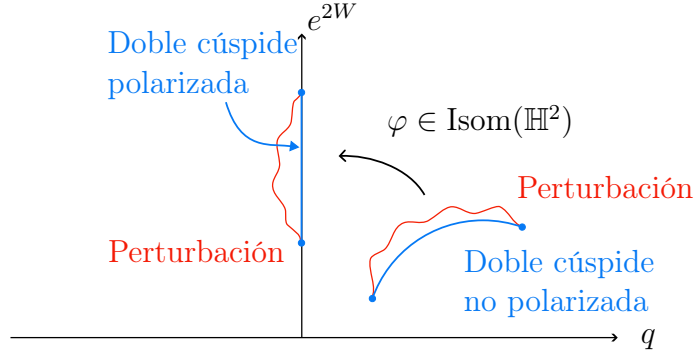


FIGURA 2. En azul, dos soluciones de doble cúspide son representadas. Una perturbación es representada en rojo, como la curva  $\chi \mapsto \chi(t, x)$  para cada  $t$  fijo. A medida que el tiempo avanza, esta curva se mueve. La figura también ilustra como una doble cúspide no polarizada puede ser vista como una doble cúspide polarizada.

renormalizada converge hacia cúspides hiperbólicas. Esta es una de las principales propiedades de las doble cúspides que las hacen adecuadas para modelar la evolución en el cuello de las soluciones propuestas en [2]. Para explicar esto primero recordamos ciertas nociones de variedades hiperbólicas y de los espacio-tiempos llamados conos planos. Si  $(\mathbb{M}, g_H)$  es una 3-variedad hiperbólica, entonces  $\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{M}$  con la métrica  $g = -d\tau^2 + \tau^2 g_H$  es un espacio-tiempo plano (la curvatura de Riemann es cero y en particular es una solución a la ecuación de Einstein) llamado *cono plano*. La curvatura media de las hipersuperficies  $\tau = \tau_0$  es  $k_0 = -3/\tau_0$ . Por eso, cuando la métrica  $g$  es renormalizada como  $(k_0/3)^2 g = \tau_0^{-2} g = d(\tau/\tau_0)^2 + (\tau/\tau_0)^2 g_H$ , entonces la curvatura media de las hipersuperficies  $\tau = \tau_0$  es  $-3$  y la métrica inducida es  $g_H$ . Esta es la llamada renormalización CMC y puede ser hecha sobre cualquier hipersuperficie  $\Sigma_k$  de curvatura media constante  $k$ . Las variedades hiperbólicas de volumen finito pueden ser no compactas. Cuando este es el caso, la variedad tiene una cantidad finita de *cúspides* de la forma  $\mathbb{C} = (-\infty, x_0]_x \times \mathbb{T}^2$  con  $g_H = dx^2 + e^{2x} g_T$ , donde  $g_T$  es una métrica plana en  $\mathbb{T}^2$  que es independiente de  $x$ . Un *espacio-tiempo cúspide* es un cono plano con  $\mathbb{M} = \mathbb{C}$ . Como fue mencionado unas líneas arriba, los dos finales de las doble cúspides son asintóticos a espacio-tiempos cúspides a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Este comportamiento no es observado en las coordenadas  $t, x$  sino en las coordenadas  $t', x'$  y  $t'', x''$ . Estas son

$$(15) \quad t' = -\left(\frac{1}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right)t,$$

$$(16) \quad x' = -\left(\frac{1}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right)t + \left(\frac{3}{2} + \frac{W_0^2}{2}\right)x.$$

Estas nuevas coordenadas son representadas en la figura 3. Cuando fijamos  $x'$  e incrementamos el valor de  $t'$ , o cuando fijamos  $t'$  e incrementamos el valor de  $x'$ , las coordenadas  $x$  y  $t$  incrementan. En este sentido, estas coordenadas están adaptadas al final derecho. Es en estas coordenadas que la métrica de la doble cúspide aproxima al espacio-tiempo cúspide ( $\tau = e^{t'}$ ). Esto es fácil de ver y está hecho en detalle en [14]. En el final izquierdo uno también puede definir coordenadas  $x'', t''$  donde la evolución muestra el mismo

comportamiento. La imagen completa es representada en la figura 3. Este fenómeno se observa mejor a lo largo de la foliación CMC. Las doble cúspides admiten una foliación global CMC por hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma_k$ , donde la curvatura media  $k$  cubre todo el intervalo  $(-\infty, 0)$ , [14]. Más específicamente, existe una hipersuperficie  $\Sigma_{-3}$  de curvatura media  $-3$  definida por el gráfico de  $t = s(x)$  y cualquier otra hoja de la foliación CMC se obtiene trasladando esta en el tiempo. Más aún, el gráfico de  $s(x)$  se acerca a las líneas  $t' = \text{const}$  y a  $t'' = \text{const}$  a medida que  $x$  se acerca a  $\infty$  y  $-\infty$  respectivamente. Entonces uno puede observar simultáneamente la convergencia a los espacio-tiempos cúspides en los finales izquierdo y derecho siguiendo la foliación CMC  $\Sigma_k$ ,  $k \uparrow 0$ . Si se rescala con la renormalización CMC entonces, la métrica renormalizada sobre  $\Sigma_k$  converge a una cúspide hiperbólica en cada uno de los finales (uno debe seguir las líneas  $x' = \text{const}$  y  $x'' = \text{const}$ ), mientras que la parte central colapsa en volumen mientras se mantiene su curvatura acotada. Esto hace que el cuello se vea como líneas que se van alargando.

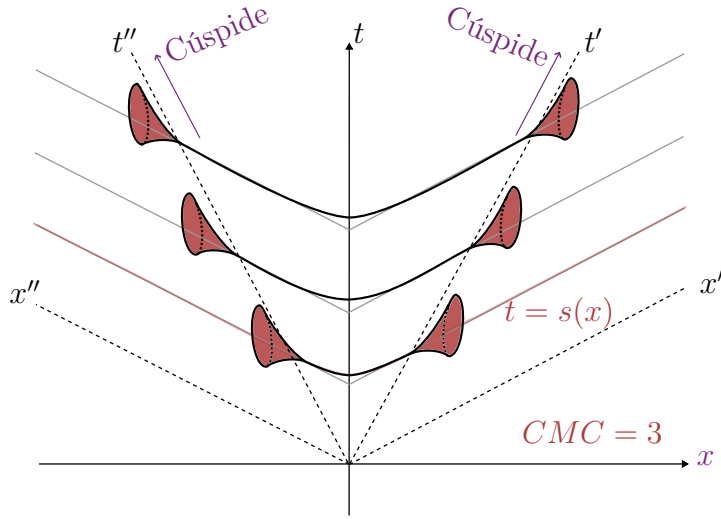


FIGURA 3. Comportamiento de las doble cúspides a lo largo de la foliación CMC, bajo la renormalización CMC.

### 3. Resultados

En esta sección presentamos los resultados encontrados en este trabajo ([5]). Para enunciar los resultados principales primero debemos introducir algunas normas y espacios funcionales. Sea,

$$(17) \quad m_0(t) := \|R - R_b\|_{C^0} + \|R_t - R_{bt}\|_{C^0},$$

$$(18) \quad m_k(t) := \|R - R_b\|_{C^k} + \|R_t - R_{bt}\|_{C^{k-1}}, \text{ para } k \geq 1,$$

donde  $R, R_b, R_t$  y  $R_{bt}$  se consideran en tiempo  $t$ . La cantidad  $m_0(t)$  mide, en tiempo  $t$ , la norma  $C^0$  entre  $R$  y  $R_b$  y entre  $R_t$  y  $R_{bt}$ . La cantidad  $m_k(t)$  mide, en tiempo  $t$ , la norma  $C^k$  entre  $R$  y  $R_b$  y la norma  $C^{k-1}$  entre  $R_t$  y  $R_{bt}$ . También definidos para  $k \geq 1$ ,

$$(19) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_k(t) := \|W - W_b\|_{\widetilde{H}_k} + \|\partial_t(W - W_b)\|_{\widetilde{H}_{k-1}} + \|q\|_{\widetilde{H}_k} + \|\partial_t q\|_{\widetilde{H}_{k-1}},$$

donde nuevamente las funciones dentro de las normas son consideradas como funciones de  $x$ , en tiempo  $t$ . Aquí  $\widetilde{H}_k$  es la completación del espacio de funciones suaves de soporte compacto,  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ , con respecto a la norma

$$(20) \quad \|f\|_{\widetilde{H}_k}^2 := \sum_{i=0}^k \int_{\mathbb{R}} (f^{(i)}(x))^2 \cosh(2x) dx.$$

Esto es el espacio de Sobolev ponderado con el peso  $\cosh(2x)$ . Por último, sea  $C_0^k(\mathbb{R})$  el espacio de las funciones  $f$  de clase  $C^k$ , tal que para todo  $i \leq k$ ,  $f^{(i)}(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow +\infty$ .

Primero discutimos algunos resultados básicos sobre  $R$ . Respecto a  $(W, q)$ , primero presentamos un resultado de existencia para todo tiempo futuro. Luego presentamos dos resultados de estabilidad separados, uno para perturbaciones polarizadas (es decir con  $q = 0$ ) y otro para perturbaciones no polarizadas. El primero es más fuerte que el segundo. Los enunciados de estabilidad son en torno a la doble cúspide polarizada ( $W_b = W_1 + W_0 \cosh(2x), q_b = 0$ ), ya que como explicamos, haciendo un cambio de coordenadas podemos asumir que este es el caso. Luego de presentar estos resultados discutimos qué implican acerca de la estabilidad de  $a$ .

**Lema 1.1.** *Para toda solución  $R$  a la ecuación (2), si  $m_0(0) < 2R_0/3$ , entonces  $R(t, x) > 0$  cuando  $t \geq 0$ . Más aún,*

$$\|R - R_b\|_\infty(t) \leq (t+1)m_0(0) \quad \text{para } t \geq 0,$$

y para todo multi-índice  $\alpha \neq (0, 0)$ , existe una constante  $C$  tal que, para  $t \geq 0$ ,

$$\|\partial^\alpha(R - R_b)\|_\infty(t) \leq m_\alpha(0),$$

y

$$\left\| \cosh(2x) \cdot \partial^\alpha \left( \frac{R_t}{R} - \frac{R_{bt}}{R_b} \right) \right\|_\infty, \left\| \cosh(2x) \cdot \partial^\alpha \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \right\|_\infty (t) \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t}} m_{|\alpha|+1}(0).$$

El siguiente resultado asegura la existencia para todo tiempo futuro de soluciones a las ecuaciones de mapa de ondas.

**TEOREMA 4.5** (Existencia para todo tiempo futuro de soluciones  $C^\infty$ ). *Consideramos datos iniciales  $C^\infty$ , con  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe una única solución suave a las ecuaciones (2) a (4) definida para todo tiempo futuro.*

El primer resultado debajo es para perturbaciones polarizadas, es decir, con  $q = 0$ . El resultado muestra el decaimiento exponencial de  $\widetilde{\mathcal{M}}_k$ .

**TEOREMA 5.3.** *(Perturbaciones polarizadas) Sea  $k \geq 3$ . Sea  $(R, W)$  una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) y (3) con  $q = 0$ . Supongamos también que  $(R - R_b(0, \cdot), \partial_t(R - R_b)(0, \cdot)) \in C_0^k \times C_0^{k-1}$ ,  $m_0(0) < 2R_0/3$  y  $((W - W_b)(0, \cdot), \partial_t(W - W_b)(0, \cdot)) \in \widetilde{H}^k \times \widetilde{H}^{k-1}$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo  $t \geq 0$  y*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_k(t) \leq C e^{-t} (t+1) \left( \widetilde{\mathcal{M}}_k(0) + m_k(0) \right).$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de una cota superior de  $m_k(0)$  y  $k$ .

Observar que excepto por la condición  $m_0(0) < 2R_0/3$ , que de alguna manera es inevitable, no se pide condición sobre el tamaño de los datos iniciales del mapa de ondas. En este sentido, esto prueba que la doble cúspide es un atractor global entre los datos iniciales polarizados.

Para perturbaciones no polarizadas ( $q \neq 0$ ) un resultado similar es obtenido. Sin embargo, esta vez los datos iniciales deben ser suficientemente cercanos a los del background.

**TEOREMA 5.4.** *Sea  $(R, W, q)$  una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4). Supongamos que  $(R - R_b(0, \cdot), \partial_t(R - R_b)(0, \cdot)) \in C_0^k \times C_0^{k-1}$ ,  $m_0(0) < 2R_0/3$ ,  $((W - W_b)(0, \cdot), \partial_t(W - W_b)(0, \cdot)) \in \tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$  y que  $(q(0, \cdot), \partial_t q(0, \cdot)) \in \tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo futuro. Además existe  $\delta > 0$  tal que para toda solución con estas propiedades se cumple que si  $m_3(0) < \delta$  y  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0) < \delta$ , entonces*

$$(21) \quad \tilde{\mathcal{M}}_3(t) \leq C e^{-t}(t+1)(\tilde{\mathcal{M}}_3(0) + m_3(0))$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de  $m_3(0)$  y de  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0)$ .

Este último teorema implica que si la curva roja en la figura 2 está inicialmente cerca de la azul, entonces se acerca exponencialmente rápido a la azul con  $t \rightarrow +\infty$ . Ahora pasamos a discutir las consecuencias de estos dos resultados en  $a$ .

Una consecuencia básica de los resultados previos es que en las hipótesis del teorema de existencia  $a$  está definido para todo  $t \geq 0$ . Esto sucede porque la ecuación para  $a$ , ecuación (5), es una ecuación de onda lineal a coeficientes constantes con fuente definida para todo  $t \geq 0$ . Más aún, si las ligaduras se satisfacen en  $t = 0$  entonces, por argumentos clásicos, se satisfacen para todo  $t \geq 0$ . Esto, a su vez, prueba que el sistema dado por las ecuaciones (2) a (7) da un desarrollo de Cauchy de los datos iniciales en  $[0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ . El argumento es clásico ya que las ecuaciones (2)-(7) son equivalentes a la ecuación de Einstein.

Con respecto a la estabilidad de  $a$ , notar que la ecuación (5) implica

$$(22) \quad (a - a_b)_{tt} - (a - a_b)_{xx} = F(R, W, q) - F(R_b, W_b, q_b).$$

donde la fuente  $F(R, W, q) - F(R_b, W_b, q_b)$  se controla por la ecuación (21). Usando esto y la fórmula de D'Alembert, deducimos que la contribución de la fuente a  $\|a(t, \cdot) - a_b(t, \cdot)\|_{C^0}$  es controlada por  $\tilde{\mathcal{M}}_2(0) + m_2(0)$ . La contribución de la solución homogénea es naturalmente controlada por  $\|a(0, \cdot) - a_b(0, \cdot)\|_{C^0} + \|a_t(0, \cdot) - a_{bt}(0, \cdot)\|_{L^1}$ . Esto prueba el siguiente resultado.

**TEOREMA 1.2.** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si los datos iniciales para  $(R, W, q, a)$  satisfacen  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0) + m_3(0) \leq \delta$  y  $\|a(0, \cdot) - a_b(0, \cdot)\|_{C^0} + \|a_t(0, \cdot) - a_{bt}(0, \cdot)\|_{L^1} < \delta$ , entonces  $\|a(t, \cdot) - a_b(t, \cdot)\|_{C^0} \leq \epsilon \forall t \geq 0$ .*

Usando esto se puede ver que los espacio-tiempos en las hipótesis del teorema anterior son geodésicamente completos a futuro. Notar una vez más que el espacio funcional para las perturbaciones de  $a$  es elegido desde el punto de vista de las EDPs. La pregunta natural que surge es si existe alguna perturbación no-trivial en estos espacios que cumplan las ligaduras, ecuaciones (6) y (7). En efecto, este es el caso, por ejemplo, si

ponemos normas más estrictas para  $(R, W, q)$  en  $t = 0$ . Al hacer esto,  $a - a_b$  pertenece a los espacios de arriba para cada  $t \geq 0$ . Un ejemplo de estas normas puede ser  $\|f\|_{\widetilde{H}_{p,k}}^2 := \sum_{i=0}^k \int_{\mathbb{R}} (f^{(i)}(x))^2 \cosh^p(2x) dx$  para  $W$  y  $q$ , y  $m_{l,k}(f) := m_k(\cosh^l(2x)f(x))$  para  $R$ . Con estas normas, usando  $p = 2$  en lugar de  $p = 1$ , y  $l = 1$  en lugar de  $l = 0$ , uno puede ver que pequeñas perturbaciones en este nuevo sentido implica que  $a_t$  y  $a_x$  pueden ser resueltos de las ecuaciones (6) y (7). Más aún,  $\|a(t, \cdot) - a_b(t, \cdot)\|_{C^0} + \|a_t(t, \cdot) - a_{bt}(t, \cdot)\|_{L^1}$  es finito para cada  $t \geq 0$ , y arbitrariamente pequeño al reducir los valores de  $m_{l,1}(R - R_b)(0)$  y  $\widetilde{\mathcal{M}}_{2,3}(0)$ , donde

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{p,k}(t) := \|W - W_b\|_{\widetilde{H}_{p,k}} + \|\partial_t(W - W_b)\|_{\widetilde{H}_{p,k-1}} + \|q\|_{\widetilde{H}_{p,k}} + \|\partial_t q\|_{\widetilde{H}_{p,k-1}}.$$

#### 4. Organización de la tesis

En el capítulo 2 presentamos los preliminares que serán utilizados a lo largo de la tesis. Las pruebas de los teoremas 5.3 y 5.4 se hacen primero para perturbaciones de soporte compacto, es decir, soluciones con datos iniciales que difieren de los datos de la solución background únicamente en un conjunto de soporte compacto. Estas pruebas se llevan a cabo en el capítulo 3 y en el capítulo 4. Este último es la parte central del trabajo y también contiene la prueba del teorema 4.5. Finalmente, en el capítulo 5, damos un argumento general para extender los resultados a espacios funcionales más grandes probando los teoremas 5.3 y 5.4. Por un tema de presentación, las pruebas de algunos lemas técnicos han sido colocadas en el apéndice.



## Capítulo 2

### Preliminares

En este capítulo explicamos las herramientas que utilizaremos a lo largo de los capítulos siguientes. Al ser un trabajo de EDPs la sección 3, donde se exponen diversos resultados de ecuaciones de onda, es la de mayor importancia. Además, en la sección 2, damos un breve resumen del problema de Cauchy en Relatividad General. En la sección 4 resumimos notación, espacio funcionales y algunas desigualdades útiles a la hora de realizar estimaciones.

#### 1. Geometría

En esta sección introducimos un rápido y breve resumen de aspectos básicos de cálculo tensorial y geometría Lorentziana. Tener en mente las básicas de este tema es útil por dos razones. Primero, la estimación  $C^0$  presentada en el comienzo del capítulo 4 utiliza el hecho de que el tensor energía-impulso asociado a la ecuación de un mapa de ondas es de divergencia nula. Por otro lado, si bien la tesis se enfoca más sobre la estabilidad de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, el problema subyacente es de Relatividad General, teoría que utiliza frecuentemente cálculo tensorial y geometría Lorentziana. Sin embargo, vale remarcar que el lector puede sacrificar esta sección sin comprometer su entendimiento en la gran mayoría de la parte técnica de esta tesis. El material de esta sección está basado en referencias como [12], [11] y [20].

**1.1. Tensores.** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $V^*$  su espacio dual. Llamamos a los elementos de  $V$  vectores y a los elementos de  $V^*$  covectores. Un tensor del tipo  $\binom{k}{l}$ , también llamado tensor  $k$ -covariante,  $l$ -contravariante, es un mapa multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

De hecho, en varios casos es necesario considerar mapas multilineales cuyos argumentos consisten de  $k$ -vectores y  $l$ -covectores pero en otro orden. El espacio de todos los  $\binom{k}{l}$ -tensores se denota por  $T_l^k(V)$ . Si  $(E_1, \dots, E_n)$  es una base de  $V$  entonces denotamos por  $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  la base dual de  $V^*$  definida por  $\varphi^i(E_j) = \delta_j^i$ . Aquí  $\delta_j^i = 1$  si  $j = i$ , 0 si no. Una base de  $T_l^k(V)$  está dada por todos los elementos de la forma

$$E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k},$$

donde los índices  $i_p, j_q$  se mueven de 1 a  $n = \dim V$ . Estos elementos están definidos por

$$E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}(\varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_l}, E_{r_1}, \dots, E_{r_k}) = \delta_{j_1}^{s_1} \dots \delta_{j_l}^{s_l} \dots \delta_{r_k}^{i_k}.$$

Cualquier tensor  $F \in T_l^k(V)$  puede ser probado en términos de una base como

$$(23) \quad F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k}$$

donde

$$F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F(\varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_l}, E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

En la igualdad (23), hay varias sumas implícitas. Cada vez que un índice aparece dos veces, una vez arriba y una vez abajo, se asume que se está sumando en ese índice, sobre todos los posibles valores del índice. Esta es la convención de sumación de Einstein y la usaremos a lo largo del trabajo.

Un ejemplo de tensores viene dado por las transformaciones lineales  $T : V \rightarrow V$ . Dada una transformación lineal podemos pensar que  $T$  es un tensor  $\binom{1}{1}$ , pensando a  $T$  como un mapa de  $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , que lleva  $(w, v) \mapsto w(T(v))$ , donde  $w$  es un covector y  $v$  es un vector. Esta correspondencia es 1 a 1. Definimos la operación de traza,  $\text{tr} : T_{l+1}^{k+1}(V) \rightarrow T_l^k(V)$ , mediante la siguiente fórmula en coordenadas

$$(\text{tr} F)_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = F_{i_1 \dots i_k m}^{j_1 \dots j_l m}.$$

Al igual que la traza de una transformación lineal no importa cuál base usemos para hacer está cuenta, siempre genera el mismo  $\binom{k}{l}$ -tensor. Más generalmente, podemos aplicar la traza con cualquier par de entradas siempre y cuando una entrada sea de vectores y la otra de covectores.

**1.2. Fibrados vectoriales.** Un fibrado vectorial  $k$ -dimensional suave es un par dado por una variedad suave  $E$  llamado el espacio total, una variedad suave  $M$  llamada la base  $M$ , junto con un mapa  $\pi : E \rightarrow M$  sobreyectivo y satisfaciendo lo siguiente:

1. Cada conjunto  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , llamados la fibra sobre  $p$ , vienen con una estructura de espacio vectorial.
2. Para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  y un difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ , llamado trivialización local de  $E$ , tal que  $\pi_1 \circ \varphi = \pi$ , donde  $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$  es proyectar sobre la primera componente.
3. La restricción de cada trivialización local a una fibra,  $\varphi : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ , es un isomorfismo lineal.

El espacio tangente sobre una variedad  $E = TM$  es un ejemplo, así como también el espacio cotangente  $T^*M$ . Dada un fibrado  $E$  denotamos por  $\Gamma(E)$  al conjunto de secciones de  $E$ . Esto es, el conjunto de mapas  $x : M \rightarrow E$  tal que  $x(p) \in E_p \forall p \in M$ . Un ejemplo clásico son los campos vectoriales sobre  $M$ ,  $\Gamma(TM)$ , a quién también denotamos por  $\mathfrak{X}(M)$ .

**1.3. Fibrados tensoriales y campos tensoriales.** En una variedad  $M$  podemos aplicar el álgebra multilineal de arriba sobre el espacio  $V = T_p M$ , dando tensores en  $p$ , es decir,  $T_l^k(T_p M)$ . Definimos el fibrado de  $\binom{k}{l}$ -tensores en  $M$  como

$$T_l^k M := \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_p M).$$

Se puede ver que se puede dotar a  $T_l^k M$  de una estructura de variedad diferenciable tal que el mapa  $\pi : T_l^k M \rightarrow M$  que manda  $T_p M$  a  $p$  convierte a  $\pi : T_l^k M \rightarrow M$  en un fibrado vectorial. Un campo tensorial de tipo  $\binom{k}{l}$  es una sección suave del fibrado  $T_l^k(M)$ . Esta es la forma matemática de decir *un campo tensorial suave sobre una variedad es un tensor en  $T_p M$  para cada  $p$ , tal que el tensor varía suave al mover  $p$* . Una forma natural

de ver esto es la siguiente. Sea  $U \subset M$  abierto y sea  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  coordenadas en  $M$ . Esto es,  $n$  funciones  $(x^i) : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que el mapa  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo. Denotamos a las coordenadas simplemente por  $(x^i)$ . Sea  $\partial_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , los campos tangentes inducidos por  $(x^i)$ . Estos campos forman una base de  $T_p M$  para cada  $p \in U$ . Similarmente sea  $dx^i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , el campo de covectores (también llamado 1-formas) inducido por  $(x^i)$ . Esto es,  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  es la base dual de  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  en cada punto  $p$ , en el espacio  $T_p M$ . Entonces las 1-formas  $dx^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , forman una base de  $T_p^* M$  para cada  $p \in U$ . Por lo que vimos en la sección de tensores, cada tensor sobre  $U$  se puede escribir de la forma (recordar el convenio de sumación)

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}.$$

Entonces  $F$  es un campo tensorial suave si y sólo si las funciones componentes  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} : U \rightarrow \mathbb{R}$  son suaves. Ejemplos clásicos de tensores son los campos vectoriales y las formas diferenciales. Otro ejemplo son las métricas. Por ejemplo, una métrica Riemanniana en  $M$  es un campo tensorial  $g \in \Gamma(T^2(M))$  que además cumple que  $g_p$  es definida positiva en  $T_p M \times T_p M$  para todo  $p$ . Una métrica de Lorentz es un tensor  $g \in \Gamma(T^2(M))$  tal que la signatura de  $g_p$  en  $T_p M \times T_p M$  es  $-1, 1, 1, \dots, 1$ . Una variedad provista de una métrica de Lorentz es llamada una variedad de Lorentz.

**1.4. Conexiones.** Sea  $M$  variedad diferenciable y sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado sobre  $M$ . Una conexión en  $E$  es un mapa

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E),$$

que se escribe  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , y que satisface las siguientes propiedades

1.  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $C^\infty(M)$  en  $X$ .
2.  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $\mathbb{R}$  en  $Y$ .
3.  $\nabla$  satisface la regla del producto en  $Y$ . Esto es,

$$(24) \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

Aquí  $X(f)$  es la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $X$ . A  $\nabla_X Y$  se le llama la derivada covariante de  $Y$  en la dirección de  $X$ . El término covariante viene de *variar correctamente* y refiere a variar correctamente su expresión en coordenadas (para dar un objeto bien definido, tensorial, independiente de las coordenadas). En efecto,  $\nabla$  da una forma intrínseca (libre de coordenadas) de derivar secciones sobre  $M$ . Es importante recalcar que si bien la definición de  $\nabla$  es global (toma objetos definidos en todo  $M$ ) al final es puramente local. De las propiedades anteriores se puede ver que  $\nabla_X Y(p)$  depende únicamente de los valores de  $X$  e  $Y$  en un entorno pequeño de  $p$ . Más aún, solo depende de  $X$  en  $p$  y de  $Y$  a lo largo de una curva por  $p$  con velocidad  $X$  en  $p$ .

Sea  $\nabla$  una conexión en  $TM$  y sea  $(E_i)$  una base local del  $TM$  en un abierto  $U$ . Definimos los símbolos de Christoffel de  $\nabla$  asociados al frame  $(E_i)$  como las funciones  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i, j, k$  variando entre 1 y  $n = \dim M$ , tal que

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Dado  $X$  e  $Y$  campos locales en  $U$ ,  $X = X^i E_i$  y  $Y = Y^j E_j$ , se sigue que

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k,$$

por lo que  $\Gamma_{ij}^k$  determina  $\nabla$  sobre  $U$ . Es importante recalcar que  $\Gamma_{ij}^k$  no define un tensor, ni tampoco lo hace  $\nabla$ .

**1.5. Derivadas covariantes de campos tensoriales y notación abstracta de índices.** Una conexión  $\nabla$  en  $TM$  automáticamente induce una única conexión, también denotada por  $\nabla$ , en todos los fibrados tensoriales  $T_l^k TM$ , que satisface

1. En  $TM$  coincide con la conexión dada.
2. Si  $f \in C^\infty(\mathbb{R}) = \Gamma(M \times \mathbb{R})$ , entonces  $\nabla_X f = Xf$ .
3. Satisface la regla del producto

$$(25) \quad \nabla_X(F \otimes G) = \nabla_X F \otimes G + F \otimes \nabla_X F.$$

4.  $\nabla$  conmuta con las contracciones: si  $\text{tr}$  denota la traza en ciertos pares de índices, entonces

$$\nabla_X(\text{tr } F) = \text{tr } \nabla_X F.$$

Sea  $T \in T_l^k$ ,  $X, Y_1, \dots, Y_k$  campos vectoriales, y  $w^1, \dots, w^l$ , campos de covectores, se puede probar que

$$(26) \quad \begin{aligned} \nabla_X T(w^1, \dots, w^l, Y_1, \dots, Y_k) &= X(T(Y_1, \dots, Y_k, w^1, \dots, w^l)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l T(w^1, \dots, \nabla_X w^j, \dots, w^l, Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T(w^1, \dots, w^l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

Dado un tensor  $F \in T_l^k$ , denotamos por  $\nabla F \in T_l^{k+1}$  al tensor dado por

$$\nabla F(X, Y^1, \dots, Y^k, w_1, \dots, w_l) = (\nabla_X F)(w^1, \dots, w^l, Y_1, \dots, Y_k).$$

Llamamos a  $\nabla F$  la derivada covariante total de  $F$ .

Hay varias notaciones para trabajar con derivadas covariantes de tensores. A lo largo del trabajo solamente al principio del capítulo 4 utilizamos conexiones y campos tensoriales. Encontraremos útil usar la notación de [20], que pasamos a explicar brevemente. Dado un tensor  $F \in T_l^k$ , denotamos el tensor por  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ . Es decir, en esta notación  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$  no denotará las componentes del tensor  $F$  en una cierta base dada sino al tensor en sí mismo. De esta forma denotaremos a los tensores por sus expresiones en coordenadas. De esta manera, por ejemplo,

$$\text{tr } F = F_{i_1 \dots i_k m}^{j_1 \dots j_l m},$$

o

$$F(w^1, \dots, w^l, Y_1, \dots, Y_k) = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} (w^1)_{j_1} \dots (w^l)_{j_l} (Y_1)^{i_1} \dots (Y_k)^{i_k},$$

donde el  $j$ -ésimo campo,  $Y_j$ , es denotado por  $(Y_j)^{i_r}$ , y el  $j$ -ésimo covector,  $w^l$ , es denotado por  $(w^j)_{j_r}$ . Por otro lado,  $\nabla F$  es denotado por  $\nabla_\alpha F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ . De esta manera

$$\nabla_\alpha F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} X^\alpha (w^1)_{j_1} \dots (w^l)_{j_l} (Y_1)^{i_1} \dots (Y_k)^{i_k} = (\nabla_X F)(w^1, \dots, w^l, Y_1, \dots, Y_k).$$

Por último, si  $\Gamma_{ij}^k$  denotan los símbolos de Christoffel asociado a ciertas coordenadas  $(x^i)$  entonces la ecuación (26) se traduce en

$$\nabla_{\alpha} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \partial_{\alpha} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \sum_s \Gamma_{\alpha j}^{j_s} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s \dots j_l} - \sum_s \Gamma_{\alpha i_s}^j F_{i_1 \dots j \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}.$$

Notar que para mantener el criterio de la notación el término de la derecha tiene que ser interpretado como la suma de dos tensores. Esto efectivamente se puede hacer pero no es nuestro interés mostrarlo aquí. Por último, a veces usamos  $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$  para denotar a las componentes y no al tensor.Cuál de los dos significados está en uso será claro del contexto.

**1.6. La conexión de Levi-Civita.** Hay muchas conexiones en una variedad. Una forma de elegir una es tomar una conexión que esté relacionada con otra estructura ya existente en la variedad. En particular, cuando tenemos una variedad Riemanniana hay una conexión preferida que es compatible con la métrica subyacente. Formalmente, existe una única conexión  $\nabla$  que cumple:

1. Para todo sistema coordenado  $(x^i)$ ,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .
2.  $\nabla$  es compatible con la métrica: si  $X, Y$  y  $Z$  son campos vectoriales, entonces  $\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ . Está condición es equivalente a pedir que  $\nabla g = 0$ .

El resultado sigue siendo cierto para métricas de Lorentz. Más aún, hay una fórmula explícita para  $\nabla$ . En términos de los símbolos de Christoffel asociados a un sistema coordenado  $(x^i)$ , la conexión  $\nabla$  queda dada por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\lambda} (\partial_i g_{\lambda j} + \partial_j g_{i\lambda} - \partial_{\lambda} g_{ij}).$$

**1.7. Elevando índices.** Dado una métrica no degenerada  $g$ , en una variedad  $M$ , tenemos una correspondencia biunívoca entre  $TM$  y  $T^*M$  dada por el teorema de Riesz. Esto es, si  $X$  es un campo vectorial entonces

$$X^b(Y) = g(Y, X)$$

define una 1-forma, o campo de covectores,  $X^b$ . Para el otro lado, dado una 1-forma en  $M$ , existe un único campo vectorial  $\eta^{\#}$  tal que

$$\eta(Y) = g(Y, \eta^{\#}).$$

Acabamos de transformar un  $\binom{0}{1}$ -campo tensorial (campo vectorial) en un  $\binom{1}{0}$ -campo tensorial (una 1-forma). Expresando esto en coordenadas se tiene

$$(X^b)_i = g_{ij} X^j, \quad (\eta^{\#})^i = g^{ij} \eta_j,$$

donde  $g^{ij}$  es la matriz inversa de  $g_{ij}$ . Esta construcción se puede llevar a tensores arbitrarios. De esta forma, por ejemplo,

$$T_{ij}{}^{lr} = T_{ijsm} g^{sl} g^{mr}.$$

**1.8. Curvatura.** En esta sección simplemente definimos el tensor de curvatura y el tensor de Ricci. No se utilizarán a lo largo del trabajo salvo para definir el sistema de EDPs que provee la ecuación de Einstein. Por esta razón no entraremos en detalles, limitándonos simplemente a la definición. El tensor de curvatura de Riemann se define como el tensor de tipo  $\binom{4}{0}$  tal que para  $X, Y, Z, W$  campos se cumple

$$R(Y, Z, X, W) = g(\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X, W),$$

donde  $[Y, Z]$  es la derivada de Lie de  $Z$  en la dirección de  $Y$ . De esta manera  $[Y, Z]$  es un campo cuyas coordenadas son

$$[Y, Z]^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i.$$

Si tomamos  $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_r$  y  $W = \partial_l$  para algunas coordenadas  $(x^i)$ , se tiene que

$$R_{jril} = g(\nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_r} \partial_i - \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_j} \partial_i, \partial_l),$$

por lo cual el tensor mide la no conmutatividad de la derivada segunda, y de esta manera captura el concepto de curvatura. Se define el tensor de curvatura de Ricci, denotado por  $\text{Ric}$ , como el  $\binom{2}{0}$ -tensor tal que

$$\text{Ric}_{ij} = R_{ikjl} g^{lk}.$$

Por último, denotamos por  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  a la función curvatura escalar definida por tomar la traza de la curvatura de Ricci

$$S = \text{Ric}_i^i.$$

## 2. Relatividad General y el problema de Cauchy

El material de esta sección está basado principalmente en [20], [17] y [13].

**2.1. Introducción.** La teoría de la Relatividad General es una teoría geométrica de la gravedad. En esta el efecto de la gravedad está dado por la curvatura en el espacio-tiempo, y la curvatura a su vez es afectada por la presencia de *materia*. El término *materia* es un término no definido que se usa intuitivamente para implicar a todas las cosas del universo. Un espacio-tiempo es modelado por una 4-variedad de Lorentz (i.e provista de una métrica de Lorentz). Cada punto del espacio-tiempo representa un evento en la realidad (un determinado lugar y momento). En general, además de la métrica lorentziana, los espacios-tiempos están provistos de una orientación temporal, y son variedades conexas. A continuación explicamos brevemente los conceptos de orientación temporal y otros conceptos de causalidad.

Decimos que un vector  $v \in T_p M$ ,  $v \neq 0$ , es tipo tiempo, nulo o tipo espacio si  $g(v, v) < 0$ ,  $g(v, v) = 0$  o  $g(v, v) > 0$  respectivamente. El vector nulo se define como tipo espacio. Si  $v$  es tipo tiempo o nulo decimos que es causal. Una curva en  $M$ ,  $\alpha : I \rightarrow M$ , con  $g(\alpha', \alpha') < 0$  es una curva tipo tiempo. Si la velocidad no es nula pero  $g(\alpha', \alpha') = 0$  decimos que la curva es nula. Si la velocidad no es nula y  $g(\alpha', \alpha') \leq 0$  decimos que la curva es causal. En cada punto  $p \in M$  el conjunto de los vectores tipo tiempo define dos conos disjuntos en  $T_p M$ . Una elección de cuál es el *cono futuro* es una orientación temporal de  $T_p M$ . Una orientación temporal de  $M$  es una elección temporal de  $T_p M$  para cada  $p \in M$ , que varía suavemente. Por variar suave queremos decir que para todo

punto existe un entorno  $U$  y un campo suave  $X$  tal que  $X_q$  pertenece al cono futuro para todo  $q \in U$ . De esta manera, en cada punto  $p$  sabemos hacia donde está el futuro temporal. Una curva causal, o tipo tiempo, o nula, se dice que apunta a futuro si la velocidad pertenece a la clausura del cono futuro en todos los puntos de la curva.

La teoría modela las partículas materiales como curvas tipo tiempo que apuntan a futuro y además satisfacen  $|g(\alpha', \alpha')| = 1$ . Las partículas tipo luz son modeladas por geodésicas nulas que apuntan a futuro. Finalmente, la teoría modela las partículas materiales que están solamente sometidas a la gravedad como geodésicas. De esta manera, una partícula material solo sometida a la gravedad se mueve por el camino más corto en una geometría afectada por la materia. La presencia de la materia interviene en el movimiento de la partícula debido a las deformaciones que provoca en la geometría del espacio. Cómo exactamente la materia afecta la geometría está dado por la ecuación de Einstein

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = \kappa T,$$

donde  $\kappa$  es la constante gravitacional de Einstein y  $T$  es el tensor momento-energía (de tipo  $\binom{2}{0}$ ). Este tensor es la fuente de gravedad. En la mecánica de Newton la fuente de gravedad es la masa de los cuerpos. En relatividad, la gravedad proviene de la *energía-momento* de la *materia*. La energía-momento de la materia es descripta infinitesimalmente por el tensor  $T$ . En esta tesis trabajamos con espacios tiempos vacíos, i.e, con  $T$  nulo. Se puede ver que en este caso la ecuación de Einstein es equivalente a

$$\text{Ric} = 0.$$

En resumen, un espacio-tiempo vacío es una variedad Lorentziana, tiempo-orientada, conexa y con curvatura de Ricci nula.

**2.2. Superficies de Cauchy.** Variedades de Lorentz tiempo-orientables sin más restricciones permiten varias patologías que no son esperadas de un sistema físico. Por ejemplo, permite la existencia de curvas de tipo tiempo cerradas (y por lo tanto hay observadores que pueden viajar a su pasado). Una forma de restringir la causalidad es exigir la existencia de una hipersuperficie de Cauchy, concepto que introducimos a continuación.

Una curva suave a trozos  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  es extendible si existe una extensión continua  $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow M$ . Extendibilidad para curvas de la forma  $\gamma : (a, 0] \rightarrow M$ , o  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  se define análogamente. Una curva que no es extendible es llamada inextendible. Una hipersuperficie de Cauchy en  $M$  es un subconjunto  $S$  que es intersectado exactamente una vez por cada curva inextendible de tipo tiempo, y se prueba que  $S$  es una hipersuperficie topológica ([20] o [13]). Más aún, existe una hipersuperficie de Cauchy suave en  $M$  ([17]).

**2.3. El problema de Cauchy.** Es interesante observar que en coordenadas el tensor de Ricci queda

$$\text{Ric}_{ij} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{ij} + H_{ij}(g, \partial g, \partial^2 g) + F_{ij}(g, \partial g).$$

Aquí  $F(g, \partial g)$  simboliza un término que es una función en las componentes de la métrica y sus primeras derivadas. Similarmente para  $H$  pero además depende de las derivadas segundas. Se sigue que la ecuación de Einstein en el vacío, en coordenadas, es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para los componentes de la métrica. Más aún, se puede ver que el sistema es lineal en las derivadas segundas mostrando que es un sistema quasi-lineal de orden 2 para los componentes de la métrica. Si el término  $H$  no estuviese esto sería un sistema hiperbólico. Es esperable que no lo sea, pues si  $g$  es una métrica que soluciona el sistema entonces  $\varphi^*g$  lo es para todo difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M$ . En particular no tenemos unicidad incluso si ponemos ciertas *condiciones iniciales* en el sentido clásico de EDPs. La métrica  $g$  y la métrica  $\varphi^*g$  representan el mismo sistema pero visto por otro observador. Puede interpretarse como la misma métrica  $g$  expresada en otras coordenadas. Sin embargo, la idea de unicidad a menos de isometrías para condiciones iniciales geométricas sí funciona, y es lo que se llama la formulación de valores iniciales. Es interesante ponerse a descubrir cuáles deberían ser las condiciones iniciales. Por un lado deberían ser algo así como  $g_{ij}$  y  $\partial_t g_{ij}$  en  $t = 0$  (como es esperable en un sistema hiperbólico). Por otro lado, necesitamos condiciones geométricas. La forma de capturar todo esto es mediante la métrica inducida en una 3-variedad  $\Sigma$  (la posición) y la segunda forma fundamental en dicha 3-variedad (la velocidad). El primer problema que aparece es que dichos datos iniciales deben satisfacer ciertas ligaduras. Escribimos estos resultados debajo.

**DEFINICIÓN 2.1** (Segunda forma fundamental). *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz tiempo orientada. Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie en  $M$ , sea  $i : \Sigma \rightarrow M$  el encaje inclusión y sea  $N$  un campo unitario tipo tiempo que apunta a futuro y que es perpendicular a  $\Sigma$ . La segunda forma fundamental de  $\Sigma$  es un tensor 2-covariante en  $\Sigma$  definido por*

$$k(v, w) = g(\nabla_{i_*v} N, i_*w).$$

**DEFINICIÓN 2.2** (Datos iniciales). *Un dato inicial es una terna  $(\Sigma, h, k)$  donde  $(\Sigma, h)$  es una 3-variedad Riemanniana y  $k$  es un tensor 2-covariante simétrico, tal que se satisfacen las ligaduras de energía y momento*

$$\begin{aligned} r - k_{ij}k^{ij} + (\text{tr } k)^2 &= 0, \\ D^j k_{ji} - D_i(\text{tr } k) &= 0. \end{aligned}$$

*Aquí  $D$  es la conexión de Levi-Civita de  $(\Sigma, h)$  y  $r$  es la curvatura escalar de  $(\Sigma, h)$ .*

**DEFINICIÓN 2.3** (Problema de valores iniciales y desarrollo de los datos iniciales). *Dado datos iniciales  $(\Sigma, h, k)$ , el problema de valores iniciales es el de encontrar una 4-variedad  $M$  con una métrica lorentziana  $g$  y un encaje  $i : \Sigma \rightarrow M$  tal que la métrica inducida es  $h$  y la segunda forma fundamental es  $k$ . En estas condiciones a la terna  $(M, g)$  se le llama desarrollo de los datos iniciales (el encaje  $i$  está implícito). Si además  $i(\Sigma)$  es de Cauchy en  $(M, g)$  entonces se le llama desarrollo globalmente hiperbólico.*

**DEFINICIÓN 2.4.** *(Desarrollo globalmente hiperbólico maximal) Diremos que un desarrollo globalmente hiperbólico de los datos iniciales  $(\Sigma, h, k)$ , con encaje  $i : \Sigma \rightarrow M$ , es un desarrollo globalmente hiperbólico maximal si para todo otro desarrollo,  $(M', g')$  con  $i' : \Sigma \rightarrow M'$ , existe un mapa  $\psi : M' \rightarrow M$  que preserva la orientación del tiempo, que es un difeomorfismo sobre su imagen y tal que  $\psi^*g = g'$ ,  $\psi \circ i' = i$ .*



En este sentido un desarrollo globalmente hiperbólico maximal tiene a todos los desarrollos dentro.

**TEOREMA 2.1** (Choquet-Bruhat-Geroch [6]). *Sea  $(\Sigma, h, k)$  un dato inicial en el vacío. Entonces existe un único desarrollo maximal globalmente hiperbólico, a menos de isometrías que preservan la orientación temporal.*

Solo para darle un gusto al lector de cómo es la existencia local, lo que uno hace es elegir coordenadas astutas entorno a un punto  $p$  donde el término  $H_{ij}$  de arriba desaparece (o queda preelegido). En estas coordenadas se aplica teoría de sistemas hiperbólicos y se construye una solución. Luego se pegan cuidadosamente todas estas construcciones locales para obtener un espacio en un entorno de  $\Sigma$ . La unicidad local es más delicada, como también lo es la existencia del desarrollo maximal. Una prueba de todos estos resultados se encuentra en el libro [17].

### 3. Ecuaciones de onda

El contenido de esta sección se encuentra en los capítulos 8 y 9 del libro [17]. Salvo algunas simplificaciones, los resultados son citados como aparecen en dicha referencia.

**3.1. Notación.** A lo largo del trabajo encontraremos funciones que dependen de dos variables, la espacial  $x$  y la temporal  $t$ . Dependiendo del tipo de cálculos que usemos, denotaremos por  $\partial_x f$  o por  $f_x$ , a la derivada parcial de la función  $f$  respecto a la variable  $x$ . Análogamente usamos  $\partial_t f$  o  $f_t$ . Cuando no queremos referirnos a una variable en particular utilizamos  $\partial_\mu f$ , o  $f_\mu$ . Además usaremos  $\partial^\alpha f$ , con  $\alpha = (m, n)$  un multi-índice cualquiera, para denotar a la derivada parcial  $m$ -veces respecto al tiempo y  $n$ -veces respecto al espacio. Denotaremos por  $C_c(\mathbb{R}^n)$  al espacio de funciones continuas con valores en  $\mathbb{R}$  y de soporte compacto. Análogamente  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ ) denota el espacio de funciones de soporte compacto que son infinitamente derivables (que tienen  $k$ -derivadas continuas). El índice  $b$ ,  $C_b$ , en lugar de  $c$ , indicará que las funciones y sus derivadas están acotadas (*bounded*). Cuando trabajamos con funciones que dependen de la variable espacial y temporal,  $f(t, x)$ , los espacios funcionales referirán a las funciones  $f(t, \cdot)$  (salvo que se indique lo contrario). De esta manera,  $\|f\|_{C^2}$  es en realidad una función del tiempo, que para cada  $t$  vale la norma  $C^2$  de la función  $f(t, \cdot)$ . Denotaremos por  $H^k$  al espacio de las funciones localmente integrables con  $k$  derivadas débiles en  $L^2$ . Recordar que este espacio es completo, y  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso. A lo largo del trabajo usaremos el encaje de Sobolev, el cual afirma que  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  para  $s > k + n/2$ , donde la inclusión es acotada, i.e, la norma  $C_b^k$  es controlada por la norma  $H^s$ . Utilizaremos el encaje para  $n = 1$ , por lo cual  $H^{k+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R})$ .

**DEFINICIÓN 2.5.** *Diremos que una función  $f(t, x)$  es de soporte localmente  $x$ -compacto si para todo intervalo  $[T_1, T_2]$  existe un subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$  tal que  $f(t, x) = 0$  para  $t \in [T_1, T_2]$  y  $x \notin K$ .*

**3.2. Ecuaciones de onda lineales.** Dada una matriz simétrica  $(n+1) \times (n+1)$  con componentes  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, \dots, n$ , denotamos a la matriz  $n \times n$  con componentes  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , por  $g_b$ . Si  $g$  es invertible denotamos las componentes de la inversa por  $g^{\mu\nu}$ , y a la matriz  $n \times n$ ,  $g^{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  por  $g^\#$ . Si  $g$  es simétrica, con valores reales,  $g_{00} < 0$  y  $g_b > 0$ , entonces decimos que  $g$  es una matriz canónica de Lorentz. Sea  $\mathcal{C}$  el

conjunto de las matrices canónicas de Lorentz. Si  $a_1, a_2$  y  $a_3$  son números reales positivos y  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , definimos  $\mathcal{C}_{n,\mathbf{a}}$  el subconjunto de  $\mathcal{C}_n$  que consiste de las matrices  $g$  con

$$g_{00} \leq -a_1, \quad g_b \geq a_2, \quad \sum_{\mu,\nu=0}^n |g_{\mu\nu}| \leq a_3.$$

Sea  $g_I, I = 1, \dots, N$ , funciones suaves desde  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathcal{C}_n$ , con componentes  $g_{I\mu\nu}, \mu, \nu = 0, \dots, n$ . Asumimos que para cualquier intervalo compacto  $[T_1, T_2]$ , existen constantes  $a_i > 0, i = 1, 2, 3$ , tal que  $g_I(t, x) \in \mathcal{C}_{n,\mathbf{a}}$  para todo  $(t, x) \in [T_1, T_2] \times \mathbb{R}^n$  y  $I = 1, \dots, N$ , donde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . También asumimos que  $b_I^{J\alpha}, c_J^I, f^I \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , donde  $I, J = 1, \dots, N$  y  $\alpha = 0, \dots, n$ , y que  $u_0^I, u_1^I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Consideramos el problema de valores iniciales

$$(27) \quad g_I^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u^I + b_I^{J\alpha} \partial_\alpha u^J + c_J^I u^J = f^I,$$

$$(28) \quad u^I(0, \cdot) = u_0^I,$$

$$(29) \quad \partial_t u^I(0, \cdot) = u_1^I,$$

donde  $I$  y  $J$  van desde 1 a  $N$ ,  $\mu, \nu$  y  $\alpha$  desde 0 to  $n$  y estamos sumando sobre todos los índices menos  $I$ . Respecto a existencia y unicidad de soluciones, el siguiente teorema es de utilidad.

**TEOREMA 2.2.** *Sea  $g_I, I = 1, \dots, N$  funciones suaves desde  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathcal{C}_n$ , con componentes  $g_{I\mu\nu}, \mu, \nu = 0, \dots, n$ . Supongamos que para todo intervalo compacto  $[T_1, T_2]$ , existen constantes  $a_i > 0, i = 1, 2, 3$ , tal que  $g_I(t, x) \in \mathcal{C}_{n,\mathbf{a}}$ , donde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , para todo  $(t, x) \in [T_1, T_2] \times \mathbb{R}^n$  y  $I = 1, \dots, N$ . Denotemos los componentes de la inversa por  $g_I^{\mu\nu}$ . Supongamos también que  $b_I^{J\alpha}, c_J^I, f^I \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , donde  $I, J = 1, \dots, N$  y  $\alpha = 0, \dots, n$ , y que  $u_0^I, u_1^I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Entonces el sistema de ecuaciones (27) a (29) tiene una solución única  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ . Más aún, si los datos iniciales tienen soporte compacto y  $f^I(t, x) = 0$  para todo  $t \in [T_1, T_2]$  y  $x \notin K_1$ , donde  $T_1 < 0 < T_2$  y  $K_1$  es compacto, entonces existe un conjunto compacto  $K$  tal que  $u(t, x) = 0$  para todo  $t \in [T_1, T_2]$  y  $x \notin K$ .*

Para una prueba ver [17], página 75. Vale destacar que existe una versión intrínseca de este resultado ([15], página 144), esto es, ecuaciones de ondas lineales en variedades Lorentzianas. Dicha ecuación es intrínseca (libre de coordenadas). También es importante recalcar que la unicidad vale con menos regularidad. Más precisamente, se tiene que

**TEOREMA 2.3.** *Sea  $g_I, I = 1, \dots, N$  funciones  $C^1$  desde  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathcal{C}_n$ , con componentes  $g_{I\mu\nu}, \mu, \nu = 0, \dots, n$ . Supongamos que para todo intervalo compacto  $[T_1, T_2]$ , existen constantes  $a_i > 0, i = 1, 2, 3$ , tal que  $g_I(t, x) \in \mathcal{C}_{n,\mathbf{a}}$ , donde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , para todo  $(t, x) \in [T_1, T_2] \times \mathbb{R}^n$  y  $I = 1, \dots, N$ . Denotemos los componentes de la inversa por  $g_I^{\mu\nu}$ . Supongamos también que  $b_I^{J\alpha}, c_J^I, f^I \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ , donde  $I, J = 1, \dots, N$  y  $\alpha = 0, \dots, n$ . Entonces dado un intervalo compacto  $[T_1, T_2]$  con  $T_1 \leq 0$  y  $T_2 \geq 0$ , existe un número  $s_0 > 0$  tal que lo siguiente se cumple. Si  $u$  es solución  $C^2$  del sistema dado por las ecuación (27), con datos iniciales nulos en  $B_r(x_0)$ , y  $f^I(t, x) = 0$  para todo  $(t, x) \in C_{x_0, r, s_0, T_1, T_2} := \{(t, x) \in [T_1, T_2] \times \mathbb{R}^n : |t| < r/s_0, |x| \leq r - s_0 |t|\}$ , entonces  $u = 0$  en  $C_{x_0, r, s_0, T_1, T_2}$ .*

Esto es un resultado de velocidad de propagación finita. La unicidad es un corolario sencillo. Este resultado también se puede aplicar a ecuaciones quasi-lineales, ver [17], página 75 y página 79.

**3.3. Ecuaciones de onda no lineales.** En esta capítulo consideramos soluciones  $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  a ecuaciones de onda quasi-lineales. Para tener un resultado se impone condiciones sobre las no linealidades. En lo que sigue exponemos algunos de los resultados presentados en el capítulo 9 de [17], siguiendo la misma terminología.

3.3.1. *Existencia y unicidad local.*

DEFINICIÓN 2.6. ( *$N, n$  Métrica admisible*) Sea  $1 \leq n$ ,  $N \in \mathbb{N}$  y  $k$  entero tal que  $0 \leq k \leq \infty$ . Sea  $g : \mathbb{R}^{nN+2N+n+1} \rightarrow \mathcal{C}_n$  una función  $C^k$ . Supongamos que

- Para todo multi-índice  $\alpha$ , tal que  $|\alpha| < k + 1$  e intervalo compacto  $[T_1, T_2]$ , existe una función creciente  $h_{I,\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$|(\partial^\alpha g_{\mu\nu})(t, x, \xi)| \leq h_{I,\alpha}(|\xi|).$$

- Para todo intervalo compacto  $I = [T_1, T_2]$ , existen  $a = (a_1, a_2, a_3) > 0$ , tal que  $g(t, x, \xi) \in \mathcal{C}_{n,a}$  para todo  $(t, x, \xi) \in I \times \mathbb{R}^{nN+2N+n}$ .

Entonces decimos que  $g$  es una  $C^k$   $N, n$ - métrica admisible.

DEFINICIÓN 2.7. ( *$N, n$  no linealidad admisible*) Sea  $1 \leq n$ ,  $N \in \mathbb{N}$  y  $k$  entero tal que  $0 \leq k \leq \infty$ . Sea  $f : \mathbb{R}^{nN+2N+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función  $C^k$ . Supongamos que

- Para todo multi-índice  $\alpha$ , tal que  $|\alpha| < k + 1$  e intervalo compacto  $[T_1, T_2]$ , existe una función creciente  $h_{I,\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$|(\partial^\alpha f)(t, x, \xi)| \leq h_{I,\alpha}(|\xi|).$$

- La función  $f_b$ , definida por  $f_b(t, x) = f(t, x, 0)$ , es de soporte localmente  $x$ -compacto.

Entonces decimos que  $f$  es una  $C^k$   $N, n$ - no linealidad admisible.

Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}[u] \partial_\mu \partial_\nu u &= f[u], \\ u(T_0, \cdot) &= U_0, \\ \partial_t u(T_0, \cdot) &= U_1. \end{aligned}$$

Aquí  $f[u] = f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \dots, \partial_{x^n} u(t, x))$ , y similarmente para  $g[u]$ . A continuación, damos un enunciado simplificado de existencia y unicidad local. Para más detalles ver [17], página 83.

**Proposición 2.4.** Sea  $1 \leq N, n \in \mathbb{N}$ . Sea  $g$  una  $N, n$ - métrica admisible  $C^\infty$ , y  $f$  una  $N, n$ - no linealidad admisible  $C^\infty$ . Sea  $k > n/2 + 1$ ,  $U_0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$  y  $U_1 \in H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ . Dado un intervalo compacto  $I = [T_1, T_2]$ , existe  $T > 0$ , dependiendo de  $I$  y continuamente en la norma  $H^{k+1}$  de  $U_0$  y de la norma  $H^k$  de  $U_1$ , tal que si  $T_0 \in [T_1, T_2]$ , entonces existe una única solución  $u \in C_b^2([T_0, T_0 + T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ . Más aún, se tiene que

$$u \in C([T_0, T_0 + T], H^{k+1}), \quad \partial_t u \in C([T_0, T_0 + T], H^k).$$

### 3.3.2. Criterio de continuación y soluciones $C^\infty$ .

**Proposición 2.5.** Sea  $1 \leq N, n \in \mathbb{N}$ ,  $g$  una  $N, n$ -métrica admisible de clase  $C^\infty$  y  $f$  una  $N, n$ -no linealidad admisible de clase  $C^\infty$ . Sea  $U_0, U_1 \in C_c^\infty$  y  $T_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces existen  $T_1 < T_0 < T_2$  y una única solución  $u \in C^\infty[(T_1, T_2) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N]$ . Más aún, la solución es de soporte localmente  $x$ -compacto y  $T_2 = \infty$  o

$$\lim_{\tau \rightarrow T_2^-} \sup_{T_0 \leq t \leq \tau} \sum_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(t, x)| = \infty.$$

Similar para  $T_1$ .

**3.3.3. Estabilidad de Cauchy.** En esta sección enunciamos un teorema de estabilidad. Si bien no usaremos el teorema explícitamente, el último capítulo se basa en las ideas de este resultado para extender los resultados a un espacio funcional más grande.

**Proposición 2.6.** Sea  $1 \leq N, n \in \mathbb{Z}$ ,  $g$  una  $N, n$ -métrica admisible de clase  $C^\infty$  y  $f$  una  $N, n$ -no linealidad admisible de clase  $C^\infty$ . Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}[u] \partial_\mu \partial_\nu u &= f[u], \\ u(T_0, \cdot) &= U_0, \\ \partial_t u(T_0, \cdot) &= U_1. \end{aligned}$$

Asumamos que  $u \in C^\infty[(T_-, T_+) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N]$  es una solución maximal del problema con datos iniciales  $U_0, U_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ . Asumamos además que tenemos una sucesión de datos iniciales  $U_{0,l}, U_{1,l} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$  tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [\|U_{0,l} - U_0\|_{H^{k+1}} + \|U_{1,l} - U_1\|_{H^k}] = 0$$

para algún  $k > n/2 + 1$ . Sea  $u_l \in C^\infty[(T_{l,-}, T_{l,+}) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N]$  las soluciones maximales correspondientes. Sea  $T_1 \in (T_-, T_+)$ . Entonces existe  $l_0$  tal que para  $l \geq l_0, T_1 \in (T_{l,-}, T_{l,+})$ . Además,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [\|u_l(T_1, \cdot) - u(T_1, \cdot)\|_{H^{k+1}} + \|\partial_t u_l(T_1, \cdot) - \partial_t u(T_1, \cdot)\|_{H^k}] = 0.$$

**3.4. Ecuaciones de onda no lineales en 1+1.** En 1+1 existen las *light-cone estimates*. Estas estimaciones permiten tener mejores resultados en el caso 1+1. Las mismas están basadas en las normas  $C^k$  en lugar de las normas  $H^k$ . Denotamos por  $C_0^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$  a las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $k$  derivadas continuas tal que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\partial_x^i f(x)| = 0 \forall i \leq k$ . Los siguientes resultados son de [16].

**Proposición 2.7.** Sea  $F \in C^\infty[(T_-, T_+) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^m)$  con la propiedad  $F(t, 0, 0) = 0$  para todo  $t \in (T_-, T_+)$ . Sea  $f \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  y  $g \in C_0^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  para algún  $k \geq 1$ . Entonces existe  $\epsilon_k > 0$ , dependiendo de  $\|f\|_{C_b^{k+1}(\mathbb{R})}, \|g\|_{C_b^k(\mathbb{R})}, t_0$  y de la función  $F$ , tal que la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(t, u, \partial u) \\ u(t_0, x) = f(x) \\ u_t(t_0, x) = g(x) \end{cases}$$

tiene una única solución en  $C^{k+1}[(t_0 - \epsilon_k, t_0 + \epsilon_k) \times \mathbb{R}]$ . Más aún,

$$u \in C[(t_0 - \epsilon_k, t_0 + \epsilon_k), C_0^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)] \quad y \quad \partial_t u \in C[(t_0 - \epsilon_k, t_0 + \epsilon_k), C_0^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)].$$

**Proposición 2.8.** *Sea  $F \in C^\infty [(T_-, T_+) \times \mathbb{R}^{3m}, \mathbb{R}^m]$  con la propiedad de que  $F(t, 0, 0) = 0$  para todo  $t \in (T_-, T_+)$  y sea  $f \in C_0^{k+1}(\mathbb{R})$  y  $g \in C_0^k(\mathbb{R})$  para todo  $k \geq 0$ . Entonces existe una solución  $u \in C^\infty [(t_-, t_+) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m]$  de*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(t, u, \partial u) \\ u(t_0, x) = f(x) \\ u_t(t_0, x) = g(x) \end{cases},$$

donde  $(t_-, t_+)$  es el intervalo maximal de existencia, y  $t_0 \in (t_-, t_+)$ . Además  $t_+ = T_+$  o  $(\|u\|_{C^1} + \|u\|_{C^0})(t)$  es no acotado en  $[t_0, t_+)$ . El enunciado para  $t_-$  es similar.

**Observación 2.9.** *Debido a la velocidad de propagación finita, es claro que el resultado anterior vale con  $C_c^k$  en lugar de  $C_0^k$ .*

**Observación 2.10.** *Se puede ver que los resultados anteriores valen si tomamos una no linealidad de la forma  $F(t, x, u, \partial u)$  con  $F$  no linealidad admisible de clase  $C^\infty$ .*

#### 4. Más notación, espacios funcionales y desigualdades útiles.

**4.1. Otros espacios funcionales y más notación.** Además de los espacios ya introducidos en la sección anterior, denotamos por  $\tilde{H}^k$  al espacio de las funciones con  $k$  derivadas débiles, todas en  $L^2(\cosh(2x) dx)$ . En este espacio colocamos las normas

$$(30) \quad \|f\|_{\tilde{H}^k}^2 := \sum_{i=0}^k \int_{\mathbb{R}} (f^{(i)}(x))^2 \cosh(2x) dx.$$

Es fácil ver que el espacio es completo y que  $C_c(\mathbb{R}^n)$  es denso en él. Más aún, para  $n = 1$  es fácil chequear el siguiente encaje de Sobolev:

$$\|\varphi\|_{\tilde{C}^k} \leq C \|\varphi\|_{\tilde{H}^{k+1}} \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}),$$

donde  $\|\varphi\|_{\tilde{C}^k} = \sup_{i \leq k} \|\partial_x^i \varphi \cosh^{1/2}(2x)\|_{C^0}$ . A lo largo del documento nos encontraremos con funciones  $f$  que dependen de  $t$  y de  $x \in \mathbb{R}$ . Estaremos interesados en controlar las normas de las funciones  $f(t, \cdot)$  en función del tiempo. Usaremos las siguientes notaciones con frecuencia:

$$\begin{aligned} m_0(t) &:= \|R - R_b\|_{C^0}(t) + \|R_t - R_{bt}\|_{C^0}(t), \\ m_k(t) &:= \|R - R_b\|_{C^k}(t) + \|R_t - R_{bt}\|_{C^{k-1}}(t) \quad \forall k \geq 1, \\ \mathcal{M}_k(t) &:= \|z\|_{H^k} + \|\partial_t z\|_{H^{k-1}}(t) + \|v\|_{H^k} + \|\partial_t v\|_{H^{k-1}}(t), \\ \tilde{\mathcal{M}}_k(t) &:= \|W - W_b\|_{\tilde{H}^k}(t) + \|\partial_t(W - W_b)\|_{\tilde{H}^{k-1}}(t) + \|q\|_{\tilde{H}^k}(t) + \|\partial_t q\|_{\tilde{H}^{k-1}}(t), \\ m_k[f](t) &:= \|f\|_{C^k}(t) + \|\partial_t f\|_{C^k}(t). \end{aligned}$$

Aquí  $z$  y  $v$  son funciones que serán definidas oportunamente. Cuando una de estas notaciones aparezca por primera vez recordaremos su significado. A lo largo de cada capítulo también introduciremos notación para las distintas energías o cantidades que irán apareciendo.

Respecto a las constantes que irán apareciendo en las estimaciones, las denotaremos siempre por la misma letra  $C$ . De esta manera, el valor de  $C$  irá cambiando de línea en

línea. Por último, cuando decimos *los datos iniciales* de  $f$ , siempre nos referiremos a las funciones  $f(0, \cdot)$ ,  $f_t(0, \cdot)$ .

#### 4.2. Desigualdades.

**Lema 2.11.** *Sea  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $F(0) = 0$ . Si  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ , entonces*

$$(31) \quad \|F(u)\|_{H^k} \leq \kappa(\|u\|_\infty) \|u\|_{H^k},$$

donde  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

DEMOSTRACIÓN. Ver capítulo 6.3 de [17], las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg.  $\square$

**Lema 2.12.** *Sea  $\phi_1, \dots, \phi_l \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y asumamos que  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  son multi-índices tales que  $\sum |\alpha_i| = k$ . Sea  $k_i = |\alpha_i|$ . Entonces*

$$\|\partial^{\alpha_1} \phi_1 \dots \partial^{\alpha_l} \phi_l\|_{L^2} \leq C \|\phi_1\|_\infty^{1-k_1/k} \|\phi_1\|_{L^2}^{k_1/k} \dots \|\phi_l\|_\infty^{1-k_l/k} \|\phi_l\|_{L^2}^{k_l/k}.$$

En particular, si  $n = 1$  y  $k \geq 1$ , por el encaje de Sobolev tenemos

$$(32) \quad \|\partial^{\alpha_1} \phi_1 \dots \partial^{\alpha_l} \phi_l\|_{L^2} \leq C \|\phi_1\|_{H^k} \dots \|\phi_l\|_{H^k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver capítulo 6.3 de [17], las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, ecuación 6.23.  $\square$

**Lema 2.13.** *Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave, y sea  $u, v \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Sea  $k \geq 1$ . Entonces existe una función continua  $\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$(33) \quad \|F(u(x)) - F(v(x))\|_{H^k} \leq \kappa(\|u\|_{H^k}, \|v\|_{H^k}) \|u - v\|_{H^k}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la prueba para  $k = 1$ . Notar que

$$F(u(x)) - F(v(x)) = \left( \int_0^1 \nabla F(tu(x) + (1-t)v(x)) dt \right) (u(x) - v(x))$$

por lo que

$$|F(u(x)) - F(v(x))| \leq \kappa(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) \|u(x) - v(x)\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

Integrando se obtiene el resultado para  $k = 0$ . Para  $k = 1$  notar que

$$\begin{aligned} \partial_\mu(F(u(x)) - F(v(x))) &= \left( \int_0^1 \nabla F(tu(x) + (1-t)v(x)) dt \right) (\partial_\mu u - \partial_\mu v) \\ &+ \left( \int_0^1 J(\nabla F)(tu(x) + (1-t)v(x)) \cdot (\partial_\mu v(x) + t\partial_\mu(v-u)(x)) dt \right) (u(x) - v(x)), \end{aligned}$$

por lo que

$$|\partial_\mu(F(u(x)) - F(v(x)))| \leq \kappa(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) \left( \begin{aligned} &\|\partial_\mu(u(x) - v(x))\| + \\ &\|\partial_\mu(v-u)(x)\| \|u(x) - v(x)\| + \\ &\|\partial_\mu v(x)\| \|u(x) - v(x)\| \end{aligned} \right).$$

Notar que en los términos productos, la suma de los ordenes de las derivadas es 1. Elevamos al cuadrado, integramos y aplicamos el lema previo. Notar que al aplicar el lema previo, tendremos varios factores de la forma  $\|u - v\|_{H^k}$ , y siempre tendremos al menos uno. Quedándonos con uno, y acotando los demás por  $\|u\|_{H^k} + \|v\|_{H^k}$  llegamos al resultado deseado. La prueba para otro  $k$  es idéntica.  $\square$

## Perturbaciones polarizadas de soporte compacto

En esta sección abordamos las perturbaciones de soporte compacto con  $q = 0$ , es decir, una solución  $(R, W)$  del sistema dado por las ecuaciones (2) y (3) cuyos datos iniciales difieren de los datos iniciales de la solución background solo en un conjunto de soporte compacto.

Notar que en principio las soluciones no están definidas para todo tiempo  $t \geq 0$ . Por esta razón todas las estimaciones derivadas en esta sección deben ser entendidas como válidas en el intervalo maximal de existencia de las soluciones. Recordar que la función  $R$  debe ser positiva para  $t \geq 0$  para que la métrica  $g$ , ecuación (1), sea definida positiva. Para lograr esto, el siguiente lema muestra que alcanza con pedir  $m_0(0) < 2R_0/3$ .

Antes de seguir recordamos la siguiente notación

$$\begin{aligned} m_0(t) &:= \|R - R_b\|_{C^0} + \|R_t - R_{bt}\|_{C^0}, \\ m_k(t) &:= \|R - R_b\|_{C^k} + \|R_t - R_{bt}\|_{C^{k-1}} \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

**Lema 3.1.** *Si  $(R, W)$  es una solución tal que  $R - R_b$  y  $W - W_b$  en  $t = 0$  son de soporte compacto y cumplen  $m_0(0) < \frac{2}{3}R_0$  entonces, para  $t \geq 0$ , y en el intervalo maximal de existencia, se cumple que  $R > 0$  y que  $(R - R_b, W - W_b)$  es de soporte localmente  $x$ -compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de D'Alembert aplicada a  $R$  se tiene

$$R(t, x) = R_b(t, x) + \frac{(R - R_b)}{2}(0, t + x) + \frac{(R - R_b)}{2}(0, t - x) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (R - R_b)_t(0, \zeta) d\zeta.$$

En consecuencia  $R \geq R_b - m_0(0)(t + 1)$ ,  $t \geq 0$ . Recordando que  $R_b \geq R_0 e^{2t}$  se sigue que  $R > 0$  si  $m_0(0) < 2R_0/3$ . La función  $R - R_b$  satisface una ecuación de onda sin fuente y con dato inicial de soporte compacto. Se sigue que  $R - R_b$  es de soporte localmente  $x$ -compacto. Una vez probado esto, una simple cuenta muestra que  $W - W_b$  satisface una ecuación de onda no lineal con dato inicial de soporte compacto y fuente de soporte localmente  $x$ -compacto. Se sigue que  $W - W_b$  es una función de soporte localmente  $x$ -compacto.  $\square$

### 1. La desigualdad básica de energía

Para obtener estabilidad asintótica de una solución en torno a la solución background es necesario tener estimaciones de energía que controlen la distancia a la solución background. Esto es similar a lo que sucede en dimensión finita con la teoría de Lyapunov. La función de Lyapunov, satisfaciendo determinadas desigualdades (estimaciones) permite controlar la estabilidad de ciertas soluciones. Una diferencia fundamental con dimensión finita es la falta de la compacidad local de los espacios subyacentes, lo cual hace más

difícil extraer conclusiones.

En esta sección mostraremos la desigualdad de energía en la cual se basan todas las estimaciones de este trabajo. Con este fin, sea el cambio de variable  $z = R^{1/2}(W - W_b)$ . En las nuevas variables la ecuación para  $W$  se transforma en

$$(34) \quad z_{tt} - z_{xx} + zG = g \quad \text{con } G = \frac{R_t^2 - R_x^2}{4R^2} \text{ y } g = R^{1/2} \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) W_{bx}.$$

Notar que  $W - W_b$  es de soporte localmente  $x$ -compacto si y sólo si  $z$  lo es. Ahora en estas variables es más sencillo de intuir una energía para la ecuación. Para ver esto, observar que si  $R = R_b$  entonces la ecuación queda

$$z_{tt} - z_{xx} + \frac{z}{\cosh^2(2x)} = 0$$

la cual deriva del lagrangiano  $\mathcal{L} = z_t^2 - z_x^2 - z^2/\cosh^2(2x)$ . Por el teorema de Noether se satisface  $(z_t \mathcal{L}_{z_t} - \mathcal{L})_t + (z_x \mathcal{L}_{z_x})_x = 0$ , y por ser  $z$  de soporte compacto en cada  $t$  esto implica que la cantidad  $\int_{\mathbb{R}} z_t \mathcal{L}_{z_t} - \mathcal{L} \, dx$  es conservada. Inspirados por esto, definimos la energía

$$E := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_t^2 + z_x^2 + z^2 G_b \, dx,$$

donde  $G_b = \frac{1}{\cosh^2(2x)}$ . Notar que si  $R \neq R_b$  entonces la energía anterior no es conservada. Para controlarla primero es necesario un lema para controlar la diferencia entre  $R$  y  $R_b$ .

**Lema 3.2** (Estimaciones de  $R$ ). *Para todo  $t \geq 0$ , se tienen las siguientes estimaciones:*

$$(35) \quad \|R - R_b\|_{\infty}(t) \leq (t+1)m_0(0),$$

$$(36) \quad \|R_x - R_{bx}\|_{\infty}(t), \|R_t - R_{bt}\|_{\infty}(t) \leq m_1(0).$$

Más aún, asumiendo  $m_0(0) \leq \frac{2}{3}R_0$  también tenemos  $R \sim R_b$ , es decir, existe una constante  $d > 0$  tal que

$$(37) \quad \frac{1}{d} \leq \left\| \frac{R_b}{R} \right\|_{\infty}(t) \leq d,$$

esto a su vez implica la existencia de una constante  $C > 0$  tal que

$$(38) \quad \left\| \frac{R_t}{R} - \frac{R_{bt}}{R_b} \right\|_{\infty}(t), \left\| \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right\|_{\infty}(t) \leq \frac{C(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0),$$

$$(39) \quad \|G_b - G\|_{\infty}(t) \leq \frac{C(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0),$$

$$(40) \quad \|g\|_{\infty}(t) \leq \frac{C(t+1)}{e^t \cosh^{3/2}(2x)} m_1(0).$$

Para una prueba de este lema, ver apéndice, sección 1.1.1.

**Proposición 3.3** (La desigualdad básica de energía). *Sea  $(R, z)$  una solución tal que  $R - R_b, (R - R_b)_t$  son de soporte compacto en  $t = 0$ , y que además cumple  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe una constante  $C$  tal que, en el intervalo maximal de existencia,*

$$(41) \quad E^{1/2}(t) \leq C(E^{1/2}(0) + m_1(0)), \text{ con } t \geq 0.$$



Adicionalmente, la constante  $C$  solo depende de una cota de  $m_1(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. La función  $z$  es de soporte localmente  $x$ -compacto. Por esta razón, podemos derivar debajo de la integral e integrar por partes sin término de borde. Usando esto y la ecuación ecuación (34) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \int_{\mathbb{R}} z_t z_{tt} + z_x z_{xt} + z z_t G_b \, dx = \int_{\mathbb{R}} z_t (z_{tt} - z_{xx} + z G_b) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} z_t z (G_b - G) \, dx + \int_{\mathbb{R}} z_t g \, dx \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\int_{\mathbb{R}} z_t^2 \, dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} z^2 (G_b - G)^2 \, dx}}_{\text{Primer término}} + \underbrace{\sqrt{\int_{\mathbb{R}} z_t^2 \, dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} g^2 \, dx}}_{\text{Segundo término}}. \end{aligned}$$

Comencemos mirando el primer término. La primer integral está acotada por  $E^{1/2}$ . Para la segunda, usando la estimación (39) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos que esta integral está acotada por

$$C(t+1)m_1(0)e^{-2t}E^{1/2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{z^2}{\cosh^2(2x)} \, dx},$$

pero el último integrando es simplemente  $z^2 G_b$ , por lo cual, el primer término es menor o igual que

$$C(t+1)e^{-2t}m_1(0)E,$$

donde hemos ajustado la constante  $C$ . Sigamos con el segundo término. Este está compuesto por dos integrales. La primer integral es menor o igual a  $E^{1/2}$ . Para la segunda integral, usando (40) se obtiene

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} g^2 \, dx} \leq C(t+1)e^{-t}m_1(0).$$

Juntando estas observaciones tenemos

$$\begin{aligned} \dot{E} &\leq C(t+1)e^{-2t}m_1(0)E + C(t+1)e^{-t}m_1(0)E^{1/2} \\ (42) \quad &\leq C(t+1)e^{-2t}m_1(0)E + C(t+1)e^{-t}E + C(t+1)e^{-t}m_1^2(0) \\ &\leq C(t+1)e^{-t}E + C(t+1)e^{-t}m_1^2(0), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad, la constante  $C$  depende de una cota en  $m_1(0)$ . Integrando se tiene

$$E(t) \leq E(0) + Cm_1(0)^2 + \int_0^t C(s+1)e^{-s}E(s) \, ds.$$

Por el lema de Gronwall

$$E(t) \leq C(E(0) + m_1(0)^2) \exp\left(\int_0^t C(s+1)e^{-s} \, ds\right),$$

lo cual implica la tesis.  $\square$

Notar que como  $R \sim R_b = R_0 e^{2t} \cosh(2x)$ , esta estimación implica decaimiento exponencial en las variables originales, tanto cuando  $t \rightarrow +\infty$  como cuando  $x \rightarrow \infty$ . Sin embargo, todavía no sabemos que las soluciones existan para todo tiempo futuro. Esto en parte motiva ir a energías superiores.

## 2. Energías de orden superior

Sea  $\alpha = (m, n)$  un multi-índice. Recordar que  $\partial^\alpha z(t, x)$  denota la derivada parcial  $m$  veces respecto a  $t$  y  $n$  veces respecto a  $x$ . Definimos

$$E^\alpha(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial^\alpha z)_t^2 + (\partial^\alpha z)_x^2 + (\partial^\alpha z)^2 G_b \, dx.$$

Las energías más importantes son las de la forma  $\alpha = (0, m)$ , ya que involucran la norma de Sobolev de  $z$  y  $z_t$ . De esta manera, en  $t = 0$ , solo involucran los datos iniciales. Si uno intenta trabajar solamente con estas energías espaciales, e intenta reproducir lo hecho en la sección anterior, uno obtiene que  $E^{(0,m)}$  crece a lo sumo polinomialmente. Sin embargo, si primero trabajamos en estimaciones para  $E^{(n,0)}$  y luego pasamos estas estimaciones a  $E^{(0,m)}$  entonces obtenemos mejores estimaciones. Antes de continuar, se necesitan más estimaciones para la diferencia entre  $R$  y  $R_b$ .

**Lema 3.4.** *(Estimaciones de  $R - 2$ ) Supongamos que  $m_0(0) < 2R_0/3$ , entonces:*

a) *Para todo multi-índice  $\alpha \neq (0, 0)$  tenemos*

$$(43) \quad \|\partial^\alpha (R - R_b)\|_\infty(t) \leq m_\alpha(0) \quad t \geq 0.$$

b) *Para todo multi-índice  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha R/R$ ,  $\partial^\alpha R^{1/2}/R^{1/2}$  y  $\partial^\alpha R^{-1/2}/R^{-1/2}$  están acotados para el futuro. Más aún, la cota solo depende en una cota de  $m_{|\alpha|}(0)$ .*

c) *Para todo multi-índice  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha R_t/R$ ,  $\partial^\alpha R_x/R$ ,  $\partial^\alpha (R_t/R)$  y  $\partial^\alpha (R_x/R)$  están acotados para el futuro. Más aún, la cota solo depende de una cota en  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .*

d) *Para todo multi-índice  $\alpha$  existe una constante  $C$  tal que*

$$(44) \quad \left\| \cosh(2x) \partial^\alpha \left( \frac{R_t}{R} - \frac{R_{bt}}{R_b} \right) \right\|_\infty, \left\| \cosh(2x) \partial^\alpha \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \right\|_\infty(t) \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t}} m_{|\alpha|+1}(0).$$

*Más aún, la constante solo depende de una cota de  $m_{|\alpha|}(0)$ .*

e) *Estimaciones para  $G_b - G$ : para todo multi-índice  $\alpha$  existe una constante  $C$  tal que*

$$(45) \quad \|\cosh(2x) \partial^\alpha (G - G_b)\|_\infty(t) \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t}} m_{|\alpha|+1}(0).$$

*Más aún, la constante solo depende de una cota de  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .*

f) *Para todo multi-índice  $\alpha$  existe  $C$  tal que*

$$(46) \quad |\partial^\alpha G| \leq \frac{C}{\cosh 2x} = 2C \sqrt{G_b}.$$

*Más aún, la constante solo depende de una cota de  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .*

g) *Para todo multi-índice  $\alpha$  existe una constante  $C > 0$  tal que  $|\partial^\alpha W_{bx}| \leq C/\cosh(2x)$ . Además, si  $\alpha$  no es puramente espacial entonces  $\partial^\alpha W_{bx} = 0$ .*

h) *Estimaciones para g*: Para todo multi-índice  $\alpha$  existen una constante  $C > 0$  tal que

$$(47) \quad \|\cosh^{3/2}(2x)\partial^\alpha g\|_\infty \leq C \frac{t+1}{e^{2t}} m_{|\alpha|+1}(0).$$

Adicionalmente, la constante  $C$  solo depende una cota en  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .

Para ver una prueba de este lema, ver apéndice, sección 1.1.2.

**Proposición 3.5** (Estimaciones de las energías temporales). *Sea  $(R, z)$  una solución tal que  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$  son de soporte compacto en  $t = 0$ , y que además cumple  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Además sea  $\alpha = (m, 0)$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que, en el intervalo maximal de existencia,*

$$\sqrt{E^{(m,0)}}(t) \leq C(\sqrt{E^{(m,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E^{(1,0)}}(0) + \sqrt{E}(0) + m_{|\alpha|+1}(0)), \text{ con } t \geq 0.$$

Más aún, la constante  $C$  solo depende de  $m$  y de una cota de  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. Notar que el caso  $\alpha = (0, 0)$  ya lo hemos probado en la proposición 3.3. Procedamos por inducción en  $m$ . Dado  $m > 0$  como en el enunciado, supongamos que la tesis es válida para  $i = 0, \dots, m-1$ . Derivando la ecuación respecto a  $t$   $m$ -veces se obtiene

$$(\partial_t^m z)_{tt} - (\partial_t^m z)_{xx} + (\partial_t^m z)G + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \partial_t^i z \partial_t^{m-i} G = \partial_t^m g$$

Al igual que en la prueba de la proposición 3.3, derivamos  $E^{(m,0)}$  con respecto al tiempo, integramos por partes, usamos la ecuación y ahora también usamos  $\partial_t^i G_b = 0$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{E}^{(m,0)} &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_t (\partial_t^m z) (G_b - G) - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_i \partial_t^i z \partial_t^{m-i} G + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_t \partial_t^m g \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_t (\partial_t^m z) (G_b - G) - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_t \partial_t^i z \partial_t^{m-i} (G - G_b) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)_t \partial_t^m g \\ &\leq \sqrt{E^{(m,0)}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m z)^2 (G_b - G)^2} + C \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{E^{(m,0)}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t^i z)^2 (\partial_t^{m-i} (G - G_b))^2} \\ &\quad + \sqrt{E^{(m,0)}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m g)^2}. \end{aligned}$$

Ahora, usando las estimaciones para la fuente  $g$  y para  $G - G_b$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{E}^{(m,0)} &\leq C(t+1)e^{-2t} E^{(m,0)} m_{|\alpha|+1}(0) + C \sum_{i=0}^{m-1} (t+1)e^{-2t} \sqrt{E^{(m,0)}} \sqrt{E^{(i,0)}} m_{|\alpha|+1}(0) \\ &\quad + C \sqrt{E^{(m,0)}} e^{-t} (t+1) m_{|\alpha|+1}(0) \end{aligned}$$

Para continuar, usamos la hipótesis inductiva para acotar el segundo término

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} (t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}\sqrt{E^{(i,0)}}m_{|\alpha|+1}(0) \leq \\
& \sum_{i=0}^{m-1} (t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}\left(\sqrt{E^{(i,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E^{(1,0)}}(0) + \sqrt{E}(0)\right)m_{|\alpha|+1}(0) \\
& + \sum_{i=0}^{m-1} (t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}m_{i+1}(0)m_{|\alpha|+1}(0) \\
& \leq C(t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}\left(\sqrt{E^{(m-1,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E}(0)\right)m_{|\alpha|+1}(0) \\
& + C(t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}m_{|\alpha|+1}(0),
\end{aligned}$$

donde ahora  $C$  depende de una cota de  $m_{|\alpha|+1}(0)$ . Usando esta desigualdad en la anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{E}^{(m,0)} & \leq C(t+1)e^{-2t}E^{(m,0)}m_{|\alpha|+1}(0) \\
& + C(t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}\left(\sqrt{E^{(m-1,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E}(0)\right)m_{|\alpha|+1}(0) \\
& + C(t+1)e^{-2t}\sqrt{E^{(m,0)}}m_{|\alpha|+1}(0) + C\sqrt{E^{(m,0)}}e^{-t}(t+1)m_{|\alpha|+1}(0).
\end{aligned}$$

Los últimos términos se juntan en uno solo cambiando  $e^{-2t}$  por  $e^{-t}$ . Dividiendo por  $\sqrt{E^{(m,0)}}$ , integrando y usando el lema de Gronwall<sup>1</sup> se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{E^{(m,0)}}(t) & \leq C\left(\sqrt{E^{(m,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E}(0) + m_{|\alpha|+1}(0)\right)\exp(Cm_{|\alpha|+1}(0)) \\
& \leq C\left(\sqrt{E^{(m,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E}(0) + m_{|\alpha|+1}(0)\right),
\end{aligned}$$

probando la proposición. □

El siguiente lema va en la dirección de probar las estimaciones esperadas para  $E^{(0,n)}$ . Recordar que si  $\alpha = (m, n)$  entonces  $|\alpha| = m + n$ .

**Lema 3.6.** *En las hipótesis de arriba, supongamos que  $n \geq 1$  y  $m \geq 0$ , entonces existe una constante  $C > 0$  tal que, en el intervalo maximal,*

$$\sqrt{E^{(m,n)}}(t) \leq C\sqrt{E^{(m+1,n-1)}}(t) + C \sum_{0 \leq \beta \leq (m,n-1)} \sqrt{E^\beta}(t) + Cm_{|\alpha|}(0) \text{ con } t \geq 0,$$

donde  $\alpha = (m, n)$ . Ahora si  $m \geq 1$  y  $n \geq 0$  entonces existe una constante  $C > 0$  tal que, en el intervalo maximal,

$$\sqrt{E^{(m,n)}}(t) \leq C\sqrt{E^{(m-1,n+1)}}(t) + C \sum_{0 \leq \beta \leq (m-1,n)} \sqrt{E^\beta}(t) + Cm_{|\alpha|}(0) \text{ con } t \geq 0.$$

<sup>1</sup>En realidad no es necesario dividir por  $\sqrt{E}$ . Se puede proceder como la estimación de la sección anterior. Para poder hacer el argumento de la división hay que superar el tecnicismo de qué sucede si  $\sqrt{E^{(m,0)}} = 0$  en algún tiempo. Una forma de lidiar con esto es trabajar con  $\sqrt{E^{(m,0)}} + \epsilon$ , y al final tomar  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Las constantes solo dependen de una cota de  $m_{|\alpha|}(0)$ , de  $m$  y de  $n$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} E^{(m,n)}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{[(\partial_t^m \partial_x^n z)_t]^2}_{\text{Está en } E^{(m+1,n-1)}} + [(\partial_t^m \partial_x^n z)_x]^2 + \underbrace{(\partial_t^m \partial_x^n z)^2}_{\text{Está en } E^{(m,n-1)}} \underbrace{G_b}_{\leq 1} dx \\ &\leq E^{(m+1,n-1)}(t) + E^{(m,n-1)}(t) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(\partial_t^m \partial_x^n z)_x]^2 dx. \end{aligned}$$

Para acotar el último término, derivamos la ecuación (34)  $m$  veces con respecto al tiempo y  $n-1$  veces respecto a  $x$ . La ecuación derivada da la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m \partial_x^{n+1} z)^2 &\leq C \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t^{m+2} \partial_x^{n-1} z)^2}_{\text{Está en } E^{(m+1,n-1)}} + C \sum_{\beta=(0,0)}^{(m,n-1)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (\partial^\beta z \partial^{\alpha-\beta} G)^2}_{\leq CE^\beta} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t^m \partial_x^{n-1} g)^2}_{\leq Cm_{|\alpha|}^2(0)} \\ &\leq CE^{(m+1,n-1)} + C \sum_{\beta=(0,0)}^{(m,n-1)} E^\beta + Cm_{|\alpha|}^2(0). \end{aligned}$$

Usando esto en la desigualdad de arriba se obtiene

$$E^{(m,n)} \leq CE^{(m+1,n-1)} + C \sum_{\beta=(0,0)}^{(m,n-1)} E^\beta + Cm_{|\alpha|}^2(0)$$

lo cual implica la primera desigualdad. La segunda desigualdad se prueba de la misma forma. Siguiendo la constante de línea en línea vemos que efectivamente solo depende de una cota de  $m_{|\alpha|}(0)$ .  $\square$

**Corolario 3.7.** *En las hipótesis anteriores, dado  $n$ , existe una constante  $C > 0$  tal que, en el intervalo maximal,*

$$(48) \quad \sqrt{E^{(0,n)}}(t) \leq C(\sqrt{E^{(n,0)}}(t) + \dots + \sqrt{E^{(1,0)}}(t) + \sqrt{E}(t)) + Cm_n(0),$$

y

$$(49) \quad \sqrt{E^{(n,0)}}(t) \leq C(\sqrt{E^{(0,n)}}(t) + \dots + \sqrt{E^{(0,1)}}(t) + \sqrt{E}(t)) + Cm_n(0).$$

La constante depende solamente en una cota de  $m_n(0)$  y de  $n$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando el lema previo e inducción se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 3.8** (Estimaciones de las energías espaciales). *Sea  $(R, z)$  una solución tal que  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$ ,  $z$  y  $z_t$  son de soporte compacto en  $t = 0$ , y tal que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe una constante  $C$  tal que, en el intervalo maximal,*

$$(50) \quad \sqrt{E^{(0,n)}}(t) \leq C(\sqrt{E^{(0,n)}}(0) + \dots + \sqrt{E^{(0,1)}}(0) + \sqrt{E}(0)) + Cm_{n+1}(0).$$

La constante  $C$  solo depende de  $n$  y de una cota de  $m_{n+1}(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero notamos que ya tenemos probado el correspondiente resultado para  $E^{(n,0)}$  en la proposición 3.5. Entonces primero usamos la ecuación (48),

luego la estimación dada en la proposición 3.5 y finalmente la ecuación (49), esta vez evaluada en  $t = 0$ . Veamos,

$$\begin{aligned}\sqrt{E^{(0,n)}}(t) &\leq C(\sqrt{E^{(n,0)}}(t) + \dots + \sqrt{E^{(1,0)}}(t) + \sqrt{E}(t)) + Cm_n(0) \\ &\leq C(\sqrt{E^{(n,0)}}(0) + \dots + \sqrt{E^{(1,0)}}(0) + \sqrt{E}(0)) + Cm_{n+1}(0) \\ &\leq C(\sqrt{E^{(0,n)}}(0) + \dots + \sqrt{E^{(0,1)}}(0) + \sqrt{E}(0)) + Cm_{n+1}(0).\end{aligned}$$

□

### 2.1. Relación con las normas $H^k$ y volviendo a las variables originales.

Recordar la notación

$$\mathcal{M}_k[z](t) := \|z\|_{H^k}(t) + \|\partial_t z\|_{H^{k-1}}(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx.$$

**TEOREMA 3.9** (Existencia global y evolución  $H^k$ ). *Sea  $(R, z)$  una solución tal que  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$  son de soporte compacto en  $t = 0$ , y que además cumple  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Sea  $k > 0$  cualquiera. Entonces existe una constante  $C$  tal que*

$$(51) \quad \mathcal{M}_k(t) \leq C(\mathcal{M}_k(0) + m_k(0))(t + 1), \quad \text{para } t \geq 0.$$

La constante  $C$  depende de una cota de  $m_k(0)$  y de  $k$ . Más aún, la solución  $(R, z)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Notar que  $\dot{\mathcal{A}} \leq E^{1/2} \mathcal{A}^{1/2} \leq C(E^{1/2}(0) + m_1(0)) \mathcal{A}^{1/2}$ . Por esto

$$\mathcal{A}^{1/2}(t) \leq \mathcal{A}^{1/2}(0) + C(E^{1/2}(0) + m_1(0))t.$$

Observar que  $\mathcal{M}_k$  involucra  $(\partial_x^i z)^2$  con  $i = 0, \dots, k$  y  $(\partial_x^j \partial_t z)^2$  con  $j = 0, \dots, k - 1$ . Todos estos términos aparecen en la derivada respecto al tiempo o en la derivada respecto al espacio que componen alguna de las siguientes cantidades:  $\mathcal{A}, E, E^{(0,1)}, \dots, E^{(0,k-1)}$ . Con esto presente, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_k(t) &\leq C(\sqrt{E}(t) + \dots + \sqrt{E^{(0,k-1)}}(t) + \sqrt{\mathcal{A}}(t)) \\ &\leq C(\sqrt{E}(0) + \dots + \sqrt{E^{(0,k-1)}}(0)) + Cm_k(0) + C\sqrt{\mathcal{A}}(t) \\ &\leq C(\sqrt{E}(0) + \dots + \sqrt{E^{(0,k-1)}}(0)) \\ &\quad + Cm_k(0) + C\sqrt{\mathcal{A}}(0) + C(\sqrt{E}(0) + m_1(0))t \\ &\leq C(\mathcal{M}_k(0) + m_k(0))(t + 1),\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado las estimaciones obtenidas en la sección anterior. Por último, si  $T_+$  es el supremo de los  $T$  tal que la solución está definida en  $[0, T]$ , entonces  $\mathcal{M}_k(t)$  está acotado en  $[0, T_+]$ . Aplicando esto con  $k = 2$  tenemos que  $\|z\|_{H^2}(t) + \|z_t\|_{H^1}(t)$  permanece acotado. Por el encaje de Sobolev esto muestra que todas las derivadas hasta orden 1 de  $z$  permanecen acotadas. Por el criterio de continuación, proposición 2.8,  $T_+ = +\infty$ . □

El siguiente lema nos permite volver a nuestras variables originales.

**Lema 3.10** (Cambio de variable). *Sea  $R$  solución de la ecuación (2) con  $m_0(0) < 2R_0/3$ , y sea  $k > 0$ . Sea  $W : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $z := R^{1/2}(W - W_b)$ . Finalmente sea  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces*

1.  $z$  es de soporte localmente  $x$ -compactos si y sólo si  $W - W_b$  lo es.
2.  $z$  es suave si y sólo si  $q$  lo es.
3.  $z$  es solución (suave) de la ecuación (34) si y sólo  $W$  es solución de la ecuación (3).
4. Además  $(z(t, \cdot), z_t(t, \cdot))$  pertenece a  $H^k \times H^{k-1}$  si y sólo si  $((W - W_b)(t, \cdot), (W - W_b)_t(t, \cdot))$  pertenece a  $\tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$ . Más aún, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} e^{-t} (\|z\|_{H^k} + \|z_t\|_{H^{k-1}})(t) &\leq (\|W - W_b\|_{\tilde{H}^k} + \|(W - W_b)_t\|_{\tilde{H}^{k-1}})(t) \\ &\leq C e^{-t} (\|z\|_{H^k} + \|z_t\|_{H^{k-1}})(t) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{H}^k$  es el espacio de Sobolev definido por la ecuación (30). Aquí la constante  $C$  depende de una cota de  $m_k(0)$  y de  $k$ . Además, este ítem también se cumple para los datos iniciales, siempre y cuando se tome datos iniciales cumpliendo  $z_t = (R^{1/2})_t(W - W_b) + R^{1/2}(W - W_b)_t$ .

Para ver una prueba, ver el apéndice, sección 1.2.1. Ahí se prueba el lema 4.7, el cual tiene a este lema como un caso particular. En el siguiente corolario resumimos el resultado obtenido hasta ahora en las variables originales. Recordar la notación

$$(52) \quad \tilde{\mathcal{M}}_k(t) := \|W - W_b\|_{\tilde{H}^k}(t) + \|\partial_t(W - W_b)\|_{\tilde{H}^{k-1}}(t).$$

**Corolario 3.11.** *Dado  $(R, W)$  una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) y (3) con  $q = 0$ . Supongamos que los datos iniciales  $R, R_t, W, W_t$  difieren de los datos de la solución background en un conjunto compacto. Supongamos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces, la solución está definida para todo tiempo futuro  $t \geq 0$  y*

$$\tilde{\mathcal{M}}_k(t) \leq C e^{-t}(t + 1) \left( \tilde{\mathcal{M}}_k(0) + m_k(0) \right).$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de una cota de  $m_k(0)$  y de  $k$ .

DEMOSTRACIÓN. El lema anterior implica que

$$\tilde{\mathcal{M}}_k(t) \leq C e^{-t} \mathcal{M}_k(t).$$

Por la estimación 51 tenemos que

$$\mathcal{M}_k(t) \leq C e^{-t} (\mathcal{M}_k(0) + m_k(0))(t + 1).$$

Usando nuevamente el lema del anterior pero ahora en  $t = 0$  se llega a la tesis.  $\square$





## Perturbaciones no polarizadas de soporte compacto

El objetivo de esta sección es estudiar perturbaciones no polarizadas, es decir, ahora permitimos que  $q \neq 0$ . De nuevo en esta sección nos encargamos de perturbaciones compactas.

### 1. Distancia acotada a la solución background.

Consideremos una solución del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4), que inicialmente solo difiere de la solución background en un conjunto de soporte compacto. Por propagación finita se ve que  $R - R_b$ ,  $W - W_b$ , y  $q - q_b$ , en su intervalo maximal, son de soporte localmente  $x$ -compacto. Estas propiedades nos permiten integrar por partes y derivar debajo de la integral.

En lo que sigue, derivamos una estimación que controla la norma  $C^0$  de  $W$  y  $q$ . Para esto conviene escribir el sistema de ecuaciones en su forma intrínseca. Con este fin, introducimos varios objetos. Dado un mapa suave  $\chi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H}$ , denotamos por  $\chi^{-1}T\mathbb{H}$  al fibrado pullback sobre  $\mathbb{K}$ . Esto es, en cada punto  $k \in \mathbb{K}$  colocamos el plano tangente  $T_{\chi(k)}\mathbb{H}$ . El diferencial de  $\chi$ ,  $D\chi : T\mathbb{K} \rightarrow T\mathbb{H}$ , se puede considerar como una sección del fibrado  $\mathbb{K} \rightarrow T^*\mathbb{K} \otimes \chi^{-1}T\mathbb{H}$ . Esto es, para cada punto  $k \in \mathbb{K}$  tenemos un objeto que recibe un elemento de  $T\mathbb{K}$  y devuelve uno de  $T\mathbb{H}$ .

En  $\chi^{-1}T\mathbb{H}$  tenemos la métrica pullback y la conexión pullback. La conexión pullback  $\nabla : \Gamma(T\mathbb{K}) \times \Gamma(\chi^{-1}T\mathbb{H}) \rightarrow \Gamma(\chi^{-1}T\mathbb{H})$  se puede definir de la siguiente forma. Sean  $(x^i)$  coordenadas en  $\mathbb{H}$ , y sea  $\partial_i$  la base coordenada inducida. Notar que  $\partial_i \circ \chi \in \Gamma(\chi^{-1}T\mathbb{H})$ . Dado un elemento  $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \chi^{-1}T\mathbb{H}$  de  $\Gamma(\chi^{-1}T\mathbb{H})$ , se puede escribir localmente en la base  $\partial_i \circ \chi$ ,  $\psi = \psi^i \partial_i \circ \chi$ . Dado un campo  $Y \in \Gamma(T\mathbb{K})$ , se define  $\nabla_Y \psi$  mediante la fórmula

$$\nabla_Y \psi = Y(\psi^i) \partial_i \circ \chi + \psi^i (\nabla_{D\chi(Y)}^{\mathbb{H}} \partial_i) \circ \chi = ((Y^\mu \partial_\mu) \psi^i + \tilde{\Gamma}_{rs}^i \partial_\mu \chi^r Y^\mu \psi^s) \partial_i \circ \chi$$

donde en la última fórmula hemos utilizado coordenadas  $(y^\mu)$  en  $\mathbb{K}$  para expresar al campo  $Y = Y^\mu \partial_\mu$ . Además denotamos por  $\tilde{\Gamma}_{rs}^i$  a los símbolos de Christoffel de  $\mathbb{H}$  en las coordenadas  $x^i$ , precompuesto con el mapa  $\chi$ .

Por otro lado, en el fibrado  $T^*\mathbb{K}$  tenemos la métrica  $k$  y su conexión. La conexión producto en  $T^*\mathbb{K} \otimes \chi^{-1}T\mathbb{H}$  (la que satisface la regla del producto, ecuación (25)) preserva la métrica producto. El punto de toda esta construcción es que originalmente en  $\mathbb{K}$  tenemos una conexión que nos permite derivar tensores en  $\mathbb{K}$ , es decir, secciones de  $T\mathbb{K} \otimes \dots \otimes T\mathbb{K} \otimes T^*\mathbb{K} \otimes \dots \otimes T^*\mathbb{K}$ . Al introducir la conexión pullback, ahora podemos agregar factores  $T^{-1}\mathbb{H}$  al producto anterior, permitiéndonos, por ejemplo, derivar el diferencial de  $\chi$ . Para no abrumar la notación, usaremos simplemente  $\nabla$ , y no distinguiremos entre bases de  $T\mathbb{K}$  y de  $\chi^{-1}T\mathbb{H}$ .

Usando esta nueva conexión, y tomando  $\chi = (W, q)$ , el sistema dado por las ecuaciones (3) y (4) se escribe simplemente como  $\nabla^a \partial_a \chi^i = 0$ , i.e,  $tr(\nabla D\chi) = 0$ , es decir, el

laplaciano de  $\chi$  es igual a cero. Una forma de ver esto es usando coordenadas. En efecto,

$$\nabla^a \partial_a \chi^i = g^{ab} (\partial_b \partial_a \chi^i - \Gamma_{ba}^\lambda \partial_\lambda \chi^i + \tilde{\Gamma}_{k\lambda}^i \partial_b \chi^k \partial_a \psi^\lambda).$$

Si utilizamos la coordenadas del espacio hiperbólico tal que  $h = 4dW^2 + e^{-4W} dq^2$  y las coordenadas naturales de  $\mathbb{K}$  donde la métrica luce  $k = 4e^{4t}(-dt^2 + dx^2) + R^2(t, x)d\psi^2$ , entonces los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 2, \Gamma_{11}^0 = 2, \Gamma_{22}^0 = RR_t/(4e^{4t}), \Gamma_{01}^1 = 2, \Gamma_{22}^1 = -RR_x/(4e^{4t}), \Gamma_{02}^2 = R_t/R, \\ \Gamma_{12}^2 &= R_x/R, \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{1}{2}e^{-4W}, \tilde{\Gamma}_{12}^2 = -2. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión de arriba obtenemos el sistema de ecuaciones para  $W$  y  $q$ . Otra forma de llegar a la ecuación es mediante la ecuación de Euler-Lagrange del funcional

$$\begin{aligned} S &:= \int_U \|D\chi\|^2 dvol = \int_U k^{ab} h_{ij} \partial_a \chi^i \partial_b \chi^j dvol \\ &= \int_U (4(W_x^2 - W_t^2) + e^{-4W}(q_x^2 - q_t^2)) R(t, x) dx dt d\psi. \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a  $\mathcal{L} := [4(W_x^2 - W_t^2) + e^{-4W}(q_x^2 - q_t^2)]R(t, x)$  se llega a las ecuaciones de  $W$  y  $q$ . Aquí  $U$  es un abierto de clausura compacta en  $M$ . Para obtener la ecuación debemos considerar lo anterior para todo  $U$ .

Resulta que este Lagrangiano es invariante por difeomorfismo, por lo cual se puede aplicar el teorema de Noether. Cuando decimos invariante por difeomorfismo estamos diciendo que si consideramos  $S$  como función de  $k$  y  $\chi$ , y si  $f : U \subset \mathbb{K} \rightarrow U \subset \mathbb{K}$  es un difeomorfismo que preserva orientación entonces  $S(\chi, k) = S(\chi \circ f, f^*k)$ . En efecto,  $dvol_{f^*g} = f^*(dvol)$  y

$$\begin{aligned} \|D(\chi \circ f)\|_{f^*k, h}^2 &= [h_{ij} \circ (\chi \circ f)] [\partial_a (\chi \circ f)^i \partial_b (\chi \circ f)^j] (f^*k)^{ab} = \\ &= [h_{ij} \circ (\chi \circ f)] [(\partial_s \chi^i \partial_l \chi^j) \circ f] \partial_a f^s \partial_b f^l (f^*k)^{ab} \\ &= [h_{ij} \circ (\chi \circ f)] [(\partial_s \chi^i \partial_l \chi^j) \circ f] k^{sl} \circ f \\ &= [(h_{ij} \circ \chi) \partial_s \chi^i \partial_l \chi^j k^{sl}] \circ f = \|D\chi\|_{k, h}^2 \circ f. \end{aligned}$$

Entonces

$$\|D(\chi \circ f)\|_{f^*k, h}^2 dvol_{f^*g} = f^*[\|D\chi\|_{k, h}^2 dvol_g],$$

y por lo tanto, por el teorema de cambio de variable,  $S(\chi, k) = S(\chi \circ f, f^*k)$ . Si ahora tenemos una familia suave de difeomorfismos  $f_\lambda : U \times I \rightarrow U$ , entonces

$$\frac{d}{d\lambda} S(\chi \circ f_\lambda, f_\lambda^*k) = 0.$$

Pasando la derivada para adentro de la integral y utilizando el teorema de Stokes se puede probar la existencia de tensor  $T_{ab}$ , el llamado tensor energía-impulso, tal que tiene divergencia nula cuando  $\chi$  es un punto crítico de  $S$ . Esto es el teorema de Noether, solo que no obtenemos un campo con divergencia nula, sino un tensor con divergencia nula,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ . Ver [20], apéndice C. Es importante señalar que esta invarianza representa

el hecho de que se puede expresar a  $S$  en distintas coordenadas, y es lo mismo, por ser un objeto geométrico. En este caso el tensor energía impulso es

$$T_{ab} := \partial_a \chi^i \partial_b \chi^j h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{\alpha\beta} h_{ij} \partial_\alpha \chi^i \partial_\beta \chi^j.$$

El hecho de que tenga divergencia nula se puede chequear directamente de las ecuaciones. La divergencia del tensor es la traza de su derivada covariante, lo que en coordenadas se expresa  $\nabla^a T_{ab}$ . Operando se llega a

$$\nabla^a T_{ab} = \partial_b \chi^i h_{ij} \nabla^a \partial_a \chi^j.$$

El último término con  $j = 1, 2$ , son exactamente las ecuaciones (3) y (4). Por lo tanto, las soluciones a estas ecuaciones cumplen  $\nabla^a T_{ab} = 0$ . En lo que sigue haremos uso de esta cantidad conservada para conseguir control de la norma  $C^0$ .

**Proposición 4.1.** (*Estimación  $C^0$* ) Sea  $R, W, q$  soluciones del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4) tal que los datos iniciales de  $R - R_b$ ,  $W - W_b$  y  $q$  son de soporte compacto. Supongamos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Si denotamos por

$$\mathcal{B}(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\|\partial_t \chi\|_h^2 + \|\partial_x \chi\|_h^2) \frac{R}{e^{2t}} dx$$

entonces existe una constante  $C$  tal que, en el intervalo de existencia,

$$\mathcal{B}(t) \leq \exp(Cm_1(0)) \mathcal{B}(0) \text{ con } t \geq 0$$

Además

$$(53) \quad \|W - W_b\|_\infty + \|q\|_\infty \leq C \exp(Cm_1(0)) \mathcal{B}^{1/2}(0) \text{ con } t \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Recordando la métrica  $k = 4e^{4t}(-dt^2 + dx^2) + R^2(t, x)d\psi^2$ , consideremos el campo vectorial  $X = \partial_t/2e^{2t}$ , las superficies  $S_t = \{t\} \times \mathbb{R} \times S^1$  y el campo vectorial dado por  $Y^a = T^a_b X^b$ . Este campo es el campo dual de la 1-forma dada por  $T(\cdot, X)$ . Aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_{[0,t] \times \mathbb{R} \times S^1} \nabla^a (T_{ab} X^b) dvol = \int_{S_0} X^a T_{ab} X^b dS_0 - \int_{S_t} X^a T_{ab} X^b dS_t$$

Notar que los signos son diferentes a lo usual porque la normal a las superficies  $S_t$  tiene norma  $-1$ . Aquí es importante justificar por qué solo tenemos esos dos términos de borde contribuyendo al flujo. En principio, también están las tapas  $S_x = [0, t] \times \{x\} \times S^1$  con  $x \rightarrow +\infty$  y con  $x \rightarrow -\infty$ . A lo largo de estas tapas debe integrarse la cantidad

$$T(\partial_t/e^{2t}, \partial_x/e^{2t}) dS_x = (4\partial_t W \partial_x W + e^{-4W} \partial_t q \partial_x q) dS_x / e^{4t}.$$

Sin embargo, esta cantidad se anula para la solución background y por lo tanto también para la solución que estamos tomando. Volviendo a la ecuación dada por Stokes, haciendo uso de  $\nabla^a T_{ab} = 0$  se sigue que  $\nabla^a (T_{ab} X^b) = T_{ab} \nabla^a X^b$ . Un cálculo en coordenadas

muestra que

$$\begin{aligned} dVol &= 4e^{2t} R(t, x) dx dt d\psi, \\ dS_t &= 2R(t, x) 2e^{2t} d\psi dx, \\ \nabla^a X^b &= \frac{1}{4e^{6t}} (\partial_x)^a (\partial_x)^b + R^{-2} \frac{R_t}{R} \frac{1}{2e^{2t}} (\partial_\psi)^a (\partial_\psi)^b, \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2} (\|\partial_t \chi\|_h^2 + \|\partial_x \chi\|_h^2), \\ T_{22} &= \frac{R^2}{2} \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2 - \|\partial_x \chi\|_h^2}{4e^{4t}}, \end{aligned}$$

donde  $\|\partial_t \chi\|_h^2 = 4\partial_t W^2 + e^{-4W} \partial_x q^2$ , y similarmente  $\|\partial_x \chi\|_h$ . Usando esto tenemos

$$\begin{aligned} \int_{[0, t_0] \times \mathbb{R} \times S^1} \nabla^a (T_{ab} X^b) dVol &= 2\pi \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2}{2} \left(1 + \frac{R_t}{2R}\right) + \frac{\|\partial_x \chi\|_h^2}{2} \left(1 - \frac{R_t}{2R}\right) \right] \frac{R}{e^{2t}} dx \\ \int_{S_t} X^a T_{ab} X^b dS_t &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\|\partial_t \chi\|_h^2 + \|\partial_x \chi\|_h^2) \frac{R}{2e^{2t}} dx \end{aligned}$$

y por lo tanto, derivando la ecuación de Stokes obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\|\partial_t \chi\|_h^2 + \|\partial_x \chi\|_h^2) \frac{R}{e^{2t}} dx &= -2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2}{2} \left(1 + \frac{R_t}{2R}\right) \frac{R}{e^{2t}} dx \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\partial_x \chi\|_h^2}{2} \left(1 - \frac{R_t}{2R}\right) \frac{R}{e^{2t}} dx. \end{aligned}$$

Notar que el término de la izquierda es  $\partial_t \mathcal{B}$ . Intentemos controlar el término de la derecha en términos de  $\mathcal{B}$ . Recordar que como  $m_0(0) < 2R_0/3$  entonces

$$\left\| \frac{R_{bt}}{R_b} - \frac{R_t}{R} \right\|_{\infty} (t), \left\| \frac{R_{bx}}{R_b} - \frac{R_x}{R} \right\|_{\infty} (t) \leq \frac{C(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0).$$

Usando esto

$$\begin{aligned} &-2 \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2}{2} \left(1 + \frac{R_t}{2R}\right) + \frac{\|\partial_x \chi\|_h^2}{2} \left(1 - \frac{R_t}{2R}\right) \right] \frac{R}{e^{2t}} dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2}{2} \left(2 + \frac{R_t}{2R} - \frac{R_{bt}}{2R_b}\right) + \frac{\|\partial_x \chi\|_h^2}{2} \left(\frac{R_{bt}}{2R_b} - \frac{R_t}{2R}\right) \right] \frac{R}{e^{2t}} dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\|\partial_t \chi\|_h^2}{2} C(t+1) m_1(0) e^{-2t} + \frac{\|\partial_x \chi\|_h^2}{2} C(t+1) e^{-2t} m_1(0) \right] \frac{R}{e^{2t}} dx \\ &\leq C(t+1) m_1(0) e^{-2t} \mathcal{B} \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\partial_t \mathcal{B} \leq C(t+1) m_1(0) e^{-2t} \mathcal{B}$ . Integrando obtenemos  $\mathcal{B}(t) \leq \exp(C m_1(0)) \mathcal{B}(0) \forall t \geq 0$ . Ahora

$$\begin{aligned} |W - W_b| &\leq \int_{-\infty}^x |(W - W_b)_x| dx \leq C \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (W - W_b)_x^2 \cosh(2x) dx} \\ &\leq C \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (W - W_b)_x^2 \frac{R}{e^{2t}} dx} \leq C \mathcal{B}^{1/2}(t) \leq C \exp(C(m_1(0))) \mathcal{B}^{1/2}(0), \end{aligned}$$

y análogamente para  $q = q - q_b$ .  $\square$

Este resultado nos permite concluir que la distancia entre la solución background y la solución  $(W, q)$ , cuyos datos iniciales son una perturbación compacta del background, está acotada. Geométricamente esto significa que si arrancamos de una solución que es una perturbación compacta de una geodésica, entonces la perturbación se mantiene a distancia acotada. Más aún, la cota en la distancia depende de una cota de  $m_1(0)$  y de  $\widetilde{\mathcal{M}}_1(0)$ , donde ahora

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1(t) = (\|W - W_b\|_{\widetilde{H}^1} + \|(W - W_b)_t\|_{\widetilde{H}^0} + \|q\|_{\widetilde{H}^1} + \|q_t\|_{\widetilde{H}^0})(t).$$

Definimos  $\widetilde{\mathcal{M}}_k$  de la misma manera pero usando las normas  $k$  y  $k - 1$ . Resumimos esto en el siguiente corolario.

**Corolario 4.2** (Estimación  $C^0$ ). *Sea  $R, W, q$  soluciones del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4) tal que los datos iniciales difieren de los de la solución background en un conjunto de soporte compacto. Supongamos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe  $C$  constante positiva tal que  $\|W - W_b\|_\infty + \|q\|_\infty < C \forall t \geq 0$ . Además  $C$  depende solamente de una cota de  $m_0(0)$  y de  $\widetilde{\mathcal{M}}_1(0)$ .*

## 2. Existencia para todo tiempo futuro de soluciones $C^\infty$

Recordar la notación  $\chi = (W, q)$  y  $\|\partial_t \chi\|^2 = \partial_t W^2 + \partial_t q^2$ , y similarmente  $\|\partial_x \chi\|$ . Recordar también que  $\|\partial_t \chi\|_h^2 = 4\partial_t W^2 + e^{-4W} \partial_x q^2$ , y similarmente  $\|\partial_x \chi\|_h$ .

**Proposición 4.3.** (Estimación  $C^1$ ) *Sea  $R, W, q$  soluciones del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4), tal que los datos iniciales difieren de los datos iniciales de la solución background en un conjunto compacto. Supongamos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces, existe  $\lambda > 0$  tal que*

$$\|\partial_t \chi\| + \|\partial_x \chi\| < C(\|\partial_t \chi\|(0) + \|\partial_x \chi\|(0))e^{\lambda t} \forall t \geq 0$$

Más aún,  $\lambda$  depende de una cota de  $m_1(0)$ . La constante  $C$  depende de una cota en  $\|\partial_t \chi(0)\|$  y  $\|\partial_x \chi(0)\|$ .

DEMOSTRACIÓN. Si escribimos la ecuación de la divergencia,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , para  $b = 0$  y  $b = 1$  obtenemos

$$\begin{cases} -\partial_t T_{00} + \partial_x T_{10} - \frac{R_t}{R} T_{00} + \frac{R_x}{R} T_{10} - \frac{R_t}{R} \frac{T_{22}}{R} = 0 \\ -\partial_t T_{01} + \partial_x T_{11} - \frac{R_t}{R} T_{01} + \frac{R_x}{R} \frac{T_{11}}{R} - \frac{R_t}{R} \frac{T_{22}}{R^2} = 0 \end{cases}$$

Sumando y restando estas ecuaciones obtenemos un sistema de transporte para  $T_{00} + T_{10} = \frac{1}{2}\|\partial_t \chi + \partial_x \chi\|_h^2$  y  $T_{00} - T_{10} = \frac{1}{2}\|\partial_t \chi - \partial_x \chi\|_h^2$ . El sistema queda

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\partial_t - \partial_x)(\|\partial_t \chi + \partial_x \chi\|_h^2) = -\left(\frac{R_t}{R} - \frac{R_x}{R}\right)\frac{1}{2}\|\partial_t \chi + \partial_x \chi\|_h^2 - \left(\frac{R_t}{R} + \frac{R_x}{R}\right)\frac{(\|\partial_t \chi\|_h^2 - \|\partial_x \chi\|_h^2)}{2} \\ \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_x)(\|\partial_t \chi - \partial_x \chi\|_h^2) = -\left(\frac{R_t}{R} + \frac{R_x}{R}\right)\frac{1}{2}\|\partial_t \chi - \partial_x \chi\|_h^2 - \left(\frac{R_t}{R} - \frac{R_x}{R}\right)\frac{(\|\partial_t \chi\|_h^2 - \|\partial_x \chi\|_h^2)}{2} \end{cases}$$

Denotando por  $B := \|\partial_t \chi - \partial_x \chi\|_h^2$ , y usando que  $\|\partial_t \chi\|^2 - \|\partial_x \chi\|^2 = B + 2\langle \partial_t \chi - \partial_x \chi, \partial_x \chi \rangle_h$ , tenemos que la segunda ecuación puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{2}(\partial_t + \partial_x)B = -\frac{R_t}{R}B - \left(\frac{R_t}{R} - \frac{R_x}{R}\right)\langle \partial_t \chi - \partial_x \chi, \partial_x \chi \rangle_h \leq -\frac{R_t}{R}B + \left(\frac{R_t}{R} - \frac{R_x}{R}\right)\sqrt{B}\|\partial_x \chi\|_h.$$

Debido a la ecuación (44), sabemos que existe  $D > 0$  constante tal que

$$\partial_s B \leq DB + D\sqrt{B}\|\partial_x \chi\|_h \leq DB + D\|\partial_x \chi\|_h^2,$$

donde hemos usado que  $ab \leq a^2 + b^2$ , y denotamos  $\partial_s = \partial_x + \partial_t$ . Además, la constante  $D$  solo depende de una cota de  $m_1(0)$ . Para continuar, sea  $M > 0$  tal que  $\|\partial_t \chi\|_h, \|\partial_x \chi\|_h < M$  en  $t = 0$  y sea  $T$  tal que  $\|\partial_t \chi\|_h(t), \|\partial_x \chi\|_h(t) < K \cdot M \forall t < T$ , donde  $K = 10$ . Notar que  $\sqrt{B}(0, \cdot) < 2M$ . Para  $t \in [0, T]$  tenemos que

$$\partial_s B \leq DB + D(KM)^2,$$

por lo que

$$B(s + x_0, s) \leq (B(x_0, 0) + (KM)^2)e^{Ds} - (KM)^2 \leq M^2[(4 + K^2)e^{Ds} - K^2]$$

Ahora esta ecuación implica que existe  $T^* > 0$  un tiempo, que solo depende de  $m_1(0)$ , tal que  $\sqrt{B}(\cdot, t) < KM$  para todo  $t \geq T^*$ . La misma estimación es válida para  $A := \|\partial_t \chi - \partial_x \chi\|_h$ . De esto se sigue que

$$\|\partial_t \chi\|_h, \|\partial_x \chi\|_h \leq \frac{1}{2}(\|B\| + \|A\|) < KM \quad \forall t \leq T^*,$$

y por lo tanto podemos tomar  $T > T^*$ . Al ser  $T^*$  independiente de  $K > 0$ , al llegar este tiempo podemos repetir el procedimiento indefinidamente, y siempre le tomará al menos  $T^*$  multiplicar por  $K$  las normas infinito de las derivadas. En otras palabras tenemos crecimiento exponencial. La tasa queda dada por  $T^*$ , que depende de  $m_1(0)$ . Para terminar, notar que poner  $h$  debajo de las normas no cambia los resultados. Esto se debe a que el factor  $e^{-4W}$  en  $h$  está acotado, debido a la estimación  $C_0$ , ecuación (53).  $\square$

**Corolario 4.4.** *En las hipótesis de la proposición 4.3, las soluciones existen para todo tiempo futuro.*

DEMOSTRACIÓN. Las funciones  $R - R_b, W - W_b$  y  $q$  satisfacen ecuaciones de onda. Al tener datos iniciales de soporte compacto, estos se encuentran en las hipótesis de la proposición 2.8. Además tenemos las estimaciones  $C^0$  y  $C^1$  de las secciones anteriores, que aseguran que la norma  $C^1$  de estas funciones se mantiene acotada en todo intervalo temporal compacto. Por proposición 2.8, se sigue que<sup>1</sup>  $\square$

TEOREMA 4.5 (Existencia para todo tiempo futuro de soluciones  $C^\infty$ ). *Consideramos datos iniciales  $C^\infty$ , con  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe una única solución suave a las ecuaciones (2) a (4) definida para todo tiempo futuro.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la solución  $R$  está definida para todo tiempo. Sea  $T > 0$ . Denotamos al vector de datos iniciales por  $u_0$ . Denotamos al vector de datos iniciales dado por la solución background por  $u_{b0}$ . Consideramos los datos iniciales

$$u_r = \varphi_R u_0 + (1 - \varphi_R) u_{b0}.$$

<sup>1</sup>Al aplicar esta proposición tenemos que considerar las ecuaciones de  $W - W_b$  y  $q$ . Dichas ecuaciones presentan una fuente  $f(t, x)$  y por lo tanto no satisface las hipótesis de la proposición. Una primera opción es utilizar la proposición junto con la segunda observación debajo de ella ( $f$  es una no linealidad admisible). La otra es observar que podemos olvidar la fuente  $f(t, x)$ , partiendo la solución en una polarizada con la fuente, y una no polarizada sin la fuente. La polarizada existe para todo tiempo por la sección anterior.

donde  $\varphi_R \in C_c^\infty$  con  $\varphi_R(x) = 1$  para  $|x| \leq R$  y  $|\varphi_R(x)| < 1 \forall x$ . Ahora estos datos están en las hipótesis del corolario anterior, por lo tanto la solución correspondiente está definida para todo tiempo futuro. Denotamos por  $u_R$  a la solución restringida a  $[0, T] \times \mathbb{R}$ . Si  $R' > R$ , por propagación finita, se sigue que las soluciones coinciden en  $C_R := \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, t < R, |x| \leq R - t\}$ . Notar que  $C_R \nearrow [0, T] \times \mathbb{R}$ , por lo cual podemos definir una solución  $u$  pegando las soluciones  $u_R$ . El resultado es que  $u$  es una función suave en  $[0, T] \times \mathbb{R}$  con datos iniciales  $u_0$ . Como  $T$  es arbitrario, de esta manera construimos una solución para todo tiempo futuro.  $\square$

**Observación 4.6.** *El resultado vale con menos regularidad, pues las estimaciones anteriores valen con poca regularidad.*

### 3. Estabilidad asintótica

En esta sección derivamos la desigualdad básica de energía de la cual se seguirá decaimiento exponencial. De nuevo, consideramos una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4), cuyos datos iniciales difieren de los datos iniciales de la solución background (ecuaciones (11) a (14)) en un conjunto compacto. Suponemos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Estos requerimientos son impuestos a lo largo de todo el capítulo 4.

Consideremos el cambio de variable  $z = R^{1/2}(W - W_b)$  y  $v = \tilde{R}^{1/2}q$ , donde  $\tilde{R} = Re^{-4W}$ . Este cambio de variable se traduce en el siguiente sistema de EDPs para  $z$  y  $v$

$$(54) \quad z_{tt} - z_{xx} + zG + B = g,$$

$$(55) \quad v_{tt} - v_{xx} + v(G + 4W_{bx}^2) + D = 0,$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} D = 4v(\tilde{W}_x^2 - \tilde{W}_t^2) + 8v\tilde{W}_x W_{bx}, & B = R^{1/2} \left( \frac{q_t^2 - q_x^2}{2} \right) e^{-4W}, \\ \quad + 2v(q_x^2 - q_t^2)e^{-4W} & \\ q_t = \tilde{R}^{-1/2} \left( v_t - \frac{R_t}{2R}v + 2R^{-1/2}(z_t - \frac{R_t}{2R}z) \right), & G = \frac{R_t^2 - R_x^2}{4R^2}, \\ q_x = \tilde{R}^{-1/2} \left( v_x - \frac{R_x}{2R}v + 2R^{-1/2}(z_x - \frac{R_x}{2R}z) + 2W_{bx}v \right), & W_{bx} = \frac{W_0}{\cosh(2x)}, \\ \tilde{W} = W - W_b, & \tilde{W}_t = R^{-1/2} \left( z_t - \frac{R_t}{2R}z \right), \\ \tilde{W}_x = R^{-1/2} \left( z_x - \frac{R_x}{2R}z \right), & g = R^{1/2} \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) W_{bx}. \end{array} \right.$$

El sistema mostrado es exactamente el sistema del caso polarizado más potencias de primeras y segundas derivadas. Nuestro objetivo de encontrar decaimiento exponencial se traduce bajo este cambio de variable en probar que  $z$  y  $v$  crecen como mucho polinomialmente. En el siguiente lema vemos cómo es la traducción entre las variables originales y las variables  $z, v$ .

**Lema 4.7** (Cambio de variable). *Sea  $R$  solución de la ecuación (2) con  $m_0(0) < 2R_0/3$ , y sea  $k > 0$ . Sea  $W, q : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones, y sea  $z := R^{1/2}(W - W_b)$  y  $v := e^{2W} R^{1/2}q$ . Finalmente sea  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces*

1.  $z$  es de soporte localmente  $x$ -compactos si y sólo si  $W - W_b$  lo es. Similarmente,  $v$  es de soporte localmente  $x$ -compacto si y sólo si  $q$  lo es.
2.  $z$  y  $v$  son suaves si y sólo si  $q$  y  $W$  lo son.
3.  $z, v$  son soluciones (suaves) de las ecuaciones (34) y (55) si y sólo si  $W$  y  $q$  son soluciones de las ecuaciones (3) y (4).
4. Además  $(z(t, \cdot), z_t(t, \cdot))$  pertenece a  $H^k \times H^{k-1}$  si y sólo si  $((W - W_b)(t, \cdot), (W - W_b)_t(t, \cdot))$  pertenece a  $\tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$ . Más aún, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} e^{-t} (\|z\|_{H^k} + \|z_t\|_{H^{k-1}})(t) &\leq (\|W - W_b\|_{\tilde{H}^k} + \|(W - W_b)_t\|_{\tilde{H}^{k-1}})(t) \\ &\leq C e^{-t} (\|z\|_{H^k} + \|z_t\|_{H^{k-1}})(t) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{H}^k$  es el espacio de Sobolev dado por (30). Aquí la constante  $C$  depende de una cota de  $m_k(0)$  y de  $k$ . Además, este ítem también se cumple para los datos iniciales, siempre y cuando se tome datos iniciales cumpliendo  $z_t = (R^{1/2})_t(W - W_b) + R^{1/2}(W - W_b)_t$ .

5. Supongamos que  $(z(t, \cdot), z_t(t, \cdot)) \in H^k \times H^{k-1}$ , entonces el ítem anterior vale para  $v$  y  $q$  con la diferencia de que la constante  $C$  ahora también depende de  $\|W - W_b\|_{\tilde{H}^n}(t) + \|W - W_{bt}\|_{\tilde{H}^{n-1}}(t)$ .

Para ver una prueba, ver el apéndice, sección 1.2.1.

Para lograr el decaimiento exponencial definimos las energías

$$(56) \quad \mathcal{A} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 + v^2 dx,$$

$$(57) \quad \mathcal{E}_0 := E[z, v] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 + z_t^2 + z^2 G_b dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} v_x^2 + v_t^2 + v^2 (G_b + 4W_{bx}^2) dx,$$

$$(58) \quad E_1 := E[z_t, v_t] + E[z, v], \quad \mathcal{E}_1 := E[z_x, v_x] + E[z, v].$$

Recordar que  $G_b = \frac{1}{\cosh^2(2x)}$  y que  $W_{bx}^2 = \frac{W_0^2}{\cosh^2(2x)}$ , por lo que todas las energías definidas arriba son definidas positivas. Nuestro objetivo es controlar  $\mathcal{E}_1$ . El control lo lograremos a través de una serie de lemas (Lema 4.8, Lema 4.9 y Lema 4.10), culminando en el Teorema 4.11. El argumento aquí es similar al caso polarizado. Como antes, necesitamos trabajar con las energías temporales,  $E_1$ , para luego tomar control de las energías espaciales  $\mathcal{E}_1$ . El lector deberá pensar el Lema 4.8 como la Proposición 3.5, con la diferencia de que, debido al factor  $\mathcal{E}_1$  en el término de la derecha de la Ecuación (60), el Lema 4.8 no es suficiente para controlar  $E_1$ . De la misma forma, el lector deberá pensar los lemas 4.9 y 4.10 como el Lema 3.6, sirviendo de pasaje entre energías temporales y espaciales, siendo el pasaje esta vez más sutil. Antes de seguir, notamos que la estimación  $C^0$ , corolario 4.2, será de utilidad cada vez que lidiemos con el factor  $e^{2W}$ . En efecto, esto nos permite decir que  $e^{2W} < C$ , donde  $C$  depende solamente de una cota de  $m_0(0)$  y de  $\tilde{\mathcal{M}}_1(0)$ . A su vez, debido al lema de cambio de variable, lema 4.7,  $C$  depende únicamente de una cota de  $m_0(0)$  y de  $\mathcal{M}_1(0) \sim \mathcal{A}^{1/2}(0) + \mathcal{E}_0^{1/2}(0)$ .

**Lema 4.8.** *Hay números  $n_i, m_i$  tal que, para toda solución del sistema dado por las ecuaciones (2), (54) y (55), tal que  $R - R_b, (R - R_b)_t, z, z_t, v$  y  $v_t$  son de soporte*



compacto en  $t = 0$ , con  $m_0(0) < 2R_0/3$ , existe una constante  $C > 0$ , que depende solo de una cota de  $m_2(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0) + \mathcal{A}(0)$ , tal que

$$(59) \quad \partial_t \mathcal{A} \leq \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{E}_0^{1/2},$$

$$(60) \quad \begin{aligned} \dot{E}_1 &\leq C(t+1)e^{-2t}E_1 + C(t+1)e^{-t}m_2(0)E_1^{1/2} \\ &+ \sum_i C e^{-t} E_1 \mathcal{E}_1^{n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Como estamos trabajando con perturbaciones de soporte compacto, podemos derivar dentro de la integral. Haciendo esto con  $\mathcal{A}$  y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\partial_t \mathcal{A} = \int_{\mathbb{R}} z z_t dx \leq \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{E}_0^{1/2}.$$

Ahora calculemos  $\partial_t \mathcal{E}_0$ . Derivando adentro de la integral y usando integración por partes

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_0 &= \int_{\mathbb{R}} z_t(z_{tt} - z_{xx} + zG_b) + v_t(v_{tt} - v_{xx} + v(G_b + 4W_{b_x}^2)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{z_t[z(G_b - G) + g]}_A - z_t B + \underbrace{v_t[v(G_b - G)]}_C - v_t D dx. \end{aligned}$$

Los términos  $A$  y  $C$  se controlan como en el caso polarizado, dando lugar a

$$\int_{\mathbb{R}} A + C dx \leq C(t+1)e^{-2t}\mathcal{E}_0 + C(t+1)e^{-t}m_1(0)\mathcal{E}_0^{1/2}.$$

Lo nuevo aquí es controlar los términos  $B$  y  $D$ . Una inspección de los términos  $B$  y  $D$ , usando las ecuaciones debajo del sistema dado por las ecuaciones (54) y (55), muestran que  $B$  y  $D$  se pueden escribir como una combinación lineal de los siguientes sumandos

$$(61) \quad B \begin{cases} R^{-1/2} e^{-4\tilde{W}} \alpha_1, \text{ donde } \alpha_1 = v_t^2, \frac{R_t}{R} v v_t, \frac{R_x}{R} v v_x, v^2 G, W_{b_x}^2 v^2, \\ \frac{R_x}{R} W_{b_x} v^2, W_{b_x} v_x v, v_x^2, \\ R^{-1} e^{-4\tilde{W}} \alpha_2, \text{ donde } \alpha_2 = v_t v z_t, \frac{R_t}{R} z v_t v, \frac{R_t}{R} v^2 z_t, G v^2 z, v_x v z_x, \\ \frac{R_x}{R} z v_x v, \frac{R_x}{R} v^2 z_x, W_{b_x} v^2 z_x, W_{b_x} v^2 z \frac{R_x}{2R}, \\ R^{-3/2} e^{-4\tilde{W}} \alpha_3, \text{ donde } \alpha_3 = v^2 z_t^2, v^2 z^2 G, \frac{R_t}{R} z_t z v^2, v^2 z_x^2, \frac{R_x}{R} z_x z v^2. \end{cases}$$

y

$$(62) \quad D \begin{cases} R^{-1/2-i/2} e^{-4\tilde{W}} \alpha_4, \text{ donde } \alpha_4 = v \alpha_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \\ R^{-1} \alpha_5, \text{ donde } \alpha_5 = v z_x^2, G z^2 v, \frac{R_x}{2R} z_x z v, v z_t^2, \frac{R}{2R_t} z_t z v, \frac{R_x}{R} W_{b_x} v z, \\ R^{-1/2} \alpha_6, \text{ donde } \alpha_6 = W_{b_x} v z_x. \end{cases}$$

De esta forma, cada sumando es un producto de ciertos factores. Debido a esto, para acotar  $\int_{\mathbb{R}} z_t B + v_t D \, dx$ , es suficiente lidiar con una suma de términos de la forma

$$\int_{\mathbb{R}} R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}j} z_t \alpha \, dx \quad \text{o} \quad \int_{\mathbb{R}} R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}j} v_t \alpha \, dx \quad \text{donde } m \geq 1, j = 0, 1 \quad .$$

$$\alpha = \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, 6$$

Llamemos al término  $z_t$  (o  $v_t$ ) al lado de  $\alpha$ , la derivada principal. La estrategia es como sigue:

1. Si  $\alpha$  tiene al menos una derivada, aplicamos Cauchy-Schwarz a esta derivada y a la derivada principal, acotando por  $\|\cdot\|_{\infty}$  el resto de los términos de  $\alpha$ . El uso de Cauchy-Schwarz da una cota de la forma  $\mathcal{E}_0$ . Para  $R^{-m} e^{-4\tilde{W}}$  solo usamos que  $\tilde{W}$  está acotado y que  $R^{-m} \leq C R_b^{-m} \leq C e^{-t}$ . Respecto al uso de  $\|\cdot\|_{\infty}$ , por el encaje de Sobolev

$$\|v\|_{\infty}, \|z\|_{\infty} \leq C(\mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_0^{1/2}), \quad \|v_t\|_{\infty}, \|v_x\|_{\infty}, \|z_t\|_{\infty}, \|z_x\|_{\infty} \leq C\mathcal{E}_1^{1/2}.$$

Procediendo de esta manera, estos términos quedan acotados por

$$(63) \quad C e^{-t} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^{n/2} \mathcal{A}^{m/2} \quad \text{para algún } n, m \geq 0.$$

donde hemos usado que  $\mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E}_1$ .

2. Si  $\alpha$  solo tiene derivadas de orden cero, entonces mirando a los términos que constituyen  $D$  y  $B$  (Ecuaciones (61) y (62)), y recordando que  $G \leq \frac{C}{\cosh(2x)}$ , vemos que podemos suponer que estos términos están multiplicados por  $\frac{1}{\cosh(2x)}$ . Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz entre la derivada principal y  $\frac{v}{\cosh(2x)}$  (o  $\frac{w}{\cosh(2x)}$ ), y  $\|\cdot\|_{\infty}$  junto con el encaje de Sobolev para acotar el resto de los términos. El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz da una cota  $\mathcal{E}_0$ . Finalmente, de nuevo acotamos  $R^{-m} e^{-4\tilde{W}} \leq C e^{-t}$ . Este procedimiento brinda cotas de la forma

$$(64) \quad C e^{-t} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_0^{n/2} \mathcal{A}^{m/2} \quad \text{para algún } n, m \geq 0.$$

Usando las cotas (63),(64) con el hecho de que  $\mathcal{E}_0 \leq E_1$ , y el control de  $A$  y  $C$  obtenemos

$$(65) \quad \dot{\mathcal{E}}_0 \leq C(t+1)e^{-2t} m_1(0) E_1 + C(t+1)e^{-t} m_1(0) E_1^{1/2} \\ + \sum_i C e^{-t} E_1 \mathcal{E}_1^{n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2}, \quad \text{donde } n_i, m_i \geq 0.$$

Ahora para obtener una estimación para  $\dot{E}_1$  acotaremos  $\dot{E}[z_t, q_t]$ . Derivando abajo de la integral y usando partes

$$\dot{E}[z_t, q_t] = \int_{\mathbb{R}} z_{tt}((z_t)_{tt} - (z_t)_{xx} + (z_t)G_b) + v_{tt}((v_t)_{tt} - (v_t)_{xx} + v_t(G_b + 4W_{b_x}^2)) \, dx$$

Ahora derivando el sistema, ecuaciones (54) y (55), respecto a  $t$  encontramos que

$$(z_t)_{tt} - (z_t)_{xx} + z_t G + G_t z + B' = g_t, \\ (v_t)_{tt} - (v_t)_{xx} + v_t(G + 4W_{b_x}^2) + v_t G_t + D' = 0.$$

Por esta razón,

$$\dot{E}[z_t, q_t] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{z_{tt}[z_t(G_b - G) + G_t z + g_t]}_F - z_{tt} B' + \underbrace{v_{tt}[v_t(G_b - G) + G_t v]}_G - v_{tt} D' dx.$$

Una vez más, los términos  $F$  y  $G$  son controlados como en el caso polarizado

$$\int_{\mathbb{R}} F + G dx \leq C(t+1)e^{-2t} E_1 + C(t+1)e^{-t} m_2(0) E_1^{1/2}.$$

Derivando  $B$  y  $D$ , encontramos términos de la forma (recordar que  $B$  y  $D$  es una combinación lineal de términos de la forma especificada por las ecuaciones (61) y (62))

$$\begin{aligned} & (R^{-m/2})_t e^{-4\tilde{W}} \alpha + R^{-m/2} (-4\tilde{W}_t) e^{-4\tilde{W}} \alpha + R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}} \alpha_t \\ &= (R^{-m/2})_t e^{-4\tilde{W}} \beta + R^{-m/2} \beta, \end{aligned}$$

donde  $\beta$  puede ser  $\alpha_t$ ,  $\alpha$  o  $-4\tilde{W}_t \alpha$ , con  $\alpha = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Aquí  $|(R^{-m/2})_t| = |-m \frac{R_t}{R} R^{-m/2}| \leq C R^{-m/2}$ , por lo cual alcanza con acotar términos de la forma

$$\int_{\mathbb{R}} R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}} z_{tt} \beta dx \quad \text{o} \quad \int_{\mathbb{R}} R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}} v_{tt} \beta dx \quad \beta = \alpha, \alpha_t, -4\tilde{W}_t \alpha,$$

donde  $\alpha = \alpha_i$ , con  $i = 1, \dots, 6$ , está dado en las ecuaciones (61) y (62). Un hecho fundamental acerca de los productos dentro de  $\beta$  es que cada producto tiene, como mucho, una derivada segunda ya que  $\alpha$  es una suma de productos de derivadas de orden 0 y orden 1 de  $v$  y  $q$ . En otras palabras, si un producto de los que compone a  $\beta$  tiene una derivada segunda, entonces esta derivada está elevada a la 1, y no hay otras derivadas segundas en dicho producto. Adicionalmente, esta derivada segunda puede ser  $z_{tt}$ ,  $v_{tt}$ ,  $z_{xt}$  o  $v_{xt}$ , y ninguna otra. Como antes, llamamos al término  $z_{tt}$  (o  $v_{tt}$ ) al lado de  $\beta$ , la derivada principal. La estrategia es similar a la anterior:

1. Si  $\beta$  tiene una derivada segunda, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a esta derivada y a la derivada principal, y usamos  $\|\cdot\|_{\infty}$  para acotar el resto de los términos en  $\beta$ . Si no tiene una derivada segunda pero tiene al menos una derivada primera, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a esta derivada y a la derivada principal. El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz da una cota de la forma  $E_1$ . Ninguno de los términos restantes en  $\beta$  será una derivada segunda, por lo cual usando el encaje de Sobolev, las normas  $\|\cdot\|_{\infty}$  serán acotadas precisamente igual que antes:

$$\|v\|_{\infty}, \|z\|_{\infty} \leq C(\mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_0^{1/2}), \quad \|v_t\|_{\infty}, \|v_x\|_{\infty}, \|z_t\|_{\infty}, \|z_x\|_{\infty} \leq C\mathcal{E}_1^{1/2}.$$

Una vez más,  $R^{-m/2} e^{-4\tilde{W}} \leq C e^{-t}$ . Con este procedimiento, obtenemos cotas de la forma

$$(66) \quad \leq C e^{-t} E_1 \mathcal{E}_1^{n/2} \mathcal{A}^{m/2} \quad \text{para algún } n, m \geq 0.$$

2. Si  $\beta$  tiene solo derivadas de orden 0 entonces, mirando a los términos que constituyen  $D'$  y  $B'$ , y recordando que  $|G| \leq \frac{C}{\cosh(2x)}$  y  $|\partial_t G| \leq \frac{C}{\cosh(2x)}$ , vemos que podemos suponer que estos términos están multiplicados por  $\frac{1}{\cosh(2x)}$ . Entonces aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz entre la derivada principal y  $\frac{v}{\cosh(2x)}$  (o  $\frac{w}{\cosh(2x)}$ ). Para el resto de los términos en  $\beta$ , usamos  $\|\cdot\|_{\infty}$  y encaje de Sobolev

como arriba. El uso de la desigualdad de Cauchy Schwarz dará una cota de la forma  $CE_1$ . Finalmente, de nuevo, acotamos  $R^{-m}e^{-4\bar{W}} \leq Ce^{-et}$ . Este procedimiento provee cotas de la forma

$$(67) \quad \leq Ce^{-t}E_1\mathcal{E}_0^{n/2}\mathcal{A}^{m/2} \quad \text{donde } n, m \geq 0.$$

Ahora  $\dot{E}_1 = \dot{\mathcal{E}}_0 + \dot{E}[z_t, q_t]$ . Usando las ecuaciones (66) y (67), el control de  $F + G$  y la ecuación (65), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &\leq C(t+1)e^{-2t}m_2(0)E_1 + C(t+1)e^{-t}m_2(0)E_1^{1/2} \\ &\quad + \sum_i Ce^{-t}E_1\mathcal{E}_1^{n_i/2}\mathcal{A}^{m_i/2}, \text{ donde } n_i, m_i \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.9.** (*Pasaje espacial a temporal*) *Existen números  $n_i, m_i$  tal que, si durante un intervalo de tiempo  $[0, T]$  tenemos una solución con  $|z_x|, |v_x| < 1$ , con  $R - R_b, (R - R_b)_t, z, z_t, v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ , entonces, existe una constante  $C > 0$ , que depende únicamente de una cota de  $m_1(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0)$ , tal que*

$$(68) \quad \mathcal{E}_1 \leq CE_1 + C(t+1)^2e^{-2t}m_1(0)^2 + \sum_i Ce^{-t}E_1^{1+n_i/2}\mathcal{A}^{m_i/2} \quad \text{para } t \in [0, T].$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $\mathcal{E}_1 = E[z, v] + E[z_x, v_x] \leq E_1 + E[z_x, v_x]$  por lo que para acotar  $\mathcal{E}_1$  con  $E_1$  necesitamos controlar  $E[z_x, v_x]$  por  $E_1$ . Notar que

$$\begin{aligned} E[z_x, v_x] &= \frac{1}{2} \int z_{xx}^2 + z_{xt}^2 + z_x^2 G_b + v_{xx}^2 + v_{xt}^2 + v_x^2 (G_b + 4W_{b_x}^2) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} z_{xx}^2 + v_{xx}^2 + CE_1. \end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación,

$$\begin{aligned} z_{xx}^2 &\leq C(z_{tt}^2 + z^2 G^2 + g^2 + B^2), \\ w_{xx}^2 &\leq C(w_{tt}^2 + w^2 G^2 + D^2), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} z_{xx}^2 + w_{xx}^2 &\leq CE_1 + \int_{\mathbb{R}} g^2 dx + \int_{\mathbb{R}} B^2 + D^2 dx \\ &\leq CE_1 + C(t+1)^2e^{-2t}m_1(0)^2 + \int_{\mathbb{R}} B^2 + D^2 dx. \end{aligned}$$

Por lo que finalmente, lo que necesitamos hacer es controlar la última integral por  $E_1$ . Para lograr esto, usaremos la hipótesis de que  $|z_x|, |v_x| < 1$ . Ahora, recordemos la forma general de  $B$  y  $D$  (ver ecuaciones (61) y (62)). Se sigue que necesitamos controlar la suma de términos de la forma

$$\int R^{-k}\alpha^2 e^{-8\bar{W}j} dx \text{ donde } k \geq 1, j = 0, 1 \text{ y } \alpha = \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, 6.$$

Aquí, hemos usado  $2ab \leq a^2 + b^2$  varias veces. La estrategia es como sigue:

1. Si  $\alpha$  está compuesto de términos de orden 0 solamente, entonces  $\alpha^2$  siempre tiene  $\frac{1}{\cosh^2(2x)}$  como uno de sus factores, y siempre tiene al menos 4 términos (productos de  $z$  y  $v$ ). Elegimos dos de estos, por ejemplo,  $v$  y  $z$ . Usamos  $\|\cdot\|_\infty$  para el resto de los términos y la desigualdad de Cauchy-Schwarz con estos dos términos junto con el factor  $\frac{1}{\cosh^2(2x)}$ . El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz da un término de la forma  $\mathcal{E}_0$ . De nuevo, usamos encaje de Sobolev para acotar la norma infinito de los restantes términos y  $R^{-k}e^{-8\tilde{W}} \leq Ce^{-2t}$ . Este procedimiento da cotas de la forma

$$Ce^{-t}\mathcal{E}_0^{1+n/2}\mathcal{A}^{m/2} \quad (\Rightarrow \leq Ce^{-t}E_1^{1+n/2}\mathcal{A}^{m/2}) \quad \text{para algún } n, m \geq 0.$$

2. Si  $\alpha^2$  tiene al menos una derivada entonces  $\alpha$  también, entonces  $\alpha^2$  tiene al menos dos derivadas de orden 1. Acotamos el resto de los términos con la norma infinito y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a estas dos derivadas. El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz dará una cota de la forma  $C\mathcal{E}_0(< E_1)$ . Para las normas infinito, si tenemos  $\|z\|_\infty$ ,  $\|z_t\|_\infty$ ,  $\|v\|_\infty$  o  $\|v_t\|_\infty$  entonces usamos el encaje de Sobolev para acotar estas normas por

$$C(\mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_0^{1/2}) \quad \text{o} \quad E_1^{1/2}.$$

Respecto a términos como  $\|z_x\|_\infty$  y  $\|v_x\|_\infty$  simplemente usamos que son menores que 1 para  $t \in [0, T]$ . Por último,  $R^{-k}e^{-8\tilde{W}} \leq Ce^{-t}$ . Este procedimiento da cotas de la forma

$$Ce^{-t}E_1^{1+n/2}\mathcal{A}^{m/2} \quad \text{para algún } n, m \geq 0.$$

Juntando todo, tenemos que

$$E[z_x, v_x] \leq CE_1 + C(t+1)^2e^{-2t}m_1(0)^2 + \sum_i Ce^{-t}E_1^{1+n_i/2}\mathcal{A}^{m_i/2} \quad \forall t \in [0, T],$$

lo cual es la conclusión deseada. □

**Lema 4.10.** *(Pasaje temporal a espacial) Existen números  $n_i, m_i$  tal que, para cada solución con  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$ ,  $z$ ,  $z_t$ ,  $v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ , existe una constante  $C > 0$ , que depende únicamente de una cota de  $m_1(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0)$ , tal que*

$$(69) \quad E_1 \leq C\mathcal{E}_1 + C(t+1)^2e^{-2t}m_1(0)^2 + \sum_i Ce^{-t}\mathcal{E}_1^{1+n_i/2}\mathcal{A}^{m_i/2},$$

en particular, evaluando en  $t = 0$ ,

$$(70) \quad E_1(0) \leq C(\mathcal{E}_1(0) + m_1^2(0)),$$

y ahora la constante también depende de una cota de  $\mathcal{A}(0) + \mathcal{E}_1(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. Notar que esta es la desigualdad del lema anterior pero con  $E_1$  y  $\mathcal{E}_1$  intercambiados. Siguiendo el mismo razonamiento lleva a la necesidad de controlar  $\int B^2 + D^2 dx$  por  $\mathcal{E}_1$ . Este control es más sencillo que el anterior. La estrategia del lema anterior funciona con breves modificaciones.

El primer paso ya da cotas de la forma  $Ce^{-t}\mathcal{E}_0^{1+n/2}\mathcal{A}^{m/2}$ , lo cual está acotado por  $Ce^{-t}\mathcal{E}_1^{1+n/2}\mathcal{A}^{m/2}$ , como es deseado.

En el segundo paso, el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz dio una cota de la forma  $\mathcal{E}_0$ , lo cual está bien. Respecto a las normas infinito de ese paso,

$$\|z\|_\infty, \|v\|_\infty, \|z_t\|_\infty, \|z_x\|_\infty, \|v_t\|_\infty, \|v_x\|_\infty \leq \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_1^{1/2},$$

que también es suficiente para este lema.  $\square$

Teniendo los lemas de pasaje, y la estimación dada por el lema 4.8, nos encontramos en condiciones de probar el objetivo de esta sección.

**TEOREMA 4.11.** *Sea una solución con  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$ ,  $z$ ,  $z_t$ ,  $v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo futuro. Además existe  $\delta > 0$  y una constante  $C > 0$  tal que para toda solución al sistema con estas características, si  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0), m_2(0) < \delta$ , entonces*

$$(71) \quad E_1^{1/2} < C(E_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \geq 0$$

y

$$(72) \quad \mathcal{E}_1^{1/2} < C(\mathcal{E}_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \geq 0$$

Más aún, la constante solo depende de una cota de  $m_2(0), \mathcal{E}_1(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\delta' > 0$  tal que  $\delta' < 1$  y tal que si  $\mathcal{E}_1^{1/2} < \delta'$  entonces  $|z_x|, |v_x| < 1$ . La existencia de dicho  $\delta'$  está justificada por el encaje de Sobolev. Ahora supongamos que  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0), m_2(0) < \delta' \delta'$ . El valor de  $\delta$  será especificado en un momento. La única propiedad que usaremos por el momento es que como  $\delta < \delta'$  y  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0) < \delta$ , entonces  $\mathcal{E}_1^{1/2}(t) < \delta'$  por al menos un intervalo de tiempo. Sea  $T$  el tiempo maximal de existencia, y sea

$$\tilde{T} = \sup\{s : s < T \text{ y } \mathcal{E}_1^{1/2}(t) < \delta' \text{ para } t \in [0, s]\}.$$

Para  $t \in [0, \tilde{T})$  tenemos que  $|z_x|, |v_x| < 1$ , y por eso se puede aplicar el lema del pasaje temporal, Lema 4.9. Este lema afirma

$$\mathcal{E}_1 \leq CE_1 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_1(0)^2 + \sum_i C e^{-t} E_1^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2} \quad \forall t \in [0, \tilde{T}).$$

Ahora, por la ecuación de evolución de  $\mathcal{A}$ , ecuación (59), sabemos que

$$\mathcal{A}^{1/2} \leq \mathcal{A}^{1/2}(0) + \int_0^t \mathcal{E}_1^{1/2}(s) ds \leq \mathcal{A}^{1/2}(0) + t \quad \forall t \in [0, \tilde{T}),$$

por lo tanto  $e^{-t} \mathcal{A}^{m_i}$  está acotado, en  $[0, \tilde{T})$ , por una constante que solo depende de una cota de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Por lo tanto  $|\mathcal{E}_1(t)|, |m_1(0)| < 1$  y  $e^{-t} \mathcal{A}^{m_i}$  está acotado con  $t \in [0, \tilde{T})$ , con una cota que solo depende de una cota de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Usando estas cotas y el lema anterior, vemos que  $E_1$  está acotado en  $[0, \tilde{T})$ , y que la cota depende solamente de una cota de  $m_1(0), \mathcal{E}_1^{1/2}(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Como consecuencia,  $E_1^{1+n_i/2} < CE_1 \quad \forall t \in [0, \tilde{T})$ , donde nuevamente, la cota  $C$  depende únicamente de una cota de  $m_1(0), \mathcal{E}_1^{1/2}(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Usando estos hechos, especializamos la conclusión del lema del pasaje temporal, Lema 4.9, obteniendo

$$(73) \quad \mathcal{E}_1 \leq CE_1 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_1^2(0) \quad \forall t \in [0, \tilde{T}).$$

Aquí la constante  $C$  depende únicamente de una cota de  $m_1(0)$ ,  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Ahora, procedemos a controlar las energías. Para comenzar, por la ecuación (60) y el hecho de que  $\mathcal{E}_1 < 1$  en  $[0, \tilde{T})$  sabemos que

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &\leq C(t+1)e^{-2t}E_1 + C(t+1)e^{-t}m_2(0)E_1^{1/2} \\ &\quad + CE_1 \sum_i e^{-t}\mathcal{A}^{m_i/2} \quad \forall t \in [0, \tilde{T}). \end{aligned}$$

Ahora, usando que  $(t+1)e^{-t}$ ,  $(t+1)e^{-2t} < Ce^{-t/2}$  y  $e^{-t}\mathcal{A}^{m_i} < Ce^{-t/2} \forall i, \forall t \in [0, \tilde{T})$ . Tenemos

$$\dot{E}_1 \leq Ce^{-t/2}(E_1 + m_2(0)E_1^{1/2}).$$

Por el lema de Gronwall esto implica

$$(74) \quad E_1^{1/2} \leq C(E_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \in [0, \tilde{T}).$$

La constante aquí depende de una cota de  $m_2(0)$ ,  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ . Ahora, usando la ecuación (73) y la ecuación (74) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{1/2} &\leq CE_1^{1/2} + Cm_1(0) \leq C(E_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \\ &\leq C(\mathcal{E}_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \in [0, \tilde{T}), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la ecuación (70). En resumen,

$$(75) \quad \mathcal{E}_1^{1/2} \leq C(\mathcal{E}_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \in [0, \tilde{T}).$$

Como estamos pidiendo que  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0)$ ,  $m_2(0)$  sean menores que  $\delta$ , tenemos que  $\mathcal{E}_1^{1/2} \leq C2\delta \forall t \in [0, \tilde{T})$ . Ahora, si requerimos que  $\delta < \frac{\delta'}{4C}$  tenemos que  $\mathcal{E}_1^{1/2}(t) < \delta'/2 < \delta' \forall t \in [0, \tilde{T})$  y por lo tanto  $\tilde{T} = T$ . Resumiendo, si  $m_2(0)$ ,  $\mathcal{E}_1^{1/2}(0) < \delta$  entonces

$$E_1^{1/2} \leq C(E_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \in [0, T),$$

y como tenemos (75), también tenemos

$$\mathcal{E}_1^{1/2} \leq C(\mathcal{E}_1^{1/2}(0) + m_2(0)) \quad \forall t \in [0, T).$$

Por último, notar que ya hemos probado la existencia para todo tiempo futuro en el corolario 4.4, por lo que  $T = +\infty$ .  $\square$

**3.1. Ganando una derivada más.** En esta sección, extendemos el Teorema 4.11 a  $E_2 := E_1 + E[z_{tt}, v_{tt}]$  y  $\mathcal{E}_2 := \mathcal{E}_1 + E[z_{xx}, v_{xx}]$ . Los argumentos dados aquí son esencialmente los mismos que en la sección anterior. Por esta razón, solo dejamos los enunciados, dejando las pruebas en el apéndice.

**Lema 4.12.** *Hay números  $n_i, m_i$  tal que, para toda solución del sistema dado por las ecuaciones (2), (54) y (55), tal que  $R - R_b$ ,  $(R - R_b)_t$ ,  $z$ ,  $z_t$ ,  $v$  y  $v_t$  son de soporte compacto en  $t = 0$ , con  $m_0(0) < 2R_0/3$ , existe una constante  $C > 0$ , dependiendo únicamente de una cota de  $m_3(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0) + \mathcal{A}(0)$ , tal que*

$$(76) \quad \begin{aligned} \dot{E}_2 &\leq C(t+1)e^{-2t}E_2 + C(t+1)e^{-t}m_2(0)E_2^{1/2} \\ &\quad + \sum_i Ce^{-t}E_2^{1+r_i/2}\mathcal{E}_2^{n_i/2}\mathcal{A}^{m_i/2}. \end{aligned}$$

Para ver una prueba de este lema, ver el apéndice, sección 1.2.2.

**Lema 4.13.** *Existen números  $n_i, m_i$  tal que, si durante un intervalo de tiempo  $[0, T]$  tenemos una solución con  $|z_x|, |v_x|, |z_{xx}|, |v_{xx}| < 1$ , con  $R - R_b, (R - R_b)_t, z, z_t, v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ , entonces existe una constante  $C > 0$ , que depende únicamente de una cota de  $m_2(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0) + \mathcal{A}(0)$ , tal que*

$$(77) \quad \mathcal{E}_2 \leq C E_2 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_2(0)^2 + \sum_i C e^{-t} E_2^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2} \quad \text{para } t \in [0, T].$$

Para ver una prueba de este lema ver el apéndice, sección 1.2.3.

**Lema 4.14.** *Existen números  $n_i, m_i, r_i$  tal que, para cada solución con  $R - R_b, (R - R_b)_t, z, z_t, v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ , existe una constante  $C > 0$ , que depende únicamente de una cota de  $m_2(0)$  y de  $\mathcal{E}_0(0)$ , tal que*

$$(78) \quad E_2 \leq C \mathcal{E}_2 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_2(0)^2 + \sum_i C e^{-t} \mathcal{E}_2^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2} + \sum_i C e^{-t} \mathcal{A}^{r_i/2} \mathcal{E}_1^{r_i/2} m_2^2(0),$$

en particular, evaluando en  $t = 0$

$$(79) \quad E_2(0) \leq C(\mathcal{E}_2(0) + m_2^2(0)),$$

y ahora la constante también depende de una cota de  $\mathcal{A}(0) + \mathcal{E}_1(0)$ .

Para ver una prueba de lema ver el apéndice, sección 1.2.4.

**TEOREMA 4.15.** *Sea una solución con  $R - R_b, (R - R_b)_t, z, z_t, v$  y  $v_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo futuro. Además existe  $\delta > 0$  y una constante  $C > 0$  tal que para toda solución al sistema con estas características, si  $\mathcal{E}_2^{1/2}(0), m_3(0) < \delta$ , entonces*

$$(80) \quad E_2^{1/2} < C(E_2^{1/2}(0) + m_3(0)) \quad \forall t \geq 0,$$

y

$$(81) \quad \mathcal{E}_2^{1/2} < C(\mathcal{E}_2^{1/2}(0) + m_3(0)) \quad \forall t \geq 0,$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de una cota de  $m_3(0), \mathcal{E}_2(0)$  y de  $\mathcal{A}^{1/2}(0)$ .

### 3.2. Resultado para perturbaciones compactas en las variables originales.

En el siguiente corolario resumimos el resultado encontrado hasta ahora.

**Corolario 4.16.** *Sea  $k = 3$ . Sea una  $(R, W, q)$  solución al sistema dado por las ecuaciones (2) a (4), con  $R - R_b, (R - R_b)_t, W - W_b, (W - W_b)_t, q$  y  $q_t$  de soporte compacto en  $t = 0$ , y  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo futuro. Además existe  $\delta > 0$  y una constante  $C > 0$  tal que para toda solución suave al sistema con estas características, lo siguiente vale. Si  $m_k(0)$  y  $\widetilde{\mathcal{M}}_k(0)$  son ambos menores que  $\delta$ , entonces*

$$(82) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_k(t) \leq C e^{-t} (t+1) (\widetilde{\mathcal{M}}_k(0) + m_k(0)).$$

Más aún, la constante  $C$  solo depende de una cota de  $m_3(0)$  y de  $\widetilde{\mathcal{M}}_3(0)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** El teorema anterior junto con la ecuación de evolución de  $\mathcal{A}$  da una cota para  $\mathcal{M}_2$ . El lema del cambio de variable, lema 4.7, lleva esto a  $\widetilde{\mathcal{M}}_2$ .  $\square$



## Perturbaciones generales

Hasta ahora hemos probado resultados respecto a perturbaciones compactas. En esta sección damos un argumento para generalizar los resultados para espacios funcionales más grandes. Para hacer esto aproximamos los datos iniciales por una sucesión de datos iniciales, como antes, difieren de los datos de la solución background solo en un conjunto compacto. Veremos que la sucesión de soluciones converge a la solución con los datos iniciales dados en cierto sentido. El argumento es esencialmente una adaptación de la estabilidad de Cauchy (ver [17], página 89). La diferencia es que el espacio funcional es levemente diferente.

### 1. Extensión de resultados

Teniendo en cuenta la discusión anterior, sea  $(R_1, W_1, q_1)$  y  $(R_2, W_2, q_2)$ , dos soluciones con datos iniciales que difieren de los datos iniciales de la solución background únicamente en un conjunto compacto. Además suponemos  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Sea  $z_1 = R_1^{1/2}(W_1 - W_b)$ ,  $v_1 = R_1^{1/2}e^{-2W}q$  y similarmente  $z_2$  y  $v_2$ . Entonces, para cada  $i$ , tenemos que

$$\begin{aligned} z_{tt} - z_{xx} + f(u_i) &= g_i, \\ v_{tt} - v_{xx} + h(u_i) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $u = (Gv, Gz, R^{-j/2}z, R^{-j/2}v, R^{-j/2}v_x, R^{-j/2}v_t, \frac{R_t}{R}v, \frac{R_x}{R}v, \frac{R_t}{R}z, \frac{R_x}{R}z, v, v_x, v_t, z, z_t, z_x)$ , con  $j = 1, 2, 3$ . Aquí  $f$  y  $h$  son los términos sobrantes en las ecuaciones de  $z$  y  $v$ . También denotamos

$$A_i = (G_i, R_i^{-1/2}, \frac{R_{ix}}{R_i}, \frac{R_{it}}{R_i})$$

Adicionalmente, ponemos  $\Delta z = z_2 - z_1$  y análogamente, también definimos  $\Delta v$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta f$ ,  $\Delta g$  y  $\Delta R$ . Tomando la diferencia de las ecuaciones para  $i = 1$  y  $i = 2$  tenemos

$$(83) \quad (\Delta z)_{tt} - (\Delta z)_{xx} + \Delta f = \Delta g,$$

$$(84) \quad (\Delta v)_{tt} - (\Delta v)_{xx} + \Delta h = 0.$$

Para controlar la secuencia, necesitamos introducir la siguiente energía

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \int_{\mathbb{R}} [(\partial_x^i \Delta z)_x]^2 + [(\partial_x^i \Delta z)_t]^2 + (\partial_x^i \Delta z)^2 + [(\partial_x^i \Delta v)_x]^2 + [(\partial_x^i \Delta v)_t]^2 + (\partial_x^i \Delta v)^2 dx.$$

De nuevo, primero daremos algunas estimaciones que utilizamos para controlar  $\mathcal{H}_n$ . Por conveniencia, introducimos la notación

$$m_k[f](t) := \|f\|_{C^k}(t) + \|\partial_t f\|_{C^k}(t).$$

También notamos que ahora tenemos dos definiciones para  $\mathcal{E}_n$ , es decir, una para  $(z_1, v_1)$  y otra para  $(z_2, v_2)$ . Ahora llamaremos  $\mathcal{E}_n$  al máximo de estas dos.

**Lema 5.1.** *Para todo multi-índice  $\alpha$ , existe una constante  $C$  tal que*

$$(85) \quad |\partial^\alpha \Delta g| \leq C \frac{m_{|\alpha|+1}[\Delta R](0)(t+1)}{\cosh(2x)^{3/2} e^t},$$

y tal que

$$(86) \quad \|\partial^\alpha \Delta A\| \leq C \frac{m_{|\alpha|+1}[\Delta R](0)}{e^t \cosh(2x)} (t+1).$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de  $\alpha$ , y de una cota de  $m_{|\alpha|+1}(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. Las mismas cuentas de la prueba del Lema 3.4 funcionan.  $\square$

**Proposición 5.2** (Control de  $\mathcal{H}_n$ ). *Sean  $(R_1, z_1, v_1)$  y  $(R_2, z_2, v_2)$  dos soluciones al sistema formado por las ecuaciones (2), (34) y (55), tales que en  $t = 0$ , los datos iniciales difieren de los datos iniciales de la solución background en un conjunto de soporte compacto. Supongamos además que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Entonces existe una función continua  $\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que*

$$(87) \quad \dot{\mathcal{H}}_n \leq [\kappa(\|u_1\|_{H^n}, \|u_2\|_{H^n})] (\mathcal{H}_n + e^{-2t}(t+1)^2 m_{n+1}^2[\Delta R](0)).$$

Además,  $\kappa$  depende únicamente de una cota de  $m_{n+1}(0)$ .

DEMOSTRACIÓN. Derivando la integral, aplicando partes, usando las ecuaciones (83) y (84), aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la ecuación (85), tenemos que

$$\dot{\mathcal{H}}_n \leq C\mathcal{H}_n + C\mathcal{H}_n^{1/2}(t+1)e^{-t}m_{n+1}[\Delta R](0) + C \sum_{i=0}^n \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^i \Delta z)_t \partial_x^i (\Delta f) + (\partial_x^i \Delta v)_t \partial_x^i (\Delta h) dx,$$

por lo que necesitamos acotar los últimos dos términos. Como estos dos términos son completamente similares, mostraremos solamente cómo controlar uno de ellos. Notar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^i \Delta z)_t \partial_x^i (\Delta f) dx \right| \leq \mathcal{H}_n^{1/2} \|\Delta f\|_{H^i}.$$

Usando la ecuación (33) tenemos que

$$\|\Delta f\|_{H^i} \leq \|\Delta f\|_{H^n} \leq \kappa(\|u_1\|_{H^n}, \|u_2\|_{H^n}) \|u_1 - u_2\|_{H^n}$$

Ahora afirmamos que existe  $\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (mismo nombre), continua, tal que

$$(88) \quad \|u_1 - u_2\|_{H^n} \leq \kappa(\|u_1\|_{H^n}, \|u_2\|_{H^n}) (\mathcal{H}_n^{1/2} + m_{n+1}[\Delta R](0)(t+1)e^{-t}).$$

Mostremos esto para una de las componentes de  $u$ , por ejemplo  $R^{-1/2}v_x$ , el resto se tratan similar. Tenemos

$$\begin{aligned} \|R_2^{-1/2}v_{2x} - R_1^{-1/2}v_{1x}\|_{H^n} &\leq \|R_2^{-1/2}(v_{2x} - v_{1x})\|_{H^n} + \|(R_2^{-1/2} - R_1^{-1/2})v_{1x}\|_{H^n} \\ &\leq C\|R_2^{-1/2}\|_{H^n} \|v_{2x} - v_{1x}\|_{H^n} + C\|(R_2^{-1/2} - R_1^{-1/2})\|_{H^n} \|v_{1x}\|_{H^n}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos la ecuación (32). Ahora  $\|R_2^{-1/2}\|_{H^n} < C$ , donde  $C$  depende de  $m_n(0)$ . Por otro lado, por la ecuación (86),  $\|(R_2^{-1/2} - R_1^{-1/2})\|_{H^n} < Cm_{n+1}[\Delta R](0)(t+1)e^{-t}$ . Finalmente,  $\|v_{1x}\|_{H^n} \leq \|u_1\|_{H^n}$ , y  $\|v_{2x} - v_{1x}\|_{H^n} \leq C\mathcal{H}_n^{1/2}$ . Usando esto llegamos a

$$\|R_2^{-1/2}v_{2x} - R_1^{-1/2}v_{1x}\|_{H^n} \leq [C + \kappa(\|u_1\|_{H^n}, \|u_2\|_{H^n})] (\mathcal{H}_n^{1/2} + m_{n+1}[\Delta R](0)(t+1)e^{-t}).$$

Renombrando  $\kappa$  esto es lo deseado. Juntando todo, y usando  $ab \leq a^2 + b^2$ , tenemos

$$\dot{\mathcal{H}}_n \leq [C + \kappa(\|u_1\|_{H^n}, \|u_2\|_{H^n})] (\mathcal{H}_n + e^{-2t}(t+1)^2 m_{n+1}^2[\Delta R](0)).$$

Renombrando  $\kappa$  de nuevo esta es la tesis.  $\square$

Ahora podemos mejorar los resultados dados por el corolario 3.11 y el corolario 4.16.

**TEOREMA 5.3.** (*Perturbaciones polarizadas*) Sea  $k \geq 3$ . Sea  $(R, W)$  una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) y (3) con  $q = 0$ . Supongamos también que  $(R - R_b(0, \cdot), \partial_t(R - R_b)(0, \cdot)) \in C_0^k \times C_0^{k-1}$ ,  $m_0(0) < 2R_0/3$  y  $((W - W_b)(0, \cdot), \partial_t(W - W_b)(0, \cdot)) \in \tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$ . Entonces, la solución está definida para todo tiempo  $t \geq 0$  y

$$\tilde{\mathcal{M}}_k(t) \leq C e^{-t}(t+1) \left( \tilde{\mathcal{M}}_k(0) + m_k(0) \right).$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de una cota superior de  $m_k(0)$  y  $k$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Recordar que ya tenemos probada la existencia para todo tiempo futuro. Vamos por pasos.

1. Setting: Consideramos una sucesión de datos iniciales  $(R_i(0, \cdot), R_{it}(0, \cdot))$  tal que para cada  $i$ ,  $((R_i - R_b)(0, \cdot), R_{it} - R_{bt}(0, \cdot))$  son de soporte compacto y convergen a  $((R - R_b)(0, \cdot), (R - R_b)_t(0, \cdot))$  en  $C_0^k \times C_0^{k-1}$ . Similarmente, pedimos lo mismo para los datos iniciales de  $W$ , pero esta vez, tal que la sucesión  $(z_i(0, \cdot), z_{it}(0, \cdot))$  converge a  $(z(0, \cdot), z_t(0, \cdot))$  en  $H^k \times H^{k-1}$ . En lo que sigue utilizamos  $v_i \equiv v_{it} \equiv 0$ . Hacemos esto para facilitar la explicación del caso no polarizado.

2. Estabilidad de Cauchy: De aquí en adelante fijamos  $T > 0$ . Un cálculo sencillo usando la fórmula de D'Alembert muestra que  $(R_i, R_{it})$  es de Cauchy en  $C([0, T], C_0^k) \times C([0, T], C_0^{k-1})$ , convergiendo a  $(R, R_t)$ . Con respecto a  $z_i$ , debido a la ecuación (51), tenemos

$$\|(z_i, v_i)\|_{H^k}(t) + \|(z_{it}, v_{it})\|_{H^{k-1}}(t) \leq C(T+1) \leq C_T \quad \forall t \in [0, T].$$

Notar que podemos elegir la misma constante  $C_T$  para cada  $i$ . Ahora acotamos  $\|u_i\|_{H^{k-1}}$ . Observando la fórmula de  $u_i$  y usando el lema 3.4, es fácil ver que

$$\|u_i\|_{H^{k-1}}(t) \leq C(\|(z_i, v_i)\|_{H^k}(t) + \|(z_{it}, v_{it})\|_{H^{k-1}}(t))$$

donde  $C$  depende de una cota de  $m_k[R_i](0)$ , y por lo tanto se puede elegir la misma constante para todo  $i$ . En conclusión, se sigue que

$$\|u_i\|_{H^{k-1}}(t) \leq C(\|(z_i, v_i)\|_{H^k}(t) + \|(z_{it}, v_{it})\|_{H^{k-1}}(t)) \leq C_T \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall i$$

Con esta información podemos aplicar la ecuación (87) con  $n = k - 1$ , pero cambiando  $\kappa$  por una constante independiente de  $i$ . Integrando dicha desigualdad se tiene

$$\mathcal{H}_{k-1}(t) \leq C(\mathcal{H}_{k-1}(0) + m_k^2[\Delta R](0)) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall i.$$

Esto implica que  $(z_i, z_{it})$  es una sucesión de Cauchy en  $C([0, T], H^k) \times C([0, T], H^{k-1})$ . Por el encaje de Sobolev se sigue que  $(z_i, z_{it})$  es de Cauchy en  $C([0, T], C^2) \times C([0, T], C^1)$

( $k \geq 3$ ). Usando la ecuación (83), vemos que también tenemos control de  $\partial_t^2 z_i$ . En efecto, si  $\Delta z$  denota la diferencia entre dos términos de la sucesión ( $u_1$  y  $u_2$ ) entonces

$$\begin{aligned} |\partial_t^2 \Delta z| &\leq |\partial_x^2 \Delta z| + |\Delta g| + |\Delta f| \leq |\partial_x^2 \Delta z| + C m_1[\Delta R](0) + \|\Delta f\|_{H^1} \\ &\leq |\partial_x^2 \Delta z| + C m_1[\Delta R](0) + \kappa(\|u_1\|_{H^1}, \|u_2\|_{H^1}) \|u_1 - u_2\|_{H^1} \\ &\leq |\partial_x^2 \Delta z| + C m_1[\Delta R](0) + C(m_2[\Delta R](0) + \|\Delta z\|_{H^2} + \|\Delta z_t\|_{H^1}), \end{aligned}$$

donde al final usamos la ecuación (88). Esta desigualdad implica  $z_i$  es de Cauchy en  $C^2([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Como resultado,  $z_i$  converge en  $C^2([0, T] \times \mathbb{R})$  a una función  $h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la ecuación de onda (34) con datos iniciales  $(z(0, \cdot), z_t(0, \cdot))$ . Por unicidad,  $h$  es la solución con estos datos iniciales, definida en  $[0, T] \times \mathbb{R}$ . De ahora en más, le llamamos  $z$  en lugar de  $h$ .

3. Decaimiento exponencial: Debido a la ecuación (51), tenemos que

$$\mathcal{M}_k[z_i](t) \leq C(t+1) (\mathcal{M}_k[z_i](0) + m_k[R_i](0)) \quad \forall t \geq 0,$$

donde hemos usado la misma constante para cada  $i$ . Como  $(z_i, z_{it})$  converge en  $C([0, T], H^k) \times C([0, T], H^{k-1})$  a  $(z, z_t)$  y  $(R_i, R_{it})$  converge en  $C([0, T], C_0^k) \times C([0, T], C_0^{k-1})$  a  $(R, R_t)$ , tomando límite en la desigualdad de arriba se tiene

$$\mathcal{M}_k[z](t) \leq C(t+1) (\mathcal{M}_k[z](0) + m_k[R](0)) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como esto es válido para todo  $T$ , la solución  $z$  satisface la desigualdad para todo  $t \geq 0$ . Por el lema del cambio de variable, Lema 4.7,  $z$  corresponde a la solución suave  $W$  del enunciado. Por el mismo lema, la estimación del enunciado se sigue de la estimación de arriba.  $\square$

**TEOREMA 5.4.** *Sea  $(R, W, q)$  una solución suave del sistema dado por las ecuaciones (2) a (4). Supongamos que  $(R - R_b(0, \cdot), \partial_t(R - R_b)(0, \cdot)) \in C_0^k \times C_0^{k-1}$ ,  $m_0(0) < 2R_0/3$ ,  $((W - W_b)(0, \cdot), \partial_t(W - W_b)(0, \cdot)) \in \tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$  y que  $(q(0, \cdot), \partial_t q(0, \cdot)) \in \tilde{H}^k \times \tilde{H}^{k-1}$ . Entonces la solución está definida para todo tiempo futuro. Además existe  $\delta > 0$  tal que para toda solución con estas propiedades, se cumple que si  $m_3(0) < \delta$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0) < \delta$ , entonces*

$$\tilde{\mathcal{M}}_3(t) \leq C e^{-t} (t+1) (\tilde{\mathcal{M}}_3(0) + m_3(0)).$$

Más aún, la constante  $C$  depende únicamente de  $m_3(0)$  y de  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Que la solución existe para todo el tiempo futuro ya lo hemos probado. El resto de la prueba tienen pocas diferencias. Señalamos las diferencias. Sea  $\delta > 0$  como en el Teorema 4.15. Sea  $\delta' > 0$  tal que si  $\tilde{\mathcal{M}}_3(0) < \delta'$  entonces  $\mathcal{E}_2^{1/2}(0) < \delta$ .

Ahora tomamos sucesiones  $z_i$  y  $v_i$  con  $m[R_i](0) < \delta$  y  $\mathcal{E}_2^{1/2}[z_i, v_i](0) < \delta$ , y el Corolario 4.16 nos da una cota uniforme sobre  $\|u_i\|_{H^{k-1}}(t)$ . Al igual que antes eso nos permite usar la ecuación (87) para ver que la sucesión es de Cauchy. Finalmente, la ecuación (82) pasa al límite.  $\square$

## Apéndice

### 1. Pruebas de lemas técnicos.

#### 1.1. Pruebas del Capítulo 3.

##### 1.1.1. Prueba del lema 3.2.

DEMOSTRACIÓN. Recordar la igualdad dada por la fórmula de D'Alembert

$$(R - R_b)(t, x) = \frac{1}{2}[(R - R_b)(0, t + x) + (R - R_b)(0, x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (R_t - R_{bt})(0, \zeta) d\zeta.$$

Tomando valor absoluto y usando la desigualdad triangular, se obtiene la ecuación (35). Derivando esta ecuación respecto a  $x$  resulta en

$$\begin{aligned} R_x - R_{bx} &= \frac{1}{2}[(R_x - R_{bx})(0, t + x) + (R_x - R_{bx})(0, x - t)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[(R_t - R_{bt})(0, x + t) - (R_t - R_{bt})(0, x - t)] \leq m_1(0), \end{aligned}$$

y exactamente el mismo cómputo funciona para la derivada respecto a  $t$ , excepto que hay un cambio de signo en el segundo término. Hasta ahora hemos probado la ecuación (36). Notar que

$$\left| 1 - \frac{R_b}{R} \right| = \left| \frac{R - R_b}{R} \right| \leq \frac{(t+1)m_0(0)}{R_0 e^{2t} \cosh(2x)} \leq c < 1$$

donde hemos usado que  $(t+1)/e^{2t} < b < 6/4$  y que  $m_0(0) < 2R_0/3$ . Esto prueba la ecuación (37). Ahora veamos cómo derivar la estimación de  $R_t/R$ . Se tiene

$$\left| \frac{R_{bt}}{R_b} - \frac{R_t}{R} \right| = \left| \frac{RR_{bt} - R_b R_t}{R_b R} \right| \leq \left| \frac{R_b(R_{bt} - R_t)}{RR_b} \right| + \left| \frac{(R - R_b) R_{bt}}{R_b R} \right|.$$

Usando  $R_{bt}/R_b = 2$ , y las estimaciones ya derivadas para  $R_{bt} - R_t$  y  $R - R_b$ , y cambiando  $R$  en el denominador por  $R_b$  llegamos a

$$\left| \frac{R_{bt}}{R_b} - \frac{R_t}{R} \right| \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0)$$

probando la ecuación (38) para la derivada respecto a  $t$ . Para la derivada respecto a  $x$  la prueba es similar. Ahora, recordando la definición de  $G$  y de  $G_b$ , calculamos

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_t^2 - R_x^2}{4R^2} - \frac{R_{bt} - R_{bx}}{4R_b^2} \right| &= \left| \frac{R_b^2 R_t^2 - R^2 R_{bt}^2}{4(RR_b)^2} + \frac{R^2 R_{bx}^2 - R_b^2 R_x^2}{4R^2 R_b^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{R_b^2 (R_t^2 - R_{bt}^2)}{4(RR_b)^2} \right| + \left| \frac{(R_b^2 - R^2) R_{bt}^2}{4(RR_b)^2} \right| + \left| \frac{R_b^2 (R_{bx}^2 - R_x^2)}{4(R_b R)^2} \right| + \left| \frac{R_{bx}^2 (R^2 - R_b^2)}{4(RR_b)^2} \right|. \end{aligned}$$

Ahora cada uno de estos términos se trata de la misma forma. Por esta razón, solo mostraremos como acotar el último. Tenemos,

$$\left| \frac{R_{bx}^2(R^2 - R_b^2)}{4(RR_b)^2} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{R_{bx}^2}{R_b^2} \right| \left| \frac{R - R_b}{R} \right| \left| \frac{R + R_b}{R} \right|.$$

El primer término en el producto está acotado, simplemente por hacer el cálculo explícito. Para el segundo, usando la ecuación (37), cambiamos  $R$  en el denominador por  $R_b$  (e introducimos una constante para  $C$ ). Para la diferencia  $R - R_b$  usamos la ecuación (35). Para el último término, notar que es  $1 + \frac{R_b}{R}$ , y que este está acotado por la ecuación (37). Juntando todo, llegamos a

$$\left| \frac{R_x^2(R^2 - R_b^2)}{4(RR_b)^2} \right| \leq C \frac{m_0(0)(t+1)}{2R_0 e^{2t} \cosh(2x)} \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0).$$

Recordar que estamos ajustando la constante de línea a línea. Esto finaliza la prueba de la ecuación (39). Finalmente, probemos la ecuación (40). Tenemos que

$$|g| = \left| R_b^{1/2} f \right| = \left| R^{1/2} \left( \frac{R_{bx}}{R_b} - \frac{R_x}{R} \right) W_{bx} \right| \leq C R_b^{1/2} \frac{t+1}{e^{2t} \cosh(2x)} m_1(0) \frac{W_0}{\cosh(2x)},$$

donde hemos usado la ecuación (37), la ecuación (38) y la fórmula explícita de  $W_{bx}$ . Esto termina la prueba del lema.  $\square$

### 1.1.2. Prueba del lema 3.4.

DEMOSTRACIÓN. El ítem a) es un cálculo directo usando la fórmula de D'Alembert como en la prueba de (36). El ítem b) son cálculos usando a) y el hecho de que  $R \sim R_b$ . Por ejemplo,

$$|\partial^\alpha R/R| \leq \left| \frac{\partial^\alpha (R - R_b)}{R} \right| + |\partial^\alpha R_b/R| \leq C \frac{m_\alpha(0)}{e^{2t} \cosh(2x)} + C \leq C.$$

Para estos cálculos es útil usar fórmulas de recursión, tales como

$$\left| \frac{\partial^\alpha (R^{1/2})}{R^{1/2}} \right| \leq \left| \frac{\partial^\alpha R}{2R} \right| + \sum_{0 < \alpha < \beta} \binom{\alpha}{\beta} \left| \frac{\partial^{\alpha-\beta} R^{1/2} \partial^\beta (R^{1/2})}{2R} \right|.$$

Probemos ahora el ítem d). Primero notar que ya hemos probado el caso  $\alpha = (0, 0)$ , es la estimación (38). Procedemos por inducción en el largo del multi-índice,  $|\alpha|$ . Supongamos que ya hemos probado el resultado para todo multi-índice  $\beta < \alpha$ . Notar que

$$\partial^\alpha \left( \frac{R_t}{R} \right) = \frac{\partial^\alpha R_t}{R} - \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^{\alpha-\beta} R \partial^\beta \left( \frac{R_t}{R} \right)}{R}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \partial^\alpha \left( \frac{R_{bt}}{R_b} - \frac{R_t}{R} \right) \right| &\leq \left| \frac{\partial^\alpha R_{bt}}{R_b} - \frac{\partial^\alpha R_t}{R} \right| \\ &+ \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left| \frac{\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left( \frac{R_{bt}}{R_b} \right)}{R_b} - \frac{\partial^{\alpha-\beta} R \partial^\beta \left( \frac{R_t}{R} \right)}{R} \right|. \end{aligned}$$

Acotemos cada uno de los términos que aparecen arriba. Para el primero,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^\alpha R_{bt}}{R_b} - \frac{\partial^\alpha R_t}{R} \right| &= \left| \frac{R\partial^\alpha R_{bt} - R_b\partial^\alpha R_t}{R_b R} \right| \\ &\leq \left| \frac{R_b(\partial^\alpha R_{bt} - \partial^\alpha R_t)}{RR_b} \right| + \left| \frac{(R - R_b)\partial^\alpha R_{bt}}{R_b R} \right|. \end{aligned}$$

Ahora cambiamos  $R$  por  $R_b$  en el denominador usando la ecuación (37), usamos que  $\frac{\partial^\alpha R_{bt}}{R_b}$  está acotado y también usamos la ecuación (43) y la ecuación (35), llegando a

$$\left| \frac{\partial^\alpha R_{bt}}{R_b} - \frac{\partial^\alpha R_t}{R} \right| \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_{|\alpha|+1}(0).$$

Para un término de la suma de arriba tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right) - \partial^{\alpha-\beta} R \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right)}{R_b} \right| = \left| \frac{R\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right) - R_b \partial^{\alpha-\beta} R \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right)}{R_b R} \right| \\ &\leq \left| \frac{R - R_b}{R} \frac{\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right)}{R_b} \right| + \left| \frac{R_b(\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right) - \partial^{\alpha-\beta} R \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right))}{RR_b} \right| \\ &\leq \left| \frac{R_b - R}{R} \right| \left| \frac{\partial^{\alpha-\beta} R_b \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right)}{R_b} \right| + \left| \frac{\partial^{\alpha-\beta} R_b (\partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right) - \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right))}{R} \right| \\ &+ \left| \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right) \frac{(\partial^{\alpha-\beta} R_b - \partial^{\alpha-\beta} R)}{R} \right| \end{aligned}$$

Para el primer término en la suma, en el primer cociente, cambiamos  $R_b$  por  $R$  en el denominador usando la ecuación (37), y también usamos la ecuación (35) para acotar el numerador. Para el segundo cociente usamos que está acotado y finalmente usamos que  $\partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right)$  está acotado también. Para el segundo término en la suma, comenzamos cambiando  $R$  en el denominador por  $R_b$  usando la ecuación (37). Como  $\beta < \alpha$ , por inducción sabemos que

$$\left| \partial^\beta \left(\frac{R_t}{R}\right) - \partial^\beta \left(\frac{R_{bt}}{R_b}\right) \right| \leq C \frac{(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_{|\beta|+1}(0).$$

Usamos esto y que  $\partial^{\alpha-\beta} R/R$  está acotado. Para el último término, comenzamos cambiando  $R$  en el denominador por  $R_b$  usando la ecuación (37). Notar que  $\partial^\beta (R_t/R)$  está acotado, pues

$$\left| \partial^\beta (R_t/R) \right| \leq \left| \partial^\beta (R_t/R - R_{bt}/R_b) \right| + \left| \partial^\beta (R_{bt}/R_b) \right| < C,$$

donde hemos usado que  $\beta < \alpha$ . Ahora la constante  $C$  depende de  $m_{|\alpha|}(0)$ . Por último acotamos  $\partial^{\alpha-\beta} R_b - \partial^{\alpha-\beta} R$  por la ecuación (43). Juntando todo llegamos a probar el ítem d). La misma prueba es válida para las derivadas respecto a  $x$ . Respecto al ítem c), la cota para los dos primeros cocientes que aparecen en el enunciado se siguen de la ecuación (43). La cota de los últimos dos cocientes se siguen del ítem d). Sigamos con el ítem e). Notar que

$$G - G_b = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{R_t}{R} - \frac{R_{bt}}{R_b} \right) \left( \frac{R_t}{R} + \frac{R_{bt}}{R_b} \right) - \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \left( \frac{R_x}{R} + \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \right],$$

y por esa razón,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(G - G_b)| &\leq \frac{1}{4} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left| \partial^\beta \left( \frac{R_t}{R} - \frac{R_{bt}}{R_b} \right) \right| \left| \partial^{\alpha-\beta} \left( \frac{R_t}{R} + \frac{R_{bt}}{R_b} \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left| \partial^\beta \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \right| \left| \partial^{\alpha-\beta} \left( \frac{R_x}{R} + \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \right|. \end{aligned}$$

Por la ecuación (44), todos los términos con el signo de menos están acotados por

$$C \frac{(t+1)}{e^{2t} \cosh(2x)} m_{|\alpha|+1}(0).$$

Los términos con los sumandos están acotados debido al ítem c). Esto prueba lo deseado. El ítem f) se sigue del ítem e). El ítem g) es sencillo. Para terminar veamos el ítem h). Recordamos que  $g = R^{1/2} \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) W_{bx}$ . Por lo tanto, si calculamos la derivada  $\alpha$  encontraremos una suma de términos de la forma

$$\partial^{\alpha-\beta}(R^{1/2}) \partial^{\beta-\gamma} \left( \frac{R_x}{R} - \frac{R_{bx}}{R_b} \right) \partial^\gamma W_{bx}$$

Para el primer término usamos el ítem b). Para el término del medio usamos el ítem d). Para el último término usamos el ítem g). Esto prueba lo deseado.  $\square$

## 1.2. Pruebas del capítulo 4.

### 1.2.1. Prueba del lema 4.7.

DEMOSTRACIÓN. Los ítems (1), (2) y (3) son directos. Para el ítem (4) recordar que  $\tilde{H}^k$  es el espacio de funciones localmente integrables, con derivadas débiles parciales hasta orden  $k$ , todas pertenecientes a  $L^2(\cosh 2x \, dx)$ . Es fácil ver que  $z(t, \cdot)$  tiene  $k$ -derivadas débiles si y sólo si  $(W - W_b)(t, \cdot)$  las tiene. Más aún, vale la regla de Leibnitz

$$\partial_x^n z = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \partial_x^i (W - W_b) \partial_x^{n-i} (R^{1/2}).$$

Notar que ya no indicamos la evaluación en  $t$ . Todo lo que sigue debe sobreentenderse que está evaluado en  $t$ , y visto como función en  $x$ . Usando el lema 3.4, ítem b), y luego el hecho de que  $R \sim R_b$  se sigue que

$$|\partial_x^n z| \leq C R^{1/2} \sum_{i=0}^n |\partial_x^i (W - W_b)| \leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \sum_{i=0}^n |\partial_x^i (W - W_b)|,$$

donde la constante  $C$  depende de una cota de  $m_n(0)$ . Esta desigualdad vale para  $n = 0, \dots, k$ . Similarmente,

$$\begin{aligned} |\partial_x^{n-1} z_t| &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} |\partial_x^i (W - W_b)| |\partial_x^{n-1-i} (R^{1/2})_t| + |\partial_x^i (W - W_b)_t| |\partial_x^{n-1-i} (R^{1/2})| \\ &\leq C e^t \sum_{i=0}^{n-1} (|\partial_x^i (W - W_b)| + |\partial_x^i (W - W_b)_t|) \cosh^{1/2}(2x). \end{aligned}$$



Esta desigualdad vale para  $n = 1, \dots, k$ . Elevando al cuadrado e integrando estas dos desigualdades para los distintos valores de  $n$  se prueba el lado izquierdo de la desigualdad del ítem (4). El lado derecho es similar. Veamos ahora el ítem (5). Tenemos que  $v = R^{1/2}e^{2W}q$ . Notar que  $e^{2W} = F(W - W_b) + e^{2W_b}$  con  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F(0) = 0$ . Calculando la derivada  $n$ -ésima como arriba, usando  $R \sim R_b$ , y usando el ítem b del lema 3.4 se sigue que

$$\begin{aligned} |\partial_x^n v| &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} |\partial_x^{i-j}(F(W - W_b))| |\partial_x^j q| + \partial_x^{i-j}(e^{2W_b}) |\partial_x^j q| \right) \\ &\leq C e^t |\partial_x^n F| \|q \cosh^{1/2}(2x)\|_\infty + C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( + \sum_{\substack{0 \leq j \leq i \leq n \\ j-i < n}} \|\partial_x^{i-j} F\|_\infty |\partial_x^j q| + C |\partial_x^j q| \right) \\ &\leq C e^t |\partial_x^n F| \|q\|_{\tilde{H}^n} + C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{\substack{0 \leq j \leq i \leq n \\ j-i < n}} \|F\|_{H^n} |\partial_x^j q| + C |\partial_x^j q| \right), \end{aligned}$$

donde  $C$  depende de una cota de  $m_n(0)$ . Notar que hemos omitido  $W - W_b$  en el argumento de  $F$ . También observar que hemos usado el encaje de Sobolev para  $\tilde{H}^n$ . Ahora elevando al cuadrado, usando  $ab \leq a^2 + b^2$ , e integrando se obtiene

$$\|\partial_x^n v\|_{L^2} \leq C e^t (\|F(W - W_b)\|_{H^n} \|q\|_{\tilde{H}^n} + C \|q\|_{\tilde{H}^n}).$$

Ahora, por la ecuación (31),  $\|F\|_{H^n} \leq C \|W - W_b\|_{H^n}$ , donde  $C$  depende de una cota de  $\|W - W_b\|_{H^1}$ . Usando esto arriba se llega a

$$\|\partial_x^n v\|_{L^2} \leq C e^t \|q\|_{\tilde{H}^n}, \quad \forall n \leq k$$

donde  $C$  depende de una cota de  $\|W - W_b\|_{H^n}$ . Sigamos con  $v_t = (R^{1/2})_t e^{2W} q + R^{1/2} e^{2W} W_t q + R^{1/2} e^{2W} W q_t$ . Cualquiera de los tres sumandos se controla similarmen-  
te. Por esta razón veamos solo uno. Como antes tenemos

$$\begin{aligned} |\partial_x^{n-1}(R^{1/2} e^{2W} W q_t)| &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{0 \leq r \leq j \leq i \leq n-1} |\partial_x^{i-j}(e^{2W}) \partial_x^{j-r} W \partial_x^r q_t| \right) \\ &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{0 \leq r \leq j \leq i \leq n-1} |\partial_x^{i-j}(F) \partial_x^{j-r} W \partial_x^r q_t| + |\partial_x^{i-j}(e^{2W_b}) \partial_x^{j-r} W \partial_x^r q_t| \right) \\ &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{0 \leq r \leq j \leq i \leq n-1} \|\partial_x^{i-j}(F)\|_\infty \|\partial_x^{j-r} W\|_\infty |\partial_x^r q_t| + C \|\partial_x^{j-r} W\|_\infty |\partial_x^r q_t| \right) \\ &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \left( \sum_{0 \leq r \leq j \leq i \leq n-1} \|F\|_{H^n} \|W\|_{\tilde{H}^n} |\partial_x^r q_t| + C \|W\|_{\tilde{H}^n} |\partial_x^r q_t| \right) \\ &\leq C e^t \cosh^{1/2}(2x) \|W\|_{\tilde{H}^n} (\|F\|_{H^n} + C) \sum_{0 \leq r \leq j \leq i \leq n-1} |\partial_x^r q_t|. \end{aligned}$$

Ahora  $\|F\|_H^n \leq C\|W - W_b\|_{H^n} \leq C$ , donde  $C$  depende de  $\|W - W_b\|_{\tilde{H}^n}$ . Usando esto arriba, e integrando obtenemos

$$\|\partial_x^{n-1}(R^{1/2}e^{2W}Wq_t)\|_{L^2} \leq Ce^t\|q_t\|_{\tilde{H}^{n-1}}$$

donde ahora  $C$  depende de una cota de  $\|W - W_b\|_{\tilde{H}^n} + \|W_t - W_{bt}\|_{\tilde{H}^{n-1}}$ . Los otros dos sumandos se acotan igual, llegando a

$$\|\partial_x^{n-1}v_t\|_{L^2} \leq Ce^t(\|q\|_{\tilde{H}^n} + \|q_t\|_{\tilde{H}^{n-1}}), \forall n = 1, \dots, k.$$

Con esta y la desigualdad anterior se satisface

$$\frac{1}{C}e^{-t}(\|v\|_{H^k} + \|v_t\|_{H^{k-1}})(t) \leq (\|W - W_b\|_{\tilde{H}^k} + \|(W - W_b)_t\|_{\tilde{H}^{k-1}}).$$

□

### 1.2.2. Prueba del lema 4.12.

PRUEBA DEL LEMA 4.12. Ya hemos controlado  $\dot{E}_1$ , por lo que solo tenemos que controlar  $E[z_{tt}, v_{tt}]$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \dot{E}[z_{tt}, z_{xx}] &= \int_{\mathbb{R}} z_{ttt}((z_{tt})_{tt} - (z_{tt})_{xx} + z_{tt}G_b) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} v_{ttt}((v_{tt})_{tt} - (v_{tt})_{xx} + v_{tt}(G_b + 4W_{bx}^2)) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{z_{ttt}[z_{tt}(G_b - G) + z_tG_t + zG_{tt} + g_{tt}]}_A \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \underbrace{z_{ttt} \frac{d^2}{dt^2}[R^{1/2} \left(\frac{q_t^2 - q_x^2}{2}\right) e^{-4W}]}_{B''} \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{v_{ttt}[v_{tt}(G_b - G) + v_tG_t + v_{tt}G_{tt}]}_C \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \underbrace{v_{ttt} \frac{d^2}{dt^2}(\tilde{W}_x^2 - \tilde{W}_t^2) + 8v\tilde{W}_xW_{bx} + 2v(q_x^2 - q_t^2)e^{-4W}}_{D''} \, dx \end{aligned}$$

Los términos  $A$  y  $C$  se controlan como en el caso polarizado,

$$\int_{\mathbb{R}} A + C \, dx \leq C(t+1)e^{-2t}E_2 + C(t+1)e^{-t}m_2(0)E_2^{1/2}.$$

Aquí,  $B''$  y  $D''$  son como en la última parte del lema 4.8. Esta vez nos encontramos con una suma de términos de la forma

$$\int_{\mathbb{R}} R^{-m/2}e^{-4\tilde{W}}z_{tt}\gamma \, dx \quad \text{o} \quad \int_{\mathbb{R}} R^{-m/2}e^{-4\tilde{W}}v_{tt}\gamma \, dx \quad \gamma = \alpha, \tilde{W}_t\alpha_t, \alpha_t, \alpha_{tt},$$

donde  $\alpha = \alpha_i$ , con  $i = 1, \dots, 6$  (ver las ecuaciones (61) y (62)). Aquí lo nuevo es  $\alpha_{tt}$ . Nuevamente, llamaremos al factor  $z_{ttt}$  (o  $v_{ttt}$ ) al lado de  $\gamma$  por la derivada principal. Una vez más, el hecho fundamental de  $\gamma$  es que tiene como mucho una derivada tercera como factor en cada sumando. Adicionalmente, este tercera derivada podría solamente ser  $z_{ttt}$ ,

$v_{ttt}$ ,  $v_{xtt}$  o  $z_{xtt}$ . Además,  $\gamma$  no tiene derivadas segundas de la forma  $z_{xx}$  o  $v_{xx}$ .

Si  $\gamma$  no tiene derivadas terceras entonces podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz con la derivada principal y otro de los factores de  $\gamma$ , usando el encaje de Sobolev para acotar la norma infinito de los restantes factores. Aquí tenemos el subcaso donde  $\gamma$  solo tiene factores sin derivadas. En estos casos, al igual que antes, podemos suponer que tenemos entre unos factores a  $1/\cosh^2(2x)$ . El uso de Cauchy Schwarz dará una cota de la forma  $E_2$ . El uso del encaje de Sobolev da cotas de la forma  $\mathcal{E}_2^{1/2} + \mathcal{A}^{1/2}$ , o  $E_2^{1/2}$ . Como antes,  $R^{-k}e^{-4\tilde{W}}$  está acotado por  $Ce^{-t}$ .

En el caso donde  $\gamma$  tiene una derivada tercera, entonces tiene una sola. Aplicamos Cauchy Schwarz a esta derivada y a la derivada principal, y acotamos por la norma infinito al resto de los términos. El uso de Cauchy Schwarz da cotas de la forma  $E_2$ . El uso del encaje de Sobolev acota las normas infinito por  $\mathcal{E}_2^{1/2} + \mathcal{A}^{1/2}$ , o  $E_2^{1/2}$ . De nuevo  $R^{-k}e^{-4\tilde{W}}$  está acotado por  $e^{-t}$ . Juntando todo se llega a la conclusión.  $\square$

### 1.2.3. Prueba del lema 4.13.

PRUEBA DEL LEMA 4.13. La prueba es simplemente una copia de la prueba dada en el lema 4.9. Sabemos que  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + E[z_{xx}, v_{xx}]$  y ya hemos acotado  $\mathcal{E}_1$  en dicho lema, por lo que solamente tenemos que acotar  $E[z_{xx}, v_{xx}]$ .

$$\begin{aligned} E[z_{xx}, v_{xx}] &= \int z_{xxx}^2 + z_{xxt}^2 + z_{xx}^2 G_b + v_{xxx}^2 + v_{xxt}^2 + v_{xx}^2 (G_b + 4W_{bx}^2) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} z_{xxx}^2 + v_{xxx}^2 + z_{xxt}^2 + v_{xxt}^2 + C\mathcal{E}_1. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones para  $z$  y  $v$  derivadas tenemos,

$$\begin{aligned} z_{xxx}^2 &\leq C(z_{xtt}^2 + z_x^2 G^2 + z^2 G_x^2 + g_x^2 + B_x^2), \\ z_{xxt}^2 &\leq C(z_{ttt}^2 + z_t^2 G^2 + z^2 G_t^2 + g_t^2 + B_t^2), \\ v_{xxx}^2 &\leq C(v_{ttt}^2 + v_x^2 G^2 + v^2 G_x^2 + D_x^2), \\ v_{xxt}^2 &\leq C(v_{ttt}^2 + v_t^2 G^2 + v^2 G_t^2 + D_t^2), \\ \text{donde } B &= R^{1/2} \left( \frac{q_t^2 - q_x^2}{2} \right) e^{-4W}, \\ \text{y } D &= 4v(\tilde{W}_x^2 - \tilde{W}_t^2) + 8v\tilde{W}_x W_{bx} + 2v(q_x^2 - q_t^2)e^{-4W}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} z_{xxx}^2 + v_{xxx}^2 + z_{xxt}^2 + v_{xxt}^2 &\leq C\mathcal{E}_2 + \int_{\mathbb{R}} g_t^2 + g_x^2 dx + \int_{\mathbb{R}} B_t^2 + B_x^2 + D_t^2 + D_x^2 dx \\
&\leq C\mathcal{E}_2 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_2(0)^2 + \int_{\mathbb{R}} B_t^2 + B_x^2 + D_t^2 + D_x^2 dx \\
&\leq CE_1 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_2(0)^2 + \sum_i C e^{-t} E_1^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} B_t^2 + B_x^2 + D_t^2 + D_x^2 dx,
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos el lema 4.9. Por lo tanto necesitamos acotar la última integral por  $E_2$ . El resto de la prueba se dedica a conseguir esta cota. Para hacer esto, usaremos la hipótesis de que  $|z_x|, |v_x|, |z_{xx}|, |v_{xx}|, |z_{xt}|, |v_{xt}| < 1$ . Ahora, recordemos la forma general de  $B$  y  $D$  (ver las ecuaciones (61) y (62)). Se sigue que necesitamos acotar sumandos de la forma

$$\int R^{-k} \eta^2 e^{-8\tilde{W}} dx \quad k \geq 1 \quad \eta = \alpha, \alpha_t, \alpha_x, \alpha_t \tilde{W}_t, \alpha_x \tilde{W}_x,$$

donde  $\alpha = \alpha_i, i = 1, \dots, 6$ . Aquí hemos usado varias veces que  $2ab \leq a^2 + b^2$ . La estrategia es como sigue:

1. Si  $\eta$  está compuesto solo por derivadas de orden cero entonces podemos suponer que  $\eta^2$  tiene a  $\frac{1}{\cosh^2(2x)}$  como uno de sus factores, y siempre tiene al menos cuatro factores que son potencias de  $z$  o  $v$ . Tomemos dos de estos factores, por ejemplo  $v$  y  $w$ , usemos  $\|\cdot\|_{\infty}$  con los otros factores y la desigualdad de Cauchy-Schwarz con estos dos junto con el  $\frac{1}{\cosh^2(2x)}$ . El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz da una cota de la forma  $\mathcal{E}_0$ . Usar el encaje de Sobolev para acotar las normas infinitos de los otros factores y usar que  $R^{-k} e^{-8\tilde{W}} \leq C e^{-2t}$ . Este procedimiento produce cotas de la forma

$$C e^{-t} \mathcal{E}_0^{1+n/2} \mathcal{A}^{m/2} \quad (\Rightarrow \leq C e^{-t} E_1^{1+n/2} \mathcal{A}^{m/2}).$$

2. Supongamos  $\eta$  no tiene derivadas segundas pero si derivadas primeras. Se sigue que  $\eta^2$  tiene al menos dos derivadas primeras. Acotamos por la norma infinito el resto de los términos y aplicamos Cauchy Schwarz a estas dos derivadas. El uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz dará una cota de la forma  $\mathcal{E}_0 < E_1$ . Para las normas infinito, si tenemos  $\|z\|_{\infty}, \|z_t\|_{\infty}, \|v\|_{\infty}$  o  $\|v_t\|_{\infty}$ , entonces usamos el encaje de Sobolev, lo que produce cotas de la forma

$$C(\mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_0^{1/2}) \quad \text{o} \quad E_1^{1/2}$$

Respecto a términos como  $\|z_x\|_{\infty}$  o  $\|v_x\|_{\infty}$ , simplemente usamos que son menores que 1. Por último,  $R^{-k} e^{-8\tilde{W}} \leq C e^{-t}$ . Juntando todo, vemos que el procedimiento produce cotas de la forma

$$C e^{-t} E_1^{1+n/2} \mathcal{A}^{m/2}.$$

3. Por último, si  $\eta^2$  tiene al menos una derivada segunda, entonces está elevada al cuadrado, y no hay otras derivadas segundas. Esto se debe a que, si tuviera otras

derivadas segundas, entonces  $\eta$  tendría al menos dos derivadas segundas entre sus factores (tal vez iguales), pero esto no es posible por la forma de  $\eta$ . Si esta derivada segunda al cuadrado es de la forma  $z_{tx}$ ,  $v_{tx}$ ,  $v_{tt}$  o  $z_{tt}$ , entonces acotamos los términos restantes por  $\|\cdot\|_\infty$ , quedando la integral de esta derivada segunda al cuadrado, lo cual está acotado por  $E_1$ . En el uso de  $\|\cdot\|_\infty$  podríamos encontrar cualquier tipo de derivada primera, o incluso factores sin derivadas. Simplemente aplicamos que

$$\|z_t\|_\infty, \|v_t\|_\infty, \|z\|_\infty, \|v\|_\infty < E_1^{1/2} + \mathcal{A}^{1/2}$$

o

$$\|z_x\|_\infty, \|v_x\|_\infty < 1.$$

Todo esto produce cotas de la forma deseada,

$$Ce^{-t} E_1^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2}.$$

En el caso donde la derivada segunda sea  $z_{xx}$  o  $v_{xx}$ , notar que hay otros factores de menor orden. Aplicar Cauchy Schwarz con cualquiera de estos factores y  $\|\cdot\|_\infty$  con el resto de los términos. Seguimos exactamente como arriba excepto que usaremos que  $\|z_{xx}\|_\infty, \|v_{xx}\|_\infty < 1$ . Con esto llegamos a cotas de la forma

$$Ce^{-t} E_1^{1+\frac{n_i}{2}} \mathcal{A}^{m_i/2}.$$

Juntando todo, llegamos al a conclusión. □

#### 1.2.4. Prueba del lema 4.14.

PRUEBA DEL LEMA 4.14. Notar que esta es la misma desigualdad que la del lema anterior pero con  $E_2$  y  $\mathcal{E}_2$  intercambiados. Siguiendo el mismo argumento, se llega a la necesidad de acotar  $\int B_x^2 + B_t^2 + D_t^2 + D_x^2 dx$  por  $\mathcal{E}_2$ . Esto es más fácil que antes. La estrategia es casi la misma, pero con modificaciones menores.

El primer paso llevó a cotas de la forma  $Ce^{-t} \mathcal{E}_0^{1+n/2} \mathcal{A}^{m/2}$ , que a su vez están acotadas por  $Ce^{-t} \mathcal{E}_1^{1+n/2} \mathcal{A}^{m/2}$ .

En el segundo paso, el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz dio  $\mathcal{E}_0$ , lo cual es satisfactorio. Respecto a las normas infinito,

$$\|z\|_\infty, \|v\|_\infty, \|z_t\|_\infty, \|z_x\|_\infty, \|v_t\|_\infty, \|v_x\|_\infty \leq \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_1^{1/2},$$

que también es satisfactorio.

En el último paso, recordar que  $\eta^2$  tendrá exactamente una derivada segunda que está elevada al cuadrado. Acotamos el resto de los términos por  $\|\cdot\|_\infty$  y, sin importar cuál es la derivada segunda que aparece, la acotamos con su norma  $L^2$ . La norma  $L^2$  de la derivada segunda está acotada por  $\mathcal{E}_1$  o  $E_1$ . Si llega a ser  $E_1$ , entonces usando el lema 4.10 podemos cambiarlo por  $C\mathcal{E}_1 + C(t+1)^2 e^{-2t} m_1(0)^2 + \sum_i Ce^{-t} \mathcal{E}_1^{1+n_i/2} \mathcal{A}^{m_i/2}$ . Con respecto al uso de  $\|\cdot\|$ , tenemos que

$$\|z\|_\infty, \|v\|_\infty, \|z_t\|_\infty, \|z_x\|_\infty, \|v_t\|_\infty, \|v_x\|_\infty \leq \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{E}_1^{1/2}.$$

Todo el procedimiento da cotas de la forma

$$Ce^{-t} \mathcal{A}^{m_i/2} \mathcal{E}_1^{1+n_i/2} \quad \text{o} \quad Ce^{-t} \mathcal{A}^{m_i/2} \mathcal{E}_1^{n_i/2} m_2(0)^2.$$

Respecto al último, usando que  $\mathcal{E}_1^{1/2} m_2(0) \leq \mathcal{E}_1 + m_2^2(0) \leq \mathcal{E}_1 + C m_2(0)$  y juntando todo llegamos a la conclusión.  $\square$

## Referencias

- [1] Michael T Anderson. On long-time evolution in general relativity and geometrization of 3-manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 222(3):533–567, 2001.
- [2] Michael T Anderson. Cheeger-gromov theory and applications to general relativity. *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields: 50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity*, pages 347–377, 2004.
- [3] Lars Andersson and Vincent Moncrief. Elliptic-hyperbolic systems and the einstein equations. In *Annales Henri Poincaré*, volume 4, pages 1–34. Springer, 2003.
- [4] Lars Andersson and Vincent Moncrief. Future complete vacuum spacetimes. In *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields: 50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity*, pages 299–330. Springer, 2004.
- [5] Alejandro Bellati and Martin Reiris. Stability of the double-cusp spacetimes and long-time geometrizations. arXiv:2311.17180, 2023.
- [6] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 14:329–335, 1969.
- [7] Arthur E Fischer and Vincent Moncrief. The reduced hamiltonian of general relativity and the  $\sigma$ -constant of conformal geometry. *Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology*, 537:70, 2000.
- [8] Arthur E Fischer and Vincent Moncrief. The reduced einstein equations and the conformal volume collapse of 3-manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 18(21):4493, 2001.
- [9] Robert H Gowdy. Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: topologies and boundary conditions. *Annals of Physics*, 83(1):203–241, 1974.
- [10] James Isenberg. Constant mean curvature solutions of the einstein constraint equations on closed manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 12(9):2249, 1995.
- [11] John M Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 2. Springer, 2018.
- [12] John M Lee and John M Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.
- [13] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- [14] Martin Reiris. The ground state and the long-time evolution in the CMC Einstein flow. In *Annales Henri Poincaré*, volume 10, pages 1559–1604. Springer, 2010.
- [15] Hans Ringström. On a wave map equation arising in general relativity. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 57(5):657–703, 2004.
- [16] Hans Ringström. Non-linear wave equations. *Course Notes, KTH*, 2005.
- [17] Hans Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*, volume 6. European Mathematical Society, 2009.
- [18] Hans Ringström. Strong cosmic censorship in  $T^3$ -gowdy spacetimes. *Annals of mathematics*, pages 1181–1240, 2009.
- [19] Thomas C Sideris. Global existence of harmonic maps in Minkowski space. *Communications on pure and applied mathematics*, 42(1):1–13, 1989.
- [20] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.