Cálculo aproximado: Una herramienta poco explorada para fortalecer el aprendizaje matemático temprano en las escuelas.

Lic. Lucía Puyol Ferrari

Maestría en Ciencias Cognitivas

Facultad de Ciencias - Facultad de Ingeniería - Facultad de Psicología

Universidad de la República; Montevideo -Uruguay

Setiembre de 2023

Cálculo aproximado: Una herramienta poco explorada para fortalecer el aprendizaje matemático temprano en las escuelas.

Lic. Lucía Puyol Ferrari

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ciencias Cognitivas, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ciencias Cognitivas.

Tutor: Dr. Alejandro Maiche Marini

Montevideo - Uruguay

2023

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Sergio Dansilio (Presidente)

Dra. Silvia Figiacone.

Dr. Ariel Cuadro.

Montevideo - Uruguay

2023

Agradecimientos

Esta memoria final de tesis de maestría es el reflejo material de un proceso de crecimiento personal y académico. No hubiese sido posible sin las personas que estuvieron acompañando y colaborando para que sucediese.

A mi tutor Ale Maiche, por mostrarme otra cara de la psicopedagogía, el valor de ella y los aportes de esta profesión para con el campo científico. Por el tiempo dedicado y la cercanía, siempre comprometido con el proceso. Por involucrarme y hacerme partícipe de los proyectos de la línea de investigación. Por tu contagiosa preocupación por la realidad educativa.

A la Agencia Nacional de Investigación e Innovación y a la Comisión Académica de Posgrado por el apoyo a la formación de las y los jóvenes profesionales del país.

Al equipo de cognición numérica. A Nadir por ayudarme a pensar los resultados a través de la estadística, por las horas de discusiones, sugerencias de artículos y compañerismo eterno. A Fran y Martín más por las innumerables ayudas técnicas, por estar siempre atentos y con las mejores ganas. A Dino, por su presencia cercana y compañera. Siempre atenta y resolutiva, compañera de aventuras dentro y fuera de las aulas. Gracias por los miles de consejos. A Nati, mi compañera de escritura y charlas matutinas, con una lectura quisquillosa pero imprescindible de todo lo que escribo, siempre con ideas novedosas. A Estela, acercándome siempre a la realidad de las escuelas uruguayas, compañera de ruta y estudio a lo largo de la carrera.

Al Prof. Mario Luzardo por su orientación en el área estadística.

A las escuelas, familias, niños y niñas que confiaron y participaron del proyecto.

A mi familia, siempre acompañando y apoyando mis decisiones, colaborando para que el proyecto fuese realidad.

A Lucas, por acompañarme en cada decisión. Por estar dispuesto a crecer juntos en este camino.

Resumen:

Existe consenso a nivel internacional en cuanto a la importancia de promover un adecuado rendimiento matemático desde edades tempranas en el desarrollo. Sin embargo, a pesar de observarse señales de alarma en los primeros años de escolarización, la detección de las dificultades en matemática suele ser tardía.

En la búsqueda de alternativas para paliar dicha situación, el presente trabajo de investigación centra sus esfuerzos en la búsqueda de propuestas que atiendan las dificultades de manera temprana en el área de la matemática. En este sentido, el objetivo central de este trabajo de maestría es estudiar la capacidad predictiva de la variable cálculo aproximado en el avance del rendimiento matemático de niños y niñas en la primera etapa de escolarización. Para ello, se realizó un estudio correlacional entre dichas variables (cálculo aproximado y rendimiento matemático) y se observó su efecto hasta dos años después en niños uruguayos de entre 5 y 7 años de edad.

Inicialmente, participaron 131 niños y niñas en el estudio correlacional. Al siguiente año, se volvió a evaluar el rendimiento matemático de 78 de ellos y, un año más tarde, se evaluaron nuevamente a 30 niños y niñas de la muestra original en cuanto a su rendimiento matemático. Los instrumentos utilizados fueron réplicas digitales de las tareas de cálculo aproximado diseñadas por Gilmore et al. (2007), la Prueba Uruguaya de Matemática (Marconi et al., in prep) y pruebas de criterio.

Los resultados muestran que, cuando se elimina el requisito de exactitud, los niños y niñas manipulan correctamente cantidades superiores a las previstas en el currículum. Asimismo, se verifica el valor predictivo del cálculo aproximado en el avance que el niño o niña tendrá en su rendimiento matemático general. Los datos recabados dan cuenta que, un adecuado manejo numérico aproximado previo al inicio de la educación escolar es un buen predictor del avance en el rendimiento matemático posterior.

Los hallazgos de este estudio sugieren que la utilización de estrategias pedagógicas basadas en el cálculo aproximado en los primeros años de escolarización (inicial) podrían ser una herramienta muy útil para fortalecer el rendimiento matemático de los niños y niñas en los primeros grados escolares. Este trabajo plantea la existencia de una oportunidad educativa relacionada con la utilización de tareas de cálculo aproximado simbólico en las aulas de inicial y primer grado.

Palabras clave: habilidades matemáticas tempranas, cálculo aproximado, rendimiento matemático, educación inicial y primaria.

Abstract:

There is international accord regarding the importance of promoting adequate mathematical performance from early ages in development. However, despite observing warning signs in the early years of schooling, the detection of mathematical difficulties often occurs late.

In the search for alternatives to address this situation, this research focuses on finding proposals that address difficulties early in the field of mathematics. In this regard, the main objective of this thesis is to study the predictive capacity of the approximate calculation variable in the advancement of mathematical performance in boys and girls during the first stage of schooling. To achieve this, a correlational study was conducted between these variables (approximate calculation and mathematical performance), and its effects were observed up to two years later in Uruguayan children aged between 5 and 7 years old.

Initially, 131 boys and girls participated in the correlational study. The following year, the mathematical performance of 78 of them was re-evaluated, and one year later, the mathematical performance of 30 boys and girls from the original sample was assessed again. The instruments used were digital replicas of approximate calculation tasks designed by Gilmore et al. (2007), the Uruguayan Mathematics Test (Marconi et al., in prep), and criterion tests.

The results show that, when the requirement for accuracy is removed, boys and girls correctly manipulate quantities greater than those anticipated in the curriculum. Likewise, the predictive value of approximate calculation in the child's subsequent mathematical performance advancement is confirmed. The collected data indicate that a proper prior

approximate numerical handling before the start of formal education is a good predictor of advancement in later mathematical performance.

Lista de abreviaturas

CA: Cálculo aproximado

CAS: Cálculo aproximado simbólico

CANS: Cálculo aproximado no simbólico

PUMa: Prueba Uruguaya de Matemática

PS: PUMa simbólico

PNS: PUMa no simbólico

APS: Avance en PUMa simbólico

APNS: Avance en PUMa no simbólico

SNA: Sistema Numérico Aproximado

SNS: Sistema numérico simbólico

SSO: Sistema de seguimiento de objetos

ESE: Estatus SocioEconómico

AAH: Ambiente de aprendizaje en el hogar

OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

TABLA DE CONTENIDOS:

CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN

Quienes elegimos educar en primera infancia y acompañamos a los niños en su último año de educación inicial coincidimos en la búsqueda constante de herramientas que favorezcan la transición de un ciclo a otro. Desde mi experiencia personal habiendo trabajando en aulas de educación primaria y con el privilegio de acompañar la continuidad de los y las estudiantes en el cambio de ciclo de educación inicial a educación primaria, llamó mi atención que, a pesar de estimular el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas propuestas en el programa de ANEP, para un grupo de niños y niñas (que no tendrían necesariamente una dificultad específica en el aprendizaje de las matemáticas) se hace extremadamente difícil afrontar las exigencias de cursos posteriores de manera eficiente. Ello me convoca como educadora en la búsqueda de nuevas alternativas que atiendan las necesidades de estos grupos de niños y niñas y es en esta búsqueda que se enmarca el presente trabajo de investigación.

Existe consenso entre los educadores sobre la importancia de trabajar en el aula y con las familias en el disfrute por los conocimientos matemáticos. Enseñamos a descubrir los números en la vida cotidiana, a hacer visible y consciente su uso diario. Tomando las palabras de Stanislas Dehaene (2019, p.196/197) en su libro: ¿Cómo aprendemos? Nuestro punto de partida es que "Cada niño es un matemático incipiente, que adora contar, medir, trazar rectas y círculos, ensamblar las formas siempre y cuando les demos (…) acertijos matemáticos atractivos." A pesar de ello, pareciera que algo sucede (sin estar aún del todo claro para el mundo adulto) cuando los niños comienzan la educación primaria y se enfrentan a los primeros cálculos exactos: se observa que existe un grupo de niños que requieren un tiempo de aprendizaje adicional al previsto inicialmente. Algunos incluso necesitan varios años de entrenamiento para dominar el conjunto de operaciones de suma y resta (Gilmore et al., 2007). Esto genera fatiga e incluso rechazo por el aprendizaje de la matemática, siendo esta un área de conocimiento transversal al resto y presente a lo largo de toda la escolaridad. Las dificultades en matemática son un problema importante de las sociedades modernas que genera impactos negativos en las oportunidades laborales, en la salud física y mental de las personas (Kucian & von Aster, 2015 & Peake et al., 2021).

Los logros alcanzados en matemática al momento de culminar la educación inicial es el predictor más importante del rendimiento matemático en primaria e incluso en el desarrollo posterior (Duncan et al., 2007). Ahora bien, ¿cuál es la razón por la que algunos niños vivencian hasta los 5 años la matemática como una experiencia divertida, pero al comenzar la educación primaria esto se transforma, como mínimo, en un desafío difícil? ¿Qué debemos enseñarle a este grupo de niños en inicial para que el pasaje a la matemática formal suceda de forma armoniosa y no signifique un salto extremadamente dificultoso?

La cognición en matemática no es ajena a ello. Se trata de un campo de trabajo que se ha expandido enormemente en las últimas décadas estudiando los mecanismos implicados en el aprendizaje matemático. Se define como un área de estudio que busca comprender los procesos cognitivos que subyacen al conocimiento matemático (Gilmore et al., 2018). Es una disciplina nueva, incluye científicos de diferentes áreas disciplinares como la didáctica, la psicología y la neurociencia permitiendo la confluencia de diferentes saberes y avances sustanciales en nuestra comprensión de la evolución del cerebro y los sistemas cognitivos encargados de representar magnitudes (Geary et al., 2013 & De León y Maiche, en prensa). Lamentablemente la investigación en cognición numérica en países hispanohablantes, como es el caso de Uruguay, aún es incipiente (Haase et al., 2020). La mayor producción de conocimiento en el área ha sido publicada en inglés y con poblaciones que solo reflejan las realidades educativas de países Occidentales, Educados, Industrializados, Ricos y Democráticos (conocidos como “WEIRD”) lo que dificulta que se abran líneas de investigación y se modifiquen legislaciones educativas. En la misma línea, en la formación docente suele dejarse de lado las competencias asociadas al desarrollo de la habilidad numérica inicial desde una aproximación cognitiva (Susperreguy et al., 2020). Cabe destacar que varias maestras manifiestan desconocimiento, dificultades en la instrucción, e incluso incomodidad al momento de enseñar matemáticas (Ormeño Hofer et al., 2015).

HACIENDO FOCO ESPECÍFICAMENTE EN LA REALIDAD URUGUAYA

El equipo de Cognición Matemática de CICEA ha rastreado los orígenes de los estudios en cognición matemática en nuestro país (Koleszar et al., 2020). En este estudio, se puede apreciar cómo (hasta el 2020, al menos) los trabajos de investigación que se realizaron en Uruguay sobre predictores del rendimiento académico en matemática, diseños de intervenciones y desarrollo de herramientas de evaluación y estimulación; permanecieron alejados de la formación docente, de los currículums y, por consiguiente, también de la práctica educativa en la mayoría de los casos.

Al mismo tiempo, la realidad uruguaya en cuanto al rendimiento matemático es muy desfavorable. Con el fin de obtener una medida objetiva del rendimiento de nuestros estudiantes, Uruguay participa del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por su denominación en inglés) que nos permite comparar el rendimiento de nuestros estudiantes de 15 años con el contexto internacional. Nuestro país presenta uno de los mayores puntajes de la región, aunque, al mismo tiempo, este resultado nos ubica por debajo de la media de los países de la OCDE. Las dificultades evidenciadas en PISA (2015 y 2018), provienen de mucho antes. En la evaluación nacional ARISTAS (2017), que implementa el INEED cada 3 años evaluando a estudiantes de 3er y 6to grado de educación primaria, se anticipan claramente los resultados que luego verifican las pruebas PISA. De hecho, para ser más preciso, la evidencia científica en el área muestra que es posible predecir estas dificultades a partir de señales de alarma que bien pueden ser detectadas durante la educación inicial. Nos debe interpelar que, por alguna razón, año a año, pasan inadvertidos cientos de estudiantes que luego arrastrarán debilidades en el área de la matemática a lo largo de toda su escolaridad.

Una de las posibles razones que podría explicar las debilidades en matemáticas dentro de las aulas uruguayas, es que nos encontramos a maestras "pulpo" en distintos roles y solas en su función. Se encargan de la tarea pedagógica, de prepararlos para la hora del almuerzo, de tramitar el arreglo de soportes técnicos del aprendizaje (ceibalitas), entre varias funciones más. A su vez, cuando una maestra detecta una dificultad de aprendizaje y precisa un diagnóstico claro de lo que ese estudiante necesita para continuar aprendiendo, hace la derivación pertinente a profesionales de la salud, pero tendrá una espera que muchas veces excede el año lectivo para recibir el asesoramiento solicitado. Ello nos debe ocupar y preocupar como sociedad. ¿Cuánto puede un educador responder a la diversidad de un aula y generar propuestas pedagógicas de calidad pensando en la forma de aprendizaje de cada uno de sus estudiantes cuando no hay tiempo real ni recursos suficientes para ello? (Schiappapietra, 2022).

Lo descrito anteriormente es parte de nuestra realidad educativa y nos interpela como investigadores, además de como ciudadanos. En ese sentido, esta tesis pretende generar evidencia empírica específicamente en relación a la enseñanza de la matemática temprana. Concretamente, se plantea analizar una de las variables presentes en la transición entre la educación inicial y la primaria en el entendido que ella podría ser de especial relevancia. Si bien el pasaje de ciclo implica varios cambios, específicamente en el área de matemática, el requerimiento de exactitud al momento de dar una respuesta se vuelve una de las variaciones más significativas que enfrenta el niño en pasaje del ciclo inicial al primer grado. Para analizar este problema, nos basamos en la capacidad para el cálculo aproximado de los niños y niñas realizando una réplica parcial de los estudios de Gilmore et al. (2007).

Organización de la tesis

Esta tesis de maestría se llevó a cabo en un período sensible a nivel social y con un impacto directo con los procesos de enseñanza- aprendizaje. En marzo del año 2020, el sistema educativo uruguayo - al igual que el resto de sistemas educativos del mundo - enfrentó una realidad inédita en su historia: el cierre de todos los centros educativos y la suspensión de clases presenciales en todos sus niveles a causa de la pandemia COVID-19. Ello generó cambios radicales en la forma de enseñar de los docentes y en la forma de aprender de los estudiantes, debiéndose generar rápidamente mecanismos alternativos. Mediante el uso de las tecnologías se realizaron -sobre la marcha-, los rediseños necesarios para avanzar en los contenidos programáticos estipulados para el curso. Los mismos implican que el proceso de enseñanza-aprendizaje se diera a distancia de las escuelas y con un computador como intermediario. El tiempo pedagógico de exposición se vio reducido y se apeló al trabajo individual de los alumnos y al apoyo que cada familia pudiera darle a los niños y las niñas. Esto, como se verá más adelante, también impactó fuertemente en el trabajo de campo de esta tesis que se presenta posteriormente.

La tesis se encuentra dividida en 5 capítulos. En esta presentación (capítulo 1) se busca presentar de modo general la problemática a abordar y cómo será la organización de los diferentes capítulos. En el capítulo 2, se presentan los fundamentos teóricos que sostienen el trabajo empírico. Se presentan aquí las diferentes corrientes teóricas que sustentan la propuesta de trabajo; conceptos relativos al desarrollo temprano de habilidades matemáticas y la relación entre el sistema numérico aproximado y el rendimiento matemático temprano. Se detallan investigaciones que abordan la incidencia del cálculo aproximado en el cálculo exacto y se describen los objetivos del trabajo de investigación. El capítulo 3, refiere a los materiales y métodos implementados, las características de la muestra, así como los instrumentos de evaluación empleados. En el capítulo 4 se presentan los principales resultados obtenidos en el trabajo de campo en relación a los objetivos propuestos. Por último, en el capítulo 5 se interpretan los resultados alcanzados a la luz del marco teórico que da sustento a este trabajo. Asimismo, se plantean algunas conclusiones, reflexiones finales, limitaciones del presente estudio y posibles líneas futuras por donde continuar profundizando en nuevos proyectos de investigación.

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Piaget & García (1982) postulan a la mente del recién nacido como una mente que se conforma fundamentalmente mediante la interacción con el ambiente. Cada sujeto tiene un papel central en su proceso de aprendizaje y activo en interacción con el mundo exterior. Mediante el descubrimiento de las regularidades del entorno los niños comienzan a armar nociones sobre el comportamiento de los objetos que, a su vez, son la base sobre la que se construirán conocimientos cada vez más abstractos. Esta noción sobre la construcción del aprendizaje tiene aún gran influencia en el diseño de los programas educativos. El aprendizaje continúa siendo concebido como una construcción interna que realiza el ser humano a partir de la comprensión de las relaciones con los objetos del mundo exterior. Cabe destacar que, aún no está claro en la teoría propuesta por Piaget, cuál es el punto de partida del conocimiento de los niños y el origen de la capacidad de abstracción o de las representaciones (de León & Maiche, en prensa).

En lo relativo al aprendizaje de la matemática, el desarrollo de las habilidades y destrezas va en paralelo a las posibilidades que los niños presentan para simbolizar y desarrollar pensamiento abstracto. Es por ello que, el avance de habilidades matemáticas trae consigo un avance similar en la capacidad de operar con símbolos y modelos mentales cada vez más complejos (Gray & Tall, 1994). En sus postulados, Piaget considera que la capacidad simbólica se desarrolla a partir de los 2 años junto con la aparición del lenguaje, la pérdida progresiva de perspectiva egocéntrica y la aparición de cierto grado de lógica (de León & Maiche, en prensa). En esta línea, a partir del descubrimiento de las regularidades del entorno, los niños comienzan a armar nociones sobre el comportamiento de los objetos, ello los lleva a transitar progresivamente por estadios que les permiten acceder a conocimientos cada vez más abstractos (Mehler & Bever, 1967). En sus postulados Piaget defiende -coherentemente con su modelo- que la mente del niño no está preparada para el aprendizaje de la matemática simbólica hasta los 6 o 7 años. **S**egún esta teoría, los niños y niñas durante esta etapa se preparan para el desarrollo de las operaciones concretas por lo que no adquieren esta habilidad antes del estadio que lleva el mismo nombre: "operaciones concretas". Es en este estadío, cuando los niños y niñas comienzan a entender relaciones seriales y jerárquicas (Palacio et al., 2011).

En los últimos 50 años han aparecido una serie de trabajos que cuestionan la idea de que la mente del niño no está preparada para el aprendizaje de la matemática simbólica que sostenía Piaget. Ya en los años sesenta surgieron las primeras críticas a sus experimentos. Mehler & Bever (1967) cuestionaron tanto su metodología como sus resultados señalando, por ejemplo, que desde edades más tempranas los niños y las niñas evidenciaban cierto manejo de nociones matemáticas. Para fundamentar ello, realizaron una investigación con más de 200 niños de entre 2 y 5 años, la misma informa sobre la capacidad de *conservación de la cantidad* en niños y niñas estas edades. Los resultados señalan que antes de los 3 años y 2 meses, los niños poseen una forma de conservación de cantidad que pierden alrededor de los 4 años y no vuelve a estar presente hasta que tienen alrededor de 4 años y 6 meses. Paradójicamente a lo esperado, se observa que, cuánto más pequeños eran los niños, más aumentaba el porcentaje de acierto. Mencionan la presencia de un período ventana en el cual empeora su rendimiento en este tipo de tareas y vuelve a mejorar cerca de los 5 años de edad. Los autores interpretan dicho resultado como consecuencia de características propias de la edad, los niños y las niñas transitan por un período de sobre dependencia de las estrategias perceptivas. En su diseño de investigación les pedían a los niños que juzguen filas de bolitas de arcilla y filas de caramelos M & M. La amplia mayoría de los participantes (independientemente de la edad) optaron por la fila de M & M con mayor cantidad de caramelos. Ello indica que esta estrategia perceptual se puede superar, siempre que haya suficiente motivación para hacerlo. Con el tiempo, los niños y las niñas desarrollan una integración más sofisticada de la operación lógica con estrategias perceptuales que les permiten contar cada uno de los elementos de una fila. Luego tienen la capacidad de ignorar sus expectativas perceptuales para aquellos casos que pueden ser engañosos. El grupo de niños y niñas que no conservan las cantidades aún no puede desvincular sus estrategias perceptuales de esta manera. Por esta razón sostienen que, la no conservación de la cantidad es una excepción temporal a la cognición humana, no una característica básica de la dotación natural del hombre (Mehler & Bever ,1967).

Gallistel & Gellman (1978) señalan que hacia los 4 años de edad los niños suelen reconocer algunos principios básicos del conteo: a) contar agrupaciones de elementos, b) cada elemento se cuenta una sola vez, c) los valores numéricos se asignan en orden, d) es irrelevante el orden en que se cuentan los objetos, e) el último elemento pronunciado es el que contiene al conjunto. Los niños en edad inicial de a poco comienzan a incorporar estos principios por lo que hacia los 4 años entienden, por ejemplo, que 3 es mayor que 2.

En la misma línea, Dehaene & Cohen (1995) se suman a la lista de autores que reconocen al procesamiento numérico desde edades muy tempranas en el desarrollo proponiendo el modelo de triple código. El mismo hace referencia a la existencia de tres sistemas representacionales independientes que interactúan entre sí dependiendo de la tarea a resolver. Los mismos actúan en la codificación de los diferentes aspectos que están involucrados en el aprendizaje de la matemática temprana: la posibilidad de estimar y comparar cantidades de manera aproximada (sentido numérico), la identificación y el reconocimiento visual de los números (sistema visual) y la posibilidad de decodificar y nombrar a los números como representaciones exactas de la cantidad (sistema verbal) (Dehaene & Cohen, 1995). El primer sistema, el sentido numérico (en inglés conocido como *number sense*), refiere al procesamiento de la cantidad de manera no simbólica, utiliza una representación no verbal de la cantidad, pero incluye contenido semántico de proximidad (5 está cerca de 6). Se hace presente en tareas de aproximación y en tareas que requieran la comparación de cantidades. Sobre el mismo se profundizará más adelante (Dehaene & Cohen, 1997). El sistema visual permite identificar a los números como cadenas de dígitos, participa de las representaciones y manipulaciones de los números en formato simbólico. Se pone en juego, una vez que es aprendido a través de la instrucción formal, al momento de realizar operaciones complejas (Dehaene & Cohen, 1997). Finalmente se encuentra el sistema auditivo-verbal en donde los números y sus relaciones se representan en formato verbal tanto léxico, como fonológico y sintáctico. Es un sistema que, para activarse, necesita de ciertos aprendizajes ya que codifica las palabras que nominan a los números y las tablas de multiplicar, entre otros (Dehaene & Cohen, 1997).

Dehaene (2016 y 2019) recopila una serie de experimentos que generan controversia con lo establecido por Piaget, con respecto a qué sabemos y cómo aprendemos. A lo largo de este capítulo se irá haciendo referencia a investigaciones recientes que cuestionan los principios generales formulados por Piaget en relación al aprendizaje de la matemática. Los autores que conforman esta corriente proponen fundamentalmente que venimos al mundo con ciertas predisposiciones innatas a determinados tipos de conocimiento como por ejemplo las cantidades (Dehaene, 2016)**.**

En esta misma línea, Elizabet Spelke de la Universidad de Harvard propone una teoría sobre el origen del conocimiento a la que denomina *Sistemas Nucleares de Conocimiento* (Spelke, 2000). La teoría de los sistemas nucleares del conocimiento postula la existencia de un conjunto de mecanismos que surgen muy temprano en el desarrollo, permanecen funcionales a lo largo de la vida, apoyan el pensamiento y son base para el aprendizaje. Se encuentran presentes a lo largo de toda la vida y operan de manera automática, fuera de nuestra conciencia. Tienen un propósito específico y son independientes entre sí.

Conocimientos nucleares

Los bebés comienzan a interactuar con el medio al que pertenecen a partir de una serie de capacidades universales. Con ello nos referimos a sistemas que se caracterizan por ser específicos de dominio e innatos. La investigación en humanos de diversas edades y culturas; así como en animales proporciona evidencia convergente sobre la existencia de estos sistemas que conforman las bases del conocimiento (Spelke, 2022).

En su libro *Whats babies Know*, Elizabeth Spelke expone que el aprendizaje de los bebés se basa en los conocimientos nucleares (*core knowledge) y* describe al menos 6 tipos de conocimientos con los que los bebés parecen venir equipados al mundo desde su nacimiento. Si bien ella misma aclara que es probable que haya más de seis tipos, hasta el momento, la investigación desarrollada ha aportado evidencias del funcionamiento de los seis que detallamos a continuación.

El sistema de conocimiento nuclear sobre objetos (*Objects):* los objetos son las cosas que percibimos, categorizamos, nombramos, contamos y rastreamos a lo largo del tiempo. La experiencia de objetos sólidos, acotados y unitarios surge inmediatamente y sin esfuerzo. A pesar de nunca haber recibido instrucciones explícitas sobre cómo se comportan e interactúan los objetos, tenemos expectativas que son universalmente similares. A continuación, se mencionan los principios que gobiernan el movimiento de los objetos. En primer lugar, se encuentra la cohesión, ella significa que los objetos se mueven como conjuntos conectados y unidos. En segundo lugar, se encuentra el principio de continuidad, los objetos se mueven en caminos conectados y sin obstáculos. Por último, se encuentra el principio de contacto el cual significa que un objeto influye en el movimiento de otro, si y sólo si, se tocan.

Los objetos ocultos no dejan de existir cuando no están a la vista, son percibidos como entidades acotadas, sólidas y continuas. Dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo (por ejemplo, una pelota no puede atravesar una pared). Estos principios son específicos de esta área dado que no parecen guiar el razonamiento temprano en los dominios de número, geometría o agentes (Spelke, 2022).

El sistema de conocimiento nuclear sobre lugares (*Places):* ha sido el sistema central más estudiado, el mismo hace referencia a las representaciones que hacemos de los entornos por los que navegamos. Los conocimientos más importantes en el área tienen sus orígenes en investigaciones sobre animales navegantes y en el diseño que realizan de la superficie navegable. Este conocimiento nuclear nos proporciona sentido de dónde estamos y apoya la construcción de mapas mentales del terreno a través del cual nos movemos (Spelke, 2022).

El sistema de conocimiento nuclear sobre las formas (*Forms*): Refiere a la naturaleza de nuestras capacidades para reconocer y clasificar los objetos que nos rodean, en función de sus formas. Los bebés están predispuestos a aprender, reconocer y categorizar objetos mediante el uso de descripciones que capturan los rasgos y características de plantas y animales. Esta categorización es especialmente útil ya que las formas de los objetos se conectan con sus funciones. Como adultos, categorizamos los objetos principalmente de acuerdo con la función para la que fueron diseñados (Spelke, 2022).

El sistema nuclear sobre los agentes (*Agents):* hace referencia a la distinción que hacen los bebés entre objetos y seres vivos. Estos últimos no se rigen por las mismas leyes de la física que los objetos, por lo que a un bebé no le sorprendería que tengamos movimiento autónomo. El desplazamiento está motivado desde el interior. Reconocen que los seres vivos tienen intenciones y que sus acciones están orientadas a ello. Otros estudios indican que los niños reconocen las intenciones y preferencias de las personas (Spelke, 2022).

El sistema nuclear sobre lo social (*Social beings*). Los bebés poseen un sistema abstracto y limitado de conocimiento de las personas como seres sociales, distinto del sistema por el cual los bebés se representan a sí mismos y a otras personas como agentes. Son especialmente sensibles a detectar información social, están predispuestos a conocer a las personas como individuos, que se conectan con otros individuos dentro de una red de relaciones sociales. Desde el nacimiento los bebés son sensibles a comportamientos de otros seres sociales como, por ejemplo, cuando se miran a los ojos con mirada mutua y comparten estados de atención. Vocalizan, tanto para anunciar su presencia a los demás como para hacer o responder a las propuestas sociales. Comunican sus experiencias con expresiones de interés o emoción (Spelke, 2022).

El Sistema nuclear Numérico Aproximado *(Number Sense)* (de ahora en más SNA)**.** Mediante este sistema se hace evidente la capacidad estimativa de los niños y su vínculo directo con la matemática. Es un sistema antiguo, producto de la evolución biológica, que surge de forma independiente al lenguaje y a la educación en matemática (Spelke, 2022). Representa un conjunto básico de habilidades numéricas tempranas que serán la base del desarrollo numérico posterior (Szűcs & Myers, 2017).

Esta tesis de maestría investiga las habilidades matemáticas tempranas, haciendo foco en la incidencia que tiene el SNA en el rendimiento matemático. Por esta razón desarrollamos en profundidad las características de este último *sistema nuclear de conocimiento* (SNA).

2.1 Sistema Numérico Aproximado

Diferentes áreas del conocimiento como son la neuropsicología y la psicología del desarrollo, apoyan la hipótesis de la existencia de un mecanismo innato que posibilita el procesamiento no simbólico de cantidades. La competencia numérica básica tiene sus raíces biológicas más primitivas en animales, bebés y adultos humanos por igual (Nieder, 2005).

Investigaciones realizadas en animales (monos, caballos, peces, etc.) aportan información concluyente en cuanto a que varias especies son capaces de detectar espontáneamente la cantidad aproximada no simbólica de un conjunto y, aunque con imprecisiones, manipular representaciones numéricas para ejecutar operaciones de comparación, adición y sustracción (Cantlon et al., 2006 & Nieder, 2005).

Las investigaciones realizadas en humanos que se encuentran en estadios preverbales del desarrollo han evaluado la discriminación de cantidades en bebés de pocos meses de vida mediante diseños experimentales que implicaran procesos como la habituación (Starr et al., 2013) y la detección de cambios (McCrink & Wynn, 2004).

McCrink & Wynn (2004) sugieren que los bebés poseen un sistema de estimación basado en magnitudes para representar numerosidades que respaldan los procedimientos de cálculo numérico posterior. En el año 2000, (Xu & Spelke, 2000) demuestran que bebés de 6 meses discriminan numerosidades en secuencias auditivas-temporales y visuales-espaciales cuando la diferencia tiene una proporción de 2.0. Se observa que responden con acierto cuando hay en un grupo 8 elementos y en el otro hay 16 elementos, mientras que fallan cuando, en un grupo hay 8 elementos y en el otro hay 12. Desde muy temprano los niños y las niñas desarrollan un cierto sentido numérico de carácter aproximado que les permite, por ejemplo, discriminar dónde hay más elementos al comparar dos conjuntos.

Por último, existe un grupo de investigaciones que hacen foco en aspectos antropológicos del desarrollo del SNA. Ifrah (1985), citado por Dehaene (2019), plantea que culturas como los Pirahã o Munduruku y Walpiris no poseen lenguaje para representar cantidades, sin embargo, son capaces de comparar y realizar adiciones a pesar de la ausencia de palabras para denominar las cantidades (Pica et al., 2004). Por tanto, el sentido numérico es independiente del lenguaje.

El SNA se caracteriza por tener representaciones imprecisas de las cantidades, estas están sujetas a la ley psicofísica de Weber-Fechner (Dehaene, 2011). La misma hace referencia a la percepción de cambio en una magnitud física. En el caso de la numerosidad, nuestra capacidad para detectar cambios dependerá de la proporción del cambio. En otras palabras, la capacidad discriminatoria mejora a medida que aumente la proporción entre las cantidades. Por ejemplo, discriminemos más fácilmente entre dos conjuntos con proporción de 2 (i.e: 25 vs 50), que entre conjuntos con menor proporción (i.e: 25 vs 30).

En síntesis, en lo que refiere al área matemática, los hallazgos de las nuevas corrientes cognitivas proponen que el aprendizaje matemático posee una base filogenética que es modificable por el aprendizaje. En esta línea, Deahene (2019) propone que la educación matemática no se imprime en el cerebro como si éste fuera una tabula rasa, sino que se apoya sobre una representación innata y preexistente de cantidades numéricas que buscamos extender y refinar. Se genera lo que el autor denomina *reciclaje neuronal*, modificaciones parciales de circuitos neuronales para incorporar la invención cultural, en este caso, de los símbolos aritméticos.

2.2 DESARROLLO TEMPRANO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS.

Si bien se considera que existe una base preexistente numérica para el aprendizaje de la matemática, se trata de un proceso complejo que requiere de la combinación de habilidades cognitivas, como el lenguaje, la memoria de trabajo, la noción de espacio y cantidad. El aprendizaje de la matemática no se asienta en una única capacidad cognitiva, ni puede decirse que es algo puramente innato o adquirido. El aprendizaje de la matemática se apoya en diferentes sistemas de conocimientos (Butterworth, 2005).

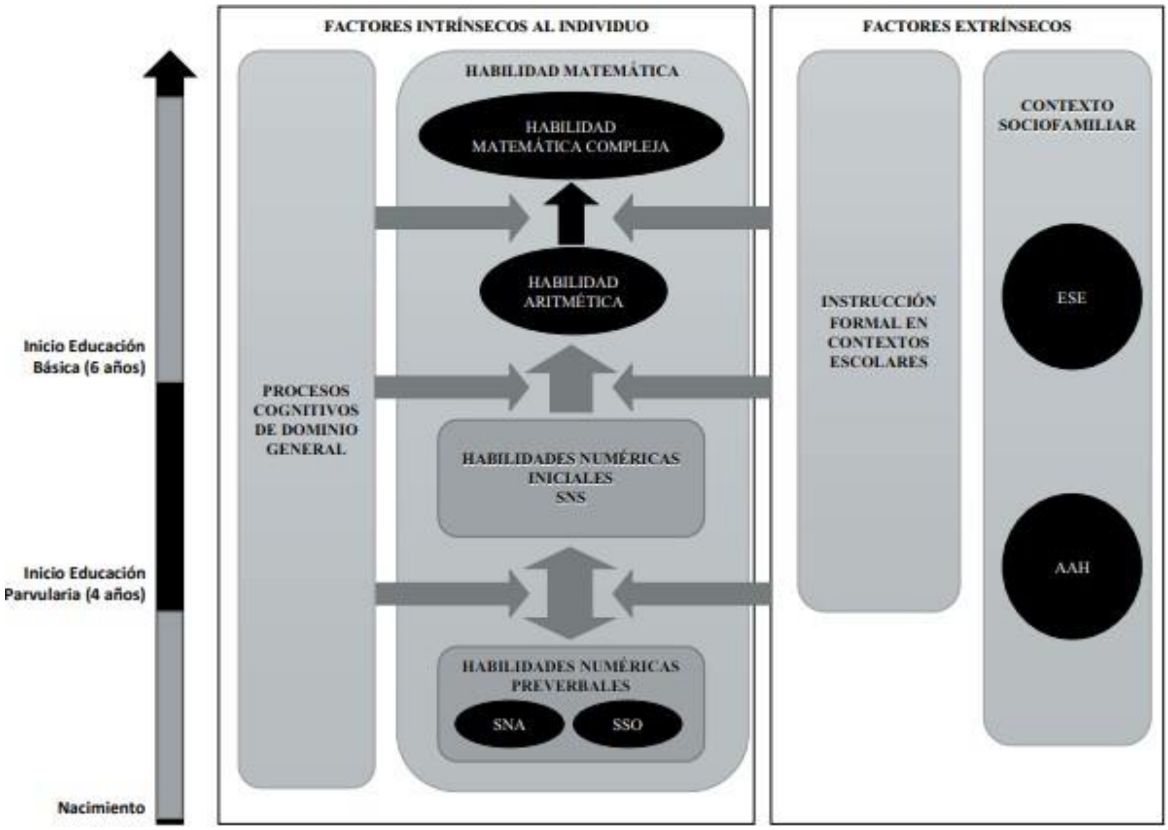
Desde un punto de vista del desarrollo ontológico de las funciones cognitivas que sustentan el aprendizaje del número, debemos diferenciar entre los procesos cognitivos intrínsecos al individuo y los factores extrínsecos que modulan el desarrollo de los primeros. Asimismo, los procesos cognitivos intrínsecos se pueden clasificar en dos:

En primer lugar, procesamiento cognitivo de dominio general, como la atención, el lenguaje o la memoria. En segundo lugar, procesamiento cognitivo de dominio específico (aquellos procesos cognitivos que sustentan específicamente el aprendizaje del número y la matemática), como la cardinalidad o la ordinalidad. Para estos últimos, en esta memoria de tesis utilizaremos la etiqueta global de habilidades numéricas iniciales (Peake et al, 2021).

La Figura 1 ayudará a comprender estas clasificaciones, desde el punto de vista del desarrollo (Peake et al., 2021).

Figura 1

Modelo cognitivo de desarrollo de la habilidad matemática inicial. Notas: SNA: Sistema numérico aproximado; SNS: Sistema numérico simbólico; SSO: Sistema de seguimiento de objetos; ESE: Estatus socioeconómico; AAH: Ambiente de aprendizaje en el hogar (Peake et al., 2021).



Ahora bien, al llevar la teoría a situaciones de la vida cotidiana, surgen cuestionamientos como: qué estimular, cuánto hacerlo y, por ende, cómo medirlo durante edades tempranas en el desarrollo. Por un lado, hay quienes son cautelosos acerca de la sobreestimulación, por lo que no consideran relevante la evaluación a edades tempranas. Mientras que, por otro lado, hay quienes les preocupa subestimar el potencial de los niños pequeños y restringirles oportunidades de aprendizaje para las que estarían potencialmente disponibles. Este último grupo de científicos entiende que la evaluación es un instrumento importante que permite identificar el punto de partida en el que se encuentra cada estudiante.

Quienes así lo entienden proponen, una vez obtenido un perfil de aprendizaje y rendimiento de cada estudiante, llevar a cabo una estimulación temprana amplia y variada apoyada en el criterio de plasticidad neuronal de los niños y niñas de 0 a 6 años como punto de partida (Ferres-Forga et al., 2022).

La evidencia recabada a partir de investigaciones de corte longitudinal subraya la importancia de varias habilidades matemáticas tempranas medidas durante nivel 5 de educación inicial y primer año de educación primaria para el desarrollo matemático posterior. Por ejemplo, las habilidades relacionadas al conteo, el conocimiento de los números, la comparación de cantidades, los problemas escritos y los vínculos entre números y palabras permitió predecir el rendimiento en primer grado (Jordan et al., 2007) y segundo grado (Aunola et al., 2004).

A pesar de existir un creciente interés en la temática, en las investigaciones realizadas hasta el momento, no ha sido considerada la implicancia del CA como predictor del rendimiento matemático posterior, es por ello que este estudio intenta dar un paso más e indaga el valor predictivo del CA en el rendimiento matemático uno (y hasta dos) años después.

2.3 RELACIÓN ENTRE EL SISTEMA NUMÉRICO APROXIMADO Y EL RENDIMIENTO TEMPRANO EN MATEMÁTICA.

En las últimas décadas un polémico debate se ha instaurado en relación al vínculo entre el SNA y el rendimiento en matemática. Mientras algunas investigaciones han reportado que el SNA predice el rendimiento en matemática y que es un núcleo cognitivo específico para su aprendizaje, otros estudios no detectaron dicha relación y se basan en ello para fundamentar que no existe tal efecto del SNA sobre el rendimiento en matemática.

La controversia establecida, de alguna manera ha contribuido a que paulatinamente cada vez más investigadores en el ámbito educativo orienten sus trabajos hacia el desarrollo de las habilidades matemáticas tempranas. En este último tiempo se ha observado una tendencia al alza en las publicaciones relacionadas con la aritmética temprana (Methe et al., 2011). Nelson & McMaster (2019) realizan una revisión sistemática sobre las intervenciones realizadas en el área. Sugieren que es igual de importante identificar factores de riesgo que generan brechas de aprendizaje como diseñar estrategias de trabajo para abordarlas. El bajo rendimiento en matemática durante la educación primaria puede predecirse si evaluamos las habilidades numéricas durante el transcurso de la educación inicial (Aunola et al., 2004 & Geary et al., 2013).

El sistema de representación numérica aproximada es innato en los seres humanos y en otras especies. En los últimos años, algunas corrientes dentro de la cognición numérica han comenzado a cuestionar dichos postulados. Proponen, por ejemplo, que el sistema de representación numérica preverbal podría no ser innato, sino que resultaría de un sistema de representación de magnitudes generales (Leibovich & Ansari, 2016 & Leibovich et al., 2017). Para poder disuadir la contradicción observada es que se han llevado a cabo una serie significativa de investigaciones que tuvieron como objetivo entrenar el SNA y observar la existencia de una posible transferencia hacia la aritmética simbólica, aunque sin resultados aún concluyentes (Szűcs & Myers, 2017).

Cheng & Li (2014) mediante un meta-análisis de estudios transversales (36 muestras, N = 4705) dan cuenta de una correlación positiva significativa entre la capacidad de aproximar cantidades no simbólicas y el rendimiento matemático simbólico. A su vez, informan que la asociación se mantuvo a pesar de ser considerados otros factores de estudio como, por ejemplo, las habilidades cognitivas generales. Los resultados de estudios de tipo longitudinales revelan que la agudeza en la discriminación del SNA es una buena predictora del rendimiento matemático posterior. Estas pruebas demuestran una asociación moderada pero estadísticamente significativa entre la agudeza aproximada y el rendimiento matemático formal. Para Halberda et al., (2008), la precisión del SNA se refina a lo largo de la vida, especialmente durante la edad escolar, alcanzando su máxima precisión alrededor de los 30 años. Starr et al., (2013) refuerzan el valor predictivo de la agudeza en SNA y el rendimiento matemático posterior.

En 2016, Matejko & Ansari publicaron un artículo en el que sugieren que no hay un consenso claro sobre cómo se desarrollan los sistemas de magnitud simbólicos (dígitos arábigos) y no simbólicos (puntitos) ni sobre la relación que existe entre ellos. En una serie de simposios llamados *Les mécanismes de l'intuition mathématique chez les êtres humains et les machines* recientemente organizados por el Stanislas Dehaene en Paris, el Dr. Ansari (2023), quien es autor de reconocidas investigaciones que cuestionan el rol del SNA en la matemática formal, se muestra cauteloso al cuestionar la dirección de la incidencia. ¿Es el SNA el que mejora el rendimiento en matemática simbólica o es el rendimiento en matemática simbólica el que mejora nuestro SNA o incluso ambos se refinan mutuamente? Los datos presentados por el Dr. Ansari en el mencionado simposio sugiere que es el rendimiento en matemática simbólica quien refina nuestro SNA. La revisión sistemática realizada por Szűcs & Myers (2017) da cuenta de resultados altamente controvertidos y de la falta de discusión con la literatura por lo que no obtienen resultados concluyentes sobre la subyacencia del SNA en la aritmética simbólica (Diaz et al., 2021).

Identificamos dos grandes posturas en relación al rol que cumple el SNA en el aprendizaje temprano de la matemática.

1. **Algunos investigadores (**Lipton & Spelke, 2005., Barth et al., 2009., & Mundy & Gilmore, 2009) plantean que los niños aprenden el significado de los símbolos numéricos a partir del "mapeo" que realizan de las magnitudes no simbólicas ya preexistentes. Los símbolos numéricos adquieren su significado a través de su relación con el sistema no simbólico. De este modo, se presenta al sistema aproximado como el encargado de sentar las bases del procesamiento de magnitudes simbólicas. Ello conlleva a algunos investigadores a entender que el éxito o fracaso en el aprendizaje de la aritmética podría depender en gran medida del SNA (Bonny & Lourenco, 2013., Halberda et al., & 2008 & Mazzocco et al., 2011) y que entrenar este sistema para refinarlo podría repercutir directamente sobre el aprendizaje de la aritmética (Hyde et al 2014., Park & Brannon, 2014., & Wang et al., 2016). En nuestro país, el grupo de cognición matemática suma sus investigaciones a la lista de quienes argumentan positivamente sobre la relación entre SNA y el rendimiento en aritmética. Sugieren que su entrenamiento podría favorecer el aprendizaje de la matemática (Valle Lisboa et al., 2017; Odick et al., 2016; Maiche, 2019).

2. **Un segundo grupo de investigadores,** proponen una relación bidireccional entre el SNA y la matemática simbólica. Trabajos como los de Le Corre & Carey (2007) proponen que, una vez creada la representación de los números exactos con cantidades

pequeñas, los niños comienzan a establecer conexiones entre el preexistente SNA y la nueva representación exacta de números mayores. Por tanto, se retroalimentan mutuamente el SNA y la matemática simbólica. Lyons et al. (2018) sugieren que el desarrollo de habilidades numéricas simbólicas puede influir en el desarrollo y fortalecimiento de las habilidades numéricas no simbólicas. Los resultados presentados por Lau et al. (2021) sugieren que el rendimiento en matemática simbólica es el predictor más fuerte del SNA, por tanto, es quien refina al SNA.

En otra línea se encuentran estudios como los de Singer (2016) según los que el SNA podría ser un predictor significativo del rendimiento en lectura y en aritmética. Este hallazgo sugiere que el SNA no sería una base cognitiva específica para el aprendizaje de la matemática simbólica, sino que podría interpretarse como una habilidad más general que se asocia también al rendimiento en otros dominios.

2.4 Favorecer el cálculo aproximado para fortalecer el cálculo exacto.

Realizar cálculos aproximados es un proceso que se encuentra siempre presente tanto en la vida de niños como de adultos. ¿Cuánto tiempo me tomará llegar a casa?; ¿Cuánto dinero costará la comida?; ¿Qué tan pesado es este objeto?; ¿Cuál es la distancia entre aquí y allá?; ¿Cuántas semanas tomará escribir este artículo? Sin la capacidad de realizar cálculos que nos permitan estimar con razonable precisión, la vida se volvería muy difícil.

En lo que respecta específicamente a los cálculos aproximados y el rendimiento matemático, se debate la incidencia de la habilidad para realizar cálculos aproximados en el rendimiento matemático de niños pequeños. Dentro de la aproximación, se distingue los cálculos que son de tipo no simbólico y simbólico. Autores como Barth et al. (2005) señalan que, niños y niñas que se encuentran en edad preescolar pueden comparar y agregar grandes conjuntos de elementos (más cantidad de elementos de los que se les suele enseñar a contar) sin contar, en una misma modalidad sensorial o en modalidades combinadas. Sus resultados indican que se desempeñan con éxito, sin recurrir a estrategias como adivinar. Su precisión variaba en función de la proporción de las cantidades, característica ya observada en bebés y animales. En las tareas de adición fueron tan precisos como en las tareas de comparación, a pesar de no haber sido entrenados en cálculo. Las autoras proponen que el conocimiento abstracto del número y la suma preceden y pueden guiar la instrucción matemática.

Pinheiro-Chagas et al. (2014) van un paso más allá e investigan las tres medidas de agudeza del SNA (comparación, estimación y adición no simbólica) así como también sus contribuciones específicas al cálculo exacto. Sus resultados refieren a una correlación significativa entre las tres medidas señaladas y el cálculo exacto. Es importante destacar que las mismas siguen siendo significativas a pesar de haber considerado variables más generales como la edad, la escolaridad, la inteligencia general y las habilidades ortográficas. En consecuencia, el vínculo entre las diferentes áreas del SNA y el cálculo exacto no parece ser generado por procesos cognitivos generales, sino por capacidades de procesamiento de magnitudes subyacentes a las tareas.

Gilmore et al. (2007), fueron pioneras en el área indagando la capacidad de realizar cálculos simbólicos (adición, sustracción y comparación de cantidades) aproximados en niños y niñas de 5 años que no fueron previamente instruidos para ello. Los niños y las niñas logran realizar con acierto operaciones con valores superiores a los propuestos en su currícula, siempre y cuando la respuesta sea aproximada. Ello trae aparejado que la aritmética simbólica está presente en los niños y en las niñas sin que suceda una instrucción explícita de algoritmos para manipular símbolos numéricos, pues se basan en representaciones numéricas no simbólicas y aproximadas para resolver los problemas simbólicos presentados.

Gilmore et al. en 2010 evalúan niños de educación inicial de diversos contextos socioeconómicos, sus habilidades aritméticas no simbólicas, el dominio de palabras numéricas y reconocimiento de símbolos arábigos a lo largo del año escolar. Se observa que el rendimiento en aritmética no simbólica predice el rendimiento matemático al final del año escolar, independientemente del rendimiento en lectura o inteligencia general. A su vez, el rendimiento aritmético también se relaciona con el dominio de las palabras numéricas y los símbolos. Por lo tanto, su investigación refiere a que las habilidades numéricas simbólicas y no simbólicas se encuentran vinculadas cuando los niños están en una etapa próxima al comienzo de la educación primaria.

En 2013, Xenidu-Dervou y colaboradores, tomando como referencia a Gilmore et al. (2007), investigan si niños y niñas que cursan educación inicial pueden realizar cálculos sencillos con numerosidades no simbólicas (puntos u objetos) y simbólicas (números arábigos) de manera aproximada. Sus resultados muestran que ambas tareas de CA (cálculo aproximado simbólico y cálculo aproximado no simbólico) se correlacionan con el logro en matemática. Para las autoras, la asociación entre la aproximación no simbólica y el logro matemático podría estar mediada por habilidades de aproximación simbólica. Xenidou-Dervou et al. (2018) continúan profundizando en el área y se cuestionan qué roles juegan las habilidades de comparación de magnitudes no simbólicas (p. ej., matrices de puntos) y simbólicas (p. ej., números arábigos) en el desarrollo de las habilidades matemáticas en niños y niñas de 5 y 6 años de edad. Sus resultados hacen referencia a que la comparación simbólica y no simbólica tienen diferentes trayectorias de desarrollo. Si bien ambas fueron predictores longitudinales del rendimiento matemático futuro de los niños y niñas (considerando además variables como el coeficiente intelectual y la memoria de trabajo), la comparación simbólica muestra mejoras superiores en el desarrollo de la competencia matemática. La comparación simbólica fue un predictor sólido y consistente de las matemáticas futuras a lo largo de los tres años.

Además de los datos empíricos aquí relevados, la investigación realizada por Mato-Vázquez & Muñoz-Cantero (2010) muestra que la forma en que se aborda la matemática durante los primeros años de escolarización es fundamental para prevenir una baja predisposición al aprendizaje de la matemática. Aluden a la metodología empleada en las aulas como una de las causas por las que los alumnos no se interesan por ella. Como alternativa didáctica que permita identificar de forma temprana niños en riesgo de tener dificultades en el área es que esta tesis de maestría propone la evaluación de las habilidades de CA como puntapié inicial para acompañar los diferentes procesos de aprendizaje.

En este sentido, si bien es cierto que la interrelación entre el rendimiento en tareas de CA y el logro matemático continúa siendo un área de estudio controvertida, los hallazgos expuestos intentan colaborar en nuestra comprensión acerca de la arquitectura cognitiva que subyace al éxito en matemática en niños y niñas que finalizan su educación inicial y comienzan su educación primaria, siendo este grupo de estudiantes quienes motivan la presente investigación.

2.5 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

Nos planteamos ahondar en la habilidad de CA como un posible predictor del rendimiento matemático posterior. El presente estudio tiene como fin la evaluación de habilidades aritméticas aproximadas (adiciones aproximadas) como predictoras del rendimiento matemático en niños que culminan nivel 5 de educación inicial y primer año de educación primaria.

OBJETIVOS:

Objetivo general

Evaluar el poder predictivo del cálculo aproximado en el rendimiento matemático de niños y niñas que se encuentran cursando nivel 5 de educación inicial y primer año escolar.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos son:

1. Desarrollar una tarea digital que describa el rendimiento de los sujetos en habilidades aritméticas aproximadas (CA: cálculo aproximado).
2. Estudiar la relación entre el puntaje de la tarea de CA y una prueba de rendimiento matemático.
3. Estimar la capacidad predictiva del cálculo aproximado en el rendimiento matemático.
4. Identificar los efectos CAS (cálculo aproximado simbólico) Y CANS (cálculo aproximado no simbólico) en el rendimiento matemático temprano.

CAPÍTULO 3: MATERIALES Y MÉTODO

3.1 ASPECTOS PREVIOS A TENER EN CUENTA EN UNA INVESTIGACIÓN EN CONTEXTO DE AULA

Realizar una investigación empírica en contexto educativo requiere de un trabajo previo, tanto con el equipo directivo como con el cuerpo docente implicado. Con el primero se generan acuerdos sobre qué se habilita a trabajar dentro de las aulas, se realiza una construcción conjunta de la información que se va a transmitir a las familias y, una vez culminado el trabajo de campo, se realiza una devolución a la dirección de la institución educativa. Con el cuerpo docente se busca generar un vínculo de confianza que promueva una respuesta receptiva a las propuestas a implementar. Se explicitan los detalles de la actividad, el tiempo requerido y la distribución de los estudiantes en el aula, así como el tipo de participación que se requiere de los docentes durante la intervención: cuándo pueden ayudar a un estudiante y cuándo no. Por último, se coordinan los días y tiempos que insumirá el trabajo de campo, siempre contemplando la grilla horaria de la institución educativa.

Otro capítulo se refiere a los aspectos éticos. El presente proyecto de investigación fue avalado por el Comité de Ética e Investigación de la Universidad de la República (ver anexo 1). Los datos recolectados se trataron de forma anónima y confidencial. Padre, madre o tutor recibieron una hoja informativa (ver anexo 2) que contenía los objetivos y procedimientos de la investigación. Se les invitó a participar del proyecto a través de la firma de un consentimiento informado (ver anexo 3). Los adultos responsables de cada uno de los estudiantes fueron notificados en cuanto a la posibilidad de retirar el consentimiento en cualquier momento de la investigación sin tener que dar explicación alguna. Para llevar a cabo el proceso de evaluación era condición necesaria que se encontrara firmado el consentimiento informado por al menos uno de los responsables de cada uno de los estudiantes.

3.2 PARTICIPANTES:

Participaron en este estudio un total de 135 niños y niñas de Nivel 5 y Primer año de Educación Primaria. Los participantes provenían de 3 centros educativos: 2 en Montevideo y 1 en Maldonado. Se excluyeron del estudio participantes con necesidades educativas especiales asociadas a trastornos en el desarrollo y/o problemas sensoriales (N=1), participantes cuya lengua madre no era el español (N=1) y aquellos estudiantes que no comprendieron la consigna (N=2). La muestra final, por tanto, queda conformada por un total de 131 escolares: 50 de ellos cursaban educación inicial (23 niñas y 27 niños) mientras que 81 cursaban primer año de educación primaria (34 niñas y 47 niños). La media de edad para Nivel 5 fue 73,45 meses con una DE=3.80; mientras que la media de edad para los estudiantes de primer año fue de 84,58 meses con un DE =4.32.

La elección de las escuelas se realizó mediante un muestreo por conveniencia debido a las condiciones de emergencia sanitaria que transitaba el país al momento de la evaluación (2020 y 2021). Por tal motivo participaron instituciones con las que ya teníamos establecido un vínculo, lo que facilitó la obtención de avales.

3.3 DISEÑO

Se lleva a cabo un diseño correlacional con una segunda medida de la variable dependiente al cabo de un año aproximadamente y una tercera medida dos años más tarde de la primera evaluación. Para ello se llevó adelante una primera evaluación en el año 2020 en la cual se utilizaron tres instrumentos diferentes: el test Tema-3 (Ginsburg et al., 2007), la prueba PUMa (Maiche et al., 2022) y las tareas de CA[1] inspiradas en Gilmore et al. (2007). Los niños y las niñas fueron evaluados con las tareas de CA una única vez a lo largo de este estudio.

Un año más tarde, en 2021, con el objetivo de indagar en el avance en el rendimiento matemático de los estudiantes, se volvieron a evaluar las competencias matemáticas de 78 estudiantes de los 131 participantes iniciales. El seguimiento de estos 78 estudiantes fue resultado de las diferentes vicisitudes relacionadas con la pandemia, cambios de residencia, viajes, cambios de institución educativa, entre otros. De estos 78 estudiantes, 32 cursan primer año en el 2021 (de los 50 que en 2020 cursaban inicial); mientras que 46 se encontraban cursando segundo año en el momento de la segunda evaluación (de los 81 que en 2020 cursaban primer año).

Dos años más tarde, en 2022, se vuelve a evaluar el rendimiento matemático de una submuestra inicial de 30 estudiantes (18 varones y 12 niñas) de los 81 que se evaluaron por primera vez en el año 2020 cuando cursaban primer año escolar. En este sentido, podemos considerar que la presente investigación se desarrolla en tres fases donde en la segunda y tercera

[1] Cada vez que hagamos referencia al constructo *Cálculo Aproximado* (CA) se hace referencia a las tareas de suma aproximada simbólica y no simbólica inspiradas en el trabajo de Gilmore et al. (2007) (ver descripción más adelante).

fase vuelve a ser indagado el rendimiento matemático de los y las estudiantes (prueba PUMa y pruebas de criterio).

3.4 Instrumentos

Para evaluar el rendimiento matemático general de los niños y niñas se utilizó la prueba PUMa (Maiche et al., 2022) que se aplica de manera grupal. Además, para comprobar la validez de la prueba PUMa, se aplicó concurrentemente el *Test of Early Mathematics Ability:* TEMA-3 (Ginsburg et al., 2007) a una submuestra de 86 estudiantes (42 pertenecientes a nivel 5 y 44 pertenecientes a primer año escolar).

Para la evaluación de la habilidad de CA, se utilizó una prueba diseñada específicamente para este estudio inspirada en el trabajo de Gilmore et al. (2007).

Evaluación del rendimiento matemático en Uruguay

A continuación, detallamos los resultados en el área de matemáticas que arrojan pruebas aplicadas a muestras de estudiantes representativas[2] de la población estudiantil uruguaya.

La OCDE entiende a la competencia matemática como:

> "la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar la Matemática en una variedad de contextos. Refiere a la capacidad de los individuos para razonar matemáticamente y usar conceptos matemáticos procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar, y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el rol que la Matemática juega en el mundo, a emitir juicios bien fundados y tomar decisiones que son necesarias en su vida como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos". (OCDE, 2013a: 37 en PISA, 2018)

[2] No existe actualmente en Uruguay ninguna prueba censal de evaluación de los aprendizajes.

En Uruguay, la evaluación PISA (destinada a estudiantes que estén cursando noveno) genera evidencia sobre la capacidad de los y las estudiantes para extrapolar lo que saben y aplicar su conocimiento matemático a situaciones nuevas y no familiares. Por tal motivo, las actividades presentadas hacen referencia a contextos de la vida cotidiana en las que es necesario poner en juego habilidades matemáticas para responder a las preguntas planteadas. Según los resultados de PISA 2018, el 51,6% de los y las estudiantes se ubicaron entre los niveles bajo y 1 (PISA-Uruguay, 2018). Por tanto, el porcentaje de estudiantes que no superan el umbral mínimo de competencia en matemáticas es superior al 50%, resultados que se han mantenido estables si tomamos como referencia el informe de PISA 2015 (52,4% por debajo del nivel 2) y PISA 2012 (55,7% por debajo del nivel 2). A nivel nacional, la prueba ARISTAS (2018) señala que el 62,8% de los estudiantes del tercero de educación media se encuentran en los niveles más bajos de rendimiento en matemáticas (niveles 1 y 2 de cinco niveles). Estos datos son coincidentes con los presentados anteriormente por PISA. A su vez, durante el ciclo básico de enseñanza media, la asignatura de Matemática es sistemáticamente la que presenta los resultados de aprobación más bajos (ANEP, 2018).

Las evaluaciones realizadas en el año 2017 a los estudiantes de tercero y sexto año de educación primaria a través de la prueba ARISTAS indican que, del total de estudiantes evaluados en ambos grados, el 42.5% se ubicaron en los niveles 1 y 2 de logro descritos por Aristas. En el año 2020, se vuelve a evaluar el rendimiento matemático de los y las estudiantes que estaban cursando los niveles de educación primaria anteriormente mencionados y, en este caso, el 40.6% se ubicó en los niveles 1 y 2 de logros descritos por Aristas (ARISTAS 2020). Los datos presentados dan cuenta de dificultades en matemática que se evalúan de forma tardía. Específicamente, del total de los niños evaluados en tercer año escolar por ARISTAS (2020), el 1,8% se ubicó en el nivel 1 (rendimiento muy desfavorable) y el 45,1% en el nivel 2 (desfavorable). Esto indica que casi la mitad de los niños que cursan tercer año escolar debieron haber sido identificados de forma más temprana para poder transitar por procesos de enseñanza-aprendizaje diferentes en los primeros años de educación y así haber encontrado experiencias de éxito y contenedoras. Este grupo de estudiantes debe estar puesto en el foco de nuestra atención. Su identificación tardía genera dificultades y vivencias de fracaso en su relación con la matemática para el futuro. La literatura existente sugiere que gran parte de los niños que comienzan su trayectoria escolar con niveles de rendimiento bajos para su edad persistirán a lo largo de su educación (de León & Maiche, en prensa).

A continuación, mencionamos otras herramientas que buscan colaborar con la evaluación del rendimiento matemático, pero que su aplicación es bajo circunstancias puntuales y en la órbita de las decisiones de cada institución educativa.

ANEP dispone de la plataforma SEA (Sistema de Evaluación de Aprendizajes), que permite evaluar los aprendizajes en distintas áreas a partir de 3er año de educación primaria. Sin embargo, estas se componen de evaluaciones formativas, que no buscan situar el rendimiento de los niños en relación a una escala nacional sino generar reflexiones sobre las prácticas de enseñanza en los maestros.

Con la intención de generar evaluaciones sistematizadas y baremadas, la Universidad Católica del Uruguay, desarrolla El Test de Eficacia en el Cálculo Aritmético (TECA) (Singer et al., 2014). Este evalúa la eficiencia aritmética en términos de precisión y velocidad, a través de combinaciones numéricas básicas. La prueba se encuentra baremada para niños que cursen desde 2do hasta 6to año escolar.

Por otro lado, la Universidad de la República ha diseñado el Inventario de Desarrollo Infantil (INDI) que tiene como finalidad la evaluación del desarrollo cognitivo general, desarrollo motor, desarrollo socioemocional y disposición para la escolarización para niños que se encuentran cursando nivel 3, 4 y 5 de educación inicial. Dado que su foco está en el desarrollo integral del individuo, la evaluación en el área de matemática es muy general sin considerar específicamente la medición de las habilidades matemáticas tempranas ni el avance en el rendimiento matemático (Vásquez et al., 2013).

El equipo de cognición Numérica de la Universidad de la República, en el afán de contribuir con instrumentos concretos que apunten a la identificación temprana de las dificultades en el aprendizaje de la matemática, crea PUMa: Prueba Uruguaya de Matemáticas[3]. Es una herramienta de evaluación del rendimiento matemático específicamente para estudiantes que se encuentran en nivel 5 de educación inicial y primer año de educación primaria (5 a 7 años). Su aplicación es digital y auto administrada, ideal para ser utilizada en contextos grupales. Es de fácil administración y genera un reporte para el docente con los resultados de manera inmediata. Es una herramienta que nos informa sobre el rendimiento matemático de los y las estudiantes y nos permite evaluar su avance (se puede aplicar en nivel 5 de educación inicial y en primer año de educación primaria).

A continuación, desarrollamos en profundidad las características de PUMa ya que es la herramienta de evaluación del rendimiento matemático más utilizada en este trabajo.

PRUEBA URUGUAYA DE MATEMÁTICA (PUMA):

Consiste en una prueba digital, auto-administrada en línea que permite la evaluación temprana de habilidades matemáticas en niños y niñas que cursan nivel 5 de educación inicial y primer año escolar. En la versión aplicada para este trabajo, la prueba se componía de 156 ítems y nueve subpruebas que se realizan en un tiempo aproximado de 25 minutos[4]. Las mismas se dividen principalmente en dos dimensiones: *PUMa simbólica,* compuesta por cinco subpruebas (serie numérica progresiva, serie numérica regresiva, transcodificación, cálculo visual y descomposición numérica), mediante ellas se evalúan las habilidades de los niños y las niñas para representar y manipular números arábigos; y *PUMa no simbólica* compuesto por

---

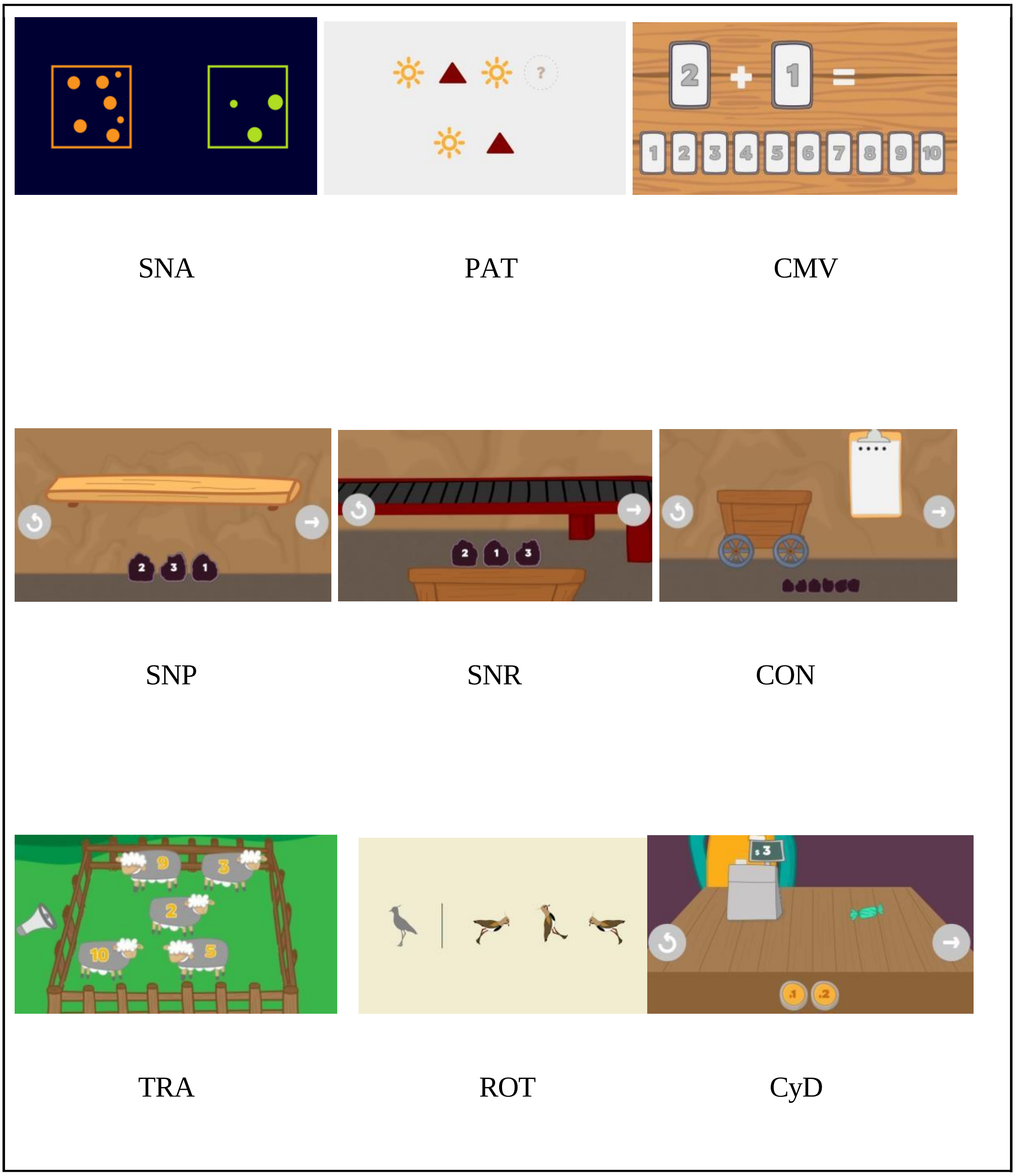
3 http://puma.cicea.uy/

4 La versión actual de PUMa que se está baremando para todo el país tiene sólo 76 ítems y 8 tareas. El tiempo de aplicación promedio es de 12 minutos. Cualquiera de las dos versiones de PUMa (completa o brief) pueden realizarse mediante el botón “Probar” de la web: puma.cicea.uy.

cuatro subpruebas (SNA, rotación mental, patrones y conteo) que evalúan habilidades de dominio general y de cuantificación aproximada y exacta, pero siempre sin la utilización de símbolos. En la prueba PUMa, mediante una metodología lúdica, el niño debe resolver ciertos desafíos con la ayuda de los personajes de la historia: Noa, Enzo y la maestra. Durante el transcurso de la actividad, se presentan tareas que buscan conocer el rendimiento de los niños y las niñas en los diferentes componentes cognitivos que resultan importantes para el aprendizaje de la matemática en los primeros años de escolarización. Cada tarea finaliza de forma automática a los 3 minutos de haberse iniciado, independientemente de la cantidad de respuestas que se hayan obtenido.

Figura 2

Subpruebas de la prueba PUMa. SNA: comparación de magnitudes; PAT: patrones; CMV: Cálculo Mental Visual, SNP: Serie Numérica Progresiva; SNR: Serie Numérica Regresiva; CON: Conteo; TRA: Transcodificación; ROT: Rotación Mental y CyD: Composición Numérica.



TEMA-3: Test of Early Mathematics Ability (Ginsburg et al., 2007)

TEMA-3 es una prueba estandarizada que permite evaluar el desarrollo de las habilidades matemáticas tempranas. Se utilizó la adaptación española realizada por TEA Ediciones en 2007. Esta prueba se puede aplicar en niños y niñas con edades comprendidas entre los 3 años 0 meses y los 8 años 11 meses. Para su aplicación, debe tomarse en cuenta su piso -o momento de comenzar- y el techo, donde finaliza el test para cada niño. El piso surge en función de la edad cronológica y el techo se alcanza luego de haberse equivocado 5 veces seguidas. Está compuesto por 72 ítems que evalúan aspectos formales (requiere el uso de símbolos matemáticos, convencionalismos, hechos numéricos, cálculo) e informales (los conceptos matemáticos que los niños y niñas conocen desde antes de ingresar a la escuela) del conocimiento matemático. Se obtiene un puntaje directo que se compone de un punto por ítem contestado correctamente. En función de su edad cronológica y el puntaje directo se calcula el índice de competencia matemática siendo este una puntuación estandarizada.

Pruebas de criterio

Por pruebas de criterio, hacemos referencia a las evaluaciones que realizaron los docentes responsables de los cursos para evaluar el rendimiento matemático alcanzado hacia final de año. Esta medida se utilizó únicamente en la tercera fase de evaluación (2022). Participaron 30 de los 81 estudiantes que cursaban primer año escolar en 2020. Se rigen por los objetivos de logro propuestos en el marco curricular y los contenidos abordados en su clase. Por tanto, son cualitativas y hacen énfasis en lo trabajado a lo largo del año en su clase, en este caso tercer año escolar.

TAREAS DE CÁLCULO APROXIMADO (CA)

Para evaluar la habilidad en CA de los participantes se administró una tarea de CA. La misma está conformada por dos sub tareas: la primera que se presenta es no-simbólica y a continuación, se presenta una sub tarea simbólica. Ambas tareas se componen de 24 ensayos cada una. La tarea de cálculo aproximado tiene un puntaje directo máximo de 48, 24 correspondientes a la tara de cálculo aproximado simbólico y 24 correspondientes a la tarea de cálculo aproximado no simbólico (ver ensayos en el anexo 4). Previo al inicio de cada subtarea, se presentan 3 ítems de prueba con retroalimentación orientadora. Las cantidades que ambas tareas presentan van desde 1 a 56. Es importante destacar que, si bien se tomaron insumos de Gilmore et al. (2007) para el diseño de las tareas, este proyecto de maestría fue un paso más allá digitalizando la propuesta y generando una sección que contempla la evaluación no simbólica del cálculo.

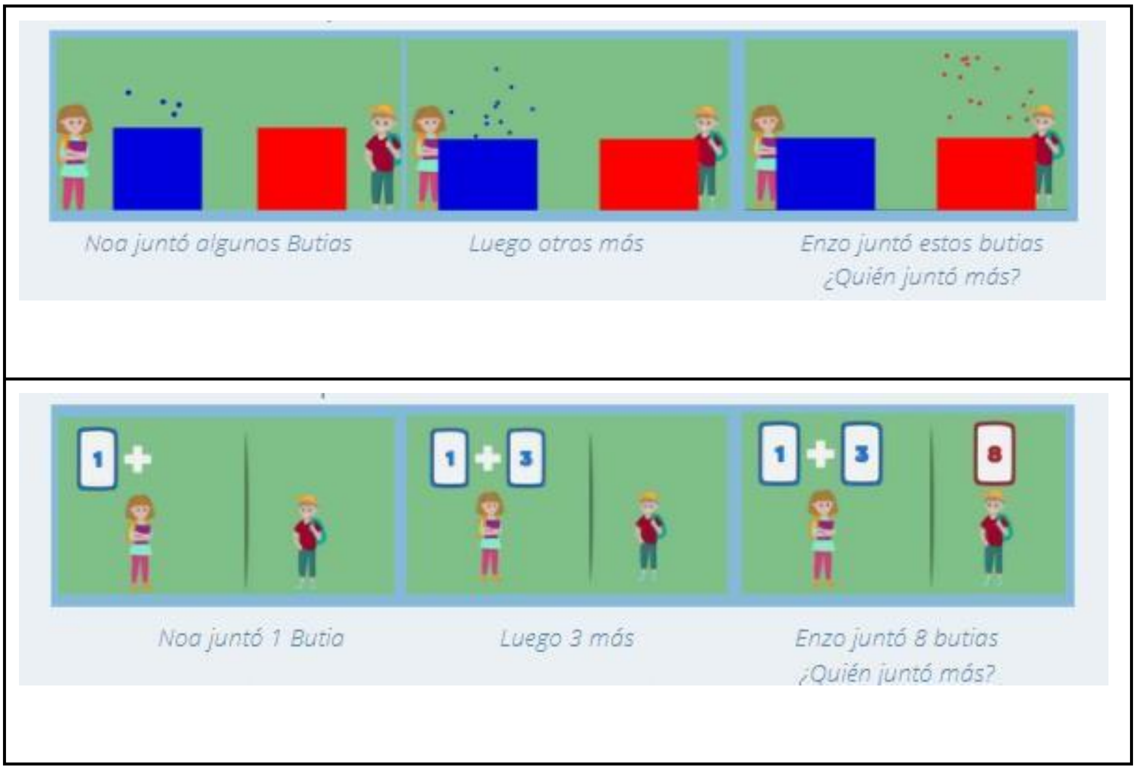
Al igual que la aplicación de la prueba PUMa, las tareas de CA son digitales, de aplicación individual dentro de un contexto grupal (cada niño con su tablet en contexto de aula). Simula un juego donde los estudiantes deben ayudar a resolver un desafío matemático. La propuesta busca aterrizar en el contexto de Uruguay, por lo que se enmarca en los palmares de Rocha (ecosistema declarado de interés por la Unesco en 1976) y la consigna refiere a la recolección de butiás, el fruto de las palmeras. El objetivo de la tarea es adicionar cantidades (primero en formato no simbólico y luego simbólico) y decidir qué personaje tiene mayor cantidad de butiás.

En la figura 3 se muestra un esquema que representa las 2 subtareas que los niños y las niñas realizan para la medición del CA. Cada una de ellas está dividida en 3 pantallas que hacen referencia a la sucesión de acciones que se le presentan al niño a la hora de brindar una respuesta.

Figura 3

Tareas para evaluar el CA *(inspiradas en Gilmore et al., 2007).*

En el panel superior se ilustra la sub tarea que refiere al cálculo no simbólico aproximado mientras que en el panel superior se representa una imagen típica de la subtarea de CA *simbólico*[5].



5 Se puede ver la simulación completa de las tareas de CA en los links siguientes. Se sugiere utilizar como escuela "equipo" y como usuario "otro". La tarea arranca cuando el niño hace click sobre la rueda trasera del bus CA no simbólico: **http://math.psico.edu.uy/cognum/puma/palmeras1-calculo-no-simbolico-aproximado.html**
CA simbólico: **http://math.psico.edu.uy/cognum/puma/palmeras1-calculo-simbolico-aproximado.html**

Tarea de Cálculo no simbólico aproximado (CANS)

En esta primera subtarea, los niños y niñas deben adicionar dos conjuntos de puntos azules presentados por separado y compararlo con un conjunto de puntos rojos que aparece posteriormente. El objetivo es determinar cuál es el conjunto de puntos más numeroso (la suma de los puntos azules o el conjunto de puntos rojos). A modo de ejemplo: se observa en la pantalla en el extremo derecho una caja azul junto con el personaje de Noa y en el extremo izquierdo una caja roja con el personaje de Enzo. Se escucha la voz de la maestra que dice: *"Noa juntó unos butiás"* (se observa cómo aparecen, se trasladan hasta encima del cuadrado azul y luego se esconden detrás de él algunos butiá azules), "*luego algunos más"* (mismo procedimiento, pero aparece un segundo agrupamiento de butiá azules). "*Enzo juntó estos butiá"* (aparecen butiá rojos que realizan el mismo procedimiento que los azules pero se esconden detrás de la caja roja). Finalmente, la maestra pregunta: *"¿Quién juntó más?"*.

Tarea de Cálculo simbólico aproximado (CAS)

La actividad propuesta ocurre a continuación de la tarea de cálculo no simbólico aproximado. La misma es análoga a la descrita anteriormente, la diferencia se encuentra en que, en este caso, los estímulos que deben manipular, son números. El objetivo de los niños y niñas es adicionar dos valores numéricos presentados en una tarjeta azul cada uno, y luego comparar esta suma con un tercer valor numérico presentado en una tarjeta roja, determinando cuál es mayor.

A modo de ejemplo se observa en la pantalla: en el extremo izquierdo, el personaje de Noa y en el extremo derecho, el personaje de Enzo, en la parte superior de la pantalla se observa un espacio, un signo de adición seguido y otro espacio. Se escucha la voz de la maestra que dice: *"Noa juntó 1 butiá"* (se observa que aparece el número 1 en el primer espacio), "*luego 3* *más"* (se observa que aparece el número 3 en el espacio contiguo al signo de adición). "*Enzo juntó 8 butiá"* (se observa que aparece el número 8 encima de la figura de Enzo). Finalmente se escucha la voz de la maestra que dice: "*¿Quién juntó más?"*.

3.5 PROCEDIMIENTO

Una vez acordado con las instituciones educativas la participación de los y las estudiantes, se llevó a cabo el trabajo de campo.

La primera fase se desarrolló en el último trimestre de 2020 donde se aplicaron los 3 instrumentos relativos a la fase 1: TEMA-3, PUMa y las tareas de CA (las cuales fueron evaluadas por única vez en 2020). TEMA-3 se administró de forma individual en los días previos a la evaluación grupal. Las últimas 2 se aplicaron el mismo día, dentro del aula y en simultáneo. Cada estudiante tenía una Tablet asignada. El tiempo total estimado de trabajo entre ambas tareas fue de una hora considerando el tiempo de explicación oral (ver figura 4).

Un año más tarde, se llevó adelante una segunda evaluación del rendimiento matemático, mediante la aplicación de herramienta PUMa. La misma se realizó dentro de las aulas y contó con la participación activa de las docentes referentes. Requirió una única sesión grupal de 40 minutos de duración donde se evaluaron a 78 de los 131 estudiantes que iniciaron este estudio debido a múltiples razones (cambios de residencia, viajes, cambios de institución educativa, entre otros). Dos años más tarde del inicio del estudio, en 2022, a través de pruebas de criterio diseñadas por las docentes del curso, se vuelve a evaluar el rendimiento matemático de 30 estudiantes (18 varones y 12 niñas) de los 81 que se evaluaron por primera vez en el año 2020 cuando cursaban primer año escolar.

Figura 4

La figura representa una de las instancias de evaluación llevadas a cabo dentro del contexto de aula. Panel A: Disposición en el aula para la evaluación grupal. Panel B: Niña realizando la actividad

La aplicación de la prueba PUMa se realiza en línea aprovechando las posibilidades de conectividad que tiene Uruguay. Se realiza una explicación grupal, utilizando como apoyatura el pizarrón para así, asegurar la comprensión de las consignas. A posteriori se le entrega a cada niño una tablet con sus correspondientes auriculares por donde se los guiará a través de todas las tareas con consignas específicas para cada parte de la evaluación.

La medición de las habilidades para el CA se realizó mediante la tarea descrita anteriormente. Luego de que todos los niños y niñas de la clase finalizan la prueba PUMa, el aplicador toma nuevamente le pizarrón para explicar que a continuación realizarán un nuevo juego, parecido al anterior. Se explica verbalmente la tarea y se realizan ensayos de prueba con posters, números móviles y puntitos móviles que el investigador esconde detrás de las cajas (roja y azul) simulando el juego que luego realizarían solos en la tablet. Se presentan dos ensayos de prueba (para cada subtarea, los mismos ensayos que se presentan de prueba en la tarea digital) en formato colectivo y se evacuan todas las dudas que surgen al respecto. Una vez que los investigadores se aseguran de la comprensión de la consigna, se recuerda que es una instancia de evaluación por lo que deben trabajar de forma individual y se comienza la tarea.

La fase 2 del estudio tiene lugar aproximadamente un año después de la medición de 2020. Se volvió a evaluar a través de la prueba PUMa el rendimiento matemático de los niños y las niñas en el mes de julio del 2021. Utilizando el mismo esquema de evaluación de la fase 1, se realizó dentro del contexto del aula bajo la supervisión de aplicadores y compañía de docentes referentes. Implicó una sola sesión de trabajo con una duración de 40 minutos aproximadamente.

La fase 3 sucede a finales del 2022 y se realiza mediante pruebas de criterio de los docentes. Se realiza en contexto de aula, bajo el diseño y la dirección de las docentes referentes (sin participación del investigador). Se selecciona esta técnica de recogida de datos ya que las habilidades y conocimientos de estudiantes en tercer año superan la sensibilidad de la prueba PUMa.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo, presentaremos inicialmente los resultados que validan la implementación de la prueba PUMa, instrumento de medida utilizado para evaluar las competencias matemáticas tempranas de este estudio, para luego describir los resultados específicos de nuestro trabajo de investigación.

Los resultados referidos a nuestro trabajo de investigación se encuentran organizados en función de las tres fases principales descritas anteriormente. En la fase 1, se muestran los datos relativos al estudio de correlación entre el CA y el rendimiento matemático (PUMa) realizado en 2020. En la fase 2, se presenta el análisis del poder predictivo del CA sobre el avance (diferencia en el puntaje directo de PUMa entre 2021 y 2020) en las competencias matemáticas de la mayoría de los niños que participaron en la fase 1 de nuestro estudio. La fase 3 refiere a lo evaluado en el 2022 (dos años después de la primera medición). Se realiza un análisis sobre el poder predictivo del CA sobre el avance en las competencias matemáticas de los niños que, en la fase 2, cursaban segundo año escolar.

4.1 RESULTADOS QUE VALIDAN LA IMPLEMENTACIÓN DE LA PRUEBA PUMA

Para poder evaluar de forma rápida y en un tiempo acotado el rendimiento matemático de niños y niñas que se encuentran al inicio de su escolarización fue necesario recurrir a un instrumento que nos permitiera realizar evaluaciones grupales. En la búsqueda de una posible solución, diseñamos la prueba PUMa (Maiche et al., 2022). Si bien PUMa se encuentra actualmente en proceso de baremación, los resultados de sus primeras aplicaciones (2020, 2021) sugieren que la misma posee altos índices de validación convergente con TEMA-3 (Ginsburg et al., 2007) ($r=0.803^{***}$, $n=187$). Además, cuenta con una buena consistencia interna y distribución de puntajes (α de Cronbach = .847, ω de McDonald= .898). A su vez, la prueba PUMa ha demostrado una correlación significativa con la edad ($r=0.514^{***}$, $n=338$) (San Román et al., 2021). Estos valores confirman que PUMa es una buena herramienta para evaluar el rendimiento matemático temprano por lo que, a partir de ahora, se trabajará a partir del puntaje obtenido en PUMa como variable dependiente que informa sobre el rendimiento matemático de nuestra muestra.

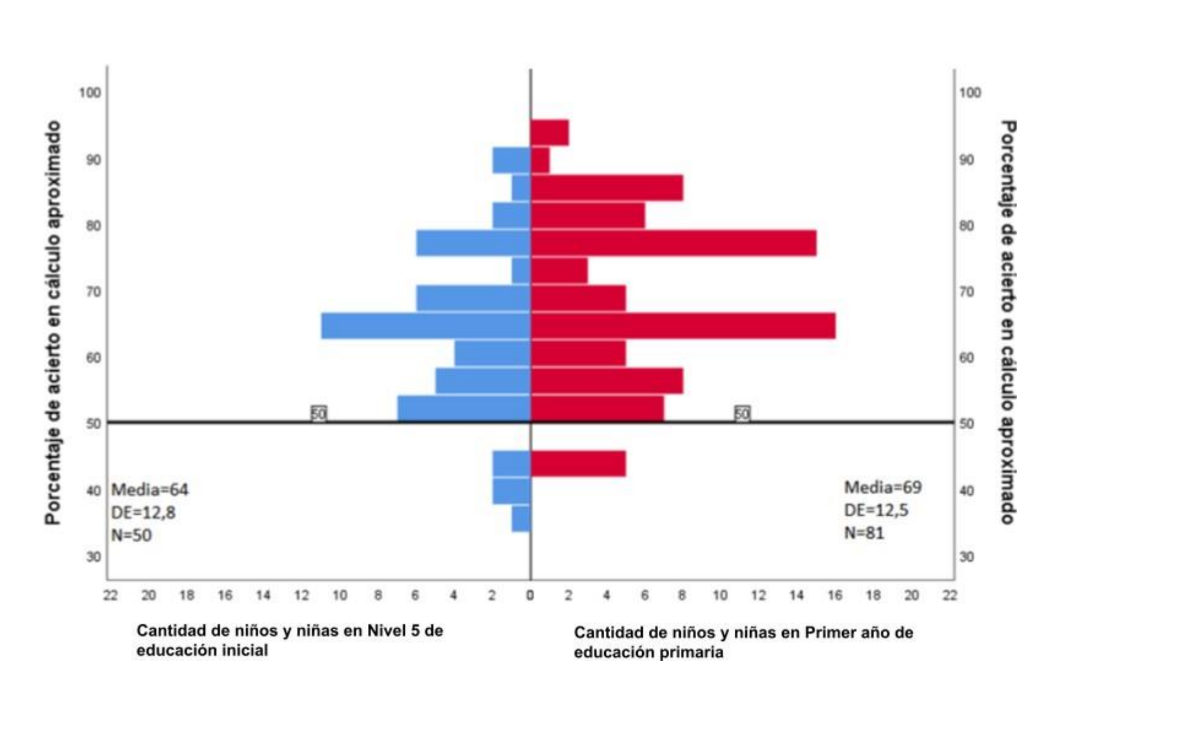
4.2. RESULTADOS DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

En 2007, Gilmore et al. proponen corroborar si efectivamente los niños y niñas logran manipular cantidades superiores a las propuestas en la currícula cuando se quita el requisito de exactitud en la respuesta. Esta tesis de maestría busca dar continuidad a dicha investigación e indagar sobre este tema en una muestra de niños uruguayos (fase 1), ampliando así el alcance del estudio realizado por Gilmore et al. en 2007. Asimismo, en este trabajo indagaremos en la comprensión de la relación entre el CA y el avance en rendimiento matemático uno y dos años después del estudio correlacional (fase 2 y 3).

Comenzamos por un análisis descriptivo de los resultados de la tarea CA. En la figura 5, se muestran las distribuciones del porcentaje de acierto en las tareas de CA para los 131 niños de la muestra.

Figura 5

Distribución del puntaje de CA en función del grado que cursan.



Como se puede observar, no hay grandes diferencias en los rendimientos de cada grado en esta tarea. Es importante notar que se trata de una tarea de elección forzada con dos alternativas y que, por tanto, la probabilidad de contestar de manera correcta por azar es del 50% en cada ensayo. En ese sentido, obsérvese que la gran mayoría de los sujetos obtuvieron puntuaciones con un acierto superior al 50% (véase Figura 5). Los niños y niñas de nivel 5 tuvieron un porcentaje de acierto medio del 64%, un 14% por encima del azar; mientras que los niños y niñas que cursaban primer año de educación primaria obtuvieron un porcentaje de acierto medio del 69%, un 19% por encima del azar. Si bien estos porcentajes son muy similares, existen diferencias significativas entre ambos grupos, (t (129)=-2.15; p = .03; d=-.39). Podemos decir entonces que ambos grupos emplearon estrategias de resolución que les permitieron desempeñarse cómodamente por encima del azar.

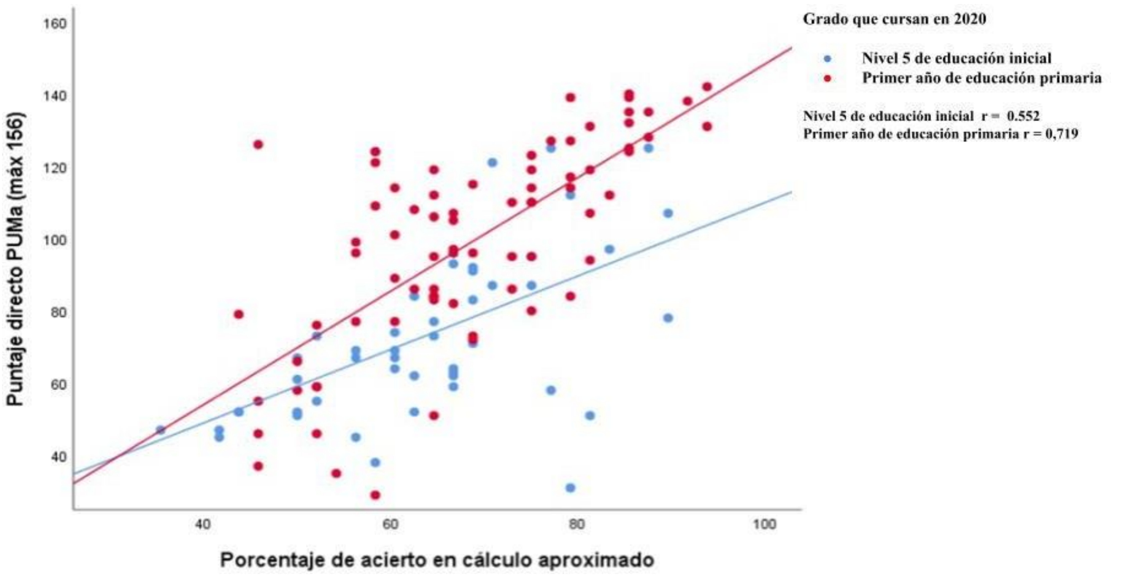
A continuación, con el propósito de indagar en la relación entre el *CA* y las habilidades matemáticas se presenta la correlación entre el porcentaje de acierto en la tarea de CA y el rendimiento obtenido en la prueba PUMa en cada grado (véase Figura 6).

Fase 1: Estudio correlacional

El estudio correlacional se llevó a cabo en el último trimestre del año 2020 en instituciones privadas de Montevideo y Maldonado. Una primera aproximación a los resultados obtenidos en CA en función del grado que cursaban las niñas y los niños evaluados, se presentó anteriormente en la Figura 5. En la Figura 6, se muestran las correlaciones de CA con la puntuación de PUMa para ambos grados. Como se puede apreciar, podemos decir que los y las estudiantes que poseen un adecuado manejo del CA tienen, a su vez, un buen rendimiento matemático. Por otro lado, el grado parece influir en la pendiente de la relación, si bien ambas son significativas, la relación entre las variables para los dos grupos parece ser diferente. A mejor porcentaje de acierto en CA, los estudiantes de Nivel 5 mejoran más rápido su rendimiento en la prueba PUMa.

Figura 6

Correlaciones entre la variable porcentaje de acierto en CA y la variable rendimiento matemático (medida a través de PUMa) para nivel 5 y primer año en 2020.



Ambos grupos de estudiantes obtienen correlaciones positivas entre las variables, a mejor rendimiento en cálculo aproximado, mejor rendimiento matemático. El grupo de niños y niñas que se encuentran cursando primer año escolar, son quienes obtienen una mejor correlación. Con la intención de continuar profundizando en la relación entre el CA[6] y el rendimiento matemático, se divide por un lado el CA en sus dos componentes: CAS y CANS. A su vez, la puntuación global de PUMa se subdivide en función de sus dos grandes dimensiones: PS y PNS.

[6] Recuérdese que, tal como se dice en la página 40, se realiza una única evaluación de las tareas de cálculo aproximado. Por tal razón, no se especifica en la Figura el año en que fueron los estudiantes evaluados.

Tabla 1

Correlación de Pearson entre las variables: Porcentaje de acierto entre (CAS y CANS) y *la variable rendimiento matemático* (PUMa, *PS y PNS) para nivel 5 y primer año en 2020.*

	CANS (Cálculo aprox. No Simbólico)	CAS (Cálculo aprox. Simbólico)
	PUMa TOTAL	
Nivel 5	0.339*	0.626**
Primer año	0.470**	0.644**
	PUMa NO SIMBÓLICO	
Nivel 5	0.225	0.311*
Primer año	0.360**	0.479**
	PUMa SIMBÓLICO	
Nivel 5	.440**	.741**
Primer año	.527**	.779**

Nota. *: $p < .05$. **: $p < .01$

Los resultados obtenidos señalan que el CA correlaciona de forma significativa con el rendimiento matemático evaluado a través de PUMa. Las correlaciones entre el CAS y PUMa son más altas que a las correlaciones entre CANS y PUMa. Sin embargo, las correlaciones obtenidas para el CANS son, en su amplia mayoría, positivas y significativas con PUMa (global, PS y PNS), salvo para el caso del PNS en nivel 5. Estos resultados nos permiten inferir que el CANS se relaciona con la dimensión simbólica del aprendizaje (PS).

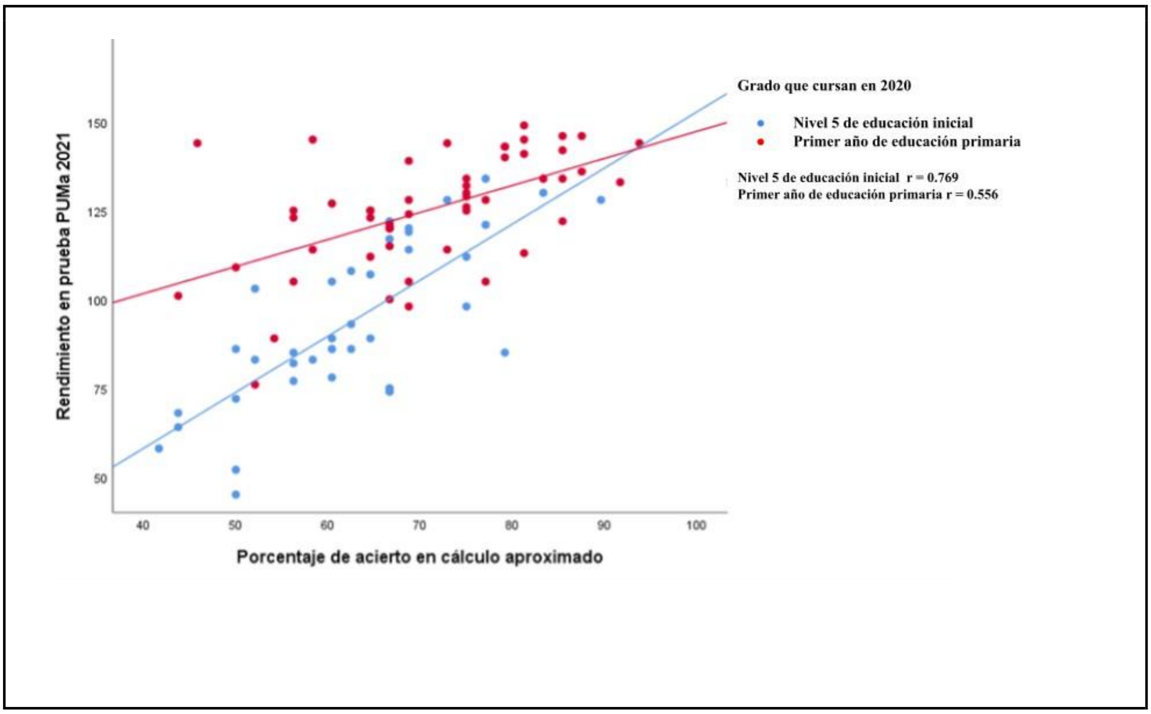
Esta tesis de maestría busca indagar si la correlación entre los componentes del CA (CAS y CANS) y las dimensiones del rendimiento matemático (PS y PNS) se reflejan a posteriori en los aprendizajes de matemática. Bajo esta premisa se realiza un seguimiento en el tiempo (hasta dos años) del rendimiento matemático de las niñas y los niños evaluados en esta primera fase del proyecto.

FASE 2: SEGUIMIENTO DE LA MUESTRA UN AÑO DESPUÉS.

Con el objetivo de continuar indagando la importancia del desarrollo del CA durante la educación inicial y al ingreso de la educación primaria, se volvió a evaluar el rendimiento matemático de 78 de los 131 estudiantes iniciales un año más tarde. En el año 2021 nuestra muestra de estudiantes se encontraba cursando primer y segundo año escolar.

Figura 7

Correlaciones entre las variables: Rendimiento en la prueba PUMa 2021 y porcentaje de acierto en CA (compuesto por CAS y CANS[7]).



[7] Téngase en cuenta que, siempre que nos referimos al grado que cursan los estudiantes, tomamos como referencia el momento en que fueron evaluados por primera vez (2020). En 2021 la muestra de estudiantes cursaba primer y segundo año escolar.

En la Figura 7 se puede observar que se mantienen las altas correlaciones para ambos grados a pesar de que las variables a correlacionar (rendimiento matemático 2021 y CA 2020) refieren a años diferentes. Los y las estudiantes que obtuvieron un buen rendimiento en CA en 2020, obtuvieron también un buen desempeño en la evaluación de rendimiento matemático en 2021. Es interesante mencionar que la correlación más fuerte se obtiene para el grupo que cursa primer año en 2021 (en la gráfica representado por Nivel 5 en 2020), siendo ello consistente con las correlaciones que se muestran en la Figura 6 (la cual también indica que la mejor correlación es para el grupo de los y las estudiantes que cursaban primer año, pero en el año 2020). Las correlaciones son muy similares a pesar de que en la Figura 7 se muestran las correlaciones de CA (medido en 2020) con las puntuaciones de PUMa en 2021. Ello nos permite sacar **como primera conclusión que las altas correlaciones para primer año entre el CA y el rendimiento matemático son independientes a la muestra de niños evaluados.** Dicha conclusión es un gran insumo para considerar que el CA tiene una gran capacidad predictiva sobre el rendimiento matemático en primer año escolar.

En la misma línea que los análisis realizados en la fase 1 volvemos a descomponer las variables en sus componentes simbólicos y no simbólicos con la intención de analizar si se observan diferencias en función del grado.

Tabla 2

Correlación de Pearson entre las variables: Porcentaje de acierto entre (CAS y CANS) y la variable rendimiento matemático (PUMa, PS y PNS) para primer y segundo año escolar en 2021.

	CANS (Cálculo aprox. No Simbólico)	CAS (Cálculo aprox. Simbólico)
	PUMa TOTAL	
Primer año	0.582* *	0.661**
Segundo año	0.362**	0.711**
	PUMa NO SIMBÓLICO	
Primer año	0.535**	0.244
Segundo año	0.357*	0.297*
	PUMa SIMBÓLICO	
Primer año	0.524**	0.674**
Segundo año	0.091	0.345*

Nota. *: $p < .05$. **: $p < .01$

Para el grupo de los y las estudiantes que cursaron primer año en 2021, las correlaciones entre PUMa (PS y PNS) y CA (CAS y CANS) son -en su gran mayoría- positivas y significativas al igual que en la tabla 1. Para los estudiantes de primer año, el único caso en el que el CA no correlaciona con el rendimiento matemático es cuando nos referimos específicamente a la correlación entre CAS y PNS.

Para el grupo de estudiantes que cursaba segundo año escolar en 2021 también se muestran, aunque en menor medida, buenas correlaciones entre su desempeño en cálculo aproximado y su rendimiento matemático global (PUMa). No se halla correlación entre el CANS y PS.

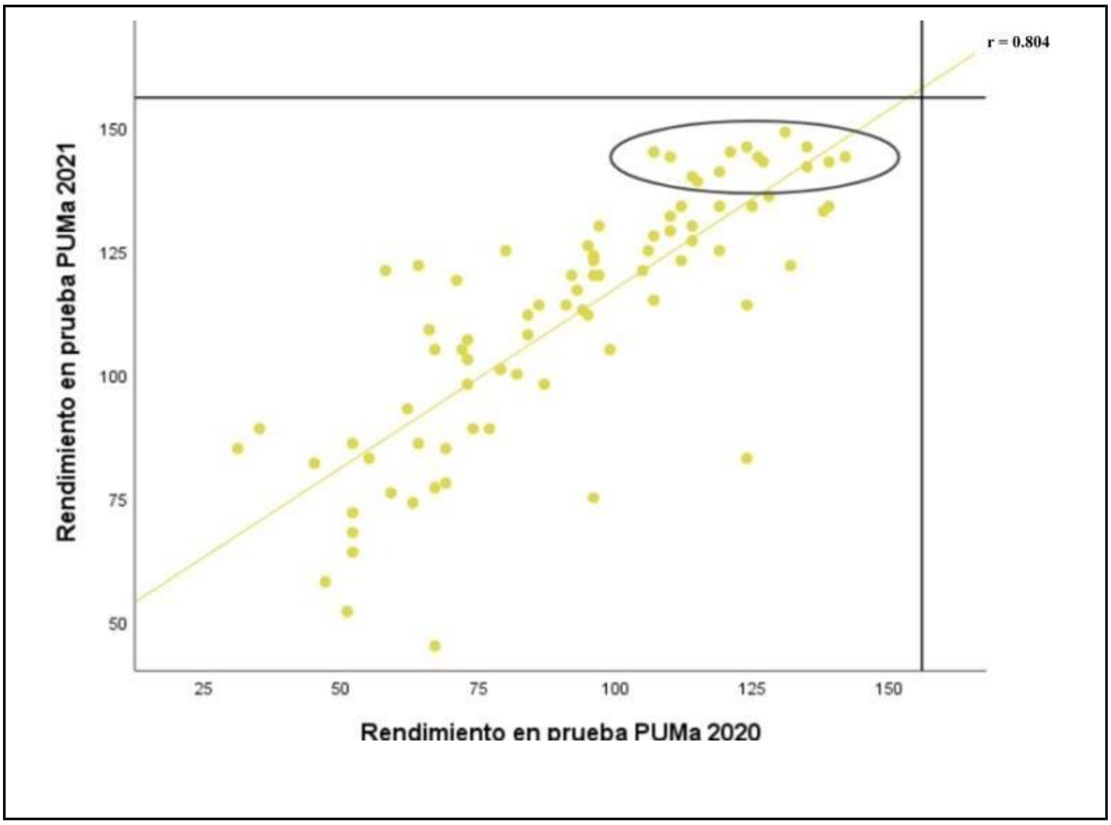
Aprovechando la posibilidad de contar con las puntuaciones en el rendimiento matemático de 78 estudiantes (evaluados en dos instancias diferentes: la primera en 2020 y la segunda en 2021), nos pareció interesante estudiar la variable avance en el rendimiento matemático en función de las puntuaciones obtenidas en cálculo aproximado. Esta última variable podría arrojar información valiosa para el sistema educativo. Independientemente de los resultados obtenidos en una medida inicial, entendemos que es importante estudiar, si el avance de los estudiantes (entendido en esta tesis de maestría como la mejora en el rendimiento matemático a través de la prueba PUMa), puede estar relacionado con la variable cálculo aproximado.

Es por todo lo antes mencionado que nos cuestionamos: ¿El avance que tuvieron los niños en su rendimiento matemático en el transcurso de un año escolar se relaciona, de alguna manera, con su rendimiento inicial en CA?

Para analizar la variable avance, fue necesario corroborar la estabilidad de la medida del rendimiento matemático con un año de diferencia. La Figura 8 informa una fuerte correlación lineal entre los puntajes de PUMa 2020 y PUMa 2021. Sin embargo, obsérvese que hay un grupo de estudiantes que en el año 2020 habían obtenido puntuaciones directas de entre 120 y 140 puntos (siendo 156 el máximo posible en esta versión de PUMa) que en la evaluación de 2021 están cercanos al máximo posible (óvalo en la Figura). Ello nos muestra que la aplicación de PUMa, para este grupo de estudiantes, no es lo suficientemente sensible por lo que dichos estudiantes contaban con poca posibilidad de crecimiento de utilizar la misma herramienta para evaluarlos un año después. Para paliar dicha situación se solicita colaboración de expertos en estadística para el diseño de una variable que explique el crecimiento real de los y las estudiantes al cabo de un año.

Figura 8

Correlación entre los resultados obtenidos en PUMa 2020 y PUMa 2021

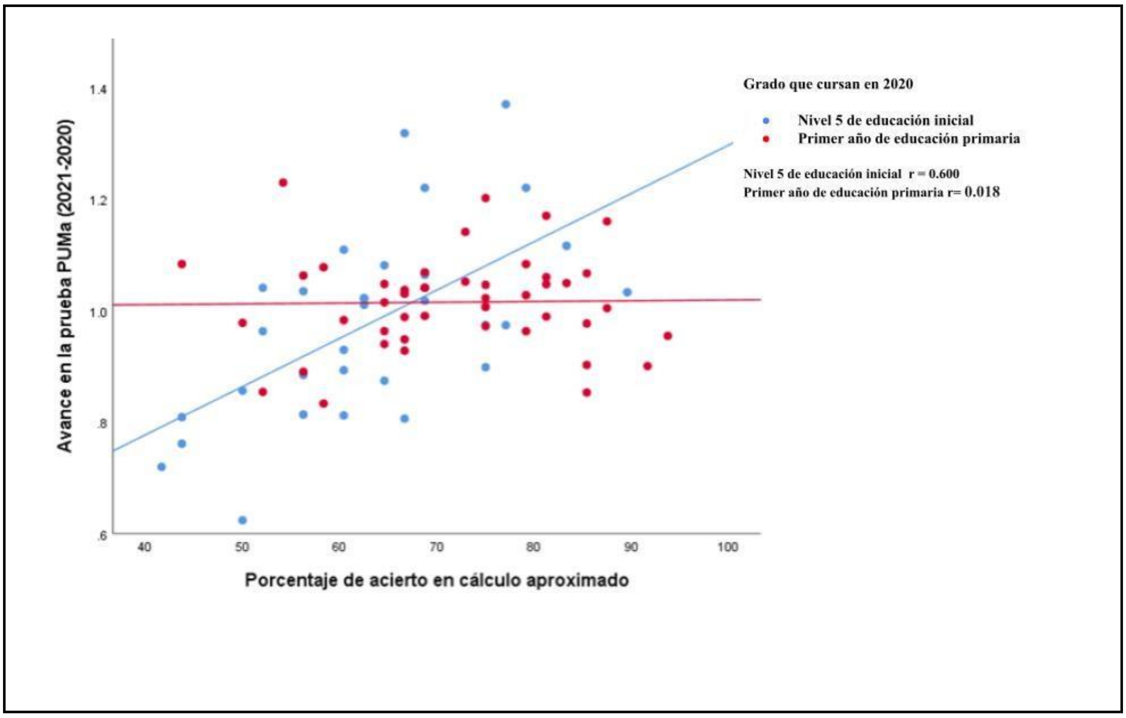


A los efectos de analizar los avances de todos los estudiantes implicados en el estudio, considerando la posibilidad de que algunos estudiantes tuvieran saturada su puntuación en 2021, se realizó una regresión lineal con variable independiente PUMa 2020 y como variable dependiente se consideró el log (PUMa 2021 + α). El valor de α se determinó como aquel que maximiza la verosimilitud del modelo. Se utilizó la función *logtrans* de R Studio 1.3.1093 (Team, 2020). El valor hallado de alfa fue 430. Para obtener el valor esperado de PUMa 2021 se usó *PUMa 2021= eŷ-α* siendo ŷ el valor predicho por el modelo transformado. La Figura 9 muestra como variable dependiente al avance en PUMa medido como la proporción del puntaje realmente obtenido en 2021 sobre el puntaje esperado por el modelo. Nótese que proporciones mayores a 1 implican haber obtenido puntuaciones por encima del puntaje esperado según el modelo antes mencionado. Por otro lado, proporciones menores a 1 indican que el puntaje real obtenido por el sujeto en 2021 es menor al esperado por el modelo. Para obtener mayor información de las transformaciones del modelo ver anexo 5.

A continuación, se analiza el avance en el rendimiento matemático a partir de las puntuaciones transformadas de PUMa que representan el avance real en rendimiento matemático en función de la puntuación obtenida inicialmente en *CA*.

Figura 9

Avance en la prueba PUMa (2021-2020), en función del porcentaje de acierto en cálculo aproximado dividido por grado (nivel 5 de educación inicial y de primer año escolar evaluados con PUMa en 2020 y en 2021, n=78).



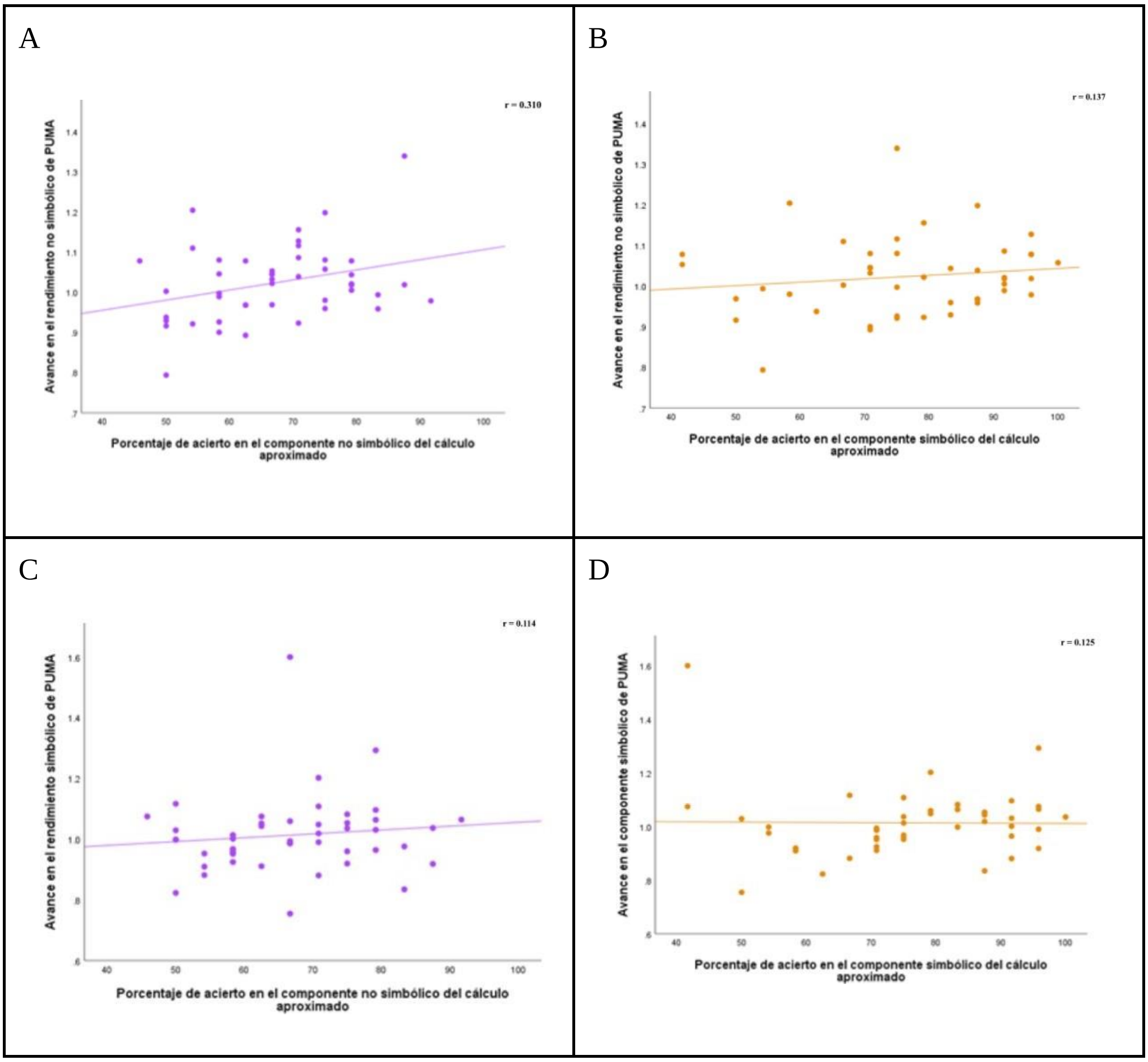
La Figura 9 muestra las correlaciones entre el porcentaje de acierto del *CA* y el avance en el rendimiento matemático entre 2020 y 2021. Se observa que *el CA* es un buen predictor del avance en el rendimiento matemático global un año más tarde, **sólo para los niños que cursaban nivel 5 en 2020** (F(1,30)= 16.90, p < .001, r= 0.60). Sin embargo, el *CA* no parece ser buen predictor del avance en el rendimiento matemático para quienes cursaban primer año en 2020 (F(1,44)= .02, p = .90, r =0.018). Los resultados son contundentes para el grupo de los y las estudiantes que se encontraban cursando educación inicial en 2020, los mismos evidencian que el rendimiento en CA en la educación inicial, explica buena parte de la varianza (36%) del avance que tendrán esos niños en el rendimiento matemático un año más tarde, es decir mientras cursan primer grado escolar. Contrariamente a ello, se observa que la performance en CA de los niños y niñas que en 2020 cursaban primer año de educación primaria no explica el avance en el rendimiento matemático un año después (en segundo) a pesar de la correlación significativa con la prueba PUMa aplicada en 2021 (ver Figura 7). La implicancia de estos resultados se discutirá más adelante, pero una primera conclusión implica asumir que el CA podría ser un elemento importante para favorecer al rendimiento matemático previo al ingreso a primaria. La correlación entre el CA y el avance en PUMa (r=0.600; $p < .01$) cuando los niños son evaluados por PUMa durante educación inicial, nos hace pensar que, un adecuado manejo del CA podría colaborar con el desarrollo de competencias matemáticas necesarias para el comienzo de la escolarización. Sin embargo, realizar cálculos aproximados, no parece ser determinante para el avance en las competencias matemáticas, una vez iniciado el primer año escolar.

Ahora bien, ¿existe algún componente del CA que permita en primer año predecir el avance en el rendimiento matemático un año después? Los siguientes análisis buscan dar respuesta a esta interrogante analizando exclusivamente los resultados de 46 niños y niñas que fueron evaluados por primera vez cuando cursaban primer año escolar en 2020.

Figura 10

Correlaciones entre las subtareas de CA: CAS y CANS y la variable avance en rendimiento matemático: APS y APNS para segundo año escolar en 2021.

(A): Correlación entre la puntuación obtenida en CANS y APNS. (B): Correlación entre la puntuación obtenida en el componente simbólico del CA y APNS. (C): Correlación entre CANS y APS. (D): Correlación entre la puntuación obtenida en CAS y APS.



A partir del análisis de cada componente del CA es posible profundizar en el resultado que muestra la Figura 10 para los niños que cursaron primer año en 2020. Como se observa en la Figura 10A, el CANS es un predictor del avance (un año después) en PNS. Se observa una correlación significativa entre el CANS y el avance en el PNS (r=0.310*; p < .05), mientras que para el resto de las combinaciones no se observa significancia en las correlaciones (ver

Figura 10B, 10C, 10D). La Figura 10A muestra que, un buen nivel en el componente no simbólico del CA, incluso para los niños de primer grado, incide en el avance del rendimiento matemático entre el primer y el segundo año escolar. Cabe preguntarse entonces si

¿Es el CANS un buen predictor del rendimiento matemático posterior pero su efecto requiere mayor cantidad de tiempo para ser visible?

Para asegurarnos de ello seguimos la trayectoria de aprendizaje de 31 niños y niñas de los evaluados por primera vez en primer año escolar en 2020. Para ello consultamos a sus maestras actuales sus notas de promoción en el área matemática.

Resultados obtenidos 2 años después de evaluación inicial (2022)

En la búsqueda de una posible explicación a los resultados de la Figura 10A y tratando de entablar una conexión entre el rendimiento en CANS y el avance en el rendimiento matemático que explique el avance observado en PNS durante la fase dos de este estudio, es que se realiza una nueva evaluación en el año 2022. Se pretende indagar si los resultados obtenidos en CANS en 2020 podrían predecir el avance del rendimiento matemático general en 31 de los y las 47 estudiantes que se encontraban culminando tercer año escolar, dos años después de la primera evaluación. En esta ocasión se toma como medida de evaluación, la valoración cualitativa en matemáticas que realizan las maestras referentes en el último período del año lectivo.

Los resultados obtenidos no corroboran la hipótesis planteada, los estudiantes que avanzaron más en los últimos dos años fueron quienes obtuvieron puntuaciones más altas en CAS y no en CANS en 2020. No fue posible identificar transferencia alguna entre rendimiento en CANS y el rendimiento escolar en matemática de tercer año (en función de las pruebas de criterio del juicio docente).

La pequeña cantidad de estudiantes que participaba de esta última fase, las características de la prueba y fundamentalmente las diferencias con la técnica utilizada en las dos etapas anteriores (prueba PUMa) hacen que los presentes resultados no permitan sacar conclusiones generalizables. Los mismos son una pequeña primera aproximación a posibles resultados que podrán corroborarse en futuras investigaciones.

CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN

La presente investigación se ha centrado en estudiar la relación del cálculo aproximado con el rendimiento matemático posterior, en niños y niñas de nivel 5 de educación inicial y de primer año de educación primaria. Se llevó a cabo un diseño correlacional, tomando tres medidas a lo largo del tiempo para así evaluar el avance en el rendimiento matemático y la incidencia del CA en el rendimiento matemático escolar. La importancia de la evaluación del CA se debe a que, de adquirirse la habilidad exitosamente, sienta bases para un adecuado desarrollo de las competencias matemáticas posteriores. Los mecanismos que se encuentran detrás del cálculo aproximado permiten la comprensión del funcionamiento los números, al desarrollo de una línea numérica mental y el concepto de magnitud. Un adecuado desarrollo del cálculo aproximado nos permite verificar si se está brindando una respuesta razonable a cierto cálculo exacto (por ejemplo, el resultado de una resta nunca puede ser superior al minuendo), estimar el resultado de nuestras operaciones nos permite determinar si el resultado exacto alcanzado tiene sentido. El desarrollo de estas habilidades significa un ahorro de tiempo y recursos. El cálculo aproximado nos permite obtener una respuesta rápida y útil sin invertir demasiado tiempo y recursos. Muchas veces la sobrecarga de memoria de trabajo deriva en errores procedimentales que, sin una adecuada capacidad estimativa pueden pasar inadvertidos por el estudiante.

A continuación, se discuten los resultados obtenidos y sus implicancias a nivel educativo.

En primer lugar, se observa que los niños y las niñas que cursan nivel 5 de educación inicial tienen -como sugiere Gilmore et al. (2007 y 2010)- un rendimiento matemático superior al esperado cuando las propuestas de trabajo no requieren una respuesta exacta. A partir de resultados de esta índole es que coincidimos con los autores que vinculan el rendimiento de los niños y niñas en tareas de CA con aspectos innatos para el aprendizaje de la matemática. En otras palabras, estos resultados quizás dejen entrever que, detrás de ellos se encuentra lo que Spelke (2000) define como *sistemas nucleares de conocimiento*. En este caso, nos referimos al sistema nuclear relativo al número (Spelke, 2000). Los postulados anunciados por la autora refieren a la existencia de representaciones primitivas de la cantidad, mediante las cuales el niño puede realizar operaciones aritméticas sin previa instrucción explícita.

Siguiendo con los resultados obtenidos los y las estudiantes que cursaban primer año escolar se desempeñaron en CA de forma similar a quienes se encontraban cursando nivel 5 de educación inicial. Una posible explicación podría ser que, los niños y las niñas que cursaban en ese entonces primer año tuvieron una escasa enseñanza explícita de las cantidades manipuladas -a consecuencia de la pandemia de Covid 19-, por lo que el desafío cognitivo era similar para ambos grupos de estudiantes. Otra posible explicación es que los porcentajes de acierto en la generación de nivel 5 fueron más altos de lo esperado. Ello nos hace reflexionar, como se ha mencionado en el capítulo de resultados, que para los niños evaluados en primer año, posiblemente faltaron estímulos más complejos que los desafiaran aún más y les permitiera tener un margen mayor para mejorar.

En cuanto a las correlaciones significativas halladas entre el CA y el rendimiento matemático, estas informan que cuando los niños y las niñas rinden satisfactoriamente en las evaluaciones de CA, poseen a su vez un buen rendimiento general en matemática y viceversa. De alguna manera, conociendo el rendimiento de nuestros estudiantes en alguna de las dos variables trabajadas podríamos inferir su rendimiento en la otra. Esto último es un aporte directo al campo educativo. Implementar múltiples evaluaciones de este tipo, podría ser información suficiente para comenzar una estimulación temprana sistemática, en caso de obtener resultados descendidos en el CA.

Otro aspecto interesante de dicha correlación es que se sostiene al cabo de un año independientemente de la muestra (ver Figura 6 y 7). Este resultado nos podría estar hablando de la gran capacidad predictiva del CA para el rendimiento matemático en primer año escolar.

Con el objetivo de continuar profundizando en dichas correlaciones se procede a indagar el valor predictivo del CA en el rendimiento matemático posterior. Este último es, sin lugar a dudas, el resultado más importante a destacar en esta memoria de tesis. La habilidad que los niños y niñas emplean para realizar CA parece ser un buen predictor del avance en el rendimiento matemático, si se hace referencia únicamente a aquellos niños de la muestra que se encuentran cursando educación inicial.

Para el subgrupo de la muestra que fue evaluado por primera vez mientras cursaba nivel 5 de educación inicial, la variable CA explica un 36% de la varianza del avance en rendimiento matemático un año después. Sobre este resultado se sustentan nuestras reflexiones en cuanto a que dicha variable podría ser un buen predictor del avance en matemática, si esta se evalúa previo al ingreso a la educación primaria. Estos resultados se encuentran alineados a la evidencia científica en el área. Esta sugiere que la habilidad de procesamiento y comparación de magnitudes numéricas es clave para predecir el desarrollo matemático, así como lo es la conciencia fonológica para predecir los procesos lectores (Vanbinst et al., 2016., Gilmore et al., 2010., & Xenidou-Dervou et al., 2013 y 2018).

No es posible concluir lo mismo de la submuestra que fue evaluada durante su primer año escolar. Allí la variable cálculo aproximado no permite predecir el avance en matemática un año después. A nuestro criterio, esta diferencia puede suceder por diversos factores explicados a continuación. Los niños y niñas de primer año de educación primaria están expuestos en sus jornadas escolares a las matemáticas simbólicas por lo que la evaluación del CA una vez comenzado el primer año escolar podría resultar tardía para obtener información que permita predecir el avance en el rendimiento matemático simbólico. En la misma línea, investigaciones recientes como las de Guillaume et al. (2013) señalan que, si bien durante los primeros años de vida la maduración del cerebro es responsable de esta evolución, la educación escolar juega un papel clave en el aumento de la discriminación numérica más adelante. En pocas palabras, se podría decir entonces que la maduración y la educación escolar agudizan progresivamente la representación interna de la numerosidad.

Un segundo argumento que podría explicar el resultado de este grupo de niños es la baja complejidad de la propuesta. Se empleó el mismo rango numérico en ambas generaciones, seguramente, para este subgrupo de la muestra los CA propuestos no fueron tan desafiantes. Quizás con ensayos conformados por cantidades de tres o cuatro cifras (valores muy poco trabajados en el grado escolar que cursaban), u operaciones aritméticas más complejas como ser la resta, se hubiera observado cierta predicción del rendimiento matemático un año más tarde. Realizar esta variante podría ser una oportunidad en un futuro diseño de investigación.

En tercer lugar y cómo último argumento, los resultados obtenidos se vinculan directamente con la evidencia empírica sobre el desarrollo de los procesos que implican la conceptualización del número. Algunos patrones de respuesta en tareas de estimación aproximada de cantidades se modifican significativamente con la entrada de la escolarización formal debido a las experiencias en el sistema educativo relacionadas al aprendizaje y manipulación de símbolos numéricos. (Siegler & Booth, 2004., Halberda & Feigerson, 2008).

Dado que los resultados en nivel 5 señalan con claridad la capacidad predictiva del CA en el rendimiento matemático posterior y la controversia respecto a los resultados obtenidos en primer año escolar, se decidió profundizar específicamente en estos últimos con el fin de encontrar nuevas explicaciones a través del desglose de los datos recabados. Por esta razón, se indaga el valor predictivo de cada uno de los componentes del CA: CAS y CANS en función del rendimiento matemático (PUMa, PS y PNS). Ello nos lleva a retomar la Figura 10 en la cual se puede observar que, para los niños que cursan primer año escolar, el CANS predice de cierta manera PNS. Nuestra hipótesis para este caso es que, al ser un área no necesariamente es entrenarle en la escuela, y además, corresponde a aspectos más innatos del desarrollo matemático, se podría preservar en el tiempo.

Para poder evidenciar si efectivamente el componente no simbólico del cálculo aproximado es transferible al aprendizaje escolar se siguió la trayectoria de aprendizaje de quienes fueron evaluados por primera vez cuando estaban en primer año escolar. Quizás al ser PNS más impreciso, era necesario un año más de trayectoria escolar para hacerse evidente su avance dentro de las propuestas de aula. Sin embargo, no fue posible identificar transferencia alguna entre el rendimiento en CANS y el rendimiento escolar. Quizás ello se deba efectivamente a la distancia que hay entre el CANS y las propuestas escolares. Estas últimas tienden a profundizar en el área simbólica y exacta. Sería interesante evaluar si estos resultados se mantienen en poblaciones a las cuales se les presenten propuestas de aula con mayor énfasis en la enseñanza del área no simbólica de las matemáticas. Por otro lado, las condiciones de la evaluación no fueron las óptimas, la muestra fue muy reducida, las técnicas de evaluación eran artesanales y faltaba la presencia del investigador dentro del aula. Todas estas variables pueden haber incidido en los resultados. A partir de los resultados alcanzados en esta memoria de tesis, no es posible generar conclusiones o proyecciones respecto a esta hipótesis.

Los resultados obtenidos nos orientan a pensar en la misma línea que los resultados presentados por Xenidou-Dervou et al. (2013 y 2018), el área simbólica aproximada tiene un impacto mayor que el área no simbólica en el rendimiento matemático posterior. Sin embargo, para el caso de esta memoria de tesis es pertinente reflexionar sobre los instrumentos utilizados. Si bien los resultados obtenidos se encuentran alineados a la literatura existente, (existe una mayor incidencia del campo simbólico en el desarrollo del rendimiento matemático posterior) es importante tener en cuenta que la prueba PUMa tiene mayor cantidad de ítems simbólicos que no simbólicos. Ello podría haber sido un posible sesgo que afectase los resultados presentados y nuestras conclusiones.

En síntesis, los análisis realizados en esta tesis de maestría confirman que **el cálculo aproximado como tal es un buen predictor del avance en el rendimiento matemático si se evalúa antes de comenzar la educación primaria.** Sin embargo, es importante tomar las conclusiones con cautela dada la pequeña cantidad de estudiantes que participaron de esta última fase y las evidentes diferencias entre las técnicas de evaluación utilizadas en las dos etapas anteriores (fase 1 y fase 2: prueba PUMa; fase 3: pruebas de criterio). Los presentes resultados nos permiten realizar una primera aproximación a hallazgos que se deberán corroborar en futuras investigaciones.

5.1 CONCLUSIONES:

Los resultados obtenidos en la presente investigación buscan generar en la comunidad científica dos grandes aportes. En primer lugar, contribuir en la discusión académica sobre la incidencia del cálculo aproximado en el rendimiento matemático durante los primeros años de educación matemática formal. En segundo lugar, ser un nuevo insumo que ratifique la importancia de evaluar el cálculo aproximado dentro de las habilidades matemáticas tempranas. Este trabajo de maestría nos alienta a realizar evaluaciones periódicas, nos recuerda que las mismas son herramientas necesarias para obtener un perfil de aprendizaje detallado de cada estudiante, así como para medir y monitorear el progreso en el rendimiento.

Nuestro estudio demuestra que el desarrollo del cálculo aproximado es un predictor del rendimiento matemático sólo en los niños en educación inicial, cuando aún no han sido expuestos a la matemática simbólica y se les ha presentado un rango numérico limitado. Estos hallazgos concuerdan con las conclusiones de Gilmore et al. (2010), según los resultados obtenidos en su estudio, el rendimiento en aritmética no simbólica predijo el logro matemático de los niños al final del año escolar. Las habilidades numéricas no simbólicas y simbólicas están relacionadas, cerca del inicio de la instrucción formal en matemática. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta relación no puede extrapolarse a los niños y niñas en educación primaria (Matejko y Ansari, 2016). Siegler & Booth (2004) sugieren que la entrada en la educación escolar puede cambiar significativamente algunos patrones de respuesta en tareas de estimación aproximada de cantidades debido a las experiencias en el sistema educativo relacionadas con el aprendizaje y la manipulación de símbolos numéricos.

Evaluar la habilidad para realizar cálculos aproximados cuando los niños y niñas se encuentran aún en educación inicial puede ser una buena herramienta de screening que informe niños en riesgo de tener dificultades en el área matemática cuando ingresen a la educación primaria, así como también para identificar niños y niñas que puedan destacarse en el área. En este sentido, el metaanálisis realizado por Mato-Vázquez y Muñoz-Cantero (2010) propone que la forma en que se aborda la matemática durante los primeros años de escolarización es fundamental para prevenir una baja predisposición al aprendizaje de la matemática.

Finalmente, los hallazgos de la presente tesis de maestría coinciden con la corriente teórica a través de la cual se fundamenta la actual transformación educativa en nuestro país. La misma se basa en las neurociencias y la ciencia cognitiva, siendo esta corriente liderada por investigaciones como las del profesor Stanislas Dehaene. La misma representa un cambio en la concepción teórica del proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo referencia, por ejemplo, al desarrollo del sentido numérico en educación inicial. Este último punto representa un hito importante para los documentos que provienen del ámbito educativo uruguayo y podría significar el inicio de un cambio en la concepción de la enseñanza de la matemática temprana en nuestro país.

5.2 Implicaciones para la enseñanza:

Los resultados obtenidos en esta memoria de tesis sin lugar a dudas nos deben cuestionar en nuestro quehacer educativo.

En primer lugar, se destaca la necesidad inminente de la evaluación de competencias matemáticas tempranas. Hacia los 5 años es posible identificar estudiantes que puedan presentar a futuro dificultades en matemáticas. Si bien existe evidencia contundente al respecto, hasta la fecha, la evaluación sistemática y estandarizada, no es una práctica habitual (a pesar de ser una estrategia ideal).

A nivel político hay intención explícita de evaluar las competencias matemáticas tempranas (así queda de manifiesto en el documento de la transformación educativa). Sin embargo, hasta el momento no se ha colectivizado a la comunidad educativa un plan de acción concreto en este sentido, que acompañe a las prácticas docentes para reforzar este aspecto clave.

En segundo lugar, esta tesis de maestría destaca la importancia de medir el progreso del rendimiento matemático a lo largo del tiempo y considerar las trayectorias educativas en lugar de simplemente identificar puntos de corte para diagnosticar la situación actual. Una evaluación sistemática del progreso permite llevar a cabo intervenciones breves e intensivas en las áreas que presentan mayores dificultades y predecir el rendimiento matemático futuro de manera más precisa.

Asimismo, los resultados de esta tesis muestran la importancia de enfatizar la necesidad de desarrollar estrategias didácticas que permitan llevar al aula el entrenamiento en cálculos aproximados (CA) como una herramienta para fomentar el avance en el rendimiento matemático posterior. Se vuelve necesario una vez más, reflexionar y re-pensar el trabajo de aula; diseñar nuevas propuestas desde la convicción de que una adecuada manipulación aproximada de las cantidades podría promover un mejor rendimiento matemático al momento de enfrentarse a cálculos exactos.

Los niños y niñas manipulan cantidades superiores a las que pensábamos y ello debería ser nuestro punto de partida para pensar en incorporar este tipo de actividades a las prácticas educativas, especialmente para quienes trabajan con estudiantes que cursan educación inicial.

En gran medida, la enseñanza tradicional de las matemáticas se ha enfocado en qué enseñar, en lugar de como los estudiantes aprenden, y no ha tenido en cuenta la maduración del cerebro como factor central para concebir los estilos de enseñanza y aprendizaje. A partir de los resultados obtenidos, se sugieren algunas posibles implicaciones prácticas como punto de partida para continuar reflexionando sobre nuestra labor educativa.

A través de los resultados obtenidos en esta investigación, proponemos como estrategia de trabajo alternativa para el cuerpo docente: la evaluación de los estudiantes también, mediante modalidades no convencionales, como la evaluación del CA. Sistematizar su evaluación como instrumento complementario a los métodos tradicionales de evaluación, puede funcionar como una nueva herramienta que contribuya a la detección temprana de posibles dificultades y colaborar en acciones preventivas dentro del ámbito educativo-institucional.

Creemos firmemente en la importancia de generar acciones preventivas y herramientas de evaluación en edades tempranas para facilitar el acompañamiento al estudiantado antes de que se presenten dificultades que requieran atención técnica personalizada. Los resultados preliminares de esta investigación constituyen una oportunidad para reducir derivaciones futuras y tratamientos prolongados. El espíritu de esta memoria de tesis se encuentra alineado al sentir docente y apoya la importancia de proponer vías de aprendizaje propicias en función de las características personales de cada niño y niña. Cuanto más temprana y eficiente sea la detección de niños y niñas con potencial riesgo de tener dificultades en matemática, se cuenta con un mayor tiempo ventana - para trabajar con ellos de forma profiláctica - evitando abordar una posible dificultad desde la reeducación una vez comenzada la educación escolar. Sin lugar a dudas, considerar el abanico entero de formas de aprender colabora con la puesta en práctica de propuestas educativas que favorezcan los procesos de aprendizaje de la totalidad del estudiantado.

Sugerimos, por tanto, la implementación gradual de actividades que involucren la comparación y el cálculo aproximado de cantidades en la práctica educativa, específicamente en el campo de las sumas y restas. Ampliar el repertorio numérico y sistematizar instancias en las cuales se trabaje la comparación de cantidades y el cálculo aproximado, puede ser una clave para anticiparnos al grado de avance en el rendimiento matemático que tendrá un niño o una niña. Para lograr esto, es necesario diseñar actividades que aumenten gradualmente en complejidad. En primer lugar, trabajar con el campo no simbólico, utilizando imágenes y material concreto para comparar cantidades. Luego, incluir sumas y restas de cantidades en el campo no simbólico. En una segunda instancia, incorporar el campo simbólico y comparar cantidades simbólicas con no simbólicas, realizando sumas y restas aproximadas con el mismo formato. Finalmente, abordar específicamente el campo simbólico, comparando cantidades y realizando cálculos aproximados con un amplio rango numérico y llevando las cantidades a situaciones concretas y cotidianas para conectar con la abstracción que se desea abordar.

Es importante destacar que la eficacia de estas prácticas dependerá de la sistematicidad con la que se implementen. Se sugiere implementarlas a diario o con una frecuencia de 3 veces por semana y convertirlas en rutinas de pensamiento matemático de unos 15 a 20 minutos diarios, como una alternativa para llevarlas a cabo de manera colectiva. En resumen, estas estrategias pueden ayudar a mejorar el rendimiento matemático de los estudiantes y a prevenir dificultades en etapas posteriores de su educación.

5.3 Limitaciones del estudio

Los resultados presentados deben ser analizados con cautela, dado que esta muestra no necesariamente es representativa de toda la población uruguaya. Sería interesante que futuras investigaciones replicaran este estudio en una muestra a mayor escala. En la misma línea, cabe destacar que la presente investigación tuvo como propósito inicial ser de carácter correlacional y no longitudinal, por lo que ello interfirió en la cantidad de participantes que pudieron sostener la investigación. Para futuras instancias, sería interesante replicar el estudio pudiendo mantener una cantidad de participantes similar a la de la evaluación inicial. A pesar de lo alentador de los resultados en cuanto al valor predictivo del cálculo aproximado para el grupo de niños que fueron evaluados inicialmente cuando cursaba nivel 5 de educación inicial, debemos tener siempre presente que esta investigación es fundamentalmente de base correlacional, por lo que las predicciones informadas deben ser necesariamente confirmadas por estudios causales.

Por otro lado, el período en el cual se llevó a cabo el trabajo de campo fue durante la pandemia de Covid 19, por lo que es recomendable replicar el estudio en condiciones donde la situación de escolarización no se encuentre tan afectada. Es importante destacar que, si bien todos los estudiantes evaluados se mantuvieron escolarizados, tuvieron pocas instancias presenciales (en comparación con un año típico) previo a la evaluación en habilidades de cálculo aproximado.

En función de los datos poco alentadores recabados en los niños y niñas que cursan primer año escolar, sería pertinente en el futuro replicar la evaluación considerando a nivel 4 y nivel 5 de educación inicial en vez de educación primaria.

Finalmente, pensamos que el próximo paso en esta línea de investigación debe pasar por generar un programa de entrenamiento que estimule el desarrollo de habilidades en cálculo aproximado para aquellos niños y niñas que obtengan una puntuación descendida en la evaluación del CA y poder verificar así las posibilidades que la mejora en el CA puede generar en el rendimiento matemático general.

Capítulo 6: Referencias bibliográficas

ANEP. (2018). Monitor Educativo Liceal. Dirección de Planeamiento y Evaluación Educativa. CES. https://www.ces.edu.uy/files/2019/Liceos/Presentacin_Monitor_Educativo_Liceal_2018_A4_.pdf

Ansari, D. (24 de enero de 2023). Number symbols in the Brian and Maind. Les mécanismes de l'intuition mathématique chez les êtres humains et les machines. https://www.youtube.com/watch?v=5ol2g9-pTUU

ARISTAS (2017). Informe de resultados de tercero de educación primaria. Retrieved from https://www.ineed.edu.uy/aristas-2017-informe-de-resultados-de-tercero-y-sexto-de-educacion-primaria/

ARISTAS (2018). Informe de resultados de tercero de educación media. Retrieved from https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/Publicaciones/Aristas2018/Aristas-2018-Informe-de-resultados.pdf

ARISTAS (2020). Primer informe de resultados de tercero y sexto de educación primaria. https://www.ineed.edu.uy/aristas-2020-primer-informe-de-resultados-de-tercero-y-sexto-de-educacion-primaria/

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. Journal of Educational Psychology, 96(4), 699-713. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699

Barth, H., Mont, K. la, Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. Proceedings of the National Academy of Sciences, 102(39), 14116-14121. https://doi.org/10.1073/pnas.0505512102

Barth, H., Starr, A., & Sullivan, J. (2009). Children's mappings of large number words to numerosities. Cognitive Development, 24(3), 248–264. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.04.001

Bonny, J. W., & Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. Journal of Experimental Child Psychology, 114(3), 375–388. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.09.015

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. Journal of child psychology and psychiatry, 46(1), 3-18.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J., & Pelphrey, K. A. (2006). Functional Imaging of Numerical Processing in Adults and 4-y-Old Children. PLoS Biology, 4(5). https://doi:10.1371/journal.pbio.0040125

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. Mathematical cognition, 1(1), 83-120.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. Cortex, 33(2), 219-250 https://doi.org/10.1016/S0010-9452(08)70002-9

Dehaene, S. (2011). The number sense: How the mind creates mathematics (Rev. and updated ed.). Oxford University Press.

Dehaene, S. (2016). El cerebro matemático: Como nacen, viven ya veces mueren los números en nuestra mente. Siglo Veintiuno.

Dehaene, S. (2019*).* Cómo aprendemos: Los cuatro pilares con los que la educación puede potenciar los talentos de nuestro cerebro. Siglo Veintiuno.

De León, D., & Maiche, A. (en prensa). Claves cognitivas para enseñar matemática en la escuela. En J. Valle Lisboa, & V. Nin (Eds), Aportes de las ciencias cognitivas a la educación (p. 37). CSIC-Universidad de la República

Diaz-Simón, Cervieri, I., & Maiche, A. (2022). Debates teóricos contemporáneos en Cognición Numérica. Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento, 14(3), 15-31. https://doi.org/10.32348/1852.4206.v14.n3.30236

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. Developmental Psychology, 43(6), 1428–1446.https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428; 10.1037/0012-1649.43.6.1428.supp (Supplemental)

Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. Acta Psychologica, 148, 163-172. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2014.01.016

Ferres-Forga, N., Halberda, J., Batalla-Ferres, A., & Bonatti, L. L. (2022). Improving Mathematics Performance in 7-Year-Old Children: Training the Mapping From Estimated Quantities to Arabic Digits. Journal of Numerical Cognition, 8(1), 123-147. https://doi.org/10.5964/jnc.8075

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1978). The Child's Understanding of Number. Harvard University Press.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2013). Adolescents' functional numeracy is predicted by their school entry number system knowledge. PLoS One, 8(1), Article e54651. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0054651

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116–140. https://doi.org/10.2307/749505

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. Nature, 447(7144), 589–591. https://doi.org/10.1038/nature05850

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. Cognition, 115(3), 394-406.

Gilmore, C., Göbel, S.M., & Inglis, M. (2018). An Introduction to Mathematical Cognition (1st ed.). Routledge.

Ginsburg, H., Baroody, A.J., Núñez, M.C., & Lozano, I. (2007). TEMA-3: Test de Competencia Matemática Básica. Madrid: TEA

Guillaume, M., Nys, J., Mussolin, C., & Content, A. (2013). Differences in the acuity of the Approximate Number System in adults: The effect of mathematical ability. Acta psychologica, 144(3), 506-512. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.09.001

Haase,V., Fritz, A & Räsänen, P. (2020) Research on numerical cognition in Latin American countries (Investigación sobre cognición numérica en países latinoamericanos), Studies in Psychology, 41:2, 217-244, DOI: 10.1080/02109395.2020.1748843

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental Change in the Acuity of the «Number Sense»: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-Year-Olds and Adults. Developmental Psychology, 44(5), 1457-1465.doi :10.1037/a0012682

Halberda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in nonverbal estimation ability predict maths achievement. Nature, 455, 665-668.https://doi.org/10.1038/nature07246

Hyde, D. C., Khanum, S., & Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. Cognition, 131(1), 92-107.doi: 10.1016/j.cognition.2013.12.007.

Ifrah, G. (1985). From One to Zero: A Universal History of Numbers. Viking.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. Learning disabilities research & practice, 22(1), 36-46. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x

Koleszar, V., de León, D., Díaz-Simón, N., Fitipalde, D., Cervieri, I., & Maiche, A. (2020). Numerical Cognition in Uruguay: from clinics and laboratories to the classroom (Cognición numérica en Uruguay: de la clínica y los laboratorios al aula). Studies in Psychology, 41(2), 294-318. https://doi.org/10.1080/02109395.2020.1749000

Kucian, K., & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. European journal of pediatrics, 174, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Lau, N. T., Merkley, R., Tremblay, P., Zhang, S., De Jesus, S., & Ansari, D. (2021). Kindergarteners' symbolic number abilities predict nonsymbolic number abilities and math achievement in grade 1. Developmental Psychology, 57(4), 471.

Le Corre, M., y Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. Cognition, 105, 395-438. DOI: 10.1016/j.cognition.2006.10.005

Leibovich, T., y Ansari, D. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue Canadienne de Psychologie Expérimentale, 70(1), 12–23. https://doi.org/ 10.1037/cep0000070

Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., y Henik, A. (2017). From "sense of number" to "sense of magnitude": The role of continuous magnitudes in numerical cognition. Behavioral and Brain Sciences, 40. https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960

Lipton, J. S., y Spelke, E. S. (2005). Preschool Children's Mapping of Number Words to Nonsymbolic Numerosities. Child Development, 76(5), 978–988. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00891.x

Lyons, I. M., Bugden, S., Zheng, S., De Jesus, S., & Ansari, D. (2018). Symbolic number skills predict growth in nonsymbolic number skills in kindergarteners. Developmental psychology, 54(3), 440. https://doi.org/10.1037/dev0000445

Maiche, A. (2019). Math stimulation from birth IBE Science of learning portal. IBE-UNESCO. Disponible en: https://solportal.ibe-unesco.org/articles/math-stimulation-from-birth/

Maiche, A., de León, D., Puyol, L., Díaz-Simón, N., López, F., & San Román, N. (2022). Prueba Uruguaya de Matemática: PUMa (Versión 1.0.10) [Software] https://PUMa.cicea.uy/

Marconi,C., De León, D., López-Guzmán, F., Díaz-Simón, N., Puyol, L., González, M., Sierna, C., & Maiche, A. (in prep). Self-administered digital math assessment test. [Manuscrito en preparación]

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2016). Trajectories of symbolic and nonsymbolic magnitude processing in the first year of formal schooling. PloS one, 11(3), e0149863. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0149863

Mato - Vázquez, D. y Muñoz - Cantero, J. M. (2010). Efectos generales de las variables actitud y ansiedad sobre el rendimiento en matemática en alumnos de educación secundaria obligatoria. Implicaciones para la práctica educativa. Revista de Ciencias Psicológicas, 4 (1), 27-40. https: //doi.org/10.22235/cp.v4i1.109

Mazzocco, M., Feigenson L., , & Halberda, J. (2011) Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. PLoS ONE 6(9): e23749. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0023749

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old Infants. Psychological Science, 15(11), 776–781. https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2004.00755.x

Mehler, J., & Bever, T. G. (1967). Cognitive capacity of very young children. Iowa Science Teachers Journal, 6(4), 29-32.

Methe, S. A., Hojnoski, R., Clarke, B., Owens, B. B., Lilley, P. K., Politylo, B. C., ... & Marcotte, A. M. (2011). Innovations and future directions for early numeracy curriculum-based measurement: Commentary on the special series. Assessment for Effective Intervention, 36(4), 200-209. http://dx.doi.org/10.1177/1534508411414154

Mundy, E., & Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. Journal of experimental child psychology, 103(4), 490-502. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.02.003

Nelson, G., y McMaster, K. (2019). The effects of early numeracy interventions for students in preschool and early elementary: A meta-analysis. Journal of Educational Psychology, 111(6), 1001–1022. https://doi.org/10.1037/edu0000334

Nieder, A. (2005). Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence. Nature Reviews Neuroscience, 6, 177-190. https://doi.org/10.1038/nrn1626

Odick, D., Valle Lisboa, J., Eisinger, R., Gonzalez, M, Maiche, A., & Halberda, J. (2016) Approximate number and approximate time discrimination each correlate with school math abilities in young children. Acta Psychologica, vol. 163 pp 17-26.

Ormeño Hofer, C., Rodríguez Osiac, S., y Bustos Barahona, V. (2015). Dificultades que presentan las educadoras de párvulos para desarrollar el pensamiento lógico matemático en los niveles de transición. Difficulties of kindergarten educators to develop logical mathematical thinking at transition levels. Páginas De Educación, 6(2), 55–71. https://doi.org/10.22235/pe.v6i2.519

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OCDE (2013) https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Palacio, J., Marchesi, A., y Coll, C. (2011). Desarrollo psicológico y educación. Psicología evolutiva. Psicología y Educación. Alianza editorial. 2da edición.

Park, J., & Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. Cognition, 133(1), 188-200. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.06.011

Peake, C., Alarcón, V., Herrera, V. y Morales, K. (2021). Desarrollo de la habilidad numérica inicial: aportes desde la psicología cognitiva a la educación matemática inicial. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24(3), 297-326, https://doi.org/10.12802/relime.21.2433

Piaget, J., & García, R. (1982). Psicogénesis e historia de la ciencia. Siglo xxi.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. Science, 306(5695), 499-503.. doi: 10.1126/science.1102085.

Pinheiro-Chagas, P., Wood, G., Knops, A., Krinzinger, H., Lonnemann, J., Starling-Alves, I., Willmes, K., & Haase, V. G. (2014). In how many ways is the approximate number system associated with exact calculation? PLoS ONE, 9(11). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0111155

PISA (2012). Uruguay en PISA 2012: Informe de resultados. https://pisa.anep.edu.uy/sites/default/files/Recursos/Publicaciones/Informes/2012-PISA-Uruguay-Informes-Informe%20preliminar.pdf

PISA (2015). Uruguay en PISA 2015: Informe de resultados. https://pisa.anep.edu.uy/sites/default/files/Recursos/Publicaciones/Informes/2015-PISA-Uruguay-Informes-Informe%20nacional.pdf

PISA (2018). Uruguay en PISA 2018: Informe de resultados. https://pisa.anep.edu.uy/sites/default/files/Recursos/Publicaciones/Informes/2018-PISA-Uruguay-Informes-Informe%20nacional.pdf

San Román, N., Sosa, C., López Guzmán, F., Puyol, L., Díaz Simón, N.,de León, D., Maiche, .(2021, Noviembre 17–21). PUMA: Prueba Uruguaya de Matemática. Diseño y validación de una valuación digital del desempeño matemático en inicial y primer año de ed. primaria. [Poster].I Congreso Uruguayo de Ciencias Cognitivas & II Simposio de Educación, Cognición y Neurociencia, Montevideo, Uruguay. http://www.succc.org.uy/es/events/conference_2021

Schiappapietra, Rocío. (2022). La emergencia educativa que no permea hacia todos los actores. La transformación educativa es necesaria y requiere de un involucramiento de todos los actores políticos con una mirada a largo plazo. Montevideo. Portal.https://www.montevideo.com.uy/Columnistas/Mirada--La-emergencia-educativa-que-no-permea-hacia-todos-los-actores-uc833051

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. Child development, 75(2), 428-444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Singer, V., Cuadro, A., Costa, D., & von Hagen, A. (2014). Manual Técnico del Test de Eficacia del Cálculo Aritmético. Magro Editores.

Singer,V. (2016). Tesis Doctoral. Más Convergente que Divergente: El Desempeño en Aritmética y Lectura en la Etapa Escolar. Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Ciencias Sociales. Escuela de Psicología. Programa de Doctorado en Psicología

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. Proceedings of the National Academy of Sciences, 110(45), 18116-18120.

Susperreguy, M. I., Di Lonardo Burr, S., Xu, C., Douglas, H., & LeFevre, J. A. (2020). Children’s home numeracy environment predicts growth of their early mathematical skills in kindergarten. Child Development, 91(5), 1663-1680. https://doi.org/10.1111/cdev.13353

Spelke, E. S. (2000). Core knowledge. *American psychologist*, *55*(11), 1233.

Spelke, S. (2022). What Babies Know. Core Knowledge and Composition. Volume 1. Oxford Series in Cognitive Development.

Szűcs, D., & Myers, T. (2017). A critical analysis of design, facts, bias and inference in the approximate number system training literature: A systematic review. Trends in Neuroscience and Education, 6, 187-203. https://doi.org/10.1016/j.tine.2016.11.002

Team, R. C. (2020). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing.

Valle, J., Mailhos, A., Eisinger, R., Halberda, J., González, M., Luzardo, M., & Marini, A. M. (2017). Estimulación cognitiva a escala poblacional utilizando tabletas. Del sistema numérico aproximado (ANS) a la matemática simbólica. Pensar las TIC desde la ciencia cognitiva y la neurociencia (pp. 147-172). Gedisa.

Vanbinst, K., Ansari, D., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2016). Symbolic numerical magnitude processing is as important to arithmetic as phonological awareness is to reading. PloS one, 11(3), e0151045.

Vásquez, A., Liz, M., Tomas, C., Pérez, M., Rodríguez, J., & González, M. (2013). INDI: Inventario de Desarrollo Infantil. Universidad de la República (Facultad de Psicología y Centro en Cognición para la Enseñanza y el Aprendizaje, Espacio Interdisciplinario). https://www.ineed.edu.uy/socioemocional/experiencias/inventario-de-desarrollo-infantil-indi.html

Mato Vázquez, M. D., & Muñoz Cantero, J. M. (2010). Efectos generals de las variables actitud y ansiedad sobre el rendimiento en matemáticas en alumnus de educación secundaria obligatoria: implicaciones para la práctica educativa. Ciencias Psicológicas, 4(1), 27-40.

Wang, J. J., Odic, D., Halberda, J., & Feigenson, L. (2016). Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance. Journal of Experimental Child Psychology, 147, 82-99. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.03.002

Xenidou-Dervou, I., De Smedt, B., van der Schoot, M., & van Lieshout, E. C. (2013). Individual differences in kindergarten math achievement: The integrative roles of approximation skills and working memory. Learning and Individual Differences, 28, 119-129. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.09.012

Xenidou-Dervou, I., van Luit, J. E. H., Kroesbergen, E. H., Friso-van den Bos, I., Jonkman, L. M., van der Schoot, M., & van Lieshout, E. C. D. M. (2018). Cognitive predictors of children's development in mathematics achievement: A latent growth modeling approach. Developmental Science, 21(6). https://doi.org/10.1111/desc.12671

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants.Cognition, 74, 1–11. doi:10.1016/S0010-0277(99)00066-9

ANEXOS

Anexo 1: Aprobación comité de Ética

Facultad de Psicología
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Comité de Ética
comiteeticainv@psico.edu.uy

Montevideo, 20 de marzo de 2020

En el día de la fecha se reúne el Comité de Ética en Investigación de la Facultad de Psicología de la Universidad de la República, a los efectos de expedirse respecto al proyecto de investigación ***Sistema Numérico Aproximado, una herramienta aún no explotada para el aprendizaje de la aritmética,*** a cargo de la Lic. Lucía Puyol.

Dicho proyecto CUMPLE CON LOS CRITERIOS ÉTICOS para la protección de los seres humanos que participan como sujetos en procesos de investigación, por lo que este Comité de Ética de Investigación OTORGA EL AVAL para su ejecución.

Pase a notificación de la Lic. Lucía Puyol (responsable del proyecto).

Mag. Raquel Galeotti
Comité de Ética en Investigación
Facultad de Psicología

Mag. Darío De León
Comité de Ética en Investigación
Facultad de Psicología

Dra. Victoria Gradín
Comité de Ética en Investigación
Facultad de Psicología

Anexo 2:

HOJA DE INFORMACIÓN PARA PADRES

TÍTULO DEL PROYECTO: *Sistema numérico aproximado, una habilidad aún no explotada para el aprendizaje de la aritmética.*

Investigador responsable:

Dr. Alejandro Maiche (CIBPsi, Facultad de Psicología, UdelaR)

Lic. Lucía Puyol Ferrari (Facultad de Psicología, UdelaR)

Dr. Alejandro Maiche:

E-mail: amaiche@psico.edu.uy

Teléfono: 24008555, int. 340

Lic. Lucía Puyol Ferrari.

E- mail: puyol.lucia5@gmail.com

Teléfono: 094605156

1. ¿Cuáles son los objetivos de este estudio?

Indagaremos en niños de cinco años sin instrucción previa en matemática formal y en niños de 6 años con poca experiencia en ello, la incidencia del SNA en problemas de adición y sustracción de cantidades aproximadas que impliquen tareas de aritmética simbólica y no simbólica.

2. ¿Por qué mi hijo/a ha sido seleccionado/a para participar en este estudio?

Este estudio busca que la mayoría de los niños a estudiar provengan de hogares con suficiente estimulación cognitiva para que la falta de ella no sea una variable que repercuta en su performance

3. ¿Está obligado/a mi hijo/a a participar en este estudio?

No. La participación en este estudio es libre y voluntaria.

4. ¿Existe algún motivo por el cual mi hijo/a no debiera participar de este estudio?

No. Sin embargo, si su hijo/a presenta dificultades importantes de aprendizaje, solicitamos comunicárselo a la maestra de su clase.

5. ¿Obtendré algún tipo de beneficio directo por mi participación en este estudio?

Ya que estamos explorando la posibilidad de mejorar la enseñanza de las matemáticas, no podemos asegurar que su hijo obtendrá un beneficio directo.

6. Si mi hijo/a participa de este estudio, ¿tendrá algún tipo de incomodidad o inconveniente?

En estudios anteriores, con evaluaciones similares a las propuestas, ningún niño experimentó molestias o inconvenientes. En caso de que su hijo/a se sintiera cansado o

molesto, podrá interrumpir su participación sin tener que dar explicaciones ni sufrir ninguna consecuencia negativa.

7. ¿Qué medidas de reducción y/o atención de un eventual malestar, incomodidad o daño a mi hijo/a se prevén?

Aunque no se prevén malestar, incomodidad o daño, si su hijo/a se sintiera mal podrá interrumpir su participación sin tener que dar explicaciones.

8. ¿En qué actividades tendrá que participar mi hijo/a?

Le pediremos que realice actividades aritméticas de forma lúdica mediante el uso de tabletas. Algunos niños, además, realizarán tareas escritas

9. ¿Quién tendrá acceso a la información que proporcione?

Sólo tendrán acceso a los datos de la investigación los responsables del estudio y los

integrantes del equipo de investigación.

10. ¿Qué medidas se tomarán para asegurar la confidencialidad de los datos?

Cada uno de los niños que participe de este estudio será identificado por un número con el fin de asegurar la confidencialidad de los datos.

Anexo 3:

FORMULARIO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LOS PADRES

Por favor, lea atentamente y complete este formulario marcando con una cruz sus respuestas a las siguientes preguntas.

He leído y comprendido la hoja de información del presente estudio.

◻ Sí ◻ No

He tenido oportunidad de realizar preguntas en relación con el presente estudio, y en caso afirmativo he recibido respuestas satisfactorias.

◻ Sí ◻ No

Acepto que mi hijo/a participe voluntariamente en este estudio.

◻ Sí ◻ No

He sido informado/a de los objetivos del estudio.

◻ Sí ◻ No

He sido informado/a sobre los criterios de selección de los participantes.

◻ Sí ◻ No

He sido informado/a sobre lo que mi hijo/a tendrá que hacer en este estudio

◻ Sí ◻ No

He sido informado/a sobre los beneficios y posibles riesgos

□ Sí □ No

He sido informado/a que mi hijo/a puede retirarse en cualquier momento sin tener que dar explicaciones, y que, en caso de retirarse, esto no le generará ningún perjuicio.

□ Sí □ No

Firma y aclaración del padre, madre o tutor:

Fecha

Anexo 4

Hagamos algunos de práctica				
Modelado	4+5	5	Suma azul	B
Practica 1	1 + 3	8	Rojo	A
Practica 2	8 +8	9	Suma azul	B
Practica 3	3+5	14	Rojo	A
Lo hiciste muy bien , estas listo para jugar!. Toca el boton verde para continuar				
Ensayo 1	6 +6	15	Rojo	B
Ensayo 2	9+6	12	Rojo	A
Ensayo 3	12 +8	16	Rojo	B
Ensayo 4	7+9	20	Rojo	A
Ensayo 5	25 + 20	36	suma azul	B
Ensayo 6	20+16	45	suma azul	A
Ensayo 7	15 + 25	50	suma azul	B
Ensayo 8	20+30	40	suma azul	A
	Ratio 4:6	**Lo estás haciendo muy bien, sigue así!**		
Ensayo 9	5+5	15	Rojo	A
Ensayo 10	9+6	10	Rojo	B
Ensayo 11	8 +6	21	Rojo	A
Ensayo 12	9+ 12	14	suma azul	B
Ensayo 13	25+20	30	suma azul	A
Ensayo 14	15+15	45	suma azul	B

Ensayo 15	21+30	34	suma azul	A
Ensayo 16	15+19	51	Rojo	B
	Ratio 4:7	**Lo estás haciendo muy bien, sigue así!**		
Ensayo 17	10+11	12	Rojo	A
Ensayo 18	6+6	21	Rojo	B
Ensayo 19	6+7	23	Rojo	A
Ensayo 20	11+12	13	Rojo	B
Ensayo 21	16 + 16	56	suma azul	A
Ensayo 22	30+26	32	Suma azul	B
Ensayo 23	27+31	33	Suma azul	A
Ensayo 24	16+17	58	Suma azul	B

Anexo 5:

PUMA2020	PUMA2021	LAPred	AVANCE	LAPSE
58	121	88.27079473	63	1.370781813
73	107	98.92340501	34	1.081644935
77	89	101.800896	12	0.8742555662
31	85	69.6338441	54	1.220670797
107	128	123.8869871	21	1.033199717
125	134	137.5765194	9	0.9740034167
67	77	94.63633523	10	0.8136409743
87	98	109.0632978	11	0.898560762
95	112	114.944562	17	0.9743827635
71	119	97.4905034	48	1.220631711
74	89	99.64131481	15	0.8932037897
62	93	91.09033258	31	1.020964545
93	117	113.4682576	24	1.031125378
52	86	84.07006729	34	1.022956241
97	130	116.4248767	33	1.116599851
51	52	83.37326375	1	0.6237011442
84	108	106.8742248	24	1.010533645
64	122	92.50584845	58	1.318835534
52	64	84.07006729	12	0.7612697606
52	68	84.07006729	16	0.8088491207
55	83	86.16615767	28	0.9632552065
69	85	96.06148364	16	0.8848499604
67	105	94.63633523	38	1.109510419
91	114	111.9959527	23	1.017893926

52	72	84.07006729	20	0.8564284807
64	86	92.50584845	22	0.9296709499
47	58	80.59548175	11	0.7196433192
96	123	115.6842174	27	1.063239245
131	149	142.2144753	18	1.04771332
110	129	126.1454286	19	1.02262921
135	142	145.3274818	7	0.9771035612
139	143	148.457424	4	0.9632391307
142	144	150.81605	2	0.9548055397
135	146	145.3274818	11	1.004627605
80	125	103.9692828	45	1.202278179
72	105	98.20646831	33	1.069176011
124	146	136.8071898	22	1.067195373
119	141	132.9761555	22	1.060340476
99	105	117.9092126	6	0.8905156575
95	126	114.944562	31	1.096180609
128	136	139.8907792	8	0.9721870216
66	109	93.9252095	43	1.160497811
79	101	103.2455066	22	0.9782508054
114	140	129.1710151	26	1.08383448
119	125	132.9761555	6	0.9400181522
132	122	142.9911442	-10	0.8531996907
106	125	123.1362132	19	1.015135976
112	123	127.6561699	11	0.9635256961
139	134	148.457424	-5	0.9026156889
86	114	108.3326169	28	1.052314652
110	132	126.1454286	22	1.046411284

138	133	147.6733457	-5	0.9006364649
82	100	105.4197837	18	0.9485885521
84	112	106.8742248	28	1.047960817
35	89	72.35199173	54	1.230097443
127	143	139.1183127	16	1.027902058
107	145	123.8869871	38	1.170421554
114	130	129.1710151	16	1.006417732
63	74	91.79761052	11	0.8061212006
69	78	96.06148364	9	0.8119799637
45	82	79.21223215	37	1.035193654
92	120	112.7316059	28	1.064475211
73	103	98.92340501	30	1.04120961
96	124	115.6842174	28	1.071883467
115	139	129.9299801	24	1.069806983
73	98	98.92340501	25	0.9906654546
121	145	134.5054521	24	1.078023215
112	134	127.6561699	22	1.049694661
119	134	132.9761555	15	1.007699459
124	114	136.8071898	-10	0.8332895379
110	144	126.1454286	34	1.141539583
105	121	122.3864569	16	0.9886714844
107	115	123.8869871	8	0.9282653705
59	76	88.9742457	17	0.8541797618
114	127	129.1710151	13	0.9831927072
96	120	115.6842174	24	1.037306581
94	113	114.2059092	19	0.989440921
97	120	116.4248767	23	1.030707555