

TRABAJO MONOGRÁFICO

Mónadas de Hopf

Juan Píriz

5 de diciembre de 2023

Orientador:

Ignacio López Franco

Departamento de Matemática y Aplicaciones, CURE, Udelar

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

En este trabajo monográfico presentamos un resultado central de Bruguières, Lack y Virelizier, que relaciona las mónadas de Hopf y la existencia de homs internos en su categoría de álgebras. Nuestro acercamiento, a diferencia del de dichos autores, pone énfasis en el uso de adjunciones de morfismos de mónadas. Ilustramos cómo los conceptos necesarios para este resultado aparecen como generalizaciones de teorías mas clásicas y cómo esto da una perspectiva más clara de éstas.

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vii
Capítulo 1. Categorías monoidales	1
1. Categorías monoidales y trenzas	1
2. Funtores opmonoidales	7
3. Adjunciones opmonoidales	11
4. Categorías monoidales cerradas	17
5. Funtores cerrados	18
6. Duales y homs internos	19
Capítulo 2. Mónadas sobre categorías monoidales	25
1. Mónadas y adjunciones	25
2. Mónadas opmonoidales	28
3. Mónadas de Hopf y monoides de Hopf	34
Capítulo 3. Mónadas de Hopf y categorías monoidales	39
1. Morfismos de mónadas en categorías monoidales	39
2. Adjunciones de Hopf y mónadas de Hopf	42
3. Mónadas de Hopf y categorías monoidales cerradas	43
4. Aplicación a subcategorías reflexivas	45
Apéndice A. Morfismos de mónadas	47
1. La construcción de Eilenberg-Moore como functor.	47
2. Levantados y estructuras de mónadas	51
3. Adjunciones de morfismos de mónadas y morfismos fuertes.	53
4. Adjunciones y levantados	55
Apéndice B. Resultados sobre adjunciones e isofibraciones	57
1. Adjunciones	57
2. Isofibraciones	58
Bibliografía	59

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi tutor en este trabajo, Ignacio López, sus minuciosas correcciones y explicaciones han logrado que esta monografía haya llegado a tener la forma que tiene, lo cual me deja muy contento. Me responsabilizo de toda errata o desprolijidad que se haya resistido a sus aportes.

También especial agradecimiento a todos los profesores que he tenido la suerte de cruzarme en la Licenciatura, gracias a ellos he tenido acceso a excelentes cursos pero sobre todo charlas sobre matemática que me han permitido adquirir nuevas perspectivas, pero ante todo disfrutar cada vez más de esta disciplina. En particular, con miedo a ser injusto, quiero mencionar a Walter Ferrer, su confianza en mis capacidades y disposición a darme una mano y abrirme puertas es invaluable.

Todo este proceso habría sido muchísimo mas tortuoso de no ser por los compañeros que me he cruzado, agradezco infinitamente su disposición a pasarme apuntes, darme explicaciones y discutir los resultados que hemos estudiado, su ayuda ha hecho que la distancia no se sienta tan larga y llegar a este punto no haya costado tanto.

A mis padres, por su incansable esfuerzo y trabajo que me han dado las posibilidades de ser quien soy hoy, lo cual me llena de orgullo y espero que a ellos también. A mis hermanos, por su compañía y hacer de mi casa un hogar. En particular a Yersé, que me mostró y me sigue mostrando lo zarpado de la música y el metal, siempre teniéndome en cuenta para enseñarme y vivir juntos esta etapa, y ser una de las primeras personas que me acercó a la matemática. Por último, a mi Abuelo, pilar fundamental de mi vida, fuente de enseñanzas, valores y anécdotas que me formaron y voy a llevar conmigo toda mi vida, aquellos veranos en Paso de los Toros tienen un lugar especial en mi corazón.

A todos los que alguna vez confiaron en mí y me dieron su apoyo, gracias.

*El futuro, nos está llegando todos los días,
con cada amanecer.*

P. Toros- 1/05/2015.

J.C. Píriz

Introducción

Al estudiar los módulos para un álgebra A , aparece naturalmente la pregunta de si el producto tensorial de dos A -módulos es nuevamente un A -módulo, lo que conduce al concepto de biálgebra. Más aún, podemos preguntarnos si el conjunto de mapas lineales entre dos A -módulos es nuevamente un A -módulo, lo que conduce al concepto de antípoda y álgebra de Hopf.

Estas preguntas se pueden plantear en el lenguaje de la teoría de categorías de manera más clara y general. El concepto de mónada se puede pensar como una generalización de las álgebras, al estudiar los funtores de la forma $T(X) = A \otimes X$ donde A es un álgebra, recuperando a los A -módulos como los T -módulos para ésta mónada, que a su vez forman una categoría conocida como la categoría de Eilenberg-Moore para la mónada. Las preguntas sobre el producto tensorial de dos A -módulos y el conjunto de mapas entre ellos se transforman en preguntas sobre la estructura de la categoría de módulos, que se pueden traducir en propiedades del functor T .

El objetivo de esta monografía es presentar las generalizaciones de estas construcciones al contexto de las mónadas en categorías monoidales y ver caracterizaciones de las mismas. Vemos cómo de la misma manera en la que las mónadas generalizan a las álgebras, los funtores opmonoidales generalizan a las coálgebras, las mónadas opmonoidales a las biálgebras y las mónadas de Hopf a las álgebras de Hopf. Mostramos que así como el concepto de biálgebra es central al estudiar productos tensoriales de A -módulos para un álgebra A , el concepto de mónada opmonoidal aparece vinculado al los productos tensoriales de objetos en la categoría de Eilenberg-Moore. Describimos un teorema de [BLV11] que caracteriza a las mónadas de Hopf en categorías cerradas en cuanto a su categoría de álgebras, generalizando el resultado clásico que vincula a las álgebras de Hopf con el hecho de que el conjunto de morfismos entre dos A -módulos es también un A -módulo si y sólo si A tiene una antípoda. Se pretende además, acompañar la exposición de estos resultados ilustrando cómo los casos clásicos aparecen como ejemplos en esta teoría más general.

Pasaremos ahora a describir los contenidos de este trabajo.

En el Capítulo 1 damos las definiciones sobre las que el resto de trabajo se apoya. Definimos categoría monoidal, trenza, funtores y adjunciones opmonoidales, categorías y funtores cerrados y mostramos el vínculo de estos conceptos con la existencia de duales. Además comentamos el teorema de coherencia de Mac Lane, que está presente en todo el trabajo posterior. Nos basamos en [TV17] y [JS93] para lo referido a categorías monoidales y [MM12, 3.3] en particular para ciertas definiciones y resultados sobre el centro laxo. Para el teorema de coherencia se recomienda ver [Mac63], [MM12, VII-2] y [JS93].

En el Capítulo 2 definimos el concepto de mónada y su categoría de Eilenberg-Moore. Definimos mónada opmonoidal y mostramos que es equivalente que una mónada en una categoría monoidal sea opmonoidal a que la categoría de Eilenberg-Moore sea monoidal y el functor de olvido monoidal estricto. Concluimos con un breve estudio de los monoides de Hopf que son fuente de ejemplos de mónadas de Hopf. Para mónadas nos basamos en [Bor94] y [ML98], para mónadas opmonoidales en [Moe02].

El Capítulo 3 tiene como objetivo caracterizar a las mónadas de Hopf en categorías monoidales cerradas. Allí demostramos que dada una mónada opmonoidal T en una categoría cerrada a izquierda, es equivalente que la misma sea Hopf a izquierda a que la categoría de Eilenberg-Moore sea cerrada a izquierda y el functor de olvido sea cerrado fuerte a izquierda. Comenzamos con el estudio de ciertos morfismos de mónadas particulares que aparecen en las categorías monoidales, mostramos su vínculo con las mónadas de Hopf para finalmente poder demostrar el resultado antes mencionado. Este capítulo toma ciertos resultados de la referencia principal [BLV11] pero los expone de manera distinta, con ciertos resultados intermedios que no aparecen allí.

Se optó por dejar la descripción de los morfismos de mónadas a un primer Apéndice A. Se muestra como surgen al estudiar levantados de funtores y transformaciones a la categoría de Eilenberg-Moore, dando resultados que caracterizan cuando esto es posible. En particular, el teorema que caracteriza cuando esto es posible para una adjunción juega un rol central en este documento. Las ideas de esta sección se encuentran, en el contexto de las 2-categorías en [Str72].

Por ultimo hay un breve segundo Apéndice B donde exponemos el concepto de isofibración y dos resultados clásicos sobre adjunciones, necesarios para este texto.

Aportes personales. La monografía difiere de la referencia principal [BLV11] en cuanto a que prestamos especial atención al concepto de morfismos de mónadas y adjunciones de morfismos de mónadas, viendo como estos permiten determinar cuándo una adjunción se puede levantar a la categoría de Eilenberg-Moore. Mostramos como estos conceptos juegan un rol central en la demostración y se deja claro su papel en la validez de los resultados. Para esto nos apoyamos en el concepto de “transformación compañera” de una transformación natural, donde las técnicas para tratar a éstas vienen del contexto de las 2-categorías.

Además, se dan las definiciones de adjunciones de Hopf y funtores cerrados haciendo hincapié en el concepto de transformación compañera, lo cual permite contextualizar los resultados.

Otro punto de contraste con [BLV11], es que se exponen los conceptos en más detalle y de manera más pausada, buscando que sea más accesible a un público no especialista. En particular aparece la equivalencia entre la condición de opmonoidal para una mónada y la existencia de una estructura monoidal en la categoría de Eilenberg-Moore tal que el functor de olvido es monoidal estricto, la relación entre adjunciones opmonoidales y funtores opmonoidales fuertes. Se incluyen ciertas pruebas que no aparecían en las referencias, mencionamos en particular la Proposición 2.11 y al apéndice A, cuyos conceptos aparecen mencionados pero sin demostración.

Terminología. En este trabajo utilizamos la terminología de [ML72] y [EK66] al referirnos a functor monoidal, donde no asumimos que cierta transformación natural

sea invertible, a diferencia de otros autores que toman esto como parte de la definición. Además, cuando estas estructuras se dualizan, utilizaremos el nombre de opmonoidal, que se puede encontrar por ejemplo en [KS74] a diferencia de otros autores que utilizan el término comonoidal o monoidal colaxo.

Categorías monoidales

En este capítulo introduciremos el concepto de categoría monoidal, que encapsula diversas nociones de producto en una categoría y presentaremos las definiciones básicas de esta teoría. Luego presentamos las nociones de trenza, trenza laxa y trenza parcial, que encapsulan las ideas de “conmutatividad a menos de isomorfismo” y el centro de una categoría monoidal, que mimetiza la noción de centro en un monoide al contexto de las categorías y se dan resultados que serán usados en los capítulos siguientes. Posteriormente definiremos la clase de funtores y transformaciones naturales apropiada al contexto monoidal, los funtores y transformaciones opmonoidales. Veremos cómo comonoides en el centro de una categoría dan ejemplos de funtores opmonoidales y la relación entre las adjunciones de funtores opmonoidales y los funtores opmonoidales fuertes. Daremos la noción de categoría monoidal cerrada, que generaliza la idea de espacio de funciones como objeto de la categoría y los funtores cerrados, que son los que preservan esta estructura. Por último damos un estudio detallado del vínculo entre duales y categorías monoidales cerradas.

1. Categorías monoidales y trenzas

DEFINICIÓN. 1.1. Una categoría monoidal $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, I, a, r, l)$ consiste de un functor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. comúnmente llamado producto tensorial, un objeto I , llamado objeto unidad, e isomorfismos naturales:

$$a = \{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)\}$$

$$l = \{l_X: I \otimes X \rightarrow X\}$$

$$r = \{r_X: X \otimes I \rightarrow X\}$$

llamados restricciones de asociatividad y unidad, tales que dados $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \xrightarrow{a} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{a} X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\ a \otimes 1 \downarrow & & \uparrow 1 \otimes a \\ (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{a} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Z & \xrightarrow{a} & X \otimes (I \otimes Z) \\ r \otimes 1 \searrow & & \swarrow 1 \otimes l \\ & X \otimes Z & \end{array}$$

EJEMPLO 1.2. Una categoría con productos binarios y un objeto terminal es monoidal con $\otimes := \times$ y I el objeto terminal, con a, r, l obtenidos a partir de la propiedad universal del producto. A una categoría con esta estructura comúnmente se la denomina *cartesiana cerrada*.

De la misma manera, una categoría con coproductos binarios y un objeto inicial es monoidal.

EJEMPLO 1.3. Los productos tensoriales usuales dan lugar a categorías monoidales. En **Ab** (la categoría de los grupos abelianos y morfismos de grupos), se considera $A \otimes B$ definido por la propiedad universal de que existe un mapa bilineal $A \times B \rightarrow A \otimes B$ que factoriza únicamente a todo otro mapa bilineal con dominio $A \times B$. Iterando obtenemos un mapa trilineal $A \times (B \times C) \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$ con las mismas propiedades. Esta unicidad permite deducir que existe un único isomorfismo que conmuta con los respectivos mapas trilineales $(A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$ y que además es natural.

Razonamientos similares apoyados en la unicidad de los mapas universales para cuatro grupos abelianos prueban la conmutatividad del pentágono. Los isomorfismos $\mathbb{Z} \otimes A \cong A \cong A \otimes \mathbb{Z}$ se deducen de la construcción.

La categoría opuesta de una categoría monoidal es monoidal con el “mismo” producto. Precisamente, dada una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$, se tiene que la categoría opuesta $\mathcal{C}^{\text{op}}$ con la estructura $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, I, a^{-1}, l^{-1}, r^{-1})$ es monoidal. Las restricciones de asociatividad y unidad se cumplen porque surgen de invertir el sentido de las flechas que ya teníamos.

DEFINICIÓN. 1.4. Una categoría monoidal se dice *estricta* si las transformaciones a, l, r de la definición son identidades.

A continuación describiremos un resultado que estará presente en la mayoría del trabajo.

Dos morfismos paralelos en una categoría monoidal son iguales si están formados por composiciones de productos tensoriales de restricciones de asociatividad, unidad y de identidades. Una versión puede ser vista en [Mac63, Theorem 3.1], donde se prueba que el pentágono respecto a la condición de asociatividad en la definición de categoría monoidal, es suficiente para que todo diagrama formado por composiciones y productos tensoriales de a conmute. El mismo comportamiento aparece si también incluimos morfismos obtenidos como productos y composiciones de restricciones de unidad. Estos resultados se conocen comúnmente como el teorema de coherencia de Mac Lane. A partir de éste, se prueba además que toda categoría monoidal es equivalente (más precisamente monoidalmente equivalente, ver Definición 1.17) a una categoría monoidal estricta; ver por ejemplo [JS93] o [MM12, VII-2].

Tanto el teorema de coherencia como la existencia de una equivalencia a una categoría estricta son útiles en la siguiente situación. Dado el problema de probar la conmutatividad de cierto tipo de diagrama, será suficiente probarla en el contexto de una categoría estricta para garantizar la conmutatividad en el caso original. Por esta razón, en los casos en los que las pruebas se complicaran sin agregar nada de sustancia, se optará por dar las pruebas en el caso en que la categoría en cuestión es monoidal estricta.

DEFINICIÓN. 1.5. Dada $\mathcal{C}$ categoría monoidal, llamamos *trenza* a un isomorfismo natural

$$\tau = \{\tau_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X\}$$

que verifica los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\tau \otimes 1} & (Y \otimes X) \otimes Z \xrightarrow{a} Y \otimes (X \otimes Z) \\ \downarrow a & & \downarrow 1 \otimes \tau \\ X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\tau} & (Y \otimes Z) \otimes X \xrightarrow{a} Y \otimes (Z \otimes X) \\ \\ X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{1 \otimes \tau} & X \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{a^{-1}} (X \otimes Z) \otimes Y \\ \downarrow a^{-1} & & \downarrow \tau \otimes 1 \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\tau} & Z \otimes (X \otimes Y) \xrightarrow{a^{-1}} (Z \otimes X) \otimes Y \end{array}$$

para todo X, Y, Z en $\mathcal{C}$.

Si τ es una trenza, τ' definida por $\tau'_{X,Y} = (\tau_{Y,X})^{-1}$ también lo es. Si τ' coincide con τ decimos que τ es una simetría. Las categorías mencionadas en 1.3 son categorías simétricas, con mapas $\tau_{U,V}$ dados por la extensión lineal del mapa $u \otimes v \mapsto v \otimes u$ para objetos U, V en la categoría.

DEFINICIÓN. 1.6. Una categoría monoidal trenzada es un par $(\mathcal{C}, \tau)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal y τ es una trenza en la misma.

Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$, se puede definir otra categoría monoidal $\mathcal{C}^{rev}$ con la misma categoría base y producto tensorial dado por $X \otimes' Y := Y \otimes X$. En el caso en que la categoría es trenzada con trenza τ , se tiene que el functor opmonoidal 1.10 $(1_{\mathcal{C}}, \tau, 1_I)$ es una equivalencia monoidal entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{rev}$ (ver [JS93], Example 2.5).

Se puede debilitar la noción anterior, obteniendo el concepto de *trenza laxa* [AM10, Section 1.1.3]. Estas son transformaciones naturales (no necesariamente invertibles) de la forma $\tau_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ que verifican la conmutatividad de los diagramas en la Definición 1.5 y además

$$\begin{array}{ccc} I \otimes X & \xrightarrow{\tau_{I,X}} & X \otimes I \\ & \searrow l_X & \swarrow r_X \\ & X & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \otimes I & \xrightarrow{\tau_{X,I}} & I \otimes X \\ & \searrow r_X & \swarrow l_X \\ & X & \end{array}$$

Si los mapas $\tau_{X,Y}$ son invertibles, τ es una trenza y la conmutatividad de los diagramas anteriores es automática por [JS93, Proposition 2.1].

Un ejemplo clásico de trenza laxa se da en la categoría de los espacios vectoriales graduados sobre cierto grupo G (ver [AM10, 2.3.1]). Las mismas ideas funcionan para el caso de R -módulos graduados sobre anillo conmutativo R .

EJEMPLO 1.7. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{RMod}$ la categoría de los R -módulos. Llamaremos $\mathbf{gRMod}$ a la categoría de los R -módulos graduados sobre los naturales. Un objeto de esta categoría es una sucesión $V = (V_n)_{n \geq 0}$ de R -módulos, un morfismo $f: V \rightarrow W$ es una sucesión de morfismos de R -módulos $f_n: V_n \rightarrow W_n$ con

composición $(g \circ f)_n := g_n \circ f_n$ e identidades $(1_V)_n = 1_{V_n}$. Nos referimos a V_n como la componente de grado n de V y a un $v \in V_n$ como un elemento homogéneo de grado n . La categoría **gRMod** tiene una estructura monoidal con producto $\cdot$ y objeto identidad I donde

$$(V \cdot W)_n := \bigoplus_{i=0}^n V_i \otimes W_{n-i} \quad I_n := \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial usual de R -módulos. Dado $v \in V_i, w \in W_j$ el grado de $v \otimes w$ es $i+j$. Las restricciones de asociatividad y unidad se obtienen como sucesiones de sumas de las de **RMod**:

$$(a_{U,V,W})_n = \bigoplus_{i+j+k=n} a_{U_i,V_j,W_k} \quad (r_U)_n = r_{U_n} \quad (l_U)_n = l_{U_n}$$

de lo cual se deduce que **gRMod** es una categoría monoidal.

Fijado $q \in R$, podemos dotar a la categoría de una familia de mapas $\tau_{U,V}^q: U \cdot V \rightarrow V \cdot U$ dados en los tensores elementales por $u \otimes v \mapsto q^{nm}v \otimes u$ donde u y v son elementos homogéneos de grado n y m . Veamos que τ es una trenza laxa. Dados U, V y W en **gRMod** y $u_n \in U_n, v_m \in V_m, w_k \in W_k$, tenemos que (ignorando las restricciones de asociatividad para más claridad)

$$\tau_{U,V,W}(u_n \otimes v_m \otimes w_k) = q^{(n+m)k} w_k \otimes u_n \otimes v_m$$

$$\tau_{U,W} \otimes V \circ U \otimes \tau_{V,W}(u_n \otimes v_m \otimes w_k) = \tau_{U,W} \otimes V(q^{mk} u_n \otimes w_k \otimes v_m) = q^{mk} q^{nk} w_k \otimes u_n \otimes v_m$$

deducimos $\tau_{U,V,W} = \tau_{U,W} \otimes V \circ U \otimes \tau_{V,W}$ y de la misma manera $\tau_{U,V,W} = V \otimes \tau_{U,W} \circ \tau_{U,V} \otimes W$. Por otro lado dado $t \in R$ y $u_n \in U_n$, tenemos que

$$r_X \circ \tau_{I,U}(t \otimes u_n) = r_X(q^{0n} u_n \otimes t) = t u_n = l_X(t \otimes u_n)$$

con lo cual $r_X \circ \tau_{I,U} = l_X$ y de la misma manera $l_X \circ \tau_{X,I} = r_X$.

Notamos que τ es una trenza si y solo si q es invertible y en tal caso es $(\tau^q)^{-1} = \tau^{q^{-1}}$. Además, es una simetría si y sólo si $q^2 = 1$, es decir, $q = \pm 1$.

Se puede probar que todas las trenzas laxas en **gRMod** son de la forma τ^q , pero dicho resultado escapa el alcance de este trabajo monográfico.

Las ideas que siguen se basan en [Str12, 3.3]. Describiremos una construcción para obtener categorías trenzadas laxas a partir de categorías monoidales, que además servirá como base para futuros ejemplos. Se puede pensar como la generalización del centro de un monoide al contexto de las categorías monoidales.

Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$, llamaremos *trenza parcial* laxa para un objeto A a una transformación natural $u: A \otimes - \Rightarrow - \otimes A$ tal que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow{u_{X \otimes Y}} & (X \otimes Y) \otimes A & \xrightarrow{a_{X,Y,A}} & X \otimes (Y \otimes A) \\ \uparrow a_{A,X,Y} & & & & \uparrow X \otimes u_Y \\ (A \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{u_{X \otimes Y}} & (X \otimes A) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,A,Y}} & X \otimes (A \otimes Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes I & \xrightarrow{u_I} & I \otimes A \\ & \searrow r_A & \swarrow l_A \\ & A & \end{array}$$

Si u es invertible, diremos que es una trenza parcial.

Dados objetos A, B con trenzas parciales respectivas u, v , consideraremos morfismos entre pares $f: (A, u) \rightarrow (B, v)$ dados por morfismos $f: A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A \otimes X & \xrightarrow{f \otimes X} & B \otimes X \\ u_X \downarrow & & \downarrow v_X \\ X \otimes A & \xrightarrow{X \otimes f} & X \otimes B \end{array}$$

Los objetos de la forma (A, u) donde A está en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ y u es una trenza parcial laxa para A y los morfismos considerados anteriormente definen una categoría $Z_l(\mathcal{C})$ llamada el *centro laxo* de $\mathcal{C}$. Existe un functor $U: Z_l(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ dado por $U((A, u)) = A$ y $U(f) = f$.

PROPOSICIÓN. 1.8. $Z_l(\mathcal{C})$ es monoidal con producto y unidad

$$(A, u) \otimes (B, v) = (A \otimes B, a_{-, A, B} \circ (u_- \otimes B) \circ a_{A, -, B}^{-1} \circ (A \otimes v_-) \circ a_{A, B, -}) \quad (I, l^{-1} \circ r)$$

y el functor $U: Z_l(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ es monoidal estricto. Además tiene una trenza laxa dada por

$$\tau_{(A, u), (B, v)} = u_B: (A, u) \otimes (B, v) \rightarrow (B, v) \otimes (A, u)$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte de la tesis, hay que probar que la transformaciones naturales así definidas son trenzas parciales laxas y que las instancias de las transformaciones naturales a, r, l son morfismos en $Z_l(\mathcal{C})$. Todo esto se prueba de manera rutinaria directamente a partir de la definición de $Z_l(\mathcal{C})$ y los axiomas de categoría monoidal.

Para la segunda parte de la proposición, hay que verificar que u_B es un morfismo en $Z_l(\mathcal{C})$ y que la τ así definida es natural. Veamos esto en el caso de que $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta para ahorrar espacio.

Tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B \otimes X & \xrightarrow{u_B \otimes X} & B \otimes A \otimes X \\ A \otimes v_X \downarrow & \searrow u_{B \otimes X} & \downarrow B \otimes u_X \\ A \otimes X \otimes B & & B \otimes X \otimes A \\ u_X \otimes B \downarrow & \searrow u_{X \otimes B} & \downarrow v_X \otimes A \\ X \otimes A \otimes B & \xrightarrow{X \otimes u_B} & X \otimes B \otimes A \end{array}$$

es conmutativo, pues los triángulos son conmutativos por ser u una trenza parcial laxa, y el cuadrilátero interior por naturalidad de u . Además por coherencia del producto $\otimes$ se tiene que

$$(l_A^{-1} \circ r_A \otimes B) \circ (A \otimes l_B^{-1} \circ r_B) = (l_A^{-1} \otimes B) \circ (A \otimes r_B) = l_{A \otimes B}^{-1} \circ r_{A \otimes B})$$

por lo que $u_B \in Z_l(\mathcal{C})$. Por otra parte, dados $f: (A, u) \rightarrow (C, w)$ y $g: (B, v) \rightarrow (D, t)$ en $Z_l(\mathcal{C})$ la naturalidad de τ se expresa como la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (A, u) \otimes (B, v) & \xrightarrow{f \otimes g} & (C, w) \otimes (D, t) \\ u_B \downarrow & & \downarrow w_D \\ (B, v) \otimes (A, u) & \xrightarrow{g \otimes f} & (D, t) \otimes (C, w) \end{array}$$

que se puede reescribir como el diagrama exterior en

$$\begin{array}{ccccc}
 (A, u) \otimes (B, v) & \xrightarrow{f \otimes B} & (C, w) \otimes (B, v) & \xrightarrow{C \otimes g} & (C, w) \otimes (D, t) \\
 \downarrow u_B & & \downarrow w_B & & \downarrow w_D \\
 (B, v) \otimes (A, u) & \xrightarrow{B \otimes f} & (B, v) \otimes (C, w) & \xrightarrow{g \otimes C} & (D, t) \otimes (C, w)
 \end{array}$$

donde el cuadrado izquierdo conmuta por ser f morfismo en el centro laxo de la categoría, y el derecho por naturalidad de γ . $\square$

En los razonamientos anteriores, al considerar como objetos pares (A, u) donde A es un objeto en $\mathcal{C}$ y u es una trenza parcial, obtenemos la definición del centro $Z(\mathcal{C})$ de la categoría. Es inmediato notar que el centro es monoidal trenzado. Además, toda categoría trenzada laxa $(\mathcal{C}, \tau)$ tiene una subcategoría plena monoidal trenzada, obtenida al tomar como objetos los X con $\tau_{X,-}$ invertible. Notamos que esta construcción aplicada a $Z_l(\mathcal{C})$ resulta en $Z(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta con trenza laxa τ , observamos que el functor de olvido $U: Z_l(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ tiene una sección dada por $X \mapsto (X, \tau_{X,-})$ y este functor es monoidal estricto. A partir de esto tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN. 1.9. *Existe una biyección entre trenzas laxas sobre $\mathcal{C}$ y secciones monoidales estrictas de U .*

DEMOSTRACIÓN. A partir de lo observado anteriormente resta, dada una sección $R: \mathcal{C} \rightarrow Z_l(\mathcal{C})$ de U , definir una trenza laxa en $\mathcal{C}$. Tenemos que R está dado en objetos por $R(X) = (X, \tau^X)$ y en morfismos por $R(f) = f$, donde $\tau^X: X \otimes - \Rightarrow - \otimes X$ es una trenza parcial laxa. Veamos que la familia de morfismos $\tau_{X,Y} = \tau_Y^X$ define una transformación natural. La naturalidad en Y es parte de las hipótesis, con lo cual queda verificar la naturalidad en la primera variable. Dado un morfismo $f: X \rightarrow Z$ en $\mathcal{C}$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes W & \xrightarrow{\tau_W^X} & W \otimes X \\
 f \otimes 1 \downarrow & & \downarrow 1 \otimes f \\
 Z \otimes W & \xrightarrow{\tau_W^Z} & W \otimes Z
 \end{array}$$

que es conmutativo pues $f = R(f): (X, \tau^X) \rightarrow (Z, \tau^Z)$, con lo cual τ es una transformación natural.

Resta verificar que τ es una trenza laxa. Esto es equivalente a la conmutatividad de los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\tau_{Y \otimes Z}^X} & Y \otimes Z \otimes X \\
 \searrow \tau_Y^X \otimes Z & & \uparrow Y \otimes \tau_Z^X \\
 & & Y \otimes X \otimes Z
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\tau_Z^{X \otimes Y}} & Z \otimes X \otimes Y \\
 \searrow X \otimes \tau_Z^Y & & \uparrow \tau_Z^{X \otimes Y} \\
 & & X \otimes Z \otimes Y
 \end{array}$$

El izquierdo conmuta pues τ^X es una trenza parcial laxa y el derecho porque R es monoidal estricto, lo que se traduce en $(X \otimes Y, \tau^{X \otimes Y}) = (X, \tau^X) \otimes (Y, \tau^Y) = (X \otimes Y, (\tau^X \otimes Y) \circ (X \otimes \tau^Y))$. $\square$

2. Functores opmonoidales

DEFINICIÓN. 1.10. Dadas $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I)$ y $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \otimes', I')$ categorías monoidales, un *functor opmonoidal* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ es una terna (F, F_2, F_0) donde $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor, $F_2: F \circ \otimes \Rightarrow \otimes' \circ (F \times F)$ es una transformación natural y $F_0: F(I) \rightarrow I'$ es un morfismo en $\mathcal{D}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(a)} & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 \downarrow F_{2,X \otimes Y, Z} & & \downarrow F_{2,X, Y \otimes Z} \\
 F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\
 \downarrow F_{2,X, Y \otimes' 1_{F(Z)}} & & \downarrow 1_{F(X)} \otimes' F_{2,Y, Z} \\
 (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \xrightarrow{a'} & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F(X \otimes I) & \xrightarrow{F_{2,X, I}} & F(X) \otimes' F(I) & \quad & F(I \otimes X) & \xrightarrow{F_{2,I, X}} & F(I) \otimes' F(X) \\
 \downarrow F(l_X) & & \downarrow 1_{F(X)} \otimes' F_0 & & \downarrow F(r_X) & & \downarrow F_0 \otimes' 1_{F(X)} \\
 F(X) & \xleftarrow{l'_{F(X)}} & F(X) \otimes' I' & & F(X) & \xleftarrow{r'_{F(X)}} & I' \otimes' F(X)
 \end{array}$$

La conmutatividad del hexágono será llamada “coasociatividad” de F_2 y la de los cuadrados “counitaridad” de (F_2, F_0) . Algunos autores llaman a estos funtores monoidales colaxos.

Un functor opmonoidal se dice fuerte (estricto) si F_2 y F_0 son invertibles (identidades).

Revirtiendo la dirección de F_2 y F_0 en la definición anterior, obtenemos la definición de functor monoidal.

OBSERVACIÓN. 1.11. El functor identidad en $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ es opmonoidal con $(1_{\mathcal{C}})_{2,X,Y} = 1_{X \otimes Y}$ y $(1_{\mathcal{C}})_0 = 1_I$ que seguiremos notando como $1_{\mathcal{C}}$.

La composición de dos funtores opmonoidales $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ es también opmonoidal con

$$(GF)_0 = G_0 G(F_0) \quad (GF)_2 = G_2 G(F_2)$$

Salvo que se especifique lo contrario, estas serán las estructuras que tomaremos en la identidad y en cualquier composición de funtores opmonoidales.

EJEMPLO 1.12. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías cartesianas con productos binarios y objeto terminal escogidos (Ejemplo 1.2). Entonces todo functor $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene una única estructura opmonoidal. En efecto, supongamos que (F, F_2, F_0) es opmonoidal. Notamos que $F_0: F(1_{\mathcal{B}}) \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ es el único morfismo posible, dado por ser $1_{\mathcal{C}}$ objeto terminal.

Para estudiar F_2 tenemos los siguientes diagramas,

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X \times Y) & \xrightarrow{F_{2,X,Y}} & F(X) \times F(Y) & & F(X) \times F(Y) \\
 \downarrow F(1 \times !) & & \downarrow 1 \times F(!) & & \downarrow 1 \times F(!) \\
 F(X \times 1_{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{F_{2,X,1_{\mathcal{B}}}} & F(X) \times F(1_{\mathcal{B}}) & & F(X) \times F(1_{\mathcal{B}}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow 1 \times ! & & \downarrow 1 \times ! \\
 F(X) & \xleftarrow{\cong} & F(X) \times 1_{\mathcal{C}} & & F(X) \times 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cong} F(X)
 \end{array}$$

$F(p_1)$ (curved arrow from $F(X \times Y)$ to $F(X)$) p_1 (diagonal arrow from $F(X) \times F(Y)$ to $F(X) \times 1_{\mathcal{C}}$)

El diagrama izquierdo conmuta pues el cuadrado superior conmuta a partir de la naturalidad de F_2 , el inferior por la counitaridad de F y el subdiagrama restante pues $X \times 1_{\mathcal{B}} \cong X$ mediante el morfismo $p_1: X \times 1_{\mathcal{B}} \rightarrow X$. El diagrama derecho conmuta a partir de razonamientos similares: tenemos que $F(X) \times 1_{\mathcal{C}} \cong F(X)$ mediante p_1 y $(1 \times !) \circ (1 \otimes F(!)) = 1 \times !: F(X) \times F(Y) \rightarrow F(X) \times 1_{\mathcal{C}}$, con lo cual el diagrama conmuta por definición de los morfismos verticales.

Con lo anterior deducimos que $F(p_1) = p_1 \circ F_2$ y de la misma manera se deduce $F(p_2) = p_2 \circ F_2$. Tenemos entonces que F_2 es necesariamente el morfismo inducido por $F(p_1)$ y $F(p_2)$ bajo la propiedad universal del producto.

Concluimos observando que F_2 y F_0 así definidas forman una estructura opmonoidal. Por un lado, poscomponiendo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F(X \times Y \times Z) & \xrightarrow{F_{2,X \times Y,Z}} & F(X \times Y) \times F(Z) \\
 \downarrow F_{2,X,Y \times Z} & & \downarrow F_{2,X,Y \times 1_{F(Z)}} \\
 F(X) \times F(Y \times Z) & \xrightarrow{1_{F(X)} \times F_{2,Y,Z}} & F(X) \times F(Y) \times F(Z)
 \end{array}$$

con las proyecciones p_i , obtenemos diagramas conmutativos, de lo que se deduce la conmutatividad del diagrama en cuestión.

Por otro lado, por lo observado anteriormente, se tiene $(1_{F(X)} \times F_0) \circ F_{2,X,1_{\mathcal{B}}} = p_1 \circ F_{2,X,1_{\mathcal{B}}} = F(p_1)$ y de la misma manera $(F_0 \times 1_{F(X)}) \circ F_{2,1_{\mathcal{B}},X} = F(p_2)$, con lo cual tenemos la unitaridad de F .

Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$, fijado un objeto A de $\mathcal{C}$, podemos definir un functor $- \otimes A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dado por $- \otimes A(X) = X \otimes A$ y $- \otimes A(f) = f \otimes 1_A$. Este functor es la composición $\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times 1 \xrightarrow{1_{\mathcal{C}} \times A} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$, por lo que es claramente un functor.

A partir de esta clase de funtores, obtenemos un ejemplo de functor opmonoidal que será central para esta monografía.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, A un objeto de la misma, morfismos $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ y $\varepsilon: A \rightarrow I$ y $\sigma: A \otimes - \Rightarrow - \otimes A$ una transformación natural tal que $\sigma_I = 1_A$. Notamos $T = A \otimes -$ y definimos $T_{2,X,Y} = (A \otimes \sigma_X \otimes Y) \circ (\Delta \otimes X \otimes Y)$ y $T_0 = \varepsilon$. Entonces vale lo siguiente.

LEMA 1.13. [BLV11, Lemma 5.3] *Son equivalentes:*

1. (T, T_2, T_0) es un functor opmonoidal.
2. σ es una trenza parcial laxa y $((A, \sigma), \Delta, \varepsilon)$ es un comonoides en $Z_l(\mathcal{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que la categoría es monoidal estricta.

Supongamos que se cumple el primer punto. Una de las condiciones de counitaridad se traduce en la siguiente igualdad:

$$1_{A \otimes X} = A \otimes X \xrightarrow{\Delta \otimes X} A \otimes A \otimes X \xrightarrow{A \otimes \sigma_X} A \otimes X \otimes A \xrightarrow{A \otimes X \otimes \varepsilon} A \otimes X$$

Considerando $X = I$ y teniendo en cuenta que $\sigma_I = 1_A$ deducimos que $1_A = (A \otimes \varepsilon) \circ \Delta$. A partir de la otra condición de counitaridad se deduce de la misma manera que $1_A = (\varepsilon \otimes A) \Delta$. Es inmediato observar que la coasociatividad de T en objetos $X = Y = Z = I$ se traduce en la coasociatividad de Δ , con lo cual tenemos que (A, Δ, ε) es un comonoide en $\mathcal{C}$. Veamos que σ es una trenza parcial laxa.

Dados X, Y objetos de $\mathcal{C}$, a partir de la igualdad $X \otimes Y = X \otimes Y \otimes I$ deducimos por la coasociatividad de T la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\Delta \otimes X \otimes Y} & A \otimes A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes \sigma_{X \otimes Y}} & A \otimes X \otimes Y \otimes A \\ \Delta \otimes X \otimes Y \downarrow & & & & \downarrow \Delta \otimes X \otimes Y \otimes A \\ A \otimes A \otimes X \otimes Y & & & & A \otimes A \otimes X \otimes Y \otimes A \\ A \otimes \sigma_{X \otimes Y} \downarrow & & & & \downarrow A \otimes \sigma_{X \otimes Y \otimes A} \\ A \otimes X \otimes A \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes X \otimes \Delta \otimes Y} & A \otimes X \otimes A \otimes A \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes X \otimes A \otimes \sigma_Y} & A \otimes X \otimes A \otimes Y \otimes A \end{array}$$

Por otro lado podemos observar los siguientes dos diagramas, donde reemplazamos el símbolo $\otimes$ por $\cdot$ para ahorrar espacio,

$$\begin{array}{ccc} A \cdot X \otimes Y & & A \cdot X \cdot A \cdot Y \\ (A \cdot \sigma_{X \cdot Y}) \circ (\Delta \cdot X \cdot Y) \downarrow & & \downarrow A \cdot X \otimes \Delta \cdot Y \\ A \cdot X \cdot Y \cdot A & & A \cdot X \cdot A \cdot A \cdot Y \xrightarrow{A \cdot X \cdot \varepsilon \cdot A \cdot Y} A \cdot X \cdot A \cdot Y \\ \Delta \cdot X \cdot Y \cdot A \downarrow & \searrow = & \downarrow A \cdot X \cdot A \sigma_Y \\ A \cdot A \cdot X \cdot Y \cdot A & & A \cdot X \cdot A \cdot Y \cdot A \xrightarrow{A \cdot X \cdot \varepsilon \cdot Y \cdot A} A \cdot X \cdot Y \cdot A \\ A \cdot \sigma_{X \cdot Y} \cdot A \downarrow & & \downarrow A \cdot X \cdot \sigma_Y \\ A \cdot X \cdot A \cdot Y \cdot A & \xrightarrow{A \cdot X \otimes \varepsilon \cdot Y \cdot A} & A \cdot X \cdot Y \cdot A \end{array}$$

El izquierdo se deduce conmutativo a partir de la igualdad $(1 \otimes T_0) \circ T_{2, X, I} = 1$ tensorizada por $Y \otimes A$ y el derecho a partir de que (A, Δ, ε) es un comonoide en $\mathcal{C}$ y la functorialidad de $\otimes$.

De la conmutatividad de los tres diagramas anteriores deducimos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes X \otimes Y} & A \otimes A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes \sigma_{X \otimes Y}} & A \otimes X \otimes Y \otimes A \\ & & \searrow A \otimes \sigma_{X \otimes Y} & & \uparrow A \otimes X \otimes \sigma_Y \\ & & & & A \otimes X \otimes A \otimes Y \end{array}$$

Con esto, podemos deducir la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{\sigma_{X \otimes Y}} & X \otimes Y \otimes A \\
 & \nearrow = & \uparrow \varepsilon \otimes A \otimes X \otimes Y & & \uparrow \varepsilon \otimes X \otimes Y \otimes A \\
 A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes X \otimes Y} & A \otimes A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes \sigma_{X \otimes Y}} & A \otimes X \otimes Y \otimes A \\
 & \searrow = & \downarrow \varepsilon \otimes A \otimes X \otimes Y & & \downarrow A \otimes X \otimes \sigma_Y \\
 & & A \otimes X \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes \sigma_X \otimes Y} & A \otimes X \otimes A \otimes Y \\
 & & & & \downarrow \varepsilon \otimes X \otimes A \otimes Y \\
 & & & & X \otimes A \otimes Y \\
 & & & \nwarrow \delta_X \otimes Y & \\
 & & & &
 \end{array}$$

concluyendo que σ es una trenza parcial laxa.

Veamos ahora que los morfismos Δ y ε están en el centro laxo. Esto se traduce en las igualdades

$$(X \otimes \Delta) \circ \sigma_X = (\sigma_X \otimes A) \circ (A \otimes \sigma_X) \circ (\Delta \otimes X) \quad \text{y} \quad (X \otimes \varepsilon) \circ \sigma_X = \varepsilon \otimes X$$

Dichas igualdades se deducen de la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \otimes A \\
 & \nearrow = & \uparrow \varepsilon \otimes A \otimes X & & \\
 A \otimes X & \xrightarrow{\Delta \otimes X} & A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes \sigma_X} & A \otimes X \otimes A \\
 & \searrow = & & & \downarrow A \otimes X \otimes \varepsilon \\
 & & & & A \otimes X & \xrightarrow{\varepsilon \otimes X} & X
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes X & \xrightarrow{\Delta \otimes X} & A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes \sigma_X} & A \otimes X \otimes A \\
 & \nearrow = & \downarrow \Delta \otimes X & & \downarrow \Delta \otimes X \otimes A & & \downarrow \Delta \otimes X \otimes A \\
 A \otimes X & \xleftarrow{\varepsilon \otimes A \otimes X} & A \otimes A \otimes X & & A \otimes A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes A \otimes X \otimes A} & A \otimes X \otimes A \\
 \downarrow \sigma_X & & \downarrow A \otimes \sigma_X & & \downarrow A \otimes \sigma_X \otimes A & & \downarrow \sigma_X \otimes A \\
 X \otimes A & & A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{A \otimes X \otimes \Delta} & A \otimes X \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes X \otimes A \otimes A} & X \otimes A \otimes A \\
 & & & & \downarrow X \otimes \Delta & & \\
 & & & & X \otimes A & &
 \end{array}
 \end{array}$$

El primer diagrama se deduce conmutativo a partir de la unitaridad de T y de $\otimes$ functor y el segundo a partir de que (A, Δ, ε) es un comonoide y la coasociatividad de T vista en objetos X, I, I .

Para el recíproco, se utilizan diagramas similares a los utilizados, demostrando la coasociatividad de T (a partir de que σ es una trenza laxa) y la counitaridad de T (a partir de que ε son morfismos en el centro). Dejamos los detalles a cargo del lector. $\square$

Si A es un comonoide en una categoría monoidal con trenza laxa τ , recordando 1.9, tenemos que A se puede pensar en el centro con trenza parcial $\tau_{A,-}$ y los morfismos Δ y ε están automáticamente en el centro. Luego el Lema anterior nos dice que $T = A \otimes -$ es un functor opmonoidal, con estructura $T_{2,X,Y} = (A \otimes \tau_{A,X} \otimes Y) \circ (\Delta \otimes X \otimes Y)$ y $T_0 = \varepsilon$.

3. Adjunciones opmonoidales

DEFINICIÓN. 1.14. Una transformación natural $\sigma: F \Rightarrow G$ entre funtores opmonoidales es *opmonoidal* si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} F(X \otimes Y) & \xrightarrow{F_2} & F(X) \otimes F(Y) \\ \sigma_{X \otimes Y} \downarrow & & \downarrow \sigma_X \otimes \sigma_Y \\ G(X \otimes Y) & \xrightarrow{G_2} & G(X) \otimes G(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(I) & \xrightarrow{\sigma_I} & G(I) \\ & \searrow F_0 & \downarrow G_0 \\ & & I \end{array}$$

Es claro que la transformación identidad sobre un functor opmonoidal y que la composición vertical de transformaciones opmonoidales son opmonoidales. La definición de transformación monoidal entre funtores monoidales se obtiene revirtiendo la dirección de las flechas F_2 , G_2 , F_0 y G_0 .

En la misma línea que el Ejemplo 1.12, tenemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.15. Dadas categorías cartesianas $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ con productos escogidos y funtores $F, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ con la estructura opmonoidal de Ejemplo 1.12, toda transformación natural entre los mismos es opmonoidal. En efecto, $\alpha: F \Rightarrow G$ es opmonoidal si conmutan los siguientes dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc} F(1_{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\alpha_{1_{\mathcal{B}}}} & G(1_{\mathcal{B}}) \\ & \searrow ! & \downarrow ! \\ & & 1_{\mathcal{C}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(X \times Y) & \xrightarrow{\alpha_{X \times Y}} & G(X \times Y) \\ F_{2,X,Y} \downarrow & & \downarrow G_{2,X,Y} \\ F(X) \times F(Y) & \xrightarrow{\alpha_X \times \alpha_Y} & G(X) \times G(Y) \end{array}$$

El izquierdo conmuta porque $1_{\mathcal{C}}$ es terminal. Por otro lado, la conmutatividad del diagrama derecho es equivalente a las conmutatividades del mismo poscompuesto con las proyecciones p_1 y p_2 . Si componemos con p_1 (será análogo con p_2), obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X \times Y) & \xrightarrow{\alpha_{X \times Y}} & G(X \times Y) \\ F(p_1) \downarrow & & \downarrow G(p_1) \\ F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \end{array}$$

que conmuta por la naturalidad de α .

DEFINICIÓN. 1.16. Una *adjunción (op)monoidal* consiste en dos funtores (op)monoidales F, G tales que $F \dashv G$ y la unidad η y counidad ε de la adjunción son transformaciones naturales (op)monoidales.

DEFINICIÓN. 1.17. Decimos que un functor F es una equivalencia monoidal entre dos categorías monoidales si existe G functor monoidal en sentido opuesto e isomorfismos monoidales $1 \cong GF$ y $FG \cong 1$.

A partir de resultados que se verán en esta sección se puede observar lo siguiente:

OBSERVACIÓN. 1.18. Son equivalentes:

- F es una equivalencia monoidal.
- F es una equivalencia y es monoidal fuerte.

Los siguientes resultados permiten describir la relación entre adjunciones opmonoidales y funtores opmonoidales fuertes.

LEMA 1.19. 1. Dada una adjunción $F \dashv G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ de unidad α y counidad β , y funtores $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, $V: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, existe una biyección entre transformaciones $\theta: VG \Rightarrow U$ y $\sigma: V \Rightarrow UF$ dada por

$$(VG \xrightarrow{\theta} U) \mapsto (V \xrightarrow{V\alpha} VGF \xrightarrow{\theta F} UF) \quad \text{y} \quad (V \xrightarrow{\sigma} UF) \mapsto (VG \xrightarrow{\sigma G} UFG \xrightarrow{U\beta} U)$$

2. Dada una adjunción $F \dashv G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ de unidad α y counidad β , y funtores $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$, $V: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, existe una biyección entre transformaciones $\theta: FV \Rightarrow U$ y $\sigma: V \Rightarrow GU$ dada por

$$(FV \xrightarrow{\theta} U) \mapsto (V \xrightarrow{\alpha V} GFV \xrightarrow{G\theta} GU) \quad \text{y} \quad (V \xrightarrow{\sigma} GU) \mapsto (FV \xrightarrow{F\sigma} FGU \xrightarrow{\beta U} U)$$

Es inmediato verificar que estos procesos son inversos entre sí a partir de la naturalidad de las transformaciones y las identidades de triángulo de las adjunciones.

LEMA 1.20. Supongamos que tenemos $F \dashv G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y $F' \dashv G': \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C}'$, con unidad y counidad α, β y α', β' respectivamente, y $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ y $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$. Hay una biyección entre transformaciones naturales $F'T \Rightarrow SF$ y $TG \Rightarrow G'S$, dada por

$$\lambda: F'T \Rightarrow SF \mapsto (TG \xrightarrow{\alpha' TG} G'F'TG \xrightarrow{G'\lambda G} G'SFG \xrightarrow{G'S\beta} G'S) \quad (1)$$

$$\chi: TG \Rightarrow G'S \mapsto (F'T \xrightarrow{F'T\alpha} F'TGF \xrightarrow{F'\chi F} F'G'SF \xrightarrow{\beta'SF} SF) \quad (2)$$

Se verifica fácilmente que estos procesos son inversos entre sí a partir del lema anterior. Notamos $\lambda^\# = \chi$ y $\chi^\# = \lambda$ y decimos que son compañeras entre sí. La noción de “2-célula compañera” ya aparece en [KS74], donde se explica con claridad usando categorías dobles.

LEMA 1.21. Las transformaciones $\lambda^\#$ y $\chi^\#$ son las únicas que hacen conmutar los diagramas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} F'G'S & \xrightarrow{\beta'S} & S \\ \uparrow F'\lambda^\# & & \uparrow S\beta \\ F'TG & \xrightarrow{\lambda G} & SFG \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\alpha'T} & G'F'T \\ T\alpha \downarrow & & \downarrow G'\chi^\# \\ TGF & \xrightarrow{\chi F} & G'SF \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos lo anterior en el caso de λ y $\lambda^\#$, el otro es análogo. Tomando $V = TG$, $U = S$ y la adjunción $F' \dashv G'$ en el segundo ítem de Lema 1.19, observamos que $\lambda^\#$ es la imagen por la biyección del camino superior del cuadrado, y la imagen del inferior es por definición la compañera de λ . Luego el cuadrado es conmutativo si y sólo si $\lambda^\#$ es la compañera de λ . La unicidad es consecuencia de que la compañera se obtiene mediante una biyección. $\square$

Dada $F \dashv G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ adjunción entre categorías monoidales, si consideramos los funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightleftharpoons[G \times G]{F \times F} & \mathcal{D} \times \mathcal{D} \\ \downarrow \otimes & & \downarrow \otimes \\ \mathcal{C} & \xrightleftharpoons[G]{F} & \mathcal{D} \end{array}$$

estamos en las hipótesis del lema anterior para transformaciones naturales

$$\lambda: F(- \otimes -) \Rightarrow \otimes(F \times F) \quad \chi: \otimes(G \times G) \Rightarrow G(- \otimes -)$$

de lo cual se obtiene el siguiente teorema:

TEOREMA 1.22. *Sea $F \dashv G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ una adjunción entre categorías monoidales, de unidad η y counidad ε . Entonces hay una biyección entre*

- *Estructuras de functor opmonoidal sobre F .*
- *Estructuras de functor monoidal sobre G .*

Además, (F_2, F_0) y (G_2, G_0) se corresponden bajo esta biyección si y sólo si alguna de las siguientes condiciones (conmutatividad de los diagramas) vale:

1.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\eta_{X \otimes Y}} & GF(X \otimes Y) \\ \downarrow \eta_X \otimes \eta_Y & & \downarrow G(F_2, X, Y) \\ GF(X) \otimes GF(Y) & \xrightarrow{G_2, F(X), F(Y)} & G(F(X) \otimes F(Y)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta_I} & GF(I) \\ \searrow G_0 & & \downarrow G(F_0) \\ & & G(I) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} F(G(Z) \otimes G(W)) & \xrightarrow{F_2, G(Z), G(W)} & FG(Z) \otimes FG(W) \\ \downarrow F(G_2, Z, W) & & \downarrow \varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W \\ FG(Z \otimes W) & \xrightarrow{\varepsilon_{Z \otimes W}} & Z \otimes W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(I) & & \\ \downarrow F(G_0) & \searrow F_0 & \\ FG(I) & \xrightarrow{\varepsilon_I} & I \end{array}$$

3. F_2 es la compañera de G_2 dada por

$$F(X \otimes Y) \xrightarrow{F(\eta_X \otimes \eta_Y)} F(GF(X) \otimes GF(Y)) \xrightarrow{F(G_2)} FG(F(X) \otimes F(Y)) \xrightarrow{\varepsilon_{F(X) \otimes F(Y)}} F(X) \otimes F(Y)$$

y F_0 es la compañera de G_0 , dada por $F(I) \xrightarrow{F(G_0)} FG(I) \xrightarrow{\varepsilon_I} I$.

4. G_2 es la compañera de F_2 dada por

$$G(Z) \otimes G(W) \xrightarrow{\eta_{G(Z) \otimes G(W)}} GF(G(Z) \otimes G(W)) \xrightarrow{G(F_2)} G(FG(Z) \otimes FG(W)) \xrightarrow{G(\varepsilon \otimes \varepsilon)} G(Z \otimes W)$$

y G_0 es la compañera de F_0 , dada por $I \xrightarrow{\eta_I} GF(I) \xrightarrow{G(F_0)} G(I)$

DEMOSTRACIÓN. Por lo descrito en el Lema 1.20, tenemos que las condiciones 3 y 4 son equivalentes. Veremos la equivalencia entre 1 y 3 (la equivalencia entre 2 y 3 es análoga).

Por el Lema 1.21 tenemos que F_2 es la compañera de G_2 si y sólo si se cumple la conmutatividad del diagrama izquierdo del primer punto, dado que la compañera de G_2 es la única transformación que hace conmutar ese diagrama.

Luego queda observar que F_0 es la compañera de G_0 si y sólo si $G_0 = G(F_0) \circ \eta_I$. Esto es inmediato a partir de Lema 1.21 y de identificar a los objetos unidades como funtores con dominio en la categoría 1 (consta de un objeto y el morfismo identidad en éste) y pensar a F_0 como una transformación natural $F \otimes I \Rightarrow I$ y a G_0 de la misma manera.

Queda ver que (F, F_2, F_0) es opmonoidal si y sólo si (G, G_2, G_0) es monoidal. Teniendo en cuenta el Teorema de Coherencia de Mac Lane, haremos la prueba para categorías monoidales estrictas.

Tenemos que la condición de functor opmonoidal de F dada por la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} F(X \otimes Y \otimes Z) & \xrightarrow{F_{2,X,Y \otimes Z}} & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \\ \downarrow F_{2,X \otimes Y,Z} & & \downarrow 1 \otimes F_{2,Y,Z} \\ F(X \otimes Y) \otimes F(Z) & \xrightarrow{F_{2,X,Y} \otimes 1} & F(X) \otimes F(Y) \otimes F(Z) \end{array}$$

es equivalente al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\eta} & GF(X \otimes Y \otimes Z) & \xrightarrow{G(F_{2,X,Y \otimes Z})} & G(F(X) \otimes F(Y \otimes Z)) \\ & & \downarrow G(F_{2,X \otimes Y,Z}) & & \downarrow G(1 \otimes F_{2,Y,Z}) \\ & & G(F(X \otimes Y) \otimes F(Z)) & \xrightarrow{G(F_{2,X,Y} \otimes 1)} & G(F(X) \otimes F(Y) \otimes F(Z)) \end{array}$$

Una implicancia es clara. La otra se deduce de la propiedad universal de η (los dos posibles caminos en el primer diagrama son factorizaciones a través de η del mismo mapa).

Con esto podemos obtener otro diagrama equivalente (omitimos subíndices en las transformaciones y cambiamos $\otimes$ por $\cdot$ para ahorrar espacio):

$$\begin{array}{ccccc}
 & GF(X).GF(Y).GF(Z) & \xrightarrow{1.G_2} & GF(X).G(F(Y).F(Z)) & \\
 & \nearrow \eta.\eta.\eta & & \uparrow 1.G(F_2) & \\
 X.Y.Z & \xrightarrow{\eta.\eta} & GF(X).GF(Y.Z) & \xrightarrow{G_2} & GF(X).GF(Y.Z) \\
 & \searrow \eta & \downarrow G(F_2) & \downarrow G_2 & \\
 & GF(X.Y.Z) & \xrightarrow{G(F_2)} & G(F(X).F(Y.Z)) & \\
 & \searrow \eta.\eta & \downarrow G(F_2) & \downarrow G(1.F_2) & \\
 & G(F(X.Y).F(Z)) & \xrightarrow{G(F_2.1)} & G(F(X).F(Y).F(Z)) & \\
 & \uparrow G_2 & & \uparrow G_2 & \\
 GF(X).GF(Y).GF(Z) & \xrightarrow{G(F_2).1} & GF(X.Y).GF(Z) & \xrightarrow{G(F_2).1} & G(F(X).F(Y)).GF(Z) \\
 & \searrow G_2.1 & & &
 \end{array}$$

En este diagrama, las conmutatividades resultan del diagrama anterior, de la naturalidad de las transformaciones o de que F_2 y G_2 son compañeras. Notamos que el cuadrilátero exterior no es más que el axioma de asociatividad para el functor G_2 precompuesto con $\eta_X \otimes \eta_Y \otimes \eta_Z$. Por lo tanto, de la asociatividad para G_2 deducimos la coasociatividad para F_2 .

Veamos que la unitaridad de (G_2, G_0) implica la de (F_2, F_0) . Recordando que $G_0 = G(F_0) \circ \eta_I$ y la naturalidad de las transformaciones, y los diagramas que involucran a F_2 y G_2 podemos plantear el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) = F(X \otimes I) & \xrightarrow{F\eta} & FG F(X \otimes I) & \xrightarrow{\varepsilon F} & F(X \otimes I) \\
 \downarrow F(\eta \otimes \eta) & & \downarrow FG(F_2) & & \downarrow F_2 \\
 F(GF(X) \otimes GF(I)) & \xrightarrow{FG_2 F} & FG(F(X) \otimes F(I)) & \xrightarrow{\varepsilon F \otimes F} & F(X) \otimes F(I) \\
 \downarrow F(1 \otimes GF_0) & & \downarrow FG(1 \otimes F_0) & & \downarrow 1 \otimes F_0 \\
 F(GF(X) \otimes G(I)) & \xrightarrow{FG_2} & FG(F(X) \otimes I) = FG F(X) & \xrightarrow{\varepsilon F} & F(X)
 \end{array}$$

de lo cual deducimos $(1 \otimes F_0) \circ F_2 = 1$.

Resta ver que si (F, F_2, F_0) es opmonoidal entonces (G, G_2, G_0) es monoidal. Esto se puede observar a partir del principio de dualidad y el hecho de que la biyección entre (F_2, F_0) y (G_2, G_0) bajo $G^{op} \dashv F^{op}$ es la misma en las categorías opuestas. De esta manera $(F^{op}, F_2^{op}, F_0^{op})$ es monoidal y el argumento anterior implica que $(G^{op}, G_2^{op}, G_0^{op})$ es opmonoidal, es decir, (G, G_2, G_0) es monoidal. $\square$

PROPOSICIÓN. 1.23. Si $F \dashv G$ es una adjunción monoidal, entonces F es monoidal fuerte.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, F tiene una estructura opmonoidal $(\hat{F}_2, \hat{F}_0)$. Veamos que $\hat{F}_2$ y F_2 son inversas.

Tenemos que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y & \xrightarrow{\eta_{X \otimes Y}} & GF(X \otimes Y) \\
 \downarrow \eta_X \otimes \eta_Y & & \downarrow G(\hat{F}_2, X, Y) \\
 GF(X) \otimes GF(Y) & \xrightarrow{G_2, F(X), F(Y)} & G(F(X) \otimes F(Y)) \\
 \nwarrow \eta_{X \otimes Y} & \nearrow G(F_2, X, Y) & \\
 & GF(X \otimes Y) &
 \end{array}$$

dado que $\hat{F}_2$ y G_2 son compañeras (1.22.1) y η es monoidal, con lo cual por la propiedad universal de η deducimos que $F_2 \hat{F}_2 = 1$.

Para ver $\hat{F}_2 F_2 = 1$, por el lema 1.19 tenemos que la conmutatividad de los siguientes diagramas es equivalente.

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) \otimes F(Y) & & FG(Z) \otimes FG(W) \xrightarrow{\varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W} Z \otimes W \\
 \downarrow F_{2, X, Y} \searrow 1 & & \downarrow F_{2, G(Z), G(W)} \nearrow \varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W \\
 F(X \otimes Y) \xrightarrow{\hat{F}_2, X, Y} F(X) \otimes F(Y) & & F(G(Z) \otimes G(W)) \xrightarrow{\hat{F}_2, G(Z), G(W)} FG(Z) \otimes FG(W)
 \end{array}$$

Verificamos que el diagrama de la derecha conmuta, agregando los siguientes mapas

$$\begin{array}{ccccc}
 FG(Z) \otimes FG(W) & & \xrightarrow{\varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W} & & Z \otimes W \\
 \downarrow F_{2, G(Z), G(W)} & & & & \uparrow \varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W \\
 F(G(Z) \otimes G(W)) & \xrightarrow{F(G_2, Z, W)} & FG(Z \otimes W) & \xrightarrow{\varepsilon_{Z \otimes W}} & Z \otimes W \\
 \searrow \hat{F}_2, G(Z), G(W) & & \nearrow \varepsilon_Z \otimes \varepsilon_W & & \\
 & FG(Z) \otimes FG(W) & & &
 \end{array}$$

el cuadrilátero superior conmuta por ser ε monoidal, y el de abajo por ser $\hat{F}_2$ compañera de G_2 .

Resta verificar que $\hat{F}_0$ y F_0 son inversas. Utilizando que η es monoidal y que G_0 es compañera de $\hat{F}_0$ se deduce que el diagrama a continuación conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta_I} & GF(I) \\
 \downarrow G_0 & \searrow & \downarrow G(\hat{F}_0) \\
 & & G(I) \\
 \downarrow \eta_I & & \downarrow G(F_0) \\
 & & GF(I)
 \end{array}$$

de lo cual, nuevamente por la propiedad universal de η , se deduce $F_0 \hat{F}_0 = 1$.

Por otro lado, en este caso por ser ε monoidal tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{F_0} & F(I) \\
 & \searrow & \downarrow F(G_0) \\
 & & FG(I) \\
 & \nearrow & \downarrow \varepsilon_I \\
 I & & I
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \hat{F}_0 \\ 1 \end{array}$$

con lo cual $\hat{F}_0 F_0 = 1$, concluyendo la prueba. $\square$

PROPOSICIÓN. 1.24. *Si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es monoidal fuerte y $F \dashv G$, entonces G tiene una única estructura monoidal tal que la adjunción $F \dashv G$ es monoidal (es decir, la unidad y counidad son transformaciones monoidales).*

DEMOSTRACIÓN. Si (F, F_2, F_0) es monoidal fuerte, entonces (F, F_2^{-1}, F_0^{-1}) es opmonoidal fuerte, con lo cual por el teorema 1.22 obtenemos G_2 y G_0 tales que (G, G_2, G_0) es monoidal. Además, el teorema dice que G_2 y G_0 son las únicas transformaciones que hacen a la unidad y counidad de $F \dashv G$ monoidales, dado que por las caracterizaciones del teorema, transformaciones que cumplen con lo anterior son necesariamente las compañeras de F_2^{-1} y F_0^{-1} . $\square$

Dada una adjunción opmonoidal $F \dashv G$, tenemos que por dualidad $G^{op} \dashv F^{op}$ y esta adjunción es monoidal. Además, si F es monoidal fuerte al revertir la dirección de las flechas se tiene que F^{op} es opmonoidal fuerte. Con estas técnicas se prueban los resultados duales de los anteriores a continuación:

- OBSERVACIÓN. 1.25.**
- Si $F \dashv G$ es una adjunción opmonoidal, entonces G es opmonoidal fuerte.
 - Si $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es opmonoidal fuerte y $F \dashv G$, entonces F tiene una única estructura opmonoidal tal que la adjunción es opmonoidal.

4. Categorías monoidales cerradas

Las ideas de esta sección se basan en la sección 1.5 de [Kel05] y [JS93].

DEFINICIÓN. 1.26. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es cerrada a izquierda (derecha) si para todo objeto X de $\mathcal{C}$ el functor $(- \otimes X)$ ($(X \otimes -)$) tiene adjunto a derecha.

Se nota a los adjuntos a derecha como $[X, -]$ y se los llama *homs internos* (a izquierda o a derecha respectivamente). Esta adjunción tiene una counidad $\text{ev}_Y: [X, Y] \otimes X \rightarrow Y$ y una unidad $\text{coev}_Y: Y \rightarrow [X, Y \otimes X]$ llamadas evaluación y coevaluación.

Es inmediato observar que $\mathcal{C}$ es cerrada a derecha si y sólo si $\mathcal{C}^{rev}$ es cerrada a izquierda. Con esto, dada la equivalencia monoidal $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{rev}$ se tiene que si $\mathcal{C}$ es trenzada, entonces es cerrada a izquierda si y sólo si es cerrada a derecha.

OBSERVACIÓN. 1.27. Si $\mathcal{C}$ es una categoría cerrada a izquierda, estamos en las hipótesis de B.2 bajo las biyecciones $\mathcal{C}(- \otimes X, Z) \cong \mathcal{C}(-, [X, Z])$ con lo cual se deduce la existencia de un functor $[-, -]: \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $[X, Z]$ es un hom interno a izquierda para todos X, Z objetos de $\mathcal{C}$.

Dado que los adjuntos son únicos a menos de isomorfismos canónicos, los *homs* internos son también únicos a menos de isomorfismos canónicos.

Dados objetos X, Y, Z en la categoría, considerando el morfismo

$$[Y, Z] \otimes [X, Y] \otimes X \xrightarrow{1 \otimes \text{ev}_X} [Y, Z] \otimes Y \xrightarrow{\text{ev}_Z} Z$$

deducimos a partir de la adjunción la existencia de un “morfismo composición” $[Y, Z] \otimes [X, Y] \rightarrow [X, Z]$, lo que motiva a pensar a estos objetos como *homs* en la categoría. Además, se tiene un isomorfismo $[X \otimes Y, Z] \cong [X, [Y, Z]]$, natural en X, Y, Z , que se obtiene a partir de el lema de Yoneda y observar que existen biyecciones naturales dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(W, [X \otimes Y, Z]) &\cong \mathcal{C}(W \otimes (X \otimes Y), Z) \cong \mathcal{C}((W \otimes X) \otimes Y, Z) \\ &\cong \mathcal{C}(W \otimes X, [Y, Z]) \cong \mathcal{C}(W, [X, [Y, Z]]) \end{aligned}$$

donde las biyecciones se deducen de la adjunción, salvo la segunda que se deduce de precomponer con el isomorfismo de asociatividad del producto tensorial.

De la misma manera, recordando los isomorfismos $r_X: X \otimes I \rightarrow X$, tenemos que

$$\mathcal{C}(X, Z) \cong \mathcal{C}(X \otimes I, Z) \cong \mathcal{C}(X, [I, Z])$$

siendo estas biyecciones naturales, con lo cual por el Lema de Yoneda se tiene que $Z \cong [I, Z]$ siendo este isomorfismo natural en Z .

5. Functores cerrados

Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un functor monoidal $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y un objeto $X \in \mathcal{C}$ tal que existen los *homs* internos a izquierda, podemos observar el siguiente diagrama no conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xleftarrow{- \otimes X} \\ \xrightarrow{[X, -]} \end{array} & \mathcal{C} \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathcal{D} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\otimes U(X)} \\ \xrightarrow{[U(X), -]} \end{array} & \mathcal{D} \end{array}$$

La compañera de la transformación $U_{2,-,X}: U(-) \otimes U(X) \Rightarrow U(- \otimes X)$ es una transformación

$$(U_{2,-,X})^\# : U([X, -]) \Rightarrow [U(X), U(-)]. \quad (3)$$

Con esto podemos dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN. 1.28. Un functor monoidal $U = (U, U_2, U_0)$ entre categorías monoidales cerradas a izquierda es *cerrado fuerte* si U_0 es invertible y para todo X la compañera de $U_{2,-,X}$ en (3) es invertible.

Diremos que es cerrado estricto si la compañera de $U_{2,-,X}$ es la identidad.

6. Duales y homs internos

DEFINICIÓN. 1.29. Dada $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I)$ categoría monoidal, una dualidad entre dos objetos X, Y es una cuaterna (X, Y, e, d) donde $e: Y \otimes X \rightarrow I$ y $d: I \rightarrow X \otimes Y$ son tales que

$$\begin{array}{ccc} X \cong I \otimes X & \xrightarrow{d \otimes 1_X} & (X \otimes Y) \otimes X \xrightarrow{a} X \otimes (Y \otimes X) \\ & \searrow 1_X & \downarrow 1_X \otimes e \\ & & X \cong X \otimes I \\ \\ Y \cong Y \otimes I & \xrightarrow{1_Y \otimes d} & Y \otimes (X \otimes Y) \xrightarrow{a^{-1}} (Y \otimes X) \otimes Y \\ & \searrow 1_Y & \downarrow e \otimes 1_Y \\ & & Y \cong I \otimes Y \end{array}$$

conmutan. En tal caso se nota $Y \dashv X$ y se dice que Y es un dual a izquierda de X y X es dual a derecha de Y . Los morfismos e, d son llamados evaluación y coevaluación respectivamente.

Los duales son únicos a menos de un único isomorfismo compatible con las evaluaciones y coevaluaciones. Esto se traduce en que dados dos duales a derecha X y X' de un objeto Y , con evaluación y coevaluación e, d y e', d' respectivamente, el morfismo $X \xrightarrow{X \otimes d'} X \otimes Y \otimes X' \xrightarrow{e \otimes X'} X'$ es un isomorfismo, con inverso $X' \xrightarrow{X \otimes d} X' \otimes Y \otimes X \xrightarrow{e' \otimes X} X$, donde en lo anterior se omitieron los morfismos correspondientes a la asociatividad y unidad del producto $\otimes$ para mayor claridad.

Un functor monoidal fuerte envía dualidades en dualidades (ver [TV17], Lemma 1.5). Precisamente, si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor monoidal y (X, Y, e, d) una dualidad en $\mathcal{C}$, entonces $(F(X), F(Y), F_0^{-1}F(e)F_{2,X,Y}, F_{2,Y,X}^{-1}F(d)F_0)$.

OBSERVACIÓN. 1.30. Dados objetos X, Y en $\mathcal{C}$. Se tiene que (X, Y, e, d) dualidad en $\mathcal{C} \iff (Y, X, d, e)$ dualidad en $\mathcal{C}^{op} \iff (Y, X, e, d)$ dualidad en $\mathcal{C}^{rev}$

DEFINICIÓN. 1.31. Una categoría monoidal se dice autónoma si todo objeto X tiene un dual a izquierda y uno a derecha.

Notamos que estos duales no tienen por qué ser isomorfos, a diferencia de los duales en categorías clásicas como los espacios vectoriales de dimensión finita.

Es posible ver que $r_I = l_I: I \otimes I \rightarrow I$ ([JS93, p.24]) de lo cual si llamamos i a este isomorfismo, de los axiomas de categoría monoidal es inmediato verificar que (I, I, i, i^{-1}) es una dualidad, con lo cual tenemos que I es su propio dual tanto a izquierda como a derecha.

OBSERVACIÓN. 1.32. Un dual a izquierda (X^*, e, d) da lugar a un hom interno a izquierda $[X, Y]: = Y \otimes X^*$ con $ev_Y^X = 1_Y \otimes e \circ a_{Y, X^*, X}: (Y \otimes X^*) \otimes X \rightarrow Y$. De la misma manera un dual a derecha da un hom interno a derecha. Luego una categoría autónoma a izquierda es cerrada a izquierda.

El recíproco de la observación anterior no es cierto en general. Dedicaremos lo que queda de este capítulo a esta cuestión.

Dada $\mathcal{C}$ consideramos $E(\mathcal{C})$ (aparece en [JS93], p.26) como la categoría cuyos objetos son endofuntores S dotados de un isomorfismo natural $\sigma_{X,Y}: X \otimes S(Y) \rightarrow S(X \otimes Y)$ y cuyos morfismos $(S, \sigma) \rightarrow (T, \nu)$ son transformaciones naturales $\omega: S \rightarrow T$ tales que

$$\begin{array}{ccc} X \otimes S(Y) & \xrightarrow{\sigma_{X,Y}} & S(X \otimes Y) \\ \downarrow 1_X \otimes \omega_Y & & \downarrow \omega_{X \otimes Y} \\ X \otimes T(Y) & \xrightarrow{\nu_{X,Y}} & T(X \otimes Y) \end{array}$$

conmuta. Dotamos a $E(\mathcal{C})$ con la estructura monoidal dada en objetos por $(S, \nu) \circ (T, \sigma) = (TS, \nu \circ \sigma)$ donde

$$(\nu \circ \sigma)_{X,Y}: X \otimes TS(Y) \xrightarrow{\sigma_{X,S(Y)}} T(X \otimes S(Y)) \xrightarrow{T\nu_{X,Y}} TS(X \otimes Y)$$

la cual es estricta, consecuencia de la asociatividad de la composición tanto para funtores como para transformaciones naturales. Existe un functor $N: \mathcal{C} \rightarrow E(\mathcal{C})$ dado en objetos por $N(X) = (- \otimes X, n_X)$ donde $(n_X)_{Y,Z} = a_{Y,Z,X}^{-1}: Y \otimes (Z \otimes X) \rightarrow (Y \otimes Z) \otimes X$ y en morfismos por $N(f)_A = A \otimes f$.

LEMA 1.33. *N es monoidal fuerte, fiel y pleno.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $\theta: N(X) \rightarrow N(Y)$ en $E(\mathcal{C})$, consideramos el morfismo dado por

$$f = X \xrightarrow{l_X^{-1}} I \otimes X \xrightarrow{\theta_I} I \otimes Y \xrightarrow{l_Y} Y$$

De la naturalidad de a y θ se deduce la conmutatividad del siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes l_X^{-1}} & A \otimes (I \otimes X) & \xrightarrow{a_{A,I,X}^{-1}} & (A \otimes I) \otimes X & \xrightarrow{r_{A \otimes X}} & A \otimes X \\ \downarrow A \otimes f & & \downarrow A \otimes \theta_I & & \downarrow \theta_{A \otimes I} & & \downarrow \theta_A \\ A \otimes Y & \xrightarrow{A \otimes l_Y^{-1}} & A \otimes (I \otimes Y) & \xrightarrow{a_{A,I,Y}^{-1}} & (A \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{r_{A \otimes Y}} & A \otimes Y \end{array}$$

de la cual, junto a los axiomas de unidad de $\otimes$, se deduce que $\theta_A = A \otimes f = N(f)_A$. Luego N es pleno.

Para ver que N es fiel, observamos que si $N(f) = N(f')$, se tiene que $I \otimes f = I \otimes f'$ de lo cual se deduce $f = f'$ por la naturalidad de l .

La estructura de functor monoidal de N viene dada por $N_{2,X,Y} = a_{-,X,Y}: (- \otimes X) \otimes Y \rightarrow - \otimes (X \otimes Y)$ y $N_0 = r_X^{-1}: I \rightarrow I \otimes X$. Como la estructura monoidal en $E(\mathcal{C})$ es estricta, tenemos que el hexágono de asociatividad de N se traduce en un pentágono, que no es más que la restricción de asociatividad a del producto en $-, X, Y, Z$. Los cuadrados de la unitaridad se traducen en los axiomas de unidad y producto (ver Proposición 1.3 [JS93]). $\square$

Se puede notar que el functor de olvido $E(\mathcal{C}) \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ que envía (S, σ) en S es fiel y monoidal estricto, tomando como estructura monoidal en los funtores la composición. Por lo tanto, hay una biyección entre dualidades $e: Y \otimes X \rightarrow I$, $d: I \rightarrow X \otimes Y$ en $\mathcal{C}$ y adjunciones $N(X) \dashv N(Y)$ cuya unidad y counidad están en $E(\mathcal{C})$.

En este contexto tenemos los siguientes resultados que describen el vínculo entre la existencia de duales y los homs internos.

PROPOSICIÓN. 1.34. Dado $X \in \mathcal{C}$, son equivalentes:

1. X tiene un dual a izquierda.
2. $(- \otimes X)$ tiene un adjunto a derecha $[X, -]$ con unidad y counidad η, ε tal que $[X, -], \eta, \varepsilon$ están en $E(\mathcal{C})$.
3. Existe Y junto a un morfismo $e: Y \otimes X \rightarrow I$ tal que el mapa

$$\mathcal{C}(Z, W \otimes Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z \otimes X, W) \quad f \mapsto (1_W \otimes e)(f \otimes 1_X)$$

es una biyección.

4. $(- \otimes X)$ tiene un adjunto a derecha $[X, -]$ y el mapa canónico $Z \otimes [X, I] \rightarrow [X, Z]$ (correspondiente a $Z \otimes \text{ev}: Z \otimes [X, I] \otimes X \rightarrow Z$) es un isomorfismo.
5. $(- \otimes X)$ tiene un adjunto a derecha $[X, -]$ y existe $n: I \rightarrow X \otimes [X, I]$ tal que

$$\eta_I = (I \xrightarrow{n} X \otimes [X, I] \xrightarrow{\sigma_{X, I}} [X, X])$$

donde $\sigma_{X, I}$ es el mapa canónico descrito en el anterior punto.

En estos casos, resulta $[X, I]$ ser dual a izquierda de X .

DEMOSTRACIÓN. En la mayoría de casos asumiremos que las restricciones del producto tensorial son identidades.

(1 $\Rightarrow$ 2): N es monoidal fuerte, con lo que lleva duales en duales, luego si $X \dashv Y$ se tiene que $- \otimes X = N(X) \dashv N(Y)$ y esta adjunción tiene unidad y counidad en $E(\mathcal{C})$.

(2 $\Rightarrow$ 3): Definimos $Y := [X, I]$ y $e := \varepsilon_I: Y \otimes X \rightarrow I$. Queremos probar que fijados $Z, W \in \mathcal{C}$ la función

$$\mathcal{C}(Z, W \otimes [X, I]) \xrightarrow{- \otimes X} \mathcal{C}(Z \otimes X, W \otimes [X, I] \otimes X) \xrightarrow{\mathcal{C}(1, 1 \otimes e)} \mathcal{C}(Z \otimes X, W)$$

es una biyección.

Por hipótesis tenemos un isomorfismo $\sigma_{Z, W}: Z \otimes [X, W] \rightarrow [X, Z \otimes W]$, con lo cual poscomponer con él induce una biyección. Además, tenemos $\varepsilon \in E(\mathcal{C})$, lo que se traduce en la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Z \otimes [X, W] \otimes X & \xrightarrow{1_Z \otimes \varepsilon_W} & Z \otimes W \\ \sigma_{Z, W} \otimes 1_X \downarrow & \nearrow \varepsilon_{Z \otimes W} & \\ [X, Z \otimes W] \otimes X & & \end{array}$$

Con esto, observando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(Z, [X, W]) & \xrightarrow{- \otimes 1_X} & \mathcal{C}(Z \otimes X, [X, W] \otimes X) & \xrightarrow{\mathcal{C}(1, \varepsilon_X)} & \\ \mathcal{C}(1, \sigma_{W, I}) \uparrow & & \mathcal{C}(1, \sigma_{W, I} \otimes 1_X) \uparrow & & \\ \mathcal{C}(Z, W \otimes [X, I]) & \xrightarrow{- \otimes 1_X} & \mathcal{C}(Z \otimes X, W \otimes [X, I] \otimes X) & \xrightarrow{\mathcal{C}(1, 1 \otimes e)} & \mathcal{C}(Z \otimes X, W) \end{array}$$

notamos que la función se escribe como composición de biyecciones ya que $\mathcal{C}(1, \varepsilon_X) \circ (- \otimes 1_X)$ es una de las biyecciones de la adjunción.

(3 $\Rightarrow$ 1): El dual a izquierda de X será Y con evaluación e . Fijados Z, W , llamemos b a la biyección del enunciado. Tomando $Z = I, W = X$ tenemos $d: I \rightarrow X \otimes Y$ obtenido como $b^{-1}(1_X)$. Este morfismo será la coevaluación. Resta probar que se verifican los triángulos de la definición de dual. Por hipótesis d cumple $1_X = (1_X \otimes e)(d \otimes 1_X)$, por otro

lado tomando $Z = Y, W = I$ es $b(1_Y) = e$ con lo cual probando $b((e \otimes 1_Y)(1_Y \otimes d)) = e$ tenemos lo que queremos. Calculamos

$$\begin{aligned} b((e \otimes 1_Y)(1_Y \otimes d)) &= e(e \otimes 1_Y \otimes 1_X)(1_Y \otimes d \otimes 1_X) = (e \otimes e)(1_Y \otimes d \otimes 1_X) \\ &= e(1_Y \otimes 1_X \otimes e)(1_Y \otimes d \otimes 1_X) = e(1_Y \otimes (1_X \otimes e)(d \otimes 1_X)) = e(1_Y \otimes 1_X) = e. \end{aligned}$$

(2 $\Rightarrow$ 4): Sea σ tal que $([X, -], \sigma) \in E(\mathcal{C})$, entonces el isomorfismo $\sigma_{Z,I}$ es el mapa del enunciado pues η, ε pertenecen a $E(\mathcal{C})$.

(4 $\Rightarrow$ 2): Sea $\tau_{Z,Y}: Z \otimes [X, Y] \rightarrow [X, Z \otimes Y]$ correspondiente por la adjunción a $(Z \otimes [X, Y]) \otimes X \cong Z \otimes ([X, Y] \otimes X) \xrightarrow{1 \otimes \text{ev}} Z \otimes Y$. Por hipótesis $\tau_{Z,Y}$ es invertible. Observando el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} Z \otimes Y \otimes [X, I] & \xrightarrow{1 \otimes \tau_{Y,I}} & Z \otimes [X, Y] \\ & \searrow \tau_{Z \otimes Y, I} & \downarrow \tau_{Z,Y} \\ & & [X, Z \otimes Y] \end{array}$$

conmutativo pues ambos caminos se corresponden a $Z \otimes Y \otimes \text{ev}$ por la adjunción (se omitieron isomorfismos estructurales para ahorrar espacio), deducimos que $\tau_{Z,Y}$ es un isomorfismo y $([X, -], \tau) \in E(\mathcal{C})$.

Por definición de τ , el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} Z \otimes ([X, W] \otimes X) & \xrightarrow{\cong} (Z \otimes [X, W]) \otimes X \xrightarrow{\tau_{Z,W} \otimes X} & [X, Z \otimes W] \otimes X \\ \downarrow Z \otimes \text{ev} & & \downarrow \text{ev} \\ Z \otimes W & \xrightarrow{\quad \quad \quad = \quad \quad \quad} & Z \otimes W \end{array}$$

con lo cual la counidad está en $E(\mathcal{C})$. Por ultimo, que la unidad está en $E(\mathcal{C})$ se traduce en la conmutatividad del siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} Z \otimes W & \xrightarrow{\quad \quad \quad = \quad \quad \quad} & Z \otimes W \\ \downarrow Z \otimes \text{coev}_W & & \downarrow \text{coev}_{Z \otimes W} \\ Z \otimes ([X, W \otimes X]) & \xrightarrow{\tau_{Z,W} \otimes X} [X, Z \otimes (W \otimes X)] \xrightarrow{[1, a^{-1}]} & [X, (Z \otimes W) \otimes X] \end{array}$$

que se obtiene por la propiedad universal de ev , dado que si aplicamos el functor $- \otimes X$ y componemos con ev , ambos caminos del diagrama se verifican iguales a la identidad en $(Z \otimes W) \otimes X$ a partir de la naturalidad de las transformaciones y la definición de τ .

(3 $\Rightarrow$ 5): Tenemos que $[X, -] = (- \otimes Y)$ y $\varepsilon_W = (W \otimes Y) \otimes X \simeq W \otimes (Y \otimes X) \xrightarrow{1_W \otimes e}$. Definimos $n: I \rightarrow X \otimes Y$ como el morfismo que va a 1_X por la biyección. Tenemos que η_I es igual a n seguido de $X \otimes Y \cong I \otimes (X \otimes Y) \simeq (I \otimes X) \otimes Y$. Concluimos llamando $\sigma_{X,I}$ a este isomorfismo.

(5 $\Rightarrow$ 1): Definimos $Y := [X, I]$, con lo cual tenemos que $n: I \rightarrow X \otimes Y$ es el candidato a coevaluación. Tomamos $e := \varepsilon_I: Y \otimes X = [X, I] \otimes X \rightarrow I$. Con esto de las identidades triangulares de la adjunción se deduce directamente $1_X = (1_X \otimes e)(n \otimes 1_X)$. Por otro

lado, usando lo anterior se ve que

$$\begin{array}{ccccc}
 Y \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes n \otimes 1} & Y \otimes X \otimes Y \otimes X & \xrightarrow{\varepsilon_I \otimes 1} & Y \otimes X \\
 & \searrow 1 & \downarrow 1 \otimes \varepsilon_I & & \downarrow \varepsilon_I \\
 & & Y \otimes X & \xrightarrow{\varepsilon_I} & I
 \end{array}$$

Como la biyección $\mathcal{C}(Z, [X, I]) \cong \mathcal{C}(Z \otimes X, Y)$ está dada por aplicar $(- \otimes X)$ y poscomponer con ε_I , tenemos $(e \otimes 1)(1 \otimes n) = 1$. $\square$

EJEMPLO 1.35. Sean R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Tenemos, a partir de la equivalencia entre los puntos 1 y 5 de la proposición anterior, que M tiene dual si existen $m_i \in M$ y $f_i: M \rightarrow R$, con $1 \leq i \leq n$ tales que $\sum_i f_i(x)m_i = x$ para todo $x \in M$. Esto es porque $n(1) = \sum_i m_i \otimes f_i$ para ciertos $m_i \in M$ y $f_i: M \rightarrow R$, que por la adjunción deben cumplir $x = \sum_i m_i f_i(x)$ para todo $x \in M$. Notamos que una condición necesaria (aunque no suficiente) es que M sea finitamente generado.

Mónadas sobre categorías monoidales

En este capítulo introducimos el concepto de mónada. Se definen las álgebras para una mónada y se ve cómo éstas forman una categoría denominada la categoría de Eilenberg-Moore. Mostramos que toda adjunción produce una mónada y toda mónada da origen a una adjunción. Se introducen las mónadas opmonoidales y se las caracteriza como aquellas para las que la categoría de Eilenberg-Moore es monoidal y el functor de olvido es monoidal estricto. Se estudia el ejemplo clásico de mónada opmonoidal, dado por tensorizar por un bimonoid en el centro. Por último, se estudian los monoides de Hopf, se da una caracterización de los mismos respecto al mapa de fusión y se ve como esto nos permite generalizar esta idea a las mónadas para obtener el concepto de mónada de Hopf. Las referencias son [Moe02] y [BLV11], para las mónadas y la categorías de Eilenberg-Moore nos basamos en [Bor94].

1. Mónadas y adjunciones

Esta sección se basa en [Bor94].

DEFINICIÓN. 2.1. Una mónada sobre una categoría $\mathcal{C}$ es una terna $\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$, donde $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor y $\eta: 1 \Rightarrow T$, $\mu: T^2 \Rightarrow T$ son transformaciones naturales tales que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \xleftarrow{T\eta} T \\ & \searrow & \downarrow \mu \swarrow \\ & & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{\mu T} & T^2 \\ \downarrow T\mu & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

DEFINICIÓN. 2.2. Dada una mónada $\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$ en una categoría $\mathcal{C}$, llamamos $\mathbb{T}$ -álgebras a los pares (A, a) con $A \in \mathcal{C}$, $a: T(A) \rightarrow A \in \mathcal{C}$ tales que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta A} & T(A) \\ & \searrow 1_A & \downarrow a \\ & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{\mu A} & T(A) \\ \downarrow T(a) & & \downarrow a \\ T(A) & \xrightarrow{a} & A \end{array}$$

Dadas dos $\mathbb{T}$ -álgebras (A, a) y (B, b) , un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ es un morfismo $f: A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\ \downarrow a & & \downarrow b \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Se verifica que la composición de morfismos de $\mathbb{T}$ -álgebras y la identidad son nuevamente morfismos de $\mathbb{T}$ -álgebras. Luego las $\mathbb{T}$ -álgebras y sus morfismos constituyen una categoría $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ llamada la categoría de Eilenberg-Moore de la mónada, con composición e identidades iguales a las de $\mathcal{C}$. Hay un functor de olvido $U: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{C}$ dado por $U(A, a) = A$, $U(f) = f$.

PROPOSICIÓN. 2.3. *U cumple:*

1. *Es fiel.*
2. *Refleja isomorfismos.*
3. *Tiene un adjunto a izquierda F , dado por $F(A) = (T(A), \mu_A)$ en objetos y $F(f) = T(f)$ en morfismos. La unidad de la adjunción es la propia $\eta: 1 \Rightarrow T = UF$ y la counidad $\varepsilon: FU \Rightarrow 1$ está dada por $\varepsilon_{(A, a)} = a$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente U es fiel. Si $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ es tal que $U(f) = f$ es un isomorfismo, tenemos que

$$f^{-1} \circ b = f^{-1} \circ b \circ T(f) \circ T(f^{-1}) = f^{-1} \circ f \circ a \circ T(f^{-1}) = a \circ T(f^{-1})$$

con lo cual f^{-1} también es un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras, inverso a f .

Veamos 3. En primer lugar observamos que los axiomas de mónada garantizan que dado $A \in \mathcal{C}$, $(T(A), \mu_A)$ es una $\mathbb{T}$ -álgebra, además, para una $f: A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$, la naturalidad de μ hace que $T(f): (T(A), \mu_A) \rightarrow (T(B), \mu_B)$ sea un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras, luego F está definido.

Veamos que $F(A)$ junto al morfismo $\eta_A: A \rightarrow T(A) = UF(A)$ es una reflexión de A por U . Sea $f: A \rightarrow B = U(B, b)$, queremos $g: (T(A), \mu_A) \rightarrow (B, b)$ tal que $f = g \circ \eta_A$. Observando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightarrow{T(g)} & T(B) \\ T(\eta_A) \uparrow & \mu_A & \downarrow b \\ T(A) & \xrightarrow{g} & B \\ \eta_A \uparrow & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

tenemos que tal g es única pues necesariamente $g = g \circ \mu_A \circ T(\eta_A) = b \circ T(f)$. Además g así definida es un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras, ya que la estructura b en B es morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras $(T(B), \mu_B) \rightarrow (B, b)$ gracias a los axiomas de $\mathbb{T}$ -álgebras y $T(f)$ también, por ser f morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras.

Considerando $h: A \rightarrow A'$ y $f = \eta_A \circ h$ en la construcción anterior tenemos que g queda dado por $g = \mu_A \circ T(\eta_A) \circ T(h) = T(h)$, con lo cual el functor definido por las reflexiones $(F(A), \eta_A)$ coincide con F y la unidad de la adjunción es $\eta: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow T = UF$.

Para conocer la counidad, repetimos la construcción con $f = 1_A$ para la $\mathbb{T}$ -álgebra (A, a) , obteniendo $g = a$ de lo cual deducimos $\varepsilon_{(A,a)} = a$. $\square$

A la adjunción anterior se la conoce como la adjunción de Eilenberg-Moore. Cuando sea útil para evitar confusión, dada una mónada $\mathbb{T}$ en una categoría $\mathcal{C}$, notaremos a los elementos de la adjunción de Eilenberg-Moore con supra-índice T : $\eta^T, \varepsilon^T, U^T$, etc.

Obtuvimos que una mónada produce una adjunción, veamos ahora que una adjunción produce una mónada.

PROPOSICIÓN. 2.4. *Dada una adjunción $F \dashv U$. Llamando η a la unidad y ε a la counidad, si notamos $T = UF$ y $\mu = U\varepsilon F$ tenemos que $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ es una mónada en $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Los axiomas de mónada se traducen en los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} UFUFUF & \xrightarrow{U\varepsilon FUF} & UFUF \\ \downarrow UFU\varepsilon F & & \downarrow U\varepsilon F \\ UFUF & \xrightarrow{U\varepsilon F} & UF \end{array} \quad \begin{array}{ccc} UF & \xrightarrow{\eta UF} & UFUF \xleftarrow{UF\eta} UF \\ & \searrow 1 & \downarrow U\varepsilon F \swarrow 1 \\ & & UF \end{array}$$

los cuales conmutan por naturalidad de ε y por las identidades de triángulo de la adjunción respectivamente. $\square$

LEMA 2.5. *Dada una mónada $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ sobre categoría $\mathcal{C}$, la mónada inducida por la adjunción de Eilenberg-Moore $F^T \dashv U^T$ es $\mathbb{T}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que $T = UF$ y η no es cambiada durante las construcciones. Tenemos que probar que $\mu = U\varepsilon^T F$, donde ε^T es la counidad de la adjunción. Dada una $\mathbb{T}$ -álgebra (A, a) , tenemos que $\varepsilon_{(A,a)}^T = a$, luego para un $A \in \mathcal{C}$ es $U(\varepsilon_{F(A)}^T) = U(\varepsilon_{(T(A), \mu_A)}^T) = \mu_A$. $\square$

La observación anterior responde a la pregunta: ¿Qué sucede si producimos una mónada con la adjunción obtenida de una mónada?. Para analizar la relación entre una adjunción y la adjunción de Eilenberg-Moore de la mónada que genera llegamos a la siguiente definición.

DEFINICIÓN. 2.6. En las hipótesis del Lema 2.4 anterior, definimos el functor de comparación $K: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ como $K(X) = (U(X), U(\varepsilon_X))$, $K(f) = U(f)$.

Se dice que U (o la adjunción) es monádico si K es una equivalencia de categorías. Si K es un isomorfismo, se dice estrictamente monádico.

El ejemplo clásico de mónada, muchas veces mencionado como la motivación de la definición de mónada, es el obtenido a partir de tensorizar por un álgebra en una categoría monoidal, muchas veces las mónadas son pensadas como generalizaciones de esta construcción.

EJEMPLO 2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal con objeto unidad I (que supondremos estricta para más claridad) y un monoide (A, m, u) en la misma. Tenemos que definiendo $T = A \otimes -$, $\mu = m \otimes -$ y $\eta = u \otimes -$, (T, μ, η) es una mónada en $\mathcal{C}$.

Como en el Lema 1.13, dado un objeto A en $\mathcal{C}$ y morfismos $m: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: I \rightarrow A$, al definir $\mathbb{T} = (T, \mu, \eta)$ como en el ejemplo anterior resulta equivalente que $\mathbb{T}$ sea una mónada a que (A, m, u) sea un monoide en $\mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccccc}
T^2(X \otimes Y) & \xrightarrow{T(T_{2,X,Y})} & T(T(X) \otimes T(Y)) & \xrightarrow{T_{2,T(X),T(Y)}} & T^2(X) \otimes T^2(Y) & T^2(I) & \xrightarrow{\mu_I} & T(I) \\
\downarrow \mu_{X \otimes Y} & & & & \downarrow \mu_X \otimes \mu_Y & \downarrow T(T_0) & & \downarrow T_0 \\
T(X \otimes Y) & \xrightarrow{T_{2,X,Y}} & T(X) \otimes T(Y) & & T(I) & \xrightarrow{T_0} & I & \\
& & \downarrow T_{2,X,Y} & & & & & \\
& & T(X) \otimes T(Y) & & & & & \\
& & \uparrow \eta_X \otimes \eta_Y & & & & & \\
X \otimes Y & \xrightarrow{\eta_{X \otimes Y}} & T(X \otimes Y) & & I & \xrightarrow{\eta_I} & T(I) \\
& \searrow \eta_X \otimes \eta_Y & \downarrow T_{2,X,Y} & & \searrow 1 & \downarrow T_0 \\
& & T(X) \otimes T(Y) & & & I & &
\end{array}$$

FIGURA 1. μ y η opmonoidales.

2. Mónadas opmonoidales

Nos basamos en [Moe02, Secciones 1 y 2].

En esta sección, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ será una categoría monoidal y $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre la misma. En estas hipótesis es natural imponer una estructura adicional en T .

DEFINICIÓN. 2.8. Sea $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathcal{C}$, una *estructura opmonoidal* para $\mathbb{T}$ consiste de una estructura opmonoidal (T_2, T_0) para el functor T que hace de μ y η transformaciones naturales opmonoidales. En este caso diremos que $\mathbb{T}$ es una *mónada opmonoidal*.

En la definición T^2 y $1_{\mathcal{C}}$ tienen las estructuras opmonoidales descritas en la Observación 1.11.

En [BLV11] a estos funtores se les llama *bimónadas* (bimonads).

Observamos que el hecho de que μ y η sean transformaciones opmonoidales es equivalente a la conmutatividad de los diagramas en Figura 1.

Es útil observar a partir de los diagramas en la parte derecha de la Figura 1 que $(I, T_0: T(I) \rightarrow I)$ es una $\mathbb{T}$ -álgebra.

OBSERVACIÓN. 2.9. Es inmediato notar que la mónada generada por una adjunción opmonoidal produce una mónada opmonoidal: dotando a $T = UF$ de la estructura opmonoidal como composición de las de U y F , la mónada se verifica opmonoidal dado que la unidad y counidad son transformaciones opmonoidales por hipótesis. Además (parte de la prueba de el siguiente resultado), la adjunción de Eilenberg-Moore de una mónada opmonoidal es opmonoidal.

La definición de mónada opmonoidal se vuelve de especial interés gracias al siguiente resultado.

TEOREMA 2.10. [Moe02, Theorem 7.1] *Existe una biyección entre estructuras (T_2, T_0) que hacen a $\mathbb{T}$ una mónada opmonoidal y estructuras monoidales en la categoría de Eilenberg-Moore de la mónada tales que el functor de olvido es monoidal estricto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu, T_2, T_0)$ mónada opmonoidal. Definimos el objeto unidad en las álgebras como (I, T_0) y el producto de dos álgebras (A, a) y (B, b) como

$$(A, a) \otimes (B, b) = (A \otimes B, a \cdot b)$$

donde la estructura $a \cdot b$ es definida como $(a \otimes b) \circ T_{2,A,B}: T(A \otimes B) \rightarrow T(A) \otimes T(B) \rightarrow A \otimes B$. Veamos que efectivamente es una estructura de $\mathbb{T}$ -álgebra.

En primer lugar tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(a \cdot b) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 T^2(A \otimes B) & \xrightarrow{T(T_{2,A,B})} & T(T(A) \otimes T(B)) & \xrightarrow{T(a \otimes b)} & T(A \otimes B) \\
 \downarrow \mu_{A \otimes B} & & \downarrow T_{2,T(A),T(B)} & & \downarrow T_{2,A,B} \\
 & & T^2(A) \otimes T^2(B) & \xrightarrow{T(a) \otimes T(b)} & T(A) \otimes T(B) \\
 & & \downarrow \mu_A \otimes \mu_B & & \downarrow a \otimes b \\
 T(A \otimes B) & \xrightarrow{T_{2,A,B}} & T(A) \otimes T(B) & \xrightarrow{a \otimes b} & A \otimes B \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & a \cdot b & &
 \end{array}$$

que conmuta pues el rectángulo de la izquierda conmuta por ser μ opmonoidal, el superior derecho por naturalidad de T_2 y el inferior derecho por ser a, b estructuras de $\mathbb{T}$ -álgebras.

Para la unidad tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\eta_{A \otimes B}} & T(A \otimes B) \\
 \searrow \eta_A \otimes \eta_B & & \downarrow T_{2,A,B} \\
 & & T(A) \otimes T(B) \\
 \searrow 1=1_A \otimes 1_B & & \downarrow a \otimes b \\
 & & A \otimes B
 \end{array}$$

que es conmutativo pues η opmonoidal hace al triángulo superior conmutativo y a, b estructuras de $\mathbb{T}$ -álgebra hacen al inferior conmutativo.

Dotaremos a este producto de restricciones de asociatividad y de unidad. Definimos las mismas como las ya existentes en $\mathcal{C}$, veamos que las mismas son morfismos de $\mathbb{T}$ -álgebras. Sean $(X, r), (Y, s), (Z, t) \in \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$. Observamos que $a_{X,Y,Z}$ es un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 T((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{T(a_{X,Y,Z})} & T(X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 \downarrow T_{2,X \otimes Y, Z} & & \downarrow T_{2,X, Y \otimes Z} \\
 T(X \otimes Y) \otimes T(Z) & & T(X) \otimes T(Y \otimes Z) \\
 \downarrow T_{2,X, Y \otimes t} & & \downarrow r \otimes T_{2,Y, Z} \\
 (T(X) \otimes T(Y)) \otimes Z & & X \otimes (T(Y) \otimes T(Z)) \\
 \downarrow (r \otimes s) \otimes 1 & & \downarrow 1 \otimes (s \otimes t) \\
 (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z)
 \end{array}$$

por la functorialidad de $\otimes$ el mismo es equivalente al rectángulo exterior del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
T((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{T(a_{X,Y,Z})} & T(X \otimes (Y \otimes Z)) \\
\downarrow T_{2,X \otimes Y,Z} & & \downarrow T_{2,X,Y \otimes Z} \\
T(X \otimes Y) \otimes T(Z) & & T(X) \otimes T(Y \otimes Z) \\
\downarrow T_{2,X,Y \otimes 1} & & \downarrow 1 \otimes T_{2,Y,Z} \\
(T(X) \otimes T(Y)) \otimes T(Z) & \xrightarrow{a_{T(X),T(Y),T(Z)}} & T(X) \otimes (T(Y) \otimes T(Z)) \\
\downarrow (r \otimes s) \otimes t & & \downarrow r \otimes (s \otimes t) \\
(X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z)
\end{array}$$

que es conmutativo (el rectángulo superior conmuta por ser T opmonoidal y el inferior por ser a natural).

Por otro lado, para ver que l_A es un morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras (para r_A se procede de la misma manera), planteamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
T(I \otimes A) & \xrightarrow{T(l_A)} & T(A) & & \\
\downarrow T_{2,I,A} & & \nearrow l_{T(A)} & & \downarrow a \\
T(I) \otimes T(A) & \xrightarrow{T_0 \otimes 1} & I \otimes T(A) & & \\
\downarrow T_0 \otimes a & \swarrow 1 \otimes a & \searrow l_A & & \\
I \otimes A & \xrightarrow{l_A} & A & &
\end{array}$$

$T_0 \cdot a$ (curved arrow from $T(I) \otimes T(A)$ to $I \otimes A$)

que es conmutativo dado que el cuadrilátero superior es conmutativo por ser T opmonoidal, el inferior derecho por ser l natural y el triángulo por ser $\otimes$ functorial, luego l es un morfismo de álgebras.

Los axiomas de categoría monoidal valen pues U es fiel, y es claro bajo esta construcción que el functor de olvido U resulta monoidal estricto.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ tiene un producto monoidal tal que U es monoidal estricto. Recordando el Lema 2.5 consideremos la adjunción de Eilenberg Moore $F \dashv U, \eta, \varepsilon$, luego como U se puede pensar como opmonoidal estricto, estamos en las hipótesis del Teorema 1.25 con lo cual F tiene una estructura opmonoidal que hace que la adjunción sea opmonoidal. Luego, como la adjunción de Eilenberg-Moore induce la mónada nuevamente tenemos que la mónada es opmonoidal, con estructura definida a partir de la composición de las de F y U .

Notamos que la estructura opmonoidal de F está dada por ser la compañera de la opuesta de $U_2^{-1} = Id$ con lo cual

$$F_{2,X,Y} = \varepsilon_{F(X) \otimes F(Y)} F(Id) F(\eta_X \otimes \eta_Y) \quad y \quad F_0 = \varepsilon_I F(U_0)$$

y por lo tanto

$$T_{2,X,Y} = U_{2,F(X),F(Y)}^{-1} U F_{2,X,Y} = U_{2,F(X),F(Y)}^{-1} U \varepsilon_{F(X) \otimes F(Y)} U F(Id) U F(\eta_X \otimes \eta_Y)$$

que recordando 2.5 es lo mismo que

$$T_{2,X,Y} T(X \otimes Y) \xrightarrow{T(\eta_X \otimes \eta_Y)} T(T(X) \otimes T(Y)) \xrightarrow{\mu_X \cdot \mu_Y} T(X) \otimes T(Y)$$

Veamos que estas construcciones son inversas entre sí. Consideramos $\mathcal{C}^T$ monoidal con U monoidal estricto, con producto notado como $(A, a) \otimes (B, b) = (A \otimes B, a \cdot b)$. Como observamos anteriormente, se obtiene $T_{2,X,Y} = \mu_X \cdot \mu_Y \circ T(\eta_X \otimes \eta_Y)$ y a partir de esta se define un nuevo producto $(A, a) \otimes (B, b) = (A \otimes B, a * b)$ con $a * b := a \otimes b \circ T_{2,A,B}$. Así tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T(A \otimes B) & \xrightarrow{T(\eta \otimes \eta)} & T(T(A) \otimes T(B)) & \xrightarrow{\mu_A \cdot \mu_B} & T(A) \otimes T(B) \\ & \searrow 1 & \downarrow T(a \otimes b) & & \downarrow a \otimes b \\ & & T(A \otimes B) & \xrightarrow{a \cdot b} & A \otimes B \end{array}$$

que es conmutativo, pues el triángulo conmuta por ser a, b estructuras de álgebra y el cuadrado a partir de la naturalidad de ε (notar que $\mu_A \cdot \mu_B = U\varepsilon_{F(A) \otimes F(B)}$ y $a \cdot b = U\varepsilon_{(A \otimes B, a \cdot b)}$). Se deduce que $a * b = a \cdot b$. Los productos tensoriales en $\mathcal{C}^T$ son los mismos, pues las estructuras de álgebras y el objeto base para ambos productos son los mismos.

Por otro lado, dada una estructura opmonoidal T_2 , y el producto construido en las álgebras construido a partir de ella, digamos $(A, a) \otimes (B, b) = (A \otimes B, a \cdot b)$ con $a \cdot b = a \otimes b \circ T_{2,A,B}$. Llamando T'_2 a la estructura construida a partir del producto, podemos plantear el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & T'_{2,X,Y} & & \\ & \searrow & \text{curved arrow} & \searrow & \\ T(X \otimes Y) & \xrightarrow{T(\eta_X \otimes \eta_Y)} & T(T(X) \otimes T(Y)) & \xrightarrow{\mu_X \cdot \mu_Y} & T(X) \otimes T(Y) \\ \downarrow T_{2,X,Y} & & \downarrow T_{2,T(X),T(Y)} & & \uparrow \mu_X \otimes \mu_Y \\ T(X) \otimes T(Y) & \xrightarrow{T(\eta_X) \otimes T(\eta_Y)} & T^2(X) \otimes T^2(Y) & & \end{array}$$

que es conmutativo debido a que el cuadrado de la izquierda conmuta por la naturalidad de T_2 y el triángulo por definición. Como $\mu_X \otimes \mu_Y \circ T(\eta_X) \otimes T(\eta_Y) = 1$, deducimos que $T'_2 = T_2$. $\square$

Describiremos a continuación el ejemplo clásico de mónada opmonoidal. Dada una categoría monoidal $\mathcal{D}$ con una trenzad laxa γ , se define [AM10, Definition 1.10] un *bimonoide* en esta categoría como una quintupla $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ donde (A, m, u) es un monoide, (A, Δ, ε) es un comonoide y los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccccc} ((A \otimes A) \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{(A \otimes \gamma_{A,A}) \otimes A} & ((A \otimes A) \otimes A) \otimes A \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) & & (A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \\ \Delta \otimes \Delta \uparrow & & \downarrow m \otimes m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & I \otimes I & I & \xrightarrow{u} & A & I & \xrightarrow{u} & A \\
m \downarrow & & \downarrow r_I^{-1} & r_I \downarrow & & \Delta \downarrow & \parallel & & \downarrow \varepsilon \\
A & \xrightarrow{\varepsilon} & I & I \otimes I & \xrightarrow{u \otimes u} & A \otimes A & & & I
\end{array}$$

Los isomorfismos son los formados a partir de asociatividades de $\otimes$, únicos por el Teorema de Coherencia.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y A un objeto en la misma. Supongamos que tenemos una transformación natural $\sigma: A \otimes - \Rightarrow - \otimes A$ tal que $\sigma_I = 1_A$ y morfismos $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, $\varepsilon: A \rightarrow I$, $m: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: I \rightarrow A$. A partir de lo anterior definimos el functor $T := A \otimes -$ y T_2, T_0, μ y η como en Lema 1.13 y Ejemplo 2.7. Luego vale lo siguiente:

PROPOSICIÓN. 2.11. [BLV11, Lemma 5.3] *Dados $A, \sigma, m, u, \Delta, \varepsilon, T, T_2, T_0$ como arriba, son equivalentes*

1. $\mathbb{T}=(T, \mu, \eta)$ es una mónada opmonoidal con estructura opmonoidal (T_2, T_0) .
2. $((A, \sigma), m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonode en $Z_l(\mathcal{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Haremos la prueba para el caso en que $\mathcal{C}$ es monoidal estricta.

Veamos que el primer punto implica el segundo. Por lo ya visto en el Lema 1.13 y el Ejemplo 2.7, queda probar que $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonode en $\mathcal{C}$ y que los morfismos m y u están en $Z_l(\mathcal{C})$.

Notamos que $T(X \otimes Y) = T(X) \otimes Y$, $\mu_{X \otimes Y} = \mu_X \otimes Y$, $T_{2,X,Y} = T_{2,X,I} \otimes Y$ y $\eta_{X \otimes Y} = \eta_X \otimes Y$, luego es suficiente estudiar los diagramas para pares de objetos de la forma X, I . Con esto $\mathbb{T}$ opmonoidal se traduce en la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{m \otimes X \otimes Y} & A \otimes X \\
A \otimes \Delta \otimes X \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes X \\
A \otimes A \otimes A \otimes X & & \\
A \otimes A \otimes \sigma_X \downarrow & & \\
A \otimes A \otimes X \otimes A & & A \otimes A \otimes X \\
\Delta \otimes A \otimes X \otimes A \downarrow & & \downarrow A \otimes \sigma_X \\
A \otimes A \otimes A \otimes X \otimes A & & \\
A \otimes \sigma_{A \otimes X \otimes A} \downarrow & & \\
A \otimes A \otimes X \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes X \otimes m} & A \otimes X \otimes A
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X \otimes Y & \xrightarrow{u \otimes X} & A \otimes X \\
& \searrow u \otimes X \otimes u & \downarrow \Delta \otimes X \\
& & A \otimes A \otimes X \\
& & \downarrow A \otimes \sigma_X \\
& & A \otimes X \otimes A
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\
\downarrow A \otimes \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\
A & \xrightarrow{\varepsilon} & I
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{u} & A \\
\parallel & & \downarrow \varepsilon \\
& & I
\end{array}$$

Tomando $X = I$ en los diagramas anteriores y probando que los morfismos m, u están en el centro laxo, deducimos el segundo punto. Veamos que efectivamente m, u son morfismos en $Z_l(\mathcal{C})$, lo cual se traduce en la conmutatividad de los siguientes dos diagramas.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u \otimes X} & A \otimes X \\
 \downarrow = & & \downarrow \sigma_X \\
 X & \xrightarrow{X \otimes u} & X \otimes A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes \sigma_X} & A \otimes X \otimes A \xrightarrow{\sigma_X \otimes A} X \otimes A \otimes A \\
 m \otimes X \downarrow & & \downarrow X \otimes m \\
 A \otimes X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \otimes A
 \end{array}$$

El diagrama izquierdo es igual que el diagrama exterior en el siguiente, que es conmutativo pues el triángulo izquierdo conmuta dado que η es opmonoidal, el triángulo derecho por ser (A, Δ, ε) un comonoides y las restantes componentes por ser $\otimes$ un functor.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{u \otimes X} & A \otimes X & & \\
 \downarrow u \otimes X \otimes u & & \downarrow \Delta X & \searrow = & \\
 & & A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{\varepsilon \otimes A \otimes X} & A \otimes X \\
 & & \downarrow A \otimes \sigma_X & & \downarrow \sigma_X \\
 & & A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes X \otimes A} & X \otimes A \\
 & \searrow X \otimes u & & & \uparrow
 \end{array}$$

El diagrama derecho coincide con el diagrama exterior en el siguiente,

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \otimes X & \xleftarrow{m \otimes X} & A \otimes A \otimes X & & & & \\
 \downarrow \sigma_X & & \downarrow A \otimes \Delta \otimes X & \searrow = & & & \\
 & & A \otimes A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes \varepsilon \otimes A \otimes X} & A \otimes A \otimes X & & \\
 & & \downarrow A \otimes A \otimes \sigma_X & & \downarrow A \otimes \sigma_X & & \\
 & & A \otimes A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{A \otimes \varepsilon \otimes X \otimes A} & A \otimes X \otimes A & & \\
 & & \downarrow \Delta \otimes A \otimes X \otimes A & & \downarrow \Delta \otimes X \otimes A & \searrow = & \\
 & & A \otimes A \otimes A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{A \otimes A \otimes \varepsilon \otimes X \otimes A} & A \otimes A \otimes X \otimes A & & \\
 & & \downarrow A \otimes \sigma_{A \otimes X \otimes A} & & \downarrow A \otimes \sigma_{X \otimes A} & \searrow \varepsilon \otimes A \otimes X \otimes A & \\
 & & A \otimes A \otimes X \otimes A \otimes A & \xrightarrow{A \otimes \varepsilon \otimes X \otimes A \otimes A} & A \otimes X \otimes A \otimes A & & \\
 & & \downarrow \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes X \otimes A \otimes A & & \downarrow \varepsilon \otimes X \otimes A \otimes A & & \\
 X \otimes A & \xleftarrow{X \otimes m} & X \otimes A \otimes A & & & & \\
 & & & \swarrow \sigma_X \otimes A & & &
 \end{array}$$

en el que cada subdiagrama en la mitad derecha se deduce conmutativo por la functorialidad del producto $\otimes$, que $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoides y la naturalidad de σ . El rectángulo izquierdo se deduce conmutativo a partir de el diagrama correspondiente a

la coasociatividad de $\mathbb{T}$ en objetos X, I compuesto con $\varepsilon \otimes X \otimes A$. De esta manera el diagrama conmuta y concluimos lo que $((A, \sigma), m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonioide en $Z_l(\mathcal{C})$.

Para demostrar el recíproco, se utilizan las mismas técnicas. En primer lugar, los diagramas que vinculan a μ y T_0 , a η y T_2 y la igualdad $\varepsilon \circ u = 1_A$ se deducen conmutativos inmediatamente a partir de los axiomas de bimonioide y la naturalidad de σ en el primer caso. Para el diagrama mas grande, tenemos que la conmutatividad se deduce a partir de las siguientes igualdades, donde la concatenación se interpreta como composición de morfismos.

$$\begin{aligned}
(m \otimes X \otimes m)(A \otimes \sigma_{A \otimes X} \otimes A)(A^{\otimes 3} \otimes \sigma_X)(\Delta \otimes \Delta \otimes X) &= \\
(m \otimes X \otimes m)(A^{\otimes 2} \otimes \sigma_X \otimes A)(A \otimes \sigma_A \otimes X \otimes A)(A^{\otimes 3} \otimes \sigma_X)(\Delta \otimes \Delta \otimes X) &= \\
(m \otimes X \otimes m)(A^{\otimes 2} \otimes \sigma_X \otimes A)(A^{\otimes 3} \otimes \sigma_X)(A \otimes \sigma_A \otimes A \otimes X)(\Delta \otimes \Delta \otimes X) &= \\
(m \otimes \sigma_X)(A^{\otimes 2} \otimes m \otimes X)(A \otimes \sigma_A \otimes A \otimes X)(\Delta \otimes \Delta \otimes X) &= \\
(A \otimes \sigma_X)(m \otimes m \otimes X)(A \otimes \sigma_A \otimes A \otimes X)(\Delta \otimes \Delta \otimes X) &= \\
(A \otimes \sigma_X)(\Delta \otimes X)(m \otimes X) &
\end{aligned}$$

La primera igualdad se deduce a partir de que σ es una trenza parcial laxa, la segunda a partir de la functorialidad de $\otimes$, la tercera a partir de que m es un morfismo en el centro laxo, la cuarta nuevamente por ser $\otimes$ un functor y la quinta por los axiomas de bimonioide de para el objeto (A, σ) . $\square$

De la misma manera que antes, si la categoría es trenzada, tenemos que para un bimonioide A , al pensarlo en el centro de la categoría, el resultado anterior nos dice que $A \otimes -$ es una mónada opmonoidal.

A partir de este momento, dada una mónada opmonoidal $\mathbb{T}$ en una categoría monoidal $\mathcal{C}$, tomaremos la estructura monoidal en $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ de manera que el functor de olvido sea monoidal estricto.

3. Mónadas de Hopf y monoides de Hopf

3.1. Monoides de Hopf. Es sabido (ver por ejemplo [HLFV17, Proposition 10.7]) que un bimonioide H es de Hopf, es decir admite una antípoda, si y sólo si su operador de fusión $(H \otimes m) \circ (\Delta \otimes H): H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ es invertible. A continuación daremos las definiciones pertinentes y describiremos ciertas construcciones que permiten demostrar lo anterior, donde a diferencia de [HLFV17] no asumiremos el contexto de una categoría trenzada.

Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, consideramos un objeto A de la misma con estructura de monoide (m, u) y estructura de comonoide (Δ, ε) . Podemos definir un mapa $\Phi: \mathcal{C}(A, A) \rightarrow \mathcal{C}(A \otimes A, A \otimes A)$ dado por $\Phi(f) = (A \otimes m) \circ (A \otimes f \otimes A) \circ (\Delta \otimes A)$. Se define en $\mathcal{C}(A, A)$ el *producto de convolución* de dos morfismos f, g como $f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$, se verifica a partir de los axiomas de monoide y comonoide de A que $(\mathcal{C}(A, A), *, u \circ \varepsilon)$ es un monoide.

Si tomamos esta estructura en el dominio y la estructura dada por la composición en el codominio observamos que Φ resulta un morfismo de monoides a partir de las siguientes

igualdades, donde la concatenación se interpreta como composición de morfismos.

$$\begin{aligned}
\Phi(g)\Phi(f) &= (A \otimes m)(A \otimes g \otimes A)(\Delta \otimes A)(A \otimes m)(A \otimes f \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= (A \otimes m)(A \otimes A \otimes m)(A \otimes g \otimes f \otimes A)(\Delta \otimes A \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= (A \otimes m)(A \otimes m \otimes A)(A \otimes g \otimes f \otimes A)(A \otimes \Delta \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= (A \otimes m)(A \otimes (m(g \otimes f)\Delta) \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= \Phi(g * f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(u\varepsilon) &= (A \otimes m)(A \otimes u\varepsilon \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= (A \otimes m)(A \otimes u \otimes A)(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Delta \otimes A) = 1_{A \otimes A}
\end{aligned}$$

Donde todas las igualdades se deducen a partir del hecho de que $\otimes$ es un functor y los axiomas de monoide y comonoide.

De la misma manera, notamos que Φ tiene una retracción $\Psi: \mathcal{C}(A \otimes A, A \otimes A) \rightarrow \mathcal{C}(A, A)$ dada por $\Psi(h) = (\varepsilon \otimes A)h(A \otimes u)$. Además, la imagen de Φ consiste en morfismos $A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ que son morfismos de A -comódulos a izquierda y A -módulos a derecha, es decir, morfismos h tales que valen las siguientes igualdades.

$$(A \otimes h) \circ (\Delta \otimes A) = (\Delta \otimes A) \circ h \quad (4)$$

$$h \circ (A \otimes m) = (A \otimes m) \circ (h \otimes A) \quad (5)$$

Llamemos M al submonoide de $\mathcal{C}(A \otimes A, A \otimes A)$ de los morfismos que cumplen lo anterior. Dada $h \in M$, notamos que

$$\begin{aligned}
\Phi(\Psi(h)) &= (A \otimes m)(A \otimes ((\varepsilon \otimes A)h(A \otimes u)) \otimes A)(\Delta \otimes A) \\
&= (A \otimes \varepsilon \otimes A)(A \otimes A \otimes m)(A \otimes h \otimes A)(\Delta \otimes A \otimes A)(A \otimes u \otimes A) \\
&= (A \otimes \varepsilon \otimes A)(A \otimes A \otimes m)(\Delta \otimes A \otimes A)(h \otimes A)(A \otimes u \otimes A) \\
&= (A \otimes m)(h \otimes A)(A \otimes u \otimes A) = h(A \otimes m)(A \otimes u \otimes A) = h
\end{aligned}$$

Donde las igualdades se deducen a partir de $\otimes$ functor, las identidades de álgebra y coálgebra y la definición de M . De esta manera, si consideramos $\Phi: \mathcal{C}(A, A) \rightarrow M$, tenemos que resulta un isomorfismo. Notamos además que las propiedades que definen a M son preservadas al tomar inversos, con lo que M es cerrado por inversos. Con esto estamos en condiciones de enunciar el siguiente Lema, cuya prueba es consecuencia de lo discutido anteriormente.

LEMA 2.12. *Dado A objeto en una categoría monoidal $\mathcal{C}$, dotado de una estructura de monoide y de comonoide, son equivalentes:*

- $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ tiene un inverso S con el producto de convolución.
- El mapa de fusión $H = (A \otimes m)(\Delta \otimes A)$ es invertible.

En tal caso se dice que S es una antípoda para A y se tiene que $S = (\varepsilon \otimes A)H^{-1}(A \otimes u)$

DEFINICIÓN. 2.13. Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal con trenza laxa τ , llamamos *bimonoide de Hopf* (ver [AM10, Definition 1.15]) a un bimonoide H tal que el morfismo identidad $1_H: H \rightarrow H$ es invertible en el producto de convolución. De existir, este inverso es único y se lo llama antípoda, notado por S .

Notamos que en tal caso, S está automáticamente en el centro de la categoría dado que como observamos anteriormente S está dado por $(A \otimes \varepsilon)H(u \otimes A)$.

Los ejemplos de bimonoides de Hopf (comúnmente llamados álgebras de Hopf) aparecen en el estudio de diversas teorías. A continuación comentaremos algunos ejemplos clásicos.

EJEMPLO 2.14. Dado un grupo G y un anillo conmutativo R , se define el *álgebra de grupo* $R[G]$ como las combinaciones lineales formales de elementos de G con coeficientes en R , o equivalentemente las funciones de codominio R y dominio G de soporte finito. Explícitamente, un elemento de $R[G]$ es de la forma

$$\sum_{g \in G} r_g g, \quad r_g \in R$$

donde todos salvo finitos r_g son nulos. El producto se define a partir de el producto de G y extenderlo por linealidad, de lo que resulta que $1_R e$ es la unidad del producto. La estructura de coálgebra está dada por $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ y la antípoda está dada por $S(g) = g^{-1}$.

Este objeto aparece naturalmente al estudiar representaciones de un grupo, dado que un morfismo $\rho: G \rightarrow \text{End}(V)$, donde V es un R -módulo, se extiende linealmente a un morfismo $\hat{\rho}: R[G] \rightarrow \text{End}(V)$ y un morfismo como este último se puede restringir a un morfismo con dominio G , de manera que estudiar las representaciones para estos dos objetos es equivalente.

EJEMPLO 2.15. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo K se construye su *álgebra envolvente* $U(\mathfrak{g})$ de la siguiente manera. Como $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial, podemos considerar el álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ dada por

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n} = K \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \cdots$$

Con esto se define $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ donde I es el ideal generado por los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$. Ésta álgebra cuenta con un producto definido a partir del producto tensorial, con unidad 1_K , un coproducto dado por $\sigma(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y counidad $\varepsilon(x) = 0$ para $x \in \mathfrak{g}$ y una antípoda dada por $S(x) = -x$.

Notamos que en $U(\mathfrak{g})$ vale $[x, y] = x \otimes y - y \otimes x$ y a partir de esto se deduce la siguiente propiedad universal: dado $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow A_{Lie}$ morfismo de álgebras de Lie, donde A_{Lie} es el álgebra de Lie inducida para el álgebra asociativa A , existe un único morfismo de álgebras asociativas $\hat{\varphi}: U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tal que $\varphi = \hat{\varphi} \circ i$, donde $i: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ es la inclusión canónica. Ésta propiedad universal, hace que un espacio vectorial V es un $\mathfrak{g}$ -módulo (como álgebra de Lie) si y sólo si es un $U(\mathfrak{g})$ -módulo (como álgebra asociativa).

EJEMPLO 2.16. Dado G un grupo topológico compacto, tenemos que la subálgebra $C(G)$ de las funciones representativas $R(X)$, dada por las funciones f reales (o complejas) tales que el espacio generado $\langle x \cdot f, x \in G \rangle$ es de dimensión finita, forma un álgebra de Hopf. Se tiene que dada $f: G \rightarrow \mathbb{R} \in R(G)$, existen $f_i, g_i \in R(G)$ tales que $f(x, y) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$, con lo cual se define $\Delta(f) = \sum_i f_i \otimes g_i$. De esta manera se cumple que $\Delta(f)(x, y) = f(x, y)$ para toda $f \in R(G)$ y $x, y \in G$ y a partir de eso se demuestra

que Δ y ε definida como $\varepsilon(f) = f(e)$ definen una estructura de coálgebra en $R(G)$. La antípoda está dada por $S(f)(x) = f(x^{-1})$.

EJEMPLO 2.17. Al considerar la categoría **Set** con la estructura monoidal dada por el producto y un conjunto con un punto como objeto unidad, tenemos que un monoide de Hopf es un grupo. Se tiene que todo objeto tiene una única estructura de comonoide dada por el mapa diagonal, y la antípoda es la función que manda un elemento a su inverso. Este fenómeno se da en cualquier categoría cartesiana, o sea, con estructura monoidal definida a partir de productos finitos y un objeto terminal escogidos.

3.2. Mónadas de Hopf. Teniendo en mente el Ejemplo 2.11 y el Lema 2.12 anterior obtenemos la definición de *mónada de Hopf* que aparece en [BLV11] descrita a continuación. Sea $\mathbb{T}=(T, T_2, T_0, \eta, \mu)$ una mónada opmonoidal sobre la categoría monoidal $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN. 2.18. El operador de fusión a izquierda de T es la transformación natural $H : T(1_{\mathcal{C}} \otimes T) \rightarrow T \otimes T$ definido por

$$H_{X,Y} = (1_{T(X)} \otimes \mu_Y) \circ T_{2,X,T(Y)} : T(X \otimes T(Y)) \rightarrow T(X) \otimes T(Y)$$

Decimos que la mónada es de Hopf a izquierda si su operador de fusión a izquierda es invertible.

En [BLV11] aparece similarmente la definición de *operador de fusión a derecha* y se dice que la mónada es de Hopf si ambos operadores son invertibles.

EJEMPLO 2.19. Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta, consideramos $((A, \sigma), m, u, \Delta, \varepsilon)$ un bimonioide en $Z_l(\mathcal{C})$. Tenemos que el operador de fusión de la mónada opmonoidal dada por $A \otimes -$ (Proposición 2.11) está dado por

$$H_{X,Y} = ((A \otimes X \otimes m) \circ (A \otimes \sigma_X \otimes A) \circ (\Delta \otimes X \otimes A)) \otimes Y$$

Dado un bimonioide como en el ejemplo anterior, vale lo siguiente.

LEMA 2.20. [BLV11, Proposition 5.4] *Son equivalentes:*

- $A \otimes -$ es una mónada de Hopf a izquierda.
- La transformación natural $H_{I,Y}$ es invertible.
- A admite una antípoda.

DEMOSTRACIÓN. Claramente el primer punto implica el segundo. Por otro lado, notamos que $H_{X,Y} = H_{X,I} \otimes Y$, con lo cual $H_{I,Y}$ es invertible si y sólo si $H_{I,I}$ es invertible. De esta manera el segundo punto es equivalente al tercero pues notamos que $H_{I,I}$ es el operador de fusión de la biálgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ y como comentamos anteriormente éste es invertible si y sólo si A admite una antípoda. Por último, si suponemos el tercer punto, notando como $S : A \rightarrow A$ a la antípoda, se verifica que

$$J := (A \otimes X \otimes m) \circ (A \otimes \sigma_X \otimes A) \circ ((A \otimes S) \circ \Delta \otimes X \otimes A)$$

es inverso a $H_{X,I}$ a partir de las siguientes igualdades, donde la concatenación se interpreta como la composición de morfismos.

$$\begin{aligned}
H_{X,I}J &= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes \sigma_X \otimes m)(\Delta \otimes \sigma_X \otimes A)(A \otimes S \otimes X \otimes A)(\Delta \otimes X \otimes A) \\
&= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes X \otimes m \otimes A)(A \otimes \sigma_X \otimes A^{\otimes 2})(A^{\otimes 2} \otimes \sigma_X \otimes A) \\
&\quad (A^{\otimes 2} \otimes S \otimes X \otimes A)(A \otimes \Delta \otimes X \otimes A)(\Delta \otimes X \otimes A) \\
&= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes \sigma_X \otimes A)(A \otimes m \otimes X \otimes A)(A^{\otimes 2} \otimes S \otimes X \otimes A) \\
&\quad (A \otimes \Delta \otimes X \otimes A)(\Delta \otimes X \otimes A) \\
&= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes \sigma_X \otimes A)(A \otimes u \otimes X \otimes A)(A \otimes \varepsilon \otimes X \otimes A)(\Delta \otimes X \otimes A) \\
&= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes \sigma_X \otimes A)(A \otimes u \otimes X \otimes A) \\
&= (A \otimes X \otimes m)(A \otimes X \otimes u \otimes A) = 1_{A \otimes X \otimes A}
\end{aligned}$$

La primera igualdad se deduce a partir de $\otimes$ functor, la segunda a partir de lo mismo y los axiomas de monoide y comonoide, la tercera nuevamente por ser $\otimes$ functor, la cuarta a partir de que m está en el centro laxo, la quinta por la definición de S , la sexta por los axiomas de comonoide, la séptima a partir de que u está en el centro laxo y la última por axiomas de monoide.

De la misma manera se demuestra que $J \circ H_{X,I}$ es la identidad en $A \otimes X \otimes A$. Con lo cual el tercer punto implica el primero, concluyendo la prueba. $\square$

Mónadas de Hopf y categorías monoidales

En la primera sección de este capítulo vemos cómo ciertos diagramas de funtores dan origen a morfismos de mónadas, luego vemos cómo esto permite observar que dada una mónada opmonoidal en una categoría monoidal, tensorizar por un álgebra produce un morfismo de mónadas y con esto se define el concepto de adjunción de Hopf. En la segunda sección vemos que una mónada es de Hopf si y solo si su adjunción de Eilenberg-Moore es de Hopf lo cual permite en la tercera sección probar el resultado central de este trabajo (Teorema 3.11). Este teorema caracteriza a las mónadas de Hopf a izquierda en categorías monoidales cerradas a izquierda a partir del siguiente resultado: una mónada opmonoidal es de Hopf a izquierda si y sólo si su categoría de álgebras es monoidal cerrada a izquierda y el functor de olvido es cerrado fuerte a izquierda. Vemos cómo este resultado implica el resultado clásico de que para un bimonioide, es equivalente que el mismo sea de Hopf a que su categoría de álgebras sea monoidal cerrada a izquierda y el functor de olvido sea cerrado a izquierda. Concluimos con una aplicación a subcategorías reflexivas.

1. Morfismos de mónadas en categorías monoidales

La definición y estudio de los morfismos de mónadas se encuentran en el apéndice A. Consideremos el diagrama (no necesariamente conmutativo)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{N} & \mathcal{D}' \\ \downarrow U & & \downarrow U' \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathcal{C}' \end{array}$$

y un isomorfismo natural $\alpha: U'N \rightarrow MU$, donde U, U' son adjuntos a derecha con F, F' respectivamente con unidades y counidades respectivas η, ε y η', ε' . Llamamos $\mathbb{T}, \mathbb{T}'$ a las mónadas inducidas por estas adjunciones.

Luego podemos considerar las transformaciones:

$$\begin{aligned} \alpha &: U'N \rightarrow MU \\ \alpha^\# &= F'M \xrightarrow{F'M\eta} F'MUF \xrightarrow{F'\alpha^{-1}F} F'U'NF \xrightarrow{\varepsilon'NF} NF \\ \lambda &:= T'M = U'F'M \xrightarrow{U'\alpha^\#} U'NF \xrightarrow{\alpha F} MUF = MT \end{aligned}$$

donde $\alpha^\#$ es la compañera de α^{-1} y a partir de éstas se define λ . Notar que

$$\lambda = T'M \xrightarrow{T'M\eta} T'MT \xrightarrow{T'\alpha^{-1}F} U'F'U'NF \xrightarrow{U'\varepsilon'NF} U'NF \xrightarrow{\alpha F} MT$$

PROPOSICIÓN. 3.1. $(M, \lambda): (\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{T}')$ es un morfismo de mónadas.

DEMOSTRACIÓN. Los axiomas de morfismos de mónadas se traducen a este caso como la conmutatividad de dos diagramas. El primero es igual al diagrama exterior siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 T'T'M & \xrightarrow{U'F'U'(\phi)} & T'U'NF & \xrightarrow{T'\alpha F} & T'MT & \xrightarrow{T'MT\eta} & T'MTT & \xrightarrow{\rho T} & MTT \\
 \downarrow \mu'M & & \downarrow U'\varepsilon'NF & & \searrow 1 & & \downarrow T'MU\varepsilon F & & \downarrow M\mu \\
 T'M & \xrightarrow{U'(\phi)} & U'NF & & & & T'MT & \xrightarrow{\rho} & MT \\
 & & & \searrow \alpha F & & & & &
 \end{array}$$

donde $\phi = \varepsilon'NF \circ F'\alpha^{-1}F \circ F'M\eta$ y $\rho = \alpha F \circ U'\varepsilon'NF \circ T'\alpha^{-1}F$. Este diagrama es conmutativo pues los tres subdiagramas lo son. La conmutatividad del cuadrado de la izquierda es consecuencia de la naturalidad de ε' y notar que $\mu'M = U'\varepsilon'F'M$, la del cuadrado de la derecha es la naturalidad de ρ y la del triángulo es por las identidades de triángulo de la adjunción. Para el subdiagrama restante notamos que $\rho \circ T'\alpha F = \alpha F \circ U'\varepsilon'NF$.

El segundo axioma es el diagrama exterior en

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\eta'M} & T'M \\
 M\eta \downarrow & & \downarrow T'M\eta \\
 MT & \xrightarrow{\eta'MT} & T'MT \\
 \downarrow \alpha^{-1}F & & \downarrow T'\alpha^{-1}F \\
 U'NF & \xrightarrow{\eta'U'NF} & T'U'NF \\
 & \searrow \alpha F & \downarrow \alpha F \circ U'\varepsilon'NF \\
 & & MT
 \end{array}$$

que es conmutativo pues los dos cuadrados se deducen conmutativos de la naturalidad de η' y el triángulo de las identidades de triángulo de la adjunción $F' \dashv U'$. $\square$

De lo anterior se deduce el siguiente resultado.

LEMA 3.2. Sea $F \dashv U: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ una adjunción opmonoidal con $T = UF$ su mónada opmonoidal asociada. Dado $D \in \mathcal{D}$, el functor $(- \otimes U(D)): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene una estructura de morfismo de mónadas $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{T})$ dada por

$$UF(- \otimes U(D)) \xrightarrow{UF_2} U(F(-) \otimes FU(D)) \xrightarrow{U_2} UF(-) \otimes UFU(D) \xrightarrow{1 \otimes U(\varepsilon_D)} UF(-) \otimes U(D)$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D} & \xrightarrow{- \otimes D} & \mathcal{D} \\
 \downarrow U & & \downarrow U \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes U(D)} & \mathcal{C}
 \end{array}$$

y la transformación $U_{2,-,D}: U(- \otimes D) \Rightarrow U(-) \otimes U(D)$ está en las hipótesis de la proposición anterior, con lo que el functor $(- \otimes U(D))$ tiene una estructura de morfismo de mónadas λ , donde

$$\lambda = U_{2,F(-),D} \circ U\varepsilon(F(-) \otimes D) \circ UFU_{2,F(-),D}^{-1} \circ UF(\eta \otimes U(D))$$

El enunciado se deduce de demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} UF(- \otimes U(D)) & \xrightarrow{UF(\eta \otimes U(D))} & UF(UF(-) \otimes U(D)) \xrightarrow{UFU_{2,F(-),D}^{-1}} UFU(F(-) \otimes D) \\ \downarrow UF_{2,-,U(D)} & & \downarrow U\varepsilon(F(-) \otimes D) \\ U(F(-) \otimes FU(D)) & & U(F(-) \otimes D) \\ \downarrow U_{2,F(-),FU(D)} & & \downarrow U_{2,F(-),D} \\ UF(-) \otimes UFU(D) & \xrightarrow{UF(-) \otimes U\varepsilon_D} & UF(-) \otimes D \end{array}$$

En efecto, agregando al diagrama ciertos morfismos, obtenemos:

$$\begin{array}{ccccc} UF(- \otimes U(D)) & \xrightarrow{UF(\eta \otimes U(D))} & UF(UF(-) \otimes U(D)) & \xrightarrow{UFU_{2,F(-),D}^{-1}} & UFU(F(-) \otimes D) \\ \downarrow UF_{2,-,U(D)} & & \downarrow UF_{2,UF(-),U(D)} & & \downarrow U\varepsilon(F(-) \otimes D) \\ U(F(-) \otimes FU(D)) & \xrightarrow{U(F(\eta) \otimes FU(D))} & U(FUF(-) \otimes FU(D)) & \xrightarrow{U(\varepsilon F(-) \otimes \varepsilon_D)} & U(F(-) \otimes D) \\ \downarrow U_{2,F(-),FU(D)} & & \downarrow U_{2,FUF(-),FU(D)} & & \downarrow U_{2,F(-),D} \\ UF(-) \otimes UFU(D) & \xrightarrow{UF(\eta) \otimes UFU(D)} & UFUF(-) \otimes UFU(D) & \xrightarrow{U\varepsilon F(-) \otimes U\varepsilon_D} & UF(-) \otimes D \end{array}$$

$\xrightarrow{UF(-) \otimes U\varepsilon_D}$

El cuadrado superior derecho es conmutativo por ser ε opmonoidal, el superior izquierdo por la naturalidad de F_2 , los cuadrados inferiores por la naturalidad de U_2 y el triángulo inferior por la functorialidad del producto tensorial y las identidades de triángulo de la adjuncion.

□

OBSERVACIÓN. 3.3. Dada una mónada opmonoidal $\mathbb{T}$, como la adjunción de Eilenberg-Moore es opmonoidal a partir del Teorema 2.9 y U es monoidal estricto, tenemos que dada una $\mathbb{T}$ -álgebra (A, a) podemos plantear el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathbb{T}} & \xrightarrow{- \otimes (A, a)} & \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \mathcal{C} \end{array}$$

Aplicando el lema anterior se deduce la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN. 3.4. Si $\mathbb{T}$ es una mónada opmonoidal y (A, a) es una $\mathbb{T}$ -álgebra, entonces $(- \otimes A)$ tiene una estructura de morfismo de mónadas dada por

$$\lambda_{-, (A, a)} = T(- \otimes A) \xrightarrow{T_{2, -, A}} T(-) \otimes T(A) \xrightarrow{1 \otimes a} T(-) \otimes A \quad (6)$$

Con esto estamos en condiciones de dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN. 3.5. Decimos que una adjunción opmonoidal $F \dashv U$ es una *adjunción de Hopf a izquierda* si los morfismos de mónadas $(- \otimes A)$, donde (A, a) es una $\mathbb{T}$ -álgebra para $\mathbb{T}$ la mónada generada por la adjunción, son morfismos fuertes. Esto es, la transformación (6) es un isomorfismo.

Sea A un álgebra de Hopf en **Vect** con antípoda S . Al considerar la mónada de functor $T = A \otimes -$ en la definición anterior, tenemos que $\lambda_{Y, X} : A \otimes Y \otimes X \rightarrow A \otimes Y \otimes X$ está dado por

$$a \otimes y \otimes x \mapsto \sum a_1 \otimes y \otimes a_2 x$$

donde $a \in A$, $y \in Y$, $x \in X$ y $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$. En este caso λ siempre es invertible y su inversa está dada por

$$a \otimes y \otimes x \mapsto \sum a_1 \otimes y \otimes S(a_2)x$$

. De esta manera, si A es un álgebra de Hopf y $T = A \otimes -$, la adjunción de Eilenberg-Moore de la mónada es de Hopf a izquierda.

2. Adjunciones de Hopf y mónadas de Hopf

DEFINICIÓN. 3.6. Dado el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \xrightleftharpoons[s]{q} C \end{array}$$

decimos que q es un coigualador que escinde si

$$qf = qg \quad qs = 1_C \quad ft = 1_B \quad gt = sq$$

Recordamos que un coigualador (o colímite en general) absoluto es uno que es preservado por todo functor. El resultado principal que utilizaremos sobre este tipo de coigualadores es el siguiente (ver [ML98, VI.6])

LEMA 3.7. *Todo coigualador que escinde es un coigualador absoluto.*

PROPOSICIÓN. 3.8. *Dada una $\mathbb{T}$ -álgebra (A, a) para cierta mónada, tenemos que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T^2(A) & \xrightleftharpoons[\eta_{T(A)}]{\mu_A} & T(A) \xrightleftharpoons[\eta_A]{a} A \end{array}$$

es un coigualador que escinde.

DEMOSTRACIÓN. Las igualdades $a\mu_A = aT(a)$, $a\eta_A = 1_A$, $\mu_A\eta_{T(A)} = 1_{T(A)}$ se deducen directamente de los axiomas de álgebra y del hecho de que $(T(A), \mu_A)$ es una $\mathbb{T}$ -álgebra, por otro lado $T(a)\eta_{T(A)} = \eta_A a$ se deduce de la naturalidad de η . $\square$

El anterior resultado se puede resumir como “toda $\mathbb{T}$ -álgebra es coigualador de álgebras libres”. El siguiente lema nos permite dar uso de esto.

LEMA 3.9 ([BLV11, Lemma 2.19]). *Sea $\mathbb{T}$ una mónada en una categoría $\mathcal{C}$, $F \dashv U$ su adjunción de Eilenberg-Moore, $R, Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Dada una transformación natural $\alpha: RU \Rightarrow QU$, si $\alpha F: RT \Rightarrow QT$ es invertible entonces α es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una álgebra (A, a) , tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} RT^2(A) & \xrightleftharpoons[R(a)]{R(\mu_A)} & RT(A) & \xrightarrow{R(a)} & R(A) \\ \downarrow \alpha_{F(T(A))} & & \downarrow \alpha_{F(A)} & & \downarrow \alpha_{(A,a)} \\ QT^2(A) & \xrightleftharpoons[Q(a)]{Q(\mu_A)} & QT(A) & \xrightarrow{Q(a)} & Q(A) \end{array}$$

Por la Proposición 3.8, ambas filas son coigualadores y las primeras dos columnas son invertibles. Luego la tercera columna es invertible, concluyendo la prueba. $\square$

PROPOSICIÓN. 3.10. *Sea $\mathbb{T}$ mónada opmonoidal, $F \dashv U$ la adjunción de Eilenberg-Moore de la misma. Entonces $\mathbb{T}$ es una mónada de Hopf a izquierda si y sólo si $F \dashv U$ es una adjunción de Hopf a izquierda.*

DEMOSTRACIÓN. Manteniendo la notación anterior, la prueba se centra en notar que $\lambda_{X, (T(Y), \mu_Y)} = H_{X,Y}^l$. Con esto es claro que si $F \dashv U$ es una adjunción de Hopf a izquierda entonces T es de Hopf a izquierda.

Por otro lado supongamos que H^l es un isomorfismo. Fijado un objeto $X \in \mathcal{C}$ definimos $R(-) = T(X \otimes -)$ y $Q(-) = T(X) \otimes -$, con lo cual nombrando $\alpha := \lambda_{X,-}: RU \Rightarrow QU$ es $\alpha F(Y) = \lambda_{X, F(Y)} = \lambda_{X, (T(Y), \mu_Y)} = H_{X,Y}^l$. De esta manera αF es invertible y por 3.9 α es invertible, de lo que se deduce λ invertible pues X era arbitrario. $\square$

3. Mónadas de Hopf y categorías monoidales cerradas

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema, que es una generalización del resultado clásico que dice que dado un bimonoid B , la categoría $B\text{-Mod}$ es cerrada a izquierda y el functor de olvido U es cerrado fuerte si y sólo si B tiene antípoda.

TEOREMA 3.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal cerrada a izquierda y $\mathbb{T}$ una mónada opmonoidal sobre $\mathcal{C}$. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathbb{T}$ es Hopf a izquierda.
2. $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ es cerrada a izquierda y $U^{\mathbb{T}}$ es cerrado fuerte a izquierda.

Veamos primero la equivalencia de segundo punto con otro. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal cerrada a izquierda, $\mathbb{T}$ mónada opmonoidal en la misma, $F \dashv U$ la adjunción de Eilenberg-Moore. Dada una adjunción $G \dashv V$: de unidad y counidad α, β entre endofuntores de $\mathcal{C}$, diremos que esta adjunción “se levanta” a la categoría $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ si existe una adjunción $\hat{G} \dashv \hat{V}$ con unidad y counidad $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ entre endofuntores de $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ tal que $U\hat{G} = GU$, $U\hat{V} = VU$, $U\hat{\alpha} = \alpha U$ y $U\hat{\beta} = \beta U$.

LEMA 3.12. *Son equivalentes:*

- DEMOSTRACIÓN. Supongamos el primer punto. Dada (X, x) una $\mathbb{T}$ -álgebra, podemos observar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
& & \mathcal{C}^T \\
& \nearrow [(X,x),-] & \downarrow U \\
\mathcal{C}^T & \xrightarrow[U((X,x),U(-))]{U([(X,x),-])} & \mathcal{C}
\end{array}$$

Con esto tenemos que existe un functor $H: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ que cumple $U(H(A, a)) = [X, A]$ para toda álgebra (A, a) tal que $[(X, x), -] \cong H$ mediante un isomorfismo natural α tal que $U(\alpha) = U_{2, -, (X, x)}^{\#}$. De este isomorfismo deducimos por B.1 que H es también un adjunto a derecha de $- \otimes (X, x)$ con lo cual podemos elegir los Homs internos a izquierda de $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ de manera que $U([(X, x), (A, a)]) = [X, A]$. Veamos que con esta construcción se tiene que la adjunción $(- \otimes (X, x)) \dashv H$ es un levantado de $(- \otimes X) \dashv [X, -]$. La unidad y la counidad de $(- \otimes (X, x)) \dashv H$ están dadas por,

$$\begin{aligned}\eta &= 1_{\mathcal{C}\mathbb{T}} \xrightarrow{coev} [(X, x), - \otimes (X; x)] \xrightarrow{\alpha_{-\otimes(X, x)}} H(- \otimes (X, x)) \\ \varepsilon &= H(-) \otimes (X, x) \xrightarrow{\alpha^{-1} \otimes (X, x)} [(X, x), -] \otimes (X, x) \xrightarrow{ev} 1_{\mathcal{C}\mathbb{T}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
U \xrightarrow{U(\text{coev})} U([(X, x), - \otimes (X, x)]) & \xrightarrow{U\alpha_{-\otimes(X, x)}} & UH(- \otimes (X, x)) = [X, U(- \otimes (X, x))] \\
& & \downarrow [X, U_{2, -, (X, x)}^{-1}] = 1 \\
& \searrow \text{coev}_{U(-)} & & & [X, U(-) \otimes X] \\
U(H(-) \otimes (X, x)) & \xrightarrow{U(\alpha^{-1} \otimes (X, x))} & U([(X, x), -] \otimes (X, x)) & \xrightarrow{U(\text{ev})} & U \\
\uparrow U_{2, H(-), (X, x)} = 1 & & & & \\
UH(-) \otimes U((X, x)) = [X, U(-)] \otimes X & & & \nearrow \text{ev}_{U(-)} &
\end{array}$$

Por otro lado, suponiendo el segundo punto, tenemos que la existencia de la adjunción $(- \otimes (A, a)) \dashv V_{(A, a)}$ para toda álgebra significa que $\mathcal{C}^\mathbb{T}$ es cerrada a izquierda con

$[(A, a), -] = V_{(A,a)}$ y el hecho de que esta sea un levantado de $(- \otimes A) \dashv [A, -]$ nos dice que el isomorfismo $U_{2,-,(A,a)}^\# : U([(A, a), -]) \Rightarrow [A, U(-)]$ es la identidad pues se verifica

$$(U_{2,-,(A,a)})_{(X,x)}^\# = [A, U(ev_{(X,x)})] \circ coev_{U([(A,a),(X,x)])} = [A, ev_X] \circ coev_{[A,X]} = Id_X$$

En particular U es cerrado (estricto) a izquierda. $\square$

Procedemos ahora a probar el Teorema 3.11:

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior tenemos que el segundo punto en el enunciado del Teorema es equivalente a que para cada $\mathbb{T}$ -álgebra (A, a) , la adjunción $(- \otimes A) \dashv [A, -]$ se levanta a una adjunción $(- \otimes (A, a)) \dashv V_{(A,a)}$. Esto es equivalente a que el morfismo de mónadas $(- \otimes A, \lambda_{(A,a)})$ de la Proposición 3.4 sea fuerte ($\lambda_{(A,a)}$ invertible) por el Teorema A.14, lo cual es la definición de que $F \dashv U$ sea de Hopf a izquierda. De esta manera $\mathbb{T}$ es una mónada de Hopf a izquierda por la Proposición 3.10. $\square$

A continuación, notamos que a partir de resultados vistos en este texto obtenemos el resultado clásico siguiente, para una categoría monoidal $\mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN. 3.13. *Dado (A, σ) en el centro de $\mathcal{C}$, dotado de estructura de bimonoides, tenemos que es de Hopf si y solo si la categoría $A - \mathbf{Mod}$ es monoidal cerrada a izquierda y el functor de olvido $U : A - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{C}$ es monoidal fuerte.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.20 tenemos que (A, σ) es un monoide de Hopf si y solo si la mónada dada por $A \otimes -$ es de Hopf a izquierda. La categoría de Eilenberg-Moore de la misma es $A - \mathbf{Mod}$, con lo cual por el Teorema 3.11 el primer punto es equivalente con que esta categoría sea monoidal cerrada a izquierda y el functor de olvido sea cerrado fuerte. $\square$

Concluimos esta sección describiendo la estructura de $\mathbb{T}$ -álgebra de $[(X, x), (Y, y)]$, dada por el Teorema 3.11.

Como el functor $[(X, x), -]$ es un levantado a la categoría de Eilenberg-Moore de $[X, -]$, por el Lema A.5 tenemos que existe una estructura de morfismo de mónadas $\chi : T([X, -]) \rightarrow [X, T(-)]$ para $[X, -]$ con lo cual la estructura de $\mathbb{T}$ -álgebra es

$$T([X, Y]) \xrightarrow{\chi_Y} [X, T(Y)] \xrightarrow{[X,y]} [X, Y]$$

El Teorema A.13 garantiza que si $\lambda : T(- \otimes X) \rightarrow T(-) \otimes X$ es la estructura de morfismo de mónadas de $- \otimes X$, entonces $\chi = (\lambda^{-1})^\#$. Por lo tanto la estructura de $\mathbb{T}$ -álgebra de $[X, Y]$ es

$$T([X, Y]) \xrightarrow{(\lambda^{-1})^\#} [X, T(Y)] \xrightarrow{[X,y]} [X, Y].$$

4. Aplicación a subcategorías reflexivas

A continuación describiremos una aplicación del teorema 3.11. Antes daremos algunas definiciones pertinentes.

DEFINICIÓN. 3.14. Dada una categoría $\mathcal{C}$, decimos que una subcategoría $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ es

- *Plena* si el functor inclusión es pleno, es decir, $\mathcal{A}(A, A') = \mathcal{C}(A, A')$ para todos objetos A, A' en $\mathcal{A}$.

- *Repleta* si $A \cong B$ en $\mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$ entonces $B \in \mathcal{A}$, es decir, todos los objetos en $\mathcal{B}$ isomorfos a un objeto de $\mathcal{A}$ están en $\mathcal{A}$.
- *Reflexiva* si es plena y el functor inclusión $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ admite un adjunto a izquierda $L: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN. 3.15. Una mónada $\mathbb{T}=(T, \mu, \eta)$ en una categoría $\mathcal{C}$ se dice *idempotente* (ver [Bor94, Proposition 4.2.3] para definiciones equivalentes) si μ es un isomorfismo.

El vínculo entre las definiciones anteriores está dado por el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN. 3.16. [Bor94, Corollary 4.2.4] *Dada una categoría $\mathcal{C}$, existe una correspondencia biyectiva a menos de equivalencias de categorías entre*

- *Las subcategorías reflexivas repletas de $\mathcal{C}$.*
- *Las categorías de $\mathbb{T}$ -álgebras para mónadas idempotentes $\mathbb{T}$ sobre $\mathcal{C}$.*

Recordamos que una mónada idempotente $\mathbb{T}=(T, \mu, \eta)$ en una categoría cartesiana $\mathcal{C}$ es opmonoidal de la única manera posible (ver 1.12) y su operador de fusión está dado por

$$H_{X,Y} = T(X \times T(Y)) \xrightarrow{T_{2,X,T(Y)}} T(X) \times T^2(Y) \xrightarrow{1 \times \mu} T(X) \times T(Y)$$

De manera que una mónada idempotente sobre una categoría cartesiana es de Hopf a izquierda si y sólo preserva los productos de la forma $X \times T(Y)$. En particular tenemos el siguiente lema:

LEMA 3.17. *Una monada idempotente en una categoría cartesiana es de Hopf si preserva productos finitos.*

Con esto podemos enunciar el siguiente resultado.

COROLARIO. 3.18. *Dada $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ subcategoría reflexiva tal que el adjunto a izquierda de la inclusión $L: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ preserva productos, entonces $\mathcal{A}$ es cartesiana cerrada si $\mathcal{B}$ lo es y $i([A, A']) \cong [i(A), i(A')]$.*

Si $\mathcal{A}$ es repleta, se pueden tomar los objetos de la forma $[i(A), i(A')]$ como homs internos de $\mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea la mónada generada por la adjunción $L \dashv i$. Notamos que la mónada es idempotente y el functor $i: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ es monádico (ver 4.2.3 y 4.2.4 de [Bor94]) y vale $i = UK$, donde K es el functor de comparación definido en 2.6. Por otro lado, como $T = i \circ L$ tenemos que T preserva productos con lo cual estamos en las hipótesis del lema anterior y la mónada es de Hopf, con lo cual por el Teorema 3.11 $\mathcal{B}^{\mathbb{T}}$ es cartesiana cerrada y por lo tanto $\mathcal{A}$ también lo es a través de $K([A, A']_{\mathcal{A}}) = [A, A']_{\mathcal{C}^{\mathbb{T}}}$.

Por último, si $\mathcal{A}$ es repleta, el functor K es un isomorfismo e i resulta estrictamente monádico, con lo cual $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^{\mathbb{T}}$. Además, como U es cerrado se deduce la existencia de un isomorfismo $i([A, A']_{\mathcal{A}}) \cong [i(A), i(A')]_{\mathcal{B}}$ con lo cual $[i(A), i(A')]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}$ y estos se pueden tomar como Homs internos para $\mathcal{A}$. $\square$

Un ejemplo donde aplica el corolario anterior es la mónada inducida por la inclusión $i: \mathbf{Sh}(X) \xrightarrow{i} \mathbf{Psh}(X)$ de la categoría de haces dentro de la de prehaces para un espacio topológico X . Por detalles sobre haces, ver [MM12, Capítulo 2].

Morfismos de mónadas

En este apéndice se estudian en detalle los morfismos de mónadas. Vemos como la construcción de Eilenberg-Moore permite observar que un functor con imagen en la categoría de álgebras de una mónada es equivalente a un functor con imagen en la categoría base y él mismo con estructura de álgebra para cierta mónada. Se ve como el concepto de morfismo de mónadas permite entender los levantados de funtores, transformaciones naturales y adjunciones a las categorías de Eilenberg-Moore. Se concluye observando como los morfismos fuertes, es decir con estructura invertible, aparecen cuando una adjunción se puede levantar a la categoría de Eilenberg-Moore. Para morfismos de mónadas, citamos [Str72], donde se ven las ideas principales en el contexto de las 2-categorías.

1. La construcción de Eilenberg-Moore como functor.

Dada una mónada $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ en una categoría $\mathcal{C}$ y otra categoría $\mathcal{X}$, tenemos que $[\mathcal{X}, \mathcal{C}]$ (la categoría con funtores $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ como objetos y transformaciones naturales entre los mismos como flechas) tiene una mónada $[\mathcal{X}, T]$. El endofunctor es la poscomposición con T , la multiplicación es la familia de transformaciones naturales $\mu_W := \mu W : T^2 W \Rightarrow TW$ y la unidad es la familia $\eta_W := \eta W : W \Rightarrow TW$.

Será útil saber que un functor $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene estructura de $[\mathcal{X}, T]$ -álgebra $\sigma : TW \Rightarrow W$ sí y solo si para cada $X \in \mathcal{X}$, $W(X)$ tiene estructura de $\mathbb{T}$ -álgebra $\sigma_X : TW(X) \rightarrow W(X)$ y los σ_X forman una transformación natural $TW \Rightarrow W$. Además, $\beta : (W, \sigma) \Rightarrow (W', \sigma')$ es un morfismo de $[\mathcal{X}, T]$ -álgebras sí y solo si β_X es morfismo de $\mathbb{T}$ -álgebras para todo $X \in \mathcal{X}$.

Dados $\mathbb{T}$ una mónada sobre $\mathcal{C}$ y $F \dashv U$ su adjunción de Eilenberg-Moore, $\mathcal{X}$ una categoría, podemos definir $K : [\mathcal{X}, \mathcal{C}^{\mathbb{T}}] \rightarrow [\mathcal{X}, \mathcal{C}]^{[\mathcal{C}, T]}$, como $K(Z) = (UZ, \nu)$ en objetos, donde $\nu = U\varepsilon Z : TUZ = UFUZ \Rightarrow UZ$ y $K(\alpha) = U\alpha$ en flechas.

LEMA A.1. *El K recién definido es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $(W, \sigma) \in [\mathcal{X}, \mathcal{C}]^{[\mathcal{X}, T]}$, definimos $L(W, \sigma) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}^T$ como

$$L(W, \sigma)(X \xrightarrow{f} Y) = (W(X), \sigma_X) \xrightarrow{W(f)} (W(Y), \sigma_Y)$$

donde $W(f) \in \mathcal{C}^T$ por la naturalidad de σ .

Dada $\beta: (W, \sigma) \Rightarrow (W', \sigma')$ en $[\mathcal{X}, \mathcal{C}]^{\mathcal{X}, T}$, definimos $L(\beta): L(W, \sigma) \Rightarrow (W', \sigma')$ como $L(\beta)_X = \beta_X$. Tenemos que $\beta_X \in \mathcal{C}^T$ pues

$$\begin{array}{ccc} TW(X) & \xrightarrow{T(\beta_X)} & TW'(X) \\ \downarrow \sigma_X & & \downarrow \sigma'_X \\ W(X) & \xrightarrow{\beta_X} & W'(X) \end{array}$$

conmuta por ser β morfismo de $[\mathcal{X}, T]$ -álgebras.

Dado que $\varepsilon_{(C, \zeta)} = \zeta$ y $U(C, \zeta) = C$, se verifica inmediatamente que $KL = Id$ y $LK = Id$. $\square$

DEFINICIÓN. A.2. Dadas $(\mathcal{C}, \mathbb{T}), (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ dos categorías y mónadas en las mismas, llamamos morfismo de mónadas $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ a un par (R, λ) donde $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor y $\lambda: SR \Rightarrow RT$ es una transformación natural que verifica los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\eta^S R} & SR \\ & \searrow R\eta^T & \downarrow \lambda \\ & & RT \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} SSR & \xrightarrow{S\lambda} & SRT & \xrightarrow{\lambda T} & RTT \\ \downarrow \mu^S R & & & & \downarrow R\mu^T \\ SR & \xrightarrow{\lambda} & & & RT \end{array}$$

Si λ es un isomorfismo, decimos que (R, λ) es un morfismo fuerte. Nos referiremos muchas veces a las transformaciones naturales de los morfismos de mónadas como sus estructuras.

Revirtiendo la dirección de λ en los diagramas anteriores, se obtiene la definición de un op-morfismo de mónadas (R, λ) .

Una transformación natural de morfismos de mónadas entre

$$(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightarrow[(R', \lambda')]{(R, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S})$$

es una transformación natural $\Delta: R \Rightarrow R'$ tal que

$$\begin{array}{ccc} SR & \xrightarrow{\lambda} & RT \\ S\Delta \downarrow & & \downarrow \Delta T \\ SR' & \xrightarrow{\lambda'} & R'T \end{array}$$

LEMA A.3. Si $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightarrow{(J, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S}) \xrightarrow{(K, \chi)} (\mathcal{E}, \mathbb{R})$ son morfismos de mónadas, entonces KJ junto a $RKJ \xrightarrow{\chi J} K SJ \xrightarrow{K\lambda} KJT$ es un morfismo de mónadas, notado $(K, \chi)(J, \lambda)$. Además, $(1, 1): (\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{T})$ es un morfismo de mónadas.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccccccc}
 R^2KJ & \xrightarrow{R\chi J} & RK SJ & \xrightarrow{RK\lambda} & RKJT & \xrightarrow{\chi JT} & KSJT & \xrightarrow{K\lambda T} & KJT^2 & & KJ & \xrightarrow{\eta^R KJ} & RKJ \\
 \downarrow \mu^R KJ & & \searrow \chi SJ & & \nearrow KS\lambda & & & & \downarrow KS\mu^T & & \downarrow \chi J & & \downarrow \chi J \\
 & & & & KS^2J & & & & & & KSJ & & KSJ \\
 & & & & \downarrow K\mu^S J & & & & & & \downarrow K\lambda & & \downarrow K\lambda \\
 RKJ & \xrightarrow{\chi J} & KSJ & \xrightarrow{K\lambda} & KJT & & & & & & KJT & & KJT
 \end{array}$$

conmutan por hipótesis en χ y λ . De esta manera, observando los bordes exteriores de los mismos, tenemos que la transformación natural asociada a $(K, \chi)(J, \lambda)$ le da estructura de morfismo de mónadas al functor KJ . $\square$

DEFINICIÓN. A.4. Dados dos morfismos de mónadas $(R, \lambda): (\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ y $(Q, \chi): (\mathcal{D}, \mathbb{S}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{T})$ tales que $R \dashv Q$, diremos que esta adjunción es una adjunción de morfismos de mónadas si la unidad y counidad de la misma son transformaciones de morfismos de mónadas, tomando en la composición y en la identidad las estructuras descritas en el lema anterior.

La definición de morfismo de mónadas aparece naturalmente al estudiar levantados de funtores entre categorías con mónadas a las respectivas categorías de Eilenberg-Moore, como se ve en el siguiente lema.

LEMA A.5. Sea $\mathbb{T}$ mónada en $\mathcal{C}$ y $\mathbb{S}$ mónada en $\mathcal{D}$, $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Existe una biyección entre:

- Funtores $\bar{R}: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathbb{S}}$ tal que $V\bar{R} = RU$
- Estructuras de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra sobre $RU \in [\mathcal{C}^{\mathbb{T}}, \mathcal{D}]$.
- Estructuras $\lambda: SR \Rightarrow RT$ de morfismo de mónadas sobre R .

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema A.1 tenemos que los primeros dos puntos están en biyección a partir del isomorfismo K y su construcción. En primer lugar, dado $\bar{R}$, el functor en $[\mathcal{C}^{\mathbb{T}}, \mathcal{D}]$ con estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra que obtenemos mediante el isomorfismo es $V\bar{R}$ en objetos, que por hipótesis es RU . Por otro lado, dada una estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra en RU , obtenemos un $\bar{R}: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathbb{S}}$ que por construcción cumple $V\bar{R} = RU$.

(Dado $\bar{R}$, obtenemos que la estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra es $V\varepsilon^S \bar{R}: SRU = VGV\bar{R} \Rightarrow V\bar{R} = RU$. Dada la estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra $\nu: SRU \Rightarrow RU$, $\bar{R}$ está dado por $\bar{R}(X, \zeta) = (R(X), \nu_{(X, \zeta)})$.

Por otro lado, tenemos una biyección entre las $\nu: SRU \Rightarrow RU$ y $\lambda: SR \Rightarrow RT$:

Dada ν , definimos $\lambda: SR \xrightarrow{SR\eta^T} SRT \xrightarrow{\nu F} RUF = RT$.

Dada λ , definimos $\nu: SRU \xrightarrow{\lambda U} RTU = RUFU \xrightarrow{RU\varepsilon^T} RU$.

Estos procesos son claramente inversos gracias a las identidades triangulares de la adjunción de Eilenberg-Moore para $\mathbb{T}$.

Concluimos la prueba observando que bajo esta biyección tenemos que ν es una estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra $\iff \lambda$ es una estructura de morfismo de mónadas.

Si ν es una estructura de $[\mathcal{D}, S]$ -álgebra tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
S^2RU & \xrightarrow{S\nu} & SRU \\
\downarrow \mu^S RU & & \downarrow \nu \\
SRU & \xrightarrow{\nu} & RU
\end{array}
\quad y \quad
\begin{array}{ccc}
RU & \xrightarrow{\eta^S RU} & SRU \\
& \searrow Id & \downarrow \nu \\
& & RU
\end{array}$$

lo que implica

$$\begin{array}{ccc}
S^2R & \xrightarrow{S\lambda} & SRT & \xrightarrow{\lambda T} & RTT \\
\downarrow \mu^S R & & \downarrow S^2R\eta^T & \nearrow S\nu F & \downarrow R\mu^T \\
& & S^2RT & & \\
& \downarrow \mu^S RT & & \searrow \nu F & \\
SR & \xrightarrow{SR\nu^T} & SRT & \xrightarrow{\nu F} & RT \\
& \searrow \lambda & & &
\end{array}
\quad y \quad
\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\eta^S R} & SR \\
\downarrow R\eta^T & & \downarrow SR\eta^T \\
RUF & \xrightarrow{\eta^S RUF} & SRUF \\
& \searrow Id & \downarrow \nu F \\
& & RUF
\end{array}
\quad \lambda$$

En cambio si suponemos λ estructura de morfismo de mónadas tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
S^2R & \xrightarrow{S\lambda} & SRT & \xrightarrow{\lambda T} & RTT \\
\downarrow \mu^S R & & & & \downarrow R\mu^T \\
SR & \xrightarrow{\lambda} & RT
\end{array}
\quad y \quad
\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\eta^S R} & SR \\
& \searrow R\eta^T & \downarrow \lambda \\
& & RT
\end{array}$$

lo que implica

$$\begin{array}{ccc}
S^2RU & \xrightarrow{S\lambda U} & SRTU & \xrightarrow{SRU\epsilon^T} & SRU \\
\downarrow \mu^S RU & & \downarrow \lambda TU & & \downarrow \lambda U \\
& & RT^2U & \xrightarrow{RTU\epsilon^T} & RTU \\
& \downarrow R\mu^T U & & & \downarrow RU\epsilon^T \\
SRU & \xrightarrow{\lambda U} & RTU & \xrightarrow{RU\epsilon^T} & RU
\end{array}
\quad y \quad
\begin{array}{ccc}
RU & \xrightarrow{\eta^S RU} & SRU \\
& \searrow R\eta^T U & \downarrow \lambda U \\
& & RTU \\
& \searrow Id & \downarrow RU\epsilon^T \\
& & RU
\end{array}$$

Donde las partes que no conmutan por hipótesis conmutan por naturalidad de las transformaciones. $\square$

Considerando **Mnd** la categoría de mónadas, cuyos objetos son los pares $(\mathcal{C}, \mathbb{T})$ siendo $\mathbb{T}$ una mónada en la categoría $\mathcal{C}$, y cuyos morfismos son los morfismos de mónadas definidos anteriormente y la categoría **Cat²**, donde **2** representa a la categoría con dos objetos y una única flecha entre ellos (que no es más que funtores como objetos y cuadrados conmutativos como morfismos), podemos definir lo siguiente:

DEFINICIÓN. A.6. Se define EM: $\mathbf{Mnd} \rightarrow \mathbf{Cat}^2$ como

$$(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightarrow{(R, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S}) \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathbb{T}} & \xrightarrow{\bar{R}} & \mathcal{D}^{\mathbb{S}} \\ \downarrow U^T & & \downarrow U^S \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{R} & \mathcal{D} \end{array}$$

donde $\bar{R}$ es la construcción del lema anterior.

LEMA A.7. EM es un functor.

DEMOSTRACIÓN. Dados $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightarrow{(J, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S}) \xrightarrow{(K, \chi)} (\mathcal{E}, \mathbb{R})$ por el Lema A.5 basta chequear que el morfismo de mónadas correspondiente a $\overline{KJ}$ es la composición (K, χ) y (J, λ) , o sea $(KJ, K\lambda \circ \chi J)$.

Por definición tenemos que $\bar{J}(C, \zeta) = (J(C), J(\zeta) \circ \lambda_C)$, con lo cual $\overline{KJ}(C, \zeta) = (KJ(C), KJ(\zeta) \circ K(\lambda_C) \circ \chi_{J(C)}) = (KJ(C), KJ(\zeta) \circ (K\lambda \circ \chi J)_C) = \overline{KJ}(C, \zeta)$.

Por otro lado, si $T = 1_{\mathcal{C}}$, tenemos que $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ y $U^T = 1_{\mathcal{C}}$ y claramente $\overline{1_{\mathcal{C}}} = 1_{\mathcal{C}^{\mathbb{T}}}$, luego haciendo abuso de notación es $EM(1, 1) = 1$. $\square$

2. Levantados y estructuras de mónadas

LEMA A.8. Sean $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightarrow[(Q, \chi)]{(R, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ en $\mathbf{Mnd}$ y $\alpha: R \Rightarrow Q$ transformación natural. Recordando el Lema A.5, son equivalentes:

- $\exists \bar{\alpha}: \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}$ tal que $U^S \bar{\alpha} = \alpha U^T$.
- α es una transformación natural de morfismos de mónadas.

Además, en tal caso $\bar{\alpha}$ es única.

DEMOSTRACIÓN. Si $\bar{\alpha}$ es como en el primer punto, tenemos que $\bar{\alpha}_{(C, \zeta)}: \bar{R}(C, \zeta) \rightarrow \bar{Q}(C, \zeta)$ debe ser α_C . Esto nos permite observar que el primer punto es equivalente a que α_C sea un morfismo de $\mathbb{S}$ -álgebras para todo $C \in \mathcal{C}$, dado que en este caso, definiendo $\bar{\alpha}_{(C, \zeta)} := \alpha_C$, tenemos un levantado, cuya naturalidad es consecuencia de la de α .

Veamos entonces que α consista de morfismos de $\mathbb{S}$ -álgebras es equivalente a que sea una transformación natural de morfismos de mónadas. Que $\alpha_C: \bar{R}(C, \zeta) \rightarrow \bar{Q}(C, \zeta)$ sea un morfismo de $\mathbb{S}$ -álgebras y que provenga de una transformación natural de morfismos de mónadas se expresan en los siguientes diagramas respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} SR(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & RT(C) \xrightarrow{R(\zeta)} R(C) \\ \downarrow S\alpha_C & & \downarrow \alpha_C \\ SQ(C) & \xrightarrow{\chi_C} & QT(C) \xrightarrow{Q(\zeta)} Q(C) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} SR(C) & \xrightarrow{\lambda_C} & RT(C) \\ \downarrow S\alpha_C & & \downarrow \alpha_{T(C)} \\ SQ(C) & \xrightarrow{\chi_C} & QT(C) \end{array}$$

Es inmediato chequear que el segundo diagrama y la naturalidad de α hacen que el primero conmute. Veamos entonces el otro caso.

$$\begin{array}{ccccc}
SR(X) & \xrightarrow{\lambda_C} & RT(C) & & \\
\downarrow S\alpha_C & \searrow SR(\eta_C) & \downarrow RT(\eta_C) & \searrow 1_{RT(C)} & \\
& & SRT(C) & \xrightarrow{\lambda_{T(C)}} & FT^2(C) & \xrightarrow{F\mu_C} & FT(C) \\
& & \downarrow S(\alpha_{T(C)}) & & \downarrow \alpha_{T(C)} & & \\
& & SQT(C) & \xrightarrow{\chi_{T(C)}} & QT^2(C) & \xrightarrow{Q\mu_C} & QT(C) \\
& \nearrow SQ(\eta_C) & \uparrow QT(\eta_C) & \nearrow 1_{QT(C)} & & & \\
SQ(C) & \xrightarrow{\chi_C} & QT(C) & &
\end{array}$$

Notamos que el borde exterior del anterior diagrama es la condición de que α_C sea una componente de una transformación natural de morfismos de mónadas. El rectángulo interior conmuta por hipótesis. El resto de las componentes del diagrama conmutan por naturalidad de λ, χ, α y axiomas de mónada para T . $\square$

Este lema nos permite demostrar el siguiente teorema, que caracteriza las condiciones necesarias para poder obtener el levantado de una adjunción a la categoría de Eilenberg-Moore de manera compatible.

TEOREMA A.9. Sean $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightleftharpoons[(Q, \chi)]{(R, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ morfismos de mónadas y $\mathcal{C}^{\mathbb{T}} \xrightleftharpoons[\overline{Q}]{\overline{R}} \mathcal{D}^{\mathbb{S}}$

los respectivos levantados a las categorías de Eilenberg-Moore. Existe una biyección entre:

- Adjunciones $(R, \lambda) \dashv (Q, \chi)$ con unidad y counidad α, β .
- Pares de adjunciones $(R \dashv Q, \alpha, \beta)$ y $(\overline{R} \dashv \overline{Q}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ tales que $\begin{cases} U^T \overline{\alpha} = \alpha U^T \\ U^S \overline{\beta} = \beta U^S \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN. En ambos puntos tenemos una adjunción $(R \dashv Q, \alpha, \beta)$, el primer punto dice que α y β son transformaciones de morfismos de mónadas $(1, 1) \xrightarrow{\alpha} (Q, \chi)(R, \lambda), (R, \lambda)(Q, \chi) \xrightarrow{\beta} (1, 1)$, lo cual (por el lema anterior) sabemos que es equivalente a la existencia de $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ con las condiciones del segundo punto.

Con esto, tenemos que los puntos son equivalentes a menos de verificar que $(\overline{R} \dashv \overline{Q}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ sea efectivamente una adjunción. Para esto observamos que

$$\begin{array}{ccc}
U^T \overline{Q} & \xrightarrow{U^T \overline{\alpha} \overline{Q}} & U^T \overline{Q} \overline{R} \overline{Q} & \xrightarrow{U^T \overline{Q} \overline{\beta}} & U^T \overline{Q} \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\
QU^S & \xrightarrow{\alpha QU^S} & QRQU^S & \xrightarrow{\beta QU^S} & QU^S \\
& \searrow 1 & & \nearrow 1 & \\
& & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
U^S \overline{R} & \xrightarrow{U^S \overline{R} \overline{\alpha}} & U^S \overline{R} \overline{Q} \overline{R} & \xrightarrow{U^S \overline{\beta} \overline{R}} & U^S \overline{R} \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\
RU^T & \xrightarrow{R\alpha U^S} & RQRU^T & \xrightarrow{\beta RU^S} & RU^T \\
& \searrow 1 & & \nearrow 1 & \\
& & & &
\end{array}$$

Con lo cual, dado que los funtores de olvido son fieles (Lema 2.3), tenemos que se cumplen las identidades triangulares de la adjunción. $\square$

3. Adjunciones de morfismos de mónadas y morfismos fuertes.

La relación de compañerismo entre transformaciones naturales nos permite observar los dos siguientes lemas respecto a los morfismos de mónadas.

LEMA A.10. *Dadas $(\mathcal{C}, T)$ y $(\mathcal{D}, S)$ mónadas en las respectivas categorías y una adjunción entre funtores $\mathcal{C} \xrightarrow{R} \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}$ con $R \dashv Q$. Entonces la relación de compañerismo (tomando $F = R = R'$ y $G = Q = Q'$ en el lema 1.20) establece una biyección entre:*

- Estructuras de opmorfismo de mónadas para R .
- Estructuras de morfismo de mónadas para Q .

DEMOSTRACIÓN. En este contexto, llamando α y β a la unidad y counidad de la adjunción tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \text{AFIRMACIÓN. } \varphi: RT \Rightarrow SR \text{ es compañera de } \chi: RG \Rightarrow GS \\ \begin{array}{ccc} T \xrightarrow{\alpha T} QRT & & RQS \xrightarrow{\beta S} S \\ \downarrow T\alpha & \Downarrow Q\varphi & \downarrow R\chi \\ TQR \xrightarrow{\chi R} QSR & \iff & RTQ \xrightarrow{\varphi Q} SRQ \end{array} \end{array}$$

Es inmediato chequear que si las transformaciones son compañeras, los diagramas recién descritos conmutan simplemente usando la definición de los mapas y naturalidad de los mismos. Por otro lado, si alguno de los dos cuadrados conmutan, precomponiendo con Q o aplicando Q a los mismos y usando la naturalidad de los mapas obtenemos la relación de compañerismo buscada.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que φ es una estructura de opmorfismos si y solo si χ es una estructura de morfismo. Para esto podemos observar que tenemos los siguientes dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc} T^2 \xrightarrow{\alpha T^2} QRT^2 & & T^2 \xrightarrow{\alpha T^2} QRT^2 \\ \swarrow T^2\alpha & \downarrow T\alpha T & \downarrow Q\varphi T \\ T^2QR & TQRT \xrightarrow{\chi RT} QSRT & \downarrow Q\varphi T \\ \searrow T\chi R & \downarrow TQ\varphi & \downarrow QS\varphi \\ & TQSR \xrightarrow{\chi SR} QS^2R \xrightarrow{Q\mu^S R} QSR & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^2 \xrightarrow{\alpha T^2} QRT^2 & & T^2 \xrightarrow{\alpha T^2} QRT^2 \\ \swarrow T^2\alpha & \downarrow \mu^T & \downarrow QR\mu^T \\ T^2QR & T \xrightarrow{\alpha T} QRT & \downarrow QR\mu^T \\ \searrow \mu^T QR & \downarrow T\alpha & \downarrow Q\varphi \\ & TQR \xrightarrow{\chi R} QSR & \end{array}$$

Por lo observado en la afirmación y naturalidad de α , μ^T y μ^S , tenemos que los diagramas conmutan. Esto nos permite deducir que si las composiciones rojas son iguales, entonces lo son también las azules y vice versa.

Para concluir observamos que la condición de opmorfismo para φ : $(\mu^S R)(S\varphi)(\varphi T) = \varphi(R\mu^T)$ es equivalente a la igualdad de las composiciones rojas y la condición de morfismo para χ es equivalente a la igualdad de las composiciones azules, con lo cual deducimos lo que queríamos, a menos de las condiciones con la unidad de T y S .

Esto último se deduce de plantear la igualdad de las composiciones diagramáticamente, y por ejemplo en el caso de las composiciones rojas, aplicar el functor R y poscomponer con $\beta S F$ al final, lo cual utilizando la naturalidad de φ y ε nos permite

deducir que φ es efectivamente una op-ley distributiva. Claramente, en caso de ser φ op-ley distributiva se deduce la igualdad de las componentes rojas de manera más directa aplicando Q y precomponiendo con αT^2 .

Para las condiciones relacionadas a las unidades, suponiendo φ estructura de op-morfismo, tenemos que

$$\begin{array}{ccccc}
 TQ & \xrightarrow{\alpha T Q} & QRTQ & & \\
 \eta^T Q \uparrow & & QR\eta^T Q \uparrow & \searrow Q\varphi Q & \\
 Q & \xrightarrow{\alpha Q} & QRRQ & \xrightarrow{Q\eta^S RQ} & QSRQ \\
 & \searrow 1 & \downarrow Q\beta & & \downarrow QS\beta \\
 & & Q & \xrightarrow{Q\eta^S} & QS
 \end{array}$$

conmuta, usando la naturalidad de las transformaciones, las identidades triangulares para la adjunción y la hipótesis respecto a φ . Recorriendo los extremos exteriores tenemos la condición respecto a las unidades para que χ sea un morfismo. El otro caso es análogo. $\square$

Ahora comentaremos dos lemas, que describen la interacción entre adjunciones de morfismos de mónadas y morfismos de mónadas fuertes, que permiten demostrar el teorema objetivo de esta subsección.

LEMA A.11. Dada una adjunción de morfismos de mónadas $(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \xrightleftharpoons[(Q, \chi)]{(R, \lambda)} (\mathcal{D}, \mathbb{S})$,

$(R, \lambda) \dashv (Q, \chi)$, la compañera $\chi^\# : RT \Rightarrow SR$ de χ bajo $R \dashv Q$ es inversa de λ . De esta forma resulta (R, λ) es morfismo fuerte.

DEMOSTRACIÓN. Como $\alpha : (1, 1) \Rightarrow (Q, \chi)(R, \lambda)$ tenemos que

$$\begin{array}{c}
 T \xrightarrow{T\alpha} TQR \xrightarrow{\chi R} QSR \xrightarrow{Q\lambda} QRT \\
 \searrow \alpha T \quad \nearrow
 \end{array}$$

con lo cual

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R\alpha T & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
 RT & \xrightarrow{RT\alpha} & RTQR & \xrightarrow{R\chi R} & RQSR & \xrightarrow{RQ\lambda} & RQRT \xrightarrow{\beta RT} RT \\
 & \searrow \lambda^\# & & \downarrow \beta SR & & \nearrow \lambda & \\
 & & & SR & & &
 \end{array}$$

por las identidades triangulares de la adjunción, tenemos que el camino de arriba es la identidad, con lo que $\lambda\lambda^\# = 1$.

Por otro lado de $\beta : (R, \lambda)(Q, \chi) \Rightarrow (1, 1)$ se tiene que

$$\begin{array}{c}
 SRQ \xrightarrow{\lambda Q} RTQ \xrightarrow[\beta S]{R\chi} RQS \xrightarrow{\beta S} S \\
 \searrow \quad \nearrow
 \end{array}$$

con lo cual

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & SRQR & & & & \\
 & \nearrow^{SR\alpha} & & \searrow^{\lambda QR} & & \nearrow^{S\beta R} & \\
 SR & \xrightarrow{\lambda} & RT & \xrightarrow{RT\alpha} & RTQR & \xrightarrow{R\chi R} & RQSR \xrightarrow{\beta SR} SR \\
 & & & \searrow^{\lambda^\#} & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

de la misma manera gracias a las identidades triangulares el camino de arriba es la identidad con lo cual $\lambda^\# \lambda = 1$ y concluimos $\lambda^\#$ es la inversa de λ . $\square$

LEMA A.12. Sea $(R, \lambda): (\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ un morfismo fuerte de mónadas y $R \dashv Q, \alpha, \beta$ una adjunción. Entonces existe una única estructura χ de morfismo de mónadas para Q tal que $(R, \lambda) \dashv (Q, \chi), \alpha, \beta$ es una adjunción de morfismos de mónadas. Además $\chi = (\lambda^{-1})^\#$, la compañera de λ^{-1} .

DEMOSTRACIÓN. Dado que (R, λ^{-1}) es un opmorfismo. Por el Lema A.10 tenemos que (Q, χ) es un morfismo $(\mathcal{D}, \mathbb{S}) \rightarrow (\mathcal{C}, \mathbb{T})$ con $\chi = (\lambda^{-1})^\#$ y además λ^{-1} y χ satisfacen los diagramas de la Afirmación 3. Dado que la relación de compañerismo es una biyección, χ es además la única que cumple estos diagramas.

Si en los mismos reemplazamos en donde aparece λ^{-1} por λ tenemos que conmutan si y solo si α y β son transformaciones de morfismos de mónadas. De esto se deduce que si una transformación natural hace a α y β transformaciones de morfismos de mónadas, es necesariamente χ , de esto se concluye la unicidad. $\square$

Podemos ahora enunciar un teorema que encapsula las ideas de esta sección. El mismo es consecuencia directa de los dos lemas anteriores.

TEOREMA A.13. Si $(R, \lambda): (\mathcal{C}, \mathbb{T}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathbb{S})$ es un morfismo de mónadas y $R \dashv Q, \alpha, \beta$ es una adjunción, son equivalentes:

- $R \dashv Q$ se levanta a una adjunción de morfismos de mónadas, es decir, existe χ tal que (Q, χ) es un morfismo de mónadas y α, β forma la adjunción de mónadas $(R, \lambda) \dashv (Q, \chi)$.
- (R, λ) es un morfismo fuerte.

En este caso, se tiene que $\chi = (\lambda^{-1})^\#$

4. Adjunciones y levantados

Lo discutido hasta el momento nos permite demostrar este teorema, que indica cuándo una adjunción de funtores entre categorías con mónadas se puede levantar de manera coherente a las categorías de Eilenberg-Moore.

TEOREMA A.14. Dados

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}^{\mathbb{T}} & \xrightarrow{\bar{R}} & \mathcal{D}^{\mathbb{S}} \\
 \downarrow U^{\mathbb{T}} & & \downarrow U^{\mathbb{S}} \\
 \mathcal{C} & \xrightleftharpoons[Q]{R} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

con $(R \dashv Q, \alpha, \beta)$ adjunción y $\lambda: SR \Rightarrow RT$ la estructura de morfismo de mónadas sobre R correspondiente a $\bar{R}$ por Lema A.5. Son equivalentes:

- λ es invertible.
- Existe única $\bar{Q}$ tal que $U^T \bar{Q} = QU^S$ y $\bar{R} \dashv \bar{Q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ es una adjunción tal que

$$U^T \bar{\alpha} = \alpha U^T \quad U^S \bar{\beta} = \beta U^S$$

DEMOSTRACIÓN. El primer punto nos dice que (R, λ) es un morfismo fuerte, luego por A.13 tenemos que esto es equivalente a que exista una única χ tal que $(R, \lambda) \dashv (Q, \chi)$ con unidad y counidad α, β , a su vez por Teorema A.9 tenemos que esto es equivalente a lo descrito en el segundo punto. $\square$

Apéndice B

Resultados sobre adjunciones e isofibraciones

Este apéndice complementa los resultados principales, con definiciones y lemas que justifican ciertos argumentos en las demostraciones de los mismos.

1. Adjunciones

PROPOSICIÓN. B.1. *Sean $F \dashv U$ funtores adjuntos, con unidad η y counidad ε . Supongamos que existe un isomorfismo natural $\alpha: U \Rightarrow V$, entonces $F \dashv V$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la unidad y counidad de $F \dashv V$ como $\eta' = 1 \xrightarrow{\eta} UF \xrightarrow{\alpha F} VF$ y $\varepsilon' = FV \xrightarrow{F\alpha^{-1}} FU \xrightarrow{\varepsilon} 1$.

Veamos que cumplen las identidades triangulares. Para esto observamos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\eta' V} & \\
 V & \xrightarrow{\eta V} UFV \xrightarrow{\alpha FV} VFV & \\
 \downarrow \alpha^{-1} & \downarrow UF\alpha^{-1} \quad \downarrow VF\alpha^{-1} & \\
 U & \xrightarrow{\eta U} UFU \xrightarrow{\alpha FU} VFU & \\
 \searrow 1 & \downarrow U\varepsilon \quad \downarrow V\varepsilon & \\
 & U \xrightarrow{\alpha} V &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{F\eta'} & \\
 F & \xrightarrow{F\eta} FUF \xrightarrow{F\alpha F} FVF & \\
 \searrow 1 & \downarrow 1 \quad \downarrow F\alpha^{-1}F & \\
 & FUF \xrightarrow{\varepsilon F} F & \\
 & \downarrow \varepsilon F & \\
 & F &
 \end{array}$$

los cuales se deducen conmutativos de la naturalidad de las transformaciones y las identidades triangulares de la adjunción $F \dashv U$. Luego observando sus bordes exteriores se tiene lo que queríamos. $\square$

LEMA B.2. *Sea $F: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor tal que para todo objeto $B \in \mathcal{B}$ existe una adjunción*

$$\mathcal{C}(F(A, B), C) \xrightarrow{\theta_{A, B, C}} \mathcal{A}(A, G_B(C))$$

natural en A y C . Luego existe un único functor $G: \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $G(B, -) = G_B$ y $\theta_{A, B, C}$ es también natural en C .

DEMOSTRACIÓN. Se define G en objetos como $G(B, C) = G_B(C)$. Para definirlo en morfismos, dados $b: B' \rightarrow B$ y $c: C \rightarrow C'$ se define $G(b, c)$ como el único morfismo tal

que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(F(A, B), C) & \xrightarrow{\theta_{A, B, C}} & \mathcal{A}(A, G(B, C)) \\ \mathcal{C}(F(1_A, b), c) \downarrow & & \downarrow \mathcal{A}(1_A, G(b, c)) \\ \mathcal{C}(F(A, B'), C') & \xrightarrow{\theta_{A, B', C'}} & \mathcal{A}(A, G(B', C')) \end{array}$$

que se obtiene a partir del Lema de Yoneda. De esta misma unicidad, se deduce que cuando $b = 1_B$ es $G(1_B, c) = G_B(C)$ y la functorialidad de G . $\square$

2. Isofibraciones

La referencia para estos resultados es [BG19], Example 3 y Lemma 4.

DEFINICIÓN. B.3. Decimos que un functor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es una isofibración discreta si dado un isomorfismo $f: C \cong G(D)$, existe un isomorfismo $f': C' \cong D$ en $\mathcal{D}$ tal que $G(f') = f$.

LEMA B.4. Dada una mónada $\mathbb{T}$ en una categoría $\mathcal{C}$, el functor de olvido $U: \mathcal{C}^{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{C}$ es una isofibración discreta.

DEMOSTRACIÓN. Sea (A, a) una $\mathbb{T}$ -álgebra y $f: B \rightarrow A$ un isomorfismo, definiendo $b := f^{-1} \circ a \circ T(f)$ se deduce que (B, b) es una $\mathbb{T}$ -álgebra gracias a la naturalidad de la unidad y producto de la mónada. Además, por construcción se tiene que $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ es un morfismo de álgebras y $U(f: (A, a) \rightarrow (B, b)) = f: A \rightarrow B$, con lo cual se tiene lo que queríamos. $\square$

LEMA B.5. Sea $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ una isofibración discreta y un isomorfismo natural $\alpha: F \Rightarrow G$ con $F, G: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$. Entonces los mapas “tomar dominio” ($d(\alpha) = F$) y “tomar codominio” ($c(\alpha) = G$) son isomorfismos entre levantados de F, G y α a través de U .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un levantado de G a través de $U: \hat{G}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $U\hat{G} = G$. Tenemos que para todo objeto X de $\mathcal{X}$ el isomorfismo $\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X) = U\hat{G}(X)$ se levanta a un isomorfismo $\hat{\alpha}_X: \hat{F}(X) \rightarrow \hat{G}(X)$ para cierto $\hat{F}(X) \in \mathcal{D}$. Luego hay una única manera de extender $X \mapsto \hat{F}(X)$ a un functor $\hat{F}$ de manera que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo natural, que se obtiene definiendo el functor en morfismos como

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \mapsto \quad \hat{F}(X) \xrightarrow{\hat{\alpha}_X} \hat{G}(X) \xrightarrow{\hat{G}(g)} \hat{G}(Y) \xrightarrow{\hat{\alpha}_Y^{-1}} \hat{F}(Y)$$

Luego estamos frente a una $\hat{\alpha}$ tal que $U(\hat{\alpha}) = \alpha$ y $c(\hat{\alpha}) = \hat{G}$, con lo que tomar codominio para los levantados de α es un isomorfismo.

Los mismos razonamientos cambiando α por α^{-1} funcionan para tomar dominio. $\square$

Bibliografía

- [AM10] Marcelo Aguiar and Swapneel Mahajan. *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, volume 29 of *CRM Monogr. Ser.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010.
- [BG19] John Bourke and Richard Garner. Monads and theories. *Advances in Mathematics*, 351:1024–1071, 2019.
- [BLV11] Alain Bruguières, Steve Lack, and Alexis Virelizier. Hopf monads on monoidal categories. *Advances in Mathematics*, 227(2):745–800, 2011.
- [Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures*, volume 2. Cambridge University Press, 1994.
- [EK66] S. Eilenberg and G. M. Kelly. Closed categories. *Proc. Conf. Categor. Algebra*, La Jolla 1965, 421-562 (1966)., 1966.
- [HLFV17] Martin Hyland, Ignacio López Franco, and Christina Vasilakopoulou. Hopf measuring comonoids and enrichment. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 115(5):1118–1148, 2017.
- [JS93] André Joyal and Ross Street. Braided tensor categories. *Advances in Mathematics*, 102(1):20–78, 1993.
- [Kel05] G. M. Kelly. Basic concepts of enriched category theory. *Repr. Theory Appl. Categ.*, 2005(10):1–136, 2005.
- [KS74] G. M. Kelly and Ross Street. Review of the elements of 2-categories. *Category Sem., Proc.*, Sydney 1972/1973, *Lect. Notes Math.* 420, 75-103 (1974)., 1974.
- [Mac63] Saunders MacLane. Natural associativity and commutativity. *Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies*, 49(4), 1963.
- [ML72] Saunders Mac Lane, editor. *Coherence in categories*, volume 281 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1972.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.*, volume 5 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer, 2nd ed edition, 1998.
- [MM12] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Moe02] Ieke Moerdijk. Monads on tensor categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 168(2-3):189–208, 2002.
- [Str72] Ross Street. The formal theory of monads. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2(2):149–168, 1972.
- [Str12] Ross Street. Monoidal categories in, and linking, geometry and algebra. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 19(5):769–820, 2012.
- [TV17] Vladimir Turaev and Alexis Virelizier. *Monoidal categories and topological field theory*, volume 322 of *Prog. Math.* Basel: Birkhäuser/Springer, 2017.