Trabajo Monográfico

El problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado

Luciana Sastre

Octubre 2023

Orientador:

Nicolás Frevenza
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La idea de este trabajo monográfico es probar que el problema de Dirichlet para el p-Laplaciano tiene solución en sentido viscoso vía su representación probabilística con el juego Tug-of-war con ruido para $p \in (2, \infty)$ y el Tug-of-war sin ruido para $p = \infty$.

El Laplaciano se puede definir como la divergencia del gradiente de una función. El p-Laplaciano es una generalización del Laplaciano, en el que se introduce un factor no lineal que depende de p y tal que cuando $p = 2$ se recupera el Laplaciano. El problema de Dirichlet asociado a este operador y a una región acotada, busca encontrar una función tal que su p-Laplaciano se anule en el interior y cumpla cierta condición en el borde.

El Problema de Dirichlet para el Laplaciano estándar fue resuelto inicialmente, de forma no rigurosa pero original, por Green en 1828 en su tratado sobre electromagnetismo: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Green argumentó la existencia de la solución para cualquier dominio Ω e introdujo lo que actualmente se conoce como funciones de Green. Años más tarde, en 1850, Dirichlet resolvió el problema en la bola unitaria de $\mathbb{R}^2$ y sugirió un método variacional para atacar el problema general, minimizando cierta energía (la "energía de Dirichlet" que se conoce actualmente, es decir, la integral en Ω del cuadrado de la norma del gradiente de una función). Posteriormente, Riemann fue el primero en brindar una solución para el problema variacional de forma general, pero Weierstrass encontró un error en el argumento. En 1890, Poincaré da una solución al problema de Dirichlet para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con borde de clase C^2. Finalmente es Hilbert en 1900, quien encuentra una solución variacional al problema introduciendo el método directo de cálculo de variaciones.

Las primeras soluciones vía representaciones probabilísticas fueron introducidas por Phillips y Wiener y Courant, Friedrichs y Lewy en la década del 20, pero aún en un contexto discreto. En 1944, Kakutani en su artículo [7] es quien propone la solución al problema de Dirichlet apelando al movimiento browniano.

La ecuación diferencial ordinaria de p-Laplace en dimensión 1

$$\Delta_p u = (|u'|^{p-2}u')'$$

fue introducida por Euler en 1728 con el objetivo de mostrar un ejemplo de ecuación diferencial no lineal de segundo orden, que no podía ser integrada con las técnicas conocidas. Al mismo tiempo, durante buena parte del siglo XVIII y posteriores, la tarea de construir suministros de agua para las áreas urbanas en rápido desarrollo se convirtió en un problema relevante para los ingenieros hidráulicos. De allí que el planteamiento de varios modelos de filtración de fluidos por medios porosos o trabajos sobre al saturación de flujos, recibieran mucha atención. En particular, había situaciones en las que la ecuación de Laplace no capturaba adecuadamente el comportamiento del campo de velocidades de un fluido. Se asumió entonces la necesidad de introducir no linealidades que respetaran algunos fenómenos físicos como una regla de potencia para la relación entre la fuerza y la velocidad del fluido. Así surgió naturalmente el operador p-Laplaciano. Para más información sobre la historia del $p-$Laplaciano se puede consultar [1, 5].

El juego Tug-of-war es un juego de dos jugadores de suma cero, es decir, lo que un jugador gana es lo mismo que lo que el otro jugador pierde. En su variante con ruido, el Tug-of-war tiene como parámetros a la posición inicial en un dominio y un tamaño máximo de salto que está fijo. En cada turno se tira una moneda (no necesariamente equiprobable) que determina si la nueva posición se elige de manera aleatoria (a distancia menor o igual que el salto fijado) o si alguno de los jugadores moverá la posición. En este último caso, para decidir qué jugador mueve la posición, se vuelve a tirar una moneda. El ganador de este sorteo elige hacia donde mover la posición con la condición de que la posición nueva debe estar a una distancia menor o igual que el tamaño máximo de salto estipulado al principio. Se continua hasta que la posición del juego se salga del dominio y, una vez que esto sucede, uno de los jugadores le debe pagar al otro lo que establece una función de pago definida fuera del dominio.

El enfoque del Tug-of-war vinculado al p-Laplaciano fue introducido en los artículos [13, 14] Además de brinda nuevas pruebas de resultados clásicos, este enfoque brinda una forma de discretizar al operador que es adaptable a otros contextos, como grafos y algunos espacios métricos. El desarrollo de la teoría de juegos para probar resultados de Ecuaciones en Derivadas Parciales se ha extendido a otro tipo de ecuaciones y en la actualidad es un área de investigación vigente. Sobre el Tug-of-war en particular podemos referir a [8, 12], y sobre la representación probabilística de ecuaciones en derivadas parciales a [2]. Como referencia general y clásica sobre el $p-$Laplaciano se puede consultar [9, 10].

En el capítulo 2 se definirá formalmente al operador p-Laplaciano para $p \in [2, \infty]$ y el problema de Dirichlet asociado. Se detallará cómo se juega al Tug-of-war con ruido y se definirá varios aspectos relacionados. En particular se probará que existe el valor del juego, es único, y cumple una ecuación del tipo Dynamic Programming Principle (DPP).

El capítulo 3 se centra en probar que, si el salto del juego es cada vez es mas pequeño, el valor del juego converge uniformemente a una función continua que es solución viscosa del problema de Dirichlet para el p-Laplaciano para $p \in (2, \infty)$. Además este capítulo incluye las definiciones que utilizamos sobre soluciones viscosas.

En el capítulo 4 se estudia el caso $p = \infty$. Para ello se introduce el juego Tug-of-war (sin ruido), se da una prueba de que este juego tiene un valor y que el mismo es solución de otra DPP. En este caso también se tiene que el valor del juego converge uniformemente a una función continua que es solución viscosa para el problema de Dirichlet para el ∞-Laplaciano.

En el capítulo 5 se enuncian como apéndice, algunos resultados de martingalas que se usan en las pruebas.

Capítulo 2

El juego Tug-of-war con ruido

El objetivo de este capítulo es introducir el problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado y brindar una descripción del juego Tug-of-war con ruido asociado. Se introducirá la definición del p-Laplaciano para $p \in [2, \infty)$ y luego se extenderá para $p = \infty$.

En una segunda etapa se construye el juego explicando cómo funcionan sus estrategias, el tiempo de salida o finalización y el valor del juego. Se probará que el valor del juego siempre existe y satisface una ecuación del tipo Dynamic Programming Principle (DPP).

2.1. El $p-$Laplaciano normalizado

En esta primera sección se introducen varias definiciones básicas y se fija la notación que se utilizará a lo largo de la monografía.

En este trabajo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ va a denotar siempre un dominio abierto y acotado que cumpla con la condición de esfera exterior (ver definición en 3.1). En particular, si el borde es Lipschitz, se satisface la condición.

Dada $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$ y ∇u su gradiente, se escribirá $|\nabla u|$ para la norma euclidiana del gradiente, es decir, $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^d u_{x_i}^2$. Además, se escribirá $D^2u(x)$ para referir a la matriz Hessiana en el punto x. Recordar que para $u \in C^2(\Omega)$, el Laplaciano de u, Δu, se define como $\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}$.

La siguiente definición introduce el operador que se estudiará en esta parte de la monografía.

Definición 2.1.1. Sea $p \in [2, \infty)$ y $u \in C^2(\Omega)$. Se define el $p-$*Laplaciano* de u y se lo denota por $\Delta_p u$, como

$$\Delta_p u \coloneqq \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Para $p = 2$, la definición anterior coincide con el Laplaciano estándar Δ. Nos vamos a concentrar en el caso $p \in (2, \infty)$.

Conviene recordar la fórmula de la divergencia para el producto. Dados $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ un campo vectorial y $\phi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función real ambos regulares, se tiene que

$$\operatorname{div}(\phi F) = \phi \operatorname{div}(F) + \langle \nabla \phi, F \rangle, \tag{2.1}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ refiere al producto interno usual.

Observación 2.1.1. Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ y $\nabla u(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces se puede desarrollar la divergencia que aparece en la definición del $p-$Laplaciano utilizando (2.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= |\nabla u|^{p-2}\operatorname{div}(\nabla u) + \langle \nabla(|\nabla u|^{p-2}), \nabla u\rangle \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-3}\langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u\rangle \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-3}\frac{1}{|\nabla u|}\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} u_{x_j}u_{x_i}u_{x_ix_j}\right) \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j} \\
&= (p-2)|\nabla u|^{p-4}\left(\frac{1}{p-2}|\nabla u|^2\Delta u + \sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j}\right).
\end{aligned}$$

Entonces, si se considera la ecuación $\Delta_p u = 0$, como $\nabla u \neq 0$, el término $(p-2)|\nabla u|^{p-4}$ debe ser no nulo, y la ecuación $\Delta_p u = 0$ es equivalente (restricta las condiciones que se impusieron sobre u) a:

$$\frac{1}{p-2}|\nabla u|^2\Delta u + \sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j} = 0.$$

Ahora bien, en la expresión de la ecuación anterior, se puede tomar límite (puntual) con $p \to +\infty$. En ese caso se obtiene que para $x \in \Omega$ fijo:

$$\frac{1}{p-2}|\nabla u(x)|^2\Delta u(x) \to 0 \qquad \text{cuando } p \to +\infty.$$

Entonces, si se toma límite en p en la ecuación $\Delta_p u = 0$, asumiendo cierta regularidad en u, se obtiene puntualmente que

$$0 = \lim_{p\to+\infty} \Delta_p u = \sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j},$$

donde el operador límite es también un operador de segundo orden.

La observación anterior da lugar a la siguientes definiciones.

Definición 2.1.2. El ∞-*Laplaciano* para $u \in C^2(\Omega)$ se define como

$$\Delta_\infty u := \sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j} = \langle D^2u\nabla u, \nabla u\rangle.$$

Con esta definición, bajo la hipótesis $u \in C^2$ y $\nabla u \neq 0$, la ecuación $\Delta_p u = 0$ es equivalente a:

$$\frac{1}{p-2}|\nabla u|^2\Delta u + \Delta_\infty u = 0.$$

Si se divide la ecuación anterior entre $|\nabla u|^2$ se obtiene

$$\frac{1}{p-2}\Delta u + |\nabla u|^{-2}\Delta_\infty u = 0.$$

Notar que esto es equivalente a:

$$\frac{1}{p-2}\Delta u + |\nabla u|^{-2}\langle D^2u\nabla u, \nabla u\rangle = 0.$$

Lo anterior motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.1.3. Se define el ∞-*Laplaciano normalizado* para $u \in C^2(\Omega)$ y tal que $\nabla u \neq 0$, como:

$$\Delta_\infty^N u = \langle D^2u\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\rangle = |\nabla u|^{-2}\langle D^2u\nabla u, \nabla u\rangle.$$

Dado lo anterior, se define el *p-Laplaciano normalizado* como:

$$\Delta_p^N u = \Delta u + (p-2)\Delta_\infty^N u. \tag{2.2}$$

Esto permite pensar al ∞-Laplaciano normalizado como la derivada segunda en la dirección del gradiente. En este sentido, las soluciones viscosas de las ecuaciones $\Delta_p u = 0$ y $\Delta_p^N u = 0$ coinciden para $p \in (2, +\infty)$. Asimismo, lo hacen las ecuaciones del $\Delta_\infty = 0$ y $\Delta_\infty^N = 0$. Estos resultados se pueden consultar en [6]. En el enfoque que usa la representación probabilística y usa teoría de juegos, es natural pensar en las versiones normalizadas de los operadores. En ellos nos vamos a concentrar aunque a veces utilicemos la terminología de p-Laplaciano para hablar de su versión normalizada.

El *Problema de Dirichlet* para el operador Δ_p^N con $p \in [2, +\infty]$ en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, consiste en que dada una $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua, encontrar una función $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta_p^N u = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.3}$$

Explícitamente no se está mencionando el tipo de solución buscada, si es una solución en sentido fuerte, en sentido débil o en sentido viscoso. Durante la monografía nos vamos a concentrar en soluciones en sentido viscoso, que ya definiremos, pero el problema puede tener sentido para las otras nociones de solución (en particular soluciones débiles).

Dada una función real continua definida en $\partial\Omega$, se puede extender de manera continua a $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Si la misma es Lipschitz, la extensión también puede ser una función Lipschitz. Más aún, si $\partial\Omega$ es compacto, donde la función estaría acotada en $\partial\Omega$, la extensión se puede tomar acotada. En este trabajo se va a considerar el caso donde g va a estar definida en $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$, de forma Lipschitz y acotada.

2.2. Tug-of-war para el p-Laplaciano normalizado

Sean $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup \{x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}$ y $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Consideremos $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz que será la función de pago. Por comodidad se le continuará denominando g a una extensión Lipschitz a $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ de g como se mencionó al final de la sección anterior.

Llamamos M_1 a una moneda donde la probabilidad de obtener cara es α y la de obtener cruz es β, y M_2 a una moneda balanceada, es decir, donde la probabilidad de cualquiera de los resultados es $1/2$. En estas condiciones se define el siguiente juego en Ω_ε de dos jugadores, J_{I} y J_{II}:

1. La posición inicial del juego será un punto $x_0 \in \Omega$.
2. Para comenzar se lanza la moneda M_1.
   a) Si sale cara, lo que sucede con probabilidad α, se lanza M_2 de forma independiente para determinar un ganador entre los jugadores J_{I} y J_{II}. A ambos jugadores M_2 les asigna una probabilidad $1/2$ de ganar el sorteo.
   El ganador, elige la nueva posición del juego x_1, con la condición que $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$.
   b) Si sale cruz, la posición del juego se mueve desde x_0 hacia $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ elegido al azar con probabilidad uniforme e independiente del resto.
   Notar que en cualquier caso $x_1 \in \Omega_\varepsilon$.
3. En la situación que $x_1 \in \Omega$, se vuelve a jugar, lanzando la moneda M_1 como se indica en 2. En el caso que $x_1 \notin \Omega$, el jugador J_{II} le paga $g(x_1)$ al J_{I}.

Observar que en el caso en el que la moneda M_1 sale cruz, la moneda M_2, no se lanza.

El juego finaliza la primera vez que la posición sale de Ω. Cuando esto sucede, J_{II} le paga a J_{I} una cantidad determinada por la función de pago $g\colon \mathbb{R}^d \backslash \Omega \to \mathbb{R}$. Es decir, si el juego finaliza en x_k, entonces J_{I} gana $g(x_k)$ y J_{II} paga $g(x_k)$. Las ganancias pueden ser negativas. Un pago negativo de J_{II} a J_{I} es una ganancia de J_{II}. El juego planteado es un juego de suma 0, es decir, todo lo que gana J_I es lo que pierde J_2 y viceversa.

Notar que el juego depende de ε, que fue fijado al comienzo. Para distintos ε se obtienen distintos juegos.

Se estudiará el juego para α y β cualesquiera (no negativos y que sumen 1) pero si se quiere que el juego esté vinculado con el problema Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado, se deben considerar algunos valores específicos de α y β:

$$\alpha = \frac{p-2}{p+d}, \qquad \beta = \frac{2+d}{p+d}$$

para $p \in [2, \infty)$ y $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ cuando $p = \infty$.

En lo que sigue hablaremos indistintamente de p, α y β pero notar que están unívocamente determinados uno a partir del otro y al revés. Particularmente en esta sección, $\beta > 0$, es decir, consideraremos $p \neq \infty$.

Se va a denotar por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^d$.

Definición 2.2.1. Una *estrategia* del J_{I} es una colección de mapas Borel medibles $S_{\mathrm{I}} = \{S_{\mathrm{I}}^k\}_{k=0}^{\infty}$, tales que $S_{\mathrm{I}}^k \colon \Omega^{k+1} \to \Omega_\varepsilon$, y

$$S_{\mathrm{I}}^k(x_0, \ldots, x_k) = x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k).$$

En el caso que J_{I} esté siguiendo la estrategia S_{I} y las tiradas de ambas moneadas indique que J_{I} jugará en el turno $k+1$, entonces elegirá la nueva posición del juego de acuerdo a S_{I}^k y el historial $(x_0, \ldots, x_k)$.

Para J_{II} se define de forma análoga.

Dadas $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ y el historial $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, el siguiente punto del juego, $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$, se elige con probabilidad dada por:

$$\pi_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}^k(x_0, x_1, \ldots, x_k, A) = \frac{\beta |A \cap B_\varepsilon(x_k)|}{|B_\varepsilon(x_k)|} + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_{\mathrm{I}}^k(x_0, \ldots, x_k)}(A) + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_{\mathrm{II}}^k(x_0, \ldots, x_k)}(A), \tag{2.4}$$

donde $A \in \mathcal{B}$; es decir, la probabilidad que la siguiente posición del juego pertenezca a $A \in \mathcal{B}$ dado el historial $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ y que los jugadores siguen las estrategias $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$, viene dada por (2.4).

A modo de ejemplo, si se toma $A = B_\varepsilon(x_k)$ entonces

$$\begin{aligned} \pi_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}^k(x_0, x_1, \ldots, x_k, B_\varepsilon(x_k)) &= \frac{\beta |B_\varepsilon(x_k) \cap B_\varepsilon(x_k)|}{|B_\varepsilon(x_k)|} + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_{\mathrm{I}}^k(x_0, \ldots, x_k)}(B_\varepsilon(x_k)) + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_{\mathrm{II}}^k(x_0, \ldots, x_k)}(B_\varepsilon(x_k)) \\ &= \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

lo que nos dice que la probabilidad que la siguiente posición del juego x_{k+1}, este en $B_\varepsilon(x_k)$ es 1, lo que resultaba evidente de la descripción informal del juego y de la definición de las estrategias, puesto que la siguiente posición (sin importar si juega el azar o los jugadores) se elige dando un paso de a lo sumo ε desde la posición anterior.

Observar que la probabilidad $\pi_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}^k(x_0, x_1, \ldots, x_k, \cdot)$ le asigna medida nula a cualquier boreliano que no intersecte $B_\varepsilon(x_k)$.

Ahora consideremos $\mathbb{R}^d$ con la topología natural y $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel. Sea

$$H^\infty = \{x_0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times ...$$

el espacio producto de todas las posibles secuencias de puntos del juego iniciando en x_0, dotado con la topología producto. A los elementos de H^∞ se los llama trayectoria.

Sea $\{\mathcal{F}_k\}_k^\infty$ la filtración de σ-álgebras, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ definidas de la siguiente manera: $\mathcal{F}_k$ es la σ-álgebra generada por cilindros de la forma $\{x_0\} \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \times \cdots$ con $A_i \in \mathcal{B}$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Para una trayectoria $\omega = (x_0, \omega_1, \ldots) \in H^\infty$ definimos la función coordenada $X_k : H^\infty \to \mathbb{R}^d$ como

$$X_k(\omega) = \omega_k,$$

que es una función $\mathcal{F}_k$-medible.

Sea $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup \mathcal{F}_k\right)$, la σ-álgebra más pequeña tal que la función coordenada X_k es $\mathcal{F}_\infty$-medible para todo k, que coincide con la σ-álgebra producto de H^∞.

Dados x_0 un punto de partida y las estrategias S_{I} y S_{II}, el Teorema de extensión de Kolmogorov (ver [3, 15]) aplicado a la familia de medidas de probabilidad compatibles

$$\pi^k_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}(x_0, X_1(\omega), \dots, X_k(\omega), A) = \frac{\beta|A \cap B_\varepsilon(\omega_k)|}{|B_\varepsilon(\omega_k)|} + \frac{\alpha}{2}\delta_{S^k_{\mathrm{I}}(x_0,\omega_1,\dots,\omega_k)}(A) + \frac{\alpha}{2}\delta_{S^k_{\mathrm{II}}(x_0,\omega_1,\dots,\omega_k)}(A)$$

nos define una única medida de probabilidad $\mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}$ en H^∞ relativa a $\mathcal{F}_\infty$.

Para analizar cuando finaliza el juego, definimos la variable aleatoria:

$$\tau(\omega) = \inf\{k \geq 0 : X_k(\omega) \notin \Omega\},$$

que es el primer tiempo en el que el juego sale de Ω. La variable aleatoria τ es un tiempo de parada relativo a la filtración $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^\infty$.

Entonces el pago esperado esta dado por:

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] = \int_{H^\infty} g(X_\tau(\omega))\mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}(d\omega).$$

El jugador J_{I} intentará maximizar el pago esperado y el jugador J_{II} minimizarlo.

Observación 2.2.1. Se puede ver que si $\beta > 0$, el juego termina casi seguramente. Veamos que $\mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}(\tau < \infty) = 1$ sin importar que estrategias elijan los jugadores. Para no sobrecargar la notación, omitiremos S_{I} y S_{II}, es decir, vamos a considerar que $\mathbb{P}^{x_0} = \mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}$.

Sea $D = \{x \in B_1(0) : \langle x, e_1 \rangle \geq \frac{1}{2}\}$. Se elige n suficientemente grande tal que $\forall\ x \in \Omega$, existen $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ tales que:

$$x + \varepsilon \sum_{i=1}^n z_i \notin \Omega.$$

Notar que n existe pues el conjunto Ω es acotado.

Sea $D^{x_0}_\varepsilon = \{x \in B_\varepsilon(x_0) : \frac{x - x_0}{\varepsilon} \in D\}$. Llamemos A al evento de jugar al azar (que salga cruz en la moneda M_1) y donde la siguiente posición del juego se elige en el sector $D^{x_i}_\varepsilon$ siendo x_i la posición actual. Notar que vale:

$$\mathbb{P}^{x_0}(A) = \beta\frac{|D^{x_i}_\varepsilon|}{|B_\varepsilon(x_i)|} = \beta\frac{|D|}{|B_1(0)|}.$$

Observar que no depende de x_0.

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{x_0}(\tau \leq n) &\geq \mathbb{P}^{x_0}(\text{el evento } A \text{ suceda en los primeros } n \text{ turnos de forma consecutiva})\\ &= \beta^n\left(\frac{|D|}{|B_1(0)|}\right)^n = \delta > 0.\end{aligned}$$

Notar que δ no depende de x_0. Obtuvimos entonces que:

$$\mathbb{P}^{x_0}(\tau > n) \leq 1 - \delta. \tag{2.5}$$

Ahora vamos a probar por inducción que $\mathbb{P}^{x_0}(\tau > kn) \leq (1-\delta)^k$. En efecto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{x_0}(\tau > (k+1)n) &= \mathbb{P}^{x_0}(\tau > (k+1)n \,|\, \tau > kn)\mathbb{P}^{x_0}(\tau > kn)\\ &\leq \mathbb{P}^{x_0}(\tau > (k+1)n \,|\, \tau > kn)(1-\delta)^k,\end{aligned}$$

donde en la desigualdad aplicamos la hipótesis inductiva. Ahora usando la markovianidad, por (2.5), se tiene:

$$\mathbb{P}^{x_0}(\tau > (k+1)n|\tau > kn) = \mathbb{P}^{x_{kn}}(\tau > n) \leq (1-\delta).$$

Entonces se probó que:

$$\mathbb{P}^{x_0}(\tau > kn) \leq (1-\delta)^k.$$

Finalmente, usando que $\{\tau > (k+1)n\} \subset \{\tau > kn\}$ para todo k,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{x_0}(\tau = \infty) &= \mathbb{P}^{x_0}(\cap_{k=1}^{\infty}\{\tau > kn\}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}^{x_0}(\tau > kn) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} (1-\delta)^k = 0,
\end{aligned}$$

lo que muestra que el juego termina casi seguramente.

Definición 2.2.2. Se define *valor del juego para* J_{I} como

$$u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}(x_0) = \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)),$$

donde τ es el tiempo en el que finaliza el juego y x_τ es la posición donde lo hace ($x_\tau \in \Omega_\varepsilon \backslash \Omega$). *El valor del juego para* J_{II} es

$$u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}(x_0) = \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)).$$

Observación 2.2.2. En cierto sentido $u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}$ devuelve la mayor ganancia que puede esperar obtener J_{I} si la posición inicial del juego es x_0. Esto es, dada la mejor estrategia de S_{II} (que busca minimizar la pérdida), el J_{I} considera la mejor de las suyas para maximizar la ganancia. Análogamente, $u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}$ devuelve la menor pérdida que puede esperar tener J_{II} si la posición inicial es x_0.

Proposición 2.2.3. *Vale que* $u_I^{\varepsilon} \leq u_{II}^{\varepsilon}$.

Demostración. Fijo S_{I} y S_{II} dos estrategias cualesquiera. Entonces, tengo que:

$$\mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \geq \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)),$$

$$\mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)).$$

Si juntamos nos queda:

$$\inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \leq \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)).$$

Si tomamos ínfimo en las estrategias S_{II} en la desigualdad anterior obtenemos:

$$\inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \leq \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) = u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}(x_0).$$

Si ahora tomamos supremo en las estrategias S_{I}, tenemos que

$$u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}(x_0) = \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{x_0}(g(x_\tau)) \leq u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}(x_0),$$

concluyendo con la prueba. □

Definición 2.2.3. Cuando $u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon} = u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}$ se dice que el *juego tiene un valor* y se lo denomina u^{ε}.

2.3. El valor de juego y la ecuación DPP

Ahora que tenemos definido el valor del juego para cada jugador, se verá que son iguales (y entonces existe el valor del juego) y que verifican cierta ecuación. Esto se resume en el siguiente Teorema.

Dada f integrable en $A \subset \mathbb{R}^d$, definimos:

$$\fint_A f(x)\,dx = \frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dx.$$

Teorema 2.3.1. *El juego tiene un valor $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ y verifica la ecuación*

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup\limits_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon + \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon(y)dy & x \in \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & x \notin \Omega \end{cases}. \tag{2.6}$$

A esta ecuación se la denomina DPP (Dynamic Programming Principle).

Definición 2.3.1. A las soluciones de la ecuación (2.6) se las denomina funciones *p-armoniosas* con dato de borde g cuando $\alpha = \frac{p-2}{p+d}$, $\beta = \frac{d+2}{p+d}$.

Observación 2.3.2. Notar que la DPP toma en cuenta las tres opciones de juego:

1. Con probabilidad $\frac{\alpha}{2}$, J_{I} tiene que maximizar su ganancia.
2. Con probabilidad $\frac{\alpha}{2}$, J_{II} tiene que minimizar su pérdida.
3. Con probabilidad β el punto se mueva al azar.

Para probar el Teorema 2.3.1 primero vamos a mostrar que la DPP tiene solución y luego que esa solución coincide con el valor del juego.

En lo que sigue usaremos $||\cdot||_\infty$ para hacer referencia a la norma infinito en Ω, es decir

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Proposición 2.3.3. *La ecuación* (2.6) *de la DPP tiene solución.*

Demostración. Definimos una sucesión de funciones $u_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donde

$$\begin{cases} u_0(x) = \inf\limits_{y\in\mathbb{R}^d\setminus\Omega} g(y) & x \in \Omega \\ u_0(x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d\setminus\Omega \end{cases},$$

y para $n \geq 1$

$$\begin{cases} u_n(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup\limits_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}(y) + \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}(y)\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}(y)\,dy & x \in \Omega \\ u_n(x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d\setminus\Omega \end{cases}.$$

Afirmación 1. La sucesión (u_n) es no decreciente puntualmente.

Demostración. Vamos a probarlo por inducción. Notar que si $x \notin \Omega$ entonces $u_1 = u_0$.

Si $x \in \Omega$ y $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, entonces u_0 es constante en $B_\varepsilon(x)$ e igual a $\inf_{y\in\Omega^c} g(y)$. Por tanto

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u_0 = u_0(x), \qquad \inf_{B_\varepsilon(x)} u_0 = u_0(x).$$

A su vez $\fint_{B_\varepsilon(x)} u_0 = u_0$ por el hecho de ser constante en $B_\varepsilon(x)$. Entonces si $x \in \Omega$ es tal que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ vale que:

$$u_1(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_0 + \inf_{B_\varepsilon(x)} u_0\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0 = u_0(x).$$

Si $x \in \Omega$ pero $B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset$, entonces $\sup_{B_\varepsilon(x)} u_0 \geq \operatorname{ínf}_{\Omega^c} g = u_0(x)$.

También vale que:

$$\operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega^c} u_0 = \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega^c} g \geq \operatorname*{ínf}_{\Omega^c} g = u_0(x).$$

De nuevo, como u_0 es constante en $B_\varepsilon(x) \cap \Omega$ y $x \in \Omega$, se tiene que $\operatorname{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_0 = u_0(x)$. Notar que además se tiene que:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} u_0 \geq \fint_{B_\varepsilon(x)} \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_0 = \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0(x) = u_0(x).$$

Dada la observación anterior es fácil ver $u_1(x) \geq u_0(x)$ cuando $x \in \Omega$ y $B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset$ puesto que,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_0 + \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_0\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_0 \\
&\geq \frac{\alpha}{2}(u_0(x) + u_0(x)) + \beta u_0(x) \\
&= (\alpha + \beta) u_0(x) \\
&= u_0(x).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $u_n \geq u_{n-1}$ y queremos ver que $u_{n+1} \geq u_n$. Si $x \notin \Omega$ entonces $u_{n+1}(x) = u_n(x)$. Veamos el caso $x \in \Omega$. Se tiene que:

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_n - \sup_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1} + \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_n - \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_n - u_{n-1})(y),$$

pero por la hipótesis inductiva vale que

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} u_n \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}, \qquad \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_n \geq \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_{n-1}, \qquad \fint_{B_\varepsilon(x)} (u_n - u_{n-1}) \geq 0,$$

por tanto $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$. □

Afirmación 2. La sucesión (u_n) está acotada por $\sup_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} g < \infty$.

Demostración. Por definición, sabemos que $u_0 \leq \sup_{\Omega^c} g < \infty$. Si suponemos que $u_n \leq \sup_{\Omega^c} g$ entonces:

$$u_{n+1}(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} u_n + \operatorname*{ínf}_{B_\varepsilon(x)} u_n\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u_n \leq \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{\Omega^c} g + \sup_{\Omega^c} g\right) + \beta \fint \sup_{\Omega^c} g = \sup_{\Omega^c} g.$$

□

De las afirmaciones anteriores concluimos que $(u_n)_{n\geq 0}$ es no decreciente puntualmente y está uniformemente acotada. Por tanto converge puntualmente y de forma creciente a una función u. Nos gustaría ver que la convergencia es uniforme.

Afirmación 3. La sucesión (u_n) converge uniformemente a u.

Demostración. Supongamos que no hay convergencia uniforme, entonces se tiene que:

$$M := \operatorname*{lím}_{n\to\infty} \|u - u_n\|_\infty = \operatorname*{lím}_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} (u(x) - u_n(x)) > 0,$$

donde $M < \infty$ por la afirmación 2.

Sea $\delta > 0$, que luego elegiremos. Se considera k suficientemente grande tal que vale:

$$u(x) - u_k(x) \leq M + \delta \qquad \forall x \in \Omega.$$

Puedo tomar $z \in \Omega$ tal que:

$$u(x) - u_{k+1}(z) \geq M - \delta.$$

Notar que alcanza con tomar $k+1$ de forma tal que $\|u-u_{k+1}\|_\infty > M-\delta$.

Ahora, sea $j>k$ cumpliendo que:

$$0 < u(z) - u_{j+1}(z) < \delta,$$

tal j existe pues $(u_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a u. Entonces,

$$u_{j+1}(z) - u_{k+1}(z) = u_{j+1}(z) - u(z) + u(z) - u_{k+1}(z) \geq M - 2\delta. \tag{2.7}$$

Observar que:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} u - u_k \leq \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_\Omega u - u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

donde usamos que $u-u_k\geq 0$ y como además $u-u_k$ está acotada y la integral del lado derecho no depende de x, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada. De esto se deduce que, si k es suficientemente grande entonces:

$$\sup_{x\in\Omega} \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} u - u_k \leq \delta.$$

También se tiene que para cualquier conjunto A (en particular $A = B_\varepsilon(z)$) vale que:

$$\sup_A u_j - \sup_A u_k \leq \sup_A (u_j - u_k) \leq \sup_A (u - u_k) \leq M,$$

$$\inf_A u_j - \inf_A u_k \leq \sup_A (u_j - u_k) \leq M.$$

Finalmente, partiendo de la ecuación (2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} M - 2\delta \leq u_{j+1}(z) - u_{k+1}(z) &= \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(z)} u_j - \sup_{B_\varepsilon(z)} u_k\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(z)} u_j - \inf_{B_\varepsilon(z)} u_k\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(z)} (u_j - u_k) \\ &\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(z)} (u_j - u_k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(z)} u - u_k \\ &\leq \alpha \sup_{B_\varepsilon(z)} (u - u_k) + \beta \fint_{B_\varepsilon(z)} u - u_k \\ &\leq \alpha M + \delta. \end{aligned}$$

Pero entonces $M - 2\delta \leq \alpha M + \delta$, lo cual es absurdo si δ es suficientemente chico pues $0<\alpha<1$ y $M>0$. Por tanto hay convergencia uniforme. □

Ahora si pasamos al límite en la definición de u_n, por convergencia dominada obtenemos que u satisface la DPP (2.6) y con esto se concluye la proposición.

□

Observación 2.3.4. De manera análoga, podemos construir una sucesión $(v_n)_{n\geq 0}$ decreciente tomando:

$$\begin{cases} v_0(x) = \sup\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} g & x\in\Omega \\ v_0(x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d\setminus\Omega \end{cases},$$

y para $n\geq 1$

$$\begin{cases} v_n(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup\limits_{B_\varepsilon(x)} v_{n-1}(y) + \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} v_{n-1}(y)\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} v_{n-1}(y)\,dy & x\in\Omega \\ v_n(x) = g(x) & x\in\mathbb{R}^d\setminus\Omega \end{cases}.$$

En este caso se prueba que la sucesión está acotada y converge uniformemente a una función v, que además es solución de la DPP.

Veamos que $u = v$. Como $u_0 \leq v_0$, tomando en cuenta la definición de u_n y v_n, por inducción se prueba que $u_k \leq v_k \ \forall\ k$ y por tanto $u \leq v$.

Supongamos por absurdo que $M = ||v - u||_\infty > 0$. Como v y u son soluciones de la DPP tenemos

$$v(x) - u(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} v - \sup_{B_\varepsilon(x)} u + \inf_{B_\varepsilon(x)} v - \inf_{B_\varepsilon(x)} u\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} v - u \leq \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} v - u, \quad (2.8)$$

donde en la desigualdad usamos que,

$$M \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} v - \sup_{B_\varepsilon(x)} u \quad \text{y} \quad M \geq \inf_{B_\varepsilon(x)} v - \inf_{B_\varepsilon(x)} u.$$

En efecto, se tiene que:

$$M \geq |v(x) - u(x)| \geq v(x) - u(x) \geq v(x) - \sup_{B_\varepsilon(x)} u,$$

por lo que si tomamos supremo a ambos lados, obtenemos:

$$M \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} v - \sup_{B_\varepsilon(x)} u.$$

Análogamente se muestra que vale

$$M \geq \inf_{B_\varepsilon(x)} v - \inf_{B_\varepsilon(x)} u.$$

Ahora bien, notar que $u = v = g$ en $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ por tanto el supremo de $|v(x) - u(x)|$ se tiene que alcanzar en el interior de Ω (recordemos que Ω es abierto). Esto implica que el supremo en realidad es un máximo, es decir, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $M = \|v - u\|_\infty = |v(x_0) - u(x_0)| = v(x_0) - u(x_0)$.

Sea E definido como:

$$E = \{x \in \overline{\Omega} : v(x) - u(x) = M\}.$$

Por lo observado anteriormente, se tiene que $E \neq \emptyset$.

Ahora, como $v(x) - u(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$, se tiene que $\fint_{B_\varepsilon(x)} v(y) - u(y)\, dy \leq M$. Entonces, volviendo a (2.8), para todo $x \in \Omega$ vale:

$$v(x) - u(x) \leq \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x)} v - u \leq \alpha M + \beta M = M.$$

Si tomamos supremo en $x \in \Omega$ en la ecuación anterior, se obtiene:

$$M \leq \alpha M + \beta \sup_{x \in \Omega} \fint_{B_\varepsilon(x)} v - u \leq M.$$

Por tanto

$$\sup_{x \in \Omega} \fint_{B_\varepsilon(x)} v - u = M. \quad (2.9)$$

Dado $x_0 \in E$, i.e, $v(x_0) - u(x_0) = M$, aplicando (2.8) vale que:

$$M = v(x_0) - u(x_0) \leq \alpha M + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_0)} v - u \leq M,$$

de lo que se deduce, por (2.9), que

$$\fint_{B_\varepsilon(x_0)} v - u = M.$$

Por tanto el supremo de la integral resulta ser un máximo. Pero notar que $v(y) - u(y) \leq M$, entonces para que la integral efectivamente sea igual a M, tiene que ocurrir que $v(y) - u(y) = M$ para todo $y \in B_\varepsilon(x_0)$. Esto nos dice que $B_\varepsilon(x_0) \subset E$. Por tanto, razonando análogamente que para x_0, tenemos que para todo punto $x \in B_\varepsilon(x_0)$ vale que $v-u$ es constante en $B_\varepsilon(x)$. Inductivamente, se obtiene que $v-u$ es constante e igual a M en todo Ω.

Entonces tenemos que $v-u=M$ y $\fint_{B_\varepsilon(x)} v-u = M$ para todo $x\in\Omega$. En particular, esto vale para los puntos del conjunto $\{y\in\Omega\colon\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\le \frac{\varepsilon}{2}\}$. Luego como $0\le v-u\le M$ para todo $x\in\mathbb{R}^d$ (pues en Ω^c vale $v-u=0$), se llega a un absurdo puesto que si $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)<\frac{\varepsilon}{2}$ se obtiene que

$$M=\fint_{B_\varepsilon(x)} v-u = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} v-u = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} M = M\frac{|B_\varepsilon(x)\cap\Omega|}{|B_\varepsilon(x)|}<M, \tag{2.10}$$

donde usamos que $\frac{|B_\varepsilon(x)\cap\Omega|}{|B_\varepsilon(x)|}<1$. El absurdo viene de suponer que M es positivo.

Con lo anterior probamos que la DPP tiene solución y se dieron dos construcciones que convergen a la misma solución. Veamos que es única.

Lema 2.3.5 (Principio de comparación)**.** *Sean u y v funciones $p-$armoniosas respecto de los datos de borde g y h respectivamente, si $g\le h$ entonces $u\le v$.*

Observación 2.3.6. Es claro que del Principio de comparación se concluye la unicidad, puesto que si u y v son dos soluciones de la DPP (2.6) con g como función de pago (misma condición de borde) entonces $u\le v$ y $v\le u$, por tanto $u=v$.

Demostración. Supongamos por absurdo que existe $y\in\Omega$ tal que $u(y)>v(y)$. Sea

$$M=\sup_{x\in\Omega} u(x)-v(x)\ge u(y)-v(y)>0.$$

Como $u(x)=g(x)\le h(x)=v(x)$ para todo $x\in\Omega^c$, el supremo definido antes es un máximo que se alcanza en Ω. Sea $x_0\in\Omega$ tal que $M=u(x_0)-v(x_0)$. Entonces

$$\begin{aligned} M=u(x_0)-v(x_0) &= \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_0)} u-\sup_{B_\varepsilon(x_0)} v\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\inf_{B_\varepsilon(x_0)} u-\inf_{B_\varepsilon(x_0)} v\right)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x_0)}(u-v) \\ &\le \frac{\alpha}{2}M+\frac{\alpha}{2}M+\beta M \\ &= M, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde en la primera línea usamos que u y v son soluciones de (2.6) y en la segunda línea que

$$\sup_{B_\varepsilon(x_0)} u-\sup_{B_\varepsilon(x_0)} v\le \sup_{B_\varepsilon(x_0)}(u-v)\le M,\qquad \inf_{B_\varepsilon(x_0)} u-\inf_{B_\varepsilon(x_0)} v\le M.$$

Luego, para que se cumpla la igualdad en (2.11), las desigualdades deben ser igualdades. En particular

$$\fint_{B_\varepsilon(x_0)}(u-v)=M, \tag{2.12}$$

de lo que se deduce que $u-v=M$ en $B_\varepsilon(x_0)$ puesto que $u-v\le M$ y si la desigualdad fuera estricta en algún abierto entonces debería integrar menos que M. Esto nos dice que $u-v=M$ en casi todo punto según la medida de Lebesgue en Ω porque podemos extender el razonamiento para todo $x\in B_\varepsilon(x_0)$ y probar que (2.12) vale en $B_\varepsilon(x)$ y seguir extendiendo desde ahí. Utilizando un argumento igual al de (2.10), podemos ver que esto es absurdo. ☐

Ahora vamos a probar que el juego tiene un valor y que este coincide con la solución de la DPP.

Proposición 2.3.7. *La solución a la DPP es el valor del juego.*

Demostración. Ya vimos en el Lema 2.2.3 que $u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon} \leq u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}$. Vamos a probar que $u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon} \leq u$ donde u es la solución del DPP que vimos que existe (análogamente se prueba $u \leq u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}$).

Dado $\eta > 0$, construimos una estrategia S_{II}^{η} de J_{II} guiada por la solución u de la DPP, de forma que casi minimice a u de la siguiente manera: si $x_{k-1} \in \Omega$, se elige x_k tal que

$$u(x_k) \leq \inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u + \eta 2^{-k}.$$

Sea $M_k = u(x_k) + \frac{\eta}{2^k}$.

Afirmación 1. La sucesión $(M_k)_{k\geq 0}$ es una supermartingala respecto de la probabilidad $\mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}$ y la filtración natural.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}[M_k\,|x_0,\dots,x_{k-1}] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}[u(x_k) + \frac{\eta}{2^k}\,|x_0,\dots,x_{k-1}] \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u + \inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u + \frac{\eta}{2^k}\right) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} u + \frac{\eta}{2^k} \\
&= u(x_{k-1}) + \frac{\eta}{2^k} + \frac{\eta}{2^k} \\
&= u(x_{k-1}) + \frac{\eta}{2^{k-1}} \\
&= M_{k-1},
\end{aligned}$$

donde la segunda línea surge de considerar las tres opciones del juego: moverse al azar, que juegue J_{II} con la estrategia S_{II}^{η} y que juegue J_{I}, siguiendo S_{I}, donde acotamos esta última por el supremo en $B_\varepsilon(x_{k-1})$; y en el tercer renglón usamos que u es solución de la DPP. Entonces vimos que:

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}[M_k|x_0,\dots,x_{k-1}] \leq M_{k-1},$$

por tanto es supermartingala.

□

Observar que si $\tau < k$, siendo τ el tiempo de finalización del juego, como en la definición de S_{II}^{η} asumo $x_k \in \Omega$, puedo mirar $(M_{\tau\wedge k})_{k\geq 1}$ que es también una supermartingala por el Teorema de muestreo opcional de Doob 5.1.2 enunciado en el apéndice. Entonces, como S_{II}^{η} es una estrategia particular y u coincide con g en x_τ se tiene que:

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}(x_0) &= \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}(g(x_\tau)) \\
&\leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}(g(x_\tau) + \frac{\eta}{2^\tau}) \\
&= \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}(u(x_\tau) + \frac{\eta}{2^\tau}) \\
&\leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \liminf_{\tau\to\infty} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}(u(x_{\tau\wedge k}) + \frac{\eta}{2^{\tau\wedge k}}) \\
&\leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}^{\eta}}(u(x_0) + \eta) \\
&= u(x_0) + \eta,
\end{aligned}$$

donde en la cuarta línea utilizamos el Lema de Fatou y en la quinta el Teorema de muestro opcional de Doob 5.1.2. Como η es cualquiera, probamos que $u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon} \leq u$. □

Capítulo 3

Teorema de convergencia y solución viscosa

En el capítulo anterior se probó la existencia y unicidad de u^ε, la solución de la DPP, y que además u^ε es el valor del juego para el Tug-of-war con ruido definido en Ω con $\alpha = \frac{p-2}{p+d}$ y $\beta = \frac{d+2}{p+d}$. La idea para este capítulo es probar el siguiente Teorema.

Definición 3.0.1. Dado, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, se define la *condición de esfera exterior uniforme* como:

$$\text{para todo } x \in \partial\Omega, \text{ existen } \delta > 0, \text{ donde } \delta \text{ no depende de } x, \text{ y } z \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega \text{ tales que } B_\delta(z) \subset \mathbb{R}^d \backslash \Omega \text{ y } x \in \partial B_\delta(z). \tag{3.1}$$

Teorema 3.0.1. *Sea Ω un dominio que cumple la condición de esfera exterior uniforme y $g : \mathbb{R}^d \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ una Lipschitz y acotada. Sea u^ε el valor del juego Tug-of-war con ruido asociado a las probabilidades $\alpha = \frac{p-2}{p+d}$, $\beta = \frac{d+2}{p+d}$ y con función de pago g. Entonces $u^\varepsilon \to u$ uniformemente cuando $\varepsilon \to 0$ en Ω, donde u es continua y resulta ser la única solución viscosa al problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado* (2.3).

La demostración estará dividida en las siguientes tres secciones. En la primera, nos vamos a centrar en probar que el valor del juego, u^ε, converge uniformemente a una función continua u. En la segunda vamos a profundizar sobre que quiere decir ser solución viscosa y en la tercera se probará que la función u ya encontrada es la solución viscosa al problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado.

3.1. Convergencia de las soluciones de la DPP

En esta sección nos concentraremos en probar que $u^\varepsilon \to u$ uniformemente cuando $\varepsilon \to 0$ en Ω. La idea es probar un lema del tipo Arzelá-Ascoli. Como las funciones u^ε no son continuas, no podemos utilizar el teorema de Arzelá-Ascoli convencional. No obstante, los saltos de la misma están controlados en función de ε (pequeños para valores chicos de ε), por lo que podemos probar un resultado similar. A continuación se brinda una condición suficiente para asegurar convergencia uniforme de u^ε y que el límite sea una función continua.

Lema 3.1.1. *Sea $\{u^\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ una familia de funciones tales que*

1. *Existe $C > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x)| < C$ para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in \overline{\Omega}$.*
2. *Dado $\eta > 0$, existen dos constantes r_0 y ε_0 tales que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ y para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ tales que $|x - y| < r_0$, se tiene que:*
$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| < \eta.$$

Entonces existe una función continua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y una subsucesión también denotada $\{u^\varepsilon\}$, tal que $u^\varepsilon \to u$ uniformemente en Ω cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostración. Primero vamos a buscar una candidato para nuestra función u.

Sea $X \subset \overline{\Omega}$ un conjunto denso numerable. Como nuestro conjunto de funciones está uniformemente acotado (por hipótesis) mediante un procedimiento diagonal (equivalente al utilizado en la prueba de Arzelá-Ascoli, ver en [11, pág. 278] obtenemos una subsucesión, que denotamos $\{u^\varepsilon\}$, tal que converge para todo $x \in X$. Escribimos $u(x)$ para este límite puntual. Notar que u está definida para $x \in X$.

Por hipótesis, dado $\eta > 0$ existe r_0 tal que $\forall\ x, y \in X$ con $|x - y| < r_0$, vale que:

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| < \eta, \tag{3.2}$$

y la desigualdad (3.2) se extiende a u (definida en X) por ser el límite puntual. Entonces u se puede extender a $\overline{\Omega}$ continuamente. Para ello, dado $z \in \Omega$, como X es denso y numerable, existe sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to z$, y puedo definir

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u(x_n).$$

El límite existe pues $(u(x_n))$ es una sucesión de Cauchy. La definición no depende de la sucesión. En efecto, sea (y_n) tal que $y_n \to z$, veamos que

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) - u(y_n) = 0.$$

Sea $\delta > 0$. Por hipótesis y por ser u límite puntual, existe r_δ tal que si $|x - y| < r_\delta$ para $x, y \in X$, vale que $|u(x) - u(y)| < \delta$. Ahora, como $x_n \to z$ e $y_n \to z$ existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ se cumple que:

$$|x_n - z| < \frac{r_\delta}{2} \quad \text{y} \quad |y_n - z| < \frac{r_\delta}{2},$$

de lo que se deduce que:

$$|x_n - y_n| = |x_n - z + z - y_n| \le |x_n - z| + |z - y_n| \le \frac{r_\delta}{2} + \frac{r_\delta}{2} = r_\delta,$$

lo que implica que $|u(x_n) - u(y_n)| < \delta$.

En suma, se mostró que, dado $\delta > 0$ existe N tal que para todo $n > N$ vale que $|x_n - y_n| < r_\delta$, lo que implica $|u(x_n) - u(y_n)| < \delta$, que es lo que queríamos concluir para demostrar que la extensión no depende de la sucesión elegida.

Resta ver que la convergencia se da uniformemente. Para ello se toma un cubrimiento finito de $\overline{\Omega}$ por bolas con radio menor al r_0 que aparece en las hipótesis del teorema

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{K} B_r(x_i).$$

Notar que al ser un cubrimiento finito, tomando r como el máximo de los radios de las bolas del cubrimiento, podemos considerar que todas las bolas tiene el mismo radio $r > 0$.

Sea $\varepsilon_0 > 0$ (que existe por las hipótesis del teorema) tal que para todo $x \in B_r(x_i)$ y $\varepsilon < \varepsilon_0$ se cumplen:

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x_i)| < \frac{\eta}{3}, \qquad\qquad |u(x) - u(x_i)| < \frac{\eta}{3}. \tag{3.3}$$

Ahora, dado x_i centro de una de las bolas del cubrimiento, como $u^\varepsilon(x_i) \to u(x_i)$, existe $\varepsilon^i > 0$ tal que $|u^\varepsilon(x_i) - u(x_i)| < \frac{\eta}{3}$ para todo $\varepsilon < \varepsilon^i$. Tomando $\varepsilon_1 = \min_{i=1,\dots,K} \varepsilon^i$, vale que cuando $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$|u^\varepsilon(x_i) - u(x_i)| < \frac{\eta}{3} \qquad \forall i = 1, \dots, K.. \tag{3.4}$$

Para $\varepsilon < \overline{\varepsilon_0} = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$, las desigualdades (3.3) y (3.4) se cumplen simultáneamente. Como para todo $x \in \Omega$ podemos encontrar un x_i tal que $x \in B_r(x_i)$, se tiene

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)| \le |u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x_i)| + |u^\varepsilon(x_i) - u(x_i)| + |u(x_i) - u(x)| < \eta$$

para todo $\varepsilon < \overline{\varepsilon_0}$, con lo que se prueba que u^ε converge uniformemente a la función continua u.

□

Por lo tanto, para asegurar que el valor del juego u^ε converge uniformemente a una función u debemos probar que u^ε satisface las dos condiciones del Lema anterior.

Observación 3.1.2. En cada paso del juego la posición no tiene saltos mayores a ε, por lo que cuando el juego sale de Ω, lo debe hacer a algún lugar que diste menos de ε del borde. Entonces el juego siempre se desarrolla en $\Omega \cup \Gamma_\varepsilon$, donde:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}.$$

Como solo nos interesan valores pequeños de ε, podemos considerar que $\varepsilon < \varepsilon_0$ para cierto ε_0. Para ello, solo nos va a interesar g restricta a Γ_ε.

Observación 3.1.3. Para la primera condición del Lema 3.1.1 (acotación uniforme) se debe recordar que en el capítulo anterior, cuando probamos que la DPP tenía una solución y coincidía con el valor del juego, se demostró que

$$\inf_{\mathbb{R}^d \backslash \Omega} g \leq u^\varepsilon \leq \sup_{\mathbb{R}^d \backslash \Omega} g,$$

por tanto la familia $\{u^\varepsilon\}$ está uniformemente acotada dado que g lo está.

Para mostrar la segunda condición del Lema 3.1.1 (una versión de equicontinuidad) se tiene que ver que si el juego comienza en dos puntos cercanos, x_0 e y_0, se tiene que la diferencia valor del juego es pequeña. Para probar este resultado vamos a asumir que el dominio satisface la condición de esfera exterior uniforme (3.1) que se recuerda a continuación :

$$\text{para todo } x \in \partial\Omega, \text{ existen } \delta > 0 \text{ y } z \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega \text{ tales que } B_\delta(z) \subset \mathbb{R}^d \backslash \Omega \text{ y } x \in \partial B_\delta(z).$$

El resultado que nos asegura la condición de equicontinuidad es el Lema 3.1.8. En la dirección de probarlo, se precisan algunos resultados previos que se ven a continuación.

Lema 3.1.4. *Sea $v \in C^2(\Omega)$ y tal que $\nabla v \neq 0$. Recordar que:*

$$\Delta_\infty v = \sum_{i,j} v_{x_i x_j} v_{x_i} v_{x_j}. \quad y \quad \Delta_\infty^N = |\nabla v|^{-2} \Delta_\infty v$$

Si v es radial se cumple que:

$$\Delta_\infty v = v''(r)(v'(r))^2 \quad y \quad \Delta_\infty^N v = v''(r).$$

Demostración. Como v es radial, podemos pensar a v como una función en una sola variable, a la que llamaremos f, es decir, $v(x) = f(|x|) = f(r)$ donde $r = |x|$. Lo primero que vamos a hacer es calcular cuanto vale v_{x_i} y $v_{x_i x_j}$. Entonces:

$$v_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r}.$$

Veamos ahora que sucede con $v_{x_i x_j}$. Supongamos primero que $i \neq j$, entonces:

$$\begin{aligned}
v_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f'(r) \frac{x_i}{r} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f'(r)}{r} x_i \right) \\
&= x_i \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{f'(r)}{r} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \\
&= x_i \left(\frac{f''(r) r - f'(r)}{r^2} \right) \frac{x_j}{r} \\
&= \frac{x_i x_j}{r^2} \left(f''(r) - \frac{1}{r} f'(r) \right).
\end{aligned}$$

Ahora, si $i = j$ vale:

$$\begin{aligned}
v_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f'(r)}{r}x_i\right) \\
&= x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) + \frac{f'(r)}{r}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} \\
&= x_i \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{f'(r)}{r} \\
&= x_i \left(\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\right)\frac{x_i}{r} + \frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{x_i^2}{r^2}\left(f''(r) - \frac{1}{r}f'(r)\right) + \frac{f'(r)}{r}.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty v &= \sum_{i\neq j} v_{x_i x_j} v_{x_i} v_{x_j} + \sum_i v_{x_i x_i} v_{x_i} v_{x_i} \\
&= \sum_{i\neq j} \frac{x_i x_j}{r^2}\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) f'\frac{x_i}{r} f'\frac{x_j}{r} + \sum_i \left(\frac{x_i^2}{r^2}\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) + \frac{f'}{r}\right) f'\frac{x_i}{r} f'\frac{x_i}{r} \\
&= \sum_{i\neq j} \frac{x_i^2 x_j^2}{r^4}(f')^2\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) + \sum_i \frac{x_i^2}{r^2}(f')^2\left(\frac{x_i^2}{r^2}\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) + \frac{f'}{r}\right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{x_i^2 x_j^2}{r^4}(f')^2\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) + \sum_i \frac{x_i^2}{r^3}(f')^3 \\
&= \frac{(f')^2}{r^4}\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right)\sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 + \frac{(f')^3}{r^3}\sum_i x_i^2 \\
&= (f')^2\left(f'' - \frac{1}{r}f'\right) + \frac{1}{r}(f')^3 \\
&= (f')^2\left(f'' - \frac{1}{r}f' + \frac{1}{r}f'\right) \\
&= (f')^2 f'',
\end{aligned}$$

donde usamos que $\sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 = r^4$ y $\sum_i x_i^2 = r^2$. Ahora, como sabemos que:

$$\Delta_\infty^N v = |\nabla v|^{-2}\Delta_\infty v,$$

solo hay que calcular $|\nabla v|^2$. En efecto:

$$|\nabla v|^2 = \sum_i v_{x_i}^2 = \sum_i (f'\frac{x_i}{r})^2 = \frac{(f')^2}{r^2}\sum_i x_i^2 = (f')^2,$$

de lo que se deduce que

$$\Delta_\infty^N v = f''.$$

□

Notar que si v es radial, el cómputa anterior también prueba que:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^d v_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i^2}{r^2}\left(f''(r) - \frac{1}{r}f'(r)\right) + \frac{f'(r)}{r}\right) = f'' + \frac{d-1}{r}f'.$$

El resultado que se enuncia a continuación se puede encontrar en [9].

Lema 3.1.5. *Sea $\phi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tal que $\nabla\phi(x_0) \neq 0$. Entonces:*

$$\phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\max_{B_\varepsilon(x_0)} \phi + \min_{B_\varepsilon(x_0)} \phi\right) - \Delta_\infty^N \phi(x_0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \textit{cuando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Demostración. Como $\nabla\phi(x_0) \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\nabla\phi(x)| > 0$ para todo x donde $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Ahora, sea $x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ y sea x^* el punto diametralmente opuesto en $\partial B_\varepsilon(x_0)$, es decir, $x^* = 2x_0 - x$. Consideremos el desarrollo de Taylor de ϕ en x_0,

$$\phi(y) = \phi(x_0) + \langle \nabla\phi(x_0), y - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(y - x_0), y - x_0\rangle + o(|y - x_0|^2).$$

Si sumamos el desarrollo para $y = x$ e $y = x^*$, obtenemos:

$$\phi(x) + \phi(x^*) = 2\phi(x_0) + \langle D^2\phi(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2).$$

Observar, que si además consideramos x donde se da el máximo de ϕ, es decir,

$$\phi(x) = \max_{y \in B_\varepsilon(x_0)} \phi(y),$$

entonces x es de la forma:

$$x = x_0 + \varepsilon \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}.$$

Además, vale que:

$$\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} = \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|} + o(\varepsilon) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\phi(x) + \phi(x^*) &= 2\phi(x_0) + \langle D^2\phi(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2) \\
&= 2\phi(x_0) + \varepsilon^2\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}, \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}\rangle + o(\varepsilon^2) \\
&= 2\phi(x_0) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N\phi(x_0) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Ahora, notar que el máximo de ϕ en $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ debe darse en un elemento del borde. Si se diera en un punto y perteneciente al interior ($|y - x_0| < \varepsilon$), y sería un máximo relativo implicando $\nabla\phi(y) = 0$ lo cual es absurdo. Si se considera x como se mencionó, es decir, $x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ tal que en x se da el máximo de ϕ en $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$, (que sabemos que ocurre por la observación anterior) tenemos que:

$$\max_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi \leq \phi(x) + \phi(x^*).$$

Por tanto, podemos concluir que,

$$\max_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi \leq 2\phi(x_0) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N\phi(x_0) + o(\varepsilon^2).$$

Si ahora consideramos $x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ tal que

$$\phi(x) = \min_{y \in B_\varepsilon(x_0)} \phi(y),$$

se prueba de manera análoga que

$$\max_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi + \min_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} \phi \geq 2\phi(x_0) + \varepsilon^2\Delta_\infty^N\phi(x_0) + o(\varepsilon^2),$$

con lo que se concluye la prueba. $\square$

Los dos resultados anteriores son de utilidad para probar el próximo Lema que nos ayudará a probar el Lema 3.1.8 que es el que nos da la equicontinuidad.

Vamos a considerar en el anillo $B_R \backslash \overline{B}_\delta$ (centrado en 0) el siguiente juego tipo Tug-of-war con paso ε en B_R, pero eligiendo la posición siguiente en $B_\varepsilon(x) \cap B_R$. Es decir, se inicia en $x_0 \in B_R \backslash \overline{B}_\delta$ y con probabilidad β se mueve aleatoriamente a un punto de $B_\varepsilon(x_0) \cap B_R$ y con probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ cada uno de los jugadores mueve según su estrategia a un punto en $B_\varepsilon(x) \cap B_R$. El juego termina cuando la posición sale por la frontera de ∂B_δ. Sea

$$\tau^* = \text{ínf}\{k \geq 1 : x_k \in \overline{B}_\delta\}$$

el tiempo de salida de este juego.

Lema 3.1.6. *Asumamos que uno de los jugadores del juego anterior sigue la estrategia de tirar hacia 0. Entonces el tiempo de salida del anillo $B_R \backslash \overline{B}_\delta$ verifica que:*

$$\mathbb{E}^{x_0}(\tau^*) \leq \frac{C(R/\delta)\,\text{dist}(\partial B_\delta, x_0) + o(1)}{\varepsilon^2} \qquad x_0 \in B_R \backslash \overline{B}_\delta,$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y es independiente de δ y R.

Demostración. Veamos una pequeña motivación que será útil para entender la prueba. Sea

$$h_\varepsilon(x) = \mathbb{E}^x(\tau^*).$$

Como el dominio es un anillo, es fácil observar que $h_\varepsilon(x)$ debe ser radial y ser creciente respecto la distancia de x al origen. Observar también que, si el jugador que no tiene estrategia de tirar hacia el origen, trata de maximizar la esperanza del tiempo de salida, entonces, cuando damos un paso desde x hacia z, vale que:

$$\mathbb{E}^x(\tau^*) = \text{máx}\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\underset{B_\varepsilon(x)\cap B_R}{\text{máx}} \mathbb{E}^z(\tau^*) + \underset{B_\varepsilon(x)\cap B_R}{\text{mín}} \mathbb{E}^z(\tau^*)\right), \beta \fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} \mathbb{E}^z(\tau^*)\right\} + 1,$$

donde el $+1$ surge de que estamos dando un paso extra.

Si definimos $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 h_\varepsilon(x)$, obtenemos:

$$v_\varepsilon(x) = \text{máx}\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\underset{B_\varepsilon(x)\cap B_R}{\text{máx}} v_\varepsilon(z) + \underset{B_\varepsilon(x)\cap B_R}{\text{mín}} v_\varepsilon(z)\right), \beta \fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v_\varepsilon(z)\right\} + \varepsilon^2.$$

La fórmula anterior, pensando en la discretización de v_ε, nos lleva a considera el siguiente problema: hallar una función v que verifica

$$\begin{cases} \Delta v(x) = -2(d+2) & x \in B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_\delta \\ v(x) = 0 & x \in \partial B_\delta \\ \frac{\partial v(x)}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 & x \in \partial B_{R+\varepsilon} \end{cases}, \tag{3.5}$$

donde $\overrightarrow{n}$ es la normal exterior a la frontera.

La condición $v = 0$ en ∂B_δ asegura que una partícula que se mueve según (3.5), se queda quieta una vez que llega a ∂B_δ. La condición $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} = 0$, asegura que cuando la partícula llega a $\partial B_{R+\varepsilon}$ se refleja. Notar que agrandamos el dominio con respecto al dominio del juego.

Denominemos v la solución del problema (3.5). Se tiene que v es radial, de la forma:

$$\begin{cases} v(r) = -ar^2 - br^{2-d} + c & \text{si}\, d \geq 3 \\ v(r) = -ar^2 - b\log(r) + c & \text{si}\, d = 2 \end{cases},$$

con $a, b, c > 0$.

Afirmación 1. Para el caso $d \geq 3$ vale que:

$$\begin{cases} a = \frac{d+2}{d} \\ b = \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^{-d} \\ c = \delta^2 \left(\frac{d+2}{d} + \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^d \delta^{-d} \right) \end{cases},$$

y por tanto:

$$v(r) = -\frac{d+2}{d}r^2 - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d r^{2-d} + \frac{d+2}{d}\delta^2 + \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d \delta^{2-d}.$$

Se cumple que v es creciente con r.

Para $d = 2$ los valores de los coeficientes cambian pero v es también creciente con r.

La prueba de esta afirmación se encuentra en el apéndice 2.

Ahora que se tiene una fórmula para v, la podemos extender a $B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$ utilizando la misma expresión con los a, b y c hallados antes. Es decir, si nombramos $\overline{v}$ a la extensión, se cumple que para $d \geq 3$:

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} v(x) & |x| > \delta \\ 0 & |x| = \delta \\ -a|x|^2 - b|x|^{2-d} + c & \delta - \varepsilon < |x| < \delta \end{cases}, \tag{3.6}$$

y para $d = 2$

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} v(x) & |x| > \delta \\ 0 & |x| = \delta \\ -a|x|^2 - b\log(|x|) + c & \delta - \varepsilon < |x| < \delta \end{cases}.$$

Notar que sigue valiendo que $\Delta\overline{v} = -2(d+2)$. Por conveniencia, de ahora en adelante se llamará v a su forma extendida, la función definida en (3.6).

Ahora, como v es radial y creciente en r, debido al Lema 3.1.4 sabemos que:

$$\Delta_\infty^N v = v_{rr} \leq v_{rr} + \frac{d+1}{r}v_r = \Delta v.$$

Afirmación 2. Si $B_\varepsilon(x) \subset B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$ entonces

$$⨍_{B_\varepsilon(x)} v \leq v(x) - \varepsilon^2.$$

Demostración. Sea $\phi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B_r(x)} v(y)\, dS(y) = ⨍_{B_r(x)} v(y)\, dy,$$

donde S es la medida en la superficie $\partial B_r(x)$. Haciendo el cambio de variable $y = x + rz$ se lleva $\partial B_r(x)$ a $\partial B_1(0)$ y se tiene que

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B_1(0)} v(x + rz)\, dS(z).$$

Ahora, si derivo, como $v \in C^2(\Omega)$ y está acotada, puedo intercambiar derivada e integral:

$$\phi'(r) = ⨍_{\partial B_1(0)} \partial_r v(x+rz)\, dS(z) = ⨍_{\partial B_1(0)} \langle \nabla v(x+rz), z \rangle\, dS(z).$$

Si deshacemos el cambio de variable obtenemos:

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B_1(0)} \langle \nabla v(x + rz), z \rangle \, dS(z) = \fint_{\partial B_r(x)} \langle \nabla v(y), \frac{y-x}{r} \rangle \, dS(y).$$

Recordando el Teorema de divergencia de Gauss y notando que $\frac{y-x}{r}$ es la normal exterior a $\partial B_r(x)$, vale que:

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B_r(x)} \langle \nabla v(y), \frac{y-x}{r} \rangle \, dS(y) = \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \operatorname{div}(\nabla v(y)) \, dy = \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \Delta v(y) \, dy.$$

Ahora bien, $\Delta v = -2(d+2)$ en $B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$, entonces

$$\phi'(r) = \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \Delta v = -2r\frac{(d+2)}{d}.$$

Por tanto

$$\phi(r) = -\frac{d+2}{d} r^2 + cte.$$

Notar que si $r \to 0$, sucede que $\phi(r) \to cte$, pero

$$\fint_{B_r(x)} v(z) \, dz \to v(x) \quad \text{cuando} \quad r \to 0,$$

por el Teorema de diferenciación de Lebesgue. Entonces:

$$\phi(r) = -\frac{d+2}{d} r^2 + v(x) = \fint_{B_r(x)} v(z) \, dz.$$

Luego, si $r = \varepsilon$ obtenemos:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} v = v(x) - \frac{d+2}{d} \varepsilon^2 \leq v(x) - \varepsilon^2,$$

que es lo que queríamos. $\square$

Afirmación 3. Si $B_\varepsilon(x) \subset B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$ entonces

$$\frac{1}{2} \left(\sup_{B_\varepsilon(x)} v + \inf_{B_\varepsilon(x)} v \right) \leq v(x) - \varepsilon^2.$$

Demostración. Como $\nabla v \neq \emptyset$, por Lema 3.1.5 se sabe que:

$$v(x) = \frac{1}{2} \left(\max_{B_\varepsilon(x)} v + \min_{B_\varepsilon(x)} v \right) - \Delta_\infty^N v(x) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Recordar que además tenemos que

$$\Delta_\infty^N v = v_{rr} \leq \Delta v = -2(d+2).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \frac{1}{2} \left(\max_{B_\varepsilon(x)} v + \min_{B_\varepsilon(x)} v \right) + 2(d+2)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\max_{B_\varepsilon(x)} v + \min_{B_\varepsilon(x)} v \right) + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

y obtenemos lo requerido. $\square$

Entonces se probó que si $B_\varepsilon(x) \subset B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$ se tiene que:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} v \leq v(x) - \varepsilon^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2} \left(\sup_{B_\varepsilon(x)} v + \inf_{B_\varepsilon(x)} v \right) \leq v(x) - \varepsilon^2. \tag{3.7}$$

Afirmación 4. Como v es creciente en r vale que:

$$\fint_{B_\varepsilon \cap B_R} v\,dz \leq \fint_{B_\varepsilon} v\,dz \leq v(x) - \varepsilon^2. \tag{3.8}$$

Demostración. Notar que la segunda desigualdad viene de lo anterior (3.7). Probemos la primera desigualdad. Si $B_\varepsilon(x) \subset B_R$ entonces obtenemos igualdad. Supongamos que $B_\varepsilon(x) \cap B_R^c \neq \emptyset$ (recordar que $x \in B_{R+\varepsilon}$). Entonces:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)\cap B_R|}\int_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz \leq \frac{1}{|B_\varepsilon(x)\cap B_R|}\int_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} \max_{y\in B_R} v(y)\,dz = \max_{y\in B_R} v(y).$$

Notar que como v es radial y creciente, en particular se cumple que $\max_{y\in B_R} v(y) \leq v(y')$ para todo $y' \in B_R^c$ y por tanto:

$$\fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz \leq \max_{y\in B_R} v(y) \leq \fint_{B_\varepsilon(x)\setminus B_R} v(z)\,dz.$$

Teniendo esto puedo ver que:

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(x)} v(z)\,dz = \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} v(z)\,dz &= \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\left[\int_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz + \int_{B_\varepsilon(x)\setminus B_R} v(z)\,dz\right] \\
&= \frac{|B_\varepsilon(x)\cap B_R|}{|B_\varepsilon(x)|}\fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz + \frac{|B_\varepsilon(x)\setminus B_R|}{|B_\varepsilon(x)|}\fint_{B_\varepsilon(x)\setminus B_R} v(z)\,dz \\
&\geq \frac{|B_\varepsilon(x)\cap B_R|}{|B_\varepsilon(x)|}\fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz + \frac{|B_\varepsilon(x)\setminus B_R|}{|B_\varepsilon(x)|}\fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz \\
&= \fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz\left(\frac{|B_\varepsilon(x)\cap B_R|}{|B_\varepsilon(x)|} + \frac{|B_\varepsilon(x)\setminus B_R|}{|B_\varepsilon(x)|}\right) \\
&= \fint_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Con esto probamos la afirmación. $\square$

Por ser v creciente en r, también se obtiene que:

$$\sup_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v \leq \sup_{B_\varepsilon(x)} v, \qquad \inf_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v \leq \inf_{B_\varepsilon(x)} v.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v + \inf_{B_\varepsilon(x)\cap B_R} v\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x)} v + \inf_{B_\varepsilon(x)} v\right) \leq v(x) - \varepsilon^2, \tag{3.9}$$

donde lo anterior es válido para $x \in B_R\setminus\overline{B}_\delta$ que es donde se está desarrollando el juego.

Afirmación 5. La sucesión $v(x_k) + k\varepsilon^2$ es una supermartingala respecto a su filtración natural.

Demostración. Si $x_{k-1} \in B_R\setminus\overline{B}_\delta$ entonces, separando en las alternativas del juego (J_{I}, J_{II}, azar), vale:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v(x_k) + k\varepsilon^2\,|x_0,\ldots,x_{k-1}] &\leq \max\left\{\frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v + \inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v\right), \beta\fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v\right\} + k\varepsilon^2 \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{2}\left(\sup_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v + \inf_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v\right), \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})\cap B_R} v\right\} + k\varepsilon^2 \\
&\leq v(x_{k-1}) - \varepsilon^2 + k\varepsilon^2 \\
&= v(x_{k-1}) + (k-1)\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

donde en la tercera línea utilizamos las cotas (3.8) y (3.9) previamente calculadas. Por tanto, $v(x_k) + k\varepsilon^2$ es una supermartingala respecto a su historia $x_0,\ldots,x_{k-1}$ (filtración natural). $\square$

Ahora, por el Teorema del muestro opcional de Doob, vale que:

$$\mathbb{E}^{x_0}[v(x_{k\wedge\tau^*}) + (k\wedge\tau^*)\varepsilon^2] \le v(x_0).$$

Por linealidad, lo anterior se reescribe,

$$\varepsilon^2\mathbb{E}^{x_0}[k\wedge\tau^*] \le v(x_0) - \mathbb{E}^{x_0}[v(x_{k\wedge\tau^*})].$$

Como v es acotada y continua en $B_R\backslash\overline{B}_{\delta-\varepsilon}$ puedo tomar tomar límite en k:

$$\varepsilon^2\mathbb{E}^{x_0}[\tau^*] \le v(x_0) - \mathbb{E}^{x_0}[v(x_{\tau^*})],$$

donde $x_{\tau^*} \in \overline{B}_\delta\backslash\overline{B}_{\delta-\varepsilon}$.

Afirmación 6. $v(x_0) \le C(R/\delta)\,\mathrm{dist}(\partial B_\delta, x_0)$.

Demostración. Lo vamos a demostrar para el caso $d \ge 3$. Recordemos que:

$$v(x) = -\frac{d+2}{d}|x|^2 - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d|x|^{2-d} + \frac{d+2}{d}\delta^2 + \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d\delta^{2-d}.$$

Como $x_0 \in B_R\backslash\overline{B}_\delta$, vale que:

$$|x_0| = \mathrm{dist}(\partial B_\delta, x_0) + \delta.$$

Por conveniencia, llamaremos $y = \mathrm{dist}(\partial B_\delta, x_0)$, por tanto $|x_0| = y + \delta$.

Reescribamos v,

$$v(x) = |x|^2\left(-\frac{d+2}{d} - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d|x|^{-d}\right) + \delta^2\left(\frac{d+2}{d} + \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d\delta^{-d}\right)$$

Ahora, definamos φ dada por:

$$\varphi(z) = z^2\left(-\frac{d+2}{d} - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d z^{-d}\right) \quad \text{para} \quad z \in (\delta, R].$$

Entonces,

$$|v(x_0)| = |\varphi(|x_0|) - \varphi(\delta)| = |\varphi(y+\delta) - \varphi(\delta)| \le C|y+\delta-\delta| = C|y| = Cy, \tag{3.10}$$

para $C = \sup_{z\in(\delta,R]}|\varphi'(z)|$. Veamos explícitamente como es $\varphi'(z)$ con el fin de acotar su módulo. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi'(z) &= \left(-\frac{d+2}{d}z^2 - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d z^{2-d}\right)' \\
&= -2z\frac{d+2}{d} - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d(2-d)z^{1-d} \\
&= 2\frac{d+2}{2}\left(-z + (R+\varepsilon)^d z^{1-d}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, usando que $|z| \le R$, $\varepsilon \le R$ y $1/|z| < 1/\delta$ (pues $|z| > \delta$) vale que:

$$\begin{aligned}
|\varphi'(z)| &= \left|2\frac{d+2}{2}\left(-z + (R+\varepsilon)^d z^{1-d}\right)\right| \\
&\le 2\frac{d+2}{d}\left(|z| + (R+\varepsilon)^d|z|^{1-d}\right) \\
&\le 2\frac{d+2}{d}\left(R + (2R)^d\frac{1}{\delta^{d-1}}\right) = C_1.
\end{aligned}$$

Entonces de (3.10) se sigue que:

$$|v(x_0)| \le C|y| = Cy \le C_1 y = C_1(R/\delta)\,\mathrm{dist}(\partial B_\delta, x_0).$$

□

Ahora bien, como $x_{\tau^*} \in \overline{B}_\delta \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$, por definición de v (extendida a $B_{R+\varepsilon} \backslash \overline{B}_{\delta-\varepsilon}$), tenemos que $v(x_{\tau^*}) \leq 0$. Además, dado $z \in B_\delta$, se tiene que $v(z) = 0$ y vale entonces que:

$$|v(x_{\tau^*})| = |v(x_{\tau^*}) - v(z)| \leq C|x_{\tau^*} - z| \leq C\varepsilon,$$

donde C es la constante de Lipschitz de v. Entonces, en total obtuvimos que:

$$\varepsilon^2 \mathbb{E}^{x_0}[\tau^*] \leq v(x_0) - \mathbb{E}[v(x_{\tau^*})] \leq C_1(R/\delta) \operatorname{dist}(\partial B_\delta, x_0) + C\varepsilon,$$

que es lo prueba el resultado. $\square$

Veamos ahora un último resultado preliminar para mostrar que el valor del juego satisface la segunda condición del Lema 3.1.1 (Lema tipo Arzela-Ascoli), la versión de equicontinuidad.

Lema 3.1.7. *Sean $\tilde{x} \in \Omega$, $z \notin \Omega$ tales que $\exists\, \delta > 0$ con $B_\delta(z) \subset \Omega^c$. Entonces:*

$$\fint_{B_\varepsilon(\tilde{x})} |x - z|\, dx \leq |\tilde{x} - z| + c\varepsilon^2.$$

Demostración. Primero observar que realizando una traslación y una rotación se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\tilde{x} = 0$ y $z = te_1$ donde $t \neq 0$ y e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$.

Entonces, tenemos que probar que:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} |x - z|\, dx \leq |z| + c\varepsilon^2.$$

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - z|$. Notar que $f(0) = |z| \neq 0$ pues $\tilde{x} = 0 \in \Omega$ y $z \notin \Omega$. Para probar el Lema vamos a realizar el desarrollo de Taylor de f en $x = 0$.

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_d - z_d)^2} = \frac{x_i - z_i}{|x - z|}.$$

Por tanto, $\nabla f(x) = \frac{x-z}{|x-z|}$. En particular, $\nabla f(0) = \frac{-z}{|z|}$.

Ahora, las derivadas segundas resultan ser:

$$(D^2 f(x))_{i,i} = \frac{|x - z| - \frac{(x_i - z_i)^2}{|x-z|}}{|x - z|} = \frac{1}{|x - z|} - \frac{(x_i - z_i)^2}{|x - z|^3}.$$

Mientras que si $i \neq j$:

$$(D^2 f(x))_{i,j} = \frac{-(x_i - z_i)(x_j - z_j)}{|x - z|^3}.$$

En resumen:

$$(D^2 f(0))_{i,i} = \frac{1}{|z|} - \frac{z_i^2}{|z|^3} \quad \text{y} \quad (D^2 f(0))_{i,j} = \frac{-z_i z_j}{|z|^3}.$$

Entonces, si estimamos $f(x)$ en $B_\varepsilon(0)$, tenemos que:

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (D^2 f(0))_{i,j} x_i x_j + o(\varepsilon^2),$$

donde $o(\varepsilon^2) = C_\varepsilon \varepsilon^2$ con $C_\varepsilon \to 0$.

Recordar que $f(x) = |x - z|$. Integrando el desarrollo de Taylor obtenemos,

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} |x - z| \leq |z| + \fint_{B_\varepsilon(0)} \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (D^2 f(0))_{i,j} \fint_{B_\varepsilon(0)} x_i x_j + C_\varepsilon \varepsilon^2.$$

Por simetría se sabe que:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle \nabla f(0), x \rangle = 0$$

y que si $i \neq j$,

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} x_i x_j = 0.$$

Entonces resulta que,

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} |x-z| \leq |z| + \frac{1}{2}\sum_i (D^2 f(0))_{i,i} \fint_{B_\varepsilon(0)} x_i^2 + C_\varepsilon \varepsilon^2.$$

La integral del lado derecho de la desigualdad anterior se computa más adelante en (3.18) y da:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} x_i^2 = \frac{\varepsilon^2}{d+2}$$

Por tanto, obtuvimos:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} |x-z| \leq |z| + \tilde{C}\varepsilon^2.$$

□

Ahora si tenemos todas las herramientas para demostrar que el valor del juego de paso ε cumple la versión de equicontinuidad necesaria para poder aplicar el Lema 3.1.1.

Recordar que una función es p-armoniosa cuando verifica la DPP (2.6) para $\alpha = \frac{p-2}{p+d}$ y $\beta = \frac{d+2}{p+d}$.

Lema 3.1.8. *La función p-armoniosa u^ε con condición de borde g satisface:*

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \mathrm{Lip}(g)\delta|x-y| + C(R/\delta)(|x-y| + o(1))$$

para todo $x, y \in \Omega \cup \Gamma_\varepsilon$, siendo $\delta > 0$ el radio de la condición de la esfera exterior uniforme y $\mathrm{Lip}(g)$ es la constante de Lipschitz de g.

Demostración. El caso $x, y \notin \Omega$ es inmediato debido a que g es Lipschitz y u^ε coincide con g fuera de Ω.

Supongamos que $x \in \Omega$ e $y \in \Gamma_\varepsilon$. Se tiene que $u^\varepsilon(y) = g(y)$. Por la condición de la esfera exterior uniforme (3.1), existen $z \in \Omega^c$ y $\delta > 0$ tales que $y \in \partial B_\delta(z)$, con $B_\delta(z) \subset \Omega^c$.

Se define que J_{I} seguirá la estrategia de moverse hacia z y se la denota S_{I}^z. Vamos a ver que:

$$|x_k - z| - C\varepsilon^2 k$$

es una supermartingala para C suficientemente grande e independiente de ε. En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x_{S_{\mathrm{I}}^z, S_{\mathrm{II}}}\left[|x_k - z|\,|x,\ldots,x_{k-1}\right] &\leq \frac{\alpha}{2}(|x_{k-1}-z| + \varepsilon + |x_{k-1}-z| - \varepsilon) + \beta \fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} |t-z|\,dt \\ &\leq |x_{k-1}-z| + C\varepsilon^2,\end{aligned}$$

donde, la primera desigualdad surge de seguir la estrategia de tirar hacia z para J_{I} si sale sorteado y en el caso de que J_{II} gane el sorteo para jugar, se acota su estrategia por el peor caso (moverse exactamente en la dirección contraria z). La segunda, se obtiene de la estimación del Lema 3.1.7:

$$\fint_{B_\varepsilon(x_{k-1})} |x-z|\,dt \leq |x_{k-1}-z| + C\varepsilon^2.$$

Entonces $|x_k - z| - C\varepsilon^2 k$ es una supermartingala

$$\mathbb{E}^x_{S_{\mathrm{I}}^z, S_{\mathrm{II}}}[|x_k - z| - C\varepsilon^2 k\,|x,\ldots,x_{k-1}] \leq |x_{k-1}-z| - C\varepsilon^2(k-1).$$

Por el Teorema de muestreo opcional, tenemos que:

$$\mathbb{E}^x_{S_{\mathrm{I}}^z, S_{\mathrm{II}}}\left[|x_\tau - z|\right] \leq |x_0 - z| + C\varepsilon^2 \mathbb{E}^x_{S_{\mathrm{I}}^z, S_{\mathrm{II}}}[\tau]. \tag{3.11}$$

Para estimar $\mathbb{E}^x_{S_{\mathrm{I}}^z, S_{\mathrm{II}}}[\tau]$ apelaremos al Lema 3.1.6.

Sea $R > 0$ suficientemente grande tal que $\Omega \cup \Gamma_\varepsilon \subset B_R(z)$. Como $y \in \partial B_\delta(z) \subset \Omega^c$ tenemos que $\Omega \subset B_R(z) \backslash B_\delta(z)$. Por tanto, por el Lema 3.1.6, considerando el anillo centrado en z, vale que:

$$\varepsilon^2 \mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[\tau] \leq \varepsilon^2 \mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[\tau^*] \leq C(R/\delta)(\mathrm{dist}(\partial B_\delta(z), x_0) + o(1)), \tag{3.12}$$

donde τ^* es el tiempo de salida del anillo $B_R(z) \backslash B_\delta(z)$ del juego del Lema 3.1.6, es decir, el juego donde las posiciones se mueven de forma similar al Tug-of-war con ruido pero sólo se sale por la frontera que limita con $B_\delta(z)$.

Como $y \in \partial B_\delta(z)$, se tiene que:

$$\mathrm{dist}(\partial B_\delta(z), x) \leq |y - x|.$$

Por tanto, como $|x - z| \leq |y - x| + \delta$, combinando (3.11) con (3.12), se obtiene

$$\mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[|x_\tau - z|] \leq C(R/\delta)(|x - y| + o(1)),$$

donde C es una nueva constante que renombramos con la misma letra por practicidad.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau) - g(z)]\right| &\leq \mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}\left[|g(x_\tau) - g(z)|\right] \\ &\leq \mathrm{Lip}(g) \mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[|x_\tau - z|] \\ &\leq \mathrm{Lip}(g) C(R/\delta)(|x - y| + o(1)). \end{aligned}$$

Absorbiendo en $C(R/\delta)$ el valor de $\mathrm{Lip}(g)$ y reescribiendo el módulo:

$$g(z) - C(R/\delta)(|x - y| + o(1)) \leq \mathbb{E}^x_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] \leq g(z) + C(R/\delta)(|x - y| + o(1)). \tag{3.13}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) = \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] &\geq \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S^z_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] \\ &\geq g(z) - C(R/\delta)(|x_0 - y| + o(1)) \\ &\geq g(y) - \mathrm{Lip}(g)\delta - C(R/\delta)(|x_0 - y| + o(1)), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad consideramos la estrategia particular de J_{I} tomada al inicio (tirar hacia z), en la segunda línea se utiliza (3.13) y en la tercera utilizamos que g es Lipschitz y que $y \in \partial B_\delta(z)$. Probar la otra desigualdad es un razonamiento análogo, con la diferencia de que definimos la estrategia de tirar hacia z para J_{II} y recordando que $u^\varepsilon(x) = \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)]$, por (3.13), valdría que:

$$u^\varepsilon(x) = \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] \leq \sup_{S_{\mathrm{I}}} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}}, S^z_{\mathrm{II}}}[g(x_\tau)] \leq g(y) + \mathrm{Lip}(g)\delta + C(R/\delta)(|x_0 - y| + o(1))$$

Notar que esto es lo que buscábamos porque $u^\varepsilon(y) = g(y)$.

Consideremos ahora el caso $x, y \in \Omega$. Fijemos las estrategias S_{I} y S_{II} para el juego comenzando en x. Vamos a considerar un juego virtual (paralelo) que comienza en y. Para este se usaran los mismos resultados de las tiradas de las monedas y movimientos aleatorios que para el juego comenzando en x. A partir de las estrategias S_{I}, S_{II} para el juego que comenzó en x se pueden definir las estrategias $S^v_{\mathrm{I}}, S^v_{\mathrm{II}}$ (del juego virtual) de forma tal que, si el juego (virtual) esta en la posición y_{k-1}, entonces los jugadores eligen la siguiente posición de forma tal que $x_k = y_k - y + x$, donde x_k es la k-ésima posición del juego que comenzó en x. Recordar que primero se juega el turno del juego que empieza en x y luego del juego virtual.

Definimos $\tau_x = \inf\{k > 0 : x_k \notin \Omega\}$ y $\tau_y = \inf\{k > 0 : y_k \notin \Omega\}$ (τ_x es el tiempo de salida del juego iniciado en x y τ_y el tiempo de salida para el juego que empezó en y). Es claro que $x_{\tau_x} \in \Gamma_\varepsilon$ y $y_{\tau_y} \in \Gamma_\varepsilon$. Sea $\overline{\tau} = \min\{\tau_x, \tau_y\}$.

Ambos juegos transcurren bajo la descripción anterior hasta tiempo $\overline{\tau}$, es decir, las estrategias S_{I} y S_{II} las seguimos hasta tiempo $\overline{\tau}$ y consecuentemente, también seguimos $S^v_{\mathrm{I}}, S^v_{\mathrm{II}}$ hasta ese tiempo. Hasta el tiempo de parada $\overline{\tau}$ ambos juegan dentro de Ω. Una vez que estamos en turno $\overline{\tau}$ se tiene que $|x_{\overline{\tau}}-y_{\overline{\tau}}|=|x-y|$ pero con $x_{\overline{\tau}}$ o $y_{\overline{\tau}}\notin\Omega$. Al juego que todavía continua en Ω, lo reiniciamos y vamos a seguir la estrategia de tirar hacia z, donde z se elige como en el caso anterior (apelando a la propiedad de la esfera exterior) en $x_{\overline{\tau}}$ o $y_{\overline{\tau}}$ según corresponda. Notar que z es aleatorio, depende de qué juego haya finalizado antes. Si concatenamos el juego que a momento τ aún estaba dentro de Ω con el juego reiniciado (es decir, concatenamos las estrategias) se prueba lo que queríamos usando el caso anterior. $\square$

Hasta el momento probamos que $\{u^\varepsilon\}$ satisface las dos condiciones del Lema 3.1.1: acotación uniforme y una versión de equicontinuidad, lo que implica que u^ε converge uniformemente a una función continua u. El objetivo de las próximas secciones es probar que dicha función u es solución viscosa del problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado.

3.2. La solución viscosa para el problema de Dirichlet

Denotemos por $\mathbb{S}^d$ al espacio de matrices reales simétricas $d\times d$. Recordando la expansión formal del p-Laplaciano normalizado que hicimos al comienzo (2.2), tenemos:

$$\Delta_p^N u=\Delta u+(p-2)\langle D^2u\frac{\nabla u}{|\nabla u|},\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\rangle.$$

Como $\Delta u=\operatorname{tr}(D^2u)$ se puede reescribir la ecuación $\Delta_p^N u=0$:

$$F(\nabla u,D^2u)=0$$

donde $F:\mathbb{R}^d\backslash\{0\}\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{R}$ es tal que

$$F(\nu,X)=-\operatorname{tr}(X)-(p-2)\langle X\frac{\nu}{|\nu|},\frac{\nu}{|\nu|}\rangle.$$

Observar que F no está bien definida para $\nu=0$, por tanto, vamos a considerar las envolventes semicontinuas por debajo y por arriba de F.

Definición 3.2.1. Una función real f es *semicontinua por debajo* en x si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $f(x)-\varepsilon<f(y)$ para todo y tal que $|x-y|<\delta$. Análogamente, f es *semicontinua por arriba* si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $f(x)+\varepsilon>f(y)$ para todo y tal que $|x-y|<\delta$.

Las envolventes semicontinuas de F, coinciden con F para todo $\nu\neq0$ y para $\nu=0$ están definidas de la siguiente manera:

$$F^*(0,X)=-\operatorname{tr}(X)-(p-2)\lambda_{\text{mín}}(X)$$

y

$$F_*(0,X)=-\operatorname{tr}(X)-(p-2)\lambda_{\text{máx}}(X)$$

donde

$$\lambda_{\text{mín}}=\text{mín}\{\lambda:\lambda\,\text{es valor propio de}\,X\},\quad \lambda_{\text{máx}}=\text{máx}\{\lambda:\lambda\,\text{es valor propio de}\,X\}.$$

Definición 3.2.2. Dada $u\in C(\Omega)$ y $\phi\in C^2(\Omega)$, decimos que ϕ *toca por arriba* a u en $x\in\Omega$ cuando $\phi(x)=u(x)$, $u(y)<\phi(y)$ para todo $y\neq x$ y $\nabla\phi(x)\neq0$.

Análogamente, decimos que ϕ *toca por abajo* a u en x cuando $\phi(x)=u(x)$, $u(y)>\phi(y)$ para todo $y\neq x$ y $\nabla\phi(x)\neq0$.

Definición 3.2.3. Para $2<p<\infty$, consideramos la ecuación

$$-\Delta_p^N u=0. \tag{3.14}$$

Entonces, dada u función semicontinua por abajo en Ω, decimos que u es *supersolución viscosa* de (3.14) si para toda $\phi \in C^2$ tal que ϕ toca por abajo a u en $x \in \Omega$, vale que:

$$F^*(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0.$$

Ahora, dada u función semicontinua por arriba en Ω, u es *subsolución viscosa* de (3.14) si para toda $\phi \in C^2$ tal que ϕ toque a u por arriba en $x \in \Omega$, vale que:

$$F_*(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0.$$

Si u es subsolución y supersolución viscosa de (3.14) entonces decimos que es *solución viscosa* de (3.14).

Notar que si ϕ es tal que $\nabla\phi(x) \neq 0$, la afirmación $F^*(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0$ se traduce como $\Delta_p^N\phi(x) \leq 0$, mientras que $F_*(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0$ nos dice que $\Delta_p^N\phi(x) \geq 0$.

Teorema 3.2.1. *Sean Ω un dominio acotado cuyo borde cumple la condición de esfera exterior y $g\colon \mathbb{R}^d\setminus\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz y acotada. Entonces existe una única solución en sentido viscoso al problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado asociado al dato de borde g.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [6]. En la monografía, usando el enfoque de teoría de juegos, vamos a probar la existencia de la solución. La prueba de la unicidad requiere desarrollar más la teoría de soluciones viscosas y ello escapa al objetivo de la monografía.

3.3. Prueba: u es solución viscosa

En este sección vamos a probar que la función u encontrada como límite de los valores del juego Tug-of-war de paso ε es solución viscosa del Problema de Dirichlet para el p-Laplaciano normalizado (2.3).

Teorema 3.3.1. *Sea u la función que se obtiene como límite uniforme de los valores del juego para el Tug-of-war de paso ε. Vale que u es solución viscosa del p-Laplaciano normalizado.*

Demostración. Notar que $u = g$ en $\partial\Omega$ pues $u^\varepsilon = g$ en $\mathbb{R}^d\setminus\Omega$ para todo $\varepsilon > 0$. Por tanto, veremos que u es solución viscosa en Ω.

Sean $x \in \Omega$ y ϕ una función C^2 definida en un entorno de x. Consideremos x_1^ε tal que:

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y).$$

Si el desarrollo de Taylor de orden 2 de ϕ centrado en x se evalúa en x_1^ε, se tiene que:

$$\phi(x_1^\varepsilon) = \phi(x) + \langle D\phi(x), x_1^\varepsilon - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2). \tag{3.15}$$

Considerando el punto simétrico a x_1^ε en $B_\varepsilon(x)$, $x_2^\varepsilon = 2x - x_1^\varepsilon$, tenemos $x_2^\varepsilon - x = -(x_1^\varepsilon - x)$ y entonces:

$$\phi(x_2^\varepsilon) = \phi(x) - \langle D\phi(x), x_1^\varepsilon - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2). \tag{3.16}$$

Si se suman las ecuaciones (3.15) y (3.16) nos queda:

$$\phi(x_2^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) = \langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2).$$

Recordando que ϕ alcanza un mínimo en x_1^ε obtenemos:

$$\phi(x_2^\varepsilon) + \phi(x_1^\varepsilon) - 2\phi(x) \leq \max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y) + \min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y) - 2\phi(x).$$

Esto nos permite concluir que:

$$\frac{1}{2}\left(\max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y) + \min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)} \phi(y)\right) - \phi(x) \geq \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x), (x_1^\varepsilon - x)\rangle + o(\varepsilon^2). \tag{3.17}$$

Afirmación 1. Se tiene que

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} \phi(y)dy = \phi(x) + \frac{\varepsilon^2}{2(d+2)}\Delta\phi(x) + o(\varepsilon^2). \tag{3.18}$$

Demostración. Nuevamente se considera el desarrollo de Taylor de ϕ de orden 2 en x:

$$\phi(x+h) = \phi(x) + \langle D\phi(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)\,h, h\rangle + o(\varepsilon^2), \tag{3.19}$$

donde

$$\langle D^2\phi\,h, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} \phi_{x_i x_j} h_i h_j.$$

Si integramos el desarrollo de Taylor (3.19) obtenemos:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \phi(x+h)\;dh = \phi(x) + \fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D\phi(x), h\rangle\;dh + \frac{1}{2}\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D^2\phi(x)\,h, h\rangle\;dh + o(\varepsilon^2). \tag{3.20}$$

Notar que por simetría de la bola vale:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D\phi(x), h\rangle\;dh = 0.$$

Análogamente, por simetría, se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(0)} \langle D^2\phi(x)\,h, h\rangle\;dh &= \fint_{B_\varepsilon(0)} \sum_{i,j=1}^{d} \phi_{x_i x_j}(x) h_i h_j\;dh \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \phi_{x_i x_j}(x) \fint_{B_\varepsilon(0)} h_i h_j\;dh \\
&= \sum_{i=1}^{d} \phi_{x_i x_i}(x) \fint_{B_\varepsilon(0)} h_i^2\;dh \\
&= \Delta\phi(x) \fint_{B_\varepsilon(0)} h_i^2\;dh.
\end{aligned}$$

Nuevamente, utilizando simetría y un cambio de variable, se calcula:

$$\begin{aligned}
\fint_{B_\varepsilon(0)} h_i^2\;dh &= \frac{1}{d}\fint_{B_\varepsilon(0)} \sum_{j=0}^{d} h_j^2\;dh \\
&= \frac{1}{d}\fint_{B_\varepsilon(0)} |h|^2\;dh \\
&= \frac{1}{d|B_\varepsilon|}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_\rho(0)} \rho^2\;dS\;d\rho \\
&= \frac{1}{d|B_\varepsilon|}\int_0^\varepsilon \sigma_{d-1}\rho^{d-1}\rho^2\;d\rho \\
&= \frac{\sigma_{d-1}}{d(d+2)\omega_d\varepsilon^d}\varepsilon^{d+2} \\
&= \frac{\sigma_{d-1}}{d(d+2)\omega_d}\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

donde ω_d es la medida d-dimensional de la bola $B_1(0)$ y σ_{d-1} es la medida de la superficie $\partial B_1(0)$. Tomando en cuenta que:

$$\omega_d = \int_0^1 \sigma_{d-1}\rho^{d-1}\;d\rho = \frac{\sigma_{d-1}}{d},$$

concluimos que:

$$\frac{\sigma_{d-1}}{d(d+2)\omega_d}\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{d+2}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\phi_{x_i x_i}(x)\fint_{B_\varepsilon(0)} h_i^2\, dh = \frac{\varepsilon^2}{2(d+2)}\Delta\phi(x),$$

de lo que resulta que (3.20) se transforma en:

$$\fint_{B_\varepsilon(0)}\phi(x+h)\, dh = \phi(x) + \frac{\varepsilon^2}{2(d+2)}\Delta\phi(x) + o(\varepsilon^2). \tag{3.21}$$

□

Si sumamos las desigualdades (3.17) y (3.21) ponderadas por α y β respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\left(\max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)}\phi(y) + \min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x)}\phi(y)\right) - \alpha\phi(x) + \beta\fint_{B_\varepsilon(x)}\phi(y)dy - \beta\phi(x)&\\ \geq \frac{\alpha}{2}\langle D^2\phi(x)(x_1^\varepsilon - x),(x_1^\varepsilon - x)\rangle + \frac{\beta\varepsilon^2}{2(d+2)}\Delta\phi(x) + o(\varepsilon^2)&\\ \geq \frac{\beta\varepsilon^2}{2(d+2)}\left((p-2)\langle D^2\phi(x)\frac{(x_1^\varepsilon - x)}{\varepsilon},\frac{(x_1^\varepsilon - x)}{\varepsilon}\rangle + \Delta\phi(x)\right) + o(\varepsilon^2),&\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde la segunda desigualdad sale de considerar que para el p-Laplaciano normalizado los valores asociados de α y β en función de p, que están dados por $\alpha = \frac{p-2}{p+d}$ y $\beta = \frac{d+2}{p+d}$. La desigualdad anterior (3.22) es válida para cualquier ϕ de clase C^2 definida en un entorno de x.

Supongamos ahora que ϕ toca por debajo u en x con $\nabla\phi(x) \neq 0$; queremos ver que $\Delta_p^N\phi(x) \leq 0$, es decir, que u es supersolución.

Afirmación 2. Existe una sucesión $\{x_\varepsilon\}$ que converge a x tal que $u^\varepsilon - \phi$ tiene un mínimo en x_ε. Es decir, existe x_ε tal que $u^\varepsilon(y) - \phi(y) \geq u^\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi(x_\varepsilon)$ para y cerca de x_ε. Para esta afirmación se sigue el argumento de [4, sección 10].

Demostración. Como $u(x) = \phi(x)$ y $u(y) > \phi(y)$ para todo $y \neq x$ y ambas son funciones continuas, tenemos que si $r > 0$,

$$\min_{y\in\partial B_r(x)} u(y) - \phi(y) > u(x) - \phi(x) = 0. \tag{3.23}$$

Veamos que vale:

$$\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y) - \phi(y) > u^\varepsilon(x) - \phi(x),$$

si ε es suficientemente chico y $r > 0$. Recordar que u^ε no es continua pero sus saltos son controlados y converge uniformemente a u, que es una función continua. Supongamos por absurdo que existen ε arbitrariamente pequeño y $r > 0$ tales que

$$\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y) - \phi(y) \leq u^\varepsilon(x) - \phi(x).$$

Notar que por un lado tenemos que cuando $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon(x) - \phi(x) \to u(x) - \phi(x),$$

y por otro lado:

$$\begin{aligned}\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y) - \phi(y) &= \inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y) - u(y) + u(y) - \phi(y)\\ &\geq \inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y) - u(y) + \min_{y\in\partial B_r(x)} u(y) - \phi(y),\end{aligned} \tag{3.24}$$

pero $\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y)-u(y)\to 0$ con $\varepsilon\to 0$, por la convergencia uniforme de u^ε a u.

Manipulando (3.24) se obtiene que

$$\begin{aligned}\min_{y\in\partial B_r(x)} u(y)-\phi(y) &\leq \inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y)-\phi(y)-\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y)-u(y)\\ &\leq u^\varepsilon(x)-\phi(x)-\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y)-u(y)\end{aligned}$$

lo cual es absurdo porque el lado derecho converge a $u(x)-\phi(x)$ cuando $\varepsilon\to 0$ y se contradice (3.23).

Se probó entonces que

$$\inf_{y\in\partial B_r(x)} u^\varepsilon(y)-\phi(y)>u^\varepsilon(x)-\phi(x)$$

si ε es suficientemente pequeño y $r>0$. Por tanto, dado $r>0$, el ínfimo de la función $u^\varepsilon-\phi$ en el borde $\partial B_r(x)$ es más grande que en el interior de $B_r(x)$. No sabemos que $u^\varepsilon-\phi$ tenga un mínimo porque no es continua, pero su ínfimo debe ser menor o igual a $u^\varepsilon(x)-\phi(x)$. Si se toma $r=\varepsilon$, se tiene que dado $\eta(\varepsilon)>0$, debe existir $x_\varepsilon\in B_\varepsilon(x)$ tal que

$$u^\varepsilon(y)-\phi(y)\geq u^\varepsilon(x_\varepsilon)-\phi(x_\varepsilon)-\eta(\varepsilon), \tag{3.25}$$

para todo $y\in B_\varepsilon(x)$. En particular la desigualdad anterior vale para $y=x$. Es fácil ver que $x_\varepsilon\to x$ cuando $\varepsilon\to 0$. En x_ε se tiene que $u^\varepsilon-\phi$ tiene aproximadamente un mínimo.

□

Ahora, como u^ε es p-armoniosa, es decir, es solución de a ecuación DPP (2.6), vale que:

$$0=\frac{\alpha}{2}\left(\sup_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)} u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)+\inf_{y\in B_\varepsilon(x_\varepsilon)} u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)\right)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)\,dy,$$

y reescribiendo la igualdad (3.25) como:

$$u^\varepsilon(y)-u^\varepsilon(x_\varepsilon)\geq\phi(y)-\phi(x_\varepsilon)-\eta(\varepsilon)$$

obtenemos que:

$$\eta(\varepsilon)\geq-\phi(x_\varepsilon)+\frac{\alpha}{2}\left(\max_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y)+\min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y)\right)+\beta\fint_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y)dy.$$

Si redefinimos y consideramos x_1^ε tal que :

$$\phi(x_1^\varepsilon)=\min_{y\in\overline{B}_\varepsilon(x_\varepsilon)}\phi(y),$$

y recordamos (3.22), observando que podemos tomar $\eta(\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$, tenemos que:

$$o(\varepsilon^2)\geq\frac{\beta\varepsilon^2}{2(d+2)}\left((p-2)\langle D^2\phi(x_\varepsilon)\frac{(x_1^\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon},\frac{(x_1^\varepsilon-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\rangle+\Delta\phi(x_\varepsilon)\right). \tag{3.26}$$

Notar que $x_1^\varepsilon\in\partial B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon>0$. Esto se debe a que, si suponemos por absurdo que no, que dado ε_0 existe $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ tal que $x_1^{\varepsilon_1}$ pertenece al interior de $B_{\varepsilon_1}(x_{\varepsilon_1})$, debe suceder que $\nabla\phi(x_1^{\varepsilon_1})=0$. Inductivamente, se construye una subsucesión $\{\varepsilon_j\}$ tal que $\nabla\phi(x_1^{\varepsilon_j})=0$ para todo j y cuando $\varepsilon_j\to 0$ se tiene $x_1^{\varepsilon_j}\to x$; pero esto implicaría que $\nabla\phi(x)=0$ lo cual es absurdo.

Lo anterior nos dice que $\|x_1^\varepsilon-x_\varepsilon\|=\varepsilon$. Como además en x_1^ε se da el mínimo, tenemos que $x_1^\varepsilon-x_\varepsilon$ y $\nabla\phi(x_\varepsilon)$ son colineales y con sentido opuesto, entonces

$$\frac{x_1^\varepsilon-x_\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{-\nabla\phi(x_\varepsilon)}{\|\nabla\phi(x_\varepsilon)\|}.$$

Ahora, por continuidad de ϕ, cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{-\nabla\phi(x)}{\|\nabla\phi(x)\|}.$$

Entonces cuando $\varepsilon \to 0$

$$\langle D^2\phi(x)\frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x_1^\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon}\rangle \to \Delta_\infty^N \phi(x).$$

Finalmente, si dividimos por ε^2 en (3.26) y lo hacemos tender a 0 se obtiene:

$$F^*(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0$$

que es lo que queríamos obtener.

Para probar que u es subsolución viscosa, se usa un argumento análogo.

$\square$

Capítulo 4

Tug-of-war y el ∞-Laplaciano normalizado

En este capítulo se introduce el juego Tug-of-war (sin ruido). Se demuestra que el juego tiene un valor, u^ε, y que este satisface una DPP. Se prueba que $u^\varepsilon \to u$ uniformemente a una función continua u cuando $\varepsilon \to 0$, y que además esa función u es solución en sentido viscoso del problema de Dirichlet para el ∞-Laplaciano normalizado.

4.1. El juego y sus estrategias

En este capítulo consideraremos el juego Tug-of-War (como antes) pero sin el factor de movimiento aleatorio, es decir, con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. De esta forma, se tienen dos jugadores J_{I} y J_{II} y un dominio acotado Ω donde para decidir qué jugador juega un turno, se tira una moneda balanceada. El ganador de la tirada mueve la posición del juego, eligiéndola a distancia menor o igual a ε de la posición actual. El juego finaliza cuando la posición sale de Ω y en ese caso, J_{II} le paga a J_{I} lo determinado por una función de pago g. Seguiremos asumiendo a la función de pago g definida en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ como Lipschitz y acotada.

La particularidad de esta versión (en contraposición con la anterior) es que los jugadores podrían elegir estrategias para las cuales el juego nunca termina. Esto ciertamente agrega una dificultad que antes no se presentaba. Es necesario mostrar que existen estrategias para ambos jugadores que aseguran que el juego termina casi seguramente independientemente de la estrategia que tome el otro jugador. Las estrategias para las que el juego no finaliza van a ser severamente penalizadas en la función de pago esperado. Concretamente, para definir el pago esperado, lo que se hace es penalizar al jugador que tome una estrategia que no finalice el juego casi seguramente. Entonces definimos:

$$V^{\mathrm{I},x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}} = \begin{cases} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}[g(X_\tau)] & \text{si } \mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}(\{\omega \in H^\infty : \tau(\omega) < \infty\}) = 1 \\ -\infty & \text{si no} \end{cases},$$

y

$$V^{\mathrm{II},x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}} = \begin{cases} \mathbb{E}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}[g(X_\tau)] & \text{si } \mathbb{P}^{x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}(\{\omega \in H^\infty : \tau(\omega) < \infty\}) = 1 \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}.$$

Dado el pago esperado, se define el *valor del juego* para J_{I} como:

$$u^\varepsilon_{\mathrm{I}}(x_0) = \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} V^{\mathrm{I},x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}},$$

y para el J_{II} como:

$$u^\varepsilon_{\mathrm{II}}(x_0) = \inf_{S_{\mathrm{II}}} \sup_{S_{\mathrm{I}}} V^{\mathrm{II},x_0}_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}.$$

Decimos que *el juego tiene valor* si $u^\varepsilon_{\mathrm{I}} = u^\varepsilon_{\mathrm{II}}$ y lo notamos u^ε.

4.2. Otra versión de la DPP

En está sección se probará que el juego tiene valor y el mismo cumple una DPP similar a la antes presentada.

Teorema 4.2.1. *El juego Tug-or-war tiene valor u^ε, que satisface la siguiente ecuación:*

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \sup\limits_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon + \frac{1}{2} \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} u^\varepsilon & x \in \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & x \notin \Omega \end{cases}. \tag{4.1}$$

Demostración. Primero se probará que la DPP (4.1) tiene solución y luego que la solución coincide con el valor del juego.

Vamos a decir que u es una subsolución de (4.1) si cumple que:

$$\begin{cases} u(x) \leq \frac{1}{2} \sup\limits_{B_\varepsilon(x)} u + \frac{1}{2} \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} u & x \in \Omega \\ u(x) \leq g(x) & x \notin \Omega \end{cases}.$$

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto definido por

$$\mathcal{S} = \{u\colon u \text{ es subsolución, y } u \leq \sup_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} g\}.$$

Observar que $\mathcal{S}$ depende de ε pues lo hace la DPP (4.1). Notar que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puesto que la función definida en $x \in \Omega$ como $u(x) = \inf_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} g$ y $u(x) = g(x)$ para $x \notin \Omega$ cumple que $u \in \mathcal{S}$.

Sea $\overline{u}(x) = \sup_{u \in \mathcal{S}} u(x)$.

Afirmación 1. $\overline{u}$ es solución de (4.1)

Demostración. Primero observar que, considerando la función $u \in \mathcal{S}$ definida anteriormente, tenemos que $\overline{u} \geq g$ fuera de Ω. No obstante, toda $v \in \mathcal{S}$ cumple que $v(x) \leq g(x)$ para $x \notin \Omega$. Como $\overline{u}$ toma supremo en todas las subsoluciónes y existe subsolución que coincide con g fuera de Ω debe suceder que $\overline{u}(x) = g(x)$ para todo $x \notin \Omega$.

Notar además que para toda $u \in \mathcal{S}$, vale que $u \leq \overline{u}$. Entonces, dada $u \in \mathcal{S}$, se tiene que:

$$u(x) \leq \frac{1}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} u + \frac{1}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} u \leq \frac{1}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} + \frac{1}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} \overline{u},$$

por lo que si tomamos supremo en la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\overline{u}(x) = \sup_{u \in \mathcal{S}} u(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} + \frac{1}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} \right) = \frac{1}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} + \frac{1}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} \overline{u},$$

lo que muestra que $\overline{u} \in \mathcal{S}$.

Ahora bien, sea $v\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} v(x) = \frac{1}{2} \sup\limits_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} + \frac{1}{2} \inf\limits_{B_\varepsilon(x)} \overline{u} & x \in \Omega \\ v(x) = g(x) & x \notin \Omega \end{cases}.$$

Por definición de v y por ser $\overline{u}$ subsolución se tiene que $\overline{u} \leq v$. Pero esto implica:

$$v(x) \leq \frac{1}{2} \sup_{B_\varepsilon(x)} v + \frac{1}{2} \inf_{B_\varepsilon(x)} v,$$

de donde concluimos que $v \in \mathcal{S}$ y por tanto es subsolución.

Finalmente, como v es subsolución, por definición de $\overline{u}$ se tiene $v \leq \overline{u}$. Entonces obtuvimos que $\overline{u} \leq v \leq \overline{u}$ entonces $v = \overline{u}$ y por tanto $\overline{u}$ es solución de la DPP. Notar que este argumento también prueba que la solución es única, porque cualquier solución a la DPP es también una subsolución. $\square$

Hasta ahora probamos que existe solución para la DPP, que la llamaremos u. Veamos ahora que la misma coincide con el valor del juego. Para ello, vamos a probar que $u \leq u_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}$. Mostrar que $u \geq u_{\mathrm{II}}^{\varepsilon}$ es un resultado análogo y dado que el Lema (2.2.3) funciona igual que en el caso anterior, quedaría probado lo que queremos.

Queremos encontrar para J_{I} una estrategia que le asegure una ganancia cercana a u, siendo u la solución de la DPP que existe por la afirmación previa (omitimos la dependencia de ε para alivianar la notación). El J_{I} quiere maximizar su ganancia pero al mismo tiempo asegurar que el juego termine casi seguramente para no ser penalizado. Para ello, se define la función

$$\delta(x) = \sup_{B_\varepsilon(x)} u - u(x).$$

Fijemos $\eta > 0$ y una posición inicial $x_0 \in \Omega$. Sea $\delta_0 = \min\{\delta(x_0), \varepsilon\}/2$. Supongamos que $\delta_0 > 0$ y sea

$$X_0 = \{x \in \Omega : \delta(x) > \delta_0\}.$$

Vamos a considerar una estrategia S_{I}^* para J_{I} que va a depender de si $x_k \in X_0$ o $x_k \notin X_0$. Para ello, consideremos:

$$M_k = \begin{cases} u(x_k) - \eta 2^{-k} & x_k \in X_0 \\ u(y_k) - \delta_0 d_k - \eta 2^{-k} & x_k \notin X_0 \end{cases},$$

donde y_k es la última posición del juego que estuvo en X_0 previo a la posición x_k y $d_k \in \mathbb{N}$, es la cantidad de turnos que pasaron desde la última visita a y_k.

Para el caso $x_k \in X_0$, la estrategia S_{I}^* del J_{I} será mover a la posición x_{k+1} tal que

$$u(x_{k+1}) \geq \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u - \eta_{k+1} 2^{-(k+1)},$$

donde $\eta_{k+1} \in (0, \eta]$ es lo suficientemente pequeño para asegurar que $x_{k+1} \in X_0$. Veamos que existe dicho η_{k+1}. En efecto, recordando que u es solución de la DPP y por tanto

$$u(x) - \inf_{B_\varepsilon(x)} u = \sup_{B_\varepsilon(x)} u - u(x) = \delta(x),$$

evaluando al ecuación anterior en $x = x_k$ vale que:

$$\begin{aligned} \delta(x_k) - \eta_{k+1} 2^{-(k+1)} &= \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u - u(x_k) - \eta_{k+1} 2^{-(k+1)} \\ &\leq u(x_{k+1}) - u(x_k) \\ &\leq u(x_{k+1}) - \inf_{B_\varepsilon(x_{k+1})} u \\ &= \delta(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Entonces, podemos asegurar que $x_{k+1} \in X_0$ si tomamos η_{k+1} de forma tal que:

$$\delta_0 < \delta(x_k) - \eta_{k+1} 2^{-(k+1)}$$

Veamos ahora que para este caso ($x_k \in X_0$) vale que M_k es una submartingala. Para ello vamos a considerar la siguiente partición en tres casos: que la tirada del turno la gane J_{I}, que la gane J_{II} y mueva la posición a un punto en X_0 o que gane J_{II} y mueva la posición a un punto que no este en X_0.

Si J_{I} gana la tirada, sabiendo que $x_{k+1} \in X_0$, vale:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(x_{k+1}) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq \sup_{B_\varepsilon(x_k)} -\eta_{k+1} 2^{-(k+1)} - \eta 2^{-(k+1)} \\ &= u(x_k) + \delta(x_k) - \eta_{k+1} 2^{-(k+1)} - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq u(x_k) + \delta(x_k) - \eta 2^{-k} \\ &= u(x_k) - \eta 2^{-k} + \delta(x_k) \\ &= M_k + \delta(x_k), \end{aligned}$$

donde en la segunda línea utilizamos la estrategia S_{I}^*, en la tercera la definición de $\delta(x_k)$ y en la cuarta que $\eta_{k+1} \in (0, \eta]$.

Si gana J_{II} y mueve x_k a una posición $x_{k+1} \in X_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(x_{k+1}) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq \inf_{B_\varepsilon(x_k)} u - \eta 2^{-(k+1)} \\ &= u(x_k) - u(x_k) + \inf_{B_\varepsilon(x_k)} -\eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq u(x_k) - \sup_{B_\varepsilon(x_k)} u + u(x_k) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &= u(x_k) - \delta(x_k) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &> M_k - \delta(x_k), \end{aligned}$$

donde en la segunda línea utilizamos que $x_{k+1} \in B_\varepsilon(x_k)$ y en la cuarta que u es solución de la DPP.

Ahora, si gana la tirada J_{II} y cambia la posición x_k a $x_{k+1} \notin X_0$ vale:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(y_{k+1}) - d_{k+1}\delta_0 - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq u(y_{k+1}) - d_k\delta_0 - \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &= u(x_k) - \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &\geq M_k - \delta_0, \end{aligned}$$

donde en la tercera línea se utiliza que $x_k \in X_0$, lo que implica que $y_{k+1} = x_k$ y por tanto $d_k = 0$.

Con esto, probamos que M_k es una submartingala para el caso $x_k \in X_0$. Veamos ahora como se define la estrategia S_{I}^* para el caso $x_k \notin X_0$.

En el caso $x_k \notin X_0$, la estrategia de J_{I} será retroceder un paso hacia y_k. Es decir, si para ir de y_k a x_k se dieron las posiciones $y_k = x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k$, S_{I}^* mueve x_k a una de esas posiciones (dentro de la $B_\varepsilon(x_k)$) de forma tal que $d_{k+1} = d_k - 1$.

A continuación se prueba que M_k también es una submartingala para el caso $x_k \notin X_0$. Para ello se considerarán los siguientes cuatro casos: que gane la tirada J_{I} y mueva a la posición $x_{k+1} \in X_0$ o $x_{k+1} \notin X_0$, o bien que gane la tirada J_{II} y mueva x_k hacia $x_{k+1} \in X_0$ o hacia $x_{k+1} \notin X_0$.

Si J_{I} gana la tirada y $x_{k+1} \in X_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(x_{k+1}) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq u(x_{k+1}) - \delta_0 + \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &= u(y_k) - \delta_0 + \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &\geq M_k + \delta_0, \end{aligned}$$

donde la igualdad de la tercera línea surge de la estrategia S_{I}^*, como $x_{k+1} \in X_0$, se tiene que $y_k = x_{k+1}$ y por tanto $d_k = 1$.

Si gana J_{I} pero mueve a la posición $x_{k+1} \notin X_0$ vale:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(y_{k+1}) - d_{k+1}\delta_0 - \eta 2^{-(k+1)} \\ &= u(y_k) - d_k\delta_0 + \delta_0 - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq u(y_k) - d_k\delta_0 + \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &= M_k + \delta_0, \end{aligned}$$

donde la segunda línea se debe a que tanto x_k como x_{k+1} no pertenecen a X_0 lo que implica que $y_k = y_{k+1}$.

Ahora, si gana la tirada el J_{II} y $x_{k+1} \in X_0$, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(x_{k+1}) - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq \inf_{B_\varepsilon(x_k)} -\eta 2^{-k} \\ &\geq u(x_k) - \sup_{B_\varepsilon(x_k)} +u(x_k) - \eta 2^{-k} \\ &\geq u(x_k) - \delta(x_k) - \eta 2^{-k} \\ &\geq u(y_k) - d_k\delta_0 - \delta_0 - \eta 2^{-k} \\ &\geq M_k - \delta_0. \end{aligned}$$

Por último, si gana J_{II} y $x_{k+1} \notin X_0$ se cumple:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= u(y_{k+1}) - d_{k+1}\delta_0 - \eta 2^{-(k+1)} \\ &= u(y_k) - d_k\delta_0 - \delta_0 - \eta 2^{-(k+1)} \\ &\geq M_k - \delta_0. \end{aligned}$$

Ahora, si juntamos todos los casos que vimos hasta ahora, podemos asegurar que M_k es una submartingala y que la misma está acotada por arriba por $\sup g$. Observar que siempre que J_{I} gana la tirada, vale que $M_{k+1} \geq M_k + \delta_0$. Esto implica que el juego debe terminar casi seguramente puesto que en caso contrario, como existen rachas arbitrariamente largas de turnos consecutivos de J_{I}, el valor que tomar M_k superaría la cota, lo que es absurdo.

Teniendo bien definida la estrategia S_{I}^* del J_{I} y que M_k es una submartingala, vale que:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x_0) &= \sup_{S_{\mathrm{I}}} \inf_{S_{\mathrm{II}}} V_{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I},x_0}[g(x_\tau)] \\ &\geq \inf_{S_{\mathrm{II}}} V_{S_{\mathrm{I}}^*,S_{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I},x_0}[g(x_\tau) - \eta 2^{-\tau}] \\ &= \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}}^*,S_{\mathrm{II}}}^{x_0}[g(x_\tau) - \eta 2^{-\tau}] \\ &\geq \inf_{S_{\mathrm{II}}} \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}}^*,S_{\mathrm{II}}}^{x_0}[u(x_{\tau\wedge k}) - \eta 2^{\tau\wedge k}] \\ &\geq \inf_{S_{\mathrm{II}}} \mathbb{E}_{S_{\mathrm{I}}^*,S_{\mathrm{II}}}^{x_0}[u(x_0) - \eta] = u(x_0) - \eta, \end{aligned}$$

donde en la tercera linea se utilizó que para la estrategia S_{I}^* el juego termina casi seguramente, en la cuarta y quinta línea se utilizó el lema de Fatou y el Teorema de muestreo opcional respectivamente. Como $\eta > 0$ es arbitrario, probamos que $u_{\mathrm{I}}^\varepsilon \geq u$.

Para el razonamiento anterior se asumió que $\delta(x_0) > 0$. Veamos ahora como se prueba para el caso $\delta(x_0) = 0$. Si $\delta(x_0) = 0$ para $x_0 \in \Omega$, la estrategia del J_{I} será moverse a un punto del borde hasta que la posición del juego sea x_0^* donde $\delta(x_0^*) > 0$ (y en ese caso se continúa jugando con la estrategia S_{I}^* definida anteriormente) o bien x_0^* este fuera de Ω. Análogamente al caso anterior, esta estrategia asegura que el juego termine casi seguramente pues hay probabilidad positiva de que el J_{I} obtenga una secuencia arbitrariamente larga. Ahora, como u es solución de la DPP vale que $u(x_0) = u(x_0^*)$. Esto se debe a que $\delta(x_0) = 0$ implica $u(x_0) = \sup_{B_\varepsilon(x_0)} u$ de lo que se deduce (por u solución de la DPP) que u es constante igual a $u(x_0)$ en $B_\varepsilon(x_0)$. El mismo razonamiento vale para toda la secuencia de posiciones hasta x_0^*, que es el primero que no cumple que u es constante en la bola de radio ε centrada esa posición del juego. Teniendo entonces que $u(x_0) = u(x_0^*)$, aplicamos lo mismo que para el caso anterior en x_0^* y obtenemos que $u_{\mathrm{I}}^\varepsilon \geq u$ para $\delta(x_0) = 0$. □

4.3. Prueba de convergencia

Para probar que u^ε converge uniformemente a una función continua u, que es la solución viscosa del problema de Dirichlet para el ∞-Laplaciano normalizado, vamos a precisar que u^ε cumpla las dos condiciones dadas en el Lema de tipo Arzela-Ascoli 3.1.1 enunciado en el capítulo anterior.

Al ser u^ε es solución de la DPP, se tiene que:

$$\inf g \leq u^\varepsilon \leq \sup g,$$

por lo que u^ε está uniformemente acotada. Falta ver que u^ε cumple la versión de equicontinuidad del Lema en cuestión.

Lema 4.3.1. *Para todo par x, y tales que $|x-y| < \varepsilon$ vale que:*

$$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) \leq \operatorname{Lip}(g)\varepsilon$$

Demostración. Si g es constante, entonces no hay nada que probar pues u^ε es constante para todo $\varepsilon > 0$. Ahora, si g no es constante entonces $\operatorname{Lip}(g) > 0$.

Si $x, y \notin \Omega$ el resultado se obtiene directamente porque g es Lipschitz. Consideremos entonces el caso cuando alguno de los puntos x, y se encuentra en Ω.

Supongamos por absurdo que existe $x_0 \in \Omega$ tal que para algún $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ sucede que:

$$u^\varepsilon(x_1) - u^\varepsilon(x_0) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon.$$

Si $x_1 \in \Omega$, como u^ε es solución de la DPP, vale:

$$\sup_{B_\varepsilon(x_1)} u^\varepsilon - u^\varepsilon(x_1) = u^\varepsilon(x_1) - \inf_{B_\varepsilon(x_1)} u^\varepsilon \geq u^\varepsilon(x_1) - u^\varepsilon(x_0) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon. \tag{4.2}$$

Si consideramos $x_2 \in B_\varepsilon(x_1)$ tal que x_2 casi alcanza el supremo en (4.2), se tiene que

$$u^\varepsilon(x_2) - u^\varepsilon(x_1) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon.$$

Inductivamente se construye una sucesión $\{x_k\}$ tal que $u^\varepsilon(x_k) - u^\varepsilon(x_{k-1}) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon$. Como u^ε está acotada, existe n tal que $x_n \notin \Omega$ (de hecho, $n \leq \frac{\sup g - \inf g}{\operatorname{Lip}(g)\varepsilon}$).

Análogamente, podemos considerar x_{-1} tal que:

$$u^\varepsilon(x_0) - u^\varepsilon(x_{-1}) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon$$

e inductivamente construir $\{x_{-k}\}_k$ donde $u^\varepsilon(x_{-k}) - u^\varepsilon(x_{-(k+1)}) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon$. Nuevamente, como u^ε está acotada, existe m tal que $x_{-m} \notin \Omega$. Entonces se tiene que:

$$\frac{g(x_n) - g(x_{-m})}{|x_n - x_{-m}|} = \frac{\sum_{k=-m+1}^{n} u^\varepsilon(x_k) - u^\varepsilon(x_{k-1})}{|x_n - x_{-m}|} \geq \frac{\sum_{k=-m+1}^{n} u^\varepsilon(x_k) - u^\varepsilon(x_{k-1})}{\varepsilon(n+m)} > \operatorname{Lip}(g),$$

lo cual es absurdo puesto que g es Lipschitz. Entonces fue absurdo suponer que existe $y \in B_\varepsilon(x_0)$ tal que $u^\varepsilon(x_0) - u^\varepsilon(y) > \operatorname{Lip}(g)\varepsilon$. $\square$

Con esto tenemos probado que existe una subsucesión que converge uniformemente a una función continua u. Utilizando un argumento similar al utilizado en el Teorema 3.3.1, desestimando los cálculos que utilizan el movimiento aleatorio, se puede ver que el límite es una función ∞-armónica para el operador Δ_∞^N.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Martingalas y Teorema del muestreo opcional

Definición 5.1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Decimos que $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$, es una **filtración** si $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ para todo n

Observación 5.1.1. Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración, interpretamos que $\mathcal{F}_n$ contiene información hasta tiempo n

Definición 5.1.2. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración, una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **martingala** con respecto a la filtración dada si:

1. $X_n \in L^1$ (Es decir, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$)
2. X_n es $\mathcal{F}_n$-medible
3. $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición 5.1.3. Si en la definición anterior pedimos que

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$$

entonces decimos que la sucesión de variables aleatorias es una **Supermartingala** y si pedimos

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$$

decimos que es una **Submartingala**

Definición 5.1.4. Un **tiempo de parada** con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una variable aleatoria $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tal que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 5.1.2 (Optional stopping theorem)**.** *Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala y τ un tiempo de parada. Supongamos que existe una constante c tal que $|X_{\tau\wedge n}| \leq c$ casi seguramente para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$$

Análogamente, si X es una supermartingala tenemos

$$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0]$$

y si es submartingala

$$\mathbb{E}[X_\tau] \geq \mathbb{E}[X_0]$$

5.2. Pruebas adicionales

A continuación se encuentra la demostración de la afirmación del Lema 2.1.6:

Afirmación 2. Para el caso $d \geq 3$ vale que:

$$\begin{cases} a = \frac{d+2}{d} \\ b = \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^{-d} \\ c = \delta^2 \left(\frac{d+2}{d} + \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^d \delta^{-d} \right) \end{cases}.$$

Por tanto:

$$v(r) = -\frac{d+2}{d}r^2 - \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d r^{2-d} + \frac{d+2}{d}\delta^2 + \frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d \delta^{2-d},$$

donde v cumple que es creciente.

Demostración. Vamos a utilizar las tres condiciones que nos da (3.5) para encontrar los valores de a, b y c. Por un lado tenemos que $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial B_\delta$, entonces tenemos que $|x| = \delta$. Por tanto

$$-a\delta^2 - b\delta^{2-d} + c = 0,$$

lo que permite concluir que

$$c = a\delta^2 + b\delta^{2-d}.$$

Ahora nos resta ver cuanto valen a y b. La primer condición nos dice $\Delta v = -2(d+2)$. Vamos a calcular explícitamente como es Δv, para ello antes debemos ver cuanto vale v_{x_i} y luego calcular $v_{x_i x_i}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i} &= \frac{\partial(-a|x|^2 - b|x|^{2-d} + c)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial(-a|x|^2)}{\partial x_i} - \frac{\partial(b|x|^{2-d})}{\partial x_i} \\ &= -2ax_i - b(2-d)|x|^{-d}x_i. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial(-2ax_i - b(2-d)|x|^{-d}x_i)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial(-2ax_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial(b(2-d)|x|^{-d}x_i)}{\partial x_i} \\ &= -2a - b(2-d)\left(x_i \frac{\partial |x|^{-d}}{\partial x_i} + |x|^{-d} \right) \\ &= -2a - b(2-d)((-d)|x|^{-d-2}x_i^2 + |x|^{-d}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta v = \sum v_{x_i x_i} &= \sum \left(-2a - b(2-d)((-d)|x|^{-d-2}x_i^2 + |x|^{-d}) \right) \\ &= -2ad - b(2-d)(-d)|x|^{-d-2} \sum x_i^2 - b(2-d)d|x|^{-d} \\ &= -2ad + b(2-d)d|x|^{-d-2}|x|^2 - b(2-d)d|x|^{-d} \\ &= -2ad. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\Delta v = -2ad \quad \text{y} \quad \Delta v = -2(d+2)$$

de lo que deducimos

$$a = \frac{d+2}{d}.$$

La última condición nos dice que $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} = 0$ donde

$$\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}(x) = \langle \nabla v(x), \frac{x}{|x|} \rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} &= \sum (-2ax_i - b(2-d)|x|^{-d} x_i) \frac{x_i}{|x|} \\
&= \frac{-2a}{|x|} \sum x_i^2 - \frac{b(2-d)|x|^{-d}}{|x|} \sum x_i^2 \\
&= -2a|x| - b(2-d)|x|^{-d}|x| \\
&= |x|(-2a - b(2-d)|x|^{-d}).
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} = 0$ en $\partial B_{R+\varepsilon}$ se tiene que $|x| = R + \varepsilon > 0$ por tanto vale que

$$-2a - b(2-d)|x|^{-d} = 0.$$

De donde podemos concluir que

$$-2a = b(2-d)|x|^{-d} = b(2-d)(R+\varepsilon)^{-d}.$$

En total, lo que obtuvimos de las tres condiciones fue:

$$\begin{cases} a = \frac{d+2}{d} \\ -2a = b(2-d)(R+\varepsilon)^{-d} \\ c = a\delta^2 + b\delta^{2-d} \end{cases},$$

por lo que, despejando obtenemos que:

$$a = \frac{d+2}{d}, \quad b = \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^{-d}, \quad c = \delta^2 \left(\frac{d+2}{d} + \frac{2(d+2)}{d(d-2)}(R+\varepsilon)^d \delta^{-d} \right).$$

Por tanto:

$$v(r) = -\frac{d+2}{d} r^2 - \frac{d+2}{d} \frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d r^{2-d} + \frac{d+2}{d}\delta^2 + \frac{d+2}{d} \frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d \delta^{2-d}.$$

Nos resta ver que v es creciente. Para ellos vamos a ver que $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= -2\frac{d+2}{d} - (2-d)\frac{d+2}{d}\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d r^{1-d} \\
&= 2\frac{d+2}{d}\left(-r + (d-2)\frac{2}{d-2}(R+\varepsilon)^d r^{1-d} \right) \\
&= 2\frac{d+2}{d}\left(-r + 2\frac{(R+\varepsilon)^d}{r^d} r \right).
\end{aligned}$$

Notar que $2\frac{d+2}{d} > 0$ y como $r \in [\delta, R+\varepsilon)$ se tiene que $(\frac{R+\varepsilon}{r})^d > 1$ y por tanto:

$$-r + 2\frac{(R+\varepsilon)^d}{r^d} r > -r + 2r = r > 0.$$

Entonces $v_r > 0$ que es lo que queríamos. $\square$

Bibliografía

[1] Jiri Benedikt, Petr Girg, Lukas Kotrla, and Peter Takac. Origin of the p-laplacian and a. missbach. 2018.

[2] Pablo Blanc and Julio Daniel Rossi. *Game theory and partial differential equations*, volume 31 of *De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl.* Berlin: De Gruyter, 2019.

[3] R. Durrett and R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2019.

[4] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.

[5] Julián Fernández Bonder, Juan P. Pinasco, and Ariel M. Salort. Quasilinear eigenvalues. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 56(1):1–25, 2015.

[6] Petri Juutinen, Peter Lindqvist, and Juan J. Manfredi. On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(3):699–717, 2001.

[7] Shizuo Kakutani. Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20:706–714, 1944.

[8] M. Lewicka. *A Course on Tug-of-War Games with Random Noise: Introduction and Basic Constructions.* Universitext. Springer International Publishing, 2020.

[9] P. Lindqvist. *Notes on the Infinity Laplace Equation.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.

[10] Peter Lindqvist. *Notes on the p-Laplace equation*, volume 102 of *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics.* University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2006.

[11] J.R. Munkres. *Topology.* Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[12] Mikko Parviainen. Notes on tug-of-war games and the p-laplace equation, 2023.

[13] Yuval Peres, Oded Schramm, Scott Sheffield, and David B. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian [mr2449057]. In *Selected works of Oded Schramm. Volume 1, 2*, Sel. Works Probab. Stat., pages 595–638. Springer, New York, 2011.

[14] Yuval Peres and Scott Sheffield. Tug-of-war with noise: a game-theoretic view of the p-Laplacian. *Duke Math. J.*, 145(1):91–120, 2008.

[15] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2021.