



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Efectos seculares y resonantes generados por el hipotético Planeta 9.

Luis Emilio Viera

Programa de Posgrado en Física, opción Astronomía  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Noviembre de 2023



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Efectos seculares y resonantes generados por el hipotético Planeta 9.

Luis Emilio Viera

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, opción Astronomía, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física, opción Astronomía.

Director:

Dr Tabaré Gallardo

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2023

Viera, Luis Emilio

Efectos seculares y resonantes generados por el hipotético Planeta 9. / Luis Emilio Viera. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2023. [XXIII](#), [123](#) p.: [il.](#); 29, 7cm.

Director:

Tabaré Gallardo

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Física, opción Astronomía, 2023.

Referencias bibliográficas: p. [117](#) – [123](#).

1. Mecánica Celeste, 2. Sistema Solar, 3. Resonancias, 4. Planeta 9. I. Gallardo, Tabaré, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física, opción Astronomía. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Lic. Julio Fernández

---

Dr. Gonzalo Tancredi

---

Dr. Tabaré Gallardo

---

Dr. Sebastián Bruzzone

---

Dr. Gustavo Sarasúa

---

Dra. Cecilia Mateu

Montevideo – Uruguay  
Noviembre de 2023

A Elizabeth, Ignacio y Nahuel.

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia y amigos por su apoyo en esta aventura. A mi tutor de tesis, Tabaré Gallardo, quien siempre estuvo disponible para responder una infinidad de preguntas, y a releer esta tesis una infinidad de veces hasta que estuvo finalizada.

A mis docentes de las materias de la maestría, sus cursos fueron realmente interesantes.

A Juan Pons, mi compañero de viaje en esta aventura. Su apoyo fue fundamental en muchos momentos del proceso.

Por último, a mis alumnos quienes son los que me motivan siempre a seguir superándome.

*Entonces entendí de que estaba  
hecha la ciencia: era paciencia.*

Richard Feynman

## RESUMEN

La hipótesis de la existencia de un planeta con alta excentricidad e inclinación, aún no descubierto, más allá de la órbita de Neptuno (denominado Planeta 9), fue desarrollada por los autores Batygin y Brown (2016) para explicar una serie de comportamientos dinámicos anómalos en objetos trans-neptunianos (TNO), como la existencia de objetos agrupados en su longitud del perihelio  $\varpi$ , el apartamiento de sus perihelios de la región de Neptuno, o la existencia de objetos con alta inclinación.

En esta tesis se analiza la validez y potencialidad de la utilización de modelos semianalíticos para el estudio de las dinámicas seculares y resonantes generadas por un perturbador con alta excentricidad e inclinación, y su aplicación a la hipótesis del Planeta 9.

Utilizando un modelo semianalítico desarrollado por Gallardo (2022) se estudia la dinámica secular sin limitaciones en  $(a, e, i)$ , demostrándose que un perturbador con alta excentricidad e inclinación es capaz de reproducir las agrupaciones en  $\varpi$  reportadas por Batygin y Brown (2016) para TNO con  $a \geq 250$  ua.

Mediante la utilización de un modelo semianalítico para la dinámica resonante, desarrollado por Gallardo (2020), se estudia las características de las resonancias generadas por el Planeta 9, las zonas donde interactúan con las resonancias de Neptuno, y la generación de zonas caóticas.

Utilizando integraciones numéricas se estudia la dinámica secular dentro de resonancias por un período similar a la edad del Sistema Solar. Se verifica que la dinámica resonante es capaz de generar agrupaciones en  $\varpi$  para los mismos valores que la dinámica secular. Se demuestra que la dinámica secular dentro de resonancias es capaz de generar partículas con alta inclinación para  $a > 250$  ua.

A lo largo de toda la tesis se verifican los resultados de los modelos semianalíti-

cos con integraciones numéricas exactas y mapas dinámicos.

Palabras claves:

Mecánica Celeste, Sistema Solar, Resonancias, Planeta 9.

## ABSTRACT

The hypothesis of the existence of a planet with high eccentricity and inclination, not yet discovered, beyond the orbit of Neptune (called Planet 9), was developed by the authors Batygin y Brown (2016) to explain a series of anomalous dynamic behaviors in trans-Neptunian objects (TNO), such as the existence of objects grouped in their perihelion longitude  $\varpi$ , the distance of their perihelions from the Neptune region, or the existence of objects with a high inclination .

This thesis analyzes the validity and potentiality of using semi-analytical models for the study of secular and resonant dynamics generated by a disturber with high eccentricity and inclination, and its application to the Planet 9 hypothesis.

Using a semi-analytic model developed by Gallardo (2022), the secular dynamics without limitations in  $(a, e, i)$  are studied, demonstrating that a disturber with high eccentricity and inclination is capable of reproducing the clusters in  $\varpi$  reported by Batygin y Brown (2016) for TNO with  $a \geq 250$  ua.

By using a semi-analytical model for resonant dynamics, developed by Gallardo (2020), the characteristics of the resonances generated by Planet 9 are studied, the areas where they interact with the resonances of Neptune, and the generation of chaotic zones.

Using numerical integrations, the secular dynamics within resonances for a period similar to the age of the Solar System are studied. It is verified that the resonant dynamics is capable of generating groupings in  $\varpi$  for the same values as the secular dynamics. It is shown that secular dynamics within resonances is capable of generating particles with high inclination for  $a > 250$  au.

Throughout the entire thesis the results of the semi-analytical models are verified with exact numerical integrations and dynamic maps.

Keywords:

Celestial Mechanics, Solar System, Resonances, Planet nine.

# Lista de figuras

- 1.1 Diagrama de las diferentes poblaciones que componen el cinturón de Kuiper. Los objetos del cinturón de Kuiper resonante poseen períodos commensurables con el de Neptuno. El cinturón de Kuiper clásico se compone de objetos entre las resonancias 2:1 y 3:2 ( $42 \text{ ua} \leq a \leq 48 \text{ ua}$ ), con Neptuno y poseen baja excentricidad. El disco disperso está compuesto por objetos con mayor excentricidad que los del disco clásico y distancias de perihelio  $30 \text{ ua} \leq q \leq 38 \text{ ua}$ . Los objetos del disco desacoplado poseen distancias de perihelio mayores a los del disco disperso. Los objetos con distancias de perihelio menor al semieje de Neptuno son conocidos como Centauros . Fuente Batygin et al. [2019](#). . . . . 2
- 1.2 El diagrama muestra las órbitas de los objetos con  $i > 50^\circ$  de la región transneptuniana, vista desde el plano de la eclíptica. Los Centauros se representan en color naranja, el objeto 2015 BP519 en rosa, y las órbitas de los objetos transneptunianos más próximos en cian. El gráfico polar (parte superior derecha), indica la posición de los vectores de momento angular de los objetos representados. La coordenada radial informa la inclinación de la órbita y el ángulo azimutal la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Fuente Batygin et al. [2019](#). . . . . 4

1.3	El diagrama muestra las órbitas de 14 objetos con $a \geq 250$ ua, $q \geq 30$ ua e $i < 40^\circ$ , desde la perspectiva del polo eclíptico norte. Todas las líneas apsidales están representadas con 250 ua de longitud para ilustrar la falta de uniformidad en sus orientaciones. Las órbitas en violeta corresponden a la población desacoplada de Neptuno. En verde se muestran las órbitas de las partículas que experimentan una dinámica caótica debido a interacciones con Neptuno. El gráfico polar (parte superior izquierda), indica las posiciones de los vectores de momento angular de los objetos representados. La coordenada radial informa la inclinación de la órbita y el ángulo azimutal la longitud del nodo ascendente $\Omega$ . Fuente Batygin et al. <a href="#">2019</a> . . . . .	7
1.4	Existen veintisiete objetos con $a \geq 250$ ua y $q \geq 30$ ua al 29 de julio de 2023 en la base del JPL(NASA) ( <a href="#">2023</a> ). En rojo se identifican los objetos representados en la figura <a href="#">1.3</a> por los autores Batygin et al. ( <a href="#">2019</a> ). Fuente:JPL(NASA) ( <a href="#">2023</a> ). . . . .	8
2.1	Diagrama de los elementos orbitales de un cuerpo en órbita kepleriana. Fuente Gallardo, <a href="#">2017</a> . . . . .	13
2.2	Curvas de nivel del Hamiltoniano de la ecuación <a href="#">2.22</a> en el espacio de fase $(e, \Delta\varpi)$ . En cada panel se etiqueta el semieje $a$ , de las partículas. Fuente Batygin y Morbidelli ( <a href="#">2017</a> ). . . . .	19
2.3	Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación <a href="#">2.27</a> para una partícula con valores de semieje $a : 250$ au y 450 au , generado por los planetas gigantes. . . . .	23
2.4	Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación <a href="#">2.27</a> para una partícula con valores de semieje $a : 250$ au y 450 au , generado por el Planeta 9. . . . .	24
2.5	Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación <a href="#">2.27</a> para una partícula con valores de semieje $a : 250$ au y 450 au , generado por los planetas gigantes y el Planeta 9. . . . .	25
2.6	Descripción del sistema jerárquico objeto de estudio. Donde $\mathbf{r}_{in} = a_1$ es el vector posición de $m_2$ con respecto a $m_1$ , y $\mathbf{r}_{out} = a_2$ es el vector posición del perturbador externo con respecto al centro de masa del binario central. Figura extraída de Naoz ( <a href="#">2016</a> ). . . . .	28

2.7	En rojo se observa la evolución generada por la aproximación octupolar, y en azul la generada por la aproximación cuadrupolar. Los paneles <b>a</b> y <b>c</b> muestran un régimen de alta inclinación ( $i \geq 39.2^\circ$ ), y los paneles <b>b</b> y <b>d</b> muestran un régimen de baja inclinación ( $i \leq 39.2^\circ$ ). Se observa en la aproximación octupolar la generación de picos y cambios de excentricidad extremos debido a los mecanismos dinámicos introducidos por los armónicos $(3\omega_1 - \Omega_1)$ y $(3\omega_1 + \Omega_1)$ . Fuente Naoz (2016). . . . .	30
2.8	Gráfico de $\epsilon(a)$ en el rango [50:400] ua. La teoría de Naoz es válida en el modelo estudiado en esta tesis para $a \leq 75$ ua. . . .	31
2.9	Comparación de la evolución dada por métodos semianalíticos del Hamiltoniano 2.34 (azul), y la dada por integración numérica de N cuerpos realizada con MERCURY (rojo), para una partícula con $a = 365.75$ ua, $e = 0.867$ , $i = 10^\circ$ y $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El acuerdo es excelente hasta los 50 millones de años donde se produce un encuentro cercano con el Planeta 9. Fuente Li et al. (2018). . . .	33
2.10	Evolución en el espacio $(r_p, \Delta\varpi)$ , de 500 partículas de prueba con los siguientes elementos orbitales iniciales: $30 \text{ ua} < r_p < 50 \text{ ua}$ , $i = 10^\circ$ , $\varpi = 180^\circ$ y $\omega$ distribuido uniformemente entre $0^\circ$ y $360^\circ$ , generadas por el Hamiltoniano 2.34. Cada panel está dividido en función de los semiejes de las partículas. La escala de colores muestra la inclinación de las partículas. Fuente Li et al. (2018). . . . .	34
2.11	Comparación de la evolución en el espacio $(q, \Delta\varpi, i)$ , dada por el modelo semianalítico (paneles de la izquierda), y una integración numérica (paneles de la derecha), para dos partículas con $a = 450$ ua y $550$ ua, e inclinación $i = 10^\circ$ . El modelo incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9. El Planeta 9 está en el mismo plano que los planetas gigantes. La escala de colores muestra la inclinación de las partículas. Las irregularidades se deben a la pérdida de validez de la teoría secular debido a encuentros cercanos. Condiciones iniciales: $e = 0.2$ , $\varpi = 180^\circ$ , $\Omega = 0^\circ$ . . . .	36

2.12	Comparación de la evolución dada por el modelo semianalítico, calculada con <code>evosecular</code> , con el integrador numérico <code>evorb</code> para una partícula en evolución regular en el modelo que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9. Se observa la concordancia entre ambas evoluciones. Condiciones iniciales de la partícula: $a = 180$ ua, $e = 0.3$ , $i = 10^\circ$ . . . . .	37
2.13	Ídem a la figura 2.12 para una partícula en evolución irregular debido a encuentros cercanos con el Planeta 9 en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9. Se observa la no concordancia entre ambas evoluciones. Condiciones iniciales de la partícula: $a = 210$ ua, $e = 0.2$ , $i = 10^\circ$ . . . . .	38
2.14	Comparación de las zonas de validez para las dos modelos analizados: considerando solo al Planeta 9 (panel de la izquierda), y al Planeta 9 más los planetas gigantes conocidos (panel de la derecha). La comparación de las figuras muestra que el potencial de los planetas gigantes brinda estabilidad a la evolución secular de las partículas. Se representa la ubicación de la partícula que se analizara en las figuras 2.15 y 2.16. . . . .	40
2.15	Evolución de una partícula ubicada en la zona no regular de la figura 2.14, para el modelo que incluye solo al Planeta 9. La figura muestra los espacios $(k, h)$ y $(q, p)$ , la variación relativa de la función perturbadora media $((R - R_{ini})/R_{ini})$ , y el criterio de validez $\frac{R}{R_{máx}}$ . La evolución de la partícula es no regular. Condiciones iniciales de la partícula: $a = 170$ ua, $e = 0.6$ , $i = 10^\circ$ . . . . .	41
2.16	Evolución de una partícula ubicada en la zona regular de la figura 2.14, para el modelo que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Se muestra una evolución regular. Condiciones iniciales de la partícula: $a = 170$ ua, $e = 0.6$ , $i = 10^\circ$ . . . . .	42
2.17	Espacio $(e, \varpi)$ para las partículas de la tabla 2.3, en un modelo que incluye únicamente al Planeta 9. Análisis semianalítico realizado con <code>evosecular</code> . El efecto de la perturbación del Planeta 9 genera grandes variaciones en $e$ , la cual resulta cualitativamente igual para todas las partículas. En esta región no se observa excitación de las órbitas en inclinación. . . . .	44

2.18	Espacio $(e, \varpi)$ para las partículas de la tabla 2.3, en un modelo que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Análisis semi-analítico realizado con <code>evosecular</code> . Los modos forzados modulan las variaciones en $e$ , pero a medida que el semieje $a$ crece, el modo forzado del planeta 9 produce una mayor variación en $e$ y excitación de las órbitas. . . . .	45
2.19	Espacio $(e, \varpi)$ para las partículas de la tabla 2.3, en un sistema que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Análisis realizado con el integrador numérico <code>evorb</code> . El efecto estabilizador de los modos forzados de los planetas gigantes es claro en esta evolución: existe una modulación en $e$ e $i$ . . . . .	46
2.20	Espacio $(e, \varpi)$ para partículas que inician con $a = 210$ ua, 250 ua, 290 ua y 300 ua. En cada panel se indica el rango de semieje considerado durante la evolución. El código de colores indica la inclinación de las partículas. Análisis realizado con el integrador numérico <code>evorb</code> . . . . .	47
2.21	Cuarenta objetos se encuentran en la base del JPL(NASA) (2023) con $a \geq 100$ ua y $q > 40$ ua al 29 de julio de 2023. En azul ( $q > 40$ ua), y rojo ( $30 \text{ ua} < q < 40 \text{ ua}$ ), se identifican los objetos estudiados en el trabajo de Batygin et al. (2019). Siendo $\langle \varpi \rangle \sim 60^\circ$ el valor medio de $\varpi$ , 8 de cada 9 objetos estables de los estudiados por Batygin et al. (2019) se encuentran en $\langle \varpi \rangle \pm 90^\circ$ . . . . .	48
2.22	Distribución en el espacio $(a, \varpi)$ , panel superior, y $(a, \Omega)$ , panel inferior, para los 25 objetos con $a > 100$ ua y $q > 40$ ua al 6 de agosto de 2022. Fuente JPL(NASA) (2022). El color de los puntos indica la $i$ de las partículas. . . . .	50
2.23	Evolución secular utilizando el código <code>evosecular</code> de los objetos representadas en la figura 2.22 que están dentro de la zona regular de la figura 2.14 (en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9), en un sistema constituido por el Planeta 9 (panel superior), y en un sistema que incluye el Planeta 9 y los planetas gigantes (panel inferior). . . . .	52

2.24	Integraciones numéricas con <code>evorb</code> para todos los objetos representadas en la figura 2.22, considerando un sistema que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. El panel superior muestra los objetos en la zona no regular de la figura 2.14 para el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9. El panel inferior muestra los objetos de la zona regular de la mencionada figura en el mismo modelo. . . . .	53
2.25	Comparación realizada con el integrador <code>evorb</code> para la evolución de los objetos representadas en la figura 2.22, considerando solo al Planeta 9 (panel superior), planetas gigantes (panel central), y planetas gigantes y Planeta 9 (panel inferior). . . . .	54
3.1	Evolución de $\Delta\varpi$ en función del semieje $a$ , de 400 partículas integradas durante 4000 millones de años considerando a los planetas gigantes y al Planeta 9 en el mismo plano. Las partículas fueron distribuidas inicialmente con $\Delta\varpi$ aleatorio, $50 \text{ ua} < a < 500 \text{ ua}$ , $30 \text{ ua} < q < 50 \text{ ua}$ , $i = 0^\circ$ . El color identifica el valor del semieje inicial y la transparencia la posibilidad de observación de la partícula (los puntos grises indican nula posibilidad de observación). Las partículas con $a \geq 250 \text{ ua}$ muestran un confinamiento alrededor de $\Delta\varpi = 180^\circ$ y se encuentran atrapadas en resonancias con el Planeta 9. Fuente: Batygin y Brown, 2016. . . . .	58
3.2	Mapas dinámicos para la evolución caótica debido a Neptuno, al Planeta 9, y a la superposición de sus efectos (caso plano). Las regiones blancas corresponden a zonas caóticas y las regulares están pintadas en negro. Los valores positivos corresponden a $\Delta\varpi = 0^\circ$ y los valores negativos a $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Fuente Hadden et al. 2018. . . . .	60
3.3	Representación de las resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9 entre $a = 185 \text{ ua}$ y $a = 192 \text{ ua}$ utilizando el código <code>superatlas</code> (Gallardo, 2020). La partícula test posee los parámetros detallados al inicio de esta subsección. La figura presenta el ancho de las resonancias estables para $f = 3.0$ . La excentricidad varía según lo indicado en el eje y. . . . .	64

3.4	Mapa dinámico representando $\log(\Delta a)$ en colores de la región modelada en la figura 3.3. Las anomalías medias de la partícula test y del Planeta 9 son $M = 180^\circ$ , y $M_9 = 180^\circ$ respectivamente. . . . .	65
3.5	Atlas de resonancias generado por el modelo semianalítico discutido en la sección 3.1, utilizando el código <code>superatlas</code> (Gallardo, 2020). Las resonancias generadas por Neptuno se dibujan en azul, y las generadas por el Planeta 9 en rojo. En el panel superior se modelan las resonancias con $f = 3.0$ , lo cual permite observar los anchos estables de las resonancias. En el panel inferior se modelan las resonancias con $f = 0.1$ , lo que permite estudiar los anchos resonantes máximos y la superposición de resonancias. Se dibujaron todas las resonancias con anchos superiores a $\Delta a = 0.001$ ua. La partícula test posee los parámetros detallados al inicio del capítulo para $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	66
3.6	Ídem que en figura 3.5 para $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Comparando esta figura con la figura 3.5 se observa que las resonancias del Planeta 9 cambian radicalmente con $\Delta\varpi$ . . . . .	67
3.7	Modelado de la zona donde coexisten las resonancias de Neptuno y el Planeta 9. El atlas se realizó definiendo $f = 0.1$ para poder observar los anchos máximos de la resonancias. Se observa que la zona donde se produce superposición de resonancias entre Neptuno y el Planeta 9 ocurre para $e \geq 0.7$ (en la figura 3.8 se identifican las mismas). . . . .	69
3.8	Análisis de la región comprendida para los semiejes $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$ , utilizando el código <code>superatlas</code> . Valores iniciales de la partícula test: $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El atlas se generó considerando $f = 0.1$ . . . . .	70
3.9	Mapas dinámicos de la región de la figura 3.8. El mapa dinámico del panel superior se realizó considerando solo al Planeta 9, y el mapa del panel inferior se considera al Planeta 9 y Neptuno. Valores iniciales de la partícula test: $\Delta\varpi = 180^\circ$ , $M = 0^\circ$ . . . . .	71

3.10	Atlas de resonancias generado por el modelo semianalítico discutido en la sección 3.1, utilizando el código <code>superatlas</code> para las resonancias del Planeta 9 en el rango $300 \text{ ua} < a < 306 \text{ ua}$ (panel superior), y $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$ (panel inferior), considerando $e_9 = 0$ (color azul), y $e_9 = 0.6$ (color rojo). El atlas se realizó definiendo $f = 3.0$ . . . . .	72
3.11	Resonancias de orden 1 (panel superior), orden 2 (panel del medio), y de orden 3 (panel inferior) para $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	73
3.12	Ídem que en figura 3.11 para $\Delta\varpi = 180^\circ$ . . . . .	74
3.13	Comparación del cambio del ancho resonante para las resonancias 7:6, 8:7 y 9:8 con el Planeta 9 para $\Delta\varpi = 0^\circ$ (panel de la izquierda), y $\Delta\varpi = 180$ (panel de la derecha) generada con el código <code>superatlas</code> (Gallardo, 2020). Los mapas fueron realizados considerando $f = 3.0$ . . . . .	75
3.14	Atlas de las resonancias generadas por el Planeta 9 en el intervalo $420 \text{ ua} \leq a \leq 460 \text{ ua}$ . Se destaca en el centro de la región la resonancia 2:1 con el Planeta 9. El atlas se realizó utilizando el código <code>superatlas</code> considerando $\Delta\varpi = 180^\circ$ . . . . .	76
3.15	Mapa dinámico resonancia 2:1 con el Planeta 9. La escala de colores indica la variación del semieje de la partícula en escala logarítmica. En el modelo la partícula se encuentra en el plano de Neptuno. El mapa dinámico se realizo con $M = 0^\circ$ y $M_9 = 90^\circ$ . . . . .	76
4.1	La figura muestra la evolución del ángulo crítico $\sigma$ y de los elementos orbitales $(a, e, i, \varpi, \Omega)$ , para una partícula atrapada en la resonancia 3:1 en dos escalas diferentes de tiempo (ver texto). Parámetros iniciales: $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	79
4.2	La figura muestra la evolución del ángulo crítico $\sigma$ para dos partículas integradas en las resonancias 2:1 y 5:2. En el panel superior la partícula se encuentra fuera de la resonancia 2:1 (condiciones iniciales: $M = 45^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ , $\sigma = -2\lambda_9 + \lambda + \varpi$ ). La partícula del panel inferior se encuentra dentro de la resonancia 5:2 (condiciones iniciales: $M = 124^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ , $\sigma = -5\lambda_9 + 2\lambda + 3\varpi$ ). . . . .	84

4.3	Panel superior: $a_{des}$ y $e_{m\acute{a}x}$ para las partículas integradas inicialmente con $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Panel inferior: $a_{des}$ y $e_{m\acute{a}x}$ para las partículas integradas inicialmente con $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El color en ambos paneles indica el tiempo de vida de las partículas. . . . .	85
4.4	Idem que en la figura 4.3 con la escala de colores indicando la máxima inclinación alcanzada por las partículas integradas. . . . .	86
4.5	Histograma de las 247 partículas capturas en resonancia con el Planeta 9 en los experimentos numéricos realizados con <b>evorb</b> . . . . .	87
4.6	Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 3:1. Parámetros iniciales: $M = 34^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	88
4.7	Panel superior: evolución de $a$ de la partícula de la figura 4.6 en el período de tiempo que se corresponde con las rápidas variaciones de $\varpi$ analizadas en la figura 4.6. Paneles 2 a 5 de la columna izquierda: evolución en el espacio $(a, \sigma)$ de la partícula de la figura 4.6. Cada panel indica el período de tiempo de la integración. Paneles 2 a 5 de la columna derecha: curvas de nivel del Hamiltoniano $\mathcal{H}(a, \sigma)$ , generadas con el código <b>Hsigmaa</b> (Gallardo, 2023), y realizadas para los tiempos que se corresponden con las líneas rojas verticales marcados en el panel superior. . . . .	91
4.8	Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante $\sigma = -4\lambda_p + \lambda + 3\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 4:1. Parámetros iniciales: $M = 0^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	93
4.9	Comparación de la evolución en el plano $(a, \sigma)$ , y las curvas de nivel del Hamiltoniano $\mathcal{H}(a, \sigma)$ para la partícula de la figura 4.8. . . . .	94
4.10	Descripción de los paneles: primera fila: evolución del ángulo crítico $\sigma$ . Segunda fila: evolución de $\Delta\varpi$ . Tercera fila: evolución de $e$ (en negro), y $i$ (en azul). Cuarta fila: diagrama $(h, k)$ de la evolución de la partícula. El color en este panel indica la inclinación de la órbita. . . . .	97
4.11	�dem a la figura 4.10 para una partícula en la resonancia 3:2. . . . .	99
4.12	�dem a la figura 4.10 para una partícula que entra y sale de la resonancia 9:8. . . . .	101
4.13	Diagrama $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$ para la partícula dentro de la resonancia 9:8 de la figura 4.12. El código de colores indica la inclinación de la órbita de la partícula. . . . .	102

4.14	Curvas de nivel del Hamiltoniano promediado semianalíticamente para el caso secular plano (panel superior), y resonante plano (panel inferior), realizadas por Beust, 2016. El semieje del Planeta 9 se modificó para el caso resonante, $a_9 = 665$ ua, para que la resonancia 3:2 esté ubicada en $a = 507$ ua, el semieje de Sedna. Las curvas de nivel del Hamiltoniano resonante se calcularon asumiendo nula la libración de $\sigma$ . . . . .	104
4.15	Proyección de la superficie tridimensional $\mathcal{H}(e, \varpi, \sigma)$ , en el plano $(e, \varpi)$ para la resonancia 2:1 con el Planeta 9. La línea negra muestra la evolución dada por una integración numérica, y la cruz roja marca las condiciones iniciales de la partícula. Fuente Pons y Gallardo, 2022. . . . .	105
4.16	Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante $\sigma = -7\lambda_9 + 6\lambda + \varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 7:6. Parámetros iniciales: $M = 30^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	106
4.17	Comparación de la evolución en el plano $(a, \sigma)$ , y las curvas de nivel del Hamiltoniano $\mathcal{H}(a, \sigma)$ para la partícula de la figura 4.16.	107
4.18	Diagrama $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$ para la partícula de la figura 4.16. . .	108
4.19	Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 3:1. Parámetros iniciales: $M = 34^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . . . . .	109
4.20	Ídem a la figura 4.17 para la partícula de la figura 4.19. Las curvas de nivel del Hamiltoniano fueron realizadas para $e = 0.64$ (panel superior), $e = 0.55$ (panel central) y $e = 0.6$ (panel inferior).	110
4.21	Diagrama $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$ para la partícula de la figura 4.16. . .	111
4.22	Espacio $(\varpi, q, i)$ para partículas atrapadas en las resonancias 4:3, 7:4, 8:7 y 9:8. Todas las partículas iniciaron con $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Se observa que las partículas aumentan su inclinación para $\Delta\varpi \sim 90^\circ$ y $\Delta\varpi \sim 270^\circ$ , existiendo un punto de equilibrio en $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El código de colores indica la inclinación de la partícula. . . . .	113

# Lista de tablas

2.1	Parámetros del Planeta 9. . . . .	18
2.2	Condiciones iniciales de los planetas gigantes y del Planeta 9 utilizados en este modelo. . . . .	39
2.3	Condiciones iniciales de los elementos orbitales de las partículas estudiadas con <i>evosecular</i> . Las órbitas de las partículas estudiadas se encuentran inicialmente en el plano de los planetas gigantes e inclinadas con respecto a la órbita del Planeta 9. . . .	43
2.4	Parámetros de los objetos trasneptunianos con $a > 100$ ua y $q > 40$ ua al 29 de julio de 2023. Fuente JPL(NASA) (2023). . . .	49
3.1	Comparación de períodos resonantes de Neptuno y el Planeta 9. . . . .	67
4.1	Parámetros de Neptuno y del Planeta 9 utilizados en este modelo. . . . .	80
4.2	Condiciones iniciales de las partículas test en cada resonancia y para cada valor del ángulo crítico $\sigma$ , y anomalía media $M$ , para $\Delta\varpi = 0^\circ$ . La primera columna detalla las resonancias con el Planeta 9. La segunda columna indica el semieje de una partícula que se encuentra en el valor nominal de la resonancia $a_0$ . Las partículas están ordenadas en orden creciente de $a$ . La tercera columna identifica los diferentes ángulos críticos $\sigma_i$ , para cada resonancia con las condiciones iniciales consideradas. La última columna indica el valor de la anomalía media $M$ , obtenida como se detallo en el texto previo. . . . .	82
4.3	Ídem que en la tabla 4.2 para $\Delta\varpi = 180^\circ$ . . . . .	83
4.4	Partículas con $a_{des} > 10$ ua cuya distancia de perihelio $q$ alcanza el interior del Sistema Solar en algún momento de la evolución. . . . .	85

# Tabla de contenidos

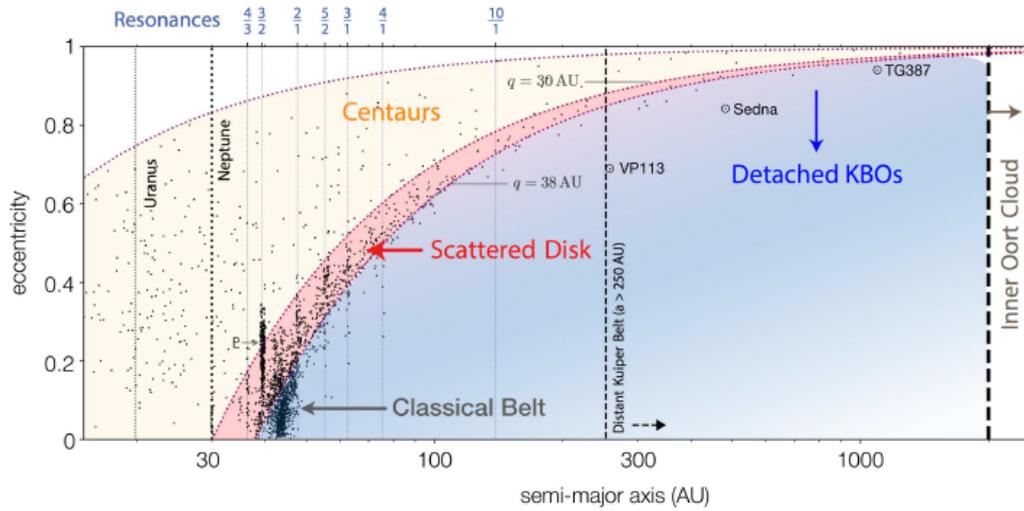
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XXI
Lista de símbolos	XXI
Notaciones	XXI
Lista de siglas	XXI
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Dinámica secular.</b>	<b>11</b>
2.1 Modelo general. . . . .	11
2.2 Caso coplanar . . . . .	15
2.2.1 Resultados previos. . . . .	18
2.2.2 Nuestro modelo coplanar. . . . .	20
2.2.3 Resultado de nuestro modelo coplanar. . . . .	22
2.3 Caso espacial. . . . .	27
2.3.1 Modelo analítico de Naoz para el caso espacial. . . . .	27
2.3.2 Teorías semianalíticas espaciales. . . . .	31
2.3.3 Nuestro modelo espacial . . . . .	34
2.3.4 Resultados de nuestro modelo. . . . .	38
2.3.5 Estudio de concentraciones en $\Delta\varpi$ . . . . .	46
2.3.6 Estudio de la población conocida. . . . .	47
2.3.7 Conclusiones. . . . .	55
<b>3 Dinámica resonante.</b>	<b>56</b>
3.1 Modelo semianalítico espacial . . . . .	61

3.2	Resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9. . . . .	63
3.2.1	Red de resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9.	65
3.2.2	Resonancias de bajo orden con el Planeta 9. . . . .	73
3.2.3	Conclusiones. . . . .	77
<b>4</b>	<b>Evolución secular resonante.</b>	<b>78</b>
4.1	Metodología utilizada. . . . .	79
4.2	Caso con $\Delta\varpi$ circulando. . . . .	87
4.3	Caso con $\Delta\varpi$ oscilando. . . . .	103
4.3.1	Conclusiones. . . . .	111
<b>5</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>114</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
	<b>Glosario</b>	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Desde el descubrimiento del primer objeto transneptuniano (Jewitt y Luu, [1993](#)), se han descubierto miles de cuerpos helados en el hoy denominado cinturón de Kuiper (Fernandez, [1980](#)), en su mayoría con diámetros menores a 1000 km, y un número considerable de planetas enanos (Batygin et al. [2019](#)). Actualmente la población de objetos transneptunianos se clasifica en cuatro poblaciones: el cinturón de Kuiper resonante, el cinturón clásico, el disco disperso y el disco desacoplado (ver figura [1.1](#)).



**Figura 1.1:** Diagrama de las diferentes poblaciones que componen el cinturón de Kuiper. Los objetos del cinturón de Kuiper resonante poseen períodos commensurables con el de Neptuno. El cinturón de Kuiper clásico se compone de objetos entre las resonancias 2:1 y 3:2 ( $42 \text{ ua} \leq a \leq 48 \text{ ua}$ ), con Neptuno y poseen baja excentricidad. El disco disperso está compuesto por objetos con mayor excentricidad que los del disco clásico y distancias de perihelio  $30 \text{ ua} \leq q \leq 38 \text{ ua}$ . Los objetos del disco desacoplado poseen distancias de perihelio mayores a los del disco disperso. Los objetos con distancias de perihelio menor al semieje de Neptuno son conocidos como Centauros . Fuente Batygin et al. [2019](#).

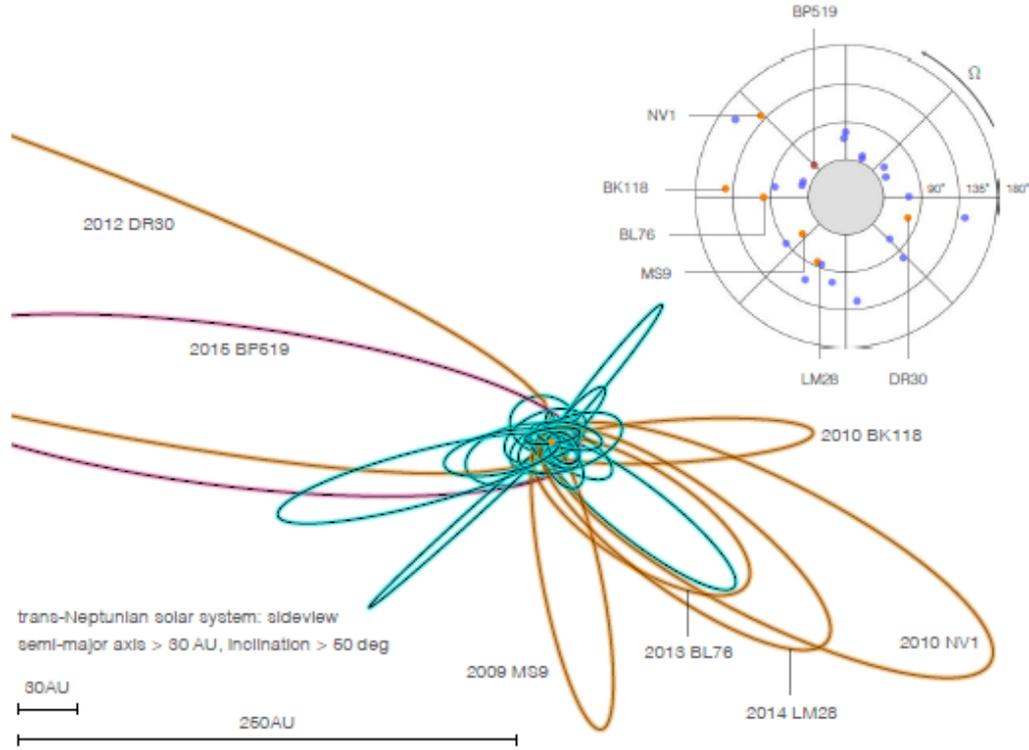
Los objetos del cinturón de Kuiper resonante (incluyendo a los Plutinos), están atrapados en resonancias de movimiento medio con Neptuno. Analizando las inusuales características de la órbita de Plutón (el cual posee alta excentricidad e inclinación, y se encuentra atrapado en la resonancia 3:2 con Neptuno), Malhotra, [1993](#) demostró que Plutón adquirió su órbita en las últimas etapas del proceso de formación planetaria, cuando los planetas gigantes migraron en sus órbitas (Fernandez y Ip, [1984](#)). Al migrar Neptuno hacia afuera pudo atrapar planetesimales como Plutón (originalmente en órbitas cuasi circulares), y capturarlos en resonancias. Posteriormente Malhotra, [1995](#) sugirió que este proceso no fue exclusivo de Plutón, sino que involucró a la mayoría de los objetos del cinturón de Kuiper resonante, los cuales poseen valores de semiejes:  $30 \text{ ua} \leq a \leq 50 \text{ ua}$ . Estos objetos se encuentran en su mayoría en resonancia con Neptuno (particularmente en las resonancias 2:1 y 3:2), y poseen excentricidades grandes.

El cinturón de Kuiper clásico está constituido por cuerpos entre las resonancias

2:1 y 3:2 con Neptuno ( $42 \text{ ua} \leq a \leq 48 \text{ ua}$ ), que no están en resonancia con Neptuno. Esta población se divide clásicamente en fría para los objetos con pequeña inclinación  $i \leq 4^\circ$ , y caliente para las partículas con  $i > 4^\circ$  (Jewitt et al. 2008). Si el cinturón de Kuiper solo estuviera constituido por estas poblaciones no existiría evidencia gravitacional de algún perturbador masivo en la región transneptuniana (Batygin et al. 2019).

Los objetos del disco disperso poseen distancias de perihelio  $q$  próximas a la órbita de Neptuno ( $q \sim 30 - 38 \text{ ua}$ ), y semiejes que van desde las inmediaciones de Neptuno a miles de ua, conectando al cinturón de Kuiper con la nube de Oort (Gomes et al. 2008). Algunos objetos de esta población poseen distancias de perihelio fuera del alcance gravitacional de Neptuno ( $q \geq 40 \text{ ua}$ ), y constituyen el denominado disco desacoplado. La existencia dinámica de estos objetos resulta muy interesante debido a que no pudieron generarse por las interacciones gravitacionales con Neptuno (su distancia de perihelio se encuentra alejada de la zona de dominio gravitacional de Neptuno), y para explicar su existencia dinámica se requiere considerar la existencia de un perturbador gravitacional externo (Morbidelli et al. 2008).

Si bien los objetos transneptunianos con inclinaciones superiores a  $50^\circ$  no son un resultado esperable del proceso de formación y evolución del Sistema Solar (Morbidelli et al. 2007, Levison et al. 2011, Nesvorný, 2015, J. C. Becker et al. 2018), existen objetos con altas inclinaciones, entre los que se encuentran algunos Centauros y objetos transneptunianos (ver figura 1.2).



**Figura 1.2:** El diagrama muestra las órbitas de los objetos con  $i > 50^\circ$  de la región transneptuniana, vista desde el plano de la eclíptica. Los Centauros se representan en color naranja, el objeto 2015 BP519 en rosa, y las órbitas de los objetos transneptunianos más próximos en cían. El gráfico polar (parte superior derecha), indica la posición de los vectores de momento angular de los objetos representados. La coordenada radial informa la inclinación de la órbita y el ángulo azimutal la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Fuente Batygin et al. 2019.

Existen objetos transneptunianos (entre los que se encuentran algunos Centauros), con distancias de perihelio inferiores a la órbita de Neptuno. Algunos de estos objetos poseen valores de inclinación elevados llegando incluso a ser retrógrados. Esta distribución de inclinaciones no puede explicarse por las interacciones gravitacionales de los planetas gigantes conocidos, y requiere otra fuente dinámica adicional (Batygin et al. 2019). Entre los objetos descubiertos, con alta inclinación en la región transneptuniana, el objeto 2015 BP 519 (J. C. Becker et al. 2018), es un objeto del disco disperso con semieje  $a \sim 450$  ua, excentricidad  $e \sim 0.92$ , distancia de perihelio  $q \sim 36$  ua e inclinación  $i \sim 54^\circ$ . En su trabajo, J. C. Becker et al. 2018 analizan la evolución dinámica de este objeto demostrando que bajo la influencia gravitacional de los planetas gigantes conocidos 2015 BP 519 no pudo obtener la inclinación

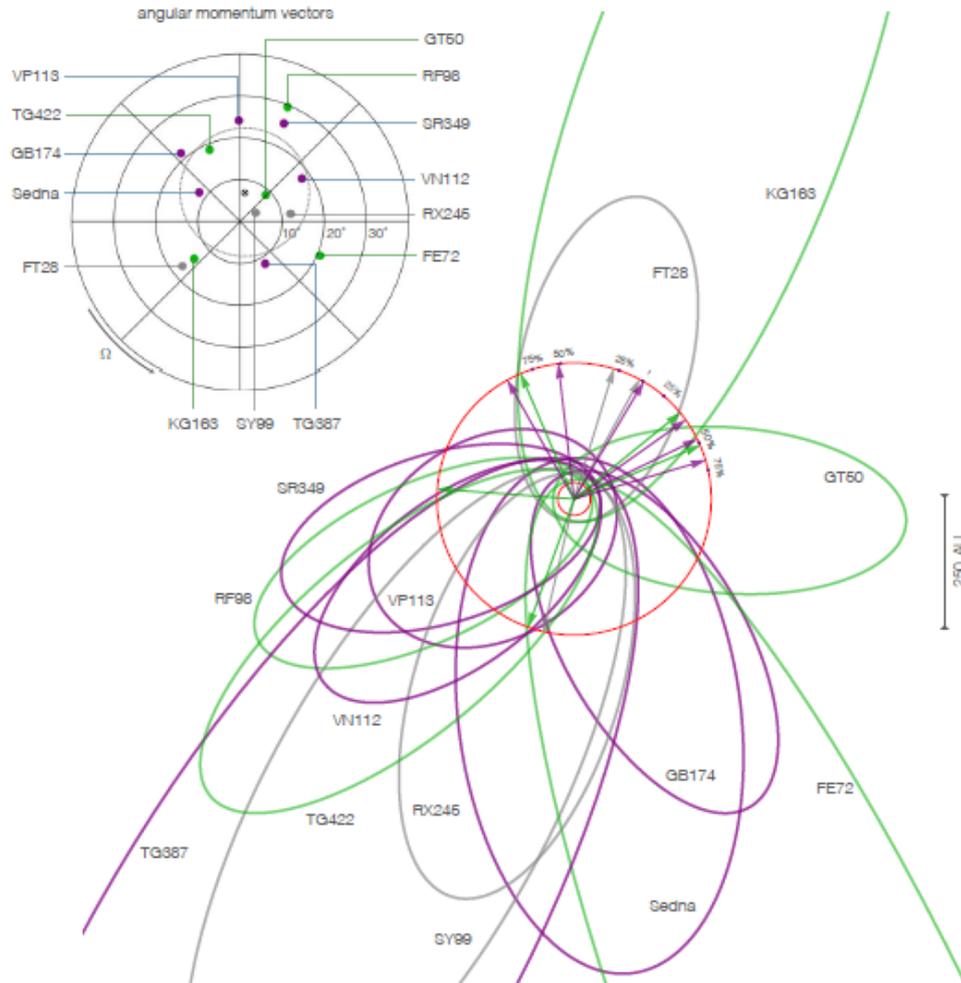
que posee en la actualidad. Este resultado es consistente con el obtenido por Nesvorný, 2015 quien analizó mediante simulaciones numéricas el proceso de formación y evolución del cinturón de Kuiper a partir de un disco dinámicamente frío durante el proceso de migración de Neptuno. En sus resultados los valores máximos que alcanzan las inclinaciones de las partículas no superan los  $40^\circ$ .

Buscando aclarar los comportamientos dinámicos que no pueden ser explicados con la configuración actual del Sistema Solar varios autores han propuesto la existencia de diferentes perturbadores más allá de Neptuno.

Brunini y Melita, 2002 sugirieron la existencia de un planeta de tamaño similar a Marte con semieje  $a \sim 60$  ua para explicar la baja densidad de objetos con semiejes  $a \geq 48$  ua, pero esta idea es descartada por Melita et al. 2004 al realizar un análisis numérico del problema y determinar que ningún conjunto de parámetros es capaz de producir resultados coincidentes con las observaciones. El descubrimiento de Sedna (Brown et al. 2004), con una distancia de perihelio  $q = 76$  ua, semieje  $a = 532,3$  ua, excentricidad  $e = 0.8565$  e inclinación  $i = 11.9^\circ$ , alejado del alcance gravitacional de Neptuno, llevó a que se sugirieran varias hipótesis para explicar su origen dinámico. Brown et al. 2004 propuso la existencia de un planeta de masa terrestre con semieje  $a \sim 70$  ua como posible perturbador gravitacional responsable del desacople del perihelio de Neptuno de Sedna. En cambio Gomes et al. 2006 sugirió (basado en los resultados de una extensa serie de simulaciones numéricas), que la órbita de Sedna podría explicarse con un planeta mucho más masivo (con un rango de masa entre Neptuno y Júpiter), y un semieje mucho mayor a la propuesta de Brown et al. 2004:  $100 \text{ ua} \leq a \leq 1000 \text{ ua}$ . Morbidelli y Levison, 2004 propusieron que una posible explicación al desprendimiento de Sedna de la órbita de Neptuno, surge de las perturbaciones debido al pasaje cercano de estrellas dentro del cúmulo de nacimiento del Sol (Fernández y Brunini, 2000).

Con el descubrimiento del segundo objeto con perihelio desacoplado de Neptuno (2012 VP 113, con  $q \sim 80$  ua, S. Sheppard y Trujillo, 2014), y la observación de que todos los objetos conocidos con  $a \geq 150$  ua tienen sus argumentos de perihelio agrupados con  $\omega \sim 0^\circ$ , S. Sheppard y Trujillo, 2014 propusieron la existencia de un planeta con varias masas terrestres y  $a \sim 200$  ua, que mediante el efecto Zeipel-Lidov-Kozai es capaz de mantener alineados los argumentos del perihelios de estos objetos. Esta hipótesis presenta dos problemas: por un lado no fueron capaces de encontrar en sus simulaciones un planeta que sea ca-

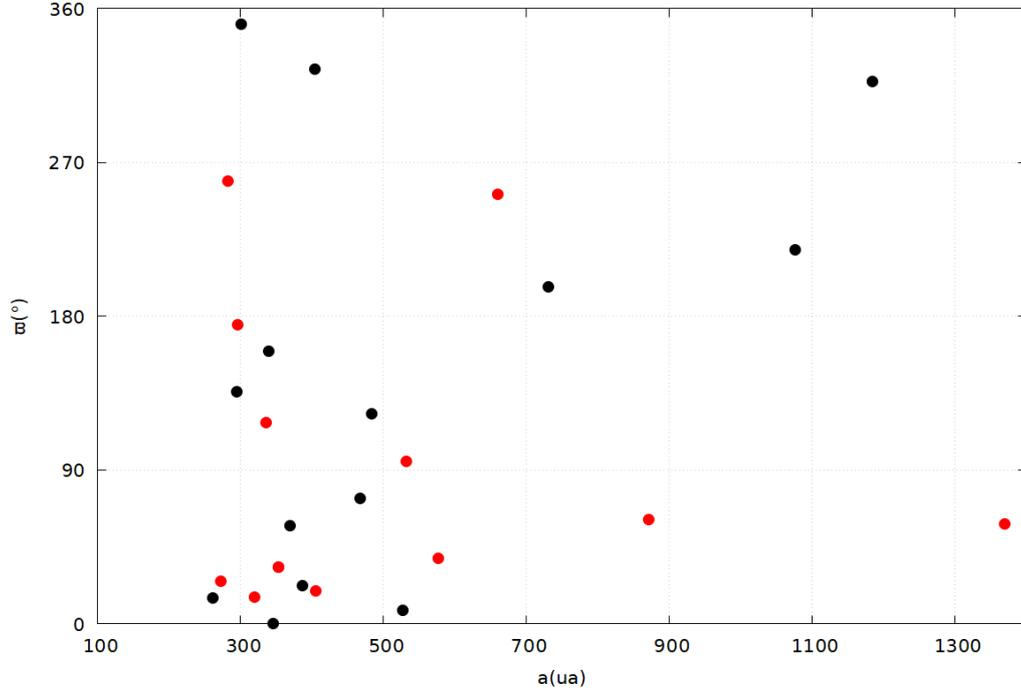
paz de agrupar el perihelio de todos los objetos con semieje:  $150 \text{ ua} \leq a \leq 500 \text{ ua}$ . Esto motiva que sean necesarios varios planetas cuidadosamente colocados para que el mecanismo de Zeipel-Lidov-Kozai sea capaz de agrupar el argumento de perihelio de todos los objetos estudiados (de la Fuente Marcos y de la Fuente Marcos, 2016). La segunda dificultad se debe a que el mecanismo de Zeipel-Lidov-Kozai es capaz de generar libraciones alrededor de  $\omega \sim 0^\circ$  y  $\omega \sim 180^\circ$ , pero no se encuentran objetos alineados con  $\omega \sim 180^\circ$ . Dado que varios trabajos (de la Fuente Marcos y de la Fuente Marcos, 2014, Gomes et al. 2015, Batygin y Brown, 2016, S. S. Sheppard y Trujillo, 2016, Brown, 2017), demostraron que estos agrupamientos no se deben a sesgos observacionales, se buscaron otras posibles explicaciones a estos agrupamientos. Trujillo y Sheppard, 2014 propusieron que un encuentro estelar cercano podría ser capaz de alinear los argumentos de perihelios de los objetos analizados. Una alternativa a la propuesta de Trujillo y Sheppard (la cual involucra la existencia de varios planetas cuidadosamente ubicados en la región transneptuniana, y un pasaje estelar para explicar las observaciones), surgió cuando Batygin y Brown, 2016 descubrieron que estos objetos no solo poseían un agrupamiento en su argumento del perihelio, sino que se encuentran agrupados en el espacio físico, en otras palabras existe un agrupamiento en su longitud del perihelio  $\varpi$  (ver figura 1.3). Este punto resulta clave debido a que el efecto de las perturbaciones generadas por los planetas gigantes genera precesión en la longitud del perihelio (Murray y Dermott, 2000), motivo por el cual el confinamiento apsidal observado no se mantendría sin un perturbador gravitacional externo.



**Figura 1.3:** El diagrama muestra las órbitas de 14 objetos con  $a \geq 250$  ua,  $q \geq 30$  ua e  $i < 40^\circ$ , desde la perspectiva del polo eclíptico norte. Todas las líneas apsidales están representadas con 250 ua de longitud para ilustrar la falta de uniformidad en sus orientaciones. Las órbitas en violeta corresponden a la población desacoplada de Neptuno. En verde se muestran las órbitas de las partículas que experimentan una dinámica caótica debido a interacciones con Neptuno. El gráfico polar (parte superior izquierda), indica las posiciones de los vectores de momento angular de los objetos representados. La coordenada radial informa la inclinación de la órbita y el ángulo azimutal la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Fuente Batygin et al. 2019.

Con el descubrimiento de un número cada vez mayor de objetos en la región transneptuniana, las concentraciones halladas por los autores Batygin y Brown (2016) han sido puestas en duda (ver por ejemplo Napier et al. (2021)). La figura 1.4 muestra 27 objetos con  $a \geq 250$  ua y  $q \geq 30$  ua al 29 de julio

de 2023 en la base del JPL(NASA) (2023) (en rojo se identifican los objetos representados en la figura 1.3). Con nuevos descubrimientos se podrá definir si las concentraciones son significativas.



**Figura 1.4:** Existen veintisiete objetos con  $a \geq 250$  ua y  $q \geq 30$  ua al 29 de julio de 2023 en la base del JPL(NASA) (2023). En rojo se identifican los objetos representados en la figura 1.3 por los autores Batygin et al. (2019). Fuente:JPL(NASA) (2023).

La propuesta de Batygin y Brown, 2016 consistió en considerar la existencia de un planeta con varias masas terrestres, alta excentricidad e inclinación, y un semieje  $a \sim 700$  ua. En la actualidad se conoce a este planeta como Planeta 9, siendo una de las principales líneas de investigación sobre la estructura y evolución dinámica del cinturón de Kuiper. Los parámetros actuales para este hipotético planeta son (Batygin et al. 2019):  $m_9 \sim 5 - 10 m_{\oplus}$ ,  $a_9 \sim 400 - 800$  ua,  $e_9 \sim 0.2 - 0.5$ ,  $i_9 \sim 15 - 25^\circ$ . En esta tesis utilizaremos los parámetros utilizados por Batygin y Morbidelli, 2017:  $m_9 \sim 5 m_{\oplus}$ ,  $a_9 \sim 700$  ua,  $e_9 \sim 0.6$ ,  $i_9 \sim 10^\circ$ .

Si bien diversos trabajos (Batygin y Brown, 2016, Beust, 2016, Batygin y Morbidelli, 2017 Millholland y Laughlin, 2017, J. Becker et al. 2017, Hadden et al. 2018, Li et al. 2018, Batygin et al. 2019), respaldan la hipótesis del Planeta 9, los mecanismos dinámicos responsables de los fenómenos dinámicos anómalos

(aquellos fenómenos dinámicos que no pueden explicarse con la actual estructura conocida del Sistema Solar), no resultan claros. Por ejemplo, en el trabajo antes citado de Beust, no es posible identificar si el agrupamiento observado en la longitud del perihelio de las partículas se debe a efectos seculares o resonantes generados por el Planeta 9.

En esta tesis se analizan las características de la dinámica generada por un perturbador externo con alta excentricidad e inclinación, aplicando los resultados obtenidos a la hipótesis del Planeta 9.

Estudiar la dinámica generada por un planeta perturbador consiste en obtener analíticamente el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  que incluye a la función perturbadora  $R$ , dado un modelo determinado y resolver las ecuaciones canónicas (Tremaine, 2023, capítulo 4).

Los desarrollos analíticos de la función perturbadora  $R$  se realizan en serie de semiejes  $a$ , excentricidad  $e$ , e inclinación  $i$  (Murray y Dermott, 2000), siendo posible realizar desarrollos en función del cociente de los semiejes  $\frac{a}{a_p}$  o  $\frac{a_p}{a}$ , los cuales permiten estudiar altas excentricidades e inclinaciones siempre que dicho cociente sea muy pequeño. Son posibles además desarrollos en  $e$  e  $i$  pero solo son válidos para valores pequeños de  $e$  e  $i$ .

Estas limitaciones y el hecho de que los planetas gigantes conocidos en el Sistema Solar poseen órbitas coplanares y casi circulares, ha llevado a que en la literatura no se ha estudiado de forma extensa la dinámica generada por un perturbador con alta excentricidad e inclinación. En esta tesis se utiliza un método semianalítico (Gallardo (2022)), para el cálculo de la función perturbadora, lo que permite calcular la misma sin limitaciones en los valores de  $a$ ,  $e$  e  $i$ .

En el capítulo 2 se realiza el desarrollo analítico que lleva a obtener el Hamiltoniano secular en el caso plano y espacial. Se estudia el modelo semianalítico que permite obtener la función perturbadora secular  $R_{sec}$ , y se comparan los principales resultados teóricos con los del modelo presentado. A continuación se estudia y delimita la zona en el espacio  $(a, e)$  donde el modelo es aplicable. Finalmente se comparan los resultados con integraciones numéricas exactas que validan los resultados del modelo semianalítico utilizado.

En el capítulo 3 se estudia la dinámica resonante. Se inicia con una recopilación de los principales resultados teóricos existentes en la literatura referidos a la dinámica resonante generada por el Planeta 9. Se realiza la obtención del Hamiltoniano resonante en forma analítica y el desarrollo del modelo se-

mianalítico (Gallardo, 2020), que se utiliza en ese capítulo para el análisis de la dinámica resonante generadas por Neptuno y el Planeta 9 . Se identifican las zonas donde las resonancias de Neptuno y el planeta 9 coexisten y de que forma interactúan. Se estudian las estructuras y anchos resonantes para varias resonancias. Utilizando mapas dinámicos se validan los resultados del modelo. En el capítulo 4 se estudia la evolución secular dentro de las resonancias utilizando integraciones numéricas. Partiendo de un análisis de los principales resultados teóricos, se plantean los resultados de integrar 420 partículas en las resonancias analizadas en el capítulo 3. Se analiza la evolución de las partículas que permanecen en resonancia por un periodo superior a 1000 millones de años. El estudio se divide en función del comportamiento de  $\varpi$ , analizándose los casos en donde  $\varpi$  circula y en los casos donde  $\varpi$  oscila, en lo que se conoce como resonancia de corrotación apsidal o ACR. Finalmente, en el capítulo 5 se detallan las conclusiones.

# Capítulo 2

## Dinámica secular.

### 2.1. Modelo general.

La existencia de un noveno planeta con alta excentricidad e inclinación en la región trasneptuniana puede explicar el comportamiento anómalo observado en el cinturón de Kuiper distante, pero esas características que lo diferencian de los demás planetas del Sistema Solar convierten su estudio en muy difícil. El Hamiltoniano para una partícula bajo los efectos de un planeta perturbador con órbita fija es:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2a} - R \quad (2.1)$$

donde  $\mu = k^2 M_\odot$ , siendo  $k = 0,01720209895$  la constante gravitacional de Gauss <sup>1</sup>,  $M_\odot$  la masa del Sol, y  $a$  es el semieje mayor de la partícula.

$R$  es la función perturbadora debido al efecto gravitacional del planeta perturbador sobre la partícula.

El Hamiltoniano de la ecuación 2.1 es el Hamiltoniano puramente kepleriano (bajo los efectos únicamente de un cuerpo central), más una perturbación generada por el planeta perturbador (o planetas en caso de existir más de uno). Es en el desarrollo de la función perturbadora donde reside la dificultad del estudio de este Hamiltoniano. La función perturbadora de un planeta sobre una partícula en coordenadas rectangulares es (ver Roy, 2005):

$$R = k^2 m_p \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p}{r_p^3} \right) \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup> $k^2 = \mathcal{G}$  en unidades de masa solar, ua y día solar medio.

Donde  $m_p$  es la masa del planeta perturbador,  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_p$  son los vectores posición de la partícula y del planeta, donde sus módulos están dados por:

$$\mathbf{r} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (2.3)$$

y

$$\mathbf{r}_p = \frac{a_p(1 - e_p^2)}{1 + e_p \cos(f_p)} \quad (2.4)$$

donde  $a$  y  $a_p$  son los semiejes mayores,  $e$  y  $e_p$  las excentricidades, y  $f$  y  $f_p$  las anomalías verdaderas <sup>1</sup> de la partícula y del planeta respectivamente.

Para resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento para la partícula es necesario escribir el Hamiltoniano 2.1 en variables canónicas. Esto se logra utilizando las variables canónicas de Delaunay.

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad M \quad (2.5)$$

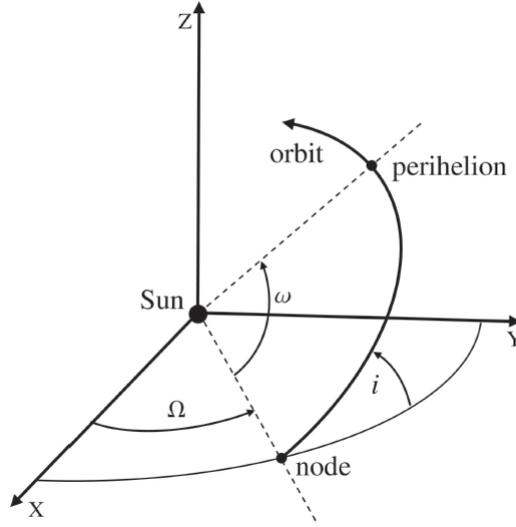
$$G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad \omega \quad (2.6)$$

$$H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos(i), \quad \Omega \quad (2.7)$$

donde  $i$  es la inclinación,  $\omega$  el argumento del perihelio,  $\Omega$  la longitud del nodo ascendente y  $M$  la anomalía media de la partícula (ver figura 2.1).  $L$ ,  $G$  y  $H$  son los momentos conjugados de  $M$ ,  $\omega$  y  $\Omega$  respectivamente ( $G$  es el momento angular total de la partícula, y  $H$  es la componente  $z$  de dicho momento angular.).

---

<sup>1</sup>Donde  $\text{tg}(f/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tg}(E/2)$ , siendo  $E$  la anomalía excéntrica que se deduce de la ecuación de Kepler:  $M = E - e \sin(E)$ , donde  $M$  es la anomalía media.



**Figura 2.1:** Diagrama de los elementos orbitales de un cuerpo en órbita kepleriana. Fuente Gallardo, 2017.

El Hamiltoniano en variables canónicas de Delaunay queda escrito de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R(L, G, H, M, \omega, \Omega, \lambda_p(t)) \quad (2.8)$$

donde  $\lambda_p(t)$ <sup>1</sup> es la longitud media del planeta perturbador y define su posición espacial en la órbita.

Este Hamiltoniano si bien representa la energía total de la partícula no es constante ya que depende del tiempo a través de  $\lambda_p(t)$ . Es posible eliminar la dependencia temporal pasando al espacio de fase extendido al definir a  $\lambda_p$  como una nueva variable y a  $\Lambda_p$  como su momento conjugado. El nuevo Hamiltoniano resultante es:

$$\mathcal{H}' = -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{d\lambda_p}{dt} \Lambda_p - R(L, G, H, M, \omega, \Omega, \lambda_p) \quad (2.9)$$

donde  $\frac{d\lambda_p}{dt}$  es el movimiento medio ( $n_p$ ), del planeta perturbador.

Este nuevo Hamiltoniano es constante ya que no depende del tiempo, sino de la nueva variable introducida y de su momento conjugado (esto es lo que se gana aumentando en un grado de libertad al Hamiltoniano).

En el caso más general, donde el nodo y el perihelio del planeta perturbador

---

<sup>1</sup> $\lambda = M + \varpi = M + \omega + \Omega$

también varíen con el tiempo, es posible encontrar un nuevo Hamiltoniano que sea constante pasando a un espacio de fase extendido de forma similar a lo realizado para obtener el Hamiltoniano 2.9.

Por conveniencia pasaremos a las coordenadas canónicas de Poincare (necesarias para sustituir el argumento del perihelio  $\omega$  por la longitud del perihelio  $\varpi$ ), a través de la siguiente transformación de contacto:

$$\Lambda\lambda + \Gamma\gamma + Zz = LM + G\omega + H\Omega \quad (2.10)$$

donde las coordenadas de Poincare resultan ser:

$$(\lambda, \gamma, z) = (M + \omega + \Omega, -\varpi, -\Omega) \quad (2.11)$$

y sus momentos conjugados son:

$$(\Lambda, \Gamma, Z) = (L, L - G, G - H) \quad (2.12)$$

con lo cual el Hamiltoniano de una partícula perturbada por un planeta en órbita fija (ecuación 2.8), en variables canónicas de Poincare queda:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2} - R(\Lambda, \Gamma, Z, \lambda, \gamma, z, \lambda_p(t)) \quad (2.13)$$

Finalmente pasando al espacio de fase extendido para el caso general donde la longitud media  $\lambda_p(t)$ , la longitud del perihelio  $\varpi_p(t)$ , y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_p(t)$ , son dependientes del tiempo, se llega a:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + n_p\Lambda_p + \dot{\gamma}_p\Gamma_p + \dot{z}_pZ_p \quad (2.14)$$

donde  $\Gamma_p$  y  $Z_p$  son los momentos conjugados de  $\gamma_p$  y  $z_p$  (expresiones que si bien son desconocidas inicialmente, pueden obtenerse utilizando transformaciones de los marcos de referencia elegidos para  $\varpi$  y  $\Omega$ , ver apéndice B Batygin et al. 2019). El Hamiltoniano 2.14 posee tres grados más de libertad que el Hamiltoniano 2.13, pero resulta ser independiente del tiempo ya que solo depende de las nuevas variables  $\lambda_p$ ,  $\gamma_p$  y  $z_p$ , y de sus momentos conjugados  $\Lambda_p$ ,  $\Gamma_p$  y  $Z_p$ . Para el estudio de la evolución secular de la partícula se promedia en los ángulos rápidos  $\lambda$  y  $\lambda_p$ , con lo cual la función perturbadora resulta ser independiente

de estas variables.

$$R = R(\Lambda, \Gamma, Z, \gamma, z, \gamma_p, z_p) \quad (2.15)$$

Aplicando las ecuaciones canónicas (ver Brouwer y Clemence (1961)) y derivando el Hamiltoniano  $\mathcal{H}'$ , respecto a  $\lambda_p$  se obtiene

$$\frac{d\Lambda_p}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_p} = 0 \quad (2.16)$$

resultado que muestra que el momento conjugado,  $\Lambda_p$ , de  $\lambda_p$  es constante, y el término  $n_p \Lambda_p$  en 2.14 también lo es y puede eliminarse del Hamiltoniano. Con esto llegamos al Hamiltoniano secular

$$\mathcal{H}_{sec} = \mathcal{H} + \dot{\gamma}_p \Gamma_p + \dot{z}_p Z_p \quad (2.17)$$

Reescribiendo el Hamiltoniano secular en coordenadas orbitales ( $a, e, i, \varpi, \Omega$ ), se llega a :

$$\mathcal{H}_{sec} = \mathcal{H} - \dot{\varpi}_p \Gamma_p - \dot{\Omega}_p Z_p \quad (2.18)$$

## 2.2. Caso coplanar

Debido a la complejidad que implica el estudio del caso espacial, varios autores (Batygin y Brown, 2016, Beust, 2016, Batygin y Morbidelli, 2017, Batygin et al. (2019)), han iniciado el estudio del problema simplificando la dinámica al caso coplanar.

En el caso coplanar el Hamiltoniano 2.18 es independiente de la longitud del nodo  $\Omega$ , con lo cual podemos simplificar dicha ecuación:

$$\mathcal{H}_{sec} = \mathcal{H} - \dot{\varpi}_9 \Gamma_9 \quad (2.19)$$

Conocido el valor de  $\dot{\varpi}_9$  (ver ecuación 2.21), solo es necesario conocer el valor de  $\Gamma_9$  para obtener una solución general.

Es posible obtener una expresión para  $\Gamma_9$  (ver apéndice B Batygin et al. (2019)), realizando cambios de variables que generen una transformación del marco de referencia elegido para medir  $\varpi$ , de forma que la línea de referencia apsidal de la partícula rote con el perihelio del Planeta 9, obteniéndose:

$$\Gamma_9 = \sqrt{k^2 M_{\odot} a (1 - \sqrt{1 - e^2})} \quad (2.20)$$

El Hamiltoniano 2.19 es el Hamiltoniano de una partícula perturbada por un planeta modelado como un anillo material elíptico y coplanar que varía su línea de apsides en forma conocida dada por (ver Brouwer y Clemence (1961)):

$$\frac{d\varpi_9}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_9^2}}{n_9 a_9^2 e_9} \frac{\partial R}{\partial e_9} \quad (2.21)$$

donde  $R$  es la función perturbadora de los planetas gigantes sobre el Planeta 9.

El Hamiltoniano secular contemplando el potencial kepleriano del Sol, la perturbación de los planetas gigantes conocidos, asumidos en órbitas circulares y coplanares, y del Planeta 9 está dado por (ver Batygin et al. (2019)):

$$\mathcal{H}_{sec} = -\frac{1}{2} \frac{k^2 M_\odot}{a} - \frac{1}{4} \frac{k^2 M_\odot}{a} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} + \dot{\omega}_9 \sqrt{k^2 M_\odot a} (1 - \sqrt{1-e^2}) - \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint \frac{k^2 m_9}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_9|} d\lambda d\lambda_9 \quad (2.22)$$

donde  $k$  es la constante gravitacional de Gauss,  $M_\odot$  es la masa del Sol,  $\mathbf{r}$  es el vector posición,  $m$  es la masa de los planetas,  $\lambda$  es la longitud media,  $a$  es el semieje mayor,  $e$  es la excentricidad y  $\varpi$  la longitud del perihelio. Los planetas gigantes están etiquetados con los subíndices 5-8, y el Planeta 9 con el subíndice 9. Los elementos no etiquetados corresponden a la partícula.

El primer término de la ecuación 2.22, representa el potencial kepleriano debido al potencial del Sol. Dicho potencial en la evolución secular es constante ya que solo depende del semieje  $a$  y éste es constante. Dicho término no será tenido en cuenta en el desarrollo que se verá en 2.2.1.

El segundo término representa la evolución de la línea de apsides de las partículas debido al potencial gravitacional promediado de los cuatro planetas gigantes<sup>1</sup>.

El tercer término proporciona el lento giro del marco de referencia elegido (colineal con el eje mayor de la órbita del Planeta 9). Su inclusión en el Hamiltoniano secular ocurre al pasar al espacio de fase extendido, tal cual se analizó en la ecuación 2.14.

---

<sup>1</sup>Para más detalles ver Batygin et al. (2019)

La expresión para  $\dot{\varpi}_9$  es (ver Batygin et al. (2019)):

$$\dot{\varpi}_9 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{k^2 M_\odot}{a_9^3}} \frac{1}{(1 - e_9^2)^2} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a_9^2} \quad (2.23)$$

este término se corresponde con la variación de  $\varpi_9$  impuesta por el potencial de los planetas gigantes.

El cuarto y último término es la función perturbadora secular media entre el Planeta 9 y la partícula, escrita en forma de una integral cerrada doble en función de los ángulos rápidos  $\lambda$  y  $\lambda_9$ .

$$\frac{k^2 m_9}{4\pi^2} \oint \oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_9|} d\lambda d\lambda_9 \quad (2.24)$$

Esta integral no puede ser expresada en forma cerrada (en función de los elementos orbitales), pero debido a que la órbita de la partícula es interna a la órbita del planeta perturbador, puede expandirse utilizando potencias ascendentes del cociente de los semiejes ( $\frac{a}{a_9}$ ). Este fue el método utilizado por los autores Batygin y Brown (2016) en el trabajo que propuso la hipótesis del Planeta 9, pero presenta varias restricciones analizadas en Beust (2016):

Debido a que los términos de la serie son proporcionales a  $(\frac{a}{a_9})^n$ , disminuyendo a medida que  $n$  aumenta, para que la teoría secular sea válida debe cumplirse que:

- El cociente entre los semiejes debe ser pequeño:  $(\frac{a}{a_9}) \ll 1$ .
- La partícula no debe estar en resonancias de movimientos medios (RMM), con el Planeta 9.
- No deben existir encuentros cercanos con el Planeta 9.
- El orden de truncamiento de la expansión 2.24 debe ser lo suficientemente grande para que sea una buena aproximación de la suma total de la serie.
- La expansión debe ser convergente.

El último ítem es fundamental para validar si este enfoque es adecuado para el estudio de la dinámica secular producida por el Planeta 9. Beust (2016) verificó que la expansión en serie de la integral 2.24 es divergente para valores del semieje  $a \geq 450$  ua y es necesario un enfoque numérico para realizar dicho

calculo. Éste ha sido el enfoque utilizado por los trabajos posteriores.

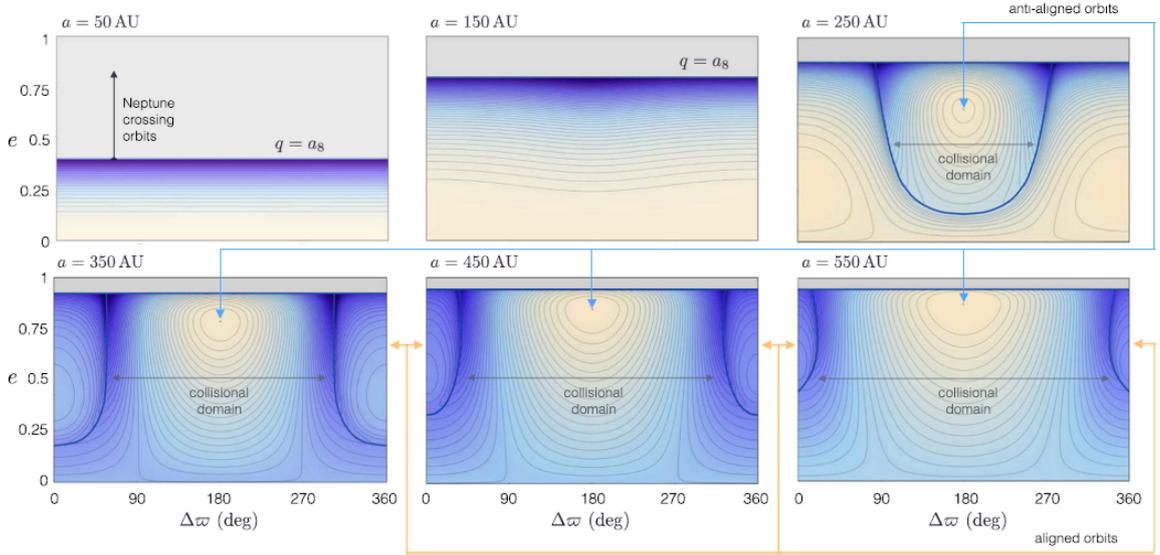
### 2.2.1. Resultados previos.

El análisis de la dinámica secular coplanar fue desarrollada en forma muy didáctica por Batygin y Morbidelli (2017). En su trabajo modelaron a los planetas gigantes con excentricidad nula y en el mismo plano del Planeta 9. Los parámetros utilizados para el planeta 9 se detallan en la tabla 2.1. En esta tesis se utilizan los mismos parámetros para el estudio de la dinámica generada por el Planeta 9.

a(ua)	e	$m_9(m_\oplus)$
700	0.6	10

**Tabla 2.1:** Parámetros del Planeta 9.

El Hamiltoniano secular para el caso plano de una partícula bajo la perturbación combinada de los planetas gigantes y del Planeta 9 fue analizado en la sección 2.2 al llegar a la ecuación 2.22. El último término de la ecuación 2.22 es la función perturbadora secular, escrita en forma de una integral doble en función de los ángulos rápidos  $\lambda$  y  $\lambda_9$ , la cual se calcula numéricamente. Debido a que las únicas variables dinámicas del Hamiltoniano de la ecuación 2.22 son  $(e, \varpi)$ , las curvas de nivel de la ecuación 2.22 promediada numéricamente describen la evolución secular del sistema. Los resultados de dicho análisis se observan en la figura 2.2.



**Figura 2.2:** Curvas de nivel del Hamiltoniano de la ecuación 2.22 en el espacio de fase  $(e, \Delta\varpi)$ . En cada panel se etiqueta el semieje  $a$ , de las partículas. Fuente Batygin y Morbidelli (2017).

En los paneles del espacio de fase  $(e, \Delta\varpi)$  donde  $a \geq 250$  au, se observan dos puntos de equilibrio estable en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Las curvas sólidas representadas en cada panel corresponden a las curvas de colisión entre las partículas y el Planeta 9.

Las órbitas que se acercan a Neptuno, debajo de la línea del perihelio de Neptuno  $q_8$ , evolucionaran de forma diferentes en función de su valor inicial de  $\Delta\varpi$ :

- Las partículas que inician con  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ , poseen órbitas cuyos perihelios están alineados por el perihelio del Planeta 9, y su evolución las dirigirá a curvas de colisión. Estas partículas serán removidas del sistema por encuentros cercanos con el Planeta 9.
- Los objetos que inicialmente tienen  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$ , poseen órbitas con perihelios antialineadas a la órbita del Planeta 9, y son dirigidos hacia trayectorias de equilibrio anti-alineadas, no encontrándose con las curvas de colisión.

Las islas de libración estables alrededor de  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ , protegen a las partículas de encuentros cercanos con el Planeta 9, pero se reducen a medida que el

semieje de la partícula se aproxima al semieje del Planeta 9. Al aumentar el semieje de la partículas, las curvas de colisión se desplazan hacia  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ , y los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  se encuentran para valores crecientes de  $e$ . El punto de equilibrio estable centrado en  $\Delta\varpi = 180^\circ$  involucra un mayor rango de valores de  $\Delta\varpi$  a medida que los semiejes de las partículas se aproximan al semieje del Planeta 9 (la separatriz, que delimita la zona de equilibrio de la zona de circulación, abarca desde  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  a  $\Delta\varpi \sim 270^\circ$ ). El punto de equilibrio  $\Delta\varpi = 180^\circ$  también se desplaza en excentricidad al aumentar el semieje de las partículas, llevando a las mismas a trayectorias tangenciales a la distancia del perihelio de Neptuno.

La suavidad de las curvas de nivel de la figura 2.2 pueden llevar a la conclusión equivocada de que las partículas que residen en trayectorias centradas en los puntos de equilibrio antialineados, no están en zona de colisión con el Planeta 9. Debido a que la configuración analizada en esta sección es coplanar, y que no existe correlación entre las posiciones de las partículas y del Planeta 9 (en otras palabras: no están en resonancia), las partículas en las configuraciones anti-lineadas sufrirán encuentros cercanos en escalas de tiempo menores a la vida del Sistema Solar (Batygin y Morbidelli (2017)). La existencia de repetidos encuentros dibuja una dinámica inestable para las partículas que constituyen el cinturón de Kuiper, el cual debería haberse limpiado en escalas de tiempo comparable al tiempo de precesión orbital de las partículas (Batygin y Morbidelli (2017)), pero dicho resultado no concuerda con los resultados numéricos obtenidos por Batygin y Brown (2016), que verifican que la estabilidad de las partículas en las islas de libración antialineadas es comparable a la edad del Sistema Solar.

### 2.2.2. Nuestro modelo coplanar.

En esta tesis se utiliza un modelo semianalítico que puede verse explicado en Gallardo, 2022 para el cálculo de la la función perturbadora de la ecuación 2.22 en forma numérica:

$$R_{sec} = \sum_5^9 \left[ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\lambda_1 d\lambda_2 \right] \quad (2.25)$$

Donde los subíndices 5-9 se corresponden a los planetas gigantes y al Planeta 9 debido a que el cálculo numérico de la función perturbadora total consiste

en una sumatoria de las funciones perturbadoras de cada planeta perturbador. Dividiendo la integral de la ecuación 2.25 en  $N$  partes, el computo numérico considera todas las posiciones relativas entre la partícula y el planeta perturbador:

$$R_{sec} = \sum_5^9 \left[ \frac{1}{4\pi^2} \sum_1^N \sum_1^N R_i \frac{2\pi}{N} \frac{2\pi}{N} \right] = \sum_5^9 \left[ \frac{1}{N^2} \sum_1^N \sum_1^N R_i \right] \quad (2.26)$$

La  $R_{sec}(a, e, i, \varpi, \Omega)$ , calculada en la ecuación 2.26 es la  $R_{sec}$  promedio suponiendo que tanto los planetas perturbadores como las partículas perturbadas son elipses materiales, más densas en el afelio y menos densas en el perihelio <sup>1</sup>. Esta  $R_{sec}$  es diferente a la considerada en el Hamiltoniano Secular de la ecuación 2.22 por Batygin et al. (2019), ya que la ecuación 2.26 considera a los planetas gigantes y el Planeta 9, asumiendo además que las órbitas de todos los planetas es fija. Debido a que  $R_{sec}$  es independiente del tiempo, el Hamiltoniano general puede escribirse:

$$\mathcal{H}_{sec} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R_{sec} \quad (2.27)$$

siendo  $L$  constante, y dado que el Hamiltoniano también lo es, la función perturbadora dibujará superficies que cumplen que :

$$R_{sec}(e, i, \varpi, \Omega) = cte \quad (2.28)$$

Para el caso plano,  $R_{sec}$  solo depende de  $e$  y  $\varpi$ , donde los mapas en  $(e, \Delta\varpi)$  permiten estudiar la evolución de las partículas.

El estudio que se desarrollará en la siguiente sección repite el procedimiento desarrollado por Batygin y Morbidelli (2017) con la salvedad de que en el modelo semianalítico que aplicaremos (Gallardo, 2022), no se considera el término  $J_2$  correspondiente al potencial de los planetas gigantes. En su lugar se consideran las órbitas de los todos los planetas gigantes fijas, y debido a que se desea estudiar el efecto del potencial de los planetas gigantes y del Planeta 9 por separado, se estudiarán tres modelos diferentes: considerando solo el potencial de los planetas gigantes, el potencial del Planeta 9, y el potencial combinado de los planetas gigantes y del Planeta 9.

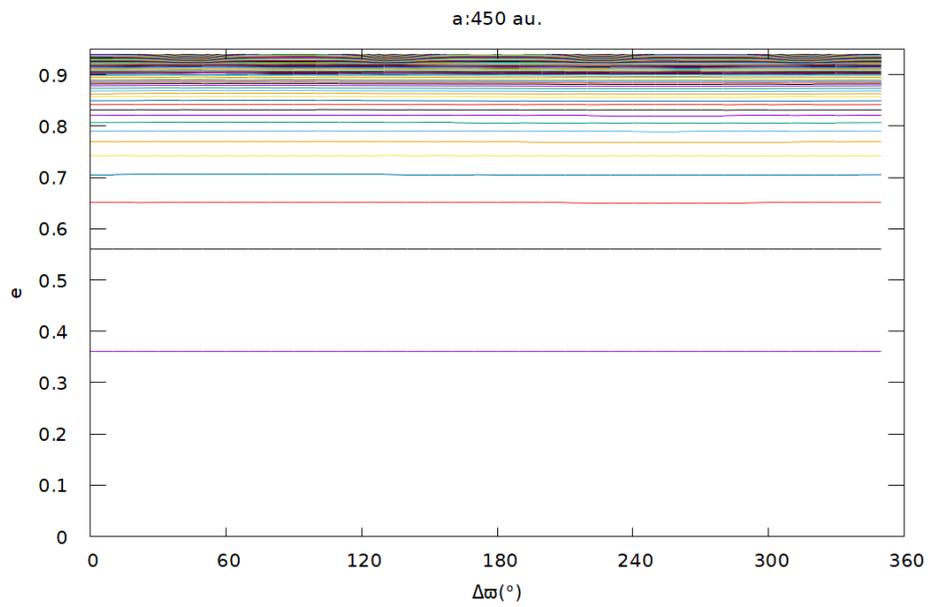
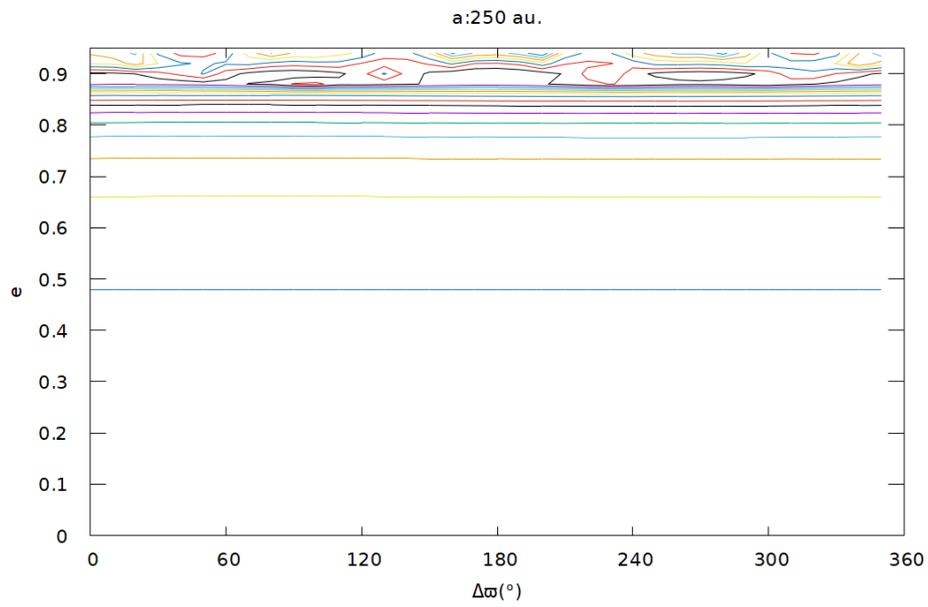
<sup>1</sup>Para más información ver capítulo 7.6 en Murray y Dermott (2000).

### 2.2.3. Resultado de nuestro modelo coplanar.

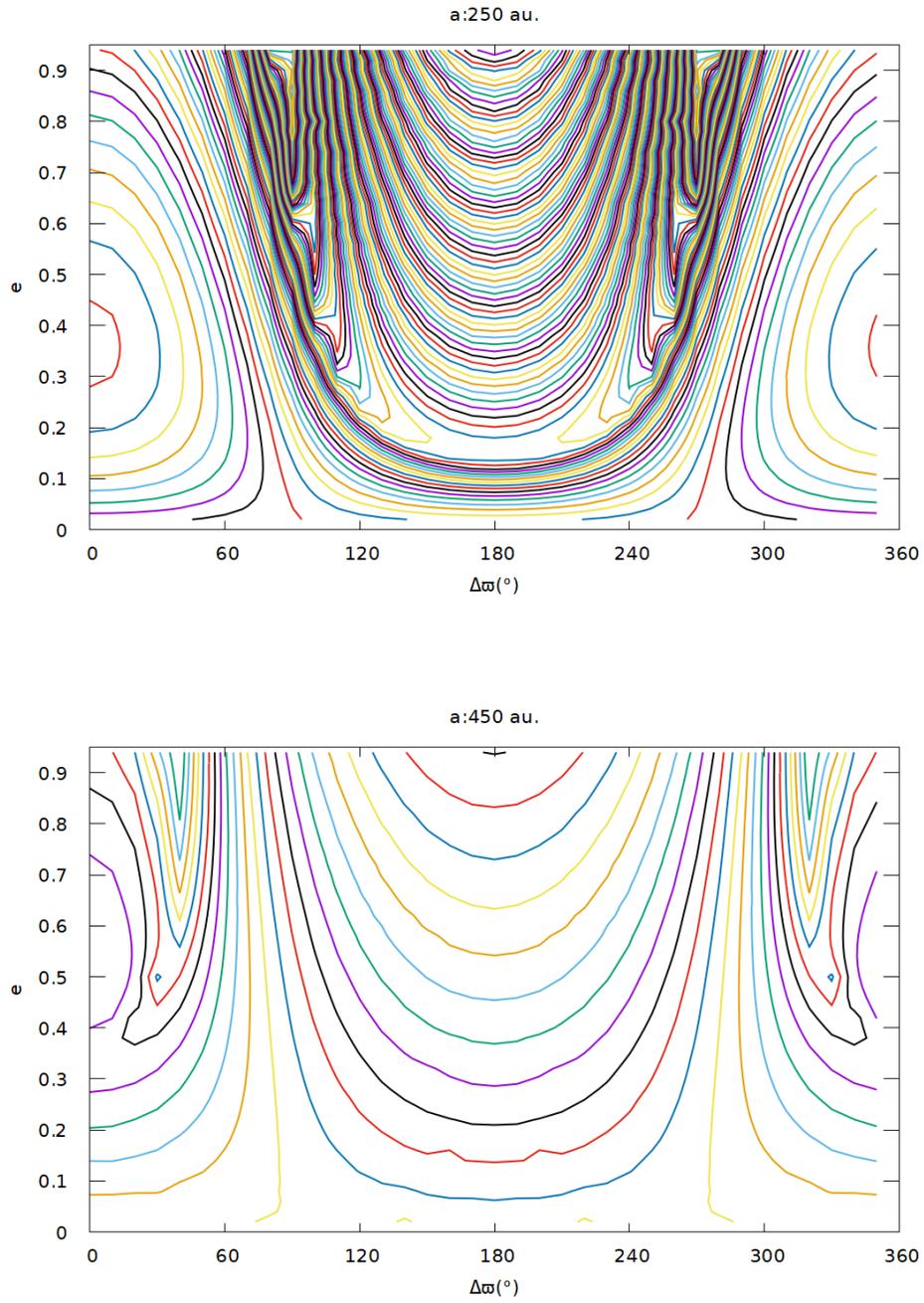
Utilizando el código `mapasecw`<sup>2</sup> se calculó utilizando el método semianalítico descrito en la sección 2.2.2 el Hamiltoniano de la ecuación 2.27 y se comparó con los resultados mostrados en la figura 2.2.

---

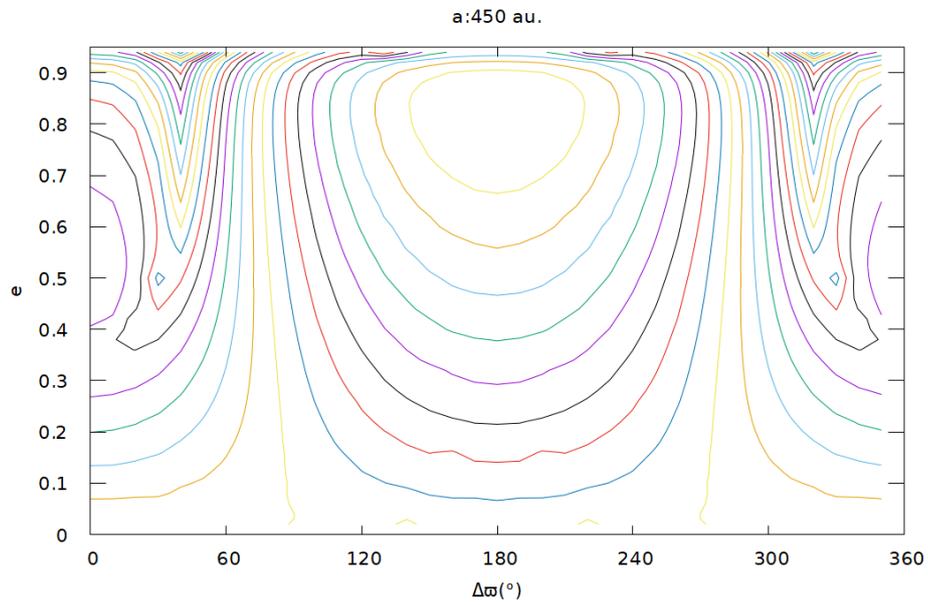
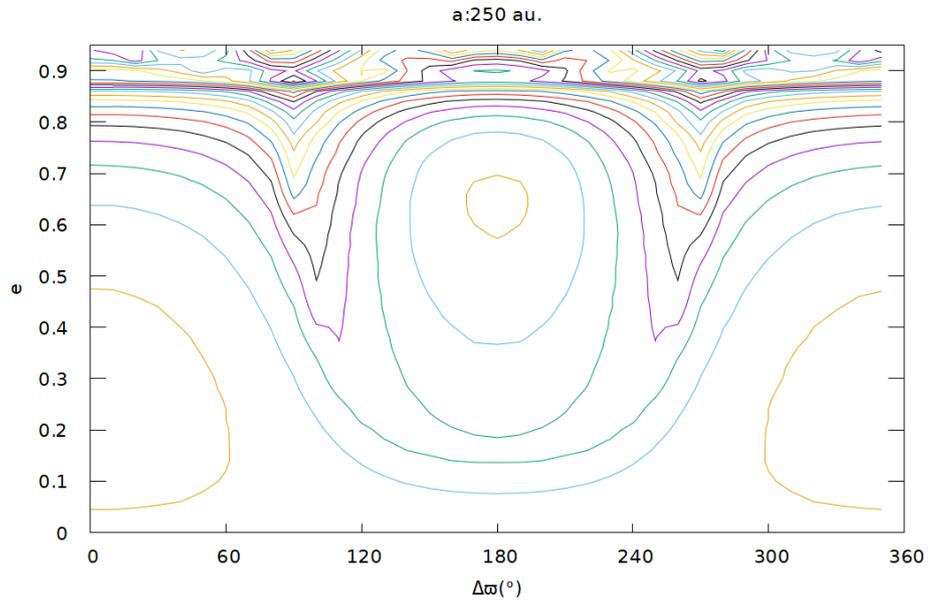
<sup>2</sup>Ver capítulo 5, Gallardo (2022).



**Figura 2.3:** Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación 2.27 para una partícula con valores de semieje  $a$  : 250 au y 450 au , generado por los planetas gigantes.



**Figura 2.4:** Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación 2.27 para una partícula con valores de semieje  $a$  : 250 au y 450 au , generado por el Planeta 9.



**Figura 2.5:** Curvas de nivel del Hamiltoniano doblemente promediado de la ecuación 2.27 para una partícula con valores de semieje  $a$  : 250 au y 450 au , generado por los planetas gigantes y el Planeta 9.

Las figuras 2.3, 2.4 y 2.5 describen la evolución secular de partículas con

valores de semieje  $a = 250$  au y  $a = 450$  au en tres modelos diferentes: en presencia de los planetas gigantes (fig. 2.3), del Planeta 9 (fig. 2.4) y en un sistema que incluye los planetas gigantes más el Planeta 9 (fig. 2.5).

La evolución bajo el efecto del potencial promediado de los planetas gigantes conocidos genera trayectorias que circulan en  $\Delta\varpi$  con  $e$  casi constante en el tiempo. Su evolución es similar a la que se obtendría con el segundo término de la ecuación 2.22 y con los paneles con  $a < 200$  ua en la figura 2.2.

La dinámica inducida considerando solamente al Planeta 9, delimita una isla de libración en  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Las partículas que se encuentran en la isla de libración alrededor de  $\Delta\varpi = 0^\circ$  poseen los perihelios de sus órbitas alineadas con el perihelio de la órbita del Planeta 9. En dicha configuración están protegidas de encuentros cercanos por la colinealidad geométrica de las órbitas con el Planeta 9.

La evolución dinámica de un sistema que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9 genera islas de libración en  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  y  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  para  $e$  diferentes al modelo que solo considera al Planeta 9. Las curvas de nivel en  $(e, \Delta\varpi)$  de la figura 2.5 concuerdan con los resultados que se ven en la figura 2.2 en los paneles con  $a > 200$  ua.

Existe una notable similitud entre los resultados obtenidos en las figuras 2.2 y 2.5 a pesar de que los cálculos numéricos no son similares: mientras el programa `mapasecw` considera las órbitas de los planetas gigantes y del Planeta 9 fijas, el cálculo numérico de la ecuación 2.22 realizado por Batygin y Morbidelli (2017) considera el término  $J_2$  de los planetas gigantes y la precesión de la longitud del perihelio del Planeta 9 (cuarto término de la ecuación 2.22). La comparación demuestra que dicha variación no es relevante para el estudio de la dinámica secular del sistema.

Como fue descrito por Batygin et al. (2019), la existencia de puntos de equilibrio estables en  $\Delta\varpi = 180^\circ$ , es una característica del modelo propuesto, la cual explica cualitativamente el cambio de trayectorias que circulan en  $\Delta\varpi$ , a trayectorias confinadas en  $\Delta\varpi$ .

Nuestros resultados muestran que los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  surgen para valores de  $a \geq 250$  ua en el modelo que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9. Los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  surgen para valores de  $e \sim 0.2$  para  $a = 250$  ua y aumentan en  $e$  al aumentar  $a$ . Los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi = 180^\circ$  surgen para valores altos,  $e \geq 0.6$ .

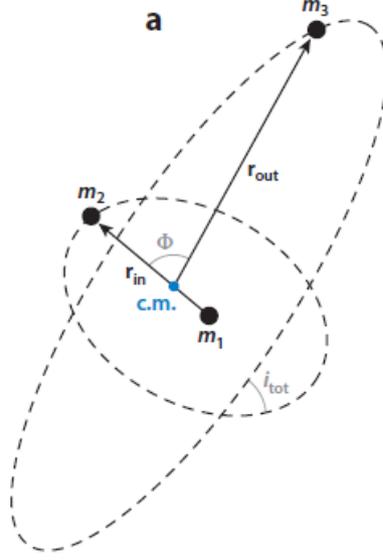
## 2.3. Caso espacial.

La simplicidad del caso plano permite que su estudio brinde una rápida idea de la dinámica de los objetos perturbados por el Planeta 9, pero no resulta realista confinar la evolución de las partículas a un plano. Esto hace que sea necesario abordar el problema espacial.

En el caso espacial el problema aumenta en un grado de libertad, por lo cual será necesario considerar dos dimensiones adicionales:  $(i, \Omega)$ . El aumento en el número de dimensiones genera una mayor complejidad en el análisis de las evoluciones de las partículas, las cuales proyectadas en un plano representarán la evolución multidimensional del Hamiltoniano espacial  $\mathcal{H}(e, i, \varpi, \Omega)$ .

### 2.3.1. Modelo analítico de Naoz para el caso espacial.

El estudio de la evolución dinámica de un sistema con un perturbador excéntrico externo e inclinado fue desarrollado por Naoz (2016), utilizando un desarrollo analítico de la función perturbadora hasta orden 3 (orden octupolar), en series de cocientes de los semiejes  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ , donde  $a_1$  y  $a_2$  son los semiejes de la partícula y del planeta perturbador, y por definición  $\alpha$  debe ser pequeño. El modelo de Naoz analiza el problema de los tres cuerpos para el caso jerárquico: es válido siempre que la relación  $(\frac{a_1}{a_2})$  sea pequeña. En la figura 2.6 se observa la configuración del caso de estudio.



**Figura 2.6:** Descripción del sistema jerárquico objeto de estudio. Donde  $\mathbf{r}_{in} = a_1$  es el vector posición de  $m_2$  con respecto a  $m_1$ , y  $\mathbf{r}_{out} = a_2$  es el vector posición del perturbador externo con respecto al centro de masa del binario central. Figura extraída de Naoz (2016).

El desarrollo analítico de orden octupolar del Hamiltoniano de este problema es (ver Naoz (2016)):

$$\mathcal{H} = \frac{3}{8}k^2 \frac{m_1 m_3}{a_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \frac{1}{(1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}} (F_{quad} + \epsilon F_{oct}) \quad (2.29)$$

donde

$$\epsilon = \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{1 - e_2^2} \quad (2.30)$$

por definición  $\epsilon$  debe ser pequeño ( $\epsilon \leq 0.1$ , ver capítulo 3 Naoz (2016) para un análisis de la validez de la aproximación utilizada), para que el desarrollo sea válido.  $F_{quad}$  y  $F_{oct}$  son las energías asociadas a los niveles de aproximación cuadrupolar y octupolar dadas por:

$$F_{quad} = -\frac{e_1^2}{2} + \theta^2 + \frac{3}{2}e_1^2\theta^2 + \frac{5}{2}e_1^2(1 - \theta^2)\cos(2\omega_1) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
F_{oct} = & \frac{5}{16} \left( e_1 + \frac{3e_1^3}{4} \right) \left[ (1 - 11\theta - 5\theta^2 + 15\theta^3) \cos(\omega_1 - \Omega_1) + \right. \\
& \left. (1 + 11\theta - 5\theta^2 + 15\theta^3) \cos(\omega_1 + \Omega_1) \right] \\
& - \frac{175}{64} e_1^3 \left[ (1 - \theta - \theta^2 + \theta^3) \cos(3\omega_1 - \Omega_1) + (1 + \theta - \theta^2 + \theta^3) \cos(3\omega_1 + \Omega_1) \right]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde

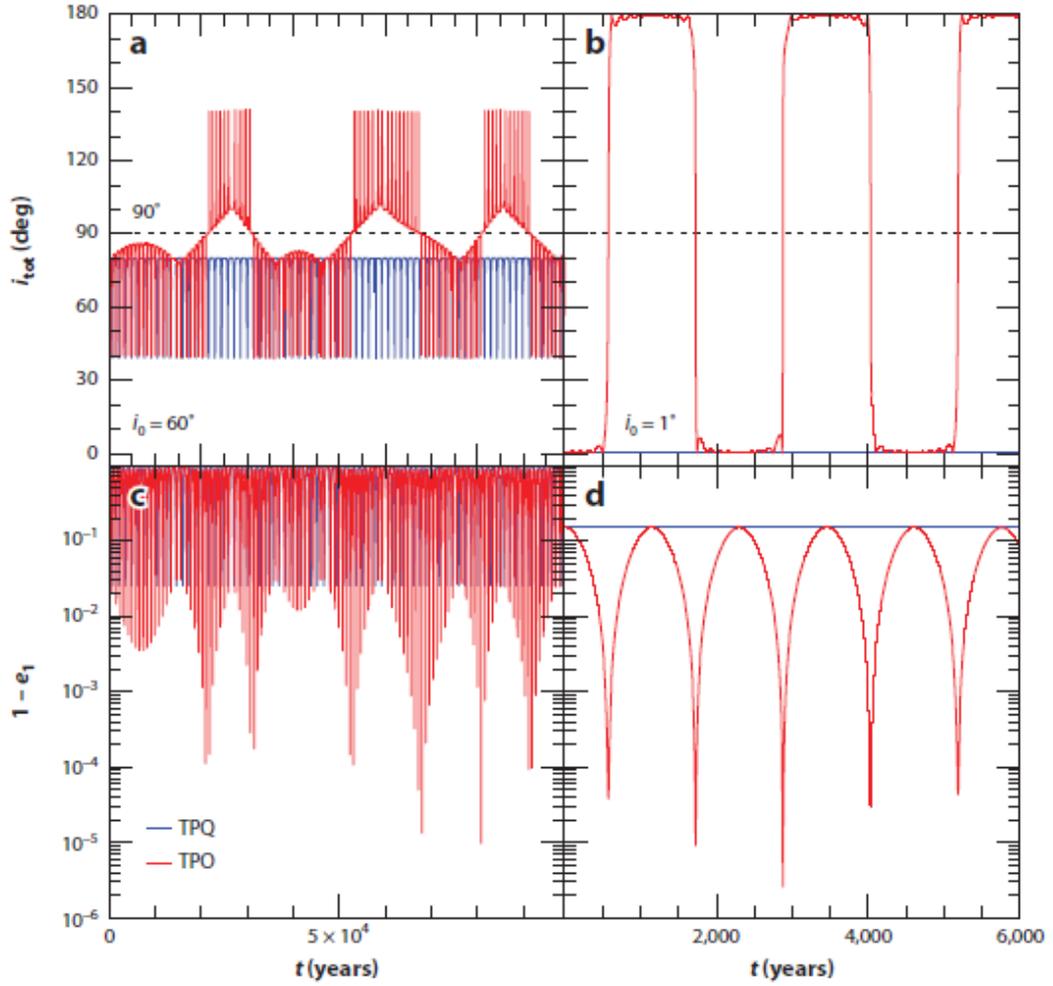
$$\theta = \cos(i) \tag{2.33}$$

Cuando una de las masas del binario central es una partícula sin masa, el cual sería nuestro caso,  $i = i_{tot}$ . Esta inclinación es la inclinación mutua entre los planos de la partícula interior y la exterior.

Se observa en la ecuación 2.31 que los desarrollos hasta el nivel cuadrupolar son proporcional a  $(\frac{a_1}{a_2})^2$ . En la ecuación 2.32 vemos que en los desarrollos hasta el nivel octupolar se agregan términos proporcionales a  $(\frac{a_1}{a_2})^3 (\frac{e_2}{1-e_2^2})$ .

En la aproximación dada por la ecuación 2.32 la componente z del momento angular de la órbita interior no se conserva, y el sistema puede sufrir un flipeo (transformación de la órbita de la partícula en retrógrada o viceversa). Esto se produce debido a cambios extremadamente altos en la excentricidad de la partícula generados por mecanismos dinámicos introducidos en 2.32 por los armónicos  $(3\omega_1 - \Omega_1)$  y  $(3\omega_1 + \Omega_1)$  de la aproximación octupolar.

Dado que el comportamiento y la evolución del sistema depende de la inclinación inicial, su estudio se divide en regímenes de alta y baja inclinación inicial. En los regímenes de alta inclinación (aquellos cuya inclinación inicial cumple:  $39.2^\circ \leq i_{tot} \leq 140.7^\circ$ ), los mecanismos dinámicos asociadas al nivel de aproximación cuadrupolar generan modulaciones en la evolución de  $i$  y  $e$ , lo cual puede verse en la figura 2.7 en azul.



**Figura 2.7:** En rojo se observa la evolución generada por la aproximación octupolar, y en azul la generada por la aproximación cuadrupolar. Los paneles **a** y **c** muestran un régimen de alta inclinación ( $i \geq 39.2^\circ$ ), y los paneles **b** y **d** muestran un régimen de baja inclinación ( $i \leq 39.2^\circ$ ). Se observa en la aproximación octupolar la generación de picos y cambios de excentricidad extremos debido a los mecanismos dinámicos introducidos por los armónicos  $(3\omega_1 - \Omega_1)$  y  $(3\omega_1 + \Omega_1)$ . Fuente Naoz (2016).

El nivel de aproximación de octupolar está asociado por mecanismos dinámicos introducidos por los armónicos  $(3\omega_1 - \Omega_1)$  y  $(3\omega_1 + \Omega_1)$  que generan picos y cambios extremadamente grandes en la evolución de  $e$ , así como comportamiento caótico (ver la figura 2.7 en rojo).

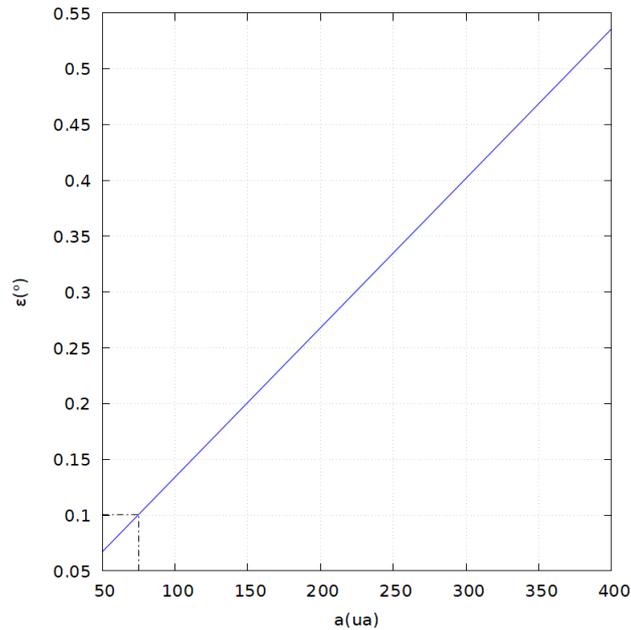
En los régimen de baja inclinación (aquellos cuya inclinación inicial cumple:  $i \leq 39.2^\circ$ ), la dinámica inducida por la aproximación cuadrupolar genera una evolución de  $e$  y  $i$  aproximadamente constante.

La dinámica generada por la aproximación octupolar genera grandes variaciones en  $i$  y picos en  $e$  en forma periódica. Los cambios extremos en la inclinación

de la órbita se corresponden con los momentos de rápido crecimiento de  $e$ .

### 2.3.1.1. Aplicación de la teoría de Naoz a la hipótesis del Planeta 9.

La teoría desarrollada por Naoz (2016), es válida siempre que se cumplan dos condiciones: que la relación entre los semiejes  $(\frac{a_1}{a_2}) \ll 1$  y  $\epsilon \leq 0.1$ . Estas condiciones hacen que la teoría de Naoz no sea válida para analizar la dinámica generada por un perturbador con las características del Planeta 9 considerado ( $a_9 = 700$  ua,  $e_9 = 0.6$ ). La figura 2.8 muestra la variación del parámetro  $\epsilon = \frac{a}{a_9} \frac{e_9}{1-e_9^2}$  en función del semieje de la partícula  $a$ , en el rango  $[50 : 400]$  ua. El valor de  $\epsilon$  alcanza valores superiores a 0.1 a partir de  $a = 75$  ua. En la sección 2.3.2 se analizarán teorías semianalíticas que permitirán calcular la función perturbadora sin las restricciones del modelo de Naoz.



**Figura 2.8:** Gráfico de  $\epsilon(a)$  en el rango  $[50:400]$  ua. La teoría de Naoz es válida en el modelo estudiado en esta tesis para  $a \leq 75$  ua.

### 2.3.2. Teorías semianalíticas espaciales.

En Li et al. (2018) se estudia la dinámica generada por los planetas gigantes y el Planeta 9, ubicados en el mismo plano, sobre partículas no coplanares y

de pequeña inclinación. El Hamiltoniano secular para el caso con pequeña inclinación es (ver Li et al. (2018)):

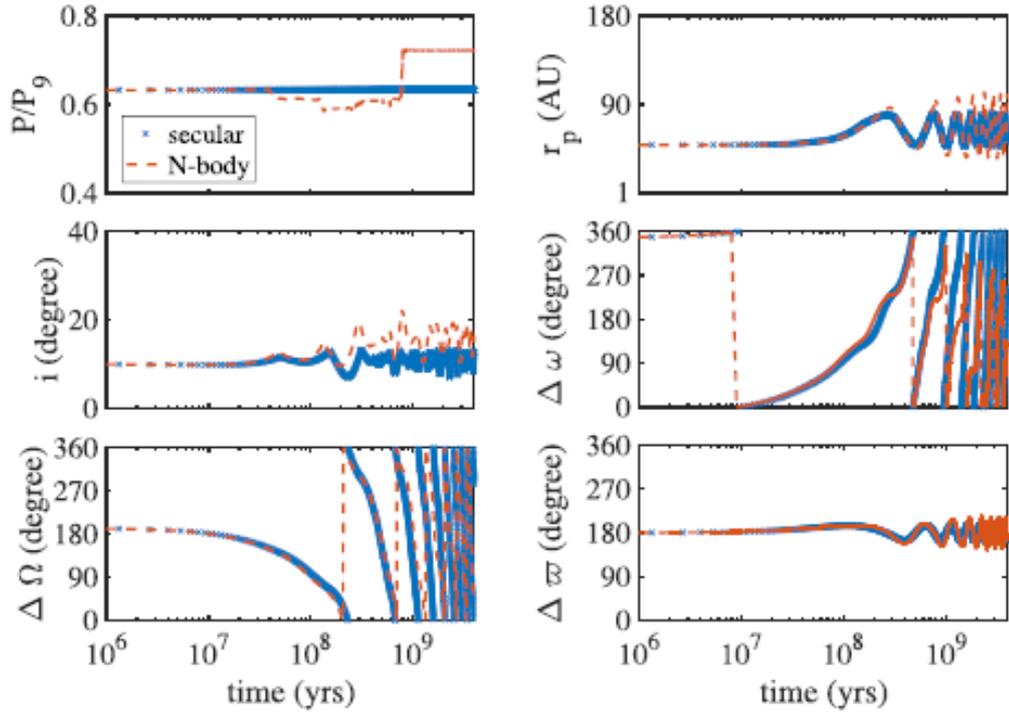
$$\mathcal{H}_{sec} = -\frac{1}{4} \frac{k^2 M_\odot}{a} - \frac{1}{4} \frac{k^2 M_\odot}{a} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} + \dot{\omega}_9 \sqrt{k^2 M_\odot a (1 - \sqrt{1 - e^2})} - \dot{\Omega}_9 \sqrt{k^2 M_\odot a (1 - e^2)} \cos(i) - \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint \frac{k^2 m_9}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_9|} d\lambda d\lambda_9 \quad (2.34)$$

La expresión para  $\dot{\Omega}_9$  es (ver Li et al. (2018)):

$$\dot{\Omega}_9 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{k^2 M_\odot}{a_9^3} \frac{1}{(1 - e_9^2)^2} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a_9^2}} \quad (2.35)$$

Este término, que indica la precesión de la línea de los nodos del Planeta 9, es un efecto secular debido al potencial gravitacional de los planetas gigantes. Comparando el Hamiltoniano 2.34 y el Hamiltoniano 2.22 se observa que difieren en el término  $\dot{\Omega}_9 \sqrt{k^2 M_\odot a (1 - e^2)} \cos(i)$ . Este término se obtiene mediante una transformación del marco de referencia que lleva a que  $\Omega$  se mida a partir de la línea de los nodos del Planeta 9 (ver apéndice B Batygin et al. 2019). El Hamiltoniano 2.34 es una buena aproximación de la dinámica entre las partículas, los planetas gigantes y el Planeta 9 mientras no existan encuentros cercanos. La figura 2.9 compara los resultados de la evolución para una partícula con  $a = 365.75$  ua,  $e = 0.867$ ,  $i = 10^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  generadas por el Hamiltoniano 2.34 y por una integración numérica exacta.

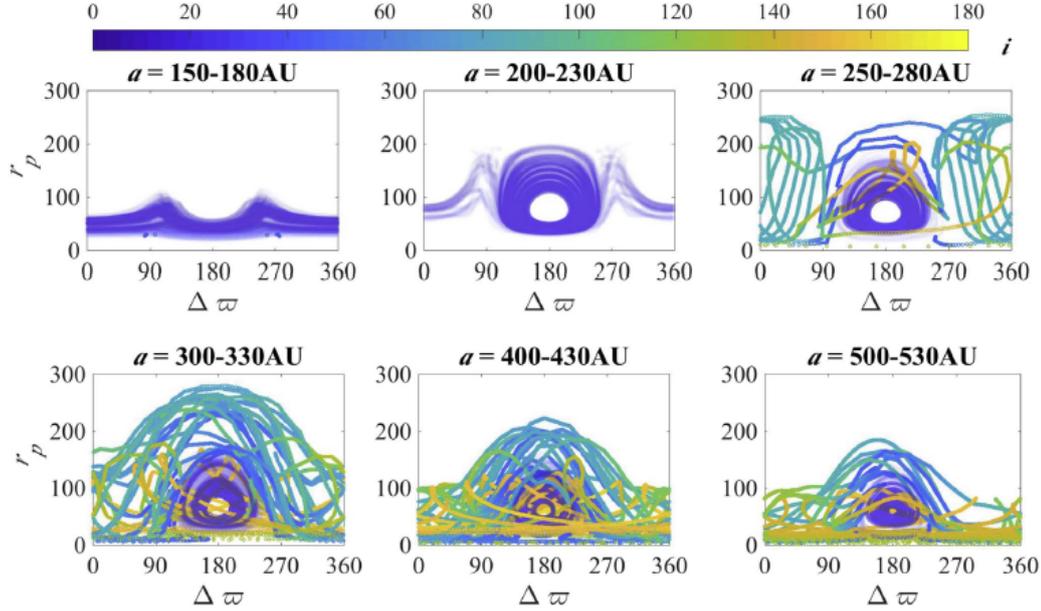
Para una mejor optimización del tiempo de cálculo se sustituyó en Li et al. (2018) a los planetas gigantes por el término equivalente  $J_2$  (este método consiste en modelar al Sol con un achatamiento central producido por los planetas gigantes (término  $J_2$ ). El potencial del Sol (el cual se modela con una masa modificada dado que en este método se agrega la masa de los planetas gigantes a la masa del Sol), con este achatamiento central resulta equivalente al potencial de los planetas gigantes modelados como anillos materiales más denso en el afelio y menos denso en el perihelio. (ver Batygin y Brown (2016)). Los resultados coinciden hasta  $t = 50 \times 10^6$  años, momento en que ocurre un encuentro entre la partícula y el Planeta 9.



**Figura 2.9:** Comparación de la evolución dada por métodos semianalíticos del Hamiltoniano 2.34 (azul), y la dada por integración numérica de N cuerpos realizada con MERCURY (rojo), para una partícula con  $a = 365.75$  ua,  $e = 0.867$ ,  $i = 10^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El acuerdo es excelente hasta los 50 millones de años donde se produce un encuentro cercano con el Planeta 9. Fuente Li et al. (2018).

La figura 2.10 muestra la evolución en el espacio  $(r_p, \Delta\varpi)$ , de 500 partículas de prueba con distancias de perihelio iniciales:  $30 \text{ ua} < r_p < 50 \text{ ua}$ ,  $i = 10^\circ$ ,  $\varpi = 180^\circ$  y  $\omega$  distribuido uniformemente entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , generadas por el Hamiltoniano 2.34. Los autores colocaron al Planeta 9 en el mismo plano que los planetas gigantes con  $a_9 = 500$  ua,  $e_9 = 0.6$ , y  $\varpi_9 = 0^\circ$ .

Los resultados obtenidos concuerdan cualitativamente con los de la figura 2.2 para el caso plano. En particular, se genera un punto de equilibrio en  $\Delta\varpi = 180^\circ$  a partir del semieje crítico  $a = 250$  ua mencionado por Batygin y Morbidelli (2017). Para dicho semieje la precesión apsidal inducida por los planetas gigantes se equilibra con la inducida por el Planeta 9 y el efecto neto sobre la precesión apsidal de las partículas es nula. En la figura 2.10 se utiliza una escala de colores para representar la  $i$  de las partículas. Esta figura muestra que las partículas pueden ser excitadas en inclinación, alcanzando órbitas retrógradas, bajo el efecto puramente secular del Planeta 9. Este efecto se produce en la región donde la perturbación del planeta 9 es dominante, para  $a \geq 250$  ua.



**Figura 2.10:** Evolución en el espacio  $(r_p, \Delta\varpi)$ , de 500 partículas de prueba con los siguientes elementos orbitales iniciales:  $30 \text{ ua} < r_p < 50 \text{ ua}$ ,  $i = 10^\circ$ ,  $\varpi = 180^\circ$  y  $\omega$  distribuido uniformemente entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , generadas por el Hamiltoniano 2.34. Cada panel está dividido en función de los semiejes de las partículas. La escala de colores muestra la inclinación de las partículas. Fuente Li et al. (2018).

### 2.3.3. Nuestro modelo espacial

. Las dificultades y limitaciones en el desarrollo de una expresión secular analítica, analizada en la sección 2.3.1, que permita estudiar la dinámica secular espacial generada por el Planeta 9 pueden resolverse calculando numéricamente la función perturbadora (método ya utilizado en la sección 2.2.2 para el caso plano).

El problema podría estudiarse utilizando integraciones numéricas pero la utilización de un modelo semianalítico permite identificar en forma pura la dinámica secular sin la contaminación de efectos de corto periodo o efectos dinámicos no seculares.

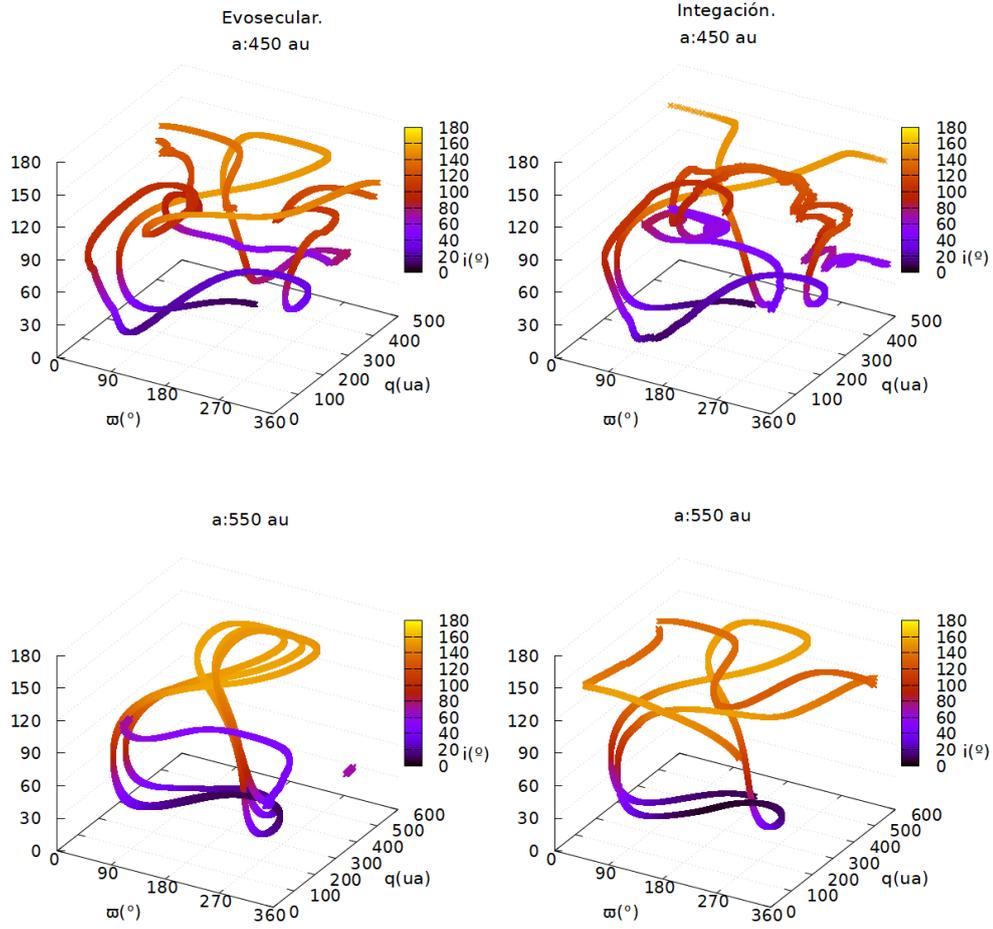
El método semianalítico que utilizamos consiste en:

- Considerar las órbitas de los planetas fijas. De esta forma se modela el potencial de los mismos como anillos materiales, más densos cerca de sus afelios, y menos densos en sus perihelios.
- Se calcula la función perturbadora entre cada punto de la órbita del

planeta perturbador y de la órbita de la partícula de prueba.

- Se calcula la función perturbadora promedio en longitud media del planeta perturbador y en longitud media de la partícula.
- Se repite el proceso para cada planeta perturbador.
- Se suma la perturbación media de los planetas perturbadores para obtener la función perturbadora total.

Este procedimiento transforma la integral doble en longitud media de la ecuación 2.25, en la doble sumatoria de la ecuación 2.26. Esta forma de calcular numéricamente la función perturbadora no presenta restricciones en excentricidad e inclinación. Por ejemplo, la figura 2.11 muestra el resultado de repetir el experimento de la figura 2.10 para dos partículas con semiejes  $a = 450$  ua y  $550$  ua,  $i = 10^\circ$ , en el modelo que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9 en el mismo plano, calculando numéricamente la función perturbadora como se detalla en esta sección (paneles de la izquierda), y comparando dicho resultado con una integración numérica (paneles de la derecha). Utilizando el código `evosecular` (ver capítulo 5 Gallardo (2022)), se estudió la evolución del sistema durante  $4 \times 10^9$  años. La integración numérica de las ecuaciones exactas del sistema (realizada con el integrador `evorb` (Fernández et al. (2002))), verifica la evolución dada por `evosecular`.



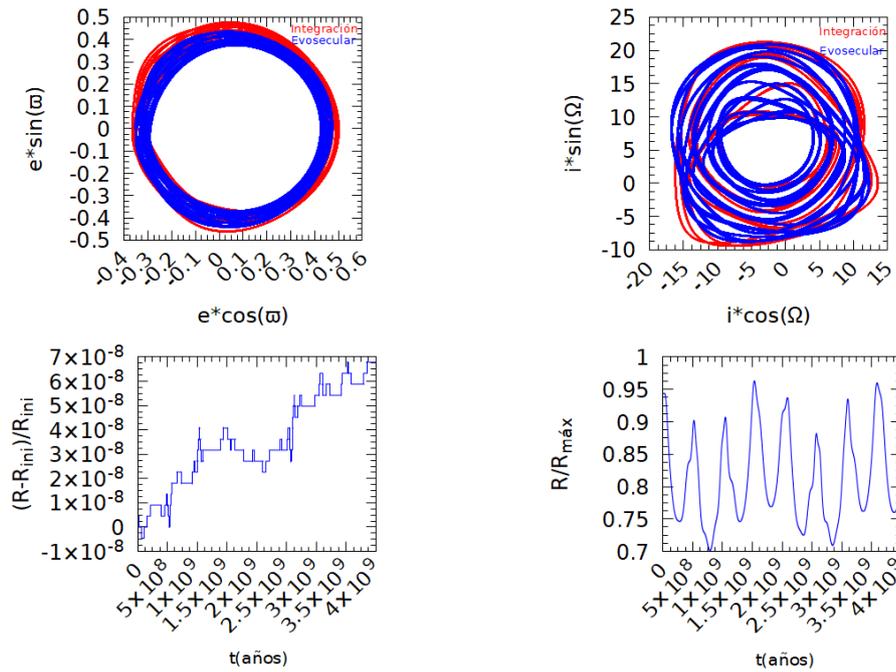
**Figura 2.11:** Comparación de la evolución en el espacio  $(q, \Delta\varpi, i)$ , dada por el modelo semianalítico (paneles de la izquierda), y una integración numérica (paneles de la derecha), para dos partículas con  $a = 450$  ua y  $550$  ua, e inclinación  $i = 10^\circ$ . El modelo incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9. El Planeta 9 está en el mismo plano que los planetas gigantes. La escala de colores muestra la inclinación de las partículas. Las irregularidades se deben a la pérdida de validez de la teoría secular debido a encuentros cercanos. Condiciones iniciales:  $e = 0.2$ ,  $\varpi = 180^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ .

Dado que el objetivo de esta sección es estudiar la dinámica secular espacial, se analiza a continuación la zona de validez donde la evolución es regular, y de esta forma identificar los efectos puramente seculares. En el capítulo 3 se analizará la dinámica resonante.

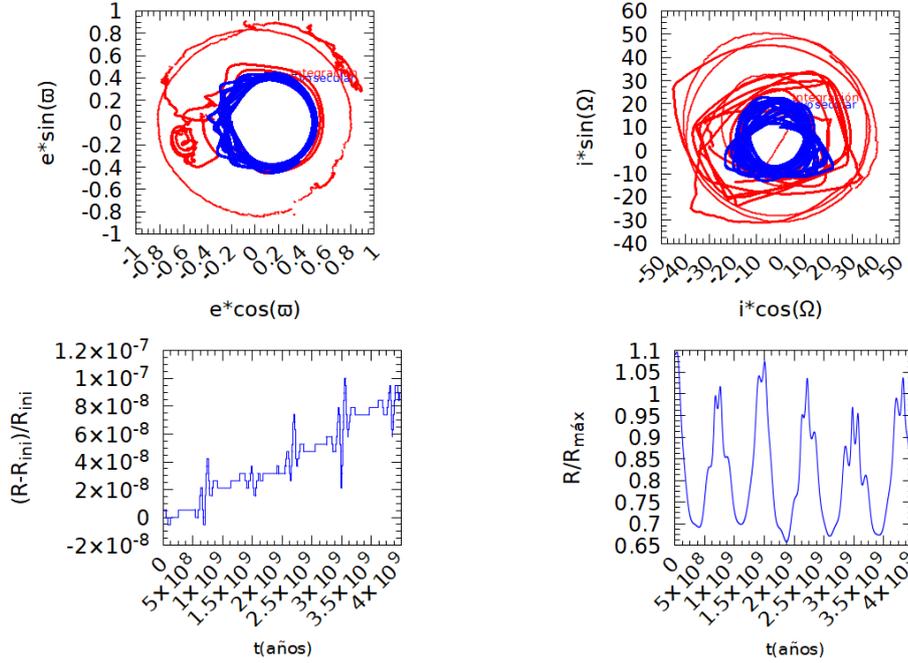
Las figuras 2.12 y 2.13 muestran en los paneles superiores los espacios  $(k = \cos \varpi, h = \sin \varpi)$  y  $(q = i \cos \Omega, p = i \sin \Omega)$ , para dos partículas con  $a = 180$  ua y  $a = 210$  ua. En rojo se muestra la evolución dada por el integrador numérico `evorb` (Fernández et al. (2002)) y en azul la dada por el código semianalítico

de evolución secular **evosecular**.

El panel inferior izquierdo muestra la variación relativa de la función perturbadora,  $\frac{R_{sec}-R_{m\acute{a}x}}{R_{sec}}$ , calculada numéricamente por **evosecular**, y el panel inferior derecho el parámetro  $\frac{R_{sec}}{R_{m\acute{a}x}}$ , donde  $R_{sec}$  y  $R_{m\acute{a}x}$  es el valor de la función perturbadora secular promedio y su valor máximo respectivamente. De acuerdo a Gallardo (2022) este parámetro es un indicador de validez de la evolución secular, si  $\frac{R_{sec}}{R_{m\acute{a}x}} > 0.15$ . En caso de encuentros cercanos  $R_{m\acute{a}x}$  crece rápidamente y la evolución deja de ser secular: la evolución resulta caótica. La figura 2.12 muestra que los resultados semianalítico son una buena aproximación de la evolución dada por un integrador numérico siempre que no existan encuentros cercanos. En esta figura el parámetro  $\frac{R_{sec}}{R_{m\acute{a}x}} > 0.15$  en toda la evolución. En la figura 2.13 se observa la no concordancia en caso de encuentros. En este caso el parámetro  $\frac{R_{sec}}{R_{m\acute{a}x}} < 0.15$  durante gran parte de la evolución.



**Figura 2.12:** Comparación de la evolución dada por el modelo semianalítico, calculada con **evosecular**, con el integrador numérico **evorb** para una partícula en evolución regular en el modelo que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9. Se observa la concordancia entre ambas evoluciones. Condiciones iniciales de la partícula:  $a = 180$  ua,  $e = 0.3$ ,  $i = 10^\circ$ .



**Figura 2.13:** Ídem a la figura 2.12 para una partícula en evolución irregular debido a encuentros cercanos con el Planeta 9 en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9. Se observa la no concordancia entre ambas evoluciones. Condiciones iniciales de la partícula:  $a = 210$  ua,  $e = 0.2$ ,  $i = 10^\circ$ .

### 2.3.4. Resultados de nuestro modelo.

Si bien no existen limitaciones en  $(a, e, i)$ , en el cálculo de la función perturbadora semianalíticamente, si existen limitaciones en su aplicación: la misma no es válida en caso de encuentros cercanos, donde las grandes variaciones en el semieje de la partícula destruye la evolución secular, y donde  $R_{sec}$  presente grandes variaciones. De acuerdo a la teoría secular  $R_{sec}$  debería ser constante. La figura 2.14 diferencia la zona de evolución regular de la irregular (donde la evolución secular no es válida), entre  $a = 150$  ua y  $a = 210$  ua en función de la excentricidad de la partícula. Para valores superiores y hasta  $a \sim 280$  ua la evolución es regular para  $e \sim 0.1$ <sup>1</sup>. Para valores superiores de semieje la evolución es irregular para  $e \sim 0.01$ , encontrándose algunos nichos estables

<sup>1</sup>La extensión y estructura de la región estable depende del valor inicial de  $\Delta\varpi$ . Por ejemplo, para el valor inicial de  $\Delta\varpi = 0^\circ$ , la región estable se expande hasta  $a = 360$  ua y para valores superiores en  $e$  de los mostrados en la figura 2.14. Estudiar todas las posibilidades están más allá de los objetivos de este trabajo.

entre  $a \sim 450$  ua y  $550$  ua para  $e \leq 0.2$  (ver figura 2.11) <sup>2</sup>.

Para este estudio se modelo la órbita de los planetas gigantes fija, con el mismo valor de longitud del perihelio ( $\varpi = 0^\circ$ ), con la misma inclinación ( $i = 10^\circ$ ), y misma longitud del nodo ascendente ( $\Omega = 0^\circ$ ), por lo cual están todos en el mismo plano. En el desarrollo que sigue se utilizan los subíndices 5-8 para los planetas gigantes y las partículas se identifican sin subíndice. El Planeta 9 se dispuso con inclinación  $i_9 = 0^\circ$  y  $\varpi_9 = 0^\circ$  (el plano de referencia elegido es el plano del Planeta 9). Las partículas que se analizaron se ubican en el mismo plano que los planetas gigantes ( $\Omega = 0^\circ$ ,  $i = 10^\circ$ ), con el fin de analizar si la dinámica generada por el Planeta 9 es capaz de excitar la inclinación de partículas originalmente próximas al plano del Sistema Solar hasta transformarlas en retrógradas. Se analizaron partículas con valores de semiejes  $150 \text{ ua} \leq a \leq 550 \text{ ua}$ . La longitud del perihelio de las partículas se definió en  $\varpi = 180^\circ$ , tomando el resultado de las integraciones numéricas de Batygin y Brown (2016), quienes encontraron que las partículas que sobreviven a sus simulaciones de N-cuerpos por períodos de miles de millones de años, están apsidalmente antialineadas con el Planeta 9. La tabla 2.2 detalla los elementos orbitales de los planetas gigantes y del Planeta 9.

$a(\text{ua})$	$e$	$i$	$\Omega$	$\varpi$
5.204	0.0487	$10^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
9.582	0.0553	$10^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
19.25	0.0437	$10^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
30.14	0.0111	$10^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
700.0	0.6	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$

**Tabla 2.2:** Condiciones iniciales de los planetas gigantes y del Planeta 9 utilizados en este modelo.

La validez de la teoría secular se definió evaluando al mismo tiempo (y para cada caso), la evolución regular en los espacios  $(k, h)$  y  $(q, p)$ , y utilizando el parámetro  $\frac{R_{sec}}{R_{máx}}$  como indicador de validez del modelo semianalítico utilizado. El análisis comparativo de la figura 2.14 se realizó comparando la evolución en dos modelos diferentes:

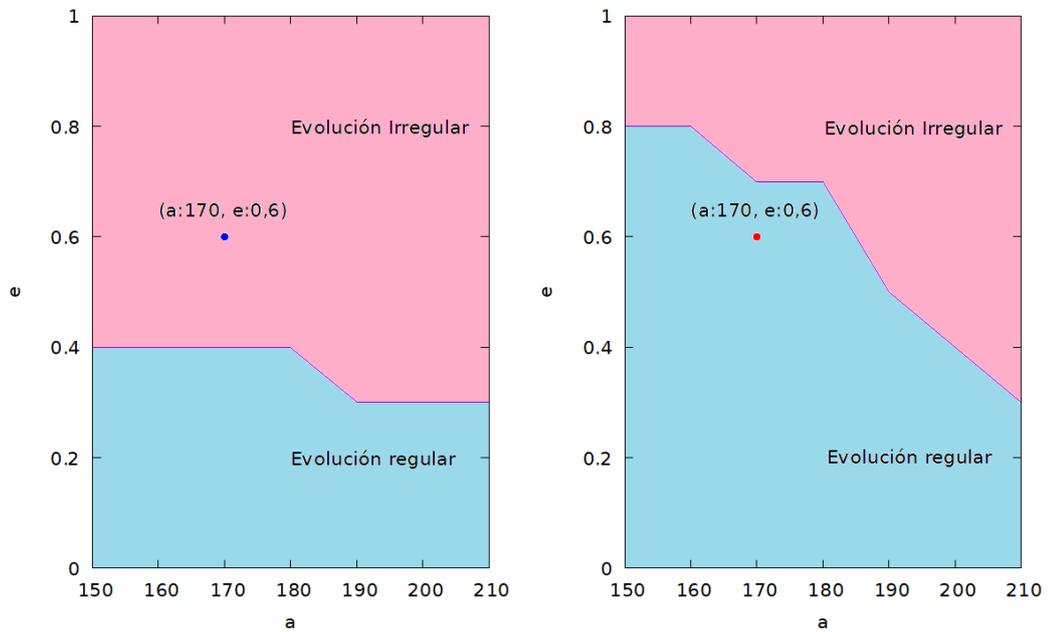
1. considerando un sistema constituido solo por el Planeta 9.

---

<sup>2</sup>Delimitar todos los nichos estables, y su origen dinámico, involucraría un estudio sistemático exhaustivo, el cual escapa a los objetivos de este trabajo.

- considerando un sistema constituido por el Planeta 9 y los planetas gigantes.

Los resultados del experimento representado en la figura 2.14 muestra que la evolución secular no solo es sensible a la excentricidad de las partículas, está fuertemente determinada por los modos forzados de los planetas gigantes que compiten con las perturbaciones generadas por el Planeta 9, lo que la hace sensible al valor del semieje de la partícula. La zona de evolución regular crece significativamente en el modelo que considera a los planetas gigantes.



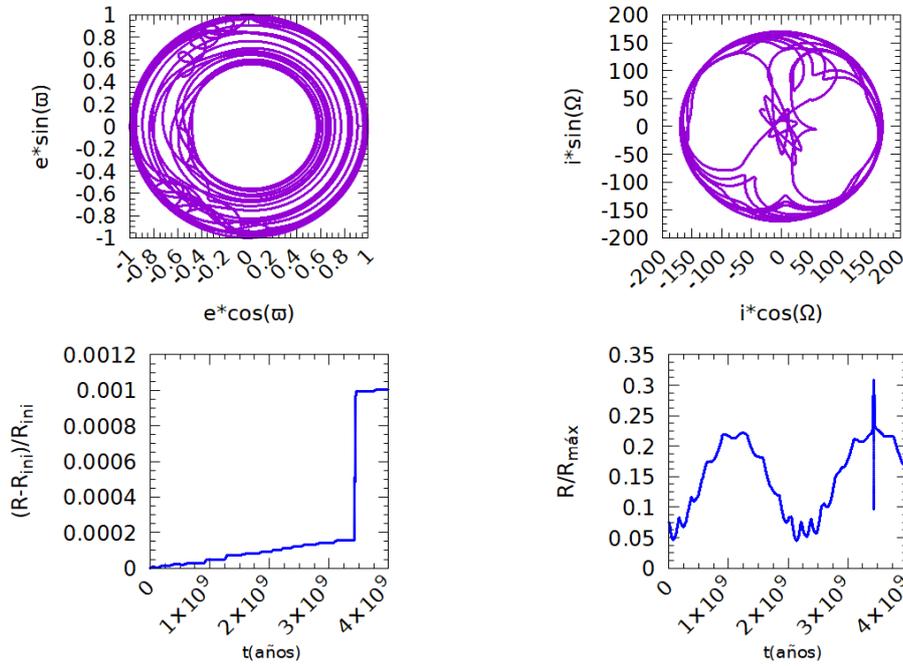
**Figura 2.14:** Comparación de las zonas de validez para los dos modelos analizados: considerando solo al Planeta 9 (panel de la izquierda), y al Planeta 9 más los planetas gigantes conocidos (panel de la derecha). La comparación de las figuras muestra que el potencial de los planetas gigantes brinda estabilidad a la evolución secular de las partículas. Se representa la ubicación de la partícula que se analizara en las figuras 2.15 y 2.16.

Las figuras 2.15 y 2.16 describen el resultado del experimento para una partícula con semieje  $a = 170$  ua y  $e = 0.6$ , en ambos modelos. La figura 2.15 muestra la evolución de la partícula en una zona de evolución irregular, y la figura 2.16 en una zona de evolución regular. Los paneles superiores de ambas figuras muestran la evolución en los espacios  $(k, h)$  y  $(q, p)$ , y los paneles inferiores la variación relativa de la función perturbadora y el criterio de veri-

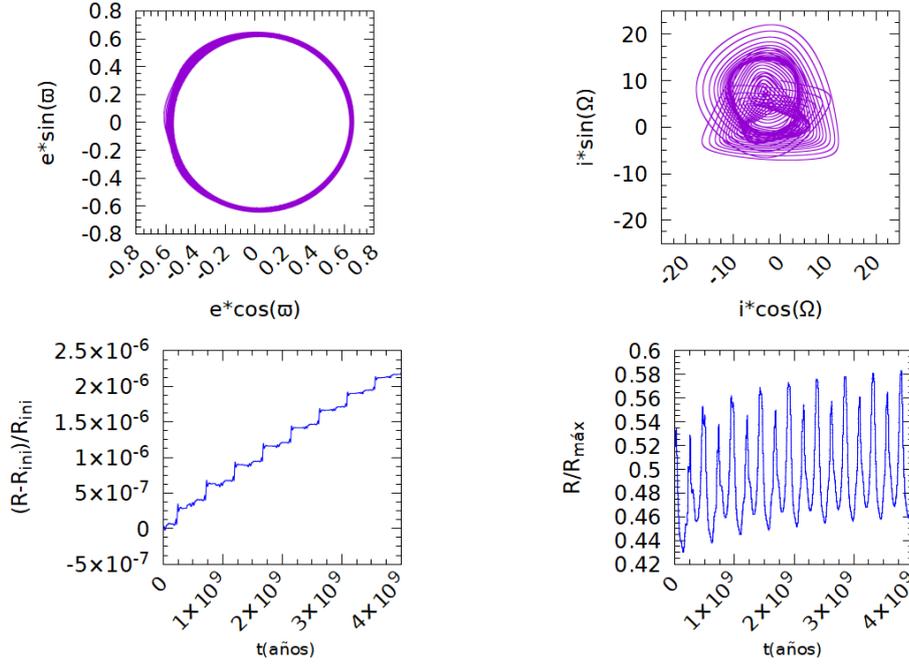
ficación de la evolución secular.

Los paneles superiores de la figura 2.15 verifican que los modos propios de la partícula cambian en forma no regular. El radio de las trayectorias en los espacios  $(k, h)$  y  $(q, p)$  indica la excentricidad y la inclinación propia de la partícula, la cual cambia en forma no regular. En los paneles superiores de la figura 2.16 se observa una evolución regular en ambos espacios. El análisis comparativo de ambas figuras muestra el efecto estabilizador de los modos forzados de los planetas gigantes.

Los paneles inferiores a la izquierda de las figuras 2.15 y 2.16 permite comparar la variación relativa de la función perturbadora en ambos modelos. En una evolución perfectamente regular, la función perturbadora debe ser constante. La variación relativa de la función perturbadora de la figura 2.15 (zona irregular), es tres ordenes de magnitud superior a la mostrada en la figura 2.16 (zona regular). Puede verificarse que en la figura 2.16 correspondiente a la zona de evolución regular, el criterio de validez  $\frac{R_{sec}}{R_{máx}} > 0.15$  durante toda la evolución.



**Figura 2.15:** Evolución de una partícula ubicada en la zona no regular de la figura 2.14, para el modelo que incluye solo al Planeta 9. La figura muestra los espacios  $(k, h)$  y  $(q, p)$ , la variación relativa de la función perturbadora media  $((R - R_{ini})/R_{ini})$ , y el criterio de validez  $\frac{R}{R_{máx}}$ . La evolución de la partícula es no regular. Condiciones iniciales de la partícula:  $a = 170$  ua,  $e = 0.6$ ,  $i = 10^\circ$ .



**Figura 2.16:** Evolución de una partícula ubicada en la zona regular de la figura 2.14, para el modelo que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Se muestra una evolución regular. Condiciones iniciales de la partícula:  $a = 170$  ua,  $e = 0.6$ ,  $i = 10^\circ$ .

Las figuras 2.17 y 2.18 muestran la evolución en el espacio  $(e, \varpi)$ , para las partículas de la tabla 2.3 utilizando el modelo semianalítico. Se estudió la evolución durante  $8.0 \times 10^9$  años. La figura 2.19 muestra la evolución de las mismas partículas, utilizando un integrador numérico. Se estudió la evolución por un período de  $4.0 \times 10^9$  años.

Las partículas de la tabla 2.3 corresponden a la zona regular de la figura 2.14 para ambas configuraciones. Comparando los resultados de las figuras 2.17 y 2.18 se observa el efecto estabilizador de los modos forzados de los planetas gigantes: en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9, las partículas no sufren grandes variaciones en excentricidad e inclinación. Este resultado es verificado por la integración numérica exacta mostrada en la figura 2.19.

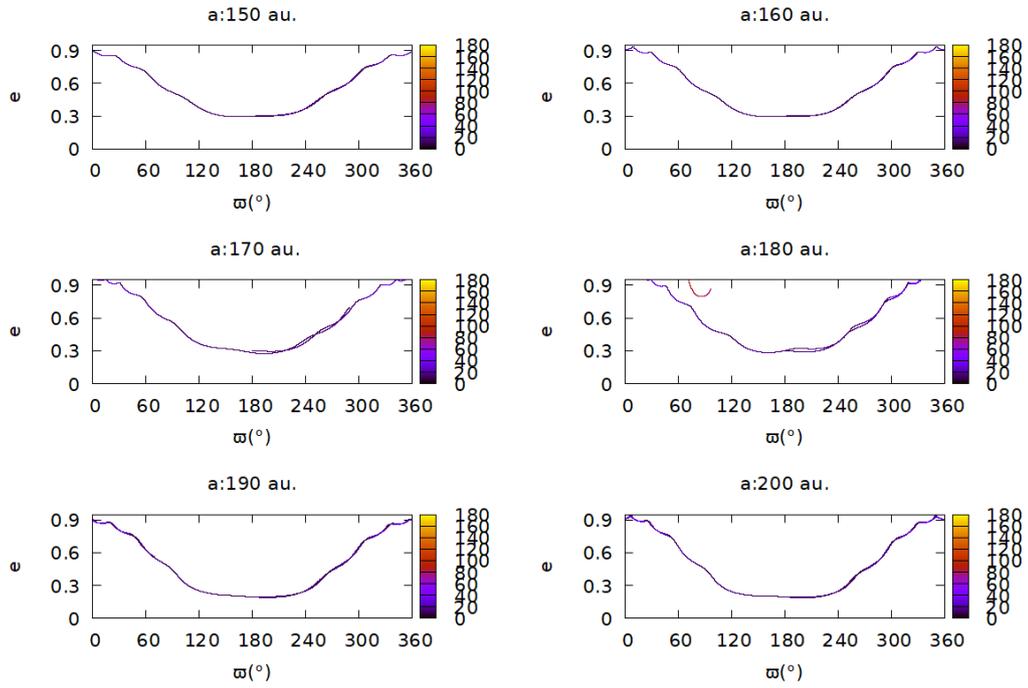
Analizando los resultados de la evolución secular dada por el modelo semianalítico, en el modelo que incluye a los planetas gigantes y al Planeta 9, se comprueba que no existe excitación en la inclinación de las órbitas de las partículas en la zona regular para semiejes  $a < 280$  ua. Las partículas de la figura 2.11 corresponden a dos nichos estables para semiejes grandes y pueden

considerarse una excepción a la dinámica general. Las partículas con semiejes  $a > 280$  ua y excentricidades  $e > 0.2$ , muestran excitación en inclinación de sus órbitas, pero no corresponden a zonas regulares donde la teoría secular es aplicable.

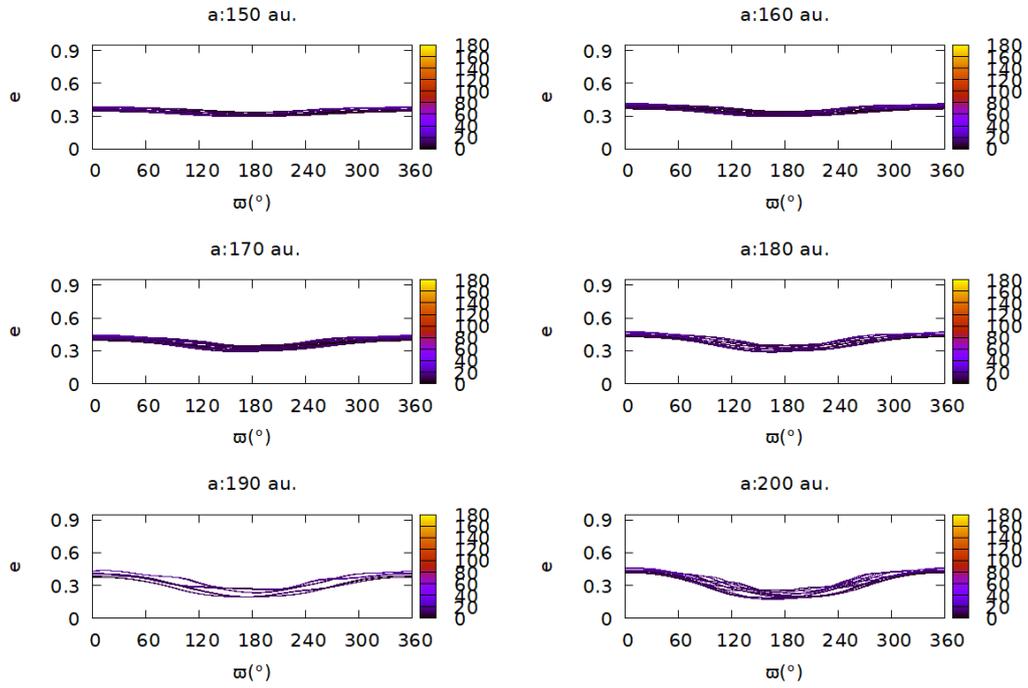
Debido a estos resultados, la teoría secular utilizada en esta tesis no explica la existencia de partículas con altas inclinaciones en la región trasneptuniana (las cuales se estudiarán en la sección 2.3.6), con semiejes  $\leq 200$  ua .

$a(ua)$	$e$	$i$	$\Omega$	$\varpi$
150	0.3	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
160	0.3	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
170	0.3	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
180	0.3	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
190	0.2	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
200	0.2	$10^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$

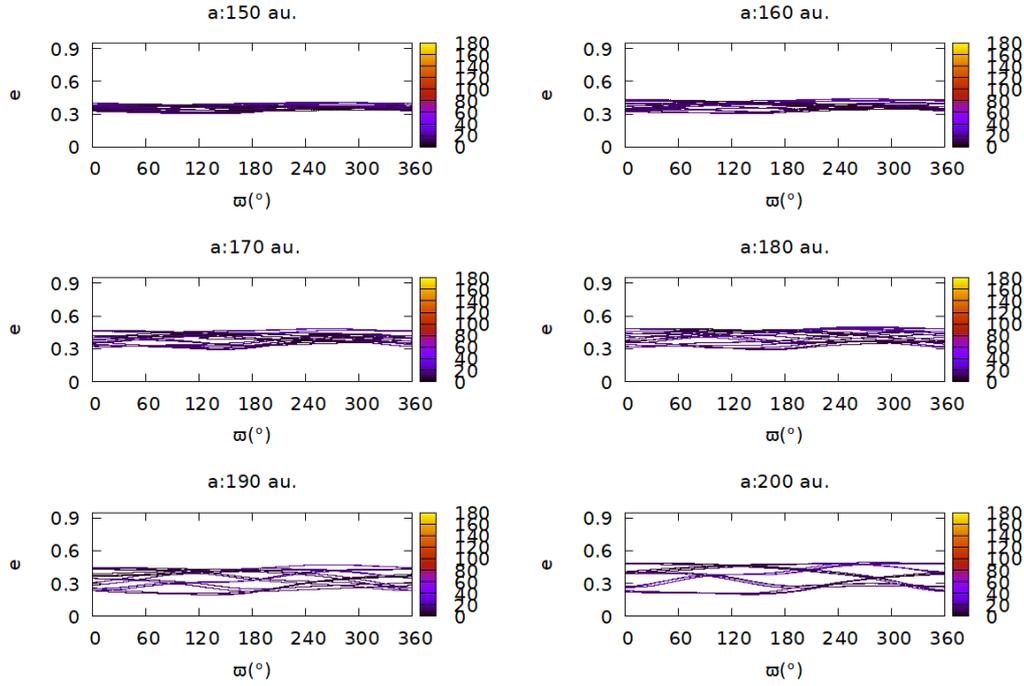
**Tabla 2.3:** Condiciones iniciales de los elementos orbitales de las partículas estudiadas con *evosecular*. Las órbitas de las partículas estudiadas se encuentran inicialmente en el plano de los planetas gigantes e inclinadas con respecto a la órbita del Planeta 9.



**Figura 2.17:** Espacio  $(e, \varpi)$  para las partículas de la tabla 2.3, en un modelo que incluye únicamente al Planeta 9. Análisis semianalítico realizado con *evosecular*. El efecto de la perturbación del Planeta 9 genera grandes variaciones en  $e$ , la cual resulta cualitativamente igual para todas las partículas. En esta región no se observa excitación de las órbitas en inclinación.



**Figura 2.18:** Espacio  $(e, \varpi)$  para las partículas de la tabla 2.3, en un modelo que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Análisis semianalítico realizado con *evosecular*. Los modos forzados modulan las variaciones en  $e$ , pero a medida que el semieje  $a$  crece, el modo forzado del planeta 9 produce una mayor variación en  $e$  y excitación de las órbitas.



**Figura 2.19:** Espacio  $(e, \varpi)$  para las partículas de la tabla 2.3, en un sistema que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. Análisis realizado con el integrador numérico *evorb*. El efecto estabilizador de los modos forzados de los planetas gigantes es claro en esta evolución: existe una modulación en  $e$  e  $i$ .

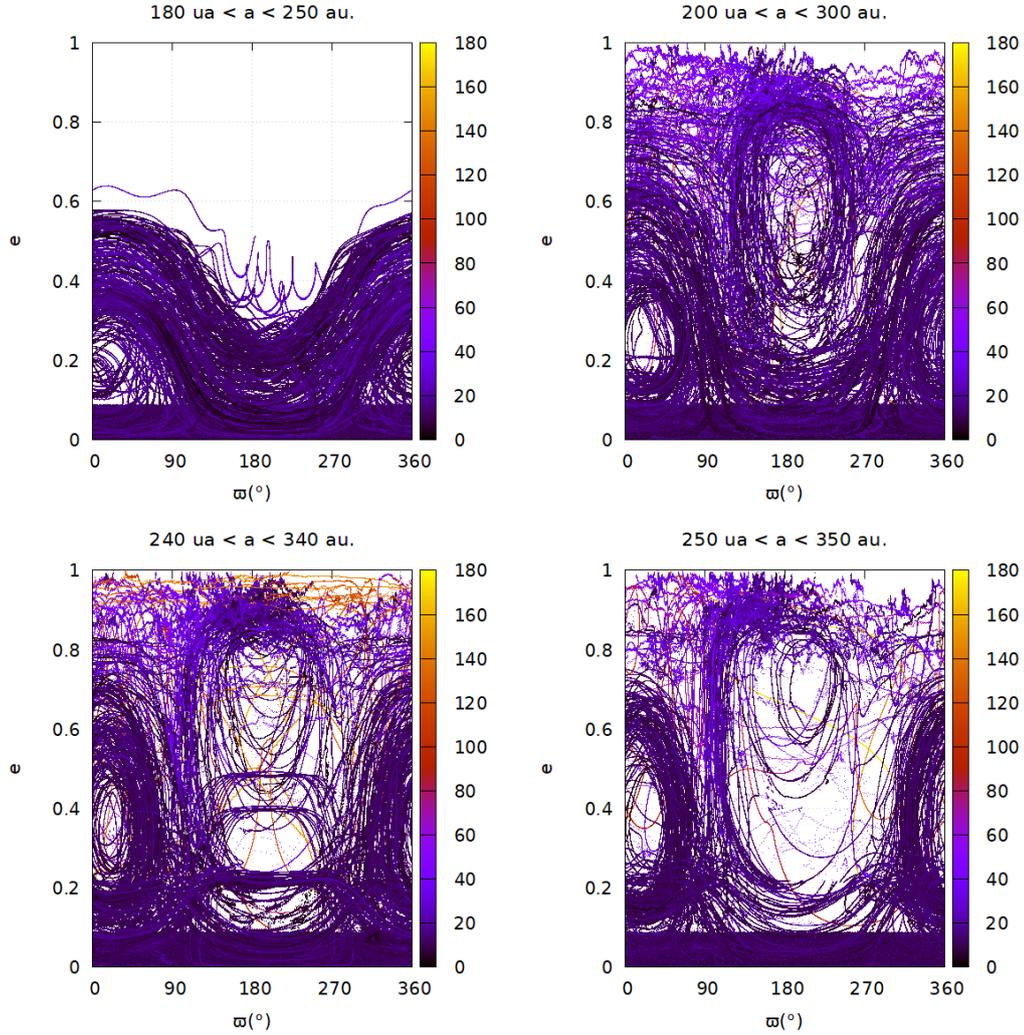
### 2.3.5. Estudio de concentraciones en $\Delta\varpi$ .

El modelo semianalítico utilizado en esta tesis muestra la existencia de puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi$  generados por la dinámica secular, pero presenta el inconveniente de que la validez del mismo está acotada para determinada región del espacio  $(a, e)$ . Por este motivo, en esta sección se estudia la existencia de concentraciones en  $\Delta\varpi$  utilizando integraciones numéricas.

La figura 2.20 muestra el resultado de integrar 240 partículas con  $e$  inicial distribuida uniformemente en el rango  $0.1 \leq e \leq 0.6$ , y  $\varpi$  inicial distribuido uniformemente entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . La integración se realizó por un período de 4000 millones de años. Los valores iniciales de los semiejes estudiados fueron  $a = 210$  ua,  $250$  ua,  $290$  ua y  $300$  ua.

La figura 2.20 reproduce los puntos de equilibrio de las curvas de nivel del Hamiltoniano de la figura 2.5, construida para el caso plano para  $a \geq 250$  ua. Se observan los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ , y para valores similares en  $e$ . Las irregularidades en las trayectorias de la figura 2.20 se debe a la existencia de un grado más de libertad en el caso espacial, y a que la figura

representa la evolución de partículas en evolución secular, resonante y caótica.

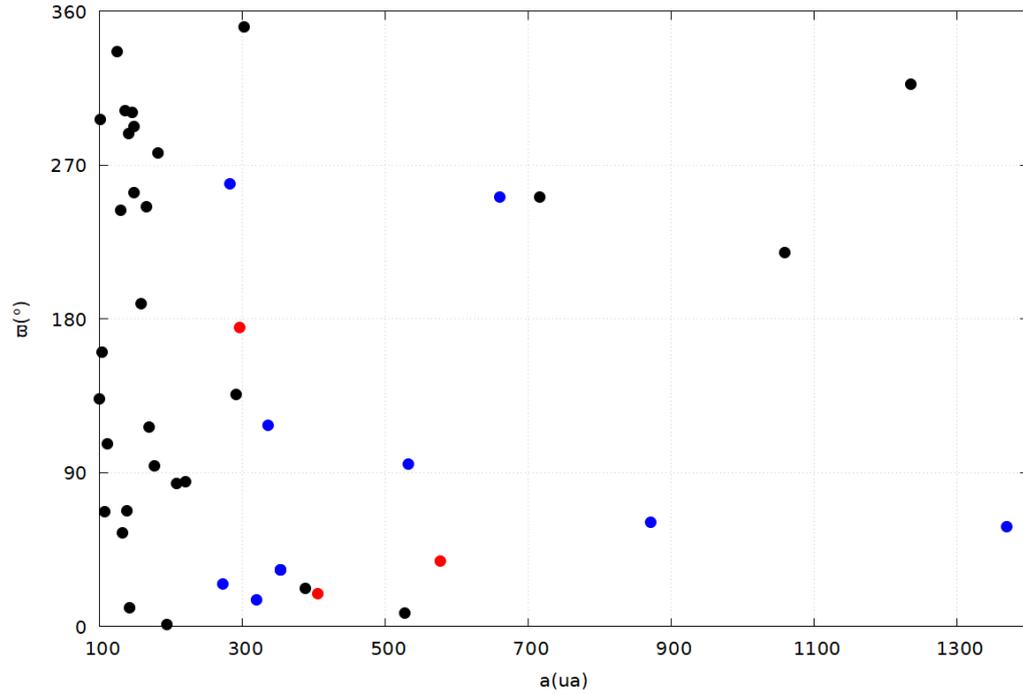


**Figura 2.20:** Espacio  $(e, \varpi)$  para partículas que inician con  $a = 210$  ua, 250 ua, 290 ua y 300 ua. En cada panel se indica el rango de semieje considerado durante la evolución. El código de colores indica la inclinación de las partículas. Análisis realizado con el integrador numérico *evorb*.

### 2.3.6. Estudio de la población conocida.

Entre los comportamientos dinámicamente anómalos observados en la región transneptuniana el agrupamiento en la longitud del perihelio de los objetos con  $a \geq 250$  ua y  $q > 30$  ua, descubierto por los autores Batygin y Brown (2016), reviste gran importancia. Esto se debe a que el mencionado agrupamiento es un resultado esperable de la dinámica producida por un perturbador con alta excentricidad e inclinación (Batygin et al. (2019)).

La figura 2.21 muestra todas los objetos con  $a \geq 100$  ua y  $q > 40$  ua al 29 de julio de 2023<sup>1</sup> en la base del JPL(NASA) (2023). La tabla 2.4 presenta los parámetros de estos objetos. En azul se identifican los objetos representados en la figura 1.3 por los autores Batygin et al. (2019) con  $q > 40$ . Se agregan en rojo los objetos representados en la figura 1.3 que poseen  $30 \text{ ua} < q < 40 \text{ ua}$ .



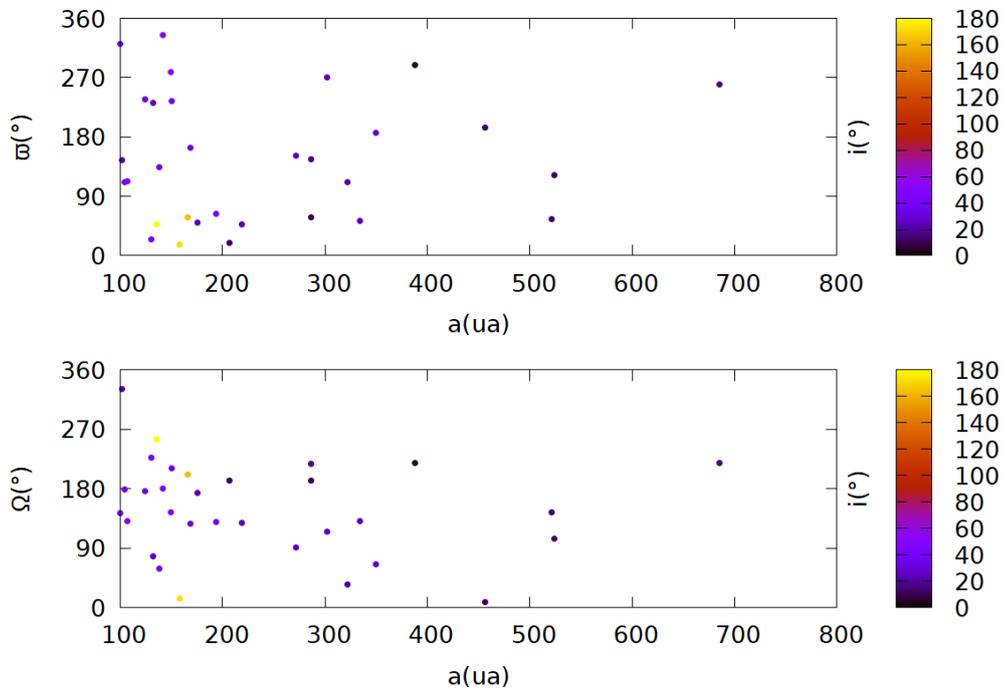
**Figura 2.21:** Cuarenta objetos se encuentran en la base del JPL(NASA) (2023) con  $a \geq 100$  ua y  $q > 40$  ua al 29 de julio de 2023. En azul ( $q > 40$  ua), y rojo ( $30 \text{ ua} < q < 40 \text{ ua}$ ), se identifican los objetos estudiados en el trabajo de Batygin et al. (2019). Siendo  $\langle \varpi \rangle \sim 60^\circ$  el valor medio de  $\varpi$ , 8 de cada 9 objetos estables de los estudiados por Batygin et al. (2019) se encuentran en  $\langle \varpi \rangle \pm 90^\circ$ .

<sup>1</sup>Al momento de terminar de escribir esta tesis.

Nombre	$a(ua)$	$e$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\varpi(^{\circ})$
(2014 US277)	100.4	0.4534	36.36	143.15	133.46
(2008 ST291)	101.2	0.5778	20.74	330.92	296.76
(2017 FE173)	103.8	0.5958	31.04	178.98	160.72
(2014 ST373)	106.9	0.5304	43.15	130.29	67.1
(2020 MK53)	111.3	0.4363	18.48	115.61	106.82
(2013 RE124)	124.3	0.6778	31.6	175.63	336.04
(2015 KE172)	129.3	0.6586	38.43	227.64	243.31
(2014 QS562)	132.1	0.6942	24.92	77.3	54.69
(2022 FN12)	135.9	0.5651	178.4	254.65	301.97
(2014 VP43)	138	0.7032	35.82	59.33	67.57
(2022 LK14)	141.2	0.6541	31.99	285.5	288.49
(2014 SQ403)	142.5	0.6732	43.98	180.17	11.27
(2020 KB56)	145.5	0.7054	7.8	119.97	300.77
(2013 GP136)	148.8	0.7246	33.61	210.78	253.6
(2014 SS349)	148.9	0.6947	48.15	144.14	292.24
(2022 FM12)	158.3	0.6622	172.4	13.42	189.06
(2019 EE6)	165.5	0.5488	162.9	201.04	245.8
(2016 TP120)	169.8	0.7623	32.64	126.64	116.93
(2016 QV89)	176.6	0.7731	21.35	173.09	93.81
(2020 KW54)	181.8	0.7633	6.2	127.89	277.12
(2015 UN105)	194.2	0.7866	37.01	129.28	1.03
(2013 UT15)	207.7	0.7877	10.62	191.91	83.46
(2000 CR105)	220.2	0.8005	22.79	128.33	84.55
(2012 VP113)	273	0.7051	24.04	90.82	24.78
(2013 FT28)	283.2	0.8468	17.42	217.69	258.75
(2018 VM35)	291	0.8466	8.47	192.23	135.67
(2014 WB556)	302.5	0.8587	24.15	114.86	350.52
(2014 SR349)	320.5	0.8516	17.94	35.02	15.94
(2010 GB174)	336.4	0.8562	21.58	130.81	117.49
(2004 VN112)	353.2	0.866	25.51	66.03	32.96
(2016 SD106)	388.3	0.89	4.8	219.49	22.18
(2015 RX245)	463.1	0.9013	12.1	8.58	73.21
(2013 RA109)	527.3	0.9127	12.4	104.79	7.83
(2003 VB12)	532.3	0.8565	11.93	144.26	95.13
(2015 KG163)	660.2	0.9387	14.02	219.18	251.44
(2021 DK18)	716.9	0.938	15.46	322.21	251.1
(2013 SY99)	871.6	0.9426	4.21	29.54	61.26
(2019 EU5)	1059	0.9559	18.22	109.24	218.65
(2021 RR205)	1235	0.9549	7.64	108.33	317.33
(2015 TG387)	1370	0.9525	11.66	300.92	58.48

**Tabla 2.4:** Parámetros de los objetos trasneptunianos con  $a > 100$  ua y  $q > 40$  ua al 29 de julio de 2023. Fuente JPL(NASA) (2023).

En esta sección se estudia la evolución de todos los objetos identificados con  $a > 100$  ua y  $q > 40$  ua en la base del JPL(NASA) (2022) al 6 de agosto de 2022 (25 objetos). La elección de seleccionar los objetos con  $q > 40$  ua se corresponde con la intención de estudiar la evolución de los objetos de la población desacoplada de la influencia gravitacional de Neptuno. La figura 2.22 muestra en su panel superior la ubicación de los objetos estudiados en esta tesis en el espacio  $(a, \varpi)$ , y en el panel inferior en el espacio  $(a, \Omega)$ , detallándose en cada una de los paneles los valores de inclinación mediante el código de colores.



**Figura 2.22:** Distribución en el espacio  $(a, \varpi)$ , panel superior, y  $(a, \Omega)$ , panel inferior, para los 25 objetos con  $a > 100$  ua y  $q > 40$  ua al 6 de agosto de 2022. Fuente JPL(NASA) (2022). El color de los puntos indica la  $i$  de las partículas.

La figura 2.23 muestra la evolución, utilizando el método semianalítico, para los objetos de la figura 2.22 que se encuentran dentro de la zona regular de la figura 2.14 <sup>1</sup> para el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9. Se estudió la evolución por un período de tiempo de  $8.0 \times 10^9$  años. El panel

<sup>1</sup>Todos los objetos tienen valores de  $a \leq 170$  ua, y valores de excentricidad que los ubica en la zona regular de la figura 2.14 en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9.

superior muestra la evolución en un sistema constituido solo por el Planeta 9, y el panel inferior muestra la evolución considerando además a los planetas gigantes. La regularidad de la evolución mostrada en el panel inferior de esta figura se verifica con el mismo panel de la figura 2.24, obtenida mediante integración numérica exacta <sup>2</sup>.

La figura 2.24 muestra los resultados de estudiar la evolución de todos los objetos de la figura 2.22 utilizando el integrador numérico `evorb`. En el panel superior se estudia la evolución de los objetos de la figura 2.21 que se encuentran en la zona de evolución irregular de la figura 2.14, y en el panel inferior las que se encuentran en la zona regular. La evolución dada por el modelo semianalítico en la zona regular (panel inferior figura 2.23), concuerda aproximadamente con los resultados de la integración numérica (panel inferior figura 2.24). Estas figuras muestran que la evolución de los objetos en esta zona puede explicarse mediante la teoría secular siempre que se considere un sistema integrado por los planetas gigantes y el Planeta 9.

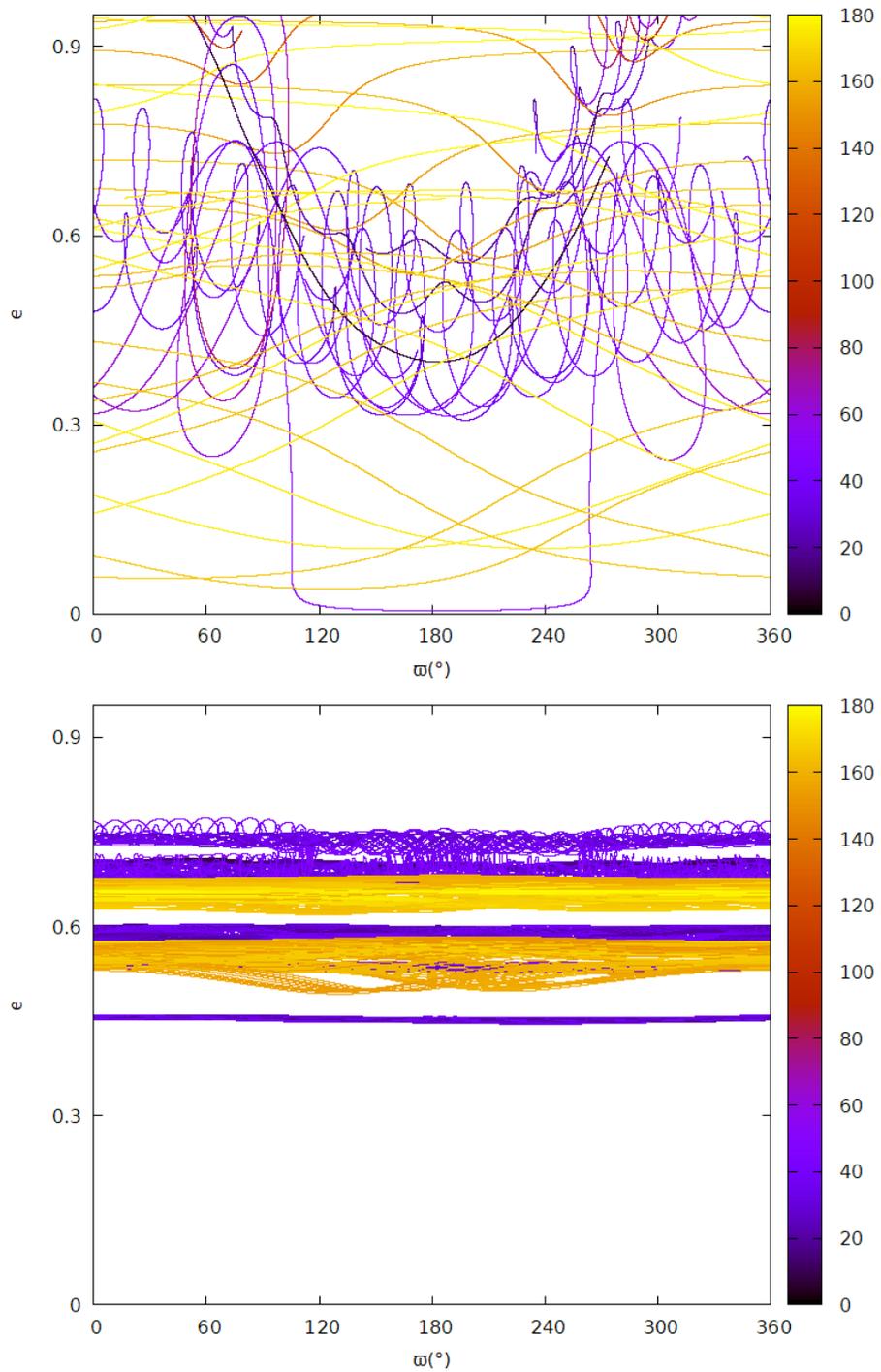
La figura 2.25 permite analizar el efecto de las perturbaciones del Planeta 9, de los planetas gigantes, y la combinación de ambos efectos. En esta figura se analiza la evolución de todas los objetos representadas en la figura 2.22 utilizando el integrador `evorb` <sup>3</sup>. El panel superior muestra la evolución considerando solo al Planeta 9, el panel central muestra la evolución incluyendo solo a los planetas gigantes, y el panel inferior muestra la evolución incluyendo a los planetas gigantes y al Planeta 9.

El análisis de la figura 2.25 permite visualizar el efecto dinámico de la inclusión de un perturbador con las características del Planeta 9: es capaz de generar órbitas con alta inclinación y grandes variaciones en la excentricidad de los objetos. La presencia de los planetas gigantes contrarresta el efecto de las perturbaciones del Planeta 9, generando una evolución regular, la cual no puede ser explicada por el modelo secular en su totalidad: solo es válido en las zonas regulares analizadas en la sección 2.3.3.

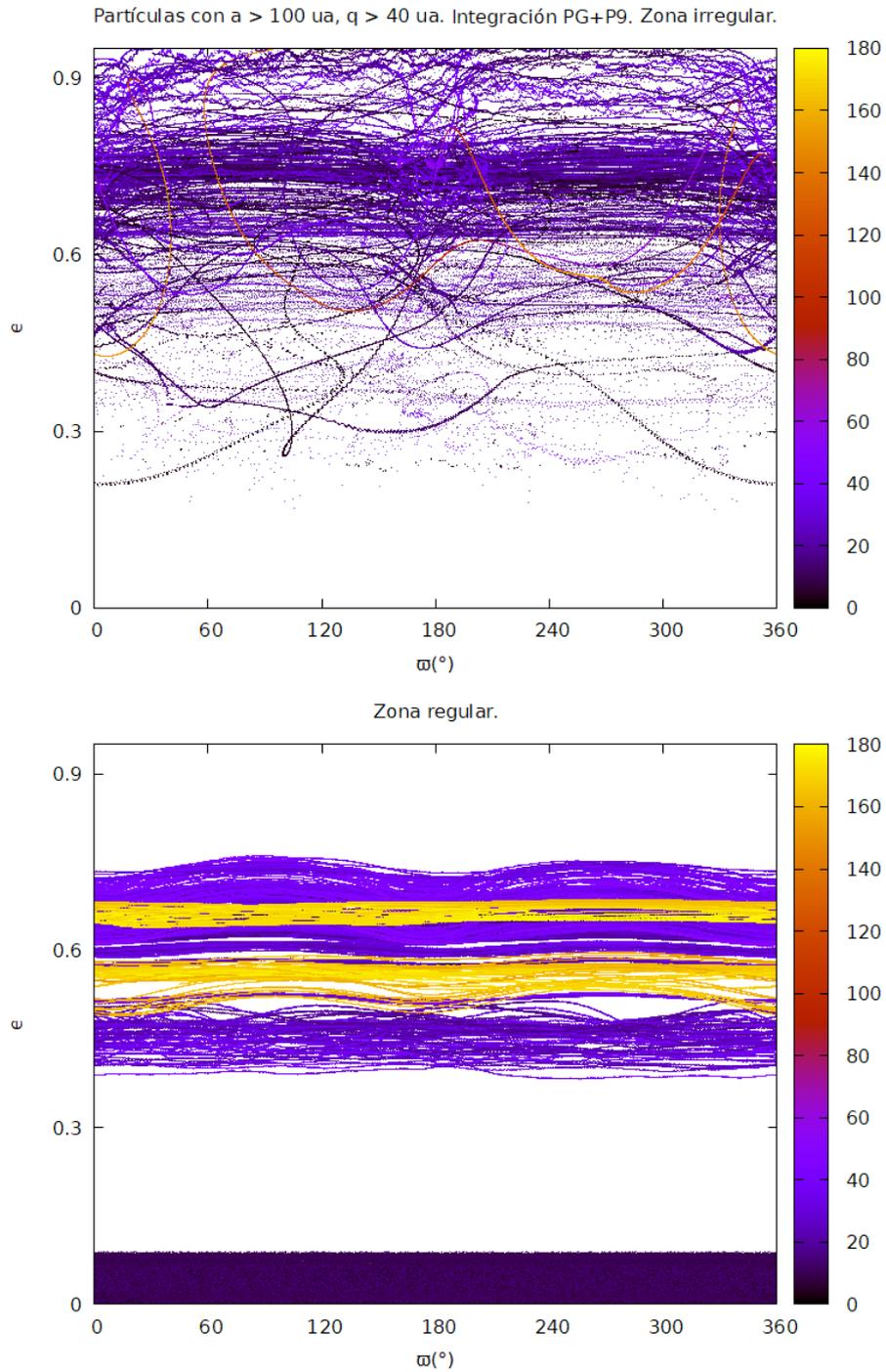
---

<sup>2</sup>La integración numérica se realizó por un período de  $4.0 \times 10^9$  años.

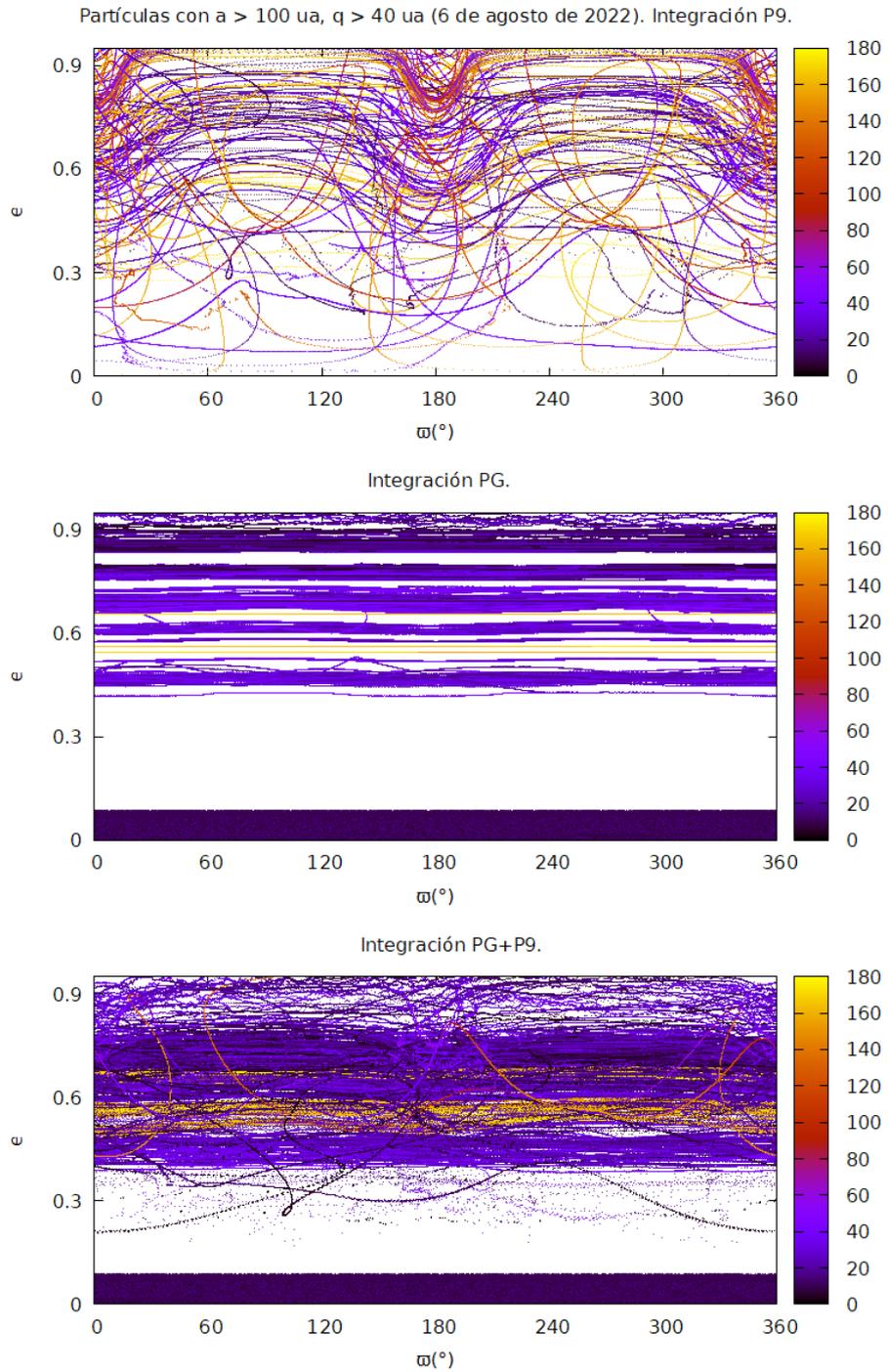
<sup>3</sup>La integración numérica se realizó por un período de  $3.0 \times 10^9$  años.



**Figura 2.23:** Evolución secular utilizando el código `evosecular` de los objetos representadas en la figura 2.22 que están dentro de la zona regular de la figura 2.14 (en el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9), en un sistema constituido por el Planeta 9 (panel superior), y en un sistema que incluye el Planeta 9 y los planetas gigantes (panel inferior).



**Figura 2.24:** Integraciones numéricas con `evorb` para todos los objetos representadas en la figura 2.22, considerando un sistema que incluye al Planeta 9 y los planetas gigantes. El panel superior muestra los objetos en la zona no regular de la figura 2.14 para el modelo que incluye a los planetas gigantes y el Planeta 9. El panel inferior muestra los objetos de la zona regular de la mencionada figura en el mismo modelo.



**Figura 2.25:** Comparación realizada con el integrador `evorb` para la evolución de los objetos representadas en la figura 2.22, considerando solo al Planeta 9 (panel superior), planetas gigantes (panel central), y planetas gigantes y Planeta 9 (panel inferior).

### 2.3.7. Conclusiones.

Los resultados del modelo semianalítico secular muestran que en el modelo que considera al Planeta 9 y los planetas gigantes en el caso plano se producen dos puntos de equilibrio alrededor de  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (para  $e < 0.6$ ), y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (para  $e \geq 0.6$ ), para  $a \geq 250$  ua. Estos resultados son verificados en forma numérica con la figura 2.20. Para las partículas en el punto de equilibrio antialineado se producen las mejores condiciones de observabilidad dado su bajo valor de perihelio.

En el caso espacial el modelo semianalítico solo es aplicable en las zona del espacio  $(a, e)$  donde la evolución es regular y está dado por los resultados de la figura 2.14 en su panel derecho para  $a < 210$  ua. Para valores de semiejes mayores la evolución es regular para  $e < 0.2$ . Los resultados de la figura 2.11 muestra que existen puntos de equilibrios para  $a \geq 210$  ua y  $e < 0.2$  alrededor de  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . En esta tesis encontramos dos de estos puntos de equilibrio para los valores de semiejes  $a = 450$  ua y  $a = 550$  ua para  $e \sim 0.2$ . La misma figura muestra que las órbitas de las partículas pueden sufrir grandes variaciones en  $i$  para valores de semiejes altos. En el caso espacial, las mejores condiciones de observabilidad se producen para  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  y  $270^\circ$ . Para estos valores de  $\Delta\varpi$  las partículas se encuentran cercanas al plano de referencia y en su distancia mínima de perihelio.

El estudio de la evolución secular de partículas en la región regular del panel derecho de la figura 2.14 muestra que el efecto estabilizador de los planetas gigantes dificulta que las partículas sufran grandes variaciones en su inclinación para valores de semiejes  $a \leq 280$  ua.

En el estudio de la evolución de los objetos conocidas de la región transneptuniana con  $a \geq 100$  ua no encontramos partículas que alcancen altos valores de  $i$ .

# Capítulo 3

## Dinámica resonante.

La dinámica secular analizada en el capítulo 2 se enmarca dentro de las teorías de perturbaciones, donde se eliminan los ángulos rápidos  $(\lambda, \lambda_p)$ , de la función perturbadora  $R$ . Este modelo es valido siempre que las partículas no estén en resonancias de movimientos medios (RMM), con los planetas. En este caso, los términos de la función perturbadora que involucren combinaciones de  $\lambda$  y  $\lambda_p$  que resulten de variación lenta no pueden ser eliminados. A estas combinaciones de variación lenta se les conoce como ángulos críticos debido a que su evolución rige la dinámica de las partículas resonantes.

La función perturbadora, escrita en función de los elementos orbitales  $(a, e, i, \lambda, \lambda_p, \varpi, \Omega)$ , de un planeta con órbita fija sobre una partícula es (ver capítulo 6 en Murray y Dermott, 2000, y capítulos 2 y 6 en Gallardo, 2022):

$$R(a, e, i, \lambda, \lambda_p, \varpi, \Omega) = \sum_1 C_i \cos(\sigma_i) \quad (3.1)$$

Los ángulos críticos se definen como :

$$\sigma_i = k\lambda - k_p\lambda_p + j_3\varpi + j_4\varpi_p + j_5\Omega + j_6\Omega_p \quad (3.2)$$

donde  $k$  y  $k_p$  son dos enteros positivos,  $\lambda, \lambda_p, \varpi, \varpi_p, \Omega$  y  $\Omega_p$  son las longitudes medias, las longitudes del perihelio y las longitudes del nodo ascendente de la partícula y del planeta perturbador respectivamente.

Debido a que estos ángulos deben ser invariantes ante un cambio en el origen de los mismos, debe cumplirse la relación de D'Alembert

$$k - k_p + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 = 0 \quad (3.3)$$

La necesidad de que estos ángulos sean además invariantes ante un cambio en la definición del nodo de referencia, del periastro o de la dirección del eje  $z$ , hace necesario que  $|j_5 + j_6|$  debe ser par (ver Hamilton, 1994).

Los coeficientes  $C_i$  en 3.1 son funciones del tipo

$$C_i = f(a, a_p) e^{|j_3|} e_p^{|j_4|} s^{|j_5|} s_p^{|j_6|} + \text{términos de orden superior} \quad (3.4)$$

donde  $s = \sin(i/2)$  y  $s_p = \sin(i_p/2)$ . Los términos  $a$ ,  $a_p$ ,  $e$ ,  $e_p$ ,  $i$  y  $i_p$  son los semiejes, las excentricidades y las inclinaciones de la partícula y del planeta perturbador.

De acuerdo a 3.3 debe verificarse que

$$|k - k_p| = |j_3 + j_4 + j_5 + j_6| \quad (3.5)$$

donde el término dinámicamente más relevante en 3.1 será el de mínimo orden definido por el grado de la resonancia  $q = |k - k_p|$ .

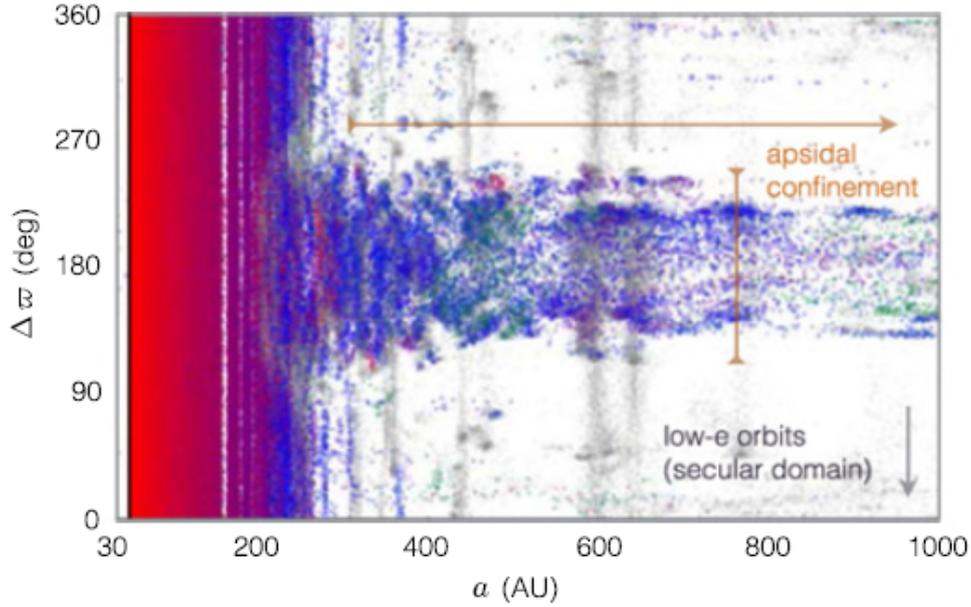
Dado que  $|j_5 + j_6|$  debe ser par, los términos en la función perturbadora que dependen de la inclinación serán de orden 2 o superior. Debido a que pueden existir términos de orden 1 que dependan de la excentricidad, la evolución dinámica será más afectada por la excentricidad que por la inclinación.

Las partículas atrapadas en resonancias, debido a las perturbaciones del Planeta 9, sufrirán cambios en su energía orbital y momento angular de naturaleza diferente a las generadas por la dinámica secular. Analizar los efectos dinámicos de la evolución resonante generada por un perturbador externo, con alta excentricidad e inclinación, permitirá determinar la relevancia de la dinámica resonante en el problema considerado, así como comprender la dinámica en las regiones donde la teoría secular no es aplicable.

Diversos trabajos (Batygin y Brown, 2016, Beust, 2016, Malhotra et al. 2016, J. Becker et al. 2017, Batygin y Morbidelli, 2017, Millholland y Laughlin, 2017, Hadden et al. 2018 y Batygin et al. 2019), han analizado la dinámica resonante generada por el Planeta 9 para establecer la relevancia de la misma en la evolución dinámica del cinturón de Kuiper distante.

Batygin y Brown, 2016 mostraron para el caso coplanar que un perturbador externo y excéntrico es capaz de producir agrupamientos en la longitud del perihelio de las partículas resonantes con el mismo. En las simulaciones realizadas, los objetos del cinturón de Kuiper (KBO por sus siglas en inglés), sobrevivientes poseen sus perihelios antialineados con el del Planeta 9 ( $\Delta\varpi \sim 180^\circ$ ), y

sufren capturas resonantes temporales del orden de  $\sim 10 - 100$  millones de años (ver capítulo 5 Batygin y Brown, 2016). Los autores identificaron partículas en las resonancias 2:1, 3:1, 5:3, 7:4, 9:4, 11:4, 13:4, 23:6, 27:17, 29:17 y 33:19 con el planeta 9. La figura 3.1 muestra el resultado de estas integraciones.



**Figura 3.1:** Evolución de  $\Delta\varpi$  en función del semieje  $a$ , de 400 partículas integradas durante 4000 millones de años considerando a los planetas gigantes y al Planeta 9 en el mismo plano. Las partículas fueron distribuidas inicialmente con  $\Delta\varpi$  aleatorio,  $50 \text{ ua} < a < 500 \text{ ua}$ ,  $30 \text{ ua} < q < 50 \text{ ua}$ ,  $i = 0^\circ$ . El color identifica el valor del semieje inicial y la transparencia la posibilidad de observación de la partícula (los puntos grises indican nula posibilidad de observación). Las partículas con  $a \geq 250$  ua muestran un confinamiento alrededor de  $\Delta\varpi = 180^\circ$  y se encuentran atrapadas en resonancias con el Planeta 9. Fuente: Batygin y Brown, 2016.

Beust, 2016 analiza mediante un enfoque semianalítico cual de las dos dinámicas (secular o resonante), es capaz de producir los agrupamientos observados por Batygin y Brown, 2016, pero sin llegar a discernir que dinámica es relevante. La dinámica secular posee la ventaja de que las partículas no deben estar confinadas a valores específicos en sus semiejes, pero no poseen la protección de fase generadas por la resonancias que evite que las partículas con perihelios antialineados con el del Planeta 9 tengan encuentros con el mismo, y sean eyectadas del sistema.

Malhotra et al. 2016 y J. Becker et al. 2017 buscaron restringir los parámetros orbitales del Planeta 9 considerando las partículas en Resonancias de Movimientos Medios (RMM), con el mismo. Particularmente, Malhotra et al. 2016 analizaron la relación entre los períodos de los 6 objetos agrupados conocidos en ese momento llegando a la conclusión que 4 de estos objetos se podrían encontrar cerca de las resonancias N:1 y N:2 con un planeta perturbador con semieje  $a \sim 665$  ua.

Batygin y Morbidelli, 2017 muestran mediante un estudio numérico y semi-analítico que la dinámica resonante es la responsable de la estabilidad a largo plazo de los KBO que se encuentran en el plano del Planeta 9. Los objetos que no están en RMM con el Planeta 9, se eliminan por encuentros cercanos con el mismo. Introduciendo pequeñas inclinaciones a los objetos, las partículas evolucionan caóticamente, saltando de resonancia en resonancia.

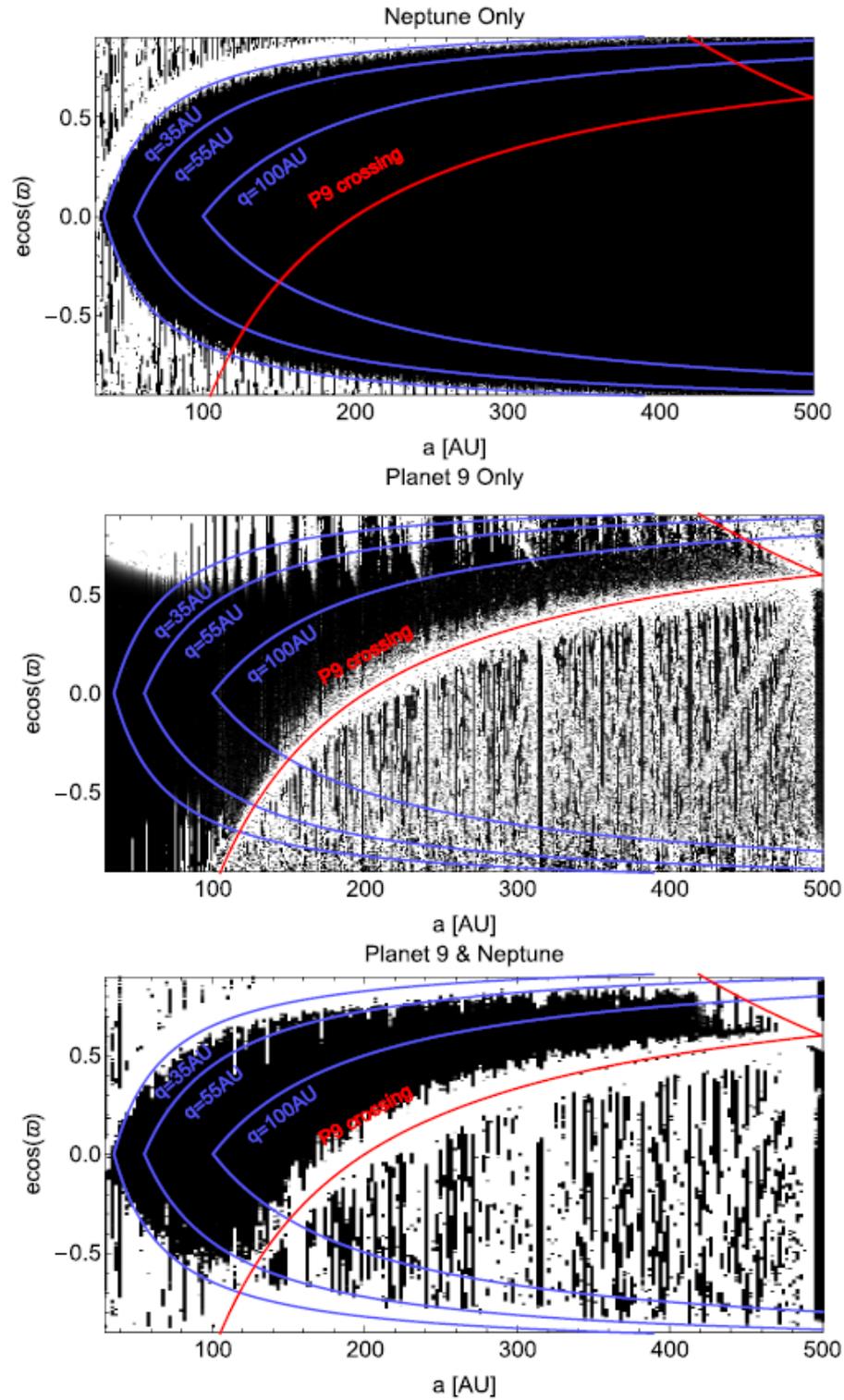
Millholland y Laughlin, 2017 y J. Becker et al. 2017 (considerando  $i_9 = 30^\circ$ ), y Hadden et al. 2018 (caso plano), encuentran que los KBO estables a largo plazo, no permanecen vinculados a una sola commensurabilidad, sino que saltan de resonancia en resonancia en escalas de  $\sim$  Ga. Esto hace muy difícil identificar a los KBO resonantes de los no resonantes, y determinar el ángulo crítico.

Hadden et al. 2018 encuentra que la inclusión de Neptuno como perturbador puntual en las simulaciones, conduce a difusión caótica en los semiejes de los objetos transneptunianos (en trabajos anteriores se modeló a Neptuno utilizando el correspondiente término  $J_2$  (Batygin y Brown, 2016), o modelando su potencial a orden cuadrupolar (Batygin y Morbidelli, 2017)).

Hadden et al. 2018 utiliza el criterio de superposición de resonancias para determinar el origen de las zonas caóticas (ver por ejemplo Holman y Murray, 1996). Utilizando el código REBOUND (Rein y Liu, 2012), y el indicador de caos MEGNO <sup>1</sup> (Cincotta et al. 2003), realiza las figura 3.2, donde los colores claros corresponden a zonas caóticas y los colores oscuros a zonas regulares. La figura inferior muestra que la zona caótica en el sistema que incluye a Neptuno y al Planeta 9, corresponde a la superposición de las zonas caóticas considerando ambos planetas individualmente. Además, las partículas antialineadas con el Planeta 9 se encuentran en una zona de evolución caótica.

---

<sup>1</sup>Mean exponential growth factor of nearby orbits.



**Figura 3.2:** Mapas dinámicos para la evolución caótica debido a Neptuno, al Planeta 9, y a la superposición de sus efectos (caso plano). Las regiones blancas corresponden a zonas caóticas y las regulares están pintadas en negro. Los valores positivos corresponden a  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y los valores negativos a  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Fuente Hadden et al. 2018.

Bailey et al. 2018 encuentran que la tendencia de los KBO a saltar en forma aleatoria entre resonancias convierte en tarea muy difícil determinar el valor del semieje del Planeta 9 a partir de la distribución de períodos orbitales de los KBO observados.

Este breve análisis de los resultados obtenidos en diferentes trabajos plantea las principales interrogantes a responder sobre la dinámica resonante producida por un perturbador externo e inclinado en la región trasneptuniana:

1. Identificar la red de resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9.
2. Identificar las resonancias más fuertes y caracterizar sus propiedades.
3. Identificar regiones caóticas y estables debido a las resonancias.

### 3.1. Modelo semianalítico espacial

Las dificultades y limitaciones que encontramos en el desarrollo de una expresión analítica para la función perturbadora en el caso secular (sección 2.1), son aplicables al caso resonante. Los desarrollos analíticos obtenidos para la función perturbadora en el caso resonante solo son validos para  $e < 0.6$  (Namouni y Morais, 2018, Lei, 2019, Namouni y Morais, 2020). Por este motivo, se recurrirá a un enfoque semianalítico similar al utilizado en 2.3.3 siguiendo el desarrollo presentado en Gallardo, 2020.

El Hamiltoniano espacial para un objeto de masa despreciable perturbado por un planeta en variables canónicas de Poincare es de acuerdo a la ecuación 2.9 (ver también Gallardo, 2020):

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_p \Lambda_p - R(L, L - G, G - H, \lambda, -\varpi, -\Omega, \lambda_p) \quad (3.6)$$

Donde el primer término es el potencial kepleriano correspondiente al potencial del Sol, el segundo término surge del pasaje al espacio de fase extendido para eliminar la dependencia temporal del Hamiltoniano (ver sección 2.1), donde se define a la longitud media del planeta perturbador  $\lambda_p$ , como una nueva variable y a  $\Lambda_p$  como su momento conjugado, siendo  $n_p = \frac{d\lambda_p}{dt}$  el movimiento medio del planeta perturbador. El último término es la función perturbadora entre la partícula y el planeta perturbador. Para calcular numéricamente la

función perturbadora, el método presentado en Gallardo, 2006, y Gallardo, 2020 asume que durante un ciclo resonante las variables  $(e, i, \varpi, \Omega)$  son constantes. De esta forma el Hamiltoniano se reducirá en dos grados de libertad. Si  $(e, i, \varpi, \Omega)$  son constantes, ya no son variables a resolver, sino parámetros. El nuevo Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}' = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_p \Lambda_p - R(L, \lambda, \lambda_p) \quad (3.7)$$

Las tres variables angulares del problema  $(\lambda, \lambda_p, \varpi)$  aparecen en la combinación  $\sigma = k\lambda - k_p \lambda_p - (k - k_p)\varpi$ . Este ángulo, conocido como ángulo crítico, es de variación lenta y determina la dinámica resonante. Como  $\varpi$  es constante en este modelo, se define una nueva variable  $\theta = k\lambda - k_p \lambda_p$ .

Realizando la siguiente transformación de canónica

$$\Sigma = L/k, \quad \theta = k\lambda - k_p \lambda_p \quad (3.8)$$

$$\Gamma = k_p L/k + \Lambda_p, \quad \lambda_p \quad (3.9)$$

el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H}' = -\frac{\mu^2}{2(k\Sigma)^2} + n_p \Lambda_p(\Sigma, \Gamma) - R(\Sigma, \theta, \lambda_p) \quad (3.10)$$

Realizando un promediado en la única variable rápida  $(\lambda_p)$ , del Hamiltoniano, su momento conjugado  $\Gamma$  será constante. Esto lleva a que el término  $n_p \Lambda_p$  en la ecuación 3.10 pueda escribirse como  $n_p \Lambda_p = n_p \Gamma - n_p k_p \Sigma$ , y dado que el primer término de la derecha es constante, no será tenido en cuenta en el Hamiltoniano. El Hamiltoniano resultante queda

$$\mathcal{H}'(\Sigma, \sigma) = -\frac{\mu^2}{2(k\Sigma)^2} + n_p k_p \Sigma - R(\Sigma, \sigma) \quad (3.11)$$

donde  $R$  es la función perturbadora promediada en  $\lambda_p$  manteniendo  $\sigma$  constante.

El método para calcular semianalíticamente la función perturbadora se encuentra detallado en Gallardo, 2020.

## 3.2. Resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9.

Utilizando el código `superatlas` (Gallardo, 2020) se estudiaron las resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9, para valores de semiejes comprendidos entre:  $30 \text{ ua} \leq a \leq 700 \text{ ua}$ , cuyas combinaciones de  $k$  y  $k_p$  sea menor o igual 50. Este código calcula  $R(\sigma)$ ,  $\Delta R$ , el ancho total de las resonancias, la ubicación de los puntos de equilibrio y los periodos de libración de pequeña amplitud.

Los parámetros utilizados en este modelo fueron:

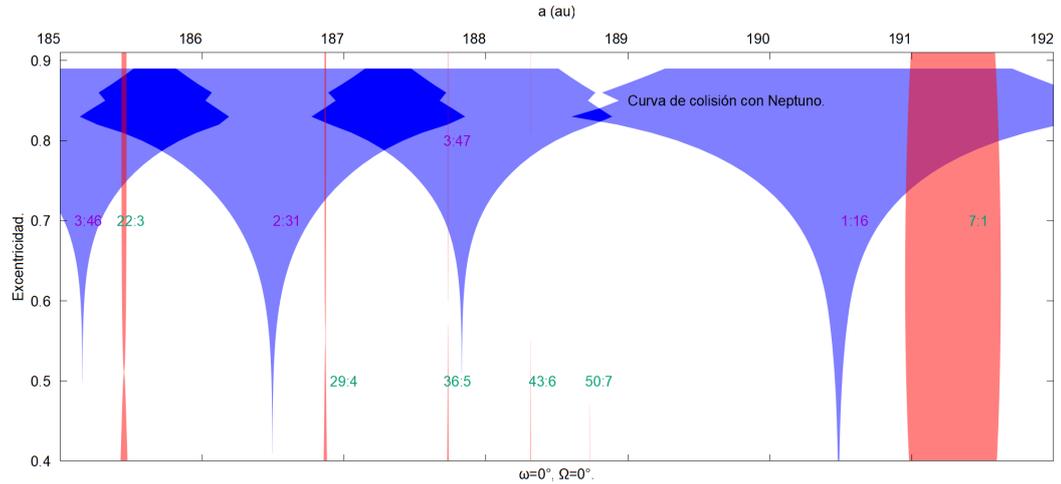
- Partícula:  $i = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $\varpi = 0^\circ$  y  $\varpi = 180^\circ$ .
- Neptuno:  $e_8 = 0$ ,  $i_8 = 0^\circ$ ,  $\Omega_8 = 0^\circ$ ,  $\varpi_8 = 0^\circ$ .
- Planeta 9:  $e_9 = 0.6$ ,  $i_9 = 10^\circ$ ,  $\Omega_9 = 0^\circ$ ,  $\varpi_9 = 0^\circ$ .

Con estos parámetros la partícula se encuentra en el mismo plano que Neptuno. Manteniendo los parámetros fijos de los planetas, se estudia en este capítulo las estructuras de las resonancias para partículas con  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ , y en la sección 3.2.2 se estudiará las resonancias para otros valores de  $\Delta\varpi$ . En todos los experimentos se mantiene fijo el valor de  $\Omega$  y se varía el argumento de perihelio  $\omega$ , de la partícula.

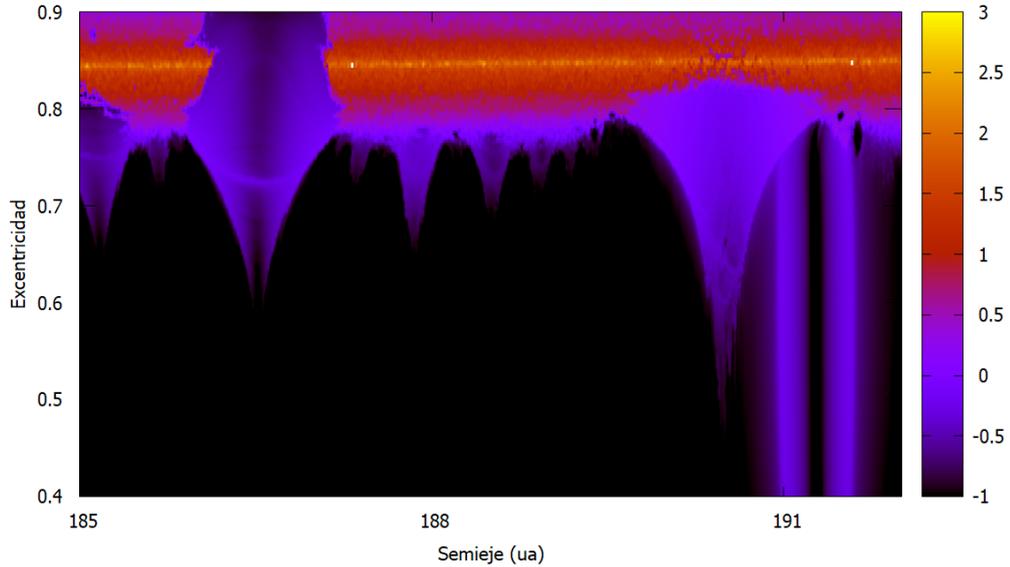
La figura 3.3 muestra el resultado de utilizar este código semianalítico para modelar las resonancias generadas por Neptuno (azul), y el Planeta 9 (rojo), en la región comprendida entre  $185 \text{ ua} \leq a \leq 192 \text{ ua}$ . El código `superatlas` permite ajustar la distancia de encuentro próximo ( $fR_{Hill}$ , siendo  $f$  un entero que multiplica al Radio de Hill del planeta), y en este experimento se definió dicha distancia tomando  $f = 3.0$  para poder estudiar los anchos estables de las resonancias. La línea horizontal en  $e \sim 0.85$  marca la línea de colisión con Neptuno.

Los resultados del código concuerdan notablemente con el mapa dinámico de la figura 3.4 generado con `orbemapa` (Gallardo 2022, comunicación personal), donde la escala de colores indica la variación en el semieje de la partícula ( $\Delta a$ ), en escala logarítmica. El mapa dinámico se construye realizando integraciones numéricas en una cuadrícula  $(a, e)$  durante  $N$  períodos orbitales. Calculando el promedio de la variación de  $a$  (considerando breves períodos de tiempo para eliminar las variaciones de corto período), y el valor máximo alcanzado por

este valor medio, se define  $\Delta a$  que se representa con el color correspondiente en el mapa. Para estos mapas se tomaron  $N = 500$  períodos, y se evaluó  $a$  cada 0.01 ua, y  $e$  cada 0.02. Las regiones oscuras del mapa dinámico corresponden a regiones regulares ( $\Delta a \sim 0.1$  ua). Las regiones azules se corresponden con las oscilaciones debidas al movimiento resonante. Las regiones verticales oscuras dentro de las resonancias (ubicadas cerca de  $a_0$ , el valor nominal de las resonancias), corresponden a regiones de libración de pequeña amplitud alrededor de los puntos de equilibrio dentro de las resonancias. La zona superior en color naranja corresponde con la línea de colisión con Neptuno. A la derecha se observa la superposición de la resonancia 7:1 con el Planeta 9 y la 1:16 con Neptuno.



**Figura 3.3:** Representación de las resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9 entre  $a = 185$  ua y  $a = 192$  ua utilizando el código `superatlas` (Gallardo, 2020). La partícula test posee los parámetros detallados al inicio de esta subsección. La figura presenta el ancho de las resonancias estables para  $f = 3.0$ . La excentricidad varía según lo indicado en el eje y.



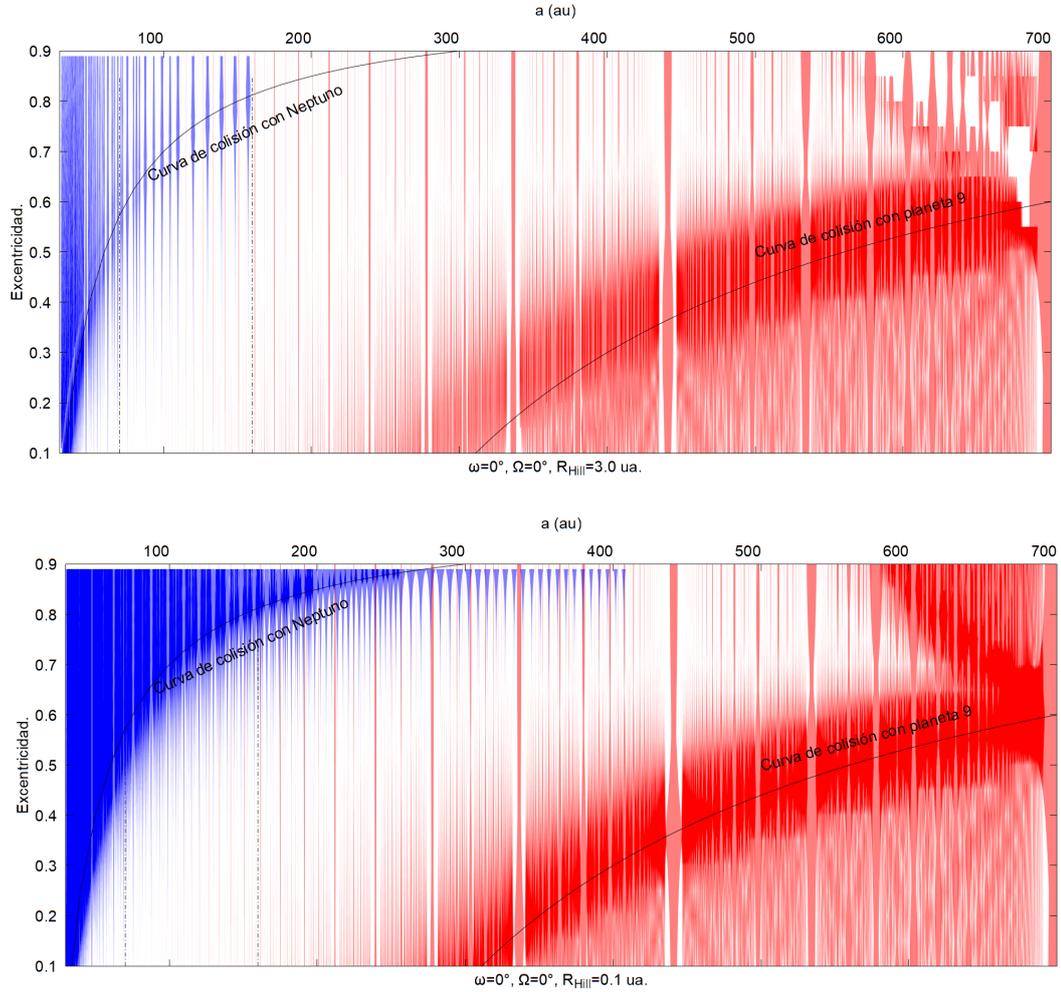
**Figura 3.4:** Mapa dinámico representando  $\log(\Delta a)$  en colores de la región modelada en la figura 3.3. Las anomalías medias de la partícula test y del Planeta 9 son  $M = 180^\circ$ , y  $M_9 = 180^\circ$  respectivamente.

### 3.2.1. Red de resonancias generadas por Neptuno y el Planeta 9.

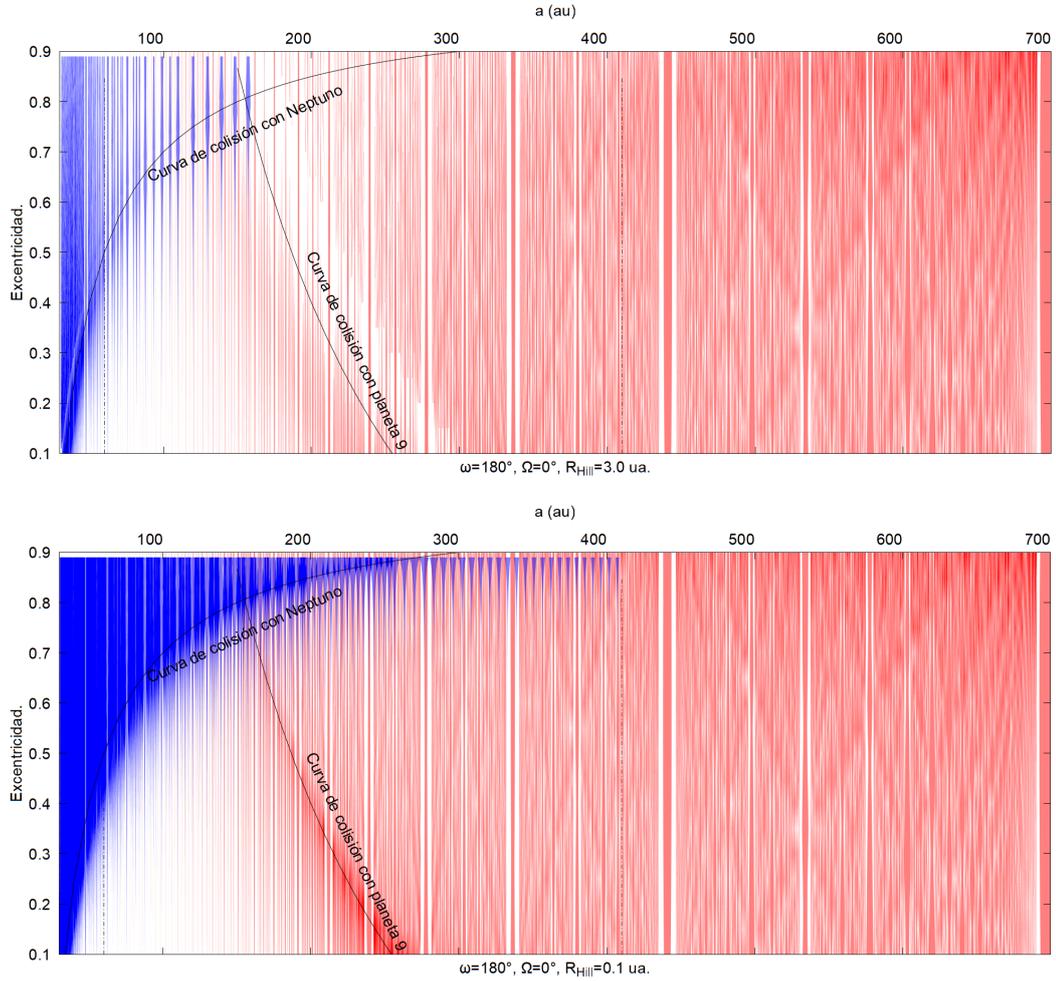
Siguiendo a Hadden et al. 2018 se analizan las regiones donde las resonancias de Neptuno y del Planeta 9 coexisten, y se investiga la existencia de superposición de las mismas. Se modelaron las resonancias entre  $30 \text{ ua} \leq a \leq 700 \text{ ua}$  con anchos superiores a  $\Delta a = 0.001 \text{ ua}$  para  $f = 3.0$  (anchos estables), y  $f = 0.1$  (anchos máximos).

Las figuras 3.5 y 3.6 muestran en rojo las resonancias generadas por el Planeta 9, y en azul las generadas por Neptuno para los casos donde  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (figura 3.5), y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (figura 3.6). Los paneles superiores de ambas figuras muestran los anchos estables de las resonancias modelando las resonancias para  $f = 3.0$  y los paneles inferiores muestran los anchos máximos de las resonancias considerando  $f = 0.1$ . Se indican las curvas de colisión con Neptuno y el planeta 9 mediante líneas continuas. Las líneas verticales punteadas delimitan la zona, en cada figura, donde las resonancias de Neptuno y del Planeta 9 coexisten.

La tabla 3.1 permite comparar los períodos de algunas de las resonancias de Neptuno y del Planeta 9.



**Figura 3.5:** Atlas de resonancias generado por el modelo semianalítico discutido en la sección 3.1, utilizando el código `superatlas` (Gallardo, 2020). Las resonancias generadas por Neptuno se dibujan en azul, y las generadas por el Planeta 9 en rojo. En el panel superior se modelan las resonancias con  $f = 3.0$ , lo cual permite observar los anchos estables de las resonancias. En el panel inferior se modelan las resonancias con  $f = 0.1$ , lo que permite estudiar los anchos resonantes máximos y la superposición de resonancias. Se dibujaron todas las resonancias con anchos superiores a  $\Delta a = 0.001$  ua. La partícula test posee los parámetros detallados al inicio del capítulo para  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .



**Figura 3.6:** Ídem que en figura 3.5 para  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Comparando esta figura con la figura 3.5 se observa que las resonancias del Planeta 9 cambian radicalmente con  $\Delta\varpi$ .

Planeta	Resonancia	Período (años)
Neptuno	1:2	$4.759 \times 10^4$
	2:3	$2.276 \times 10^4$
	3:4	$1.507 \times 10^4$
	4:5	$1.132 \times 10^4$
Planeta 9	1:1	$2.048 \times 10^6$
	2:1	$1.034 \times 10^6$
	3:2	$1.154 \times 10^6$
	4:3	$2.442 \times 10^6$

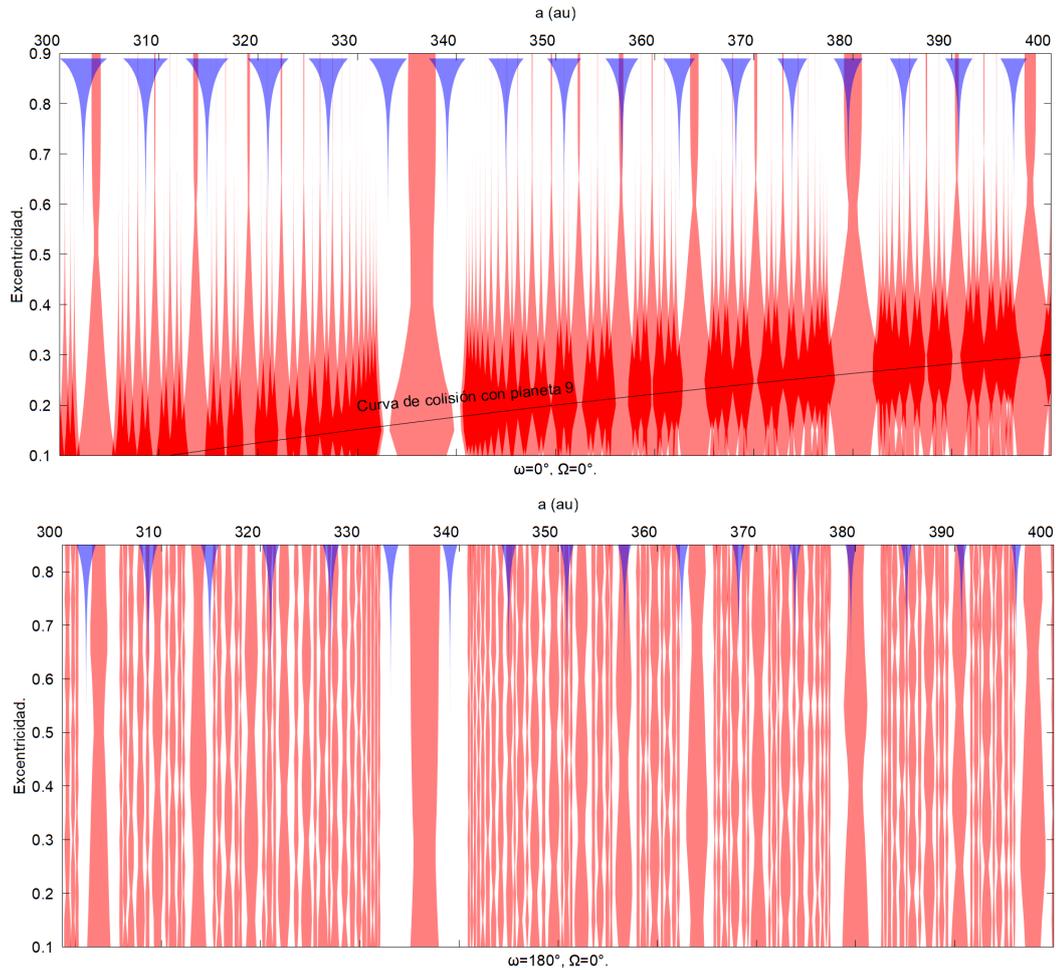
**Tabla 3.1:** Comparación de períodos resonantes de Neptuno y el Planeta 9.

El análisis de los anchos estables de las resonancias, definiendo  $f = 3.0$ ,

permite definir los límites estables de las resonancias, pero para el estudio de la superposición de las mismas (se trate de superposición de resonancias del planeta 9 o entre resonancias del planeta 9 y Neptuno), es necesario estudiar las resonancias definiendo  $f = 0.1$  ua de forma que se considere los anchos totales definidos por las separatrices.

Los paneles inferiores de las figuras 3.5 y 3.6 muestran que las resonancias de Neptuno y el Planeta 9 coexisten para  $300 \text{ ua} < a < 400 \text{ ua}$  pero sin superposición de resonancias para valores de  $e < 0.7$ .

La figura 3.7 muestra en detalle la zona comprendida para  $300 \text{ ua} < a < 400 \text{ ua}$  para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (panel superior), y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (panel inferior). Debido a que las resonancias de Neptuno para estos valores de semieje resultan muy finas, solo resultan apreciables para  $e \geq 0.6$ , no produciéndose superposición de resonancias entre Neptuno y el Planeta 9 para  $e < 0.7$ . Para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  se observa superposición entre las resonancias del Planeta 9 para valores de excentricidad bajos en la zona que coincide con la curva de colisión con el planeta.



**Figura 3.7:** Modelado de la zona donde coexisten las resonancias de Neptuno y el Planeta 9. El atlas se realizó definiendo  $f = 0.1$  para poder observar los anchos máximos de la resonancias. Se observa que la zona donde se produce superposición de resonancias entre Neptuno y el Planeta 9 ocurre para  $e \geq 0.7$  (en la figura 3.8 se identifican las mismas).

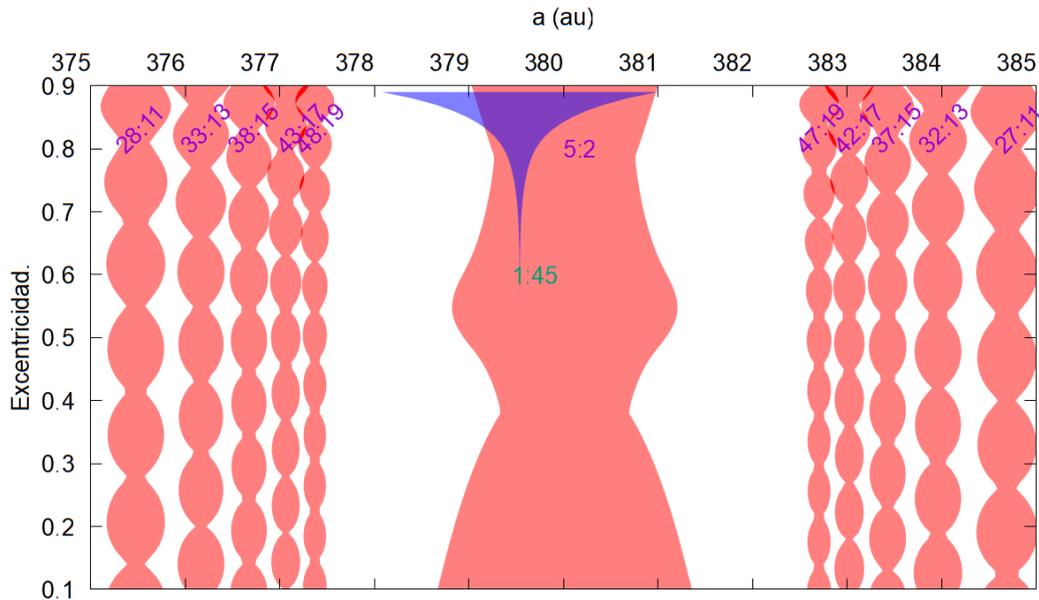
La figura 3.8 modela las resonancias para los valores de semiejes:  $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$ , donde se superponen las resonancias 1:45 (Neptuno), y 5:2 (Planeta 9). Se identifican las resonancias con  $k \leq 50$  para Neptuno (en azul), y el Planeta 9 (en rojo). La figura 3.9 presenta dos mapas dinámicos de la región analizada en al figura 3.8. El panel superior presenta un mapa dinámico considerando solo al Planeta 9, y en el panel inferior un mapa dinámico considerando a Neptuno y el Planeta 9. Las estructuras en forma de glóbulos a ambos lados de la resonancia 5:2 se producen por resonancias de alto orden (algunas con  $k \geq 50$ ), generadas por el Planeta 9. Se observa para valores de

excentricidad altos ( $e \geq 0.7$ ), la existencia de superposiciones entre las mismas, lo que genera una dinámica caótica.

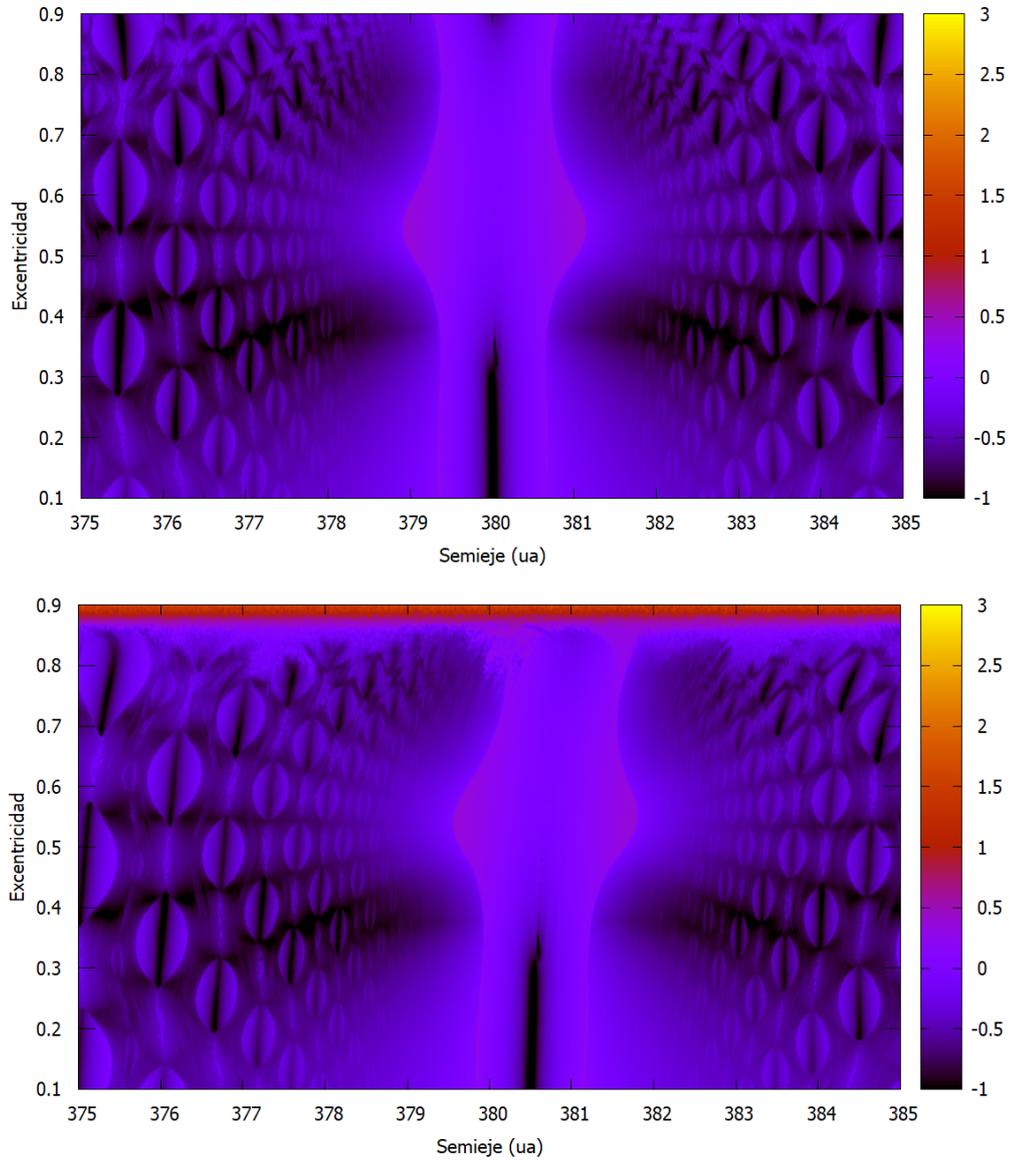
El color de los mapas dinámicos indican la variación en el semieje ( $\Delta a$ ), de la partícula test en escala logarítmica. La región azul que define la estructura de la resonancia 5:2 presenta una zona de estabilidad con variaciones máximas  $\Delta a \sim 3$  ua. La región oscura en la región central de la resonancia (ubicada en el valor de nominal de la resonancia  $a_0$ ), muestra variaciones del orden  $\Delta a \sim 0.1$  ua.

Las perturbaciones de corto período de Neptuno producen cambios en las condiciones iniciales de las partículas, produciéndose una distorsión en la estructura de la resonancia generada por el Planeta 9 pero sin llegar a destruirse. Esto muestra que las resonancias generadas por el Planeta 9 son robustas frente a las perturbaciones producidas por Neptuno.

Para valores altos de excentricidad se observa una zona de evolución caótica (en color rojo), debido a encuentros cercanos con Neptuno.



**Figura 3.8:** Análisis de la región comprendida para los semiejes  $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$ , utilizando el código `superatlas`. Valores iniciales de la partícula test:  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El atlas se generó considerando  $f = 0.1$

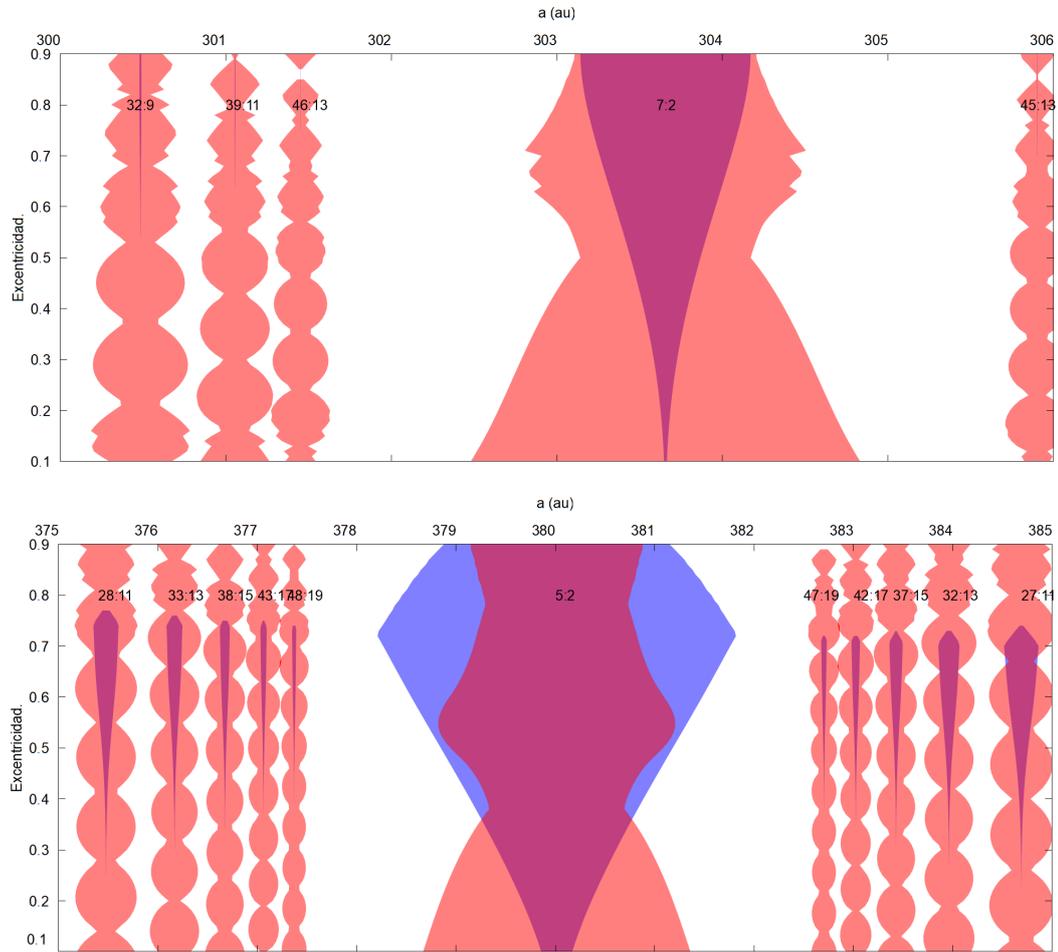


**Figura 3.9:** Mapas dinámicos de la región de la figura 3.8. El mapa dinámico del panel superior se realizó considerando solo al Planeta 9, y el mapa del panel inferior se considera al Planeta 9 y Neptuno. Valores iniciales de la partícula test:  $\Delta\varpi = 180^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ .

En las resonancias generadas por perturbadores con  $e \sim 0^\circ$ , el ancho de las mismas resulta insensible a las variaciones con  $\Delta\varpi$ , pero crece en función de la excentricidad hasta alcanzar la curva de colisión, disminuyendo su ancho a continuación (Nesvorný y Roig, 2001).

En el caso de un perturbador con alta excentricidad (como el Planeta 9), las resonancias resultan anchas incluso para bajas excentricidades de la partícula.

La figura 3.10 compara el ancho resonante para dos regiones con valores de semiejes :  $300 \text{ ua} < a < 306 \text{ ua}$  (panel superior), y  $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$  (panel inferior). Se modelan las resonancias del Planeta 9 con  $e_9 = 0$  (en azul), y  $e_9 = 0.6$  (en rojo). Las resonancias no solo difieren en sus anchos, sino en sus formas: mientras la resonancias generadas con  $e_9 = 0$  aumentan su ancho en función de la excentricidad de la partícula test, las resonancias con  $e_9 = 0.6$  mantienen su ancho relativamente estable incluso para bajas excentricidades.

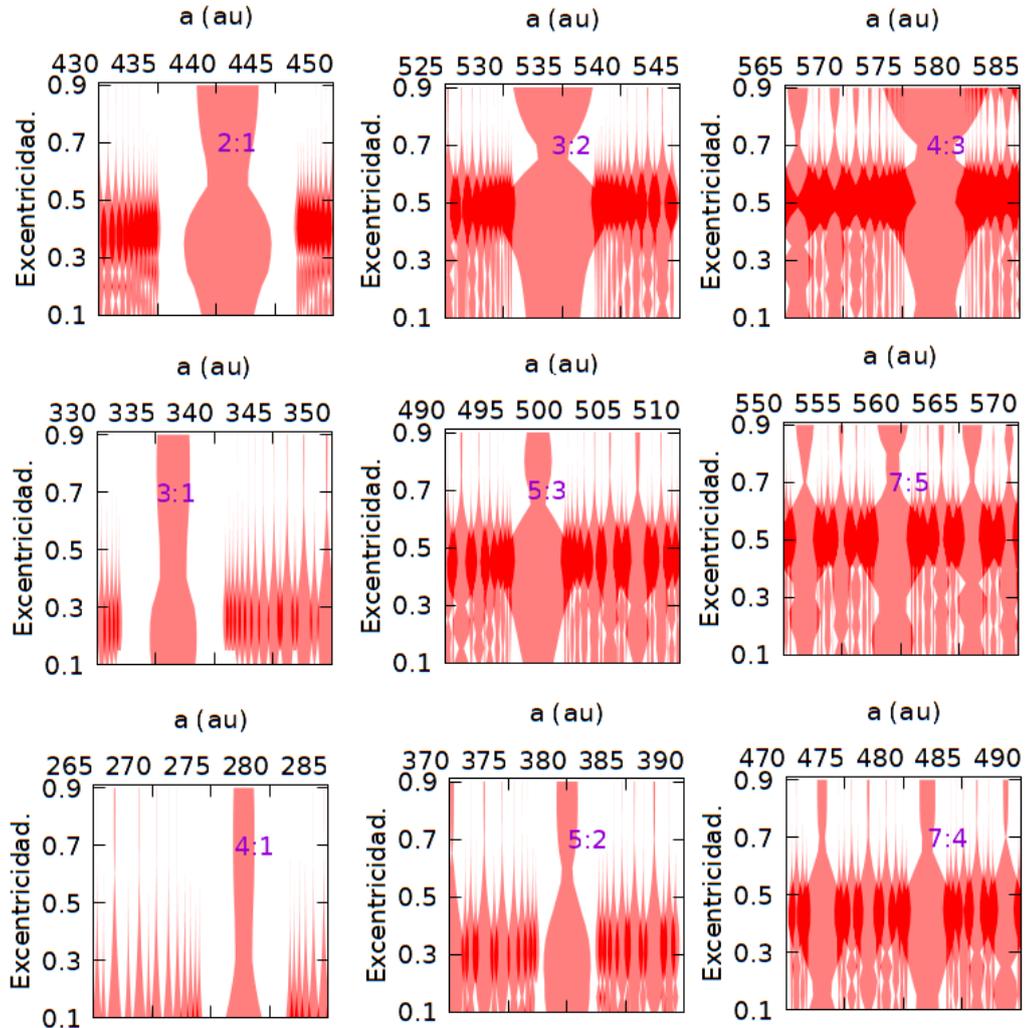


**Figura 3.10:** Atlas de resonancias generado por el modelo semianalítico discutido en la sección 3.1, utilizando el código `superatlas` para las resonancias del Planeta 9 en el rango  $300 \text{ ua} < a < 306 \text{ ua}$  (panel superior), y  $375 \text{ ua} < a < 385 \text{ ua}$  (panel inferior), considerando  $e_9 = 0$  (color azul), y  $e_9 = 0.6$  (color rojo). El atlas se realizó definiendo  $f = 3.0$ .

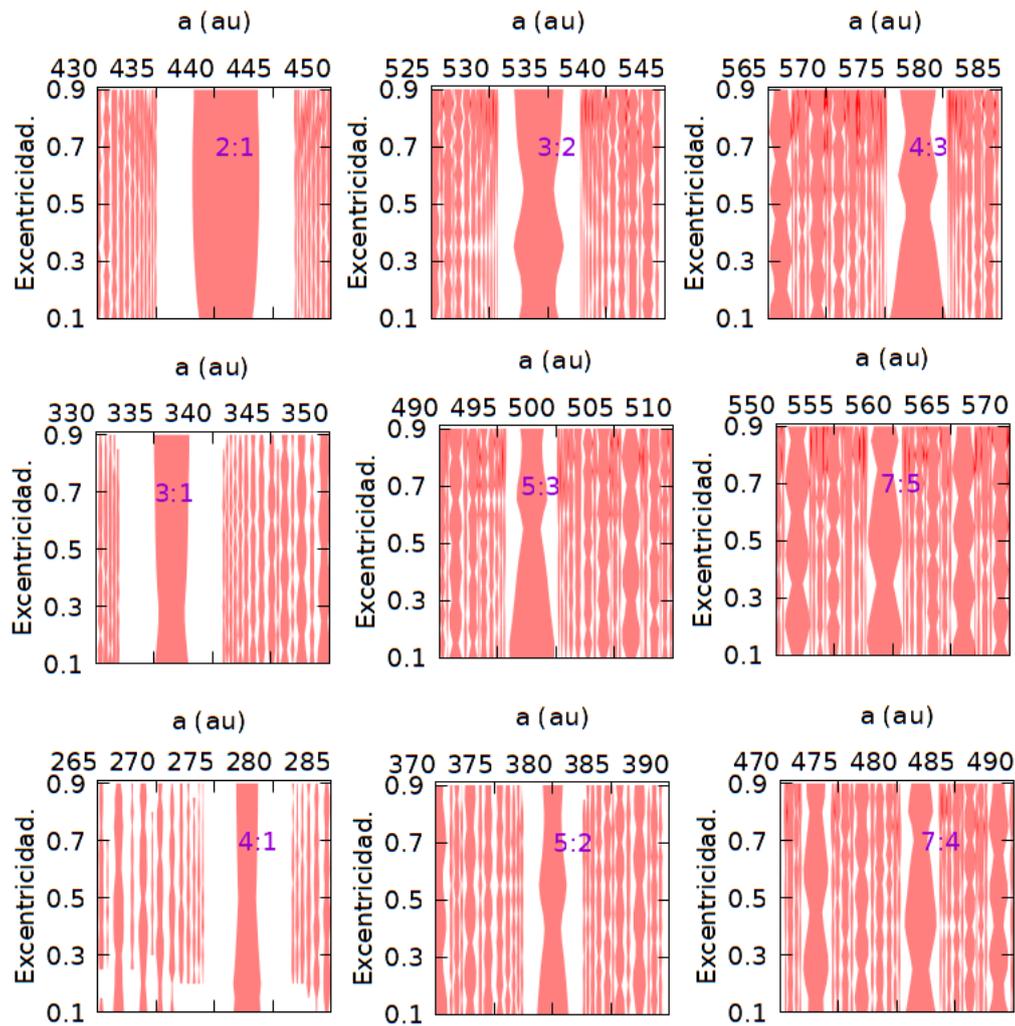
### 3.2.2. Resonancias de bajo orden con el Planeta 9.

Las figuras 3.11 y 3.12 muestran las estructuras de las resonancias para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ , en función del orden de las mismas:  $q = |k - k_p|$  para  $q = 1, 2$  y 3. El ancho de las resonancias decrece con el orden de las resonancias, siendo las resonancias  $q = |k - k_p| = 1$  las más anchas.

Las resonancias de tipo N:1 son las que se encuentran más aisladas y muestran anchos estables que permanecen relativamente constantes antes las variaciones de  $\Delta\varpi$  salvo para aquellos valores que permiten encuentros cercanos entre las órbitas.

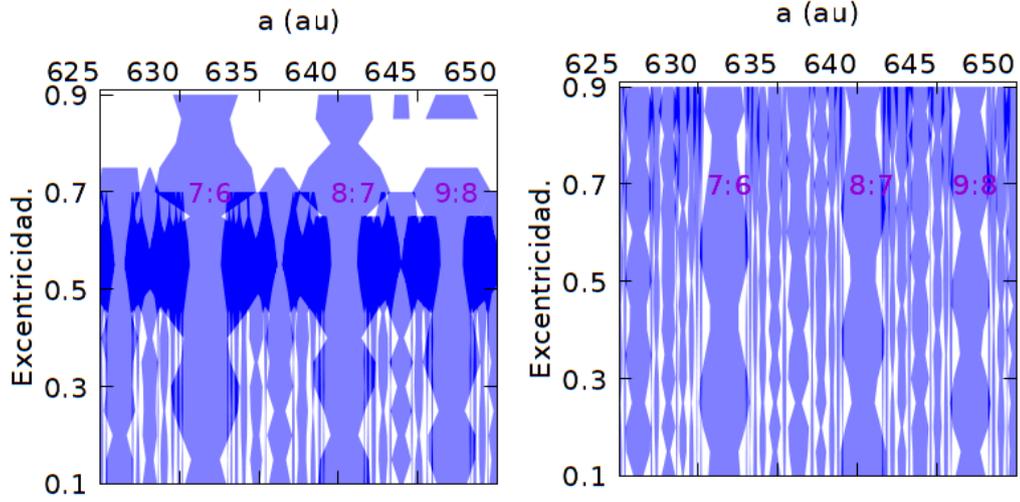


**Figura 3.11:** Resonancias de orden 1 (panel superior), orden 2 (panel del medio), y de orden 3 (panel inferior) para  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .



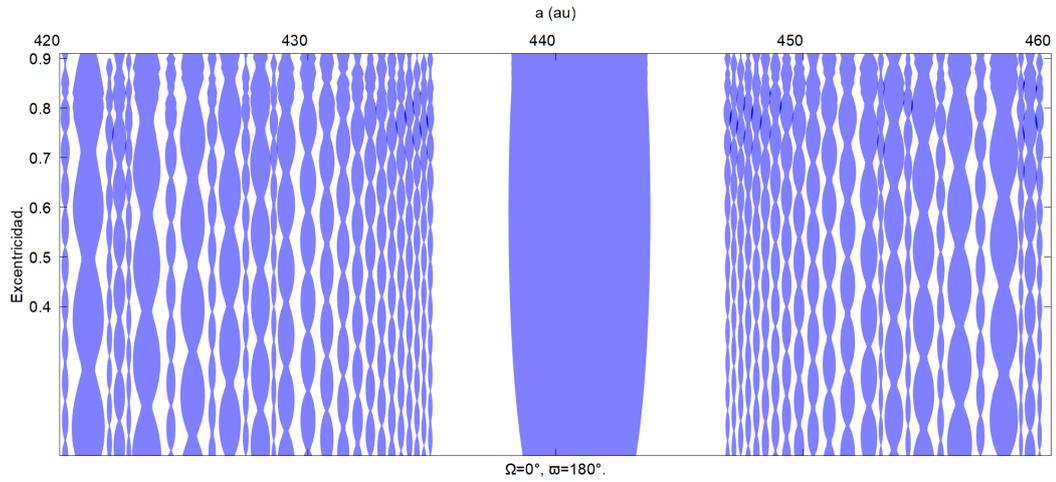
**Figura 3.12:** Ídem que en figura 3.11 para  $\Delta\varpi = 180^\circ$ .

Las resonancias más anchas (las más fuertes), se producen para  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Para  $\Delta\varpi = 180^\circ$  las resonancias exhiben un mayor aislamiento, lo cual confiere una mayor estabilidad dinámica. Este resultado puede observarse comparando las figuras 3.11 y 3.12. La figura 3.13 muestra el mismo resultado al analizar una región donde se superponen resonancias de alto orden. En la figura se identifican tres resonancias de orden 1: 7:6, 8:7 y 9:8 para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ .

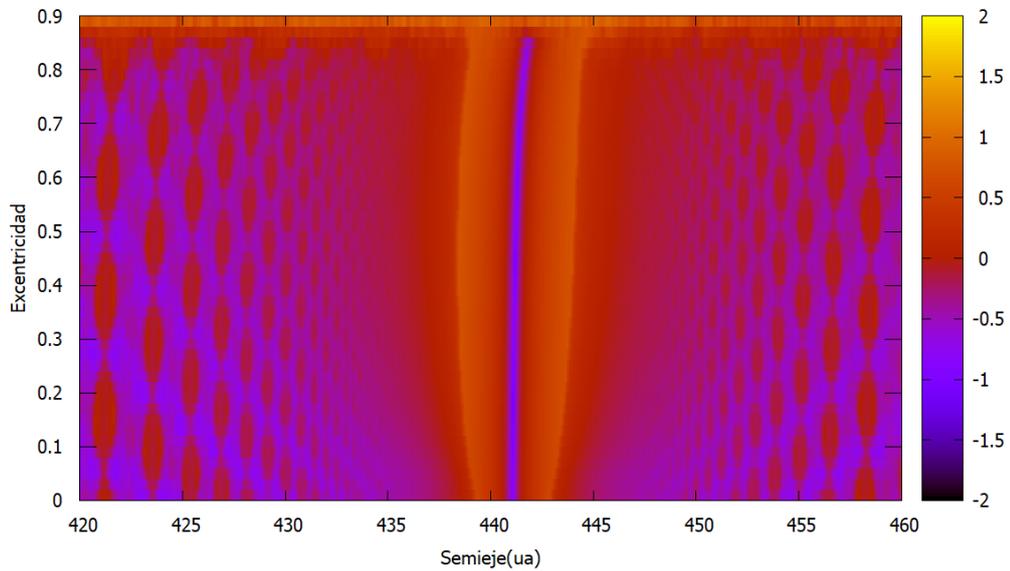


**Figura 3.13:** Comparación del cambio del ancho resonante para las resonancias 7:6, 8:7 y 9:8 con el Planeta 9 para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (panel de la izquierda), y  $\Delta\varpi = 180$  (panel de la derecha) generada con el código `superatlas` (Gallardo, 2020). Los mapas fueron realizados considerando  $f = 3.0$ .

Las figuras 3.14 y 3.15 muestran un caso particular, la resonancia 2:1. El análisis se realiza para para  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . La estructura de la resonancia 2:1 contrasta con la de las resonancias de alto orden que rodean la misma (se observan las estructuras globulares que rodean a la resonancia 5:2 de la figura 3.9). El color en el mapa dinámico informa la variación del semieje  $\Delta a$  de la partícula en escala logarítmica, lo cual permite analizar las zonas regulares y caóticas. Dentro de la resonancia 2:1 y cerca del valor nominal de la resonancia  $a_0$ , las variaciones del semieje son del orden de 0.1 ua. La zona marcada en color naranja marca la zona de libración resonante, con variaciones en el semieje del orden  $\sim 3$  ua. La partícula en la región dominada por las resonancias de alto orden (región donde existen las estructuras globulares), sufrirá una evolución caótica.



**Figura 3.14:** Atlas de las resonancias generadas por el Planeta 9 en el intervalo  $420 \text{ ua} \leq a \leq 460 \text{ ua}$ . Se destaca en el centro de la región la resonancia 2:1 con el Planeta 9. El atlas se realizó utilizando el código `superatlas` considerando  $\Delta\varpi = 180^\circ$ .



**Figura 3.15:** Mapa dinámico resonancia 2:1 con el Planeta 9. La escala de colores indica la variación del semieje de la partícula en escala logarítmica. En el modelo la partícula se encuentra en el plano de Neptuno. El mapa dinámico se realizó con  $M = 0^\circ$  y  $M_9 = 90^\circ$ .

### 3.2.3. Conclusiones.

Los resultados del modelo semianalítico para el caso resonante espacial muestran que las resonancias generadas por el Planeta 9 (en el modelo considerado), son robustas ante las perturbaciones producidas por Neptuno.

Dado que el Planeta 9 es excéntrico, el ancho de las resonancias generadas por el mismo varían muy poco en función de la excentricidad de la partículas, pero si presentan variaciones en función del valor del orden de las resonancias (los anchos resonantes decrecen con el orden de las mismas), y de  $\Delta\varpi$ . Para valores de  $\Delta\varpi$  próximos a  $0^\circ$  las resonancias muestran un ancho máximo con superposiciones para altas excentricidades ( $e \geq 0.7$ ). Para valores de  $\Delta\varpi$  cercanos a  $180^\circ$  las resonancias muestran un mayor aislamiento lo que les confiere mayor estabilidad dinámica (donde las resonancias de tipo N:1 muestran el mayor aislamiento).

La dinámica de las partículas con  $\Delta\varpi = 180^\circ$  resultan especialmente interesantes debido al resultado de los autores Batygin y Brown, 2016, quienes encontraron que en sus integraciones numéricas (para el caso plano), por un período de tiempo similar a la edad del Sistema Solar ( $\Delta t \sim 4$  Ga), los objetos sobrevivientes exhiben capturas temporales en resonancias durante  $\sim 10 - 100$  millones de años. En su estudio numérico, los autores identificaron partículas capturadas en las resonancias 2:1, 3:1, 5:3, 7:4, 9:4, 11:4, 13:4, 23:6, 27:17, 29:17 y 33:19.

Si en el caso coplanar el ancho y la fuerza de una resonancia es función únicamente de  $(e, \varpi)$ , en el caso espacial es función de los parámetros  $(e, i, \varpi, \Omega)$ . Durante el movimiento resonante, los parámetros  $(e, i)$  de la órbita de la partícula sufren pequeñas oscilaciones, pero  $\varpi$  puede oscilar, circular o sufrir grandes variaciones. En el análisis de la evolución secular dentro de las resonancias que se realizará en el capítulo 4 se estudiará el efecto de la variación de  $\varpi$  en la evolución dinámica por periodos de tiempo seculares.

# Capítulo 4

## Evolución secular resonante.

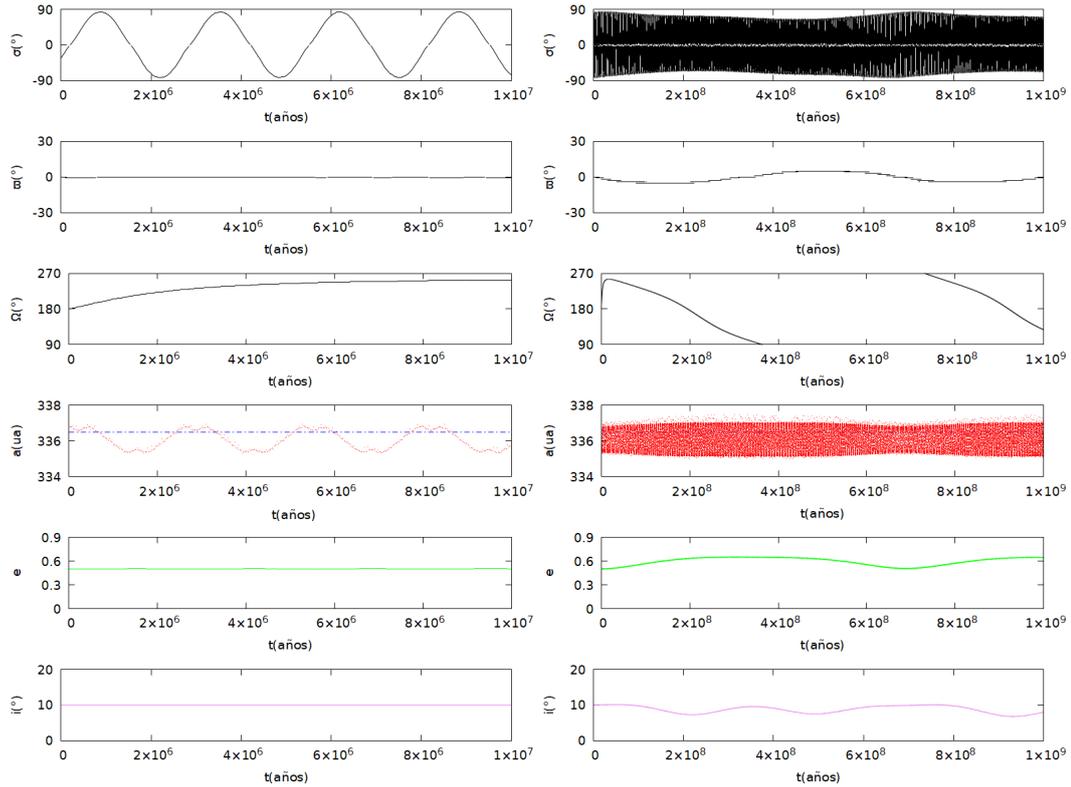
En los capítulos 2 y 3 se analizaron respectivamente las dinámicas secular y resonante generada por un perturbador con alta excentricidad y cierta inclinación mediante un enfoque semianalítico. En el presente capítulo se estudiará la evolución secular dentro de las resonancias utilizando un enfoque numérico, en un modelo que considera como cuerpos activos a Neptuno y el Planeta 9. En largas escalas de tiempo un planeta perturbador es capaz de generar efectos seculares en las partículas atrapadas en resonancias (puede producirse un efecto Zeipel-Lidov-Kozai (Gallardo et al. 2012, Saillenfest et al. 2017), resonancias seculares dentro de resonancias de movimientos medios (Morbidelli y Moons, 1993, Morbidelli et al. 1995), o la generación de caos debido a la superposición de resonancias (Wisdom, 1980)), produciendo cambios en  $\varpi$  y/o  $\Omega$  que implican cambios en  $e$  y  $i$  que no pueden percibirse en el corto plazo.

A modo de ejemplo, la figura 4.1 muestra la evolución de una partícula atrapada en la resonancia 3:1 en una escala de tiempo de 10 millones de años (columna de la izquierda), y durante 1000 millones de años (columna de la derecha), a partir de las mismas condiciones iniciales. Del análisis de la figura resulta claro que en escalas de tiempo cortas, no es posible percibir las variaciones en los elementos orbitales que si se observan a largo plazo.

Las variaciones de  $\varpi$  generan cambios en el centro de libración del ángulo crítico  $\sigma$ , y dado que la dinámica depende fuertemente de la localización del centro de libración, se dividirá el estudio en función del comportamiento de  $\varpi$  en caso con  $\varpi$  circulando y caso con  $\varpi$  oscilando.

Existe un gran interés en la evolución secular resonante debido a la observación de que los exoplanetas descubiertos residen cerca o en resonancias de

movimientos medios (ver Batygin y Morbidelli, 2013 para una introducción al tema), lo que ha motivado a diversos autores a aplicarse al estudio de la evolución secular resonante en diferentes sistemas extrasolares (Lee y Peale, 2002, Beaugé y Michtchenko, 2003, Lee, 2004, Ferraz-Mello et al. 2006, Michtchenko et al. 2006, Michtchenko et al. 2008 ).



**Figura 4.1:** La figura muestra la evolución del ángulo crítico  $\sigma$  y de los elementos orbitales ( $a, e, i, \varpi, \Omega$ ), para una partícula atrapada en la resonancia 3:1 en dos escalas diferentes de tiempo (ver texto). Parámetros iniciales:  $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .

## 4.1. Metodología utilizada.

La descripción completa de la dinámica a largo plazo generada por un perturbador con alta excentricidad e inclinación introduce la necesidad de la realización de un estudio numérico del problema. En el análisis subsiguiente se utilizará el integrador numérico *evorb* (Fernández et al. 2002), para estudiar la evolución de partículas atrapadas en las resonancias analizadas en el capítulo 3 durante 4000 millones de años.

El estudio numérico de la evolución dinámica a largo plazo de partículas bajo la influencia del Planeta 9 es una de las principales líneas de investigación de dicha hipótesis, existiendo tres enfoques diferenciados:

- Estudio numérico modelando un Sistema Solar constituido por el Sol y el Planeta 9 como único cuerpo activo. Se sustituye a los planetas gigantes con el correspondiente término  $J_2$  en el Sol. Este enfoque ha sido utilizado en los trabajos de los autores Millholland y Laughlin, [2017](#), Bailey et al. [2018](#) y Hadden et al. [2018](#).
- Estudio numérico modelando un Sistema Solar constituido por el Sol, Neptuno y el Planeta 9 como cuerpos activos. Este enfoque presenta dos variaciones: modelando a Júpiter, Saturno y Urano (JSU), como anillos materiales (aplicado por los autores Batygin y Brown, [2016](#), J. Becker et al. [2017](#) y Millholland y Laughlin, [2017](#)), y utilizando el término  $J_2$  correspondiente a los planetas JSU (Batygin et al. [2019](#)).
- Estudio numérico modelando un Sistema Solar constituido por el Sol, todos los planetas gigantes y el Planeta 9 como cuerpos activos (utilizado por los autores Batygin y Brown, [2016](#), S. S. Sheppard y Trujillo, [2016](#), J. Becker et al. [2017](#) y Batygin et al. [2019](#)).

Claramente el último enfoque es el que permite obtener una descripción más realista de la dinámica existente, pero con el precio de un alto costo computacional. En esta tesis se utiliza un enfoque enmarcado en línea con el segundo enfoque referido: se considera a Neptuno y el Planeta 9 como únicos cuerpos activos (no considerando el término  $J_2$  de los otros planetas gigantes). Este enfoque reduce notablemente el costo computacional debido a que el mismo depende del paso de integración (definido el paso de integración como la cincuentava parte del período del cuerpo con menor período, resulta claro el ahorro computacional al considerar a Neptuno como el cuerpo con menor periodo y no a Júpiter).

$a(ua)$	$e$	$i$	$\Omega$	$\varpi$
30.14	0.0	0°	0 °	0°
700.0	0.6	10°	0 °	0°

**Tabla 4.1:** Parámetros de Neptuno y del Planeta 9 utilizados en este modelo.

En concreto integramos 420 partículas (160 partículas con valor inicial  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y 260 partículas con valor inicial  $\Delta\varpi = 180^\circ$  con respecto al Planeta 9), para las resonancias 2:1, 3:1, 4:1, 3:2, 5:2, 5:3, 4:3, 7:4, 7:5, 7:6, 8:7 y 9:8, durante 4000 millones de años utilizando el integrador `evorb` (Fernández et al. 2002).

Utilizando el código `Resowidth` (Gallardo 2022, comunicación personal), se hallaron los centros de libración de los ángulos críticos ( $\sigma_i$ ), para una partícula test con  $e = 0.5$  en cada una de las resonancias antes mencionadas. Se realizaron 10 clones de cada partícula (definiendo las condiciones iniciales de forma que el valor inicial del ángulo crítico  $\sigma_i$ , coincida con el centro de la libración de la resonancia), manteniendo fijo  $e, i, \Omega, \varpi, M$  y variando  $a$  en un intervalo de 5 ua centrado en el valor nominal de la resonancia. El valor de la anomalía media inicial  $M$ , de la partícula se obtuvo a partir de la ecuación para el ángulo crítico  $\sigma = k\lambda - k_9\lambda_9 - (k - k_9)\varpi$ , donde  $\lambda = M + \varpi$  y  $\lambda_9 = M_9 + \varpi_9$ . Adoptando  $\varpi_9 = 0^\circ$  y  $M_9 = 0^\circ$  se obtuvieron los valores de  $M$  para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (tabla 4.2), y para  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (ver tabla 4.3).

Los parámetros de Neptuno y del Planeta 9 se mantienen fijos y son los utilizados en este trabajo en el capítulo 3 (ver tabla 4.1).

En la sección 4.2 presentaremos las condiciones donde las partículas alcanzan altas inclinaciones. Para dichas condiciones se realizó una nueva tanda de integraciones para  $e = 0.1$ , con el objetivo de estudiar la generación de órbitas de alta inclinación a partir de valores bajos de  $e$ .

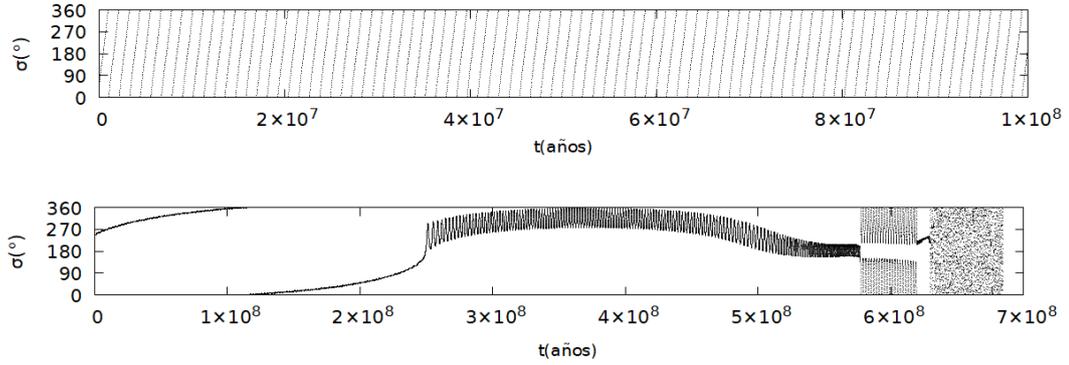
Res	$a(ua)$	$\sigma$	$M$
4 : 1	277.79	0°	0°
3 : 1	336.52	34°	34°
		326°	326°
5 : 2	380.82	112°	56°
		248°	124°
2 : 1	440.96	45°	45°
		315°	315°
7 : 4	482.02	180°	45°
5 : 3	497.96	180°	60°
3 : 2	534.19	148°	74°
		212°	106°
7 : 5	559.34	180°	36°
4 : 3	577.83	180°	60°
7 : 6	631.63	180°	30°
8 : 7	640.37	180°	25.7°
9 : 8	647.13	180°	22.5°

**Tabla 4.2:** Condiciones iniciales de las partículas test en cada resonancia y para cada valor del ángulo crítico  $\sigma$ , y anomalía media  $M$ , para  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . La primera columna detalla las resonancias con el Planeta 9. La segunda columna indica el semieje de una partícula que se encuentra en el valor nominal de la resonancia  $a_0$ . Las partículas están ordenadas en orden creciente de  $a$ . La tercera columna identifica los diferentes ángulos críticos  $\sigma_i$ , para cada resonancia con las condiciones iniciales consideradas. La última columna indica el valor de la anomalía media  $M$ , obtenida como se detallo en el texto previo.

Res	$a(ua)$	$\sigma$	$M$
4 : 1	277.79	78°	78°
		180°	78°
		282°	180°
3 : 1	336.52	0°	286°
		106°	286°
		254°	74°
5 : 2	380.82	95°	137.5°
		265°	222.5°
2 : 1	440.96	65°	65°
		180°	180°
		295°	295°
7 : 4	482.02	0°	315°
		180°	231.4°
5 : 3	497.96	0°	300°
		138°	346°
		222°	14°
3 : 2	534.19	0°	270°
		83°	311.5°
		277°	48.5°
7 : 5	559.34	0°	252°
4 : 3	577.83	77°	265.6°
		180°	300°
		283°	334.3°
7 : 6	631.63	180°	240°
8 : 7	640.37	0°	205.7°
		180°	231.4°
9 : 8	647.13	180°	225°

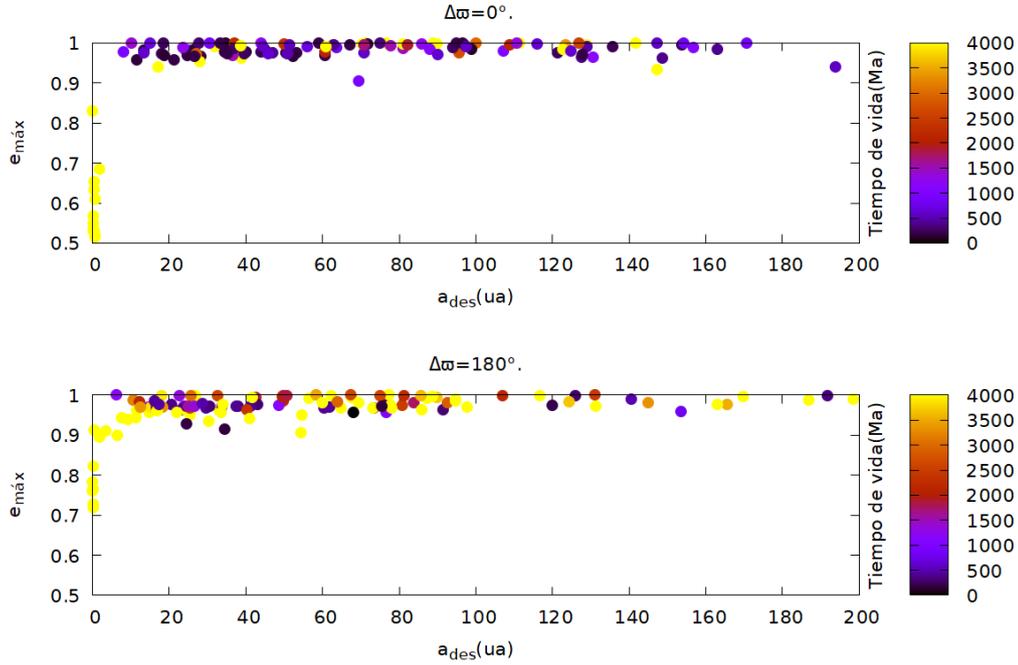
**Tabla 4.3:** Ídem que en la tabla 4.2 para  $\Delta\varpi = 180^\circ$ .

Analizando la evolución de los ángulos críticos  $\sigma_i$ , es posible estudiar la dinámica resultante. El panel superior de la figura 4.2 muestra un ejemplo de una partícula fuera de la resonancia 2:1 dado que su ángulo crítico circula. El panel inferior de la misma figura muestra una partícula atrapada en la resonancia 5:2. En este caso el ángulo crítico oscila (cambiando el valor del centro de libración del ángulo crítico), por un período  $t \sim 6.3 \times 10^8$  años, saliendo la partícula de la resonancia posteriormente (el ángulo crítico empieza a circular).



**Figura 4.2:** La figura muestra la evolución del ángulo crítico  $\sigma$  para dos partículas integradas en las resonancias 2:1 y 5:2. En el panel superior la partícula se encuentra fuera de la resonancia 2:1 (condiciones iniciales:  $M = 45^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ ,  $\sigma = -2\lambda_9 + \lambda + \varpi$ ). La partícula del panel inferior se encuentra dentro de la resonancia 5:2 (condiciones iniciales:  $M = 124^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ ,  $\sigma = -5\lambda_9 + 2\lambda + 3\varpi$ ).

La figura 4.3 compara la desviación estándar del semieje ( $a_{des}$ ), de las partículas integradas, para todas las salidas temporales a lo largo de toda la integración, y la máxima excentricidad alcanzada durante la evolución. La escala de colores indica el tiempo de vida de las partículas para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (panel superior) y  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (panel inferior). Podemos considerar que las partículas que experimentan una evolución regular poseen una  $a_{des} \leq 10$  ua y las que tienen una  $a_{des} > 10$  ua son eyectadas de la resonancia.



**Figura 4.3:** Panel superior:  $a_{des}$  y  $e_{m\acute{a}x}$  para las partículas integradas inicialmente con  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Panel inferior:  $a_{des}$  y  $e_{m\acute{a}x}$  para las partículas integradas inicialmente con  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El color en ambos paneles indica el tiempo de vida de las partículas.

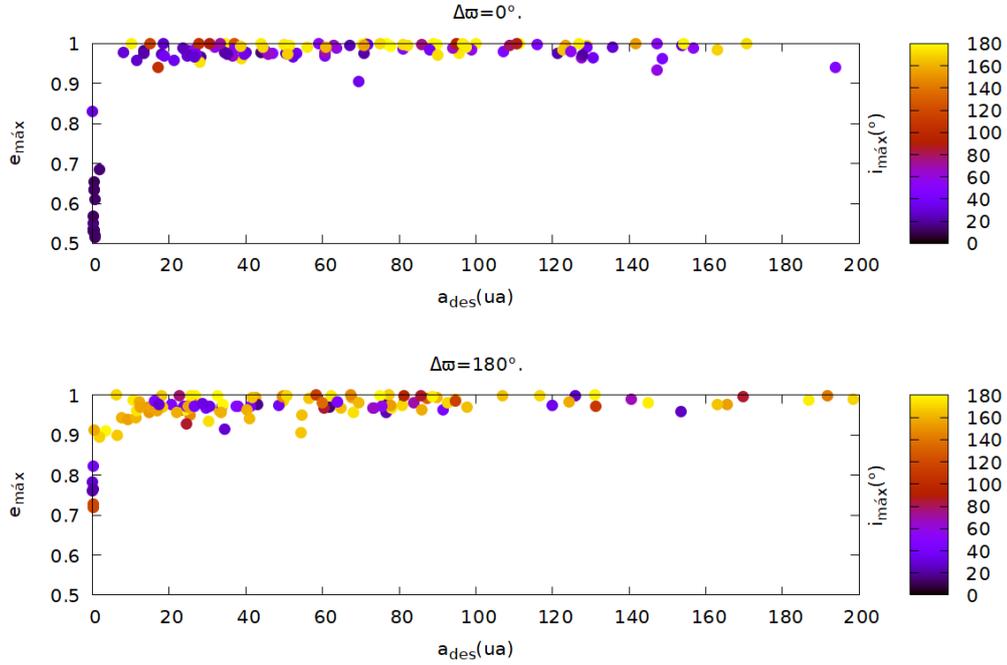
De las 420 partículas integradas, 297 de estas partículas con  $a_{des} > 10$  ua (partículas que no fueron capturas en resonancias o fueron eyectadas de las mismas), alcanzan el interior del Sistema Solar (ver tabla 4.4). Si se confirmara la hipótesis del Planeta 9, un trabajo a futuro sería investigar si las perturbaciones de este planeta son el origen de los cometas de corto período.

$a_{ini}$	$a_{min}$	$a_{max}$	$i_{max}$	$q_{min}$
336.38	258.90	591.9.	24.3	5.687
438.54	375.21	964.35	171.3	2.277
480.53	224.17	1015.0	68.6	11.352
497.88	116.06	777.58	41.0	16.945
532.76	473.90	1299.9	15.3	23.185
638.62	504.67	974.46	175.6	8.687

**Tabla 4.4:** Partículas con  $a_{des} > 10$  ua cuya distancia de perihelio  $q$  alcanza el interior del Sistema Solar en algún momento de la evolución.

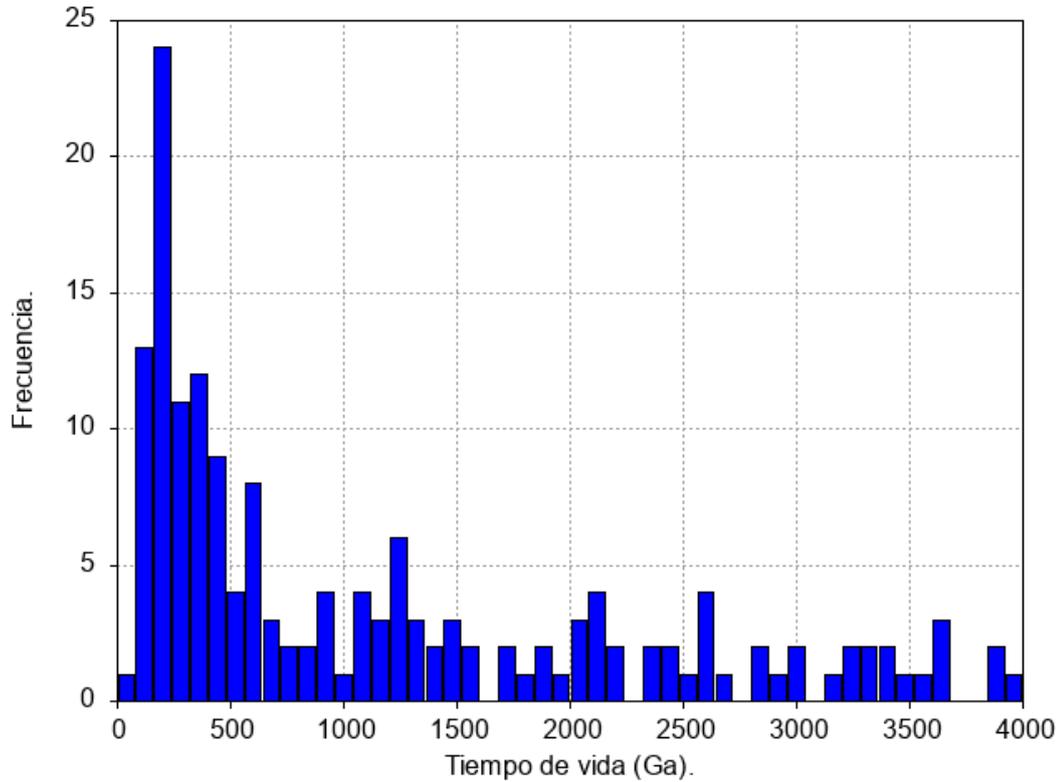
La figura 4.4 muestra en su escala de colores las inclinaciones máximas alcanzadas por todas las partículas. Esta figura muestra que las partículas pueden alcanzar altas inclinaciones bajo las perturbaciones generadas por el

Planeta 9. El mecanismo dinámico responsable de este efecto se estudiará en la sección 4.2.



**Figura 4.4:** Idem que en la figura 4.3 con la escala de colores indicando la máxima inclinación alcanzada por las partículas integradas.

Los ejemplos que se analizarán a continuación en las secciones 4.2 y 4.3 se eligieron de forma que las partículas estuvieran atrapadas en las resonancias por un periodo superior a 1000 millones de años, tiempo suficiente para poder analizar la evolución secular dentro de las resonancias. De las 420 partículas integradas, 247 resultaron capturadas en resonancias pero con tiempo dinámicos de vida muy diferentes. El histograma de la figura 4.5 muestra la distribución de las partículas capturas en función del tiempo de permanencia en resonancia.

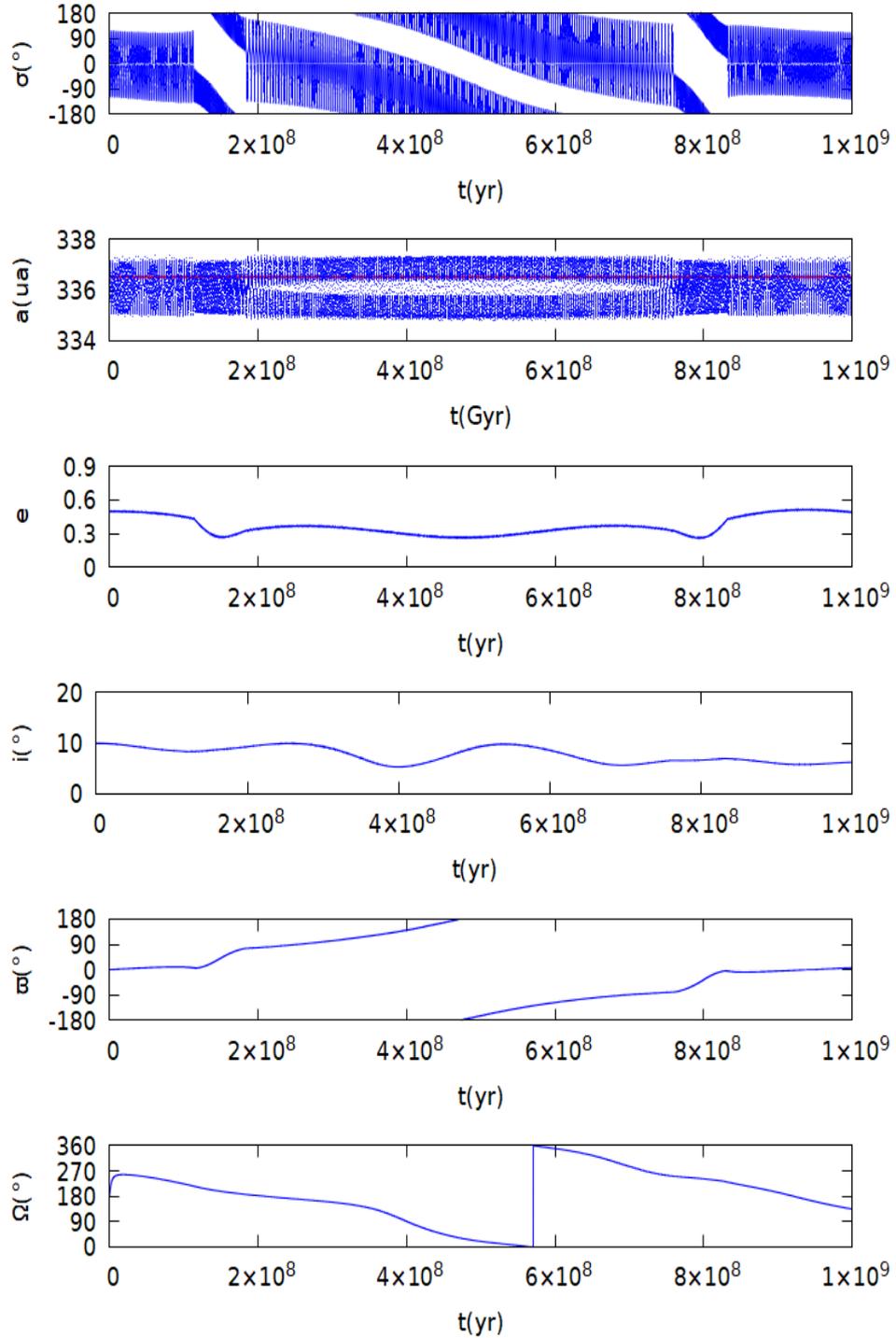


**Figura 4.5:** Histograma de las 247 partículas capturas en resonancia con el Planeta 9 en los experimentos numéricos realizados con `evorb`.

En el desarrollo subsiguiente se analizará la evolución de  $\sigma$  en función de la evolución de  $\varpi$ , y su efecto en la evolución de las órbitas de las partículas test.

## 4.2. Caso con $\Delta\varpi$ circulando.

La figura 4.6 muestra la evolución de una partícula en resonancia que permite comparar la evolución con  $\Delta\varpi$  circulando y con  $\Delta\varpi$  oscilando. El ejemplo presentado se corresponde a la resonancia 3:1 (la línea punteada en el panel correspondiente al  $a$  marca el valor nominal de la resonancia  $a_0$ ).



**Figura 4.6:** Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante  $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 3:1. Parámetros iniciales:  $M = 34^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .

Al inicio y al final de la evolución mostrada en la figura 4.6 el ángulo

crítico  $\sigma$  oscila con gran amplitud alrededor de  $\sigma \sim 0^\circ$ , pero en el período que corresponde entre  $t \sim 110$  millones de años y  $t \sim 810$  millones de años el centro de libración de  $\sigma$  circula.

Este caso resulta interesante debido a que  $\sigma$  libra con gran amplitud mientras su centro de libración varia. El ciclo observado en el panel superior se repite durante los 4000 millones de años de la integración. La evolución del ángulo crítico  $\sigma$ , determina la evolución del  $a$  y es posible correlacionar las variaciones de  $a$  con los cambios en  $\sigma$ .

De la definición del ángulo crítico dada por

$$\sigma = k\lambda - k_p\lambda_p - (k - k_p)\varpi \quad (4.1)$$

se puede relacionar el cambio del centro de libración de  $\sigma$  con la evolución de  $\varpi$ . Como se observa en la figura 4.6 existe una correlación entre las variaciones de  $\Delta\varpi$  y las variaciones en  $e$  y  $\sigma$ : las rápidas variaciones en  $\Delta\varpi$  en  $t \sim 110$  millones de años y  $t \sim 760$  millones de años se corresponden con variaciones en  $e$  y en el centro de libración de  $\sigma$ . El cambio en el centro de libración de  $\sigma$  genera cambios en  $a$  que analizaremos en la figura 4.7.

La figura 4.7 muestra en su panel superior la evolución de  $a$  en el ciclo delimitado por las variaciones de  $\sigma$  observado en la figura 4.6 (y que se corresponde con las variaciones de  $\Delta\varpi$ ). Las líneas rojas verticales marcan cuatro momentos en la evolución de  $a$  de la partículas, los cuales se analizan en los paneles de las filas 2 a 5.

En los paneles de la columna de la izquierda se muestra la evolución de la partícula de la figura 4.6, en el espacio  $(a, \sigma)$  por un período de 10 millones de años. Los paneles de la columna de la derecha presentan curvas de nivel del Hamiltoniano  $\mathcal{H}(a, \sigma)$ , de la ecuación 3.11 generadas con el código Hsigmaa (Gallardo, 2023). Estas curvas de nivel se obtienen considerando los valores de los elementos orbitales de la partícula fijos (resultan ser “fotos” de la evolución del Hamiltoniano para un momento determinado).

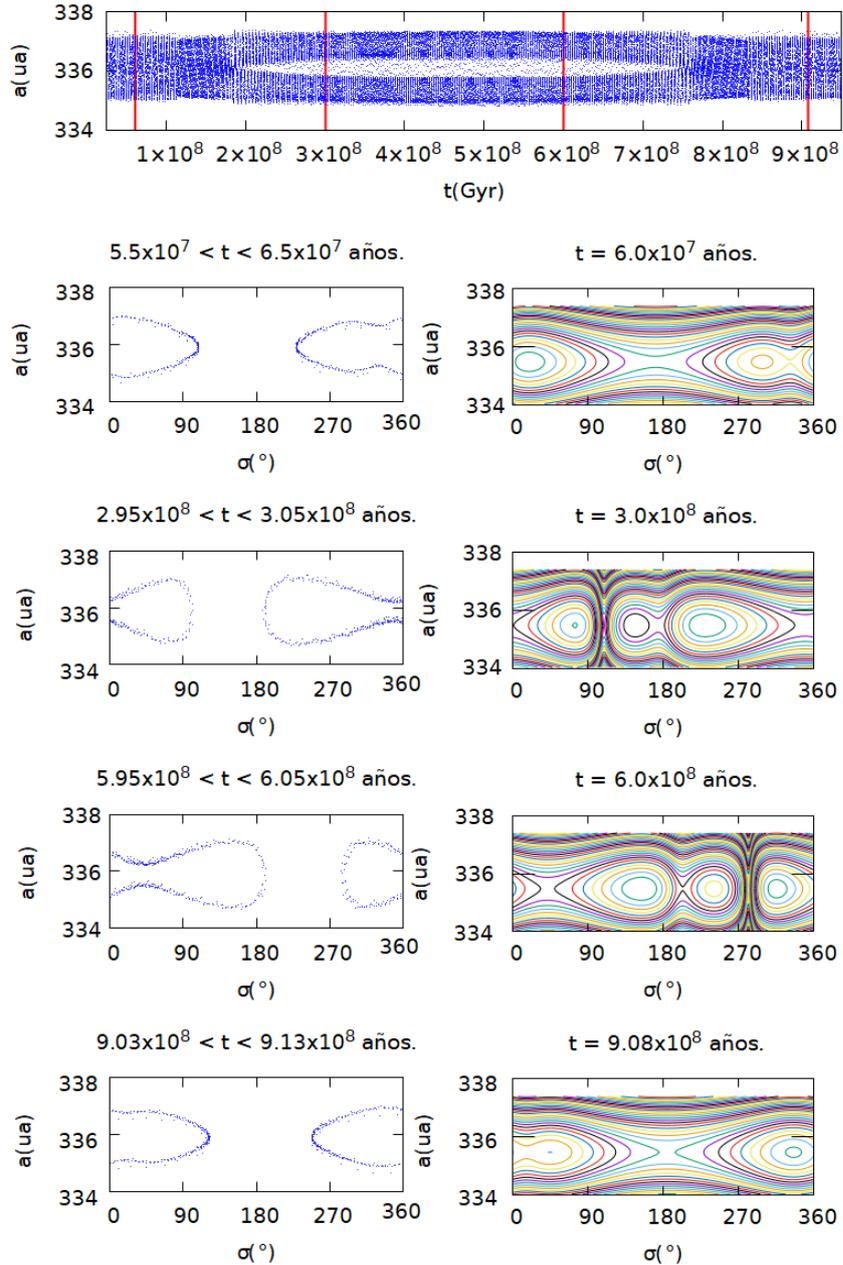
Los paneles de la segunda fila muestran la existencia de dos valores para los cuales  $\sigma$  libra: alrededor de  $\sigma \sim 18^\circ$  y  $\sigma \sim 298^\circ$ . Las trayectorias observadas de las partículas (paneles de la izquierda), encierran los dos puntos de equilibrio. Los paneles de las filas 3 y 4 muestran la evolución en el periodo que corresponde a la variación del centro de libración de  $\sigma$ , donde se observan cambios en los puntos de equilibrio en las curvas de nivel del Hamiltoniano (paneles de

la derecha). Las trayectorias observadas (paneles de la izquierda), continúan encerrando los puntos de equilibrio.

Los paneles de la quinta fila se corresponden con la situación estudiada en los paneles de la segunda fila.

El aparente desdoblamiento observado en la evolución de  $a$ , que se produce en el período en que  $\Delta\varpi$  circula, no es real. Las trayectorias cruzan rápidamente por el centro de la resonancia  $a_0$  produciendo el efecto de un desdoblamiento en  $a$ .

En este caso la órbita circula de alineada en  $\varpi$  hasta antialineada en  $\varpi$  no produciéndose grandes variaciones en  $e$  y  $i$ . Se observará en el análisis de las siguientes figuras que la evolución inversa (de antialineada a alineada en  $\varpi$ ), producirá grandes variaciones en  $e$  y  $i$ .



**Figura 4.7:** Panel superior: evolución de  $a$  de la partícula de la figura 4.6 en el período de tiempo que se corresponde con las rápidas variaciones de  $\varpi$  analizadas en la figura 4.6. Paneles 2 a 5 de la columna izquierda: evolución en el espacio  $(a, \sigma)$  de la partícula de la figura 4.6. Cada panel indica el período de tiempo de la integración. Paneles 2 a 5 de la columna derecha: curvas de nivel del Hamiltoniano  $\mathcal{H}(a, \sigma)$ , generadas con el código Hsigmaa (Gallardo, 2023), y realizadas para los tiempos que se corresponden con las líneas rojas verticales marcados en el panel superior.

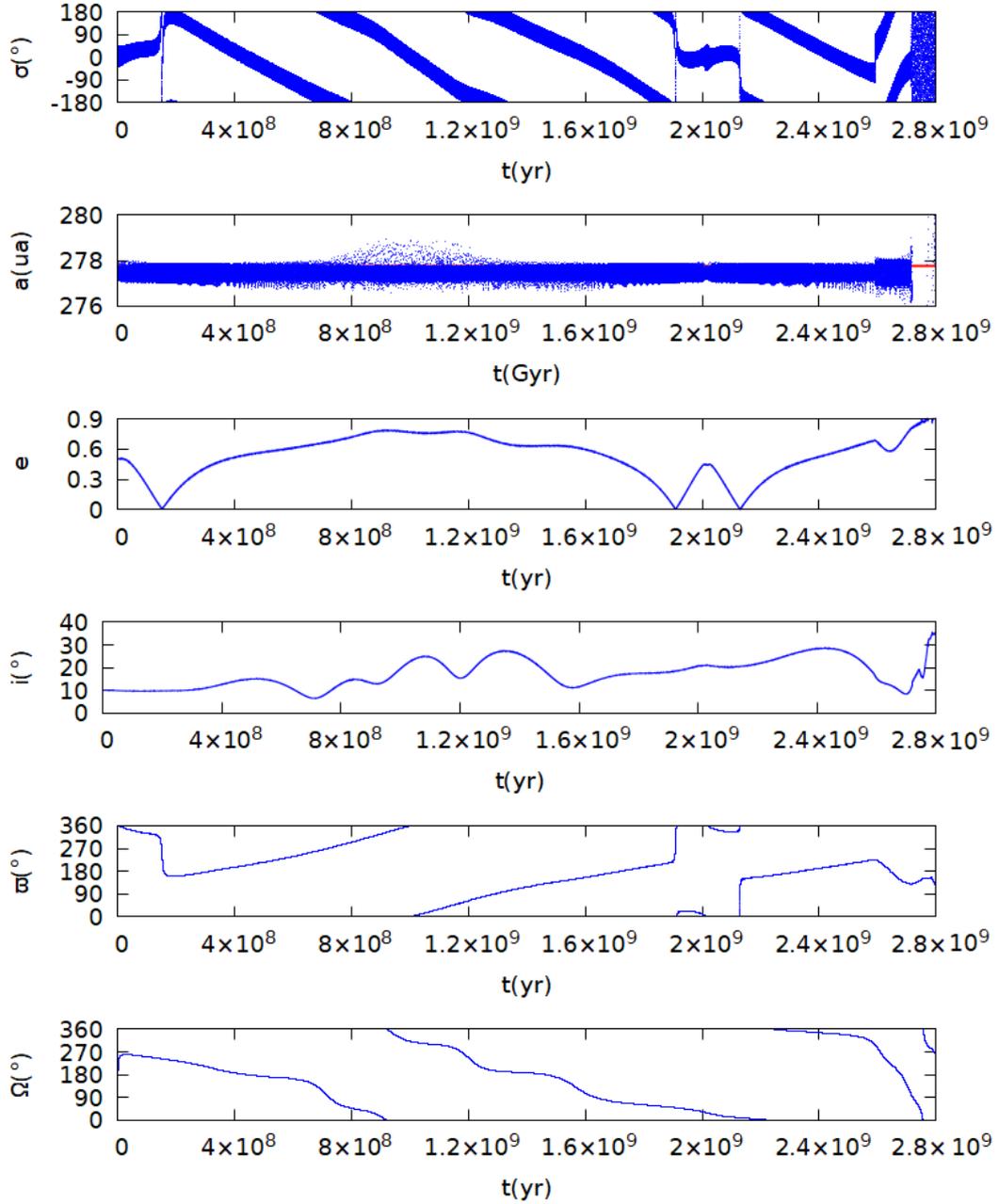
La figura 4.8 muestra la evolución de una partícula atrapada en la resonancia 4:1 hasta el momento en que sale de la misma. Las rápidas variaciones de  $\Delta\varpi$  (que se producen para  $t \sim 150$  millones de años,  $t \sim 1900$  millones de años y  $t \sim 2100$  millones de años), se corresponden con  $e = 0$  y con la existencia de cambios rápidos en el centro de libración de  $\sigma$ . La figura 4.9 es análoga a la figura 4.7 en la distribución de sus paneles.‘

Los paneles de la segunda fila de la figura 4.9 muestran la evolución para un tiempo anterior a la rápida variación en  $\sigma$  que se produce aproximadamente en  $t \sim 150$  millones de años. Se observa en el panel derecho la existencia de dos puntos de equilibrio en  $\sigma \sim 60^\circ$  y  $\sigma \sim 170^\circ$ , pero las trayectorias observadas engloban solamente el punto de equilibrio centrado en  $\sigma \sim 60^\circ$ .

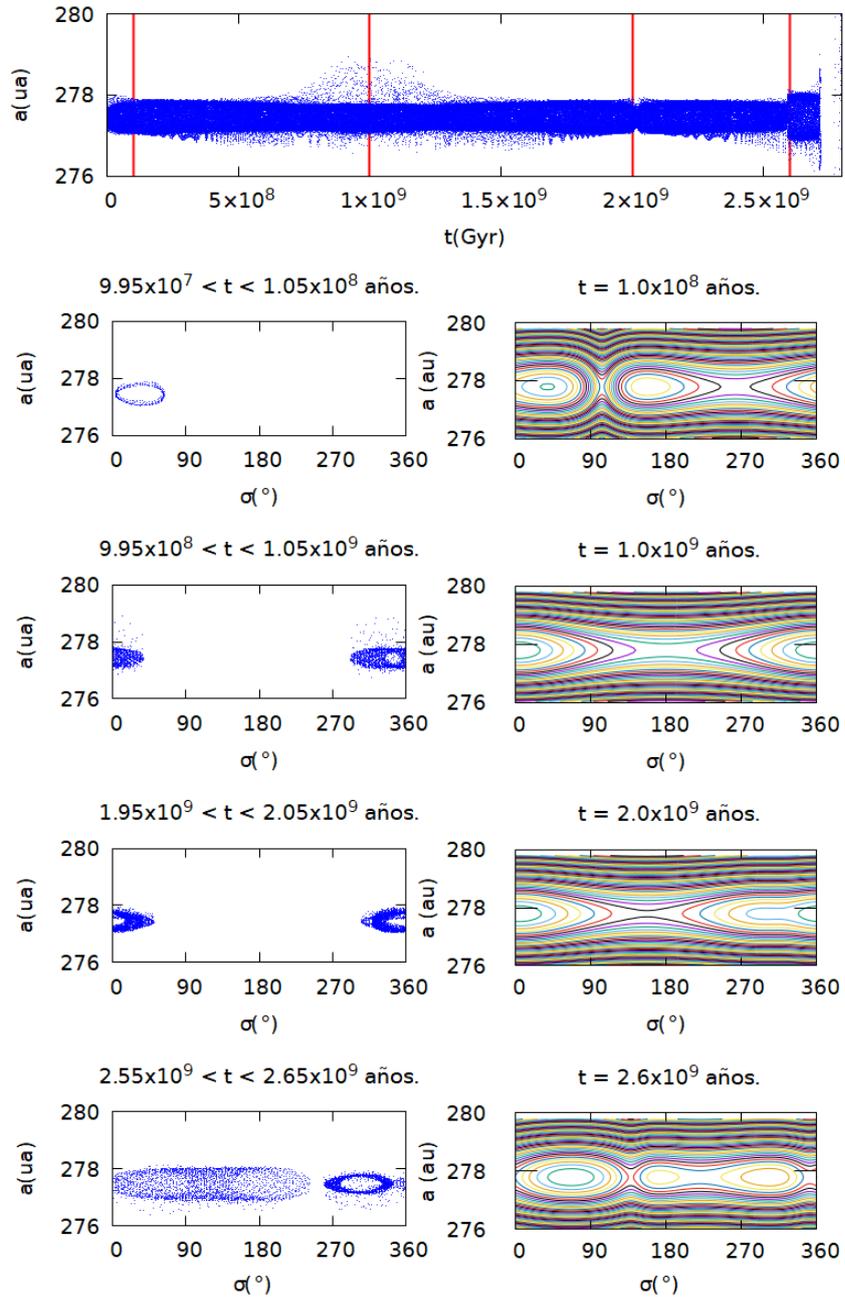
En los paneles de la tercer fila de la figura 4.9 (que se corresponde al período de tiempo donde el  $a$  libra con mayor amplitud), la partícula sufre difusión en su  $a$ . Las trayectorias observadas engloban el único punto de equilibrio existente en  $\sigma \sim 340^\circ$ .

En la cuarta fila de la figura 4.9 (que se corresponde con rápidos cambios en  $\Delta\varpi$  y  $e$  que se inician en  $t \sim 1900$  millones de años), se observa el surgimiento de un nuevo punto de equilibrio en  $\sigma \sim 300^\circ$ .

En el panel izquierdo de la última fila de la figura 4.9 se observa la difusión en  $a$  debido a grandes variaciones en el centro de libración de  $\sigma$ . Las trayectorias observadas no solo engloban los puntos de equilibrio en  $\sigma \sim 60^\circ$ ,  $\sigma \sim 170^\circ$  y  $\sigma \sim 300^\circ$  sino que llenan el área ocupada por los puntos en  $\sigma \sim 60^\circ$  y  $\sigma \sim 170^\circ$ . Los corrimientos en  $a$  entre las trayectorias mostradas en los paneles de la izquierda (evolución generada por el integrador numérico), y derecha (generada por el modelo), se debe a la inclusión de Neptuno en la integración, mientras que las curvas de nivel del Hamiltoniano modelan el sistema considerando solo al Planeta 9.



**Figura 4.8:** Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante  $\sigma = -4\lambda_p + \lambda + 3\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 4:1. Parámetros iniciales:  $M = 0^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .



**Figura 4.9:** Comparación de la evolución en el plano  $(a, \sigma)$ , y las curvas de nivel del Hamiltoniano  $\mathcal{H}(a, \sigma)$  para la partícula de la figura 4.8.

Comparando las figuras 4.6 y 4.8 se aprecia que las rápidas variaciones de  $\Delta\varpi$  están correlacionadas con los cambios en el centro de libración de  $\sigma$  y con las grandes variaciones en  $e$ .

Cambios extremadamente grandes en la excentricidad pueden generar un flípeo de la órbita (transformación de la órbita en retrógrada o viceversa), de la

partícula debido a que la componente  $z$  del momento angular de la partícula no se conserva (Naoz, 2016).

La figura 4.10 muestra una partícula atrapada en la resonancia 4:3 que alcanza altos valores de  $i$  convirtiendo la órbita en retrógrada por un período superior a 1000 millones de años para volver a ser directa en el resto de la evolución.

El panel de la primera fila de la figura 4.10 muestra la variación del ángulo crítico  $\sigma$ . El mismo oscila alrededor de  $\sigma = 0^\circ$  hasta que cambia su centro de libración rápidamente. Este cambio se corresponde con la variación de  $\Delta\varpi$  que podemos observar en el segundo panel en color azul (la órbita inicialmente antialineada con la dirección del perihelio del Planeta 9 se convierte en alineada).

El efecto de este cambio en la configuración de las órbitas se puede apreciar en la tercera fila con las correspondientes variaciones extremas de  $e$  (en negro) y  $i$  (en azul). En el punto de máxima inclinación (e inversión del signo de la variación de  $i$  que lleva la órbita a directa nuevamente),  $e$  alcanza un mínimo.

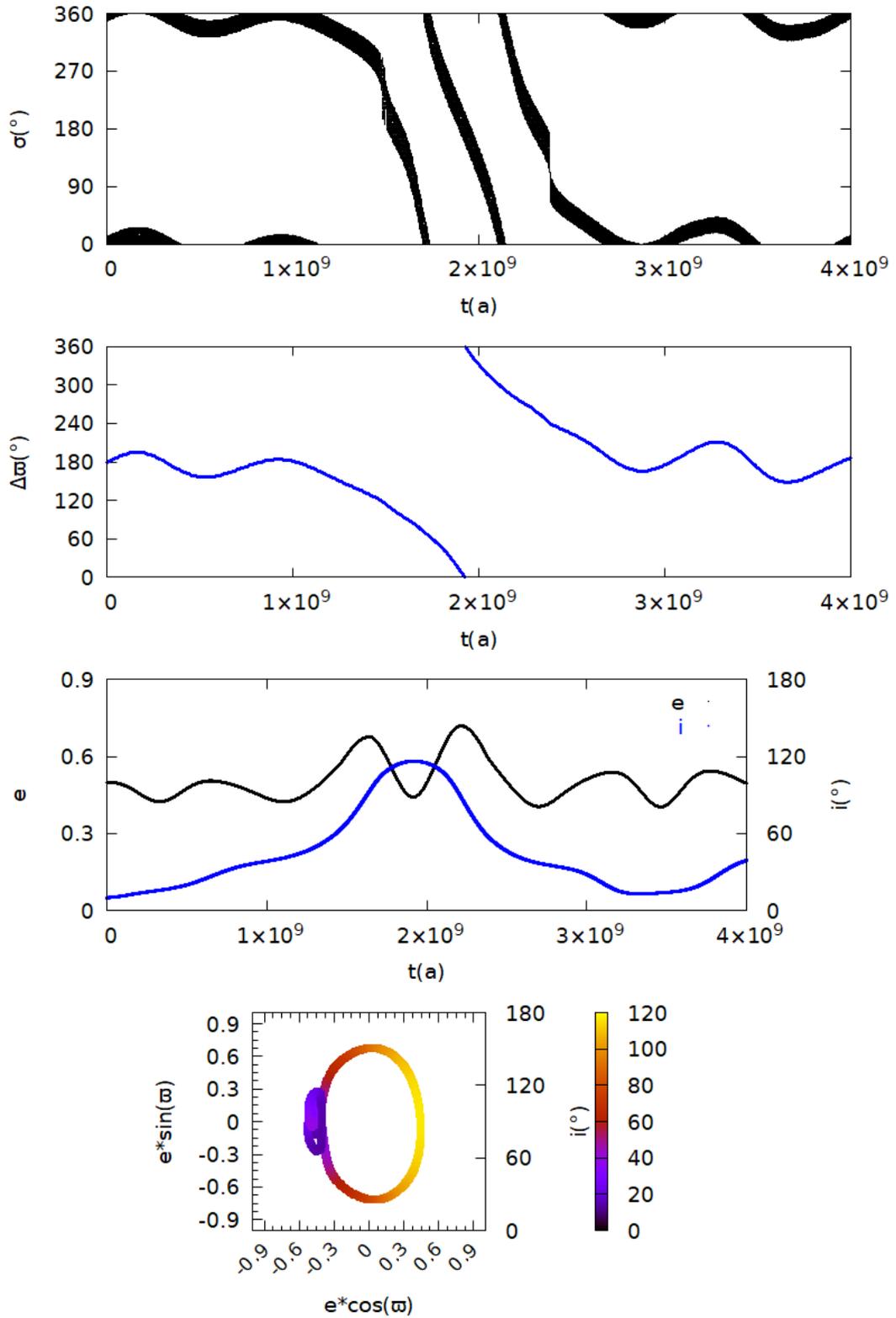
El panel de la cuarta fila muestra el diagrama  $(h, k)$ , de la partícula. En órbitas de baja excentricidad el radio de las trayectorias en el diagrama  $(h, k)$ , indicaría la excentricidad de la partícula (denominado modo propio), y la desviación del punto  $(0, 0)$ , la excentricidad del planeta perturbador (denominado modo forzado). Dado que la excentricidad del planeta perturbador no cambia, el modo forzado en una órbita de baja excentricidad sería constante (en el presente estudio debería ser además fijo dado que la órbita del planeta lo es). En los diagramas  $(h, k)$ , que obtuvimos para el caso de un perturbador con alta excentricidad se observa que los modos propios y forzados cambian dependiendo de la orientación relativa de las órbitas (dependen de  $\Delta\varpi$ ). Si bien el radio de las trayectorias y la desviación del punto  $(0, 0)$  no indican la excentricidad de la partícula y del planeta perturbador, si se encuentran relacionados.

El cuarto panel de la figura 4.10 muestra los cambios existentes en los modos propios y forzados que se relaciona con la orientación relativa de las órbitas dada por  $\Delta\varpi$ .

Las trayectorias a la izquierda centradas en  $\sim (-0.5, 0)$  se corresponden a los momentos de la evolución que se corresponden con  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  (configuración antialineada en  $\varpi$ ). En estas trayectorias el modo propio de la partícula es pequeño y el modo forzado es grande. En estas trayectorias la  $e$  e  $i$  no sufren grandes cambios.

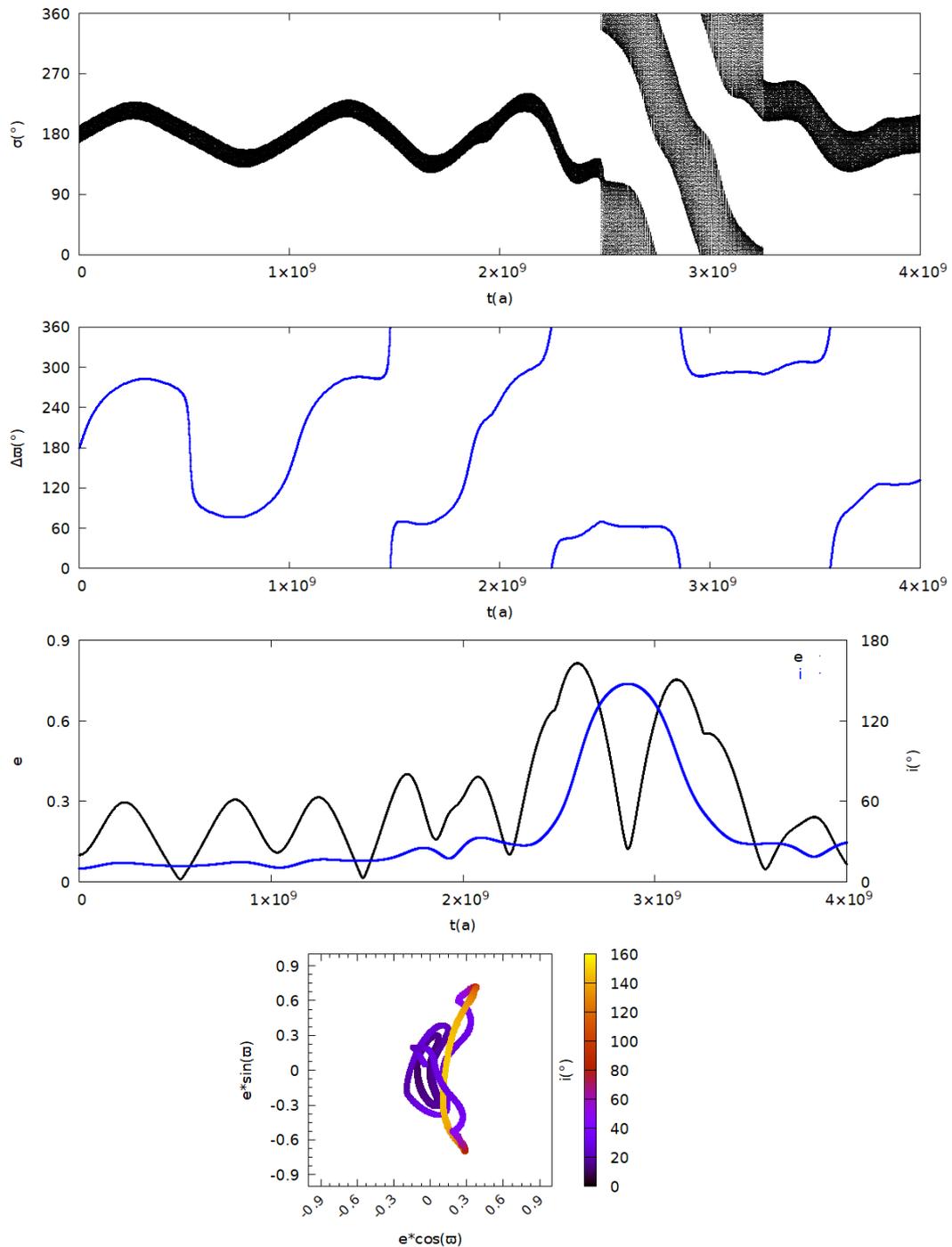
Para valores diferentes a  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  existe un cambio en los modos propios y forzados. La  $e$  de la partícula sufre grandes cambios lo que se corresponde con

un aumento de la  $i$  de la partícula. Para  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  se observa un modo propio grande y modo forzado casi nulo. Se aprecia que los máximos valores en  $i$  se corresponden con  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  (configuración alineada en  $\varpi$ ).



**Figura 4.10:** Descripción de los paneles: primera fila: evolución del ángulo crítico  $\sigma$ . Segunda fila: evolución de  $\Delta\varpi$ . Tercera fila: evolución de  $e$  (en negro), y  $i$  (en azul). Cuarta fila: diagrama  $(h, k)$  de la evolución de la partícula. El color en este panel indica la inclinación de la órbita.

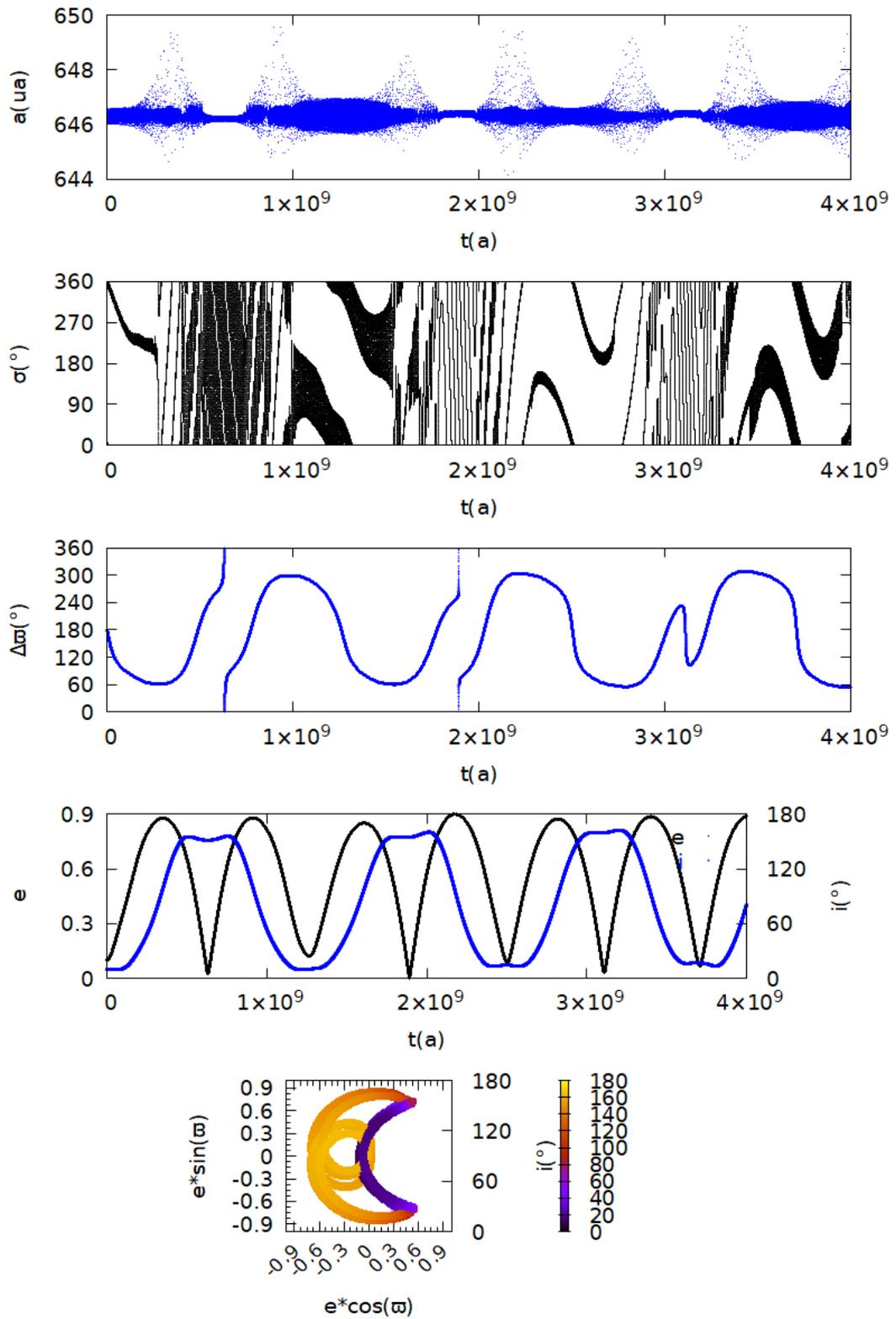
La figura 4.11 muestra un ejemplo de una partícula atrapada en la resonancia 3:2 que presenta variaciones muy rápidas en  $\Delta\varpi$ . Las rápidas variaciones en  $\Delta\varpi$  se producen debido a los grandes cambios en  $e$  que llevan a  $e \rightarrow 0$  (tal cual se analizó en la figura 4.10 para una partícula en la resonancia 4:3), pero solo se produce un flipeo de la órbita para  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ . Si bien la partícula inicia con una excentricidad baja,  $e = 0.1$ , las perturbaciones generadas por el Planeta 9 le permiten alcanzar altos valores de excentricidad ( $e \geq 0.8$ ). La forma irregular del diagrama  $(h, k)$ , se corresponde con las grandes e irregulares variaciones de  $e$ .



**Figura 4.11:** Ídem a la figura 4.10 para una partícula en la resonancia 3:2.

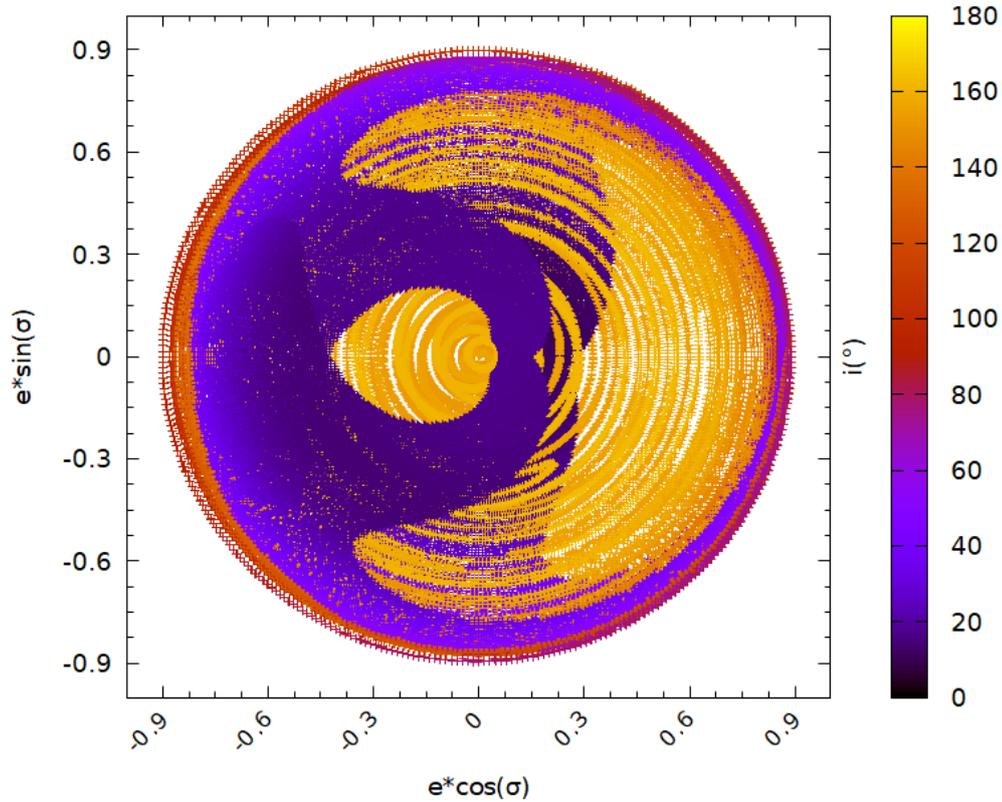
No todas las partículas permanecen atrapadas en resonancia durante toda su evolución. La figura 4.12 muestra una partícula que entra y sale de la resonancia 9:8. De forma similar a las figuras 4.10 y 4.11 se repite el ciclo donde las rápidas variaciones de  $\Delta\varpi$  están correlacionadas con las grandes variaciones

en  $e$  y  $i$ , pero en este caso incluso cuando la partícula no está en resonancia. En este caso la generación de órbitas de alta inclinación no se debe a efectos resonantes sino seculares dentro de la resonancia. Los paneles 3 y 4 de la figura 4.12 muestran que la dinámica puede explicarse mediante el mecanismo de Zeipel-Lidov-Kozai. En el panel 4 se observa que existen cambio en los modos propios y forzados. Para  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  los modos propios y forzados son pequeños. Para valores de  $\Delta\varpi$  diferentes a  $180^\circ$  ambos modos aumentan sus valores. El punto de equilibrio para  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  se corresponde con órbitas de alta inclinación y los puntos de equilibrio en  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  se corresponde con órbitas de baja inclinación. Este resultado concuerda con el obtenido en el estudio de la dinámica secular espacial en forma semianalítica desarrollada en la sección 2.2.2 del capítulo 2.



**Figura 4.12:** Ídem a la figura 4.10 para una partícula que entra y sale de la resonancia 9:8.

La figura 4.13 presenta el diagrama  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$  para la partícula de la figura 4.12. Este diagrama permite observar la evolución del ángulo crítico  $\sigma$  y de la  $e$  de la partícula. El código de colores indica la inclinación de la partícula durante la evolución. En el diagrama es posible observar que la órbita de la partícula alcanza altos valores en  $i$  mientras el ángulo crítico  $\sigma$  circula.



**Figura 4.13:** Diagrama  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$  para la partícula dentro de la resonancia 9:8 de la figura 4.12. El código de colores indica la inclinación de la órbita de la partícula.

La existencia de partículas con alta inclinación debido a efectos seculares ya fue estudiado en la sección 2.3.3 del capítulo 2. En dicho estudio se encontró que era posible la existencia de partículas con alta inclinación para semiejes superiores a  $a \geq 280$  ua.

Para estudiar la generación de partículas con alta inclinación en resonancia se realizó una segunda serie de integraciones para las partículas de las tablas 4.2 y 4.3 para  $e = 0.1$  (se presentó un ejemplo en la figura 4.11).

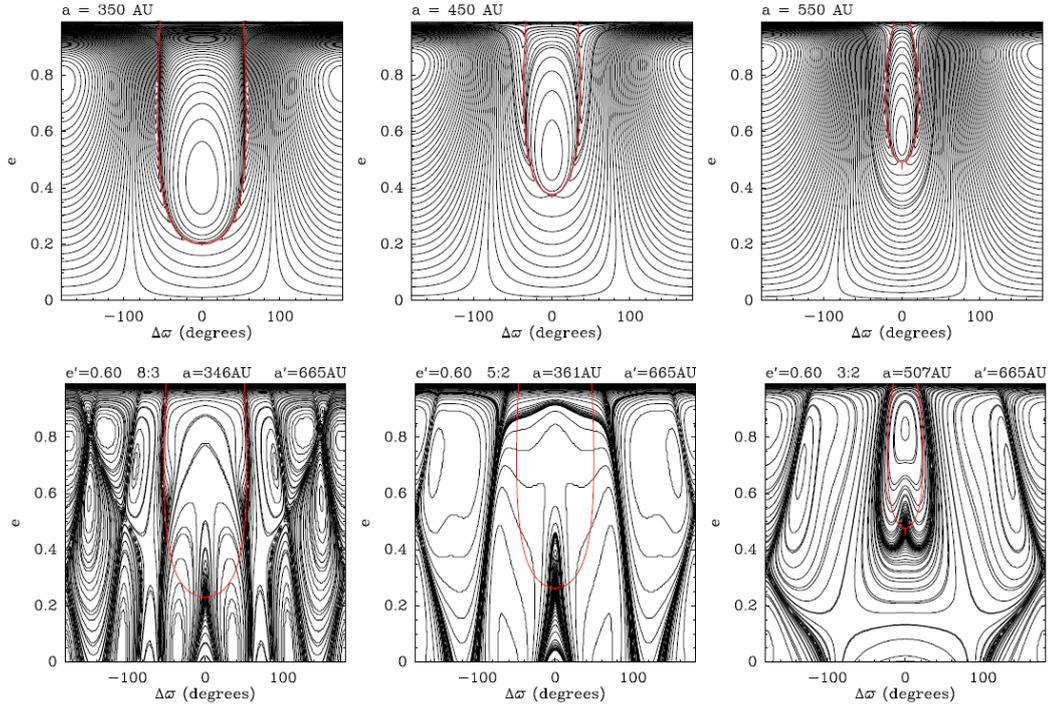
Se encontraron partículas que alcanzan altas inclinaciones evolucionando secu-

larmente dentro de las resonancias en las resonancias: 4:3, 7:4, 7:5 y 9:8. Todas estas partículas iniciaron con  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Para partículas que se inician con  $\Delta\varpi = 0^\circ$  se hallaron partículas que alcanzan altas inclinaciones evolucionando secularmente dentro de resonancias en las resonancias 7:5 y 9:8.

### 4.3. Caso con $\Delta\varpi$ oscilando.

Si la longitud del perihelio  $\varpi$  de la partícula oscila, y dado que la longitud del perihelio del planeta perturbador  $\varpi_p$  es fija salvo la existencia de otros planetas perturbadores, la dirección del perihelio de la partícula librera en torno del eje de la órbita del planeta perturbador. A esta dinámica se le conoce como resonancia de corrotación o ACR (Apsidal Corrotation Resonance), y resulta un tipo de resonancia secular que se producen dentro de las resonancias de movimientos medios (ver los trabajos de Ferraz-Mello et al. 1993, Beaugé y Michtchenko, 2003, Zhou et al. 2004, y Michtchenko et al. 2006).

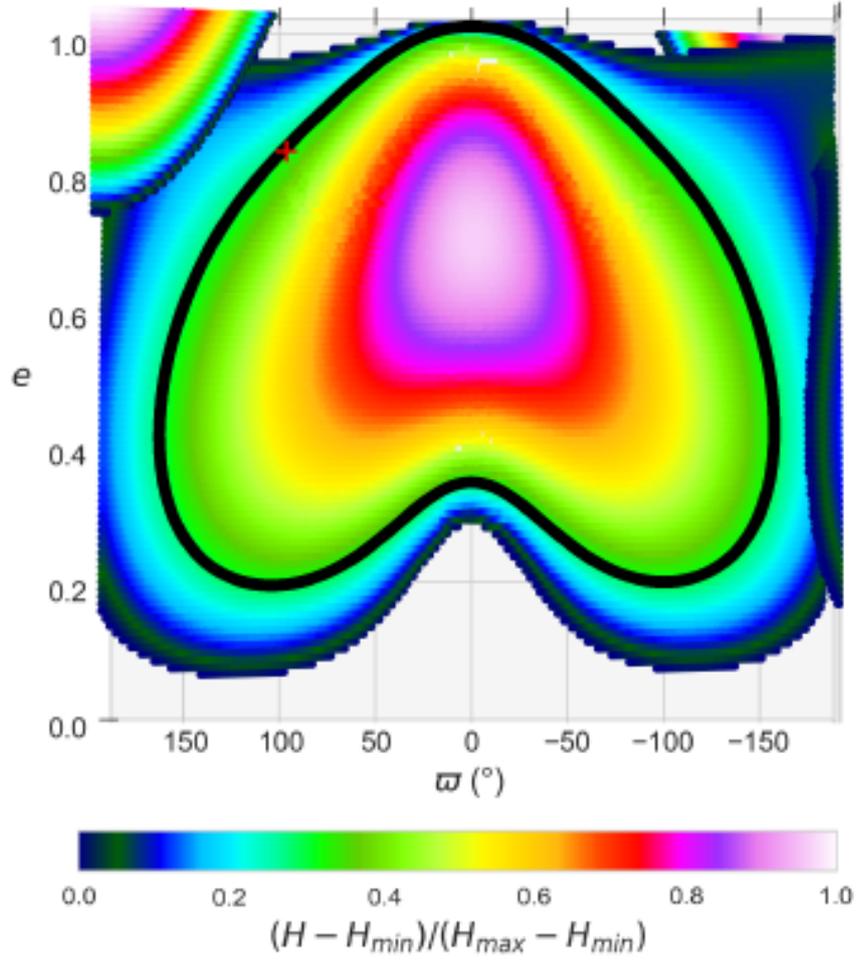
El estudio semianalítico de las ACR generadas por el Planeta 9 permitió a Beust, 2016 analizar la existencia de concentraciones en  $\varpi$  generadas por la dinámica resonante y secular. Utilizando un método de promediando numérico de la función perturbadora para la dinámica secular y resonante en el caso plano, Beust construyó curvas de nivel del Hamiltoniano promediado para estudiar la evolución de las partículas y encontrar los puntos de equilibrio. Para construir las curvas de nivel del Hamiltoniano resonante definió nula la amplitud de la libración alrededor del valor exacto de la resonancia (ver capítulo 3 y apéndice B, Beust, 2016), análogamente a lo realizando en Pons y Gallardo, 2022. La figura 4.14 es una composición de las figuras 1 y 2 de Beust, 2016. Los paneles superiores muestran las curvas de nivel para la evolución secular y los paneles inferiores las curvas de nivel de la evolución resonante, para las resonancias 8:3 (panel de la izquierda), 5:2 (panel central), y 3:2 (panel de la derecha). En las curvas de nivel de la dinámica resonante se observan una gran variedad de ACR para diferentes valores de  $\Delta\varpi$ . Las curvas negras corresponden a las curvas de colisión con el Planeta 9. Si bien la estructura resonante es diferente a la de la dinámica secular, se localizan ACR en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $\Delta\varpi = 180^\circ$ , lo que lleva al autor a concluir que el confinamiento en  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  puede ser generado por ambas dinámicas.



**Figura 4.14:** Curvas de nivel del Hamiltoniano promediado semianáliticamente para el caso secular plano (panel superior), y resonante plano (panel inferior), realizadas por Beust, 2016. El semieje del Planeta 9 se modificó para el caso resonante,  $a_9 = 665$  ua, para que la resonancia 3:2 esté ubicada en  $a = 507$  ua, el semieje de Sedna. Las curvas de nivel del Hamiltoniano resonante se calcularon asumiendo nula la libración de  $\sigma$ .

Pons y Gallardo, 2022 analizan la evolución secular dentro de resonancias en el caso plano, para partículas en la resonancia 2:1 con el Planeta 9 <sup>1</sup>. Demuestran que partículas de baja excentricidad y coplanares con el Planeta 9, pueden sufrir grandes variaciones en excentricidad. Si bien su trabajo no pretende ser exhaustivo en el análisis de las diferentes resonancias con el Planeta 9, analizan con detalle la ubicación de las ACR para la resonancia 2:1, encontrando una ACR en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  para  $e \sim 0.7$  (ver figura 4.15).

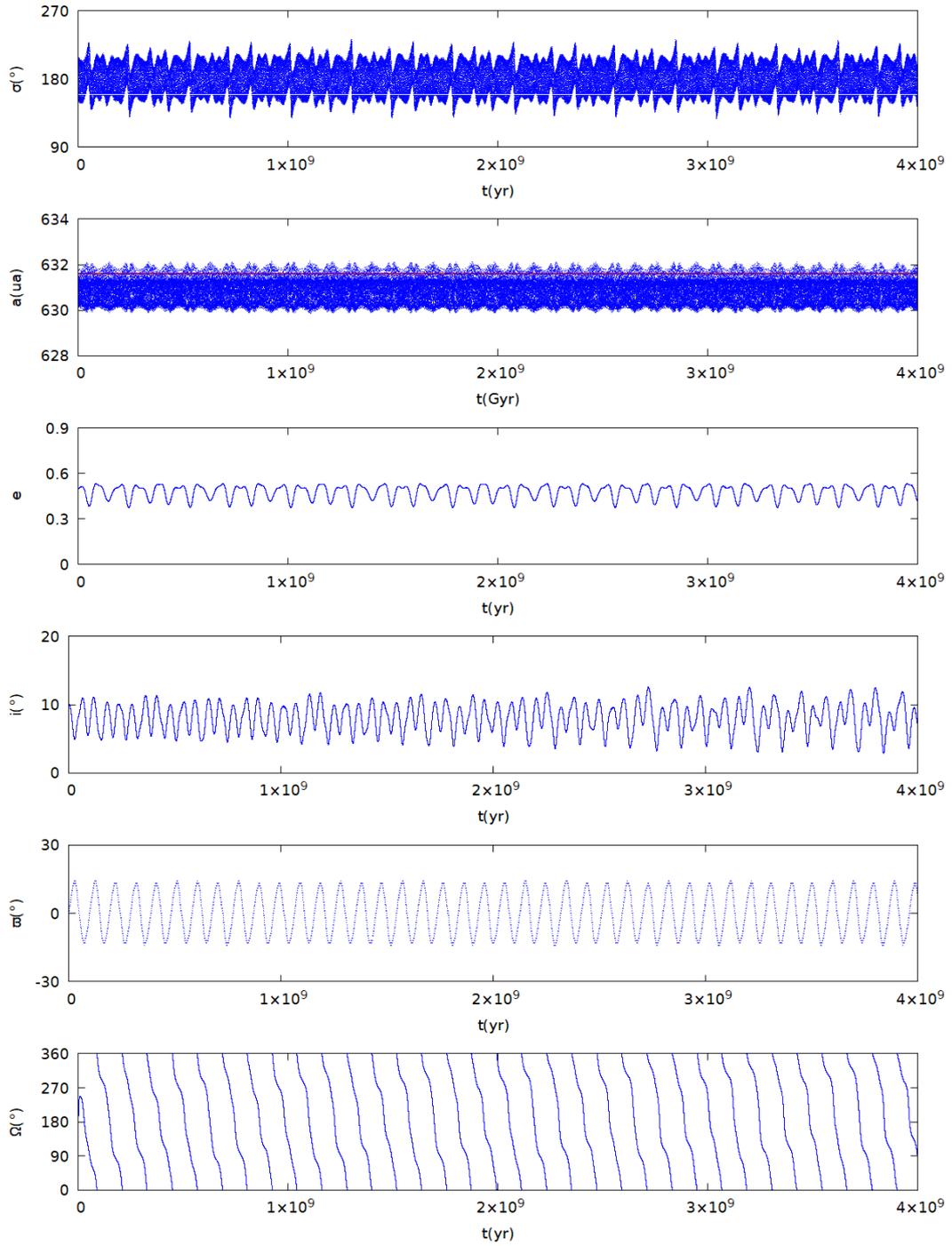
<sup>1</sup>Utilizan un enfoque semianalítico para el cálculo numérico de la función perturbadora resonante, empleando el principio de invariancia adiabática (definiendo nula la amplitud de libración), estudian la evolución secular en el centro de las resonancias.



**Figura 4.15:** Proyección de la superficie tridimensional  $\mathcal{H}(e, \varpi, \sigma)$ , en el plano  $(e, \varpi)$  para la resonancia 2:1 con el Planeta 9. La línea negra muestra la evolución dada por una integración numérica, y la cruz roja marca las condiciones iniciales de la partícula. Fuente Pons y Gallardo, 2022.

De las 247 partículas capturadas en resonancias en las integraciones realizadas en esta tesis, 12 fueron capturadas en ACRs para  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Todas estas partículas poseían inicialmente  $\Delta\varpi = 0^\circ$

La figura 4.16 presenta la evolución del ángulo crítico  $\sigma$ , y de los elementos orbitales  $a, e, i, \varpi, \Omega$  de una partícula que evoluciona dentro de una ACR durante 4000 millones de años en la resonancia 7:6. En este caso  $\Delta\varpi$  libra alrededor de  $0^\circ$  (el perihelio de la partícula oscila alrededor del perihelio del planeta).

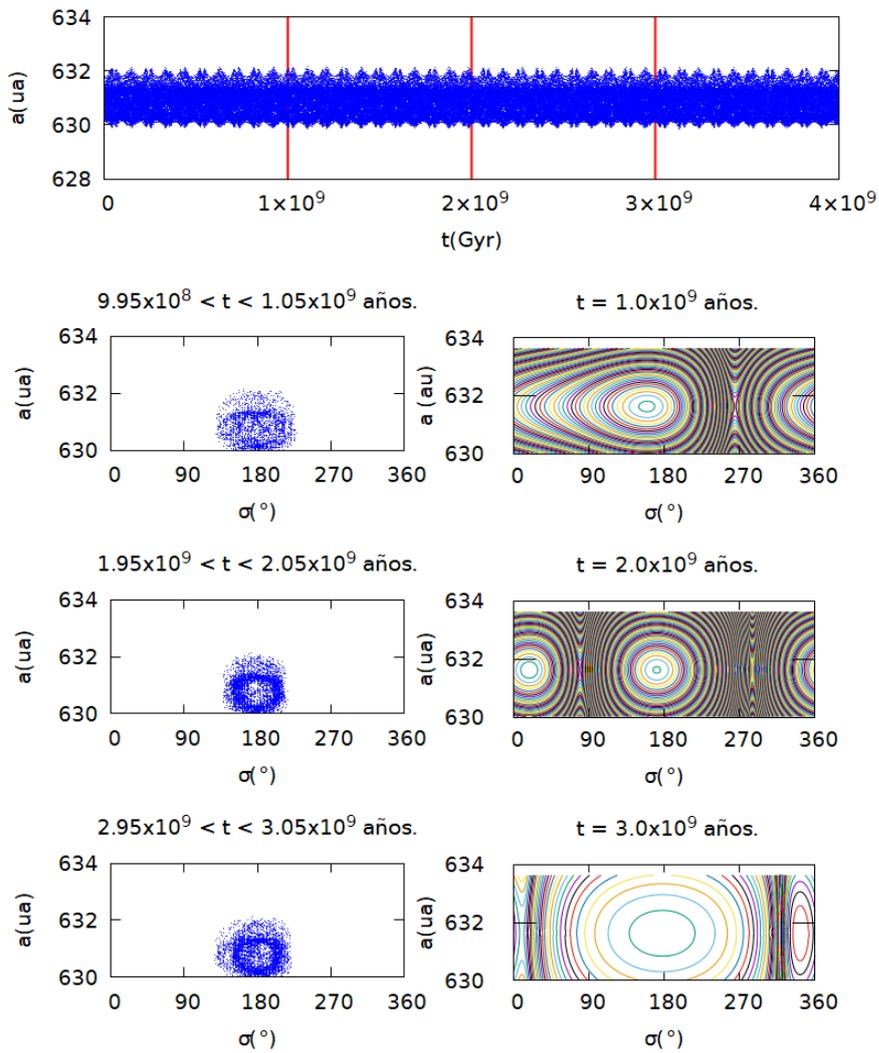


**Figura 4.16:** Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante  $\sigma = -7\lambda_9 + 6\lambda + \varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 7:6. Parámetros iniciales:  $M = 30^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .

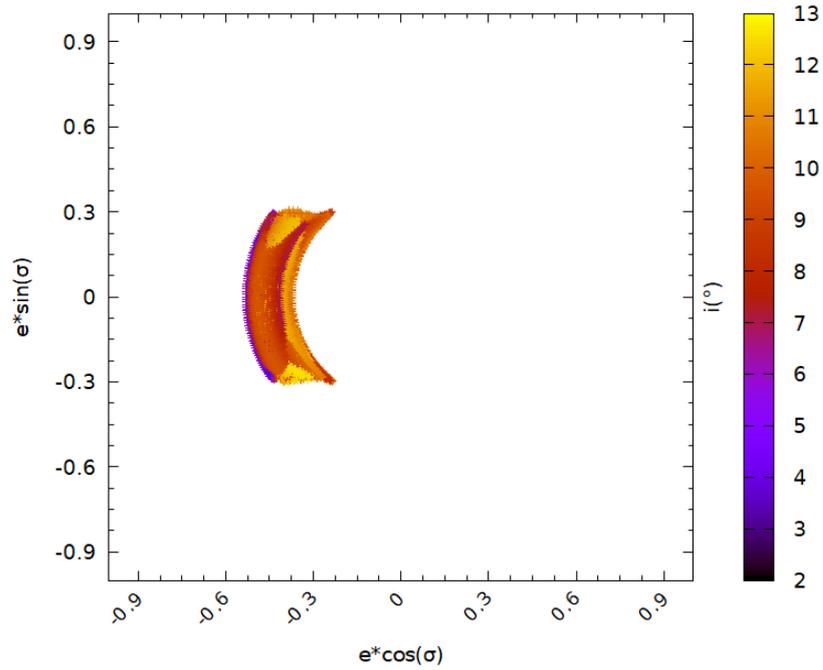
El panel de la fila 1 de la figura 4.17 muestra la evolución del semieje y identifican 3 tiempos en dicha evolución, los cuales son estudiados en las filas

2 a 4 de esta figura.

Los paneles de la derecha de las filas 2 a 4 de la figura 4.17 muestran que el punto de equilibrio de  $\sigma$  libra centrado en  $\sigma \sim 180^\circ$ . Para los tiempos considerados para estos paneles la excentricidad de la partícula se corresponde con los valores  $e = 0.44, 0.49$  y  $0.53$ . El corrimiento en el centro de libración de  $\sigma$  observado en los paneles de la izquierda es debido a la inclusión de Neptuno en las integraciones numéricas. La figura 4.18 muestra la libración del ángulo crítico para  $\sigma \sim 180^\circ$  en el diagrama  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$ .

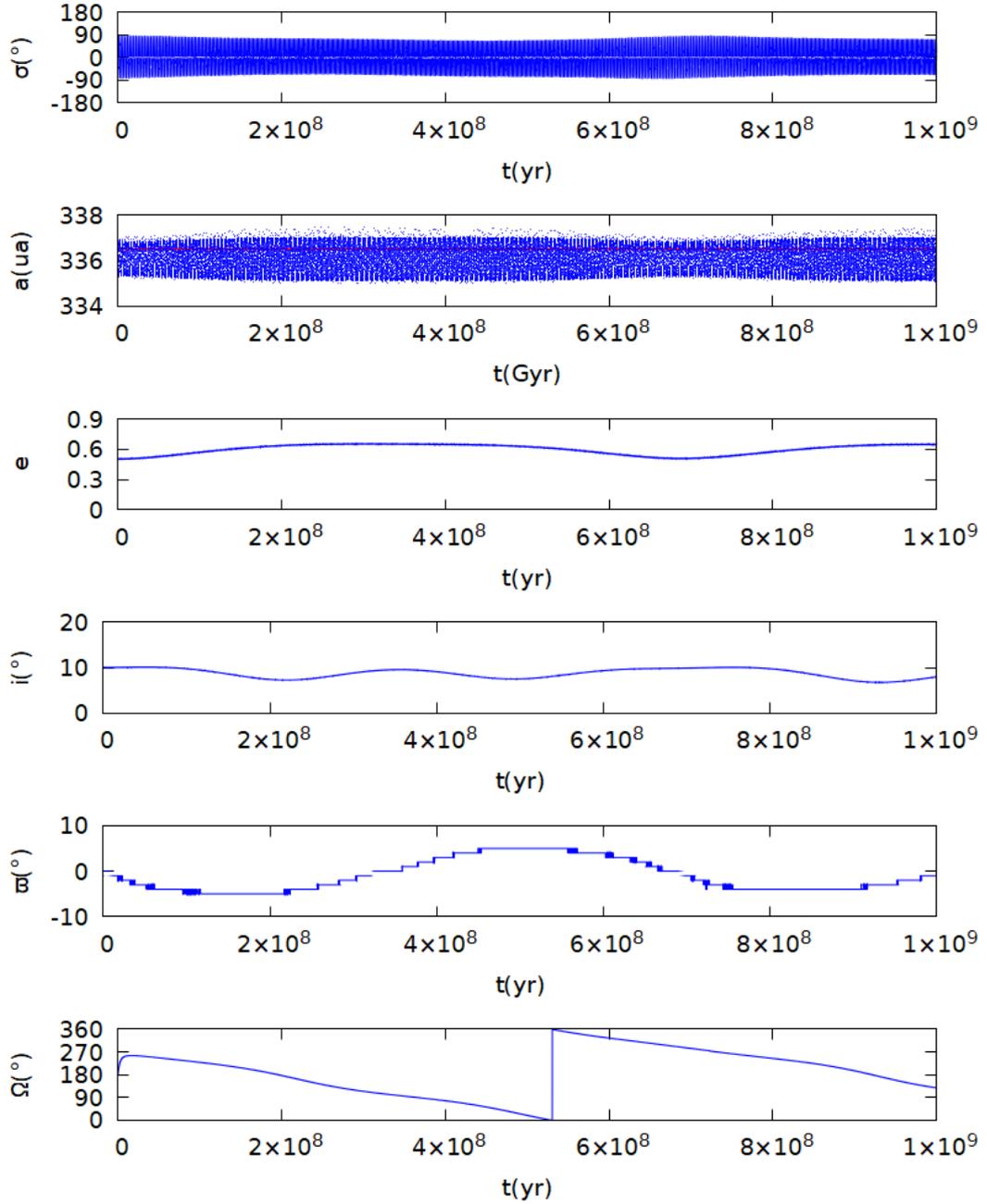


**Figura 4.17:** Comparación de la evolución en el plano  $(a, \sigma)$ , y las curvas de nivel del Hamiltoniano  $\mathcal{H}(a, \sigma)$  para la partícula de la figura 4.16.

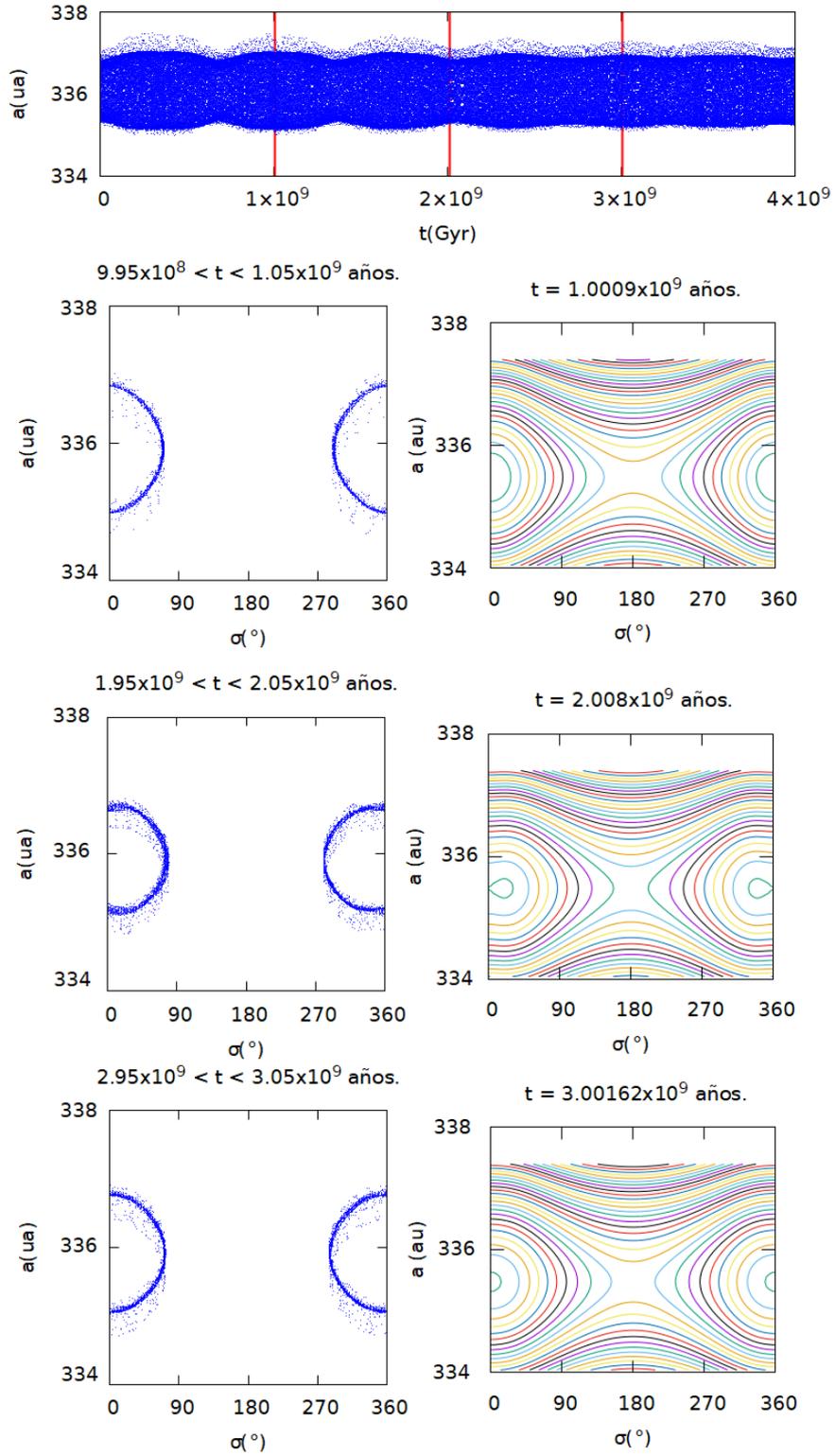


**Figura 4.18:** Diagrama  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$  para la partícula de la figura 4.16.

Las figuras 4.19 y 4.20 son análogas a las anteriores pero para una partícula dentro de la resonancia 3:1 y que se encuentra en una ACR con gran amplitud de oscilación de  $\sigma$ . En este caso la amplitud de oscilación de  $\varpi$  es pequeña (a diferencia del caso analizado en las figuras 4.16 y 4.17), lo que permite que el centro de libración de  $\sigma$  permanezca fijo durante toda la evolución (comparar los paneles de la derecha de la figura 4.20 con los mismos paneles de la figura 4.17). En este caso la excentricidad presenta valores altos:  $e = 0.64$  (panel fila dos),  $e = 0.55$  (panel fila tres), y  $e = 0.6$  (panel fila cuatro).

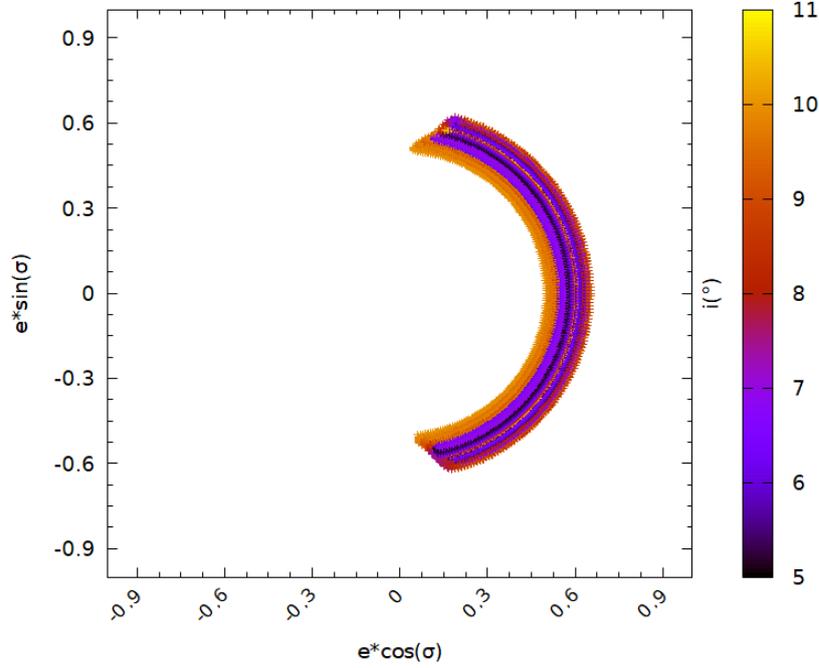


**Figura 4.19:** Evolución de los elementos orbitales y del ángulo resonante  $\sigma = -3\lambda_p + \lambda + 2\varpi$ , para una partícula capturada en la resonancia 3:1. Parámetros iniciales:  $M = 34^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .



**Figura 4.20:** Ídem a la figura 4.17 para la partícula de la figura 4.19. Las curvas de nivel del Hamiltoniano fueron realizadas para  $e = 0.64$  (panel superior),  $e = 0.55$  (panel central) y  $e = 0.6$  (panel inferior).

La figura 4.21 es análoga a la figura 4.18 para la partícula de la figura 4.19. El ángulo crítico libra para  $\sigma \sim 0^\circ$ .



**Figura 4.21:** Diagrama  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$  para la partícula de la figura 4.16.

### 4.3.1. Conclusiones.

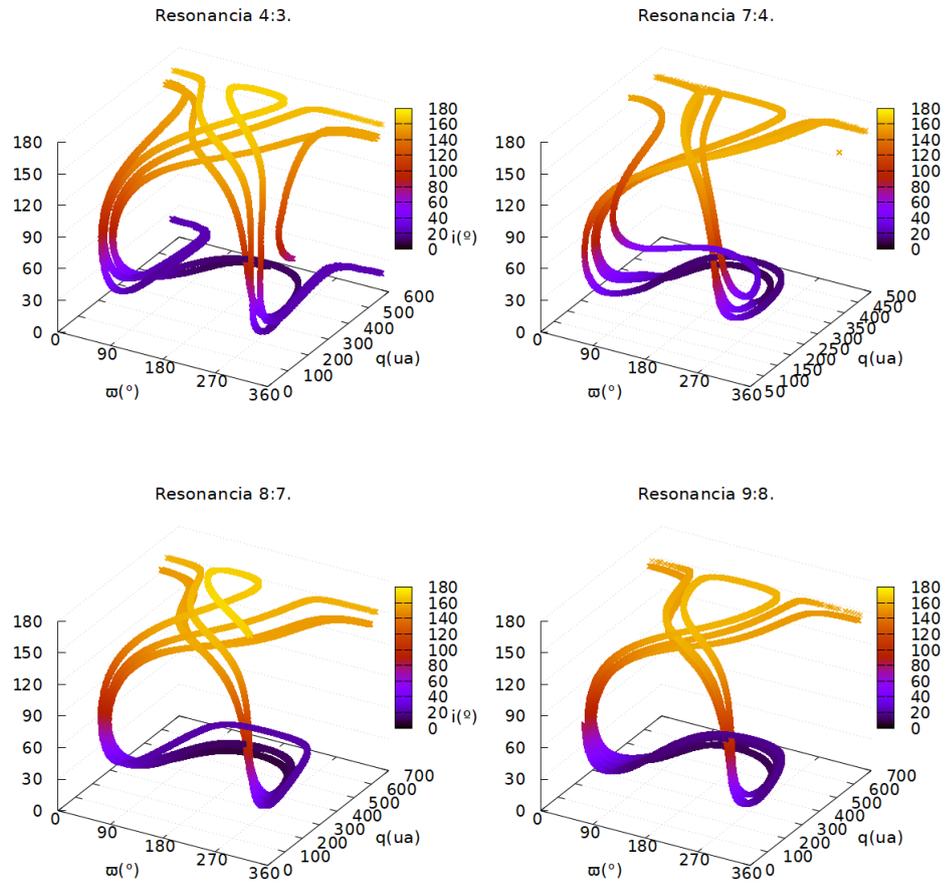
Las partículas atrapadas en ACR presentan estabilidad durante los 4000 millones de años de la integración. Todos los elementos de la órbita (con excepción de  $\Omega$ ), libran con pequeña amplitud moduladas por la evolución de  $\varpi$  (ver figuras 4.16 y 4.19), lo que evita cambios en el centro de libración de  $\sigma$ , grandes variaciones en  $e$  e  $i$ , y dispersión en  $a$ .

Los resultados de las integraciones numéricas muestran que las partículas estables se corresponden con las partículas cuya  $a_{des} \leq 10$  ua. De estas partículas solo las que inician con  $\Delta\varpi = 180^\circ$  alcanzan altas  $i$  cuando  $\varpi$  circula y lleva las órbitas de antialineadas a alineadas. Se observa que las variaciones de  $e$  y  $i$  asociadas con las variaciones de  $\varpi$  se producen para partículas dentro y fuera de resonancia.

Las partículas resonantes que alcanzan altos valores de  $i$  inicialmente se encuentran antialineadas en sus perihelios con el Planeta 9,  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$ , y alcanzan altos valores en inclinación cuando los perihelios tienden a alinearse.

Las partículas cuya evolución está regida por la dinámica secular, al salir de la resonancia, presentan un punto de equilibrio en  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  (ver figuras 4.12 y 4.13), y alcanzan orbitas de alta inclinación, resultado ya analizado en la sección 2.3.3 del capítulo 2.

Los resultados de las integraciones muestran la existencia de agrupaciones en longitud de perihelio para  $\Delta\varpi = 0^\circ$  para las partículas que inician con  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y resultan capturadas en resonancia dentro de una ACR, y para  $\Delta\varpi = 180^\circ$  para las partículas capturadas en resonancias y que inician con  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . La figura 4.22 muestra el espacio  $(\varpi, q, i)$  para cuatro partículas atrapadas en las resonancias 4:3, 7:4, 8:7 y 9:8 que iniciaron con  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Las órbitas aumentan su inclinación para  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  y  $\Delta\varpi \sim 270^\circ$ . De la figura 4.22 se observa que las mejores condiciones de observación se producen para  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  y  $270^\circ$ , donde las partículas tienen valores mínimos de  $q$  y baja inclinación.



**Figura 4.22:** Espacio  $(\varpi, q, i)$  para partículas atrapadas en las resonancias 4:3, 7:4, 8:7 y 9:8. Todas las partículas iniciaron con  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Se observa que las partículas aumentan su inclinación para  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  y  $\Delta\varpi \sim 270^\circ$ , existiendo un punto de equilibrio en  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . El código de colores indica la inclinación de la partícula.

# Capítulo 5

## Conclusiones.

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la dinámica generada por un perturbador con alta excentricidad e inclinación mediante un modelo semianalítico, su aplicación a la hipótesis del Planeta 9 propuesta por los autores Batygin y Brown, 2016, y la comparación de los resultados con la literatura existente. Por este motivo, se utilizaron y validaron los modelos semianalíticos desarrollados por Gallardo (2022) (para el caso secular), y Gallardo, 2020 (para el caso resonante), comparando los resultados de los modelos con integraciones numéricas exactas y mapas dinámicos.

Se obtuvo el Hamiltoniano secular doblemente promediado en longitud media, en el caso plano e inclinado, calculando numéricamente la función perturbadora. Aplicando el modelo semianalítico secular al caso plano, el mismo muestra la existencia de puntos de equilibrios estables en el espacio  $(e, \Delta\varpi)$ , para  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$  y  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$ . Resultado que concuerda con resultados de los trabajos de Batygin y Brown, 2016, Beust, 2016 y Batygin et al. 2019. El punto de equilibrio en  $\Delta\varpi = 180^\circ$  se produce para valores elevados de  $e$  y proporciona las mejores condiciones de observabilidad.

En el caso secular espacial, el modelo semianalítico presenta un punto de equilibrio en el espacio  $(e, \Delta\varpi)$ , para  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  y  $e \sim 0.2$ , resultado que concuerda con el trabajo de Li et al. 2018. Como se muestra en la figura 2.11 estos puntos de equilibrio se presentan para altas inclinaciones para semiejes altos. La figura 2.20 muestra que para semiejes menores a 300 ua, las concentraciones en  $\Delta\varpi \sim 180^\circ$  se producen en condiciones similares a las del caso plano.

Los resultados anteriores muestran que las agrupaciones en  $\Delta\varpi$  reportadas en la región transneptuniana (Batygin y Brown, 2016), pueden explicarse con la

teoría secular en caso de existir un perturbador con alta excentricidad e inclinación en la región transneptuniana.

Si bien no existen limitaciones en  $(a, e, i)$ , para la utilización del modelo semianalítico propuesto, si existen limitaciones en su aplicación dado que no es válido en condiciones de encuentro cercano entre las partículas y el planeta perturbador. Por este motivo, en el capítulo 2, se delimitó la zona de validez del modelo semianalítico mediante el análisis de los diagramas  $(k, h)$  y  $(q, p)$ , y el criterio de validez  $\frac{R}{R_{max}}$  desarrollado por Gallardo (2022). El análisis de la evolución secular (en el modelo que integra a los planetas gigantes y al Planeta 9), dentro de la zona donde la teoría es válida, muestra que los modos forzados de los planetas gigantes estabilizan la dinámica evitando variaciones significativas en  $e$  e  $i$ . Dicho resultado es verificado utilizando integraciones numéricas. En esta tesis no se encuentran objetos con  $a < 280$  ua que alcancen altas inclinaciones bajo el efecto de la dinámica secular. La aplicación del modelo secular semianalítico, y su verificación con integraciones numéricas, a la evolución de las partículas de la región transneptuniana con  $a > 100$  ua y  $q > 40$  ua, muestra que la misma puede ser explicada por la teoría secular.

La aplicación del modelo semianalítico resonante (y su verificación mediante mapas dinámicos), muestra que los anchos de las resonancias generadas por un perturbador excéntrico poseen una débil dependencia con el valor de la excentricidad de la partícula (en el caso de un perturbador con baja excentricidad el ancho resonante crece en función de la excentricidad de la partícula), y presentan una marcada dependencia con  $\Delta\varpi$ .

El modelo semianalítico resonante muestra que el ancho de las resonancias (el cual es un buen indicador de la fuerza de las mismas (Gallardo, 2006)), decrece con el orden de las resonancias  $q = |k - k_p|$ , siendo las resonancias de orden  $q = 1$  las más anchas, y las de tipo N:1 las más aisladas y estables ante variaciones de  $\Delta\varpi$ .

En el modelo estudiado en el capítulo 3, las resonancias de Neptuno y el Planeta 9 coexisten en la región  $300 \text{ ua} < a < 400 \text{ ua}$ , para  $e \geq 0.7$ . Los mapas dinámicos muestran que las perturbaciones de corto periodo producidas por Neptuno no cambian las estructuras resonantes generadas por el Planeta 9.

La evolución dinámica de las partículas atrapadas en resonancias de movimientos medios por un periodo superior a 1000 millones de años está determinada por el comportamiento de  $\Delta\varpi$ .

En los casos en que  $\Delta\varpi$  circula el centro de libración del ángulo crítico  $\sigma$  cam-

bia, generándose cambios en  $e$  y en  $a$  que pueden sacar a la partícula de la resonancia.

Se observa la generación de órbitas de alta inclinación en partículas que inician con  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (perihelios antialineados al del Planeta 9), cuando el valor de  $\Delta\varpi$  se aproxima a  $90^\circ$  y  $270^\circ$  (cuando los perihelios tienden a alinearse con el del Planeta 9). En estas partículas se observa un punto de equilibrio en  $\Delta\varpi = 180^\circ$  para  $e$  bajas (ver figura 4.22). Esto permite que las agrupaciones reportadas en la región transneptuniana por Batygin y Brown, 2016, puedan explicarse también con la dinámica resonante (resultado que concuerda con el obtenido por Beust, 2016). Como se muestra en la figura 4.22 estos puntos de equilibrio se presentan para altas inclinaciones. En este sentido las mejores condiciones de observación de partículas atrapadas en resonancias se produce para  $\Delta\varpi \sim 90^\circ$  y  $270^\circ$ . Para estos valores de  $\Delta\varpi$  la partícula se encuentra en sus valores mínimos de  $q$  y con baja inclinación. Comparando las mejores condiciones de observabilidad en el caso secular y resonante, es en el caso secular donde se brindan las mejores condiciones de observabilidad para partículas en los puntos de equilibrio (dado el bajo valor de  $q$  e  $i$  de las partículas en los puntos de equilibrio).

En caso de que  $\Delta\varpi$  oscila, la partícula se encuentra en una resonancia de corrotación (ACR). En estos casos se produce una solución estacionaria en la evolución de los elementos de la órbita de la partícula: la órbita oscila modulada por la evolución de  $\Delta\varpi$ . Todas las partículas de las integraciones realizadas que resultaron atrapadas en ACR lo están para  $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ .

En esta tesis se estudiaron mediante los modelos semianalíticos aquí detallados la evolución de partículas que iniciaron con  $\Delta\varpi = 0^\circ$  y  $180^\circ$ . El estudio de las dinámicas seculares y resonantes para otros valores de  $\Delta\varpi$  permitirá complementar la descripción de la dinámica generada por el hipotético Planeta 9 aquí realizada.

En el estudio de la evolución secular resonante solo se consideró la evolución de las partículas con  $a_{des} \leq 10$  ua y tiempo de captura resonante superior a 1000 millones de años. El estudio de la evolución de partículas con  $a_{des} > 10$  ua permitiría entender cual es su papel en la región interior del Sistema Solar, si por ejemplo estas partículas pueden convertirse en cometas de corto período.

# Bibliografía

- Bailey, E., Brown, M. E., y Batygin, K. (2018). Feasibility of a Resonance-based Planet Nine Search. *Astronomical Journal*, 156(2), Artículo 74, 74. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aaccf4>
- Batygin, K., y Morbidelli, A. (2013). Analytical treatment of planetary resonances. *Astronomy Astrophysics*, 556, Artículo A28, A28. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220907>
- Batygin, K., Adams, F. C., Brown, M. E., y Becker, J. C. (2019). The planet nine hypothesis. *Physics Reports*, 805, 1-53. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.01.009>
- Batygin, K., y Brown, M. E. (2016). Evidence for a Distant Giant Planet in the Solar System. *Astronomical Journal*, 151(2), Artículo 22, 22. <https://doi.org/10.3847/0004-6256/151/2/22>
- Batygin, K., y Morbidelli, A. (2017). Dynamical Evolution Induced by Planet Nine. *Astronomical Journal*, 154(6), Artículo 229, 229. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa937c>
- Beaugé, C., y Michtchenko, T. A. (2003). Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341(3), 760-770. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06345.x>
- Becker, J. C., Khain, T., Hamilton, S. J., Adams, F. C., Gerdes, D. W., Zullo, L., Franson, K., Millholland, S., Bernstein, G. M., Sako, M., Bernardinelli, P., Napier, K., Markwardt, L., Lin, H. W., Wester, W., Abdalla, F. B., Allam, S., Annis, J., Avila, S., ... DES Collaboration. (2018). Discovery and Dynamical Analysis of an Extreme Trans-Neptunian Object with a High Orbital Inclination. *Astronomical Journal*, 156(2), Artículo 81, 81. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aad042>
- Becker, J., Adams, F. C., Khain, T., Hamilton, S., y Gerdes, D. W. (2017). Evaluating the Dynamical Stability of Outer Solar System Objects in the

- Presence of Planet Nine. *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #49*, 49, Artículo 405.07, 405.07.
- Beust, H. (2016). Orbital clustering of distant Kuiper belt objects by hypothetical Planet 9. Secular or resonant? *Astronomy Astrophysics letters*, 590, Artículo L2, L2. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628638>
- Brouwer, D., y Clemence, G. M. (1961). *Methods of celestial mechanics*.
- Brown, M. E. (2017). Observational Bias and the Clustering of Distant Eccentric Kuiper Belt Objects. *Astronomical Journal*, 154(2), Artículo 65, 65. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa79f4>
- Brown, M. E., Trujillo, C., y Rabinowitz, D. (2004). Discovery of a Candidate Inner Oort Cloud Planetoid. *The Astrophysical Journal*, 617(1), 645-649. <https://doi.org/10.1086/422095>
- Brunini, A., y Melita, M. D. (2002). The Existence of a Planet beyond 50 AU and the Orbital Distribution of the Classical Edgeworth-Kuiper-Belt Objects. *Icarus*, 160(1), 32-43. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6935>
- Cincotta, P. M., Giordano, C. M., y Simó, C. (2003). Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 182(3-4), 151-178. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00103-9](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00103-9)
- de la Fuente Marcos, C., y de la Fuente Marcos, R. (2016). Finding Planet Nine: apsidal anti-alignment Monte Carlo results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462(2), 1972-1977. <https://doi.org/10.1093/mnras/stw1778>
- de la Fuente Marcos, C., y de la Fuente Marcos, R. (2014). Extreme trans-Neptunian objects and the Kozai mechanism: signalling the presence of trans-Plutonian planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 443(1), L59-L63. <https://doi.org/10.1093/mnrasl/flu084>
- Fernandez, J. A. (1980). On the existence of a comet belt beyond Neptune. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 192, 481-491. <https://doi.org/10.1093/mnras/192.3.481>
- Fernandez, J. A., y Ip, W. -. (1984). Some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune: The exchange of orbital angular momentum with planetesimals. *Icarus*, 58(1), 109-120. [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(84\)90101-5](https://doi.org/10.1016/0019-1035(84)90101-5)

- Fernández, J. A., y Brunini, A. (2000). The Buildup of a Tightly Bound Comet Cloud around an Early Sun Immersed in a Dense Galactic Environment: Numerical Experiments. *Icarus*, 145(2), 580-590. <https://doi.org/10.1006/icar.2000.6348>
- Fernández, J. A., Gallardo, T., y Brunini, A. (2002). Are There Many Inactive Jupiter-Family Comets among the Near-Earth Asteroid Population? *Icarus*, 159(2), 358-368. <https://doi.org/https://doi.org/10.1006/icar.2002.6903>
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., y Beaugé, C. (2006). Regular motions in extra-solar planetary systems. En B. A. Steves, A. J. Maciejewski y M. Hendry (Eds.), *Chaotic Worlds: from Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems* (p. 255). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0402335>
- Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M., y Klafke, J. C. (1993). On Symmetrical Planetary Corotations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55(1), 25-45. <https://doi.org/10.1007/BF00694393>
- Gallardo, T. (2006). Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus*, 184(1), 29-38. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.04.001>
- Gallardo, T. (2017). Exploring the orbital evolution of planetary systems. *European Journal of Physics*, 38(3), 035002. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa5e0c>
- Gallardo, T. (2020). Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 132(2), Artículo 9, 9. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9948-7>
- Gallardo, T. (2022). *Notas de dinámica secular y resonante. Versión 15*. Consultado el 23 de abril de 2022, desde <https://http://www.fisica.edu.uy/~gallardo/notasDOSR.pdf>
- Gallardo, T. (2023). Consultado el 24 de marzo de 2023, desde <https://https://sites.google.com/view/mmresonances/>
- Gallardo, T., Hugo, G., y Pais, P. (2012). Survey of Kozai dynamics beyond Neptune. *Icarus*, 220(2), 392-403. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.05.025>
- Gomes, R. S., Fernández, J. A., Gallardo, T., y Brunini, A. (2008). The Scattered Disk: Origins, Dynamics, and End States. En M. A. Barucci, H. Boehnhardt, D. P. Cruikshank, A. Morbidelli y R. Dotson (Eds.), *The Solar System Beyond Neptune* (pp. 259-273).

- Gomes, R. S., Matese, J. J., y Lissauer, J. J. (2006). A distant planetary-mass solar companion may have produced distant detached objects. *Icarus*, 184(2), 589-601. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.05.026>
- Gomes, R. S., Soares, J. S., y Brasser, R. (2015). The observation of large semi-major axis Centaurs: Testing for the signature of a planetary-mass solar companion. *Icarus*, 258, 37-49. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.06.020>
- Hadden, S., Li, G., Payne, M. J., y Holman, M. J. (2018). Chaotic Dynamics of Trans-Neptunian Objects Perturbed by Planet Nine. *Astronomical Journal*, 155(6), Artículo 249, 249. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aab88c>
- Hamilton, D. P. (1994). A Comparison of Lorentz, Planetary Gravitational, and Satellite Gravitational Resonances. *Icarus*, 109(2), 221-240. <https://doi.org/10.1006/icar.1994.1089>
- Holman, M. J., y Murray, N. W. (1996). Chaos in High-Order Mean Resonances in the Outer Asteroid Belt. *Astronomical Journal*, 112, 1278. <https://doi.org/10.1086/118098>
- Jewitt, D., y Luu, J. (1993). Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB<sub>1</sub>. *Nature*, 362(6422), 730-732. <https://doi.org/10.1038/362730a0>
- Jewitt, D., Morbidelli, A., y Rauer, H. (2008). *Trans-Neptunian Objects and Comets*.
- JPL(NASA). (2022). Consultado el 3 de agosto de 2022, desde [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_query.html#!#result](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_query.html#!#result)
- JPL(NASA). (2023). Consultado el 29 de julio de 2023, desde [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_query.html#!#result](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_query.html#!#result)
- Lee, M. H. (2004). Diversity and Origin of 2:1 Orbital Resonances in Extrasolar Planetary Systems. *The Astrophysical Journal*, 611(1), 517-527. <https://doi.org/10.1086/422166>
- Lee, M. H., y Peale, S. J. (2002). Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876 Planets. *The Astrophysical Journal*, 567(1), 596-609. <https://doi.org/10.1086/338504>
- Lei, H. (2019). Three-dimensional phase structures of mean motion resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(2), 2097-2116. <https://doi.org/10.1093/mnras/stz1422>
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Tsiganis, K., Nesvorný, D., y Gomes, R. (2011). LATE ORBITAL INSTABILITIES IN THE OUTER PLANETS IN-

- DUCED BY INTERACTION WITH A SELF-GRAVITATING PLANETESIMAL DISK. *The Astronomical Journal*, 142(5), 152. <https://doi.org/10.1088/0004-6256/142/5/152>
- Li, G., Hadden, S., Payne, M., y Holman, M. J. (2018). The Secular Dynamics of TNOs and Planet Nine Interactions. *Astronomical Journal*, 156(6), Artículo 263, 263. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae83b>
- Malhotra, R. (1993). The origin of Pluto's peculiar orbit. *Nature*, 365(6449), 819-821. <https://doi.org/10.1038/365819a0>
- Malhotra, R. (1995). The Origin of Pluto's Orbit: Implications for the Solar System Beyond Neptune. *Astronomical Journal*, 110, 420. <https://doi.org/10.1086/117532>
- Malhotra, R., Volk, K., y Wang, X. (2016). CORRALLING A DISTANT PLANET WITH EXTREME RESONANT KUIPER BELT OBJECTS. *The Astrophysical Journal*, 824(2), L22. <https://doi.org/10.3847/2041-8205/824/2/l22>
- Melita, M. D., Williams, I. P., Collander-Brown, S. J., y Fitzsimmons, A. (2004). The edge of the Kuiper belt: the Planet X scenario. *Icarus*, 171(2), 516-524. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.05.014>
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2006). Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(4), 411-432. <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9009-x>
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2008). Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(1), 215-227. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13867.x>
- Millholland, S., y Laughlin, G. (2017). Constraints on Planet Nine's Orbit and Sky Position within a Framework of Mean-motion Resonances. *Astronomical Journal*, 153(3), Artículo 91, 91. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/153/3/91>
- Morbidelli, A., Levison, H. F., y Gomes, R. (2007). The Dynamical Structure of the Kuiper Belt and its Primordial Origin.
- Morbidelli, A., Levison, H. F., y Gomes, R. (2008). The Dynamical Structure of the Kuiper Belt and Its Primordial Origin. En M. A. Barucci, H. Boehnhardt, D. P. Cruikshank, A. Morbidelli y R. Dotson (Eds.), *The*

- Solar System Beyond Neptune* (pp. 275-292). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0703558>
- Morbidelli, A., y Moons, M. (1993). Secular Resonances in Mean Motion Commensurabilities: The 2/1 and 3/2 Cases. *Icarus*, 102(2), 316-332. <https://doi.org/10.1006/icar.1993.1052>
- Morbidelli, A., Thomas, F., y Moons, M. (1995). The Resonant Structure of the Kuiper Belt and the Dynamics of the First Five Trans-Neptunian Objects. *Icarus*, 118(2), 322-340. <https://doi.org/10.1006/icar.1995.1194>
- Morbidelli, A., y Levison, H. F. (2004). Scenarios for the Origin of the Orbits of the Trans-Neptunian Objects 2000 CR<sub>105</sub> and 2003 VB<sub>12</sub> (Sedna). *Astronomical Journal*, 128(5), 2564-2576. <https://doi.org/10.1086/424617>
- Murray, C. D., y Dermott, S. F. (2000). *Solar System Dynamics*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139174817>
- Namouni, F., y Morais, M. H. M. (2018). The disturbing function for asteroids with arbitrary inclinations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(1), 157-176. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2636>
- Namouni, F., y Morais, M. H. M. (2020). Resonance libration and width at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 493(2), 2854-2871. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa348>
- Naoz, S. (2016). The Eccentric Kozai-Lidov Effect and Its Applications. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54, 441-489. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023315>
- Napier, K., Gerdes, D., y Dark Energy Survey Collaboration. (2021). No Evidence for Orbital Clustering in the Extreme Trans-Neptunian Objects. *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, 53, Artículo 502.03, 502.03.
- Nesvorný, D., y Roig, F. (2001). Mean Motion Resonances in the Transneptunian Region. Part II: The 1 : 2, 3 : 4, and Weaker Resonances. *Icarus*, 150(1), 104-123. <https://doi.org/10.1006/icar.2000.6568>
- Nesvorný, D. (2015). EVIDENCE FOR SLOW MIGRATION OF NEPTUNE FROM THE INCLINATION DISTRIBUTION OF KUIPER BELT OBJECTS. *The Astronomical Journal*, 150(3), 73. <https://doi.org/10.1088/0004-6256/150/3/73>

- Pons, J., y Gallardo, T. (2022). Secular evolution of resonant small bodies: semi-analytical approach for arbitrary eccentricities in the coplanar case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(1), 1153-1166. <https://doi.org/10.1093/mnras/stac018>
- Rein, H., y Liu, S. -. (2012). REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy Astrophysics*, 537, Artículo A128, A128. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085>
- Roy, A. E. (2005). *Orbital motion*.
- Saillenfest, M., Fouchard, M., Tommei, G., y Valsecchi, G. B. (2017). Study and application of the resonant secular dynamics beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 127(4), 477-504. <https://doi.org/10.1007/s10569-016-9735-7>
- Sheppard, S., y Trujillo, C. (2014). Inner Oort Cloud survey and the discovery of 2012 VP\_{113}. En K. Muinonen, A. Penttilä, M. Granvik, A. Virkki, G. Fedorets, O. Wilkman y T. Kohout (Eds.), *Asteroids, Comets, Meteors 2014* (p. 487).
- Sheppard, S. S., y Trujillo, C. (2016). New Extreme Trans-Neptunian Objects: Toward a Super-Earth in the Outer Solar System. *Astronomical Journal*, 152(6), Artículo 221, 221. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/152/6/221>
- Tremaine, S. (2023). *Dynamics of Planetary Systems*.
- Trujillo, C. A., y Sheppard, S. S. (2014). A Sedna-like body with a perihelion of 80 astronomical units. *Nature*, 507(7493), 471-474. <https://doi.org/10.1038/nature13156>
- Wisdom, J. (1980). The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *Astronomical Journal*, 85, 1122-1133. <https://doi.org/10.1086/112778>
- Zhou, L.-Y., Lehto, H. J., Sun, Y.-S., y Zheng, J.-Q. (2004). Apsidal corotation in mean motion resonance: the 55 Cancri system as an example. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(4), 1495-1502. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07755.x>