



Universidad de la República Facultad de Ciencias

Flujos cerrados en cilindros y rompimiento de vórtices

Sylvana Varela

Tesis presentada para completar los requerimientos del grado de Magíster en Física

Orientadores: Dr. Arturo Martí, Dra. Cecilia Cabeza

Defendida el 25 de julio de 2008 ante el tribunal integrado por:

Dr. Arturo Martí
Dra. Cecilia Cabeza
Dr. Carlos Negreira
Dr. Gustavo Sarasúa
Ing. Msc. Gabriel Usera

A mi madre.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Arturo Martí por acercarme al estudio de los vórtices hace ya mucho tiempo, por haber creído en mí y por haberme apoyado todos estos años. Cecilia Cabeza es una de las mayores responsables de que yo me desempeñe en la Física Experimental y de mi gusto por la docencia, ella me enseñó a trabajar en un laboratorio de investigación y a ayudar a los demás a aprender. A ambos debo agradecerle todos los comentarios, sugerencias y críticas que me han realizado en estos años. Les agradezco que hicieran del Laboratorio de Inestabilidades en Fluidos un ámbito de trabajo agradable en donde todos nos hemos podido desarrollar libremente y sobretodo por su enorme generosidad en todos los aspectos.

A Gabriel Usera por haberme dado la posibilidad de acercarme a la simulación numérica, por su infinita paciencia y contención.

A Anton Vernet por su comprensión y sus comentarios enriquecedores.

A mis compañeros del Instituto de Física de Facultad de Ingeniería y de Facultad de Ciencias, con los que compartí cursos como compañera y como alumna. A Sandra Kahan por permitirme participar en proyectos de enseñanza enriquecedores y divertidos.

A mis amigos, los de toda la vida y los nuevos, a Jimena Guirado, Nicolás Casaballe, Jovana Vilches, Carlos Bergero, Itala Arias y Julia Perez, a todos muchas gracias de corazón, saben que los amo.

A mi madre, a mi abuela y a Alberto Dalva porque es increíble hasta donde se puede llegar cuando existen personas que creen en uno de forma incondicional. A todos los que no confían y dudan siempre de mí por hacer que me cuestione más profundamente mis objetivos.

Abstract

Confined flows show a great interest both in basic research and in diverse technological applications. From the industrial point of view, for example, the formation processes of structure within the fluid can promote or hinder the process of mixture in it. This thesis has focused on the phenomenon known as vortex breakdown into a cylindrical container, whose top lid rotates at controlled speed, allowing thus to changes the Reynolds number along an important ranges of values.

The system was studied in various configurations and for different aspect ratios H/R . Firstly the classic problem (cylinder closed without rod) was tackled to calibrate both experimental and numerical techniques and to compare our results with previous works. Then coaxial rods, with sections of different form and size, were included inside the cylinder. What is achieved this way is the possibility to accelerate or delay the vortex breakdown in a controlled form. The study of the configurations with fixed rods has not been explored systematically or in detail in advance, being this an original contribution. All the configurations have been studied experimentally and numerically.

To achieve the experimental study the DPIV (Digital Particle Image Velocimetry) technique allowing to obtain quantitative results on the velocity field within the fluid has been implemented in our laboratory. The experimental results for the classical configuration presented an excellent adjustment with results widely accepted in the literature. The numerical study has been realized with the use of the application of three-dimensional model developed in the country. Our contribution consisted of applying it in cylindrical symmetry. The results obtained present great agreement with the experimental results obtained in our laboratory.

Resumen

Los flujos confinados presentan un gran interés tanto en la investigación básica como a nivel de diversas aplicaciones tecnológicas. Desde el punto de vista industrial, por ejemplo, la formación de estructuras en el seno del fluido pueden favorecer o entorpecer los procesos de mezcla en el mismo.

En esta tesis se ha estudiado el fenómeno conocido como rompimiento de vórtice en un recipiente cilíndrico, cuya tapa superior gira a velocidad controlada, permitiendo de esta forma variar el número de Reynolds a lo largo de un importante rango de valores.

Se estudió el sistema en varias configuraciones y para diferentes relaciones de aspecto (H/R). Primeramente se abordó el problema clásico con el objetivo de calibrar las técnicas tanto experimentales como numéricas y comparar nuestros resultados con trabajos previos. Luego se incluyeron vástagos coaxiales fijos, con secciones de diferente forma y tamaño, en el interior del cilindro. De esta manera se logra favorecer o retrasar el rompimiento de vórtice de forma controlada. El estudio de las configuraciones con vástagos fijos no ha sido explorado sistemática y detalladamente con anterioridad, siendo éste un aporte original. Todas las configuraciones se estudiaron experimental y numéricamente.

Para realizar el estudio experimental se ha implementado en nuestro laboratorio la técnica DPIV (Digital Particle Image Velocimetry), que permite obtener resultados cuantitativos sobre el campo de velocidades en el seno del fluido. Los resultados experimentales para la configuración original presentaron un excelente ajuste con resultados ampliamente aceptados en la literatura.

El estudio numérico se realizó mediante la aplicación de un modelo tridimensional desarrollado en el país. Nuestro aporte consistió en su aplicación a una simetría cilíndrica. Los resultados obtenidos presentan gran concordancia con los resultados experimentales obtenidos en nuestro laboratorio.

Palabras clave: *Rompimiento de vórtice, Particle Image Velocimetry, Control*

Índice General

1	Introducción	1
2	Descripción del problema	5
2.1	Resultados experimentales previos	5
2.2	Resultados numéricos previos	6
2.3	Control del vórtice, resultados previos	8
3	Fundamentos de la velocimetría de partículas digital (DPIV)	13
3.1	Localización de las partículas	14
3.1.1	Campo de desplazamiento	14
3.1.2	Ensemble de trazadores	15
3.1.3	Campo de intensidad	18
3.2	Interrogación	20
3.2.1	Correlación espacial	20
3.2.2	Sesgo en la velocidad	22
3.2.3	Optimización de la interrogación	22
3.3	Adquisición y tratamiento de las imágenes	23
3.3.1	Ancho de banda	24
3.3.2	Muestreo de la imagen	25
3.3.3	Cuantización	25
3.3.4	Correlación espacial cruzada discreta	26
3.3.5	Estimación de fracciones del desplazamiento	27
4	Dispositivo Experimental	31
4.1	Montaje mecánico	31
4.2	Fluido de trabajo	34
4.3	Sistema de Iluminación	35
4.4	Trazadores	39
5	Método numérico	41
5.1	Modelo Numérico	41
5.1.1	Mallas	42
5.1.2	Ecuaciones del modelo	42
5.1.3	Geometría	43

5.2	Interpolación y aproximación de gradientes	44
5.2.1	Discretización de la ecuación de balance mecánico	45
5.2.2	Corrección de la presión	48
5.2.3	Condiciones de Borde	49
5.2.4	Bloques e interfaces	50
5.3	Aplicación del modelo numérico	52
5.4	La malla	52
5.5	Condiciones iniciales y estado estacionario	55
6	Configuración Clásica: Resultados	59
6.1	Visualización en el plano vertical	62
6.1.1	Relación de Aspecto $H/R = 1,5$	64
6.1.2	Relación de Aspecto $H/R = 2,0$	65
6.1.3	Relación de Aspecto $H/R = 2,5$	69
6.2	Visualización en el plano horizontal	73
6.3	Resumen de los resultados obtenidos para visualización vertical	74
7	Resultados con Vástagos	77
7.1	Visualización en el plano vertical	77
7.1.1	Vástago cilíndrico, radio $d = 1mm$	78
7.1.2	Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$	82
7.1.3	Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$	82
7.2	Visualización en el plano horizontal	89
7.2.1	Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$	89
7.2.2	Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$	90
7.2.3	Vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8mm$	91
7.3	Resumen de los resultados obtenidos para visualización vertical	93
8	Discusión y Conclusiones	99
8.1	Comparación en la configuración clásica	99
8.2	Comparación en el caso con vástagos	100
8.3	Comentarios finales	102
	Bibliografía	105

Índice de Figuras

1.1	Ejemplos de diferentes comportamientos de los flujos a) Flujo laminar, b) Flujo turbulento	2
1.2	Transición e inestabilidades en diferentes sistemas, a) Flujo de Taylor-Coutte, b) Experimento de Rayleigh-Bénard, c) Rompimiento de vórtice	2
2.1	Diagrama de estabilidad del sistema en función de los parámetros ($Re, H/R$) obtenido experimentalmente (original, gentileza de M.P. Escudier).	7
3.1	Trayectoria de una partícula trazadora real en el seno de un fluido. Puede observarse que a medida que transcurre el tiempo, la trayectoria del trazador se separa de la línea de fluido.	15
3.2	Representación esquemática de la formación de imágenes	18
3.3	El pico de la correlación del desplazamiento es sesgado hacia el desplazamiento nulo como consecuencia del ancho finito del pico y el tamaño limitado de la región de interrogación.	23
3.4	La pixelización de una imagen continua consiste en el muestreo espacial y la cuantización de los valores de intensidad	23
3.5	Teorema del muestreo	24
3.6	Función de sensibilidad espacial de los píxeles $p(x, y)$ y su correspondiente auto-correlación $\phi_{pp}(r, s)$	25
3.7	El error en la cuantización puede ser considerado como ruido sumado	26
3.8	Histogramas del desplazamiento axial medios de un flujo turbulento en un tubo, usando ajustes Gaussiano y del baricentro para la interpolación de sub-píxeles	28
4.1	Izq. Foto del montaje experimental. Der. Esquema del montaje experimental utilizado	31
4.2	Montaje experimental correspondiente al plano horizontal	32
4.3	Curva de calibración del motor	33
4.4	Variación del número de Reynolds con el voltaje de alimentación de la fuente	34
4.5	Esquema del montaje experimental con vástagos	35
4.6	Curva de la viscosidad en función de la temperatura. Los puntos corresponden a datos experimentales, mientras que la línea sólida corresponde a un ajuste spline.	36
4.7	Curva de calibración del termistor	37
4.8	Respuesta espectral de la cámara	38
4.9	Esquema de la refracción entre las superficies de los recipientes.	39
4.10	Esquema del sistema de iluminación vertical	39
4.11	Partículas trazadoras, su forma no es perfectamente esférica	40

5.1	Esquema de un elemento de volumen con sus seis vecinos, utilizamos la nomenclatura inglesa	43
5.2	a) Elemento Triangular (ABC) con la normal saliente situada en el baricentro. b) Cuadrilátero (ABDC) con la normal saliente situada en el baricentro	44
5.3	Detalle de la aproximación espacial usada para la interpolación y la derivación	45
5.4	Esquema del proceso iterativo para un paso temporal (adaptado de [29])	50
5.5	a) Elemento de frontera. b) Detalle de la malla en la frontera	50
5.6	a) Esquema de interfaz 'una-a-una'. b) Sustitución del vecino E por un vecino R	51
5.7	Representación gráfica del sistema de ecuaciones linealizado a) Un bloque con malla estructurada, matriz heptagonal. b) Dos bloques estructurados, matriz heptagonal por bloques	51
5.8	Diagrama de la malla, rectángulo 'doblado'	52
5.9	a) Dominio de trabajo (malla gruesa), b) Corte transversal	53
5.10	Velocidad vertical en función de la altura $Re = 600$ (azul) y $Re = 1600$ (rojo) malla gruesa (cruces), malla media (puntos), malla fina (asteriscos)	54
5.11	Corte transversal de la malla no estructurada de dos bloques	55
5.12	Máximo de la velocidad vertical en función del tiempo, malla estructurada con refinamiento medio, $Re = 1600$	56
5.13	Máximo de la velocidad vertical en función del tiempo, malla no estructurada refinamiento grueso, $Re = 1600$	57
6.1	Imágenes del flujo para $H/R=1,5$, a) Régimen laminar, b) Una burbuja de recirculación, c) Dos burbujas de recirculación	60
6.2	Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Flujo laminar. $H/R=1,5$	61
6.3	Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Aparición de la primera burbuja. $H/R=1,5$	61
6.4	Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Primera burbuja en régimen oscilatorio. $H/R=1,5$	62
6.5	Imágenes del flujo para $H/R = 1,5$ con $Re_c = 1098$	63
6.6	Imágenes del flujo para $H/R = 2,0$ con $Re_c = 1474$	63
6.7	Imágenes del flujo para $H/R = 2,5$ con $Re_c = 1973$	64
6.8	La imagen de la izquierda corresponde al campo de velocidad para el régimen laminar. La de la derecha corresponde al campo de velocidades para la primera burbuja.	65
6.9	Velocidad vertical en función de la altura, $H/R=1,5$	66
6.10	Formación de la primera burbuja) Velocidad vertical en función de la altura, b) Líneas de corriente, $H/R=1,5$	66
6.11	La imagen de la izquierda corresponde al campo de velocidad para el régimen laminar. La central corresponde al campo de velocidades para la primera burbuja. La figura de la derecha corresponde a la formación de la segunda burbuja. $H/R=2,0$	67
6.12	Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para el régimen de flujo laminar. $H/R = 2,0$	67

6.13	Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para la aparición de la primera burbuja.	68
6.14	Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para la aparición de la segunda burbuja.	69
6.15	Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en función de la altura.	70
6.16	Flujo laminar sin burbuja, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía	70
6.17	Nacimiento de la primera burbuja, $Re = 1474$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en función de la altura.	71
6.18	Nacimiento de la primera burbuja, $Re = 1474$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía	71
6.19	Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al regimen laminar, $H/R = 2,5$, $Re_c = 1000$	72
6.20	Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al nacimiento de la primera burbuja, $H/R = 2,5$, $Re_c = 1935$	72
6.21	Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al nacimiento de la segunda burbuja, $H/R = 2,5$, $Re_c = 2000$	72
6.22	Imagen del plano horizontal para la configuración clásica, flujo laminar e inicio de la burbuja.	73
6.23	Ampliación de los contornos de velocidad vertical en la región del eje , $Re = 1474$, malla no estructurada	74
6.24	Velocidad angular en función del radio, plano horizontal	75
6.25	Re críticos. Numérico: Dos bloques: azul, Un bloque: magenta, Experimentales: Escudier: rojo, PIV: verde	76
7.1	Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0mm$. Imágenes del flujo para $H/R=1,5$, $H/R=2,0$, $H/R=2,5$ para los valores de Re crítico correspondientes	78
7.2	Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0mm$, $H/R=1,5$, $Re = 971$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	79
7.3	Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0mm$, $H/R=2,0$, $Re = 1313$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	79
7.4	Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0mm$ $H/R=2,5$, $Re = 1785$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	80
7.5	Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en el eje.	80
7.6	Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.	81
7.7	Flujo laminar, $Re = 1340$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.	82
7.8	Flujo laminar, $Re = 1340$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.	83
7.9	Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$ $H/R=1,5$, $Re = 1036$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	83

7.10	Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$ $H/R=2,0$, $Re = 1431$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	84
7.11	Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$ $H/R=2,5$, $Re = 1887$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	84
7.12	Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$ $H/R=1.5$, $Re = 1246$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	85
7.13	Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$ $H/R=2.0$, $Re = 1671$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	85
7.14	Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$ $H/R=2.5$, $Re = 2187$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura	86
7.15	Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.	86
7.16	Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.	87
7.17	Flujo laminar, $Re = 1700$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.	87
7.18	Flujo laminar, $Re = 1700$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.	88
7.19	Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cilíndrica de radio $d = 5,0mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.	89
7.20	Velocidad angular en función del radio, Rojo: Flujo laminar, Verde: Inicio de la burbuja ($Re = 1700$)	90
7.21	Vástago cilíndrico de radio $d = 5,0mm$, $z = 0,03$, contornos de velocidad vertical, $Re = 1700$	91
7.22	Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.	92
7.23	Velocidad angular en función del radio para el vástago cuadrado de lado $L = 4,4mm$, Negro: Flujo laminar, Rojo: Inicio de la burbuja ($Re = 1450$)	92
7.24	Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1450$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, azul: mitad de la cara, magenta: vértice	93
7.25	Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1600$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, negro: mitad de la cara, magenta: vértice	94
7.26	Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.	95
7.27	Velocidad angular en función del radio, Azul: Flujo laminar, Magenta: Inicio de la burbuja ($Re = 1700$)	96
7.28	Vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1700$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, azul: mitad de la cara, magenta: vértice	96
7.29	Re críticos. Numéricos: azul, Experimentales: Líquido: rojo, PIV: verde. Vástagos: $d = 1mm$ círculos, $d = 2,5mm$ cuadrados, $d = 5mm$ diamantes	97

7.30 Valores experimentales (símbolos blancos) y numéricos (símbolos negros) de los valores críticos del número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primera burbuja como función del radio de los vástagos, para diferentes valores de la relación de aspecto $H/R = 1,5$ (diamantes), $H/R = 2,0$ (círculos) and $H/R = 2,5$ (cuadrados) 98

Índice de Tablas

4.1	Cantidad de cuadros por segundo dependiendo del tamaño de la región de interés que posee la cámara	38
4.2	Cantidad de cuadros por segundo dependiendo del tamaño de la región de interés utilizados en este trabajo	38
4.3	Materiales de sembrado para líquidos	40
5.1	Coefficientes de expansión y contracción para las dirección vertical	54
5.2	Coefficientes de expansión y contracción para las dirección radial	55
6.1	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja, resultados experimentales y numéricos	75
7.1	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja para vástagos cilíndricos. Experimental con trazador líquido	93
7.2	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja. Experimental con PIV	94
7.3	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja. Numérico	94
8.1	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primera burbuja. Las dos primeras columnas corresponden a los resultados numéricos para las malla utilizadas. La tercer columna corresponde a los resultados experimentales obtenidos. La cuarta columna corresponde a los resultados de referncia de la literatura	100
8.2	Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja para cada uno de los vástagos. Numérico	101
8.3	Número de Reynolds críticos correspondientes a la aparición de la primera burbuja para diferentes relaciones de aspecto y diferentes vástagos.	102

Capítulo 1

Introducción

La creación o adaptación de una tecnología necesita un estudio físico fundamental del medio en el que se aplica. En particular, los fluidos (como el aire y agua, entre otros) son el medio físico de un gran número de aplicaciones tecnológicas. La dinámica de los fluidos (o sea el análisis de su movimiento) es un problema notablemente complejo debido esencialmente a la no linealidad de las ecuaciones que la modelan. Los sistemas presentan una enorme diversidad de comportamientos, dependiendo de las condiciones a las cuáles estén siendo sometidos y de las características propias de cada fluido como son su viscosidad, densidad y tensión superficial, características que genéricamente se denominan parámetros. Así, pueden observarse flujos de variación temporal y espacial suave, denominados flujos laminares y flujos totalmente irregulares, caóticos, denominados flujos turbulentos (1.1b), la presencia de singularidades fomenta la turbulencia. Cuando los parámetros que controlan el comportamiento del sistema son variados, pueden ocurrir transiciones en la estructura del flujo tanto para el caso laminar como turbulento. Entre estas transiciones o inestabilidades encontramos diferentes fenómenos como, flujos de Taylor-Couette, estructuras termoconvectivas o rompimiento de vórtices ejemplificados en la figura 1.2.

El rompimiento de vórtice (*vortex breakdown*) se puede definir como 'una perturbación caracterizada por la formación de un punto de estancamiento en el eje de un vórtice, a partir del cuál el movimiento del fluido revierte su sentido en una región axial limitada' [18]. Cuando se produce el rompimiento de vórtice (RV) se producen regiones de recirculación o burbujas, dependiendo de los parámetros del sistema. En concreto se puede producir una, dos (como se ve en la figura 1.2c)) o incluso tres burbujas. Este fenómeno se encuentra tanto en flujos abiertos como cerrados, y su aparición puede ser tanto beneficiosa como perjudicial dependiendo del sistema. Por ejemplo, en aeronáutica su aparición resulta desventajosa ya que afecta la sustentación de las aeronaves, mientras que en el caso de reactores o secadores, el rompimiento de vórtice ayuda a mejorar la homogeneidad de la mezcla y la estabilidad de la combustión. Por

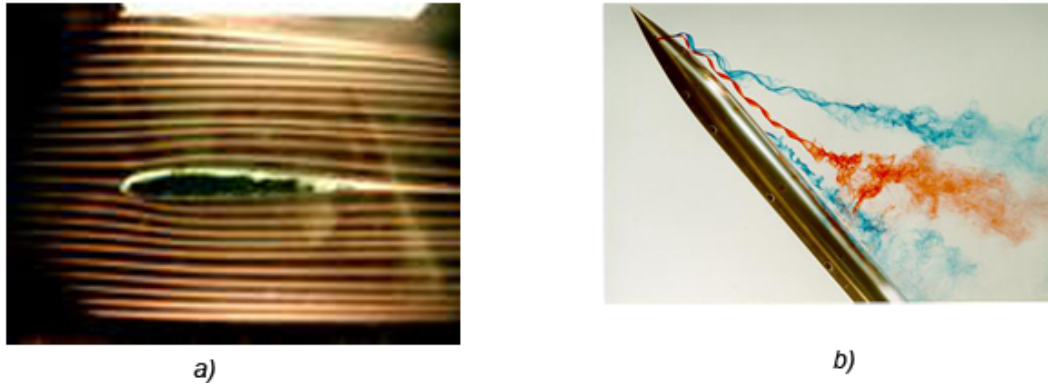


Figura 1.1: Ejemplos de diferentes comportamientos de los flujos a) Flujo laminar, b) Flujo turbulento

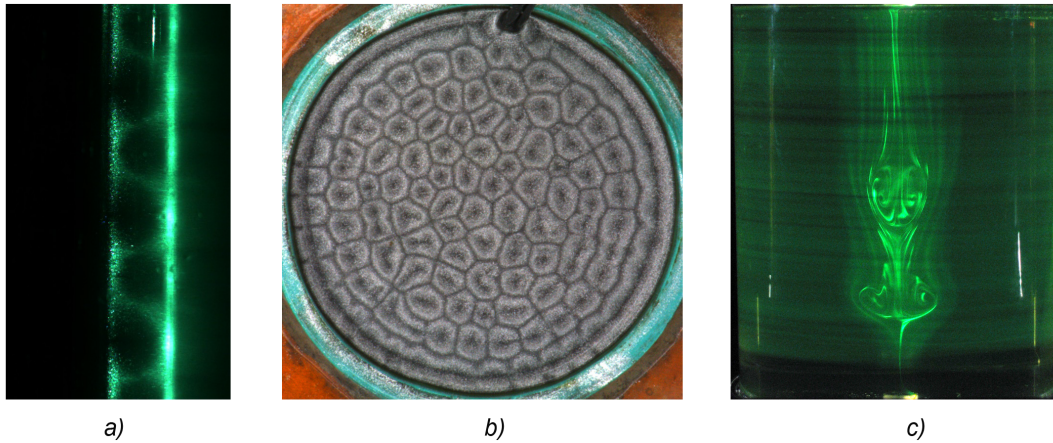


Figura 1.2: Transición e inestabilidades en diferentes sistemas, a) Flujo de Taylor-Couette, b) Experimento de Rayleigh-Bénard, c) Rompimiento de vórtice

esto es importante entender el fenómeno y desarrollar mecanismos que permitan su control.

En el presente trabajo se estudia el rompimiento de vórtice y el comportamiento del flujo en estado estacionario producido en un recipiente cilíndrico cerrado cuya tapa superior gira. Dicho comportamiento es determinado por la razón entre la altura H y el radio del cilindro R (aspect ratio) y el número de Reynolds $Re = \frac{\Omega R^2}{\nu}$, siendo Ω la velocidad de giro de la tapa y ν la viscosidad cinemática. Para esto hemos realizado un estudio experimental, mediante la implementación de la técnica de visualización de fluidos PIV (Particle Image Velocimetry) y un estudio numérico tridimensional del comportamiento de este sistema.

La técnica experimental que se ha utilizado fue implementada por primera vez en el Laboratorio de Inestabilidades en Fluidos y por lo tanto fue necesario realizar una validación de la misma, para determinar el grado de confiabilidad

que presenta. Para ello se trabajó en primer lugar con una configuración experimental para la cual hay un gran número de resultados experimentales que son considerados de referencia en la comunidad académica mundial.

Por otro lado estos resultados fueron también utilizados para validar los resultados numéricos. Se adaptó el programa preexistente a la geometría del sistema estudiado.

En ambos casos se determinaron los valores de Re para los cuales el sistema presenta el primer rompimiento de vórtice. Se consideraron tres valores de H/R diferentes y se visualizó el sistema con cortes verticales y horizontales para poder obtener las tres componentes del vector de velocidad.

Una vez que se estableció la confiabilidad de ambas técnicas, se diseñó una experiencia que permitiera controlar el rompimiento del vórtice generado en el interior del cilindro. Para ello se trabajó con un dispositivo muy sencillo de implementar: se colocaron vástagos de diferente tamaño y forma en el eje del cilindro. Esto es una aplicación novedosa y los resultados obtenidos fueron enviados a publicar recientemente [30].

Capítulo 2

Descripción del problema

El flujo estacionario producido en un recipiente cilíndrico con una de sus tapas rotantes depende de la relación de aspecto H/R , de la velocidad de giro de la tapa y de las propiedades físicas del fluido. La tapa superior rotante actúa como una bomba succionando el fluido de la parte central del recipiente, el fluido próximo a la tapa se arremolina y se mueve hacia la pared cilíndrica. Cuando llega a ésta baja hacia la parte inferior del recipiente, para luego volver a subir por la región central. El movimiento en espiral genera un aumento en la velocidad de giro del fluido, pero como el momento angular se conserva se genera un vórtice concentrado en el eje. Cuando el vórtice supera cierto arremolinamiento (*swirling*) crítico se produce el rompimiento de vórtice. Para determinados valores de los parámetros (H/R y Re) el vórtice presenta un rompimiento, el que se caracteriza por la aparición de un punto de estancamiento seguido por regiones de recirculación (burbujas). La ubicación y estabilidad de los rompimientos han sido estudiados experimental y numéricamente con anterioridad. En este capítulo nos dedicaremos a presentar de forma general dichos estudios.

2.1 Resultados experimentales previos

A mediados de la década de los 80 Escudier [6] estudió experimentalmente el flujo dentro de un contenedor cilíndrico con la tapa inferior rotante, el radio se mantuvo constante y la altura podía ser variada. El fluido de trabajo fue una solución de glicerina y agua y utilizó fluoresceína como trazador. Trabajó con un motor ajustable que le permitió velocidades entre 1 rpm y 260 rpm. Variando las velocidades y la altura, caracterizó de forma muy detallada el comportamiento del flujo en este sistema.

Sus resultados experimentales se muestran en la figura 2.1, allí pueden observarse regiones en donde el flujo es laminar, regiones en donde el sistema posee una burbuja (región señalada por '1 breakdown'), dos burbujas (región señalada por '2 breakdown'), tres burbujas (región señalada por '3 breakdown')

y regiones donde el flujo es no estacionario.

A partir de su publicación estos resultados han servido de referencia par validar diferentes técnicas experimentales y modelos numéricos aplicado a contenedores cilíndricos.

2.2 Resultados numéricos previos

Los experimentos numéricos nos permiten estudiar un mismo sistema bajo diferentes situaciones y desde diferentes puntos de vista que experimentalmente serían muy costos o muy difíciles de implementar. El estudio numérico de los flujos en contenedores cilíndricos se ha realizado con diferentes condiciones de borde, por ejemplo, sistemas en donde la tapa superior, o la inferior o incluso la lateral giran. Los estudios numéricos consisten en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes en diversas formulaciones.

Un ejemplo de ello es el trabajo realizado por López [19] en donde considera un cilindro de radio R y altura H con la tapa inferior rotante a una velocidad angular constante. El fluido elegido es incompresible, de densidad uniforme y viscosidad cinemática ν .

En este artículo se integran numéricamente las ecuaciones axisimétricas de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas en la formulación de función de corriente-vorticidad, donde la presión no aparece explícitamente. Esta formulación se obtienen mediante la introducción de la función de corriente ψ , donde

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.2.1)$$

la cual satisface la ecuación de continuidad y podemos escribir la componente acimutal de la vorticidad como:

$$\eta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.2.2)$$

Introduciendo las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.2 en las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene las ecuaciones de evolución para las componentes acimutales de la velocidad y de la vorticidad (η) además de la ecuación para la función de corriente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r} J(v) + \frac{v}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right] \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = J\left(\frac{\eta}{r}\right) + 2\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r^2} \right] \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\eta \quad (2.2.5)$$

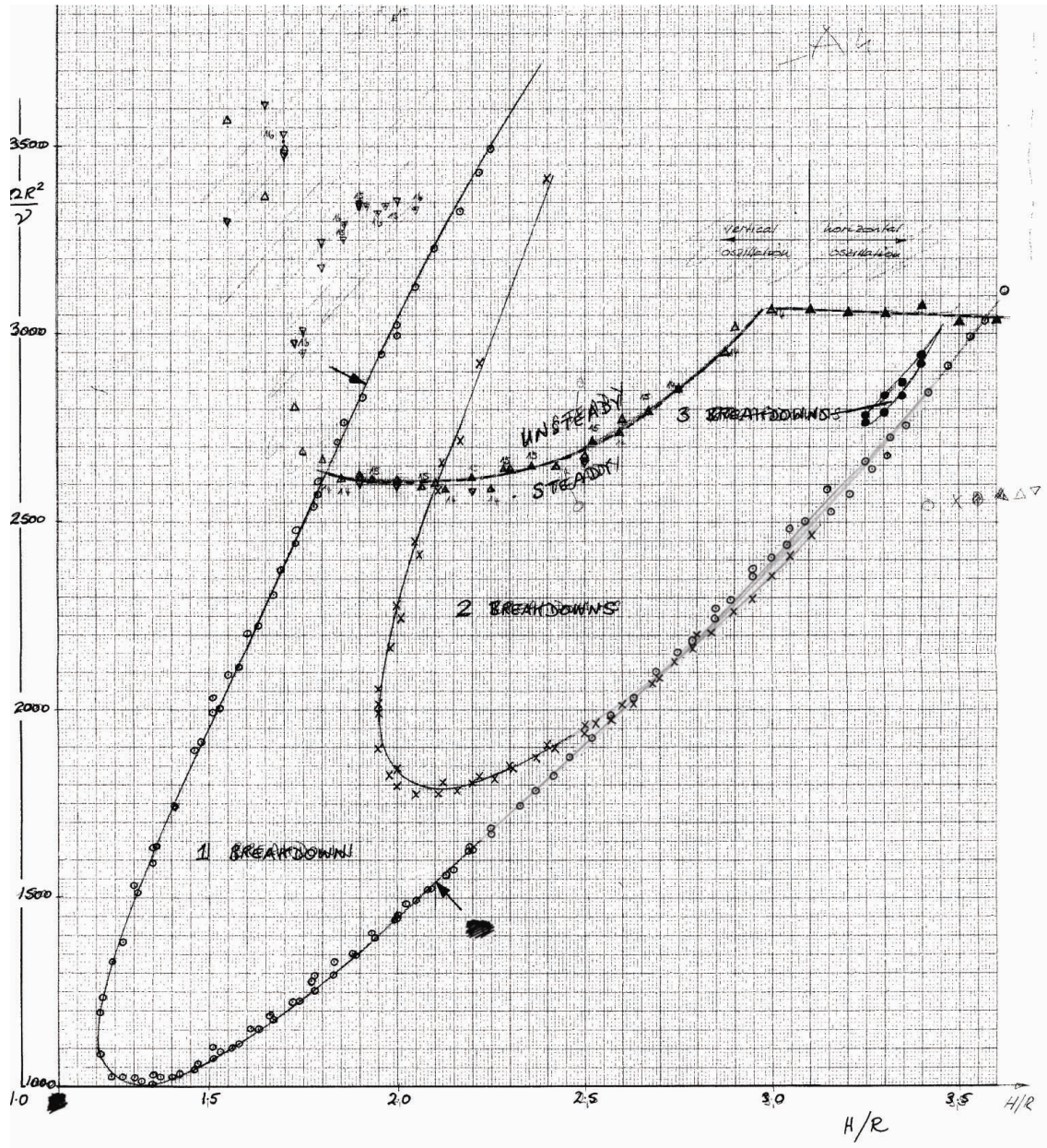


Figura 2.1: Diagrama de estabilidad del sistema en función de los parámetros $(Re, H/R)$ obtenido experimentalmente (original, gentileza de M.P. Escudier).

siendo

$$Re = \frac{\Omega R^2}{\nu}$$

y

$$J = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2.6)$$

Las condiciones de borde utilizadas son consistentes con el dispositivo experimental de Escudier [6]. Las ecuaciones se resuelven mediante diferencias finitas con una malla y un paso temporal uniformes que en todos los casos fueron $\Delta r = \Delta z = 1/60$ y $\Delta t = 0,05$. Para el caso $H/R = 2,5$ se utilizó $\Delta r = \Delta z = 1/100$ y $\Delta t = 0,025$.

Los resultados obtenidos por López presentan un buen ajuste con los resultados experimentales de Escudier [6] para diferentes H/R .

López ha estudiado diferentes fenómenos ocurridos (por ejemplo, oscilaciones del RV) en este sistema resolviendo las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes por medio de esquemas espectrales [20], [21]. Estos métodos son apropiados cuando el sistema tiene simetría. Cuando se tiene un sistema que por su geometría no puede ser simetrizado, las técnicas utilizadas por López no pueden ser aplicadas. De allí la importancia de implementar un método de mallas estructuradas y no estructuradas por bloques.

2.3 Control del vórtice, resultados previos

Estudios experimentales y numéricos para controlar el rompimiento de vórtice se han desarrollado con anterioridad. Diferentes estrategias como la inclusión de vástagos cilíndricos rotantes o cónicos en el eje del recipiente cilíndrico o la aplicación de gradientes de temperaturas fueron implementadas por diferentes autores [22], [10], [23] y [11].

En el caso de la colocación de un vástago en el eje del cilindro, los resultados dependerán del H/R elegido, de si el vástago puede girar o no, y de la relación entre los números de Reynolds asociados al giro de la tapa y al giro del vástago. Husain *et al.* [11] estudian experimentalmente el control del rompimiento de vórtice para un contenedor cilíndrico de radio $R_d = 7,62\text{cm}$ y un vástago cilíndrico de radio $R_r = 0,317\text{cm}$ (donde d corresponde a la tapa y r al vástago). La tapa inferior y el vástago central giran de forma independiente, dicho giro puede ser en la misma dirección o en direcciones opuestas. El fluido de trabajo fue una solución de glicerina y agua y el trazador elegido fue fluoresceína, tal como en los experimentos de Escudier [6]. Trabajaron con un $H/R = 3,25$, un $Re_d = 2720$, para el caso en que la tapa y el vástago giraban en la misma dirección el Re_r ($\equiv |\Omega_r R_r^2 / \nu|$) se encontró entre 0 y 29 mientras que cuando giraban en direcciones opuestas se encontró entre 0 y 16.5, Ω_r es la velocidad angular del vástago. Concluyeron que el flujo es sensible a la dirección de rotación del vástago, ya que la configuración co-rotante mantiene el flujo estacionario,

suprime las burbujas del RV y provoca cerca del eje, un patrón divergente cónico donde el flujo no puede invertir su dirección. La contra-rotación hace que el flujo se vuelva inestable, estimula la aparición de anillos de vórtices y la fusión entre ellos. A partir de estos resultados se puede ver que la introducción de un vástago en el contenedor cilíndrico permite controlar el rompimiento de vórtice, sin embargo la implementación de un vástago rotante conlleva dificultades notorias en las aplicaciones de interés. En nuestro caso nos centramos en el efecto del vástago en el caso en que este es un elemento pasivo.

El estudio numérico de este sistema fue realizado por Herrada *et al.* [10], mediante métodos espectrales aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para flujos axisimétricos y compresibles de la forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\Delta \quad (2.3.1)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{v^2}{r} - \frac{1}{Ma^2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) \quad (2.3.2)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{vu}{r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2.3.3)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{Ma^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) \quad (2.3.4)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -3\rho p \Delta + \frac{\gamma - 1}{\gamma Pr Re} (\nabla^2 T) + \frac{\gamma - 1}{\gamma Re} Ma^2 \Phi \quad (2.3.5)$$

$$p = \rho T \quad (2.3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla^2 &= r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \Delta &\equiv \left[r^{-1} \frac{\partial u r}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] / 3 \end{aligned}$$

y

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + (u/r)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - v/r \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - 6\Delta^2 \right]$$

Siendo p la presión, ρ la densidad del fluido, T la temperatura, ρ_0 y T_0 son los valores iniciales de la densidad y la temperatura, Ω la velocidad angular a la cual rota la tapa inferior. Los parámetros adimensionados son: el número de Reynolds $Re = \rho_0 \Omega R^2 / \mu$, el número de Mach, $Ma = \Omega R (\rho_0 R_g T_0)^{-1/2}$ (donde R_g se define como $R_g = c_p - c_v$ es la constante de los gases), el número de Prandtl, $Pr = \rho_0 c_p / \lambda$ y la razón de calores específicos $\gamma = c_p / c_v$.

Los efectos de compresibilidad son de dos tipos: cinemáticos (caracterizado por el número de Mach, Ma) y de flotación (debido a las variaciones de densidad provocados por la variación de temperatura), el efecto asociado al número de Ma es despreciable en flujos confinados cuando $Ma < 0,5$, contrastando con el fuerte efecto de la flotabilidad que no permite la utilización de la aproximación de Boussinesq .

Como puede verse las ecuaciones 2.3.1-2.3.6 incluyen la temperatura permitiendo estudiar el efecto sobre el RV de gradientes de temperatura. Se considera que el fluido está en reposo y que su temperatura y densidad son uniformes en el instante inicial. Para las condiciones de borde se impone que la tapa inferior del cilindro rote al igual que el vástago y un gradiente axial de temperatura en la pared del recipiente.

Los resultados que no consideran gradientes de temperatura obtenidos por Herrada *et al.* [10] verifican los resultados experimentales obtenidos por Husain *et al.*[11] aunque consideran que se pueden haber cometido errores en la identificación de algunas estructuras al usar un método que involucra un trazador líquido.

Los resultados obtenidos al incluir gradientes de temperatura en el sistema muestran que:

1. La inclusión de un gradiente de temperaturas negativo refuerza los efectos producido por la contra-rotación del vástago, es decir, aumenta el RV y vuelve el flujo inestable.
2. Un gradiente de temperaturas positivo moderado refuerza los efectos de la co-rotación, suprimiendo el RV.
3. Un gradiente positivo grande de temperaturas estimula la aparición de múltiples anillos de vórtice cerca del vástago contra-rotante y hace el flujo inestable. Cuando el vástago es co-rotante no aparecen estos anillos para ningún gradiente positivo de temperaturas.

El control del RV por medio de vástagos cilíndricos y cónicos ha sido estudiado por Mullin *et al.* [22] experimental y numéricamente. Trabajan con dos dispositivos experimentales, uno consiste en un recipiente cilíndrico de radio $R_2 = 63,5 \pm 0,02mm$ y un vástago cilíndrico de radio $R_{vastago} = 6,35 \pm 0,02mm$, mientras que el otro consiste en un recipiente cilíndrico de $140mm$ de radio y un vástago cilíndrico cuyo diámetro varía desde $21mm$ en la tapa fija hasta $7mm$ en la tapa rotante. La altura de los recipientes fue de $96mm$, por lo que la relación de aspecto será $H/R \approx 1,5$ para el vástago cilíndrico. Para el vástago cónico la relación de aspecto se calculó usando otra longitud característica en lugar del radio R . Esa longitud es la distancia entre la pared del recipiente cilíndrico y el vástago medida a la mitad de la altura del contenedor. Utilizan una solución de glicerina y agua como fluido de trabajo y la visualización la

realizan mediante la lenta introducción al sistema de tinta, realizaron control de temperatura fijándola en $28,9^{\circ}C$.

Flujo estacionario, axisimétrico e incompresible fue considerado para el estudio numérico mediante el código ENTWIFE. Las ecuaciones de Navier-Stokes con las hipótesis de estacionaridad, incompresibilidad y axisimetría fueron resueltas utilizando elementos-finitos. Las condiciones de borde imponen velocidad angular no nula en la tapa inferior y en el vástago.

A nivel numérico el vástago cónico es tratado en dos posiciones diferentes, una con la base mayor en la tapa rotante (cono derecho) o otra con la base mayor en la tapa fija (cono invertido). Mullin *et al.* encuentran que la inclusión de un vástago cilíndrico, rotante o fijo, no produce ningún efecto cualitativo en la aparición del VB para un valor del número de Reynolds específico. Llegaron a la conclusión de que es necesario que la frontera interior tenga pendiente para poder alterar significativamente la burbuja. Cuando el vástago cónico rota y está al 'derecho' promueve la aparición del RV, mientras que cuando está invertido lo suprime, estos efectos se invierten cuando se deja fijo el vástago.

Mununga *et al.* [23] estudian el efecto sobre el RV de un pequeño disco rotante situado en la tapa fija. El dispositivo experimental consta de un recipiente cilíndrico de radio $R = 243mm$, el disco tiene un radio $r = 0,15R$, la altura del recipiente es tal que la relación de aspecto es $H/R = 2$ y utilizan aceite de silicona con una viscosidad cinemática de $\nu = 500 \times 10^{-6}m^2/s$ a $25^{\circ}C$. Esferas de vidrio con recubrimiento de plata de aproximadamente $10\mu m$ de diámetro fueron utilizadas como trazadores y el sistema fue iluminado con un plano de $5mm$ de ancho producido a partir de dos focos de 500 watts. Los resultados obtenidos a partir de las experiencias con este dispositivo fueron que si el disco es co-rotante se favorece la aparición del RV mientras que si es contra-rotante el RV se retrasa o incluso puede suprimirse.

Los resultados presentados en esta tesis muestran que con vástagos cilíndricos fijos podemos encontrar variaciones en el comportamiento del RV. Además al trabajar con vástagos fijos simplificamos el dispositivo experimental, volviéndolo más aplicable a situaciones reales de ingeniería. Es un estudio detallado, se exploran diferentes relaciones de aspecto y vástagos de diferentes tamaños y formas. Aunado a lo anteriormente expuesto, es necesario indicar que el sistema se estudió de forma experimental y numérica, lo cual hace que este trabajo sea mucho más completo que las fuentes referenciales que se han consultado a la fecha.

İ»ı

Capítulo 3

Fundamentos de la velocimetría de partículas digital (DPIV)

Desde hace algunos años se han desarrollado métodos que permiten medir el campo de velocidad de un fluido utilizando procesamiento digital de imágenes. De estos métodos el más común es el denominado velocimetría digital de partículas DPIV (digital particle image velocimetry). Este método tiene la ventaja de ser no intrusivo, instantáneo y muy preciso para determinar la velocidad del flujo. El método fue desarrollado por Adrian en 1988 [1] y generalizado en los años siguientes entre otros por Westerweel, [31], [32], [34]. En este capítulo se presenta el desarrollo matemático realizado Westerweel [33].

La implementación experimental consiste básicamente en iluminar la región de fluido que se desea estudiar con un plano fino de luz laser. Con el objetivo de permitir la visualización del movimiento del fluido, se siembran partículas de densidad similar, denominadas *trazadores*, que acompañan el movimiento del fluido sin perturbarlo. Estas partículas tienen una distribución aleatoria, generando lo que se denomina un *patrón de trazadores*. La luz dispersada por las partículas es registrada en una cámara, generando así un conjunto de imágenes separadas por un intervalo de tiempo Δt . Una condición importante para lograr una implementación óptima de la técnica es que el tiempo entre dos imágenes sucesivas sea lo suficientemente corto como para que las partículas trazadoras que aparecen en una imagen, lo hagan también en la siguiente.

Los algoritmos estandar de implementación del DPIV están basados en métodos estadísticos [33], ya sea autocorrelación o correlación cruzada entre dos imágenes consecutivas, lo que permite estimar el desplazamiento relativo de las partículas. Para ello se divide cada imagen en subdivisiones denominadas *ventanas de interrogación* (W) y se asume que todas las partículas dentro de W se mueven en forma uniforme durante el lapso de tiempo transcurrido entre cada imagen.

En este capítulo se presenta una descripción breve de los aspectos fundamentales de la técnica de DPIV basada en la teoría de sistemas lineales; las

partículas trazadoras son consideradas como un patrón observable solidario con el fluido. La configuración que presenta el patrón de trazadores en el instante de tiempo t , para el cual se registra la primera imagen, se considera como la señal de entrada del sistema. Esta configuración de trazadores se verá afectada por el movimiento del fluido durante el intervalo de tiempo Δt entre las dos imágenes registradas. De esta forma, la segunda imagen registrada es considerada como la señal de salida del sistema.

3.1 Localización de las partículas

3.1.1 Campo de desplazamiento

En la técnica de PIV, la velocidad del fluido es inferida a partir del movimiento de las partículas utilizadas como trazadores. En las deducciones que se realizarán en este capítulo se asume que las partículas trazadoras son *ideales*. Esto significa que siguen exactamente el movimiento del fluido, que no alteran las propiedades del mismo y que no interactúan entre sí. La velocidad es medida indirectamente a partir del desplazamiento $D(X; t', t'')$ de una partícula en un intervalo finito de tiempo $\Delta t = t'' - t'$, así D viene dado por:

$$D(X; t', t'') = \int_{t'}^{t''} v[X(t), t] dt \quad (3.1.1)$$

donde $v[X(t), t]$ es la velocidad de la partícula. Para partículas ideales su velocidad v es la misma que la velocidad local del fluido $u[X(t), t]$. Sin embargo, en una situación práctica el concepto de partículas ideales puede ser solo aproximado. Por lo tanto, la ec. 3.1.1 implica que el campo de desplazamientos solo provee información sobre la velocidad promedio a lo largo de la trayectoria en un tiempo dado. Esto se ilustra en la figura 3.1. Así, D no está representando exactamente a $u \cdot \Delta t$, pero se aproxima a menos de un error finito ϵ :

$$\|D - u \cdot \Delta t\| < \epsilon \quad (3.1.2)$$

Este error es generalmente despreciable, siempre que las escalas espaciales y temporales del flujo sean grandes con respecto a la resolución espacial, el tiempo de exposición y la dinámica del trazador. La información sobre el flujo se obtiene solamente de las ubicaciones de las partículas presentes en cada imagen, las cuales están distribuidas aleatoriamente en el flujo. Por lo tanto, el desplazamiento individual de las partículas constituye un muestreo aleatorio del campo de desplazamientos, y las diferentes realizaciones nos proveen de diferentes estimaciones para D . Estas diferencias pueden ser despreciadas siempre que el campo de desplazamiento reconstruido satisfaga la ec. 3.1.2.

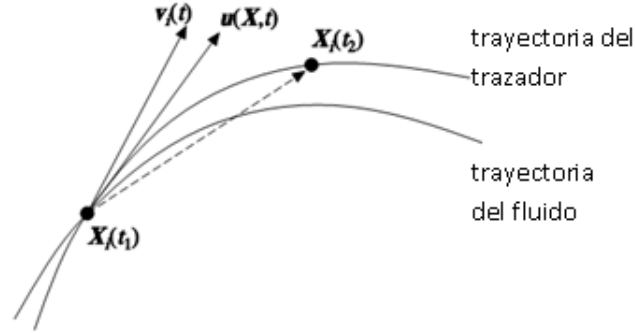


Figura 3.1: Trayectoria de una partícula trazadora real en el seno de un fluido. Puede observarse que a medida que transcurre el tiempo, la trayectoria del trazador se separa de la línea de fluido.

3.1.2 Ensemble de trazadores

Las partículas trazadoras constituyen un patrón aleatorio que se encuentra ligado al fluido y el movimiento de éste es visto a través de los cambios de dicho patrón. El patrón trazador en X a tiempo t se define como:

$$G(X, t) = \sum_{i=1}^N \delta[X - X_i(t)] \quad (3.1.3)$$

donde N es el número de partículas en el fluido, $\delta(X)$ es la función *Delta de Dirac* y $X_i(t)$ es el vector posición de la partícula con índice i a tiempo t . Si integramos en todo el volumen obtendremos el número total de partículas.

El patrón de trazadores a tiempo t' puede ser visto como una señal espacial $G'(X) = G(X, t')$ que corresponde a la señal de entrada a un sistema de 'caja negra', representando al flujo, que genera una señal de salida $G''(X) = G(X, t'')$. El sistema puede ser considerado lineal ya que para partículas ideales la adición de una nueva partícula no afecta la acción del sistema sobre las otras partículas. En consecuencia, la señal de salida puede ser escrita como la convolución entre la señal de entrada y la respuesta al impulso H del sistema:

$$G''(X) = \int H(X, X') G'(X) dX' \quad (3.1.4)$$

La respuesta al impulso es un corrimiento de la señal de entrada debido al desplazamiento local D en la ec. 3.1.1:

$$H(X', X'') = \delta[X'' - X' - D] \quad (3.1.5)$$

Este corrimiento depende formalmente de X , pero considerando la ec. 3.1.2 puede asumirse que D es localmente uniforme y de esta manera H puede ser visto como un invariante respecto del corrimiento, es decir:

$$H(X', X'') = H(X'' - X')$$

De acuerdo con la teoría de sistemas lineales, la respuesta al impulso de una 'caja negra' puede ser obtenida mediante la covarianza cruzada $R_{G'G''}$ de una señal de entrada aleatoria con la correspondiente señal de salida:

$$R_{G'G''}(s) = H * R_{G'}(s) \quad (3.1.6)$$

donde $*$ representa la integral de convolución y $R_{G'}$ es la auto-covarianza de la señal de entrada.

Para el caso especial en que la señal de entrada sea completamente aleatoria, es decir ($R_{G'} \propto \delta(s)$) la correlación cruzada da directamente la respuesta al impulso.

Las propiedades estadísticas de los trazadores son evaluadas considerando el ensemble de todas las posibles realizaciones de $G(X, t)$ para un determinado campo de flujo $u(X, t)$. La covarianza cruzada en el ensemble es definida como:

$$R_{G'G''}(X', X'') = \langle G'(X')G''(X'') \rangle - \langle G'(X') \rangle \langle G''(X'') \rangle \quad (3.1.7)$$

donde $\langle \dots \rangle$ define el promedio en el ensemble.

Para evaluar los términos de 3.1.7, el patrón trazador definido en 3.1.3 es representado como un solo vector en un espacio de fase de dimensión $3N$:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix}$$

Para partículas ideales la trayectoria de Γ está relacionada con el campo de velocidades en las posiciones de las partículas trazadoras:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = U(\Gamma, t) \quad (3.1.8)$$

$$U(\Gamma, t) = \begin{pmatrix} u(X_1, t) \\ u(X_2, t) \\ \vdots \\ u(X_N, t) \end{pmatrix}$$

el promedio en el ensemble de $G(X)$ está dado por:

$$\langle G \rangle = \int G(\Gamma) \rho(\Gamma) d\Gamma \quad (3.1.9)$$

donde $\rho(\Gamma)$ es la densidad de probabilidad para Γ . El momento de segundo orden $\langle G'G'' \rangle$ viene dado por:

$$\langle G'G'' \rangle = \int \int G(\Gamma')G(\Gamma'')\rho(\Gamma'' | \Gamma')\rho(\Gamma)d\Gamma'd\Gamma'' \quad (3.1.10)$$

donde $\rho(\Gamma'' | \Gamma')$ es la densidad de probabilidad condicional para Γ'' dado el estado inicial Γ' . Para un determinado campo de flujo Γ'' es determinado unívocamente por 3.1.8, y por lo tanto

$$\rho(\Gamma'' | \Gamma') = \delta(\Gamma'' - \Gamma' - D) \quad D = \int_{t'}^{t''} U[\Gamma(t)]dt \quad (3.1.11)$$

Como consecuencia directa 3.1.10 se reduce a:

$$\langle G'G'' \rangle = \int \int G(\Gamma)G(\Gamma + D)\rho(\Gamma)d\Gamma \quad (3.1.12)$$

Así, los momentos de primer y de segundo orden en el ensemble son determinados por $\rho(\Gamma)$ (para partículas ideales).

Como no existen partículas que aparezcan o desaparezcan del ensemble, ρ satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot U = 0 \quad (3.1.13)$$

(esto es esencialmente la formulación del Teorema de Liouville). Considerando el caso especial de un fluido incompresible con un sembrado espacialmente homogéneo:

$$\nabla \rho = 0 \quad \nabla \cdot U = 0 \quad (3.1.14)$$

introduciendo 3.1.14 en 3.1.13 obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.1.15)$$

lo cual implica que $\rho(\Gamma, t)$ es constante y no depende del campo de flujo. Por lo tanto, un patrón homogéneo de trazadores solo se puede obtener para partículas ideales en fluidos incompresibles. En el límite $V \rightarrow \infty$ y $N \rightarrow \infty$, con $N/V = C$ constante, donde C es la densidad del sembrado.

Los momentos de primer y segundo orden viene dados por:

$$\begin{cases} \langle G'(X) \rangle = \langle G''(X) \rangle = C \\ \langle G'(X')G''(X'') \rangle = C\delta[X'' - X' - D] + C^2 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

sustituyendo 3.1.16 en 3.1.7 obtenemos:

$$R_{G'G''}(X', X'') = C\delta(X'' - X' - D) \quad (3.1.17)$$

Esto implica que la interpretación de la covarianza cruzada en términos del desplazamiento de los trazadores es apropiada solamente para un fluido incompresible con un sembrado homogéneo de trazadores ideales. Para aquellos casos donde el análisis utilizando correlaciones no es apropiado, es necesario utilizar otros métodos como por ejemplo un algoritmo de rastreo de partículas [16].

3.1.3 Campo de intensidad

En esta sección se presenta una representación matemática de la distribución de la intensidad de luz en el plano de la imagen.

Como ya se mencionó, para la implementación experimental de la técnica del PIV una sección transversal del flujo es iluminada con un plano de luz de espesor ΔZ_0 y las partículas trazadoras que se encuentran en ese plano de luz son proyectadas sobre un soporte de grabación en el plano de imagen de una lente, como se ilustra en la figura 3.2. Por simplicidad se asume que la óptica

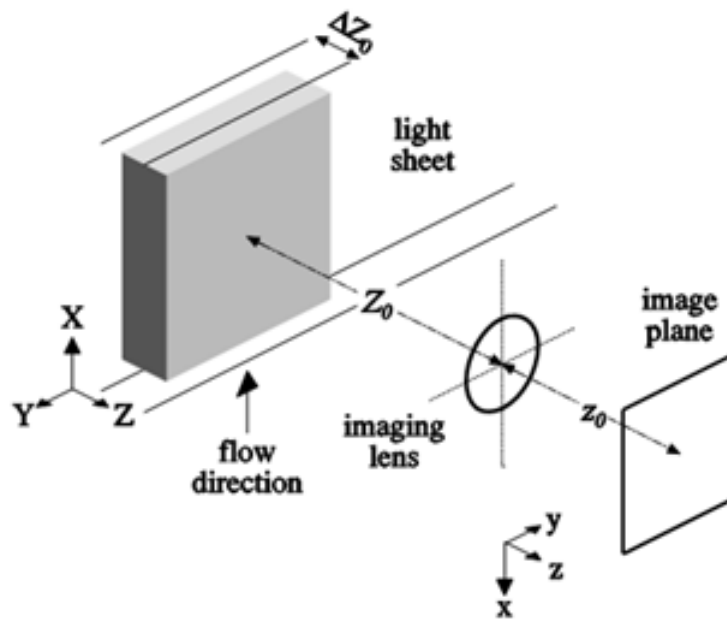


Figura 3.2: Representación esquemática de la formación de imágenes

consiste en una lente circular libre de aberraciones con una apertura numérica $f^\#$, y que todas las partículas observadas se encuentran enfocadas (lo que se cumple cuando ΔZ_0 es menor que la profundidad focal del objeto [3]).

La visibilidad de los trazadores depende de la intensidad de la luz en la posición en que se encuentran, la sensibilidad del sistema de adquisición, etc.

En lo que sigue se asume que la dispersión de todas las partículas trazadoras es iguales y que la sensibilidad del sensor es la misma en todos los puntos del plano de la imagen. Por otro lado, la apariencia de la imagen depende de la concentración de partículas, en el plano de luz. La densidad de la fuente se define como:

$$N_s = C\Delta Z M^{-2} \frac{\pi}{4} d_t^2 \quad (3.1.18)$$

donde C es la concentración de partículas, M la magnificación de la imagen y d_t el diámetro de las partículas.

A baja densidad ($N \ll 1$) la distancia promedio entre las partículas es mucho mayor que el diámetro de su imagen. En este caso la imagen consiste simplemente en imágenes de partículas aisladas. Por otro lado, para una alta densidad ($N \gg 1$) las imágenes de la partículas se superponen, y para una iluminación coherente resulta que la imagen es un patrón de interferencia aleatorio, llamado generalmente "speckle".

La imagen del patrón trazador es esencialmente una proyección del patrón trazador en una pantalla plana, es decir:

$$g(x, y) = \frac{1}{I_Z} \int I_0(Z) G(X, Y, Z) dZ \quad (3.1.19)$$

donde $x = MX$ e $y = MY$, $I_0(Z)$ es el perfil de intensidad del plano de luz siendo I_Z su valor máximo y M la magnificación de la imagen.

Asumiendo la aproximación paraxial, tenemos que la proyección de G en g solo involucra la integración en la coordenada Z . Por analogía con $G(X, Y, Z)$, la integral de $g(x, y)$ sobre un área da como resultado el número de imágenes de las partículas que se encuentran en dicha área. La covarianza cruzada en el ensemble de g' y g'' viene dada por:

$$R_{g'g''}(s) = F_0(\Delta Z_0) \cdot C\Delta Z_0 \cdot \delta(s - s_D) \quad (3.1.20)$$

siendo

$$F_0(\Delta Z_0) = \frac{\int I_0(Z) I_0(Z + \Delta Z) dZ}{\int I_0^2(Z) dZ} \quad (3.1.21)$$

siendo $s_D = M \cdot (\Delta X, \Delta Y)$ el desplazamiento de las imágenes de las partículas en el plano.

El término F_0 representa la *pérdida de correlación* debida que las partículas entran y salen del plano de luz. Por más detalles ver referencia [27].

El sistema óptico descrito en la figura 3.2 puede ser considerado lineal e invariante con el desplazamiento.

Se considera $q(x, y)$ como la respuesta del sistema de una sola partícula. Entonces, para partículas trazadoras idénticas, la intensidad de la imagen $I(x, y)$ para una baja densidad viene dada por:

$$I(x, y) = I_Z \int \int q(s - x, t - y) g(s, t) ds dt \quad (3.1.22)$$

La correspondiente covarianza cruzada en el ensemble de la imagen está dada por:

$$R_{II}(s) = F_0(\Delta Z_0) \cdot R_I * \delta(s - s_D) \quad (3.1.23)$$

donde R_I es la auto-correlación de la imagen y viene dada por:

$$R_I(s) = C\Delta Z_0 M^{-2} I_Z^2 q_0^2 F_q(s) \quad (3.1.24)$$

F_q es la auto-correlación de la imagen de una partícula siendo q_0^2 el término de normalización ($q_0^2 F_q = q * q$).

Para las imágenes de partículas pequeñas, R_{II} tiene forma de un pico estrecho con un ancho que es proporcional a d_t . La ubicación de este pico es determinada por el desplazamiento en el plano de la imagen de la partícula, y su amplitud es proporcional al número de partículas trazadoras por unidad de área que se encuentran en el plano de luz (es decir es proporcional a $F_0 C \Delta Z_0 M^{-2}$).

3.2 Interrogación

3.2.1 Correlación espacial

En esta sección el modelo para la imagen desarrollado en la sección anterior es utilizado para describir las propiedades estadísticas de la 'ventana de interrogación' en las imágenes de PIV.

Hasta el momento, se ha considerado un ensemble de todas las posibles realizaciones del patrón de trazadores. En la práctica, el campo de flujo no es reproducible (por ejemplo, como el caso de un flujo turbulento) y una única realización de I' e I'' está disponible. En ese caso el promedio en el ensemble se sustituye por un promedio espacial, que se define como:

$$C(s) = \int \int W'(x) I'(x) W''(x+s) I''(x+s) dx \quad (3.2.1)$$

donde W' y W'' son las funciones ventana asociadas con los dominios de interrogación en I' (intensidad de la primera imagen) e I'' (intensidad de la segunda imagen) respectivamente.

Una condición necesaria para validar este desarrollo es que el promedio espacial sea ergódico respecto al promedio en el ensemble, lo que implica que el promedio espacial en un dominio de interrogación converge al promedio en el ensemble cuando el dominio tiende a infinito. Esta condición es satisfecha cuando el patrón de trazadores es homogéneo y la respuesta al impulso es invariante respecto de corrimientos (shift-invariant). Por lo tanto la correlación espacial puede ser escrita como:

$$C(s) = \langle C(s) \rangle + C'(s) = R_D(s) + R_C(s) + R_F(s) + C'(s) \quad (3.2.2)$$

donde $\langle C(s) \rangle$ corresponde al valor medio y $C'(s)$ es una fluctuación respecto al promedio; $R_D(s)$ es el pico de correlación del desplazamiento (displacement-correlation peak), R_C es un término constante debido a la correlación del fondo y R_F representa la correlación entre el promedio y las fluctuaciones de las intensidades de las imágenes.

El pico de la correlación del desplazamiento viene dado por:

$$R_D(s) = N_I F_I F_0 I_Z^2 q_0^2 F_q * \delta(s - s_D) \quad (3.2.3)$$

y la densidad en la imagen, N_I , está dada por:

$$N_I(s) = C \Delta Z_0 M^{-2} D_I^2 \quad (3.2.4)$$

y

$$F_I(s) = \frac{1}{D_I^2} \int W'(x) W''(x + s) dx \quad (3.2.5)$$

donde D_I^2 es el área asociada con el dominio de interrogación.

Los términos R_C y R_F pueden ser eliminados restando el promedio de la intensidad de la imagen de I' e I'' . El término aleatorio de correlación $C'(s)$ refleja la fluctuación de una única realización respecto al valor medio en el ensemble. Así, la correlación espacial esperada es esencialmente igual a la correlación en el ensemble, multiplicada por un término que tiene en cuenta la pérdida de correlación en el plano (debido a que las partículas entran y salen del dominio de interrogación). Por último, la amplitud del pico de correlación es proporcional a $N_I F_I F_0$, donde N_I es la densidad de la imagen que refleja el número medio de imágenes de partículas en la ventana de interrogación.

Para finalizar, consideremos nuevamente la ec. 3.1.23. La evaluación de las imágenes mediante la correlación cruzada implica que R_{GG} es evaluada en un volumen finito, es decir: $\delta V(X') = \Delta Z_0 D_I^2$.

Debido a las variaciones espaciales del desplazamiento en $\delta V(X')$, el valor del desplazamiento individual que es representado por la función δ debe ser reemplazado por la función de distribución de desplazamiento:

$$R_D(s) = N_I F_I F_0 \cdot I_Z^2 t_0^2 F_q * \rho(s - s_D) \quad (3.2.6)$$

Donde s_D es un vector de referencia respecto de la 'posición' de la distribución de desplazamiento, que puede representar o bien al máximo de ρ (es decir, el desplazamiento más probable) o bien al primer momento de ρ (es decir, el desplazamiento local promedio).

Notar que la distribución tiene un ancho finito que es proporcional a la variación local $\|\Delta u\|$ de la velocidad. El volumen total de la distribución se mantiene constante, de modo que cuando la distribución pasa a ser más ancha, la amplitud del pico disminuye. El ensanchamiento del pico de correlación del

desplazamiento tiene un efecto despreciable sobre R_D cuando dentro del volumen de integración las diferencias entre las velocidades son pequeñas respecto del correspondiente ancho de R_I , es decir:

$$\|\Delta u\|\Delta t \ll \frac{d_t}{M} \quad (3.2.7)$$

En este caso, el campo de desplazamiento puede ser considerado uniforme. En la práctica el cociente entre el diámetro de los trazadores y el área de la ventana de interrogación, $\frac{d_t}{D_I}$, tiene un valor alrededor de 3 – 5%; para gradientes grandes, la forma del pico de correlación puede cambiar significativamente, e incluso se puede dividir en varios picos. Sin embargo, en lo que resta de esta tesis se supondrá que estamos en la condición que plantea la ecuación 3.2.7.

3.2.2 Sesgo en la velocidad

Dado que la velocidad del flujo será estimada a partir del pico de correlación es importante evaluar cuáles son los factores que influyen en esta estimación. A continuación se analizará la posibilidad de que la estimación de la velocidad esté sesgada ya sea para valores pequeños o grandes.

La ecuación 3.2.3 implica que la correlación espacial estimada es igual al pico de la covarianza en el ensemble multiplicado por F_I . Si las ventanas de interrogación W' y W'' son de igual tamaño, entonces F_I decrece como función del módulo del desplazamiento. Consecuentemente, el pico en R_D que se obtiene estará ligeramente sesgado hacia el centro del dominio de la correlación, por lo que el máximo y primer momento de la correlación espacial están sesgados hacia valores pequeños [2] como se muestra en la figura 3.3. Este efecto de sesgado es proporcional al ancho del pico de la correlación. Esto implica que el sesgo aumenta proporcionalmente con el diámetro de la imagen de las partículas. El sesgo es mayor cuando existen gradientes de velocidad importantes en las ventanas de interrogación, ya que esto aumenta todavía más el ancho del pico de la correlación. Existen varios métodos para eliminar el efecto del sesgo en la estimación de la velocidad. Una alternativa es dividir la correlación espacial por F_I . Otro método que se implementa habitualmente consiste en la utilización de ventanas de interrogación uniformes con diferentes tamaños. Detalles de estos métodos pueden encontrarse en la literatura, [31], [32], [13].

3.2.3 Optimización de la interrogación

Una interrogación exitosa depende de la habilidad para identificar el pico de correlación del desplazamiento R_D con respecto a la correlación aleatoria C' (los términos R_C y R_F son triviales). Esto implica que la amplitud de R_D tiene que maximizarse, es decir es necesario maximizar el término $N_I F_I F_0$. Esto ha sido investigado profundamente por [13], [14], [15] quienes establecieron

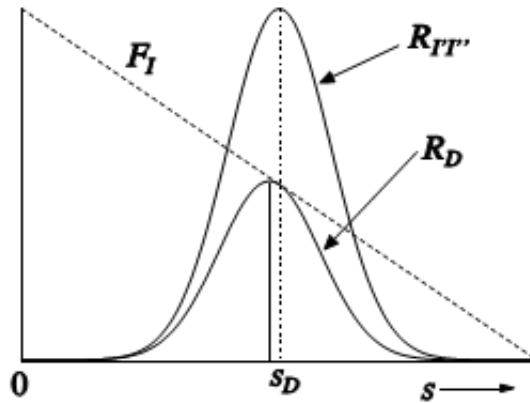


Figura 3.3: El pico de la correlación del desplazamiento es sesgado hacia el desplazamiento nulo como consecuencia del ancho finito del pico y el tamaño limitado de la región de interrogación.

las siguientes 'reglas de diseño', considerando imágenes con alta densidad de trazadores:

$$N_I F_I F_0 > 3 \quad \frac{\|\Delta u\| \Delta q M}{D_I} < \frac{d_t}{D_I} \approx 0,03 - 5 \quad (3.2.8)$$

Por ejemplo, para una imagen con densidad $N_I = 12$ los desplazamientos en el plano y fuera del plano deben ser menores que $\frac{D_I}{4}$ y $\frac{Z_0}{4}$ respectivamente (es decir que $F_I, F_0 \geq 0,75$).

3.3 Adquisición y tratamiento de las imágenes

En esta sección se discuten aspectos relacionados con el análisis y adquisición de las imágenes digitales para PIV. La pixelización consiste en el muestreo de una señal en pequeños elementos de imagen (píxeles) y la posterior cuantización de la amplitud de la señal; véase la figura 3.4.

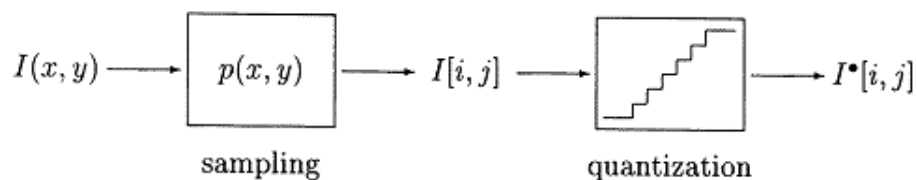


Figura 3.4: La pixelización de una imagen continua consiste en el muestreo espacial y la cuantización de los valores de intensidad

3.3.1 Ancho de banda

Un aspecto importante de la digitalización es la elección de la frecuencia de muestreo que se requiere para que una imagen digital produzca una representación 'correcta' de la imagen continua original. El teorema de muestreo (figura 3.5) establece que una señal limitada en su ancho de banda puede ser reconstruida sin pérdida de información a partir de un muestreado discreto cuando la frecuencia de muestreo es como mínimo dos veces el ancho de banda de la señal original. El sistema óptico mostrado en la figura 3.2 es limitado en

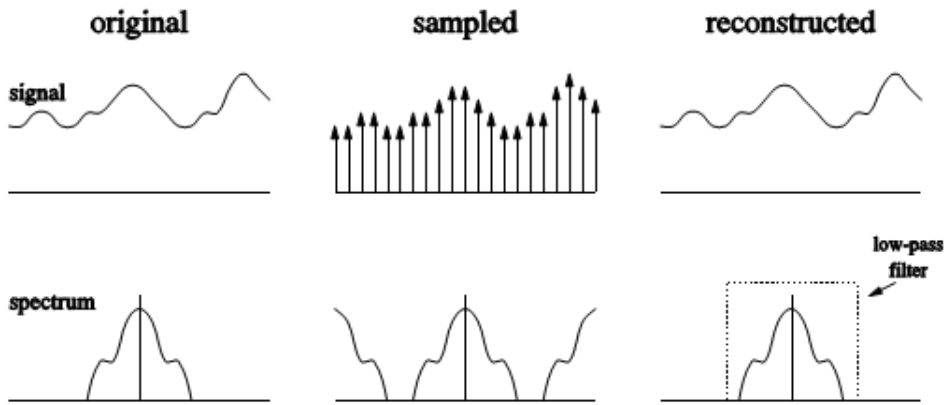


Figura 3.5: Teorema del muestreo

su ancho de banda y éste viene dado por:

$$A = (M + 1)f^{\#}\lambda^{-1} \quad (3.3.1)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz. Para $f^{\#} = 8$, $M = 1$ y $\lambda = 0,5\mu m$, el ancho de banda es de $125mm^{-1}$. Esto implica que una ventana de interrogación de $1 \times 1mm^2$ de área debería ser muestreada con una resolución mínima de 256×256 píxeles. Este es un valor típico en el análisis convencional de imágenes para PIV. Dado que el desplazamiento suele ser mucho más grande que el diámetro de la imagen de partícula, la información en relación con el campo de desplazamientos se encuentra en el rango del espectro que corresponde a bajos números de onda, mientras que un número de onda alto sólo contiene información detallada de la forma de las imágenes de las partículas. Por lo tanto, para las mediciones no es necesario resolver todo el ancho de banda óptico, alcanza con resolver la región de bajas frecuencias para obtener la información sobre el desplazamiento. Para los parámetros ópticos dados anteriormente y con el objetivo de resolver la región de las bajas frecuencias, en la práctica una resolución de 64×64 píxeles es adecuada para un área de $1 \times 1mm^2$. Este es el valor utilizado habitualmente para el tamaño de las ventanas de interrogación en las imágenes para PIV [25].

3.3.2 Muestreo de la imagen

La imagen $I(x, y)$ normalmente es discretizada con un dispositivo electrónico (usualmente un CCD o CMOS) que 'integra' la intensidad de la luz sobre una pequeña superficie denominada pixel. Se puede asumir que el dispositivo tiene una respuesta lineal con respecto a la intensidad de la luz y está hecho de píxeles cuadrados contiguos de área d_r^2 . La imagen discreta está dada por:

$$I[i, j] = \int \int p(x - id_r, y - jd_r) I(x, y) dx dy \quad (3.3.2)$$

donde $p(x, y)$ es la función sensibilidad espacial de los píxeles, es decir:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{d_r^2} & |x|, |y| < \frac{d_r}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

La covarianza cruzada de dos imágenes de I' y I'' se define como:

$$R[i, j] = \langle I'[i, j] I''[i + r, j + s] \rangle - \langle I'[i, j] \rangle \langle I''[i + r, j + s] \rangle \quad (3.3.4)$$

Sustituyendo 3.3.2 en 3.3.4, se obtiene:

$$R[r, s] = \{\phi_{pp} * R\}(rd_r, sd_r) \quad (3.3.5)$$

donde ϕ_{pp} es la auto-correlación de la sensibilidad de los píxeles; ver figura 3.6. Notar que la correlación discreta está dada por la convolución de la correlación continua con ϕ_{pp} , que es muestreada posteriormente para valores enteros de los píxeles.

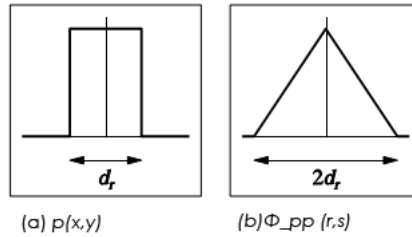


Figura 3.6: Función de sensibilidad espacial de los píxeles $p(x, y)$ y su correspondiente auto-correlación $\phi_{pp}(r, s)$

3.3.3 Cuantización

El siguiente paso para muestrear la imagen es la cuantización, por la cual la intensidad de la imagen I es mapeada a una variable discreta I^\bullet que toma valores de un conjunto finito de números. La relación entre la entrada cuantizada y la salida puede escribirse como:

$$I[i, j] = I^\bullet[i, j] + \zeta[m, n] \quad (3.3.6)$$

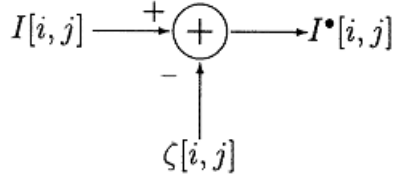


Figura 3.7: El error en la cuantización puede ser considerado como ruido sumado

(ver figura 3.7) donde ζ es el ruido cuantizado. Siempre que el número de niveles sea grande con respecto al rango de la señal de entrada, ζ tiene en una primera aproximación una distribución uniforme, con las siguientes propiedades estadísticas [12]:

$$E\{\zeta\} = 0 \quad E\{I^*\zeta\} = 0 \quad E\{I\zeta\} = E\{\zeta^2\} \quad (3.3.7)$$

Por lo tanto, el efecto de la cuantización puede modelarse como la adición de ruido blanco, el cual va a aparecer en la correlación cruzada como un pulso en centrado en el origen, es decir:

$$R^*[u, v] = R[u, v] + E\{\zeta^2\} \cdot \delta[0, 0] \quad (3.3.8)$$

Así, para los desplazamientos no nulos el error en la cuantización no afecta la evaluación del pico de correlación. Esto fue confirmado mediante simulaciones numéricas usando el método Monte Carlo [35] las cuales demuestran que el error aleatorio en la medida del desplazamiento es independiente del número de niveles utilizados en la cuantización.

3.3.4 Correlación espacial cruzada discreta

La correlación espacial de imágenes discretas puede ser evaluada directamente usando transformadas discretas de Fourier (DFTs). En el espacio discreto, la covarianza espacial cruzada para dos imágenes I' e I'' de $N \times N$ píxeles está definida como:

$$\widehat{R}[r, s] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I'[i, j] - \bar{I})(I''[i + r, j + s] - \bar{I}) \quad (3.3.9)$$

donde \bar{I} es valor medio (local) de la intensidad de la imagen. El valor medio de la intensidad es sustraído para eliminar los términos R_D y R_F de la ecuación 3.2.2. El valor esperado de 3.3.9 es igual a:

$$E\{\widehat{R}[r, s]\} = F_I[r, s] \cdot R[r, s] \quad (3.3.10)$$

con

$$F_I[r, s] = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \quad (3.3.11)$$

El dominio de la correlación 3.3.9 va desde $-N + 1$ a N para cada componente. Por lo tanto, la DFT debe calcularse en un dominio $2N \times 2N$. Esto se logra completando con ceros I' e I'' . Cuando la DFT se lleva a cabo en un dominio menor, entonces la parte de la correlación que no se resuelve se repliega. Esto es similar al 'aliasing' en el dominio de la frecuencia. Cuando el desplazamiento se ajusta a las reglas de diseño 3.2.8 para PIV, es decir, $|s_D| < \frac{1}{4D_I}$, entonces la correlación es cero para $|r|, |s| > \frac{1}{4N}$. En ese caso, no es necesario completar con ceros y la DFT puede ser calculada en un dominio $N \times N$.

Otro parámetro que es importante estimar es el área de correlación, L^2 , que está dada por:

$$L^2 = \sum_t \sum_u \frac{\text{cov}\{\widehat{R}_D[r_D, s_D], \widehat{R}_D[r_D + t, s_D + u]\}}{\text{var}\{\widehat{R}_D[r_D, s_D]\}} \quad (3.3.12)$$

donde $[r_D, s_D]$ es la ubicación del pico de la correlación del desplazamiento.

El valor de L^2 puede interpretarse como el número de muestras correlacionadas, de modo que el cociente entre N^2 y L^2 puede interpretarse como el número efectivo de muestras 'independientes' [26], [31], [32].

3.3.5 Estimación de fracciones del desplazamiento

Cuando el pico de correlación cubre más de un pixel, el desplazamiento se puede determinar a un nivel de sub-píxeles por interpolación. Esto es posible incluso cuando el diámetro de la imagen de la partícula es menor que un pixel. El efecto más fuerte de la ubicación de sub-píxeles se presenta en los valores de correlación adyacentes al máximo; estos tienen la mayor parte de la información con respecto a las fracciones de desplazamiento. Sólo los vecinos directos del máximo superan el nivel de ruido. Por lo tanto, para d_t/d_r pequeños sólo tres valores de correlación contienen información significativa con respecto al desplazamiento de la imagen de la partícula en una determinada dirección. Estos tres valores de correlación son denotados como R_{-1}^* , R_0^* y R_{+1}^* respectivamente. Siendo las estimaciones de la correlación sin sesgo, es decir, $R^* = \widehat{R}/F_I$.

En general se utilizan dos métodos de interpolación: el ajuste del baricentro y el ajuste Gaussiano.

La estimación del baricentro está basada en el hecho de que el baricentro de un objeto simétrico coincide con la posición del objeto. El baricentro del pico está dado por:

$$\widehat{\epsilon}_B = \frac{R_{-1}^* - R_{+1}^*}{R_{-1}^* + R_0^* + R_{+1}^*} \quad (3.3.13)$$

Como resultado tenemos que la estimación del baricentro utilizando fracciones del desplazamiento está fuertemente sesgada hacia valores enteros del desplazamiento (en píxeles). Este efecto es conocido como 'bloqueo del pico', y es

claramente visible en la figura 3.8(a), que muestra un histograma para el desplazamiento medido en un tubo de flujo turbulento [34] utilizando el baricentro del pico.

El ajuste Gaussiano del pico está basado en el hecho de que el pico de la

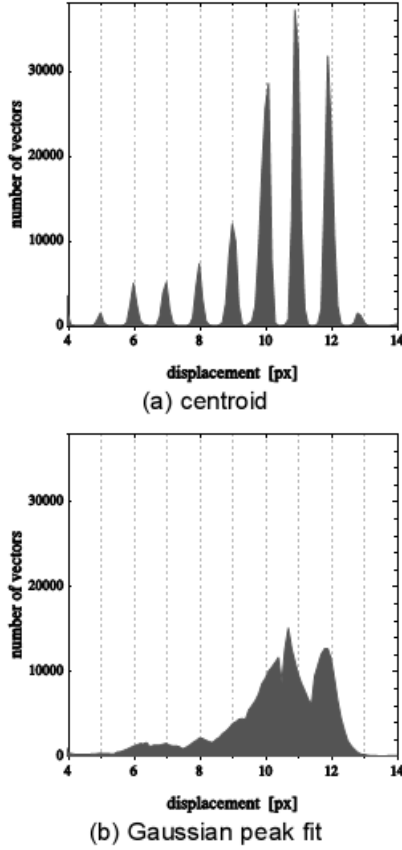


Figura 3.8: Histogramas del desplazamiento axial medios de un flujo turbulento en un tubo, usando ajustes Gaussiano y del baricentro para la interpolación de sub-píxeles

correlación del desplazamiento tiene un forma aproximadamente Gaussiana [36]:

$$\hat{\epsilon}_G = \frac{\ln R_{-1}^* - \ln R_{+1}^*}{2 \ln R_{-1}^* + \ln R_{+1}^* - 2 \ln R_0^*} \quad (3.3.14)$$

En esta aproximación, el efecto de bloqueo del pico se reduce considerablemente, figura 3.8(b).

La varianza del fraccionamiento estimado del desplazamiento está dada por:

$$\text{var}\{\hat{\epsilon}\} \approx \sum_{i=-1}^{+1} \sum_{j=-1}^{+1} \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_i^*} \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_j^*} \text{cov}\{R_i^*, R_j^*\} \quad (3.3.15)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_0^*} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_{-1}^*} = \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_{+1}^*} \quad (3.3.16)$$

La expresión de la varianza $var\{\hat{\epsilon}\}$ se reduce a:

$$var\{\hat{\epsilon}\} = \left(\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_{\pm 1}^*} \right)^2 var\{R_{-1}^*\} + var\{R_{+1}^*\} - 2cov\{R_{+1}^*, R_{-1}^*\} \quad (3.3.17)$$

El primer término solo depende de la función de interpolación de los sub-píxeles, lo cual refleja que la precisión es mejorada cuando la interpolación ajusta la forma del pico de correlación. El segundo término solo depende de las propiedades estadísticas del pico de la correlación del desplazamiento. Notemos que este término podría desaparecer si R_{-1}^* y R_{+1}^* se encuentran perfectamente correlacionados. Esto sólo ocurre para el caso de desplazamiento nulo (con error de cuantización nulo, véase 3.3.8). Se puede demostrar que el primer término es proporcional a $1/(R_D^2) = O(N_I^{-2})$, [31], [32], mientras que el segundo término es proporcional a $R_D^2 = O(N_I^2)$. Esto implica que la varianza no depende de la densidad de partículas en la imagen. La precisión de la medida está determinada fundamentalmente por el cociente d_t/D_I , mientras que la fiabilidad de la medida está determinada por N_I .

Capítulo 4

Dispositivo Experimental

4.1 Montaje mecánico

En la figura 4.1 se muestran una foto y un esquema del montaje experimental. Este consiste en un recipiente cilíndrico de radio R y altura H , que contiene al fluido, cuya tapa superior gira mediante un motor CC, con una velocidad Ω . Se define la relación de aspecto para este sistema como: $\Gamma = H/R$.

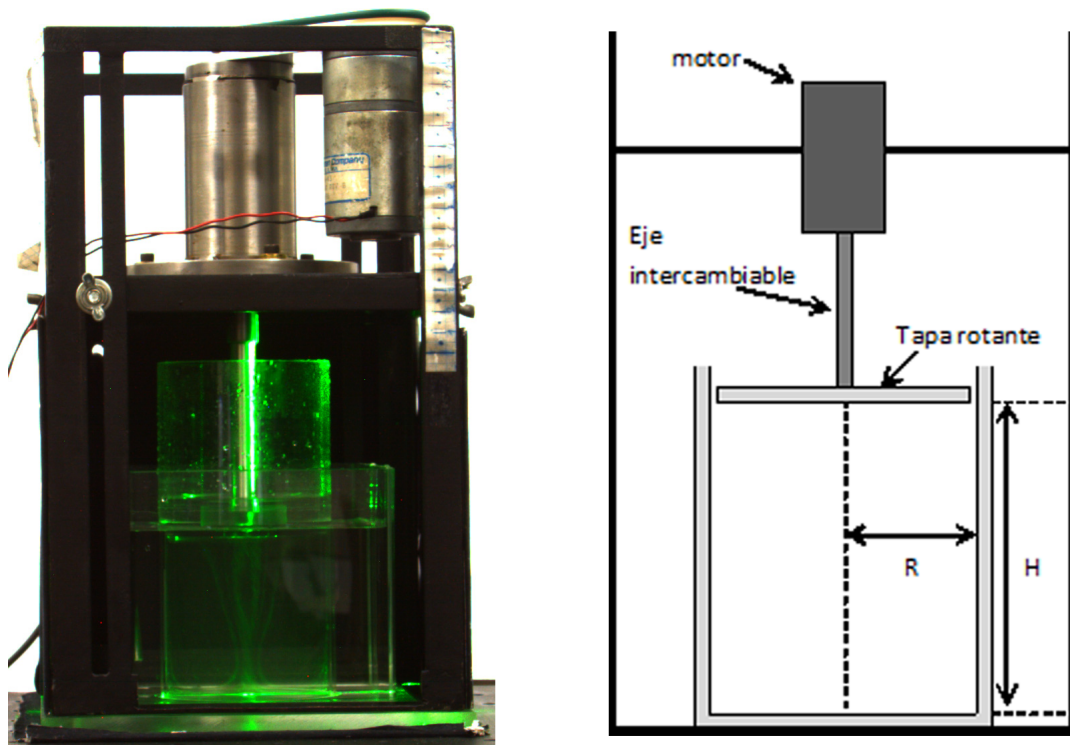


Figura 4.1: Izq. Foto del montaje experimental. Der. Esquema del montaje experimental utilizado

4. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En la configuración utilizada en este trabajo de tesis el radio interno es $R = 0,04m$ y la altura H puede variarse en forma sencilla mediante ejes intercambiables de diferente longitud, que acoplan la tapa superior al motor. En este trabajo se utilizaron tres diferentes alturas para la cavidad cilíndrica: $H = 0,06m$, $H = 0,08m$ y $H = 0,10m$, lo cual implica las siguientes relaciones de aspecto: $\Gamma = 2,5$, $\Gamma = 2$ y $\Gamma = 1,5$. La visualización del sistema se realizó vertical y horizontalmente. Para realizar mediciones en el plano horizontal colocamos el dispositivo experimental sobre un soporte hueco de base cuadrada de sólo tres lados y un espejo que posicionamos justo debajo del recipiente cilíndrico a 45° como puede verse en la figura 4.2.

El motor que gira la tapa superior es alimentado mediante una fuente conti-

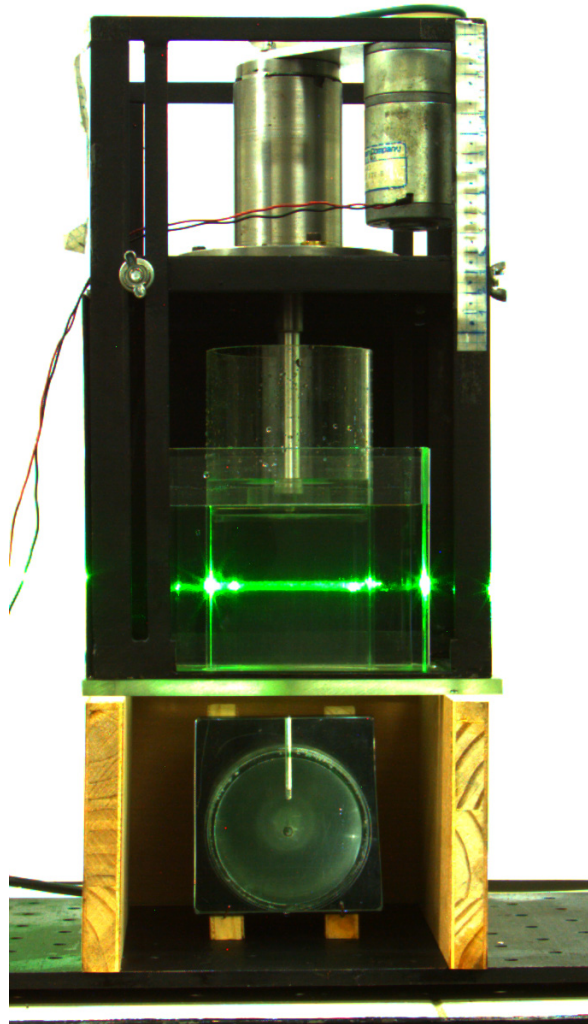


Figura 4.2: Montaje experimental correspondiente al plano horizontal

na, con una apreciación de $0,1V$. El rango de trabajo de la fuente varía entre

0,0 y 23,0V. Para calibrar el motor se utilizó un sistema sencillo de puerta óptica conectado a un osciloscopio, permitiendo determinar el período de giro con una apreciación de $1ms$, encontrándose una relación lineal entre ambos, dada por:

$$\Omega = 0,72V - 0,42 \quad (4.1.1)$$

El motor fue calibrado para las diferentes Γ , observándose que en todos los casos se cumple la misma relación dada en ecuación 4.1.1. En la figura 4.3 se muestra la curva de calibración obtenida. Dado que la velocidad de giro

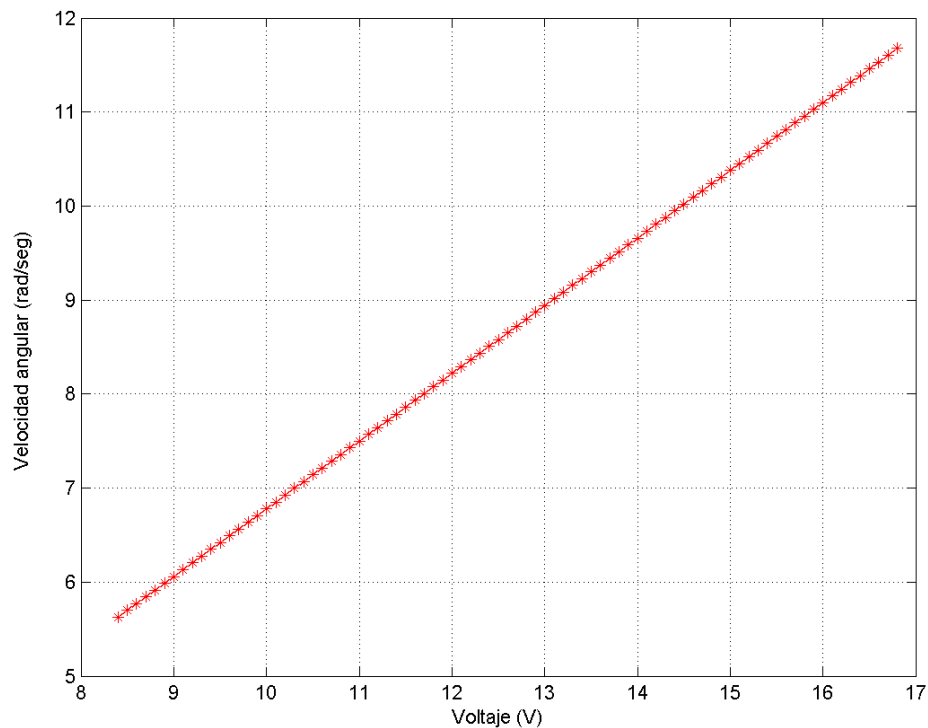


Figura 4.3: Curva de calibración del motor

de la tapa superior y las propiedades física del fluido determinan el número de Reynolds (Re), es conveniente representar la calibración del motor en términos de este último parámetro. La figura 4.4, representa la dependencia del número de Reynolds con el voltaje de la fuente. Es importante resaltar que una variación en el voltaje de $0,1V$, produce una variación de 13 unidades en el Re . De esta forma, esta variación se utilizará como error en la determinación del Re para las etapas de análisis de este trabajo.

Para la segunda parte del trabajo, se utilizaron vástagos interiores fijos a la

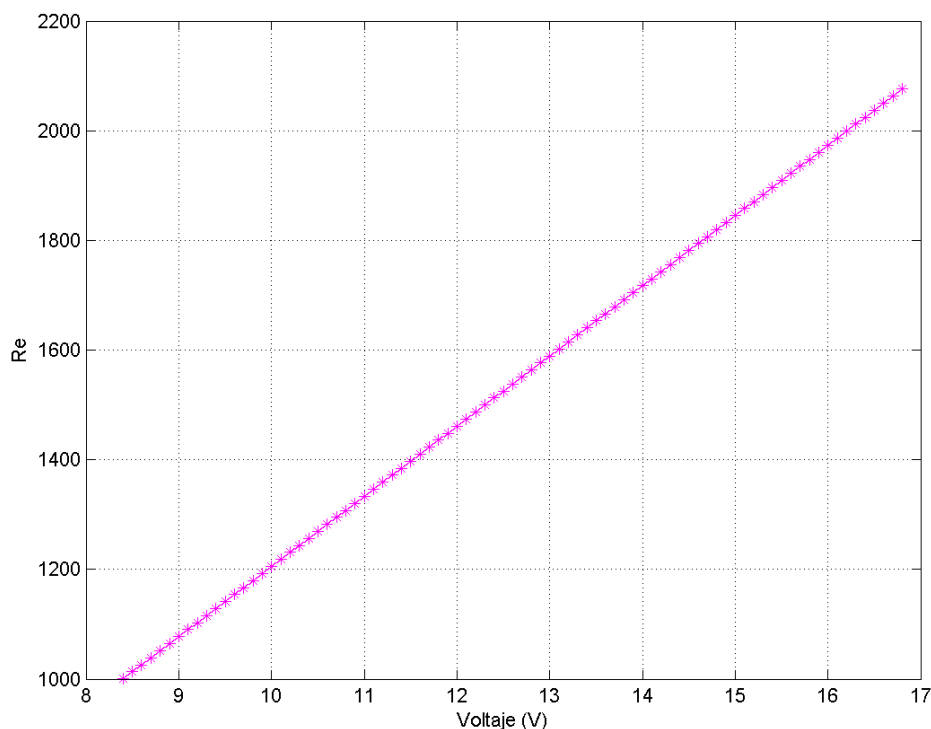


Figura 4.4: Variación del número de Reynolds con el voltaje de alimentación de la fuente

tapa inferior a la tapa inferior, ver Figura 4.5 con el objetivo de analizar su efecto sobre la dinámica del sistema. En primer lugar se utilizaron vástagos cilíndricos de radios: $d = 1 \pm 0,1mm$, $d = 2,5 \pm 0,1mm$ y $d = 5,0 \pm 0,1mm$. Los vástagos fueron pintados de negro para mejorar la visualización en el seno del fluido. En una segunda etapa se utilizaron vástagos cuadrados de lado $L = 4,4 \pm 0,1mm$ y $L = 8,8 \pm 0,1mm$. Los lados de los vástagos cuadrados se seleccionaron de tal forma que el volumen total del vástago cuadrado fuera igual que el volumen del vástago cilíndrico correspondiente. Así, el vástago cuadrado de $L = 4,4mm$ es equivalente al vástago cilíndrico de $d = 2,5mm$; mientras que el vástago cuadrado de $L = 8,8mm$ es equivalente al vástago cilíndrico de radio $d = 5mm$.

4.2 Fluido de trabajo

El fluido utilizado fue una solución de glicerina y agua al 60% en masa, con una densidad $\rho = 1200Kg/m^3$ a $20^\circ C$. La preparación de la solución se realizaba en dos etapas, en la primera mezclábamos 500ml de glicerina pura con

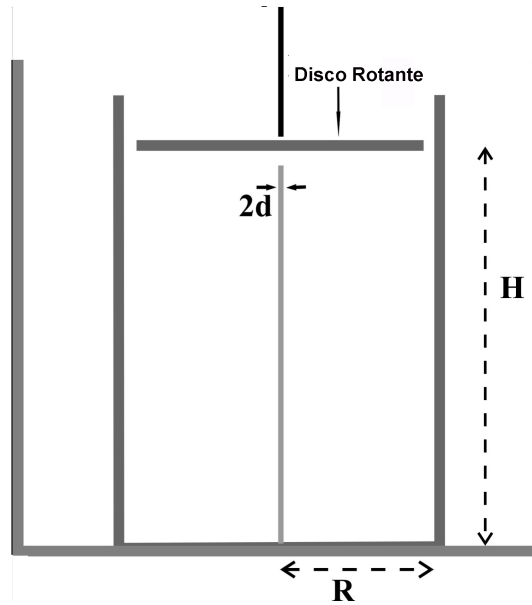


Figura 4.5: Esquema del montaje experimental con vástagos

400ml de agua destilada, para generar una mezcla homogénea era necesario agitar mucho, esto hacía que aire se diluyera en la solución. La segunda etapa consistía en dejar reposar la solución alrededor de 48 horas para que el aire disuelto en ésta se fuera liberando.

La viscosidad, parámetro que mide la resistencia del fluido a deformaciones tangenciales, se encuentra involucrada en la determinación del Re y depende fuertemente con la temperatura [9] especialmente en las temperaturas de trabajo, $17^{\circ}C - 25^{\circ}C$. En la figura 4.6 podemos ver datos experimentales [9] ajustados por medio de una interpolación spline cúbica. Debido a la variación de la viscosidad con la temperatura fue necesario mantener constante la temperatura del laboratorio en $20^{\circ}C$. El monitoreo global de temperatura se realizó mediante una termocupla cuya apreciación es $0,1^{\circ}C$. Asimismo monitoreamos la temperatura del sistema mediante un termistor colocado fuera de la cavidad cilíndrica, la calibración del termistor es presentada en la figura 4.7.

4.3 Sistema de Iluminación

La iluminación se realizó mediante dos láseres de semiconductor Nd:Yag, linealmente polarizados, continuos, con longitud de onda $532nm$ y $100mW$ de potencia, se utilizaron lentes cilíndricas para obtener planos de luz de $3mm$ de espesor, [17]. Cuando estudiamos la cavidad libre de vástagos utilizamos sólo uno de los láseres mientras que al colocar los vástagos necesitamos de ambos láseres para evitar la presencia de sombras generadas por los propios vástagos.

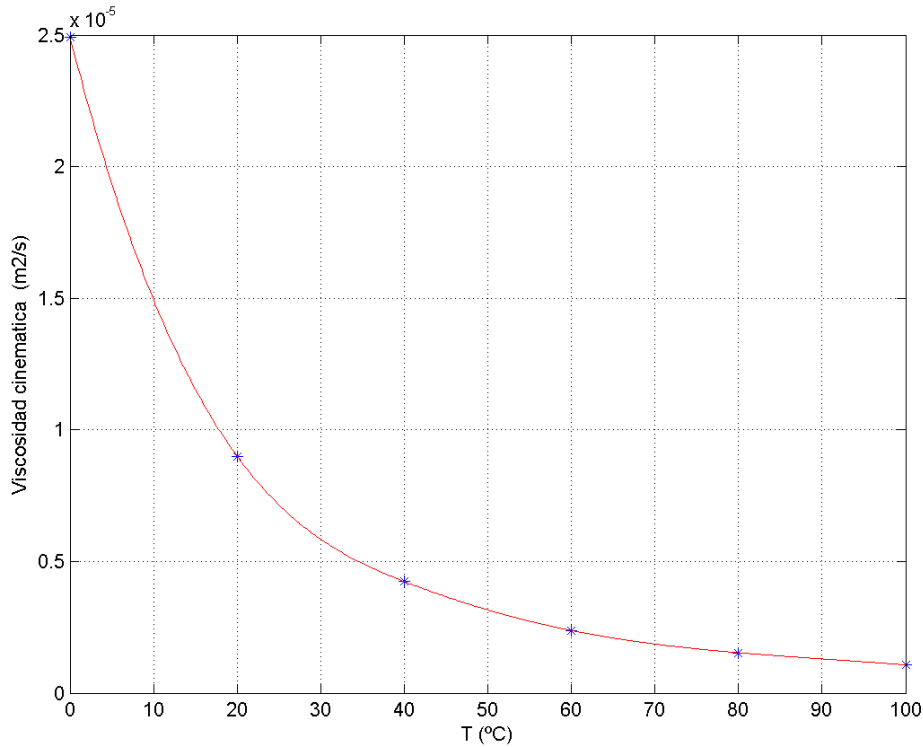


Figura 4.6: Curva de la viscosidad en función de la temperatura. Los puntos corresponden a datos experimentales, mientras que la línea sólida corresponde a un ajuste spline.

Las imágenes fueron tomadas utilizando una cámara PixeLINK, PL-A741 Mv Camera, de 1,3 megapíxeles, la cantidad de cuadros por segundo que se podemos adquirir depende del tamaño de la región de interés, como se muestra en el cuadro 4.1. Está equipada con un sensor CMOS de 2/3" con una resolución 1280×1024 ($8576 \times 6912mm$) con píxeles cuadrados de $6,7\mu m$. El rango de sensibilidad es desde 350 a $1000nm$ (Figura 4.8). A la cámara se le colocó un zoom que nos permitió aumentar regiones específicas. En una primera instancia se adquirieron imágenes donde se viera todo el cilindro para así estudiar los diferentes comportamientos del flujo para luego concentrarnos en las zona donde se producía el rompimiento de vórtice. Siempre adquirimos imágenes cuadradas para optimizar el algoritmo de cálculo. El tamaño de la imagen determina la cantidad de cuadros por segundo que se adquieren, cuadro 4.2. Para minimizar los reflejos presentes en la zona de estudio se colocó el cilindro dentro de un recipiente cúbico del mismo material y el espacio entre ellos se llenó con la misma solución de glicerina. Cuando la luz incide sobre una superficie, parte de ésta se refracta y parte se transmite, en nuestro caso necesitamos maximizar la luz transmitida, esto va a depender del ángulo de incidencia y

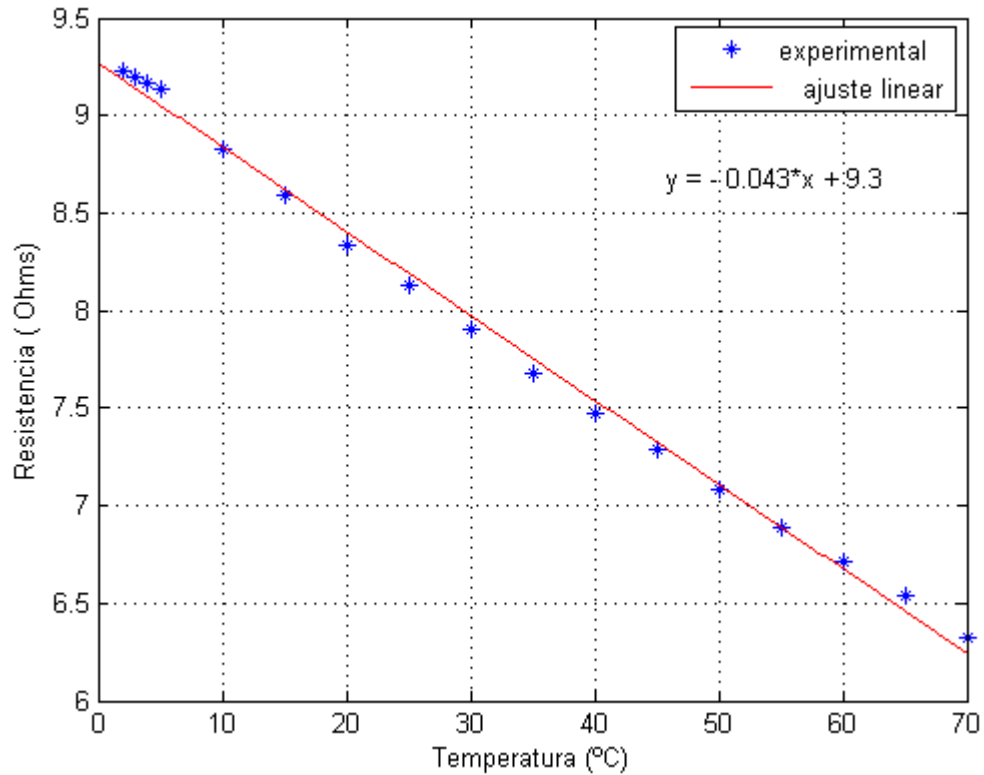


Figura 4.7: Curva de calibración del termistor

de los índices de refracción de cada medio por el cual viaja la luz. El ángulo de transmisión lo podemos calcular mediante la ley de Snell:

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (4.3.1)$$

siendo n_1 y n_2 los índices de refracción de los medios involucrados θ_1 corresponde al ángulo de incidencia a la superficie del medio 2 cuando la luz viaja por el medio 1 y θ_2 es el ángulo que forma en haz transmitido al medio 2 con la perpendicular a la superficie. Cuando la incidencia no es normal a la superficie $\theta_2 \neq 0$ entonces los valores de los índices de refracción de cada uno de los medios comienzan a tomar mayor relevancia.

Los índices de refracción de nuestro sistema son: $n_{\text{aire}} \cong 1,0$, $n_{\text{acrílico}} \cong 1,49$, $n_{\text{glicerina}} \cong 1,47$ donde $\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{acrílico}}} \cong 0,67$ y $\frac{n_{\text{acrílico}}}{n_{\text{glicerina}}} \cong 0,98$, de esta manera podemos ver que la interfase más importante en la maximización de la luz transmitida es entre el aire y el acrílico porque es en la cual el ángulo de refracción varía más.

La forma de maximizar la transmisión es haciendo que la luz entre perpendicular a la superficie, lo cual es más fácil de lograr en una superficie plana

Región de interés	Cuadros por segundo
1280×1024	27
1000×1000	33
750×480	77
640×480	107
64×64	8000

Cuadro 4.1: Cantidad de cuadros por segundo dependiendo del tamaño de la región de interés que posee la cámara

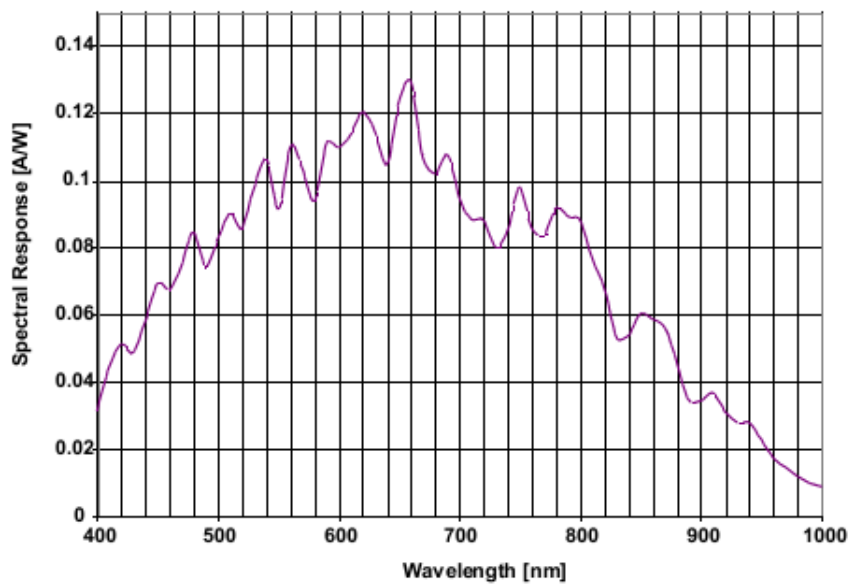


Figura 4.8: Respuesta espectral de la cámara

Región de interés	Cuadros por segundo
512×512	90
576×576	88
608×608	80

Cuadro 4.2: Cantidad de cuadros por segundo dependiendo del tamaño de la región de interés utilizados en este trabajo

que en una superficie curva. Además tenemos que tener en cuenta que el plano de luz tiene espesor y que al incidir en una superficie curva el plano de luz transmitida no mantiene su espesor. Como los índices de refracción del acrílico y de la solución son similares, el ángulo θ_2 que se establezca se mantendrá a través de las otras superficies prácticamente incambiado, de ahí la importancia de controlar la interacción de el haz de luz con la primera superficie (figura 4.9).

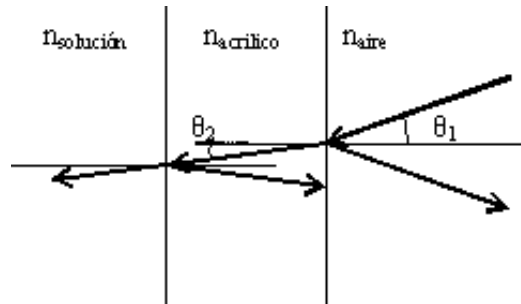


Figura 4.9: Esquema de la refracción entre las superficies de los recipientes.

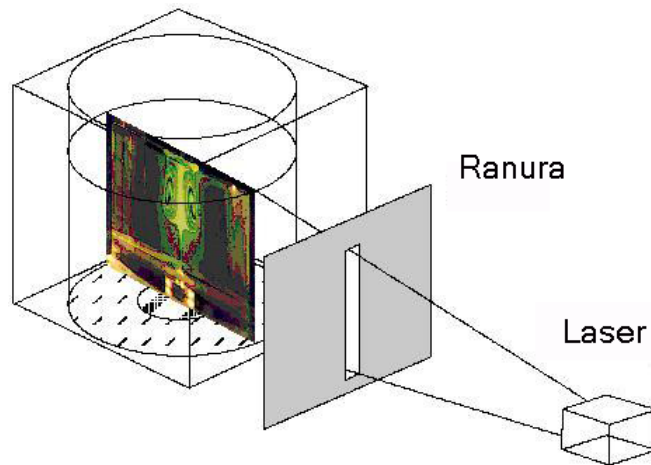


Figura 4.10: Esquema del sistema de iluminación vertical

Para obtener las componentes del campo de velocidad fue necesario realizar dos montajes diferentes. Para medir las componentes vertical y radial de la velocidad se iluminó el sistema con un plano vertical, ver figura 4.10. La componente acimutal fue medida utilizando un esquema de iluminación horizontal.

4.4 Trazadores

El sembrado de un fluido consiste en la inclusión de partículas trazadoras en su seno. Dependiendo del tipo del fluido se podrán usar partículas sólidas, gotas de aceite o incluso burbujas de aire. En muchas publicaciones se describen las características que deben cumplir las partículas para la siembra de un fluido, pero en muy pocas se explica como se hace para introducir dichas partículas en el flujo. En algunos casos el sembrado propio que pueda poseer un fluido

es suficiente para aplicar PIV, por ejemplo las burbujas de aire presentes en aceite, pero en muchos casos es necesario la introducción de partículas trazadoras para aumentar el contraste de la imagen y para controlar el tamaño de las partículas. Para la mayoría de los líquidos el sembrado se puede realizar de forma relativamente fácil agregando partículas sólidas en suspensión y mezclando para obtener una distribución homogénea. Algunos ejemplos de partículas utilizadas para la visualización de fluidos, en particular para PIV se muestran en el cuadro 4.3, [28]. Las partículas utilizadas en nuestra experiencia son es-

Tipo	Material	Diámetro promedio en μm
Sólidas	Poliestireno	10-100
	Aluminio	2-7
	Esperas de vidrio	10-100
	Gránulos de recubrimientos sintéticos	10-500
Líquidas	Diferentes aceites	50-500
Gaseosas	Burbujas de aire	50-1000

Cuadro 4.3: Materiales de sembrado para líquidos

feroides de Poliamida 12 (Nailon) de $50\mu m$ de diámetro promedio, con una distribución de diámetros entre $30 - 70\mu m$. Su densidad es de $1,03g/cm^3$ y su índice de refracción es 1,5 [5].

En nuestro caso la siembra de partículas se realizaba mezclando menos de 1

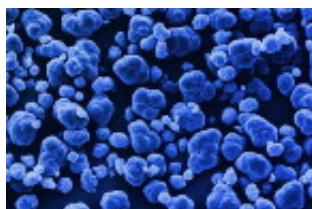


Figura 4.11: Partículas trazadoras, su forma no es perfectamente esférica

gramo de partículas con unos pocos mililitros de la solución de glicerina, se revolvía la mezcla para obtener una solución homogénea con muy alta concentración de partículas. Este 'concentrado' de partículas se vertía en la solución que se encontraba en el recipiente cilíndrico y se mezclaba, la solución se dejaba reposar unos minutos. Debido a que las partículas tienen una densidad diferente a la de la solución de glicerina, parte de las partículas flotaban y parte decantaban pero la mayoría permanecía en la solución, así que se retiraban las partículas flotantes y el sistema estaba listo para comenzar a medir.

Capítulo 5

Método numérico

Los fluidos y los fenómenos relacionados con ellos suelen describirse por medio de ecuaciones en derivadas parciales, por lo que no existen soluciones analíticas salvo en casos muy específicos. Esta es la razón por la que buscamos soluciones numéricas. Para obtenerlas usamos métodos de discretización los cuales aproximan las ecuaciones diferenciales con sistemas de ecuaciones algebraicas y el espacio físico (dominio) con espacios discretos (mallas). Nuestro objetivo es resolver los sistemas algebraicos en estas mallas de manera computacional.

Debemos recordar que existen diferencias entre lo que es el fenómeno físico que queremos estudiar, el modelo matemático que utilizamos para representarlo (ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y de borde apropiadas) y el modelo numérico que vamos a resolver (sistemas de ecuaciones algebraicas). Es de esperar que estas diferencias se reflejen al momento de comparar los resultados obtenidos por nuestro modelo numérico con los resultados obtenidos de forma experimental.

El modelo que utilizaremos se llama `caffa3d` y fue desarrollado por el Ing. Msc. Gabriel Usera en el marco de sus estudios de doctorado. Como características generales del modelo podemos mencionar que es un modelo tridimensional basado en el método de volúmenes finitos y que utiliza mallas curvilíneas estructuradas por bloques. Las interfaces entre bloques son tratadas en forma implícita y pueden ser deslizantes, lo que permite incorporar piezas móviles al dominio en las aplicaciones que así lo requiriesen. Las celdas interfaz pueden asociarse 'una-a-una' o 'muchas-a-una'. Los cálculos pueden realizarse en paralelo descomponiendo el dominio en bloques de malla [29].

5.1 Modelo Numérico

En la presente sección explicaremos en detalle el modelo numérico y plantearemos las características específicas usadas para simular nuestro problema.

5.1.1 Mallas

Las mallas son una representación discreta de la geometría del dominio y definen la ubicación de los puntos de cálculo de las variables. Además determinan las formas en que se construirán las aproximaciones discretas de las ecuaciones diferenciales. Una malla estructurada consiste en familias de líneas de malla con la propiedad de que los miembros de una familia no se cortan con los de otra. Esto permite que las líneas de un conjunto dado puedan numerarse consecutivamente. La posición de cualquier punto (o volumen de control) del dominio es identificado por un único conjunto de tres índices (3D). Cuando trabajamos con distintos bloques (los cuales pueden usarse para dar diferentes niveles de refinamiento de la malla en los lugares que nuestro problema lo necesite) decimos que nuestra malla está estructurada por bloques. En el momento en que definimos la malla especificamos el sistema de coordenadas que usaremos para realizar las discretizaciones. En nuestro caso utilizaremos coordenadas cartesianas rectangulares con una base de versores $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ y donde el campo de velocidades lo representaremos con (u, v, w) .

5.1.2 Ecuaciones del modelo

Vamos a presentar las ecuaciones integrales de movimiento para un fluido viscoso incompresible isoterma con la aproximación de Boussinesq para los efectos de flotación:

$$\int_S (\vec{v} \cdot \hat{n}_s) dS = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho u (\vec{v} \cdot \hat{n}_s) dS = \int_S -(p \hat{n}_s) \cdot \hat{e}_1 dS + \int_S -(2\mu \mathbf{D} \cdot \hat{n}_s) \cdot \hat{e}_1 dS \quad (5.1.2)$$

válidas en cualquier porción Ω del dominio de flujo, siendo S la frontera de dicha porción y \hat{n}_s la normal saliente a ésta. La ecuación 5.1.2 es la proyección en (\hat{e}_1) de la ecuación de balance mecánico, las proyecciones en los ejes restantes son análogas. La relación constitutiva de un fluido viscoso se introduce en 5.1.2 mediante el tensor simétrico de deformación \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_x & (u_y + v_x)/2 \\ (u_y + v_x)/2 & v_y \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

donde u_x representa la derivada parcial de u respecto de x .

Consideramos también la ecuación de conservación para un escalar genérico ϕ :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \phi (\vec{v} \cdot \hat{n}_s) dS = \int_S \Gamma (\nabla \phi \cdot \hat{n}_s) dS \quad (5.1.4)$$

La obtención de las ecuaciones discretizadas del modelo numérico se basará en la aplicación repetida de las ecuaciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.4 a cada uno de los elementos de volumen definidos en la malla.

5.1.3 Geometría

El dominio lo representaremos con uno o más bloques, cada uno de los cuales está constituido por un conjunto estructurado de hexaedros irregulares (figura 5.1). Estos hexaedros poseen seis vecinos, no se solapan y no dejan espacios libres entre ellos. Para poder discretizar las integrales que conforman las ecua-

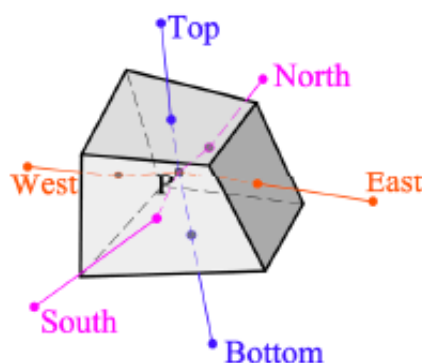


Figura 5.1: Esquema de un elemento de volumen con sus seis vecinos, utilizamos la nomenclatura inglesa

ciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.4 tenemos que calcular propiedades geométricas de los elementos de volumen (celdas) y de las caras que lo conforman.

Los centros de celda los denominaremos con letras mayúsculas y los centros de cara con letras minúsculas; el punto en el que vamos a resolver las ecuaciones discretizadas lo llamamos genéricamente P y los puntos que lo rodean los designaremos usando los puntos cardinales en lengua inglesa (W-West, E-East, N-North, S-South, B-bottom, T-Top). Queremos calcular el volumen $\Delta\Omega$, las coordenadas del centro geométrico (centro de celda) P, los vectores normales a las caras \vec{S}_c y las coordenadas de cada centro de cara para cada una celda como la representada en la figura 5.1.

Al especificar la malla quedan determinadas las coordenadas de los ocho vértices que definen la celda. A partir de estas coordenadas obtenemos los elementos geométricos antes mencionados. Las caras del hexaedro con el que trabajamos (figura 5.1) no son cuadriláteros necesariamente planos por lo que las propiedades geométricas las vamos a calcular mediante propiedades de elementos triangulares. La normal saliente del elemento triangular de la figura 5.2a) y la coordenada de su baricentro son:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \quad \vec{c} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad (5.1.5)$$

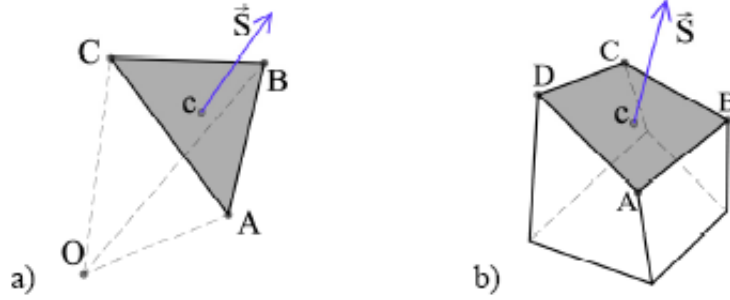


Figura 5.2: a) Elemento Triangular (ABC) con la normal saliente situada en el baricentro. b) Cuadrilátero (ABDC) con la normal saliente situada en el baricentro

Considerando ahora el cuadrilátero (ABCD) de la figura 5.2b) como formado por dos triángulos (ABC) y (ACD), sus propiedades las podemos calcular como:

$$\vec{S} = \vec{S}_{ABC} + \vec{S}_{ACD} \quad \vec{c} = (\vec{c}_{ABC} \cdot |\vec{S}_{ABC}| + \vec{c}_{ACD} \cdot |\vec{S}_{ACD}|) (\|\vec{S}\|)^{-1} \quad (5.1.6)$$

donde la orientación de las ternas (ABC) y (ACD) es tal que la normal a la superficie sea saliente respecto del volumen.

El elemento de volumen lo calculamos usando el teorema de Gauss:

$$\Delta\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (x\hat{e}_1) d\Omega = \int_S x\hat{e}_1 \cdot \hat{n}_S dS = \sum_c x_c S_c^x \quad (5.1.7)$$

donde x_c es la coordenada del centro de cara en la primera dirección de la terna y S_c^x la componentes en la misma dirección de la normal saliente. Calculamos las coordenadas del centro de celda (P) mediante el promedio aritmético de las coordenadas de los vértices.

5.2 Interpolación y aproximación de gradientes

En la figura 5.3 representamos dos elementos de volumen uno centrado en P y el otro centrado en E (E se encuentra al este de P). El esquema de disposición de las variables es coincidente sobre los centros de celda P para todas las variables primitivas (u, v, w, p, ϕ) lo que significa que calculamos los distintos campos usando una misma malla. Por esta razón las operaciones de interpolación y cálculo de gradientes son análogas para todas las variables. La interpolación para calcular el valor de una magnitud (ϕ) en el centro de la cara 'Este' (ϕ_e), a partir de los valores en los centros de celda (ϕ_P y ϕ_E) responde a la siguiente expresión:

$$\phi_e = \phi_E \cdot \alpha_{PE} + \phi_P \cdot (1 - \alpha_{PE}) + (\nabla\phi)_e \cdot \vec{e}'_e \quad (5.2.1)$$

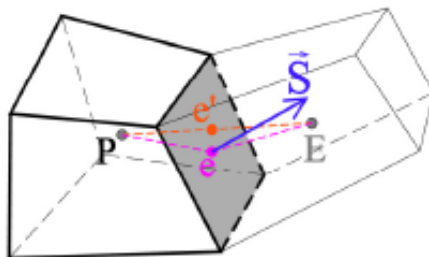


Figura 5.3: Detalle de la aproximación espacial usada para la interpolación y la derivación

donde el coeficiente de interpolación α_{PE} y el vector $\vec{e}'e$ verifican:

$$\alpha_{PE} = (|\vec{Pe}|) \cdot (|\vec{Pe}| + |\vec{Ee}|)^{-1} \quad (5.2.2)$$

$$\vec{e}'e = \alpha_{PE} \cdot \vec{Ee} + (1 - \alpha_{PE}) \cdot \vec{Pe} \quad (5.2.3)$$

Siendo e' el punto de intersección entre la línea que une los centros de celda y la cara de dicha celda. En los casos más sencillos los puntos e' y e pueden coincidir. El cálculo del gradiente de una magnitud escalar ϕ en el centro de celda (P) se obtiene aproximando el teorema de Gauss por:

$$(\nabla\phi)_P \cdot \hat{e}_1 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} d\Omega}{\Delta\Omega} = \frac{\int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \hat{e}_1) d\Omega}{\Delta\Omega} = \frac{\int_S \phi \hat{e}_1 \cdot \vec{n}_s dS}{\Delta\Omega} \approx \frac{\sum_c \phi_c S_c^i}{\Delta\Omega} \quad (5.2.4)$$

la sumatoria es sobre las seis caras de la celda ($c = w, e, s, n, b, t$) y S_c^i son las componentes de cada normal de superficie. El último sumando de la ecuación 5.2.1 permite obtener aproximaciones de segundo orden en mallas no ortogonales (en este caso el vector $\vec{e}'e$ es no nulo). Por lo que en este tipo de mallas las interpolaciones necesarias en la ecuación 5.2.4 requiere de un cálculo iterativo.

5.2.1 Discretización de la ecuación de balance mecánico

El objetivo es obtener expresiones discretizadas y linealizadas de las proyecciones de la ecuación de balance mecánico. Cada proyección de la ecuación 5.1.2 corresponde a una componente del vector velocidad. Vamos a ejemplificar el tratamiento usando la componente u de la velocidad, proyección en la primera componente de la terna. La forma general del sistema algebraico será:

$$\mathbf{A}^u u = Q^u \quad (5.2.5)$$

donde \mathbf{A}_u es la matriz de componentes y es heptagonal, correspondiendo a la molécula de cálculo de siete elementos representada en la figura 5.1. Para el elemento genérico P la ec. 5.2.5 toma la forma particular:

$$A_P^u \cdot u_P + A_W^u \cdot u_W + A_E^u \cdot u_E + A_S^u \cdot u_S + A_N^u \cdot u_N + A_B^u \cdot u_B + A_T^u \cdot u_T = Q_P^u \quad (5.2.6)$$

donde los coeficientes A_i^u y el término fuente Q_P^u son el resultado de la discretización la ecuación 5.1.2.

Primeramente daremos una reseña de los tipos de aproximaciones que vamos a utilizar para luego aplicarlas en los diferentes términos de la ecuación 5.1.2 y así obtener los coeficientes de la ecuación 5.2.6.

Interpolación Upwind (UDS)

Si queremos aproximar ϕ_e lo que hacemos es aproximar por el valor de la variable en el centro de celda (P o E) que es el primer término de la expansión en serie de Taylor, la elección del punto dependerá de la dirección del flujo.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \dot{m}_e > 0 \\ \phi_E & \dot{m}_e < 0 \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Es una interpolación de primer orden que agrega difusión numérica¹ pero es buena ya que no genera oscilaciones.

Interpolación Lineal (CDS)

Hacemos la aproximación:

$$\phi_e = \phi_P + (\phi_E - \phi_P)\lambda_e \quad (5.2.8)$$

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (5.2.9)$$

Es una aproximación de segundo orden, no agrega difusión numérica pero puede introducir oscilaciones².

Derivación espacial (Taylor)

A partir de esta aproximación vamos a poder construir de una manera sencilla tratamientos implícitos.

$$\nabla\phi \cdot \vec{n}_e = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e \simeq \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (5.2.10)$$

Si la malla es regular esta es una aproximación de segundo orden mientras que si es irregular es de primer orden.

¹esta aproximación agrega un término $\Gamma^{num}_e = \frac{(\rho u)_e \Delta x}{2}$ al coeficiente de difusión del modelo físico.

²cuando la malla no es muy refinada y hay zonas donde los gradientes son grandes, la solución numérica en el espacio y en el tiempo presenta errores que cambian de signo respecto de la solución esperada. Podemos refinar la malla hasta el punto de hacer desaparecer dichas oscilaciones

Derivación temporal

Consideremos una discretización equiespaciada del tiempo donde un tiempo cualquiera t^m lo obtenemos como $t^m = t^{m-1} + \Delta t$ con $t^m \in [t_0, t_f]$. Para derivada temporal realizaremos una aproximación de primer orden por medio del Método de Euler 'para atrás' (consideramos el valor de la variable en el mismo punto en un tiempo anterior),

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_P \cong \frac{\phi_P^m - \phi_P^{m-1}}{\Delta t} \quad (5.2.11)$$

con esta elección estamos obteniendo un método implícito.

TÉRMINO CONVECTIVO

El flujo convectivo para la componente u de la velocidad a través de la cara 'Este' lo escribimos como:

$$\begin{aligned} (F_e^u)^{con} &= \int_S \rho u (\vec{v} \cdot \hat{n}_s) dS \approx \dot{m}_e u_e \\ &= \max(\dot{m}_e, 0) u_P + \min(\dot{m}_e, 0) u_E \\ &+ \gamma_{CDS} \left(\dot{m}_e u_e - \max(\dot{m}_e, 0) u_P - \min(\dot{m}_e, 0) u_E \right) \\ &= (A_P^u)^{con} \cdot u_P + (A_E^u)^{con} \cdot u_E - (Q_P^u)^{con} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

donde el los términos

$$\max(\dot{m}_e, 0) u_P + \min(\dot{m}_e, 0) u_E \quad (5.2.13)$$

corresponden a una aproximación UDS y aportan a la matriz de coeficientes A^u y los términos

$$\gamma_{CDS} \left(\dot{m}_e u_e - \max(\dot{m}_e, 0) u_P - \min(\dot{m}_e, 0) u_E \right) \quad (5.2.14)$$

corresponden a una corrección diferida (CDS - UDS) se consideran como fuentes y aportan a Q^u .

TÉRMINO DIFUSIVO

El flujo difusivo según la componente u de la velocidad a través de la cara 'Este' del elemento de volumen centrado en P:

$$(F_e^u)^{dif} = \int_S (2\mu \mathbf{D} \cdot \hat{n}_S) \cdot \hat{e}_1 dS = \int_S \mu (\nabla u) \cdot \hat{n}_S dS + \int_S \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dS \approx \quad (5.2.15)$$

$$\begin{aligned} &\approx \mu_e(u_E - u_P) \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{PE}|} + (2\mu_e \mathbf{D}_e \cdot \vec{S}_e) \cdot \hat{e}_1 - \mu(\nabla u)_e \cdot \vec{PE} \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{PE}|} = \\ &= -(A_P^u)^{dif} \cdot u_P - (A_E^u)^{dif} \cdot u_E + (Q_P^u)^{dif} \end{aligned}$$

donde el término

$$\mu_e(u_E - u_P) \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{PE}|} \quad (5.2.16)$$

corresponde a una aproximación implícita de primer orden en el que consideramos la propia componente u de la velocidad para realizar la aproximación mientras que el término

$$(2\mu_e \mathbf{D}_e \cdot \vec{S}_e) \cdot \hat{e}_1 - \mu(\nabla u)_e \cdot \vec{PE} \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{PE}|} \quad (5.2.17)$$

corresponde a una corrección explícita y utilizamos la expresión completa del tensor de deformaciones interpolado al centro de cara (\mathbf{D}_e).

TÉRMINO DE LA PRESIÓN

Para realizar la aproximación para los términos que contienen el campo de presión utilizaremos el Teorema de Gauss y la aproximación del gradiente

$$\int_S -(p \cdot \hat{n}_S) \cdot \hat{e}_1 dS = \int_\Omega -\nabla \cdot (p \cdot \hat{e}_1) d\Omega = \int_\Omega -\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \approx -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_P \Delta\Omega = (Q_P^u)^{pre} \quad (5.2.18)$$

TÉRMINO NO ESTACIONARIO

En este caso vamos a aplicar el Método de Euler 'para atrás', obteniendo:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \approx \frac{\rho}{\Delta t} (u_P^m - u_P^{m-1}) \Delta\Omega = (A_P^u)^t \cdot u_P - (Q_P^u)^t \quad (5.2.19)$$

donde u_P^m es el valor de la componente u de la velocidad en el punto P en el tiempo actual ($t = t_m$).

5.2.2 Corrección de la presión

El campo de velocidades calculado a partir de la ecuación de balance mecánico 5.1.2 no está sujeto a la condición de incompresibilidad. Por eso debe corregirse para que verifique la conservación de la masa 5.1.1. La presión, considerada como término fuente, debe corregirse. Para ésto vamos a utilizar el método

SIMPLE (Semi-Implicit Method Pressure Linked Equations) de acoplamiento velocidad-presión [7]. Los campos de velocidad y presión se expresan como:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}' \quad p = p^* + p' \quad (5.2.20)$$

donde (\vec{v}^*, p^*) son los valores en el paso de tiempo actual, (\vec{v}', p') son las correcciones para imponer que se cumpla el balance de masa y (\vec{v}, p) son los nuevos valores de los campos. Las correcciones \vec{v}' y p' están relacionadas entre sí mediante la expresión

$$\vec{v}'_e = -\left(\frac{\Delta\Omega}{A_P}\right)_e (\nabla p')_e \quad (5.2.21)$$

obtenida a partir de las ecuaciones 5.2.6 y 5.2.18 por lo que a partir de ella podemos obtener las expresiones corregidas para los flujos másicos en cada centro de cara. En el caso de la frontera 'Este' será:

$$\dot{m}_e = \dot{m}_e^* + \dot{m}'_e = \rho_e (\vec{v}_e \cdot \vec{S}_e) - \left(\rho \frac{\Delta\Omega}{A_P}\right)_e \vec{S}_e \cdot \left((\nabla p)_e - \overline{(\nabla p)}_e\right) - \left(\rho \frac{\Delta\Omega}{A_P}\right)_e \vec{S}_e \cdot (\nabla p')_e \quad (5.2.22)$$

donde el primer sumando de 5.2.22 es el flujo másico sin corregir calculado a partir de la ecuación de balance mecánico. El segundo es una corrección para evitar oscilaciones del campo de presiones. El tercero representa la influencia de la corrección de la presión sobre la velocidad, mediante 5.2.21.

Ahora aplicamos el balance de masa con los flujos másicos corregidos para obtener la condición:

$$\sum_{l=e,w,s,n} \dot{m}_l = 0 \quad (5.2.23)$$

que utilizaremos para obtener la corrección de la presión (p') que tiene la forma:

$$A_P^p \cdot p'_P + A_W^p \cdot p'_W + A_E^p \cdot p'_E + A_S^p \cdot p'_S + A_N^p \cdot p'_N + A_B^p \cdot p'_B + A_T^p \cdot p'_T = Q_P^p \quad (5.2.24)$$

En cada paso temporal se resuelven en forma sucesiva y alternada, las ecuaciones 5.2.6 para cada componente del campo de velocidades y la ecuación 5.2.24 para la corrección de la presión. De esta manera el sistema de ecuaciones no lineales acopladas 5.1.1 y 5.1.2 es aproximado por una sucesión de sistemas de ecuaciones lineales (figura 5.4) donde en cada bloque se realizan iteraciones que llamaremos internas en contraposición a las iteraciones externas que son las necesarias para que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones 5.2.24, 5.1.1 y 5.1.2 en un paso temporal.

5.2.3 Condiciones de Borde

Aquí vamos a ver que tratamiento le realizaremos a las condiciones de borde. La imposición de éstas se logra mediante un tratamiento diferenciado de los

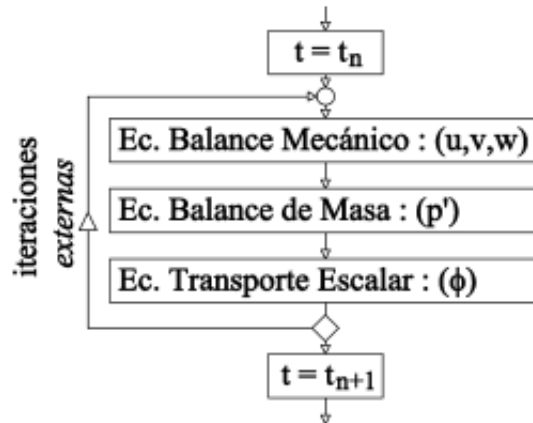


Figura 5.4: Esquema del proceso iterativo para un paso temporal (adaptado de [29])

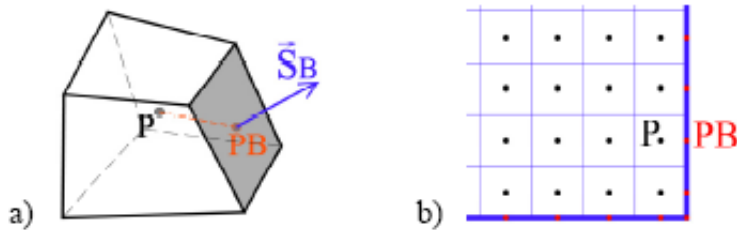


Figura 5.5: a)Elemento de frontera. b) Detalle de la malla en la frontera

términos de flujo en la discretización de las ecuaciones 5.1.1 y 5.1.2 cuando tratamos elementos de frontera como los de la figura 5.5. El esquema de vecinos P-E se sustituye por el esquema P-PB representado en la figura 5.5a). Los PB son puntos adicionales que contiene la malla en los centros de caras de frontera (figura 5.5b)). Podemos tener dos tipos de condiciones de borde, de Dirichlet donde tenemos el valor de la variable en la frontera u_{PB} o de Neumann, teniendo en este caso, el valor de la derivada normal en el punto de frontera $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{PB}$. Es importante que cuando trabajemos derivadas en donde están involucrados puntos de la frontera apliquemos métodos que involucren puntos internos de las moléculas de cálculo, evitando introducir incógnitas.

5.2.4 Bloques e interfaces

Dentro de todas las posibilidades que ofrece el modelo elegiremos trabajar con bloques cuyas interfaces se relacionen 'una-a-una'. Explicaremos aquí como tratar esas interfaces. Consideremos dos bloques (figura 5.6a)), el punto P

corresponde al bloque 1 y el R al bloque 2. Al momento de calcular los términos de flujo, el esquema de la celda centrada en P ya no se corresponde con el esquema mostrado en la figura 5.3 y debe ser sustituido por el esquema de la figura 5.6b). Este cambio se ve reflejado en la estructura del sistema de

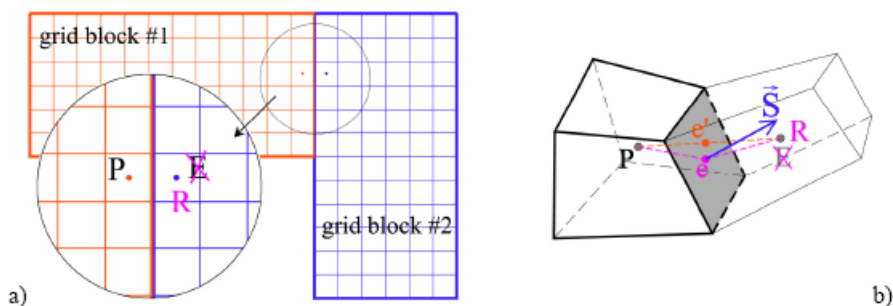


Figura 5.6: a) Esquema de interfaz 'una-a-una'. b) Sustitución del vecino E por un vecino R

ecuaciones lineales, en la ecuación 5.2.6 se reemplaza el término $A_E^u \cdot u_E$ que corresponde al vecino 'estructurado' E por el término $A_R^u \cdot u_R$ correspondiente al nuevo vecino 'no estructurado' R obteniéndose la ecuación

$$A_P^u \cdot u_P + A_W^u \cdot u_W + A_R^u \cdot u_R + A_S^u \cdot u_S + A_N^u \cdot u_N + A_B^u \cdot u_B + A_T^u \cdot u_T = Q_P^u \quad (5.2.25)$$

Un tratamiento equivalente es el que realizamos cuando necesitamos escribir el sistema lineal en el punto R del bloque 2, en este caso sustituiremos el término $A_W^u \cdot u_W$ por $A_L^u \cdot u_L$.

Debido a estos cambios la matriz de coeficientes A^u es heptagonal por bloques (figura 5.6b)) conteniendo coeficientes no estructurados de acoplamiento de bloques. Los nodos correspondientes a celdas de interface no son tratados

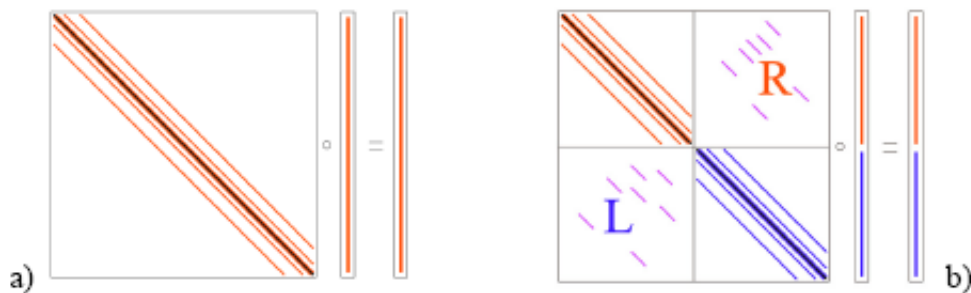


Figura 5.7: Representación gráfica del sistema de ecuaciones linealizado a) Un bloque con malla estructurada, matriz heptagonal. b) Dos bloques estructurados, matriz heptagonal por bloques

como condiciones de borde de la malla global, son tratados como nodos internos con información no estructurada sobre sus vecinos, el tratamiento de éstos puntos es básicamente implícito.

5.3 Aplicación del modelo numérico

La aplicación que se considera en esta tesis es el estudio del rompimiento de vórtice con el objetivo de comparar los resultados numérico con los datos experimentales obtenidos. Para ello se estudiaron dos situaciones diferentes, el cilindro con y sin vástagos y las mismas relaciones de aspecto que las utilizadas en la parte experimental. Los resultados numéricos nos permitieron observar líneas de corriente, momento angular, vorticidad, energía, y de esta forma comparar con resultados obtenidos con modelos axisimétricos.

5.4 La malla

Trabajamos con dos clases de mallas, una malla estructurada, compuesta de un único bloque y la otra no estructurada compuesta de dos bloques. Cuando trabajamos con mallas estructuradas, cubrimos nuestro dominio (cilindro) utilizando un bloque rectangular 'doblado', generando así un anillo, como se muestra esquemáticamente en la figura 5.8. La representación gráfica de la

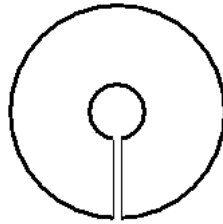


Figura 5.8: Diagrama de la malla, rectángulo 'doblado'

malla estructurada que diseñamos para la simulación numérica es la mostrada en la figura 5.9. Esta malla excluye siempre la región que contiene al eje del cilindro. Una vez definida la forma de la malla nos concentramos en estudiar el comportamiento del sistema para diferentes valores del número de Re para la relación de aspecto $H/R=2,5$. Con el propósito de determinar el grado de refinamiento de malla necesario para lograr un ajuste adecuado de los cálculos numéricos con los resultados experimentales, se realizaron simulaciones para tres diferentes grados de refinamiento. Trabajamos con mallas de $72 \times 40 \times 100$ (malla gruesa), $108 \times 60 \times 150$ (malla media) y $144 \times 80 \times 200$ (malla fina) puntos. La figura 5.10 se muestra la componente vertical la de velocidad w en función de la altura en el eje del cilindro para $H/R=2.5$ con un vástago de 1mm de radio. En ella se puede distinguir la diferencias existentes entre las tres mallas con las que trabajamos. Se puede ver que la malla fina posee la menor difusión numérica para los valores de Re elegidos. A partir de las comparaciones de los resultados obtenidos en cada malla, decidimos realizar las

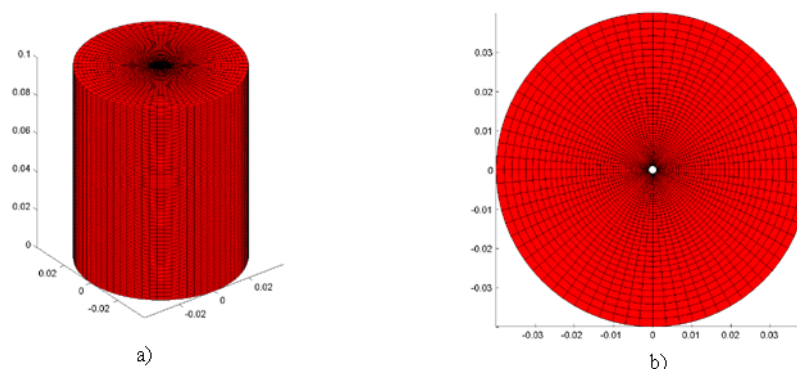


Figura 5.9: a) Dominio de trabajo (malla gruesa), b) Corte transversal

simulaciones en la malla fina para todos los casos a estudiar, esta decisión se basa en que en la malla fina trabajando para Re altos las predicciones numéricas ajustan (con un 5%) los comportamientos presentados en la figura 2.1 al menos para $H/R=2,5$. Para los valores de Re en los que se encuentran dos burbujas para $H/R=2,0$ (figura 2.1), nuestras simulaciones encuentran una sola burbuja.

En una primera instancia modelamos el cilindro sin vástago mediante la malla estructurada para el vástago de $1mm$. La diferencia entre las mallas donde se consideran los vástagos de $1mm$ y aquellas en las que se considera que no existe vástago es la elección de las condiciones de borde en la cara interna del anillo. En la primera situación planteamos condiciones de adherencia (el campo de velocidades es nulo en esa cara) mientras que para la segunda imponemos condiciones de deslizamiento (componente normal de la tensión razante nula).

Finalmente, luego de varias instancias de discusión, se nos planteó la necesidad de mejorar las simulaciones para obtener un mejor ajuste con los datos experimentales (figura 2.1) para todas las relaciones de aspecto. Necesitábamos una mejor estimación de la velocidad cerca del eje del cilindro y cerca de la pared interior en el caso de los vástagos. Esto fue resuelto de maneras diferentes, en el caso del cilindro sin vástago concluimos que era necesario utilizar otro tipo de malla, así que recurrimos a la utilización de mallas no estructuradas.

En el trabajo con mallas no estructuradas, cubrimos completamente el dominio con dos bloques siendo uno de ellos un prisma de base cuadrada de $5mm$ de lado ($18 \times 18 \times 100$ puntos) ubicado en el eje del cilindro y el otro un prisma deformado de manera tal de generar un anillo cuyo radio interno sea cuadrado como se muestra en la figura 5.11 ($72 \times 30 \times 100$ puntos). Luego de comparar los resultados obtenidos con ésta malla concluimos que era necesario un mayor refinamiento. Por lo que realizamos nuevos cálculos con una malla $36 \times 36 \times 200$ puntos para el bloque de base cuadrada (se mantiene el tamaño del lado) y de $144 \times 80 \times 200$ puntos para el anillo deformado.

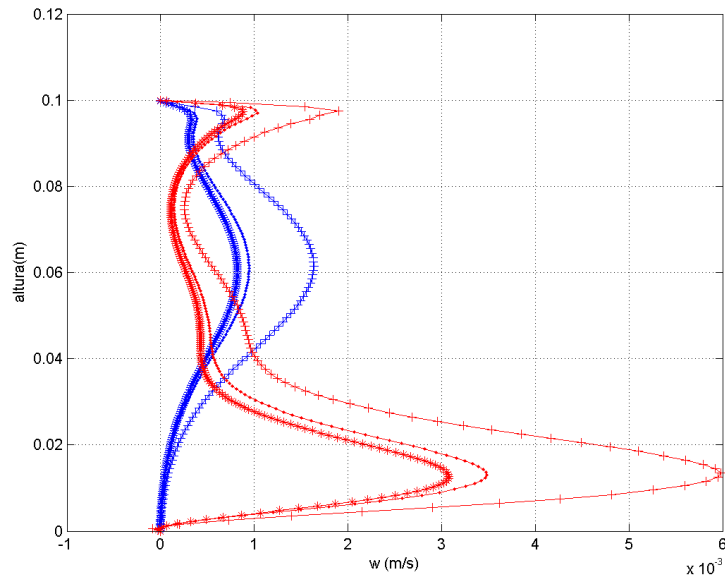


Figura 5.10: Velocidad vertical en función de la altura $Re = 600$ (azul) y $Re = 1600$ (rojo) malla gruesa (cruces), malla media (puntos), malla fina (asteriscos)

Para las situaciones que consideran vástagos cilíndricos utilizamos el mismo estilo de malla (anillo) pero generamos mayor refinamiento de la malla en las caras del dominio. Esto lo hicimos modificando los coeficientes de expansión de las celdas. Las celdas de la cara interna del anillo son pequeñas (0.01 cm), luego se expanden hasta la mitad del radio para luego contraerse hasta llegar a la pared (0.02 cm). En la dirección vertical también variamos los coeficientes de manera similar, celdas pequeñas en la tapa superior (0.018 cm), expansión hasta la mitad de la altura y luego contracción (0.018 cm). En el cuadro 5.1 se resumen los coeficientes en la dirección vertical para los distintos valores de la relación de aspecto y en el cuadro 5.2 se resumen los valores de los coeficientes en la dirección radial con respecto al radio de cada uno de los vástagos.

H/R	Coefficiente vertical
1.5	1.00960231 - 0.99048986
2	1.0145166 - 0.9856917
2.5	1.0192485 - 0.979102

Cuadro 5.1: Coeficientes de expansión y contracción para las dirección vertical

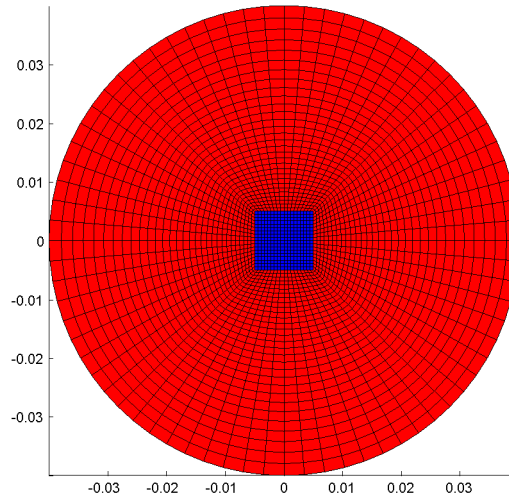


Figura 5.11: Corte transversal de la malla no estructurada de dos bloques

Vástago	Coefficientes radiales
1 mm	1.04 - 0.964288
2.5 mm	1.04 - 0.958839
5 mm	1.04 - 0.948459
10 mm	1.02 - 0.96859

Cuadro 5.2: Coeficientes de expansión y contracción para las dirección radial

5.5 Condiciones iniciales y estado estacionario

Todos los cálculos se realizaron a partir de una condición inicial de reposo y hasta la obtención del flujo estacionario al cabo de 500 iteraciones temporales. Para asegurarnos que el flujo estaba efectivamente en estado estacionario estudiamos la dependencia de una de las componentes de la velocidad, elegimos la velocidad vertical w , en función del tiempo tanto para las mallas estructuradas como para las no estructuradas. En la figura 5.12 vemos los resultados para un $H/R= 2,5$ considerando el valor máximo de la velocidad vertical en el punto que se encuentra a $0,012m$ de la tapa inferior del cilindro. La figura 5.12 son resultados para el cilindro con un vástago de $1mm$ de radio en la malla media para $Re = 1600$ mientras que la figura 5.13 es para el cilindro sin vástago en una malla de dos bloques para $Re = 1950$. A partir de la figura 5.12 podemos concluir que las iteraciones realizadas fueron suficientes para obtención del estado estacionario en los distintos tipos de malla con los que trabajamos.

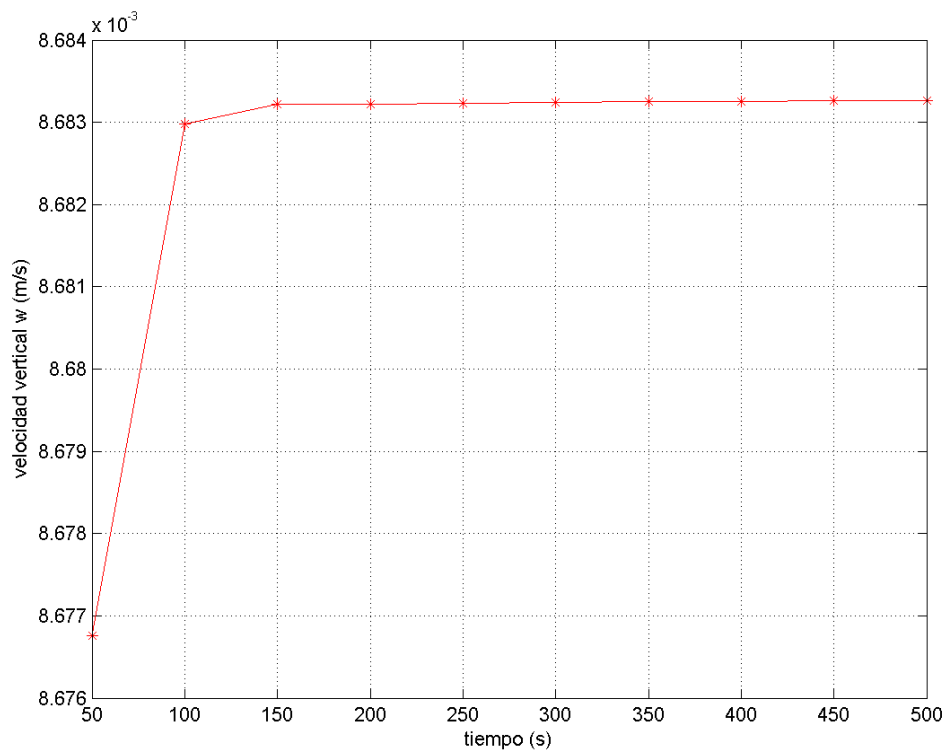


Figura 5.12: Máximo de la velocidad vertical en función del tiempo, malla estructurada con refinamiento medio, $Re = 1600$

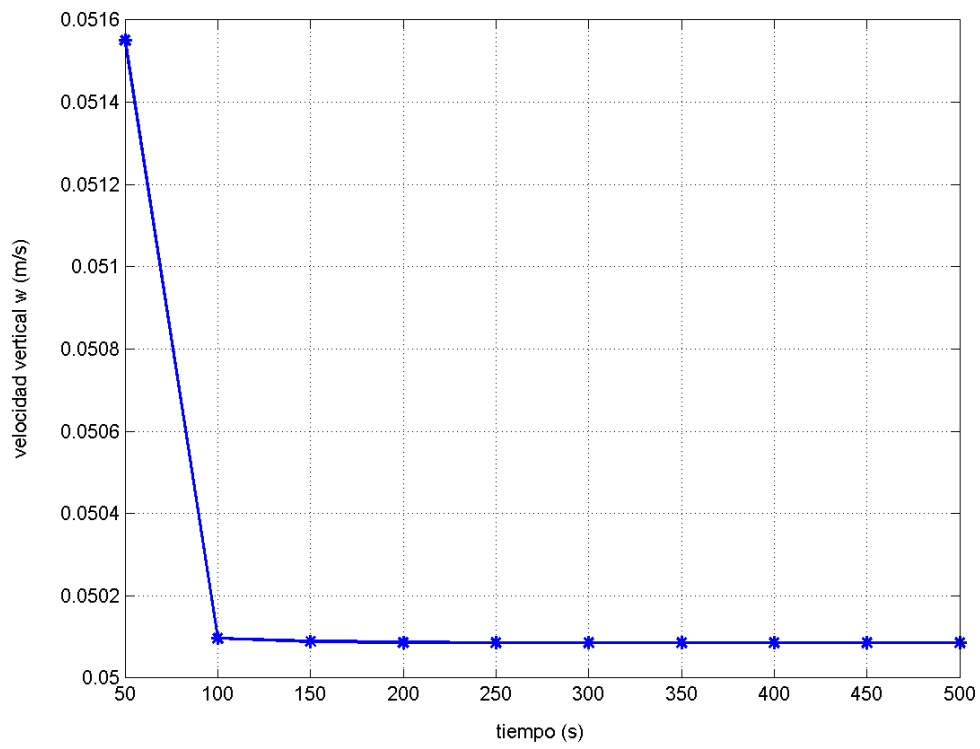


Figura 5.13: Máximo de la velocidad vertical en función del tiempo, malla no estructurada refinamiento grueso, $Re = 1600$

Capítulo 6

Configuración Clásica: Resultados

En este capítulo se presentan los resultados tanto experimentales como numéricos obtenidos en este trabajo de tesis para lo que hemos denominado configuración clásica. La importancia de estos resultados radica en el hecho de que existe una amplia bibliografía en este tema y hay disponibles resultados tanto experimentales como numéricos que cuentan con un amplio consenso en la comunidad académica mundial. De esta forma se utilizarán como resultados de referencia para validar las técnicas tanto experimentales como numéricas que han sido implementadas.

A fin de facilitar la comprensión de los resultados se hará a continuación una breve descripción cualitativa de la evolución del sistema a medida que se aumenta el parámetro de control, el número de Reynolds.

El fluido en el interior del cilindro es impulsado por la tapa rotante hacia la periferia, en un movimiento espiral donde las componentes acimutales y radiales son no nulas. Además, la conservación de la masa impone que exista también una recirculación axial y radial: el fluido se mueve desde las cercanías de la tapa rotante hacia la zona de la tapa fija. En esta última zona se mueve radialmente desde la periferia hasta el centro. Cuando llega al centro continúa moviéndose por el eje de simetría hasta llegar a la tapa rotante. El fluido impulsado hacia el eje de simetría aumenta su velocidad angular, para asegurar así la conservación del momento angular, lo que provoca un vórtice sobre el eje.

A bajos número de Reynolds, es decir baja velocidad de giro de la tapa superior del cilindro, el sistema presenta un comportamiento laminar. Este comportamiento se presenta para todas las relaciones de aspecto que han sido analizadas en este trabajo. En este régimen, el movimiento en el fluido se encuentra ordenado de manera que se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse. En la figura 6.1 se pueden observar imágenes típicas obtenidas en el laboratorio mediante la inyección de tinta. Si se aumenta el número de Reynolds, para ciertas combinaciones de $\Gamma = H/R$ y Re se produce el rompimiento del vórtice, surgiendo un punto de estancamiento seguido de una

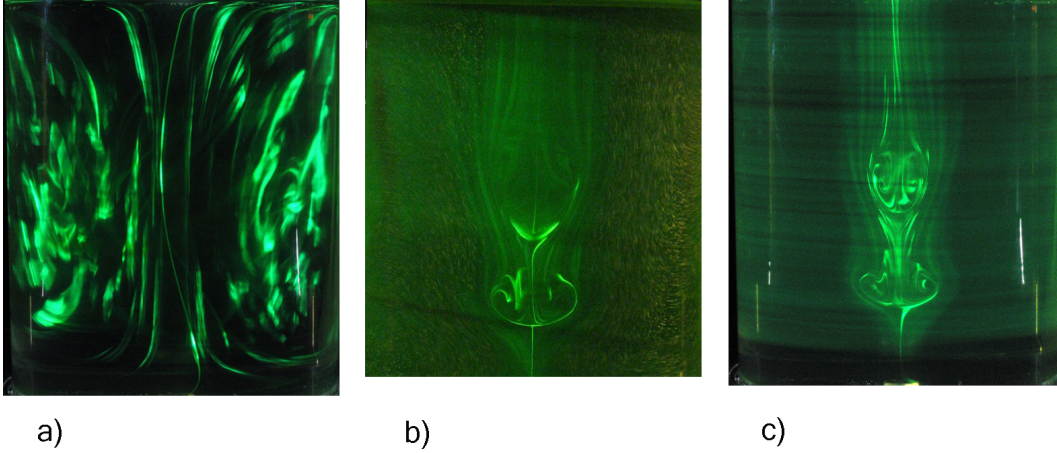


Figura 6.1: Imágenes del flujo para $H/R=1,5$, a) Régimen laminar, b) Una burbuja de recirculación, c) Dos burbujas de recirculación

zona de recirculación de amplitud limitada. A esta zona de recirculación la llamaremos 'burbuja'. La presencia de un punto de estancamiento se traduce en un valor nulo de la velocidad vertical en el eje del cilindro y la zona de recirculación será aquella que posea velocidades verticales negativas. Luego de la zona de recirculación la velocidad vertical vuelve a ser positiva. Hemos observado en plena concordancia con los resultados obtenidos por Escudier [6], que para valores de $\Gamma < 1$ no se produce el rompimiento de vórtice. Para valores de Reynolds altos, es posible observar la formación de un segundo punto de estancamiento, ubicado por encima del primero, y la aparición de una segunda 'burbuja'. Esto ocurre para valores de $\Gamma \geq 2$. Incluso, es posible generar una tercera burbuja, para $\Gamma > 3$. Para Reynolds muy altos, $Re > 2500$ se rompe la simetría axial y el sistema deja de ser estacionario.

En las figuras 6.2, 6.3, 6.4 se muestran algunas imágenes obtenidas mediante el sembrado de partículas en el flujo, correspondientes a las diferentes situaciones que se han descrito anteriormente con $Re = 563$, $Re = 1072$ y $Re_c = 2015$. $Re_c = 2015$.

Uno de los aspectos críticos en el estudio de la dinámica de este sistema es la determinación precisa del número de Reynolds para el cual se produce el punto de estancamiento. Para ello se analizó la velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura. Cuando se produce el punto de estancamiento, esta velocidad debe presentar un valor nulo en el eje. Al incrementar levemente la velocidad de giro de la tapa, debe observarse que la velocidad vertical en el eje presenta valores negativos, lo que indica que se ha producido una inversión en la circulación del flujo. Este ha sido el criterio utilizado para la determinación del Re_c para el cual surge la primera burbuja, tanto desde el punto de vista experimental como numérico.

A fin de realizar un análisis exhaustivo del comportamiento del sistema, como

Re= 563

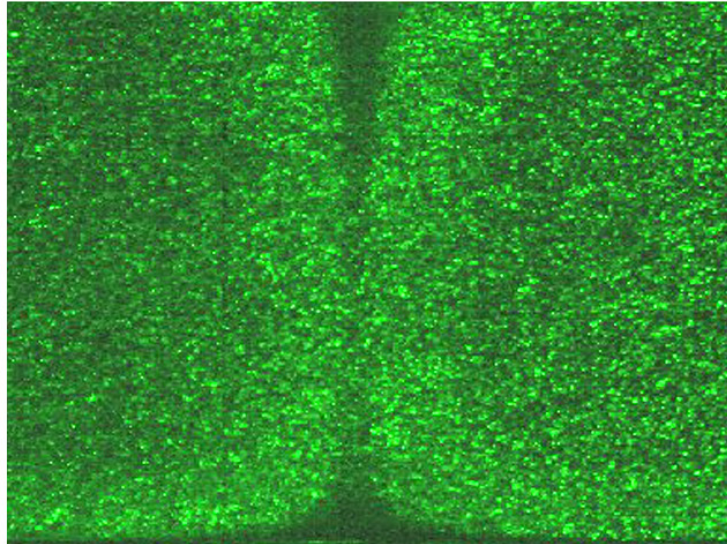


Figura 6.2: Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Flujo laminar. $H/R=1,5$

Re=1072

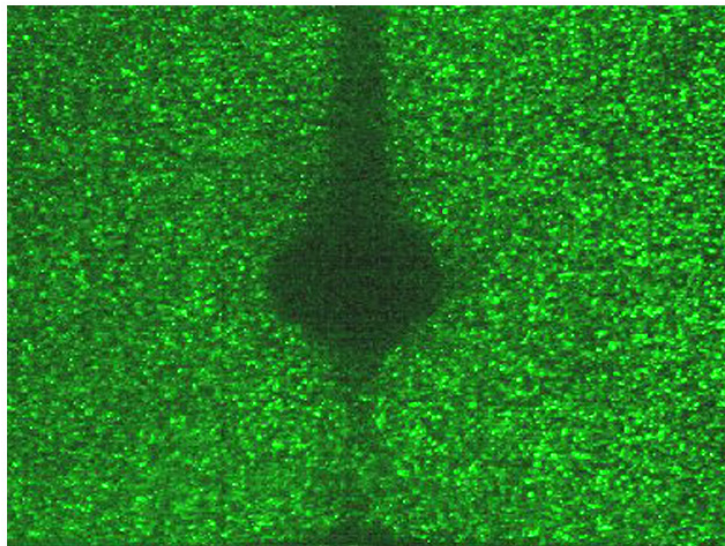


Figura 6.3: Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Aparición de la primera burbuja. $H/R=1,5$

Re=2015

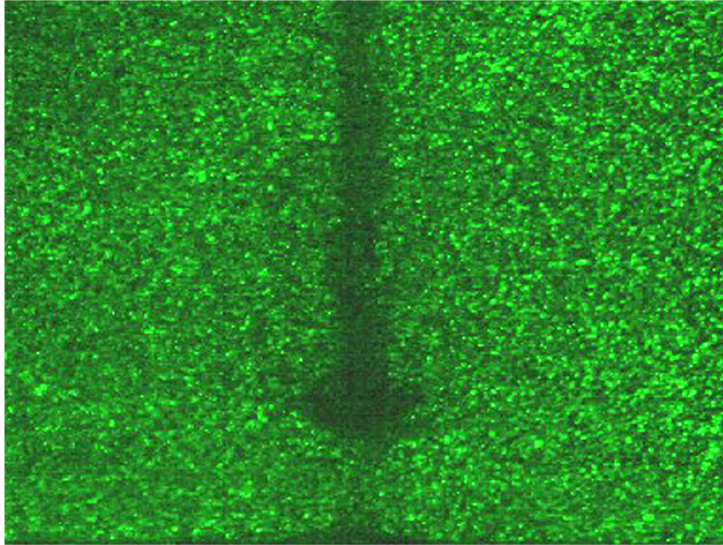


Figura 6.4: Imágenes representativas sobre las cuales se aplicaron los algoritmos de PIV. Primera burbuja en régimen oscilatorio. $H/R=1,5$

ya se dijo en la sección 4.1 se realizaron dos implementaciones de la técnica de PIV. Por un lado se trabajó iluminando un plano vertical, lo que permite obtener las componentes radial y vertical de la velocidad. Para obtener la componente acimutal se iluminó el sistema con un plano horizontal. Los resultados son presentados siguiendo esta división.

Otro detalle importante que es necesario resaltar es que para la mejor determinación del Re crítico se trabajó con imágenes focalizadas en la región donde se producirá la recirculación. De esta manera se puede tener una mayor precisión en el cálculo de la velocidad vertical y en la 'búsqueda' del cambio de signo. En las figuras 6.5, 6.6, 6.7 se muestran imágenes típicas que se utilizaron para la determinación del campo de velocidades y la velocidad vertical en el eje. Se observa la imagen de la zona de recirculación para cada valor de Γ cuando el número de Reynolds toma su valor crítico.

6.1 Visualización en el plano vertical

Los resultados experimentales que se presentarán a continuación fueron obtenidos con un montaje experimental, como se muestra en la figura 4.1, donde el sistema es iluminado con un plano vertical.

Este montaje experimental nos permitió obtener imágenes a partir de las cuales obtuvimos dos de las componentes del campo de velocidades: la veloci-

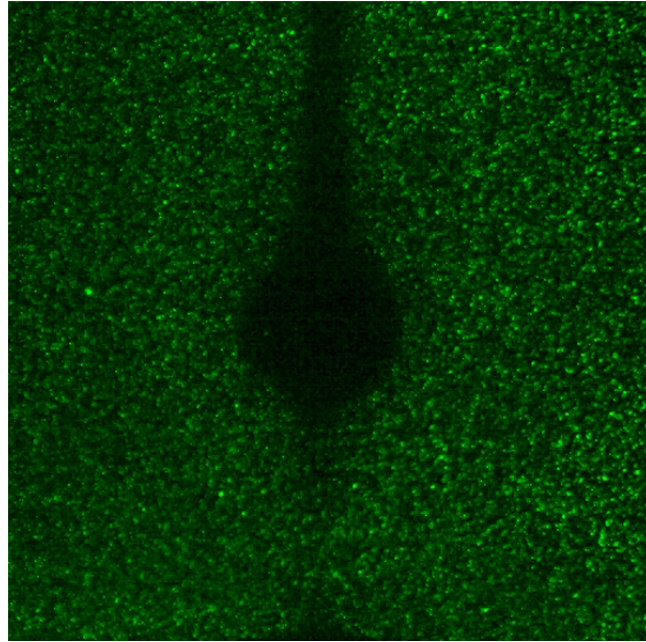


Figura 6.5: Imágenes del flujo para $H/R = 1,5$ con $Re_c = 1098$.

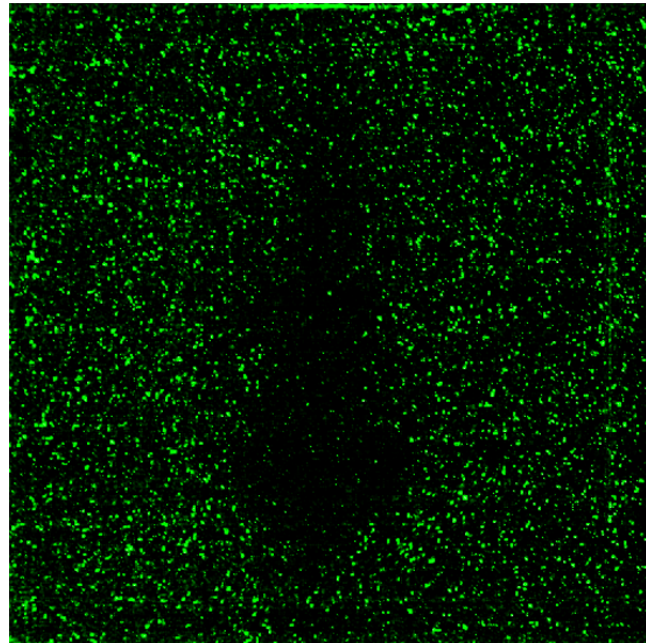


Figura 6.6: Imágenes del flujo para $H/R = 2,0$ con $Re_c = 1474$.

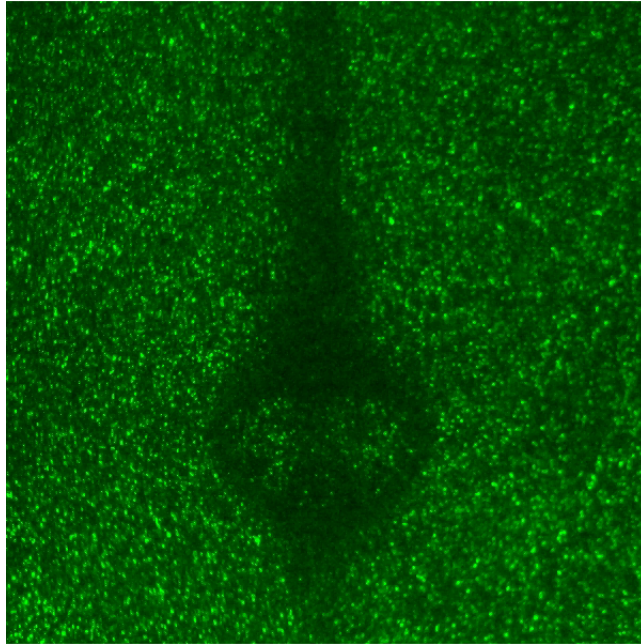


Figura 6.7: Imágenes del flujo para $H/R = 2,5$ con $Re_c = 1973$.

dad vertical y la radial.

6.1.1 Relación de Aspecto $H/R = 1,5$

Para esta configuración podemos observar que el sistema presenta tres diferentes regímenes, flujo laminar (figura 6.2), una burbuja de recirculación (figura 6.3) y régimen oscilatorio de la burbuja (figura 6.4).

Estas son imágenes típicas que fueron utilizadas para aplicar los algoritmos de PIV. La imagen de la izquierda corresponde al régimen laminar, para $Re_c = 563$. La formación de la primera burbuja se observa para un $Re_c = 1098$, imagen central. La imagen de la derecha corresponde a la burbuja en régimen inestable,

En la figura 6.8 se muestran los campos de velocidades para el régimen laminar y para la aparición de la primera burbuja obtenidos experimentalmente. Para el $H/R = 1,5$ no se produce un segundo punto de estancamiento. Lo que se observa es que la primera burbuja comienza a oscilar hasta romperse a medida que aumenta el número de Reynolds. En la figura de la derecha puede verse que las velocidades en el centro de la burbuja son mucho menores que en la periferia. En la figura 6.9, se presentan los resultados de la velocidad vertical en el eje para la misma situación analizada anteriormente. En la figura de la derecha puede verse que la velocidad presenta un valor negativo, lo que indica que se produjo el punto de estancamiento y comenzó la recirculación en la

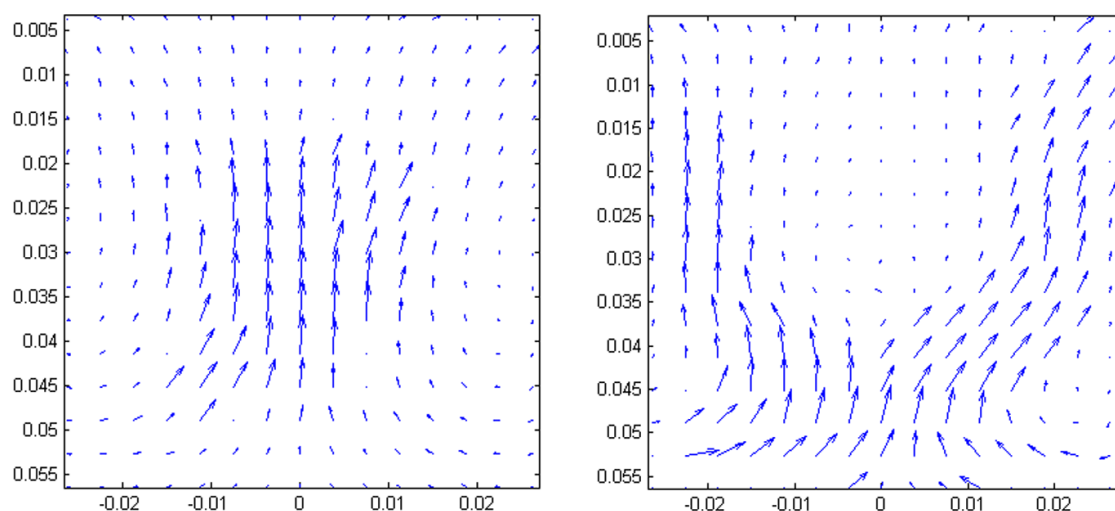


Figura 6.8: La imagen de la izquierda corresponde al campo de velocidad para el régimen laminar. La de la derecha corresponde al campo de velocidades para la primera burbuja.

región cercana al eje del cilindro. Este punto se encuentra a una distancia de $2,6\text{cm}$ de la base inferior. En la figura 6.10 se presenta las líneas de corriente y el perfil de velocidad vertical en el eje del cilindro obtenida numéricamente utilizando una malla de un solo bloque para la situación en la cual aparece la primera burbuja. Corresponden a un $Re = 1120$. En la figura 6.10a) puede verse que el punto de estancamiento, correspondiente a $v_z = 0$, está situado a la misma altura que para los datos experimentales. En la figura 6.10b), se ve claramente el ensanchamiento de las líneas de corriente en la región donde aparece la primera burbuja.

6.1.2 Relación de Aspecto $H/R = 2,0$

Para $H/R = 2,0$ se observaron tres regímenes distintos: laminar, formación de una burbuja, para un $Re_c = 1474$, y formación de la segunda burbuja se observa para un $Re_c = 1989$.

En la Figura 6.11 se presenta el campo de velocidades para los tres regímenes observados. Para el régimen laminar, figura de la izquierda, puede verse que en la zona del eje del cilindro las velocidades del flujo son mucho mayores que en la región cercana a las paredes. Por el contrario, en el régimen para el cual hay una o dos burbujas, la velocidad es casi nula en la zona axial.

En la figura de la derecha se presentan dificultades para observar la existencia del segundo punto de estancamiento, sin embargo, al calcular el perfil de velocidades realizando un promedio sobre varios frames, se obtuvieron resultados satisfactorios. Se presentan los resultados obtenidos para la velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura, en los tres regímenes

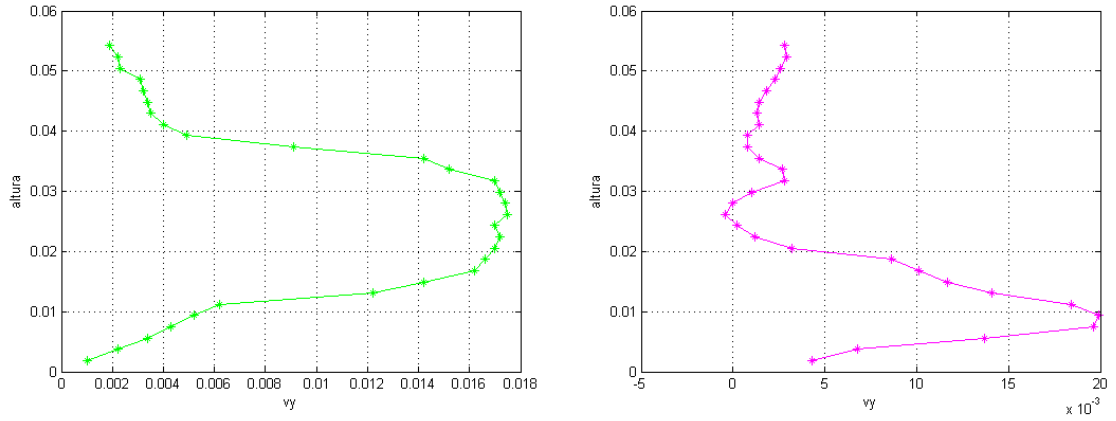


Figura 6.9: Velocidad vertical en función de la altura, $H/R=1,5$

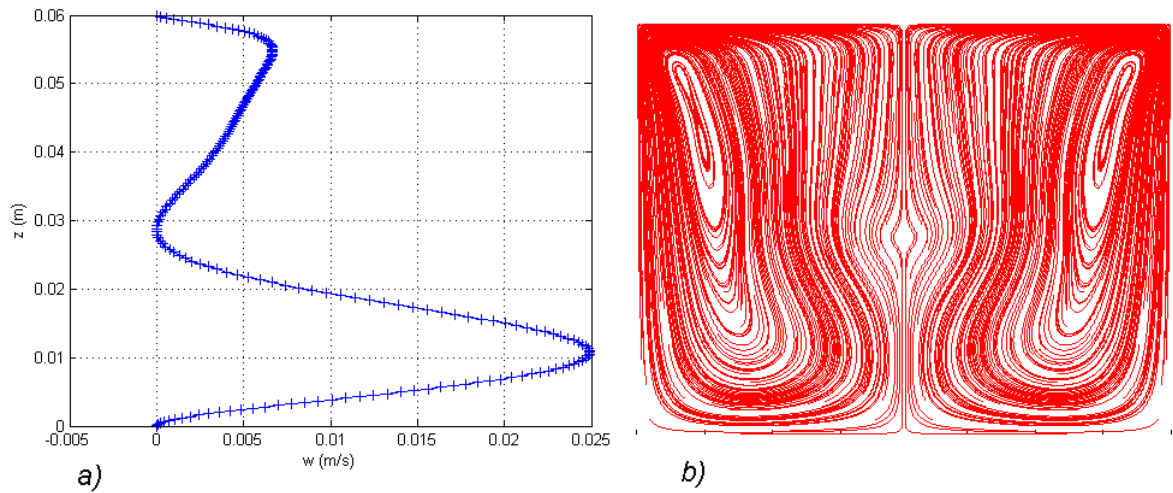


Figura 6.10: Formación de la primera burbuja) Velocidad vertical en función de la altura, b) Líneas de corriente, $H/R=1,5$

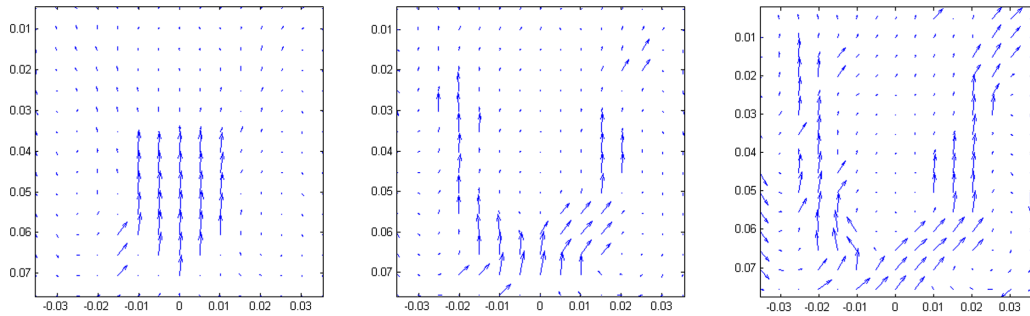


Figura 6.11: La imagen de la izquierda corresponde al campo de velocidad para el régimen laminar. La central corresponde al campo de velocidades para la primera burbuja. La figura de la derecha corresponde a la formación de la segunda burbuja. $H/R=2,0$

observados. Para el flujo laminar (figura 6.12) puede verse que la velocidad es siempre positiva. Esta figura corresponde a un $Re = 996$. La aparición de la primera burbuja se observa para un $Re_c = 1474$ (figura 6.13). Puede verse claramente que la velocidad presenta un único cambio de signo, lo que indica que solo hay un punto de estancamiento. La segunda burbuja aparece a un $Re_c = 1989$ (figura 6.14) y se puede observar que la velocidad presenta dos cambios de signos, Figura de la derecha, lo que está indicando un segundo punto de estancamiento. Para esta relación de aspecto se mostrarán en de-

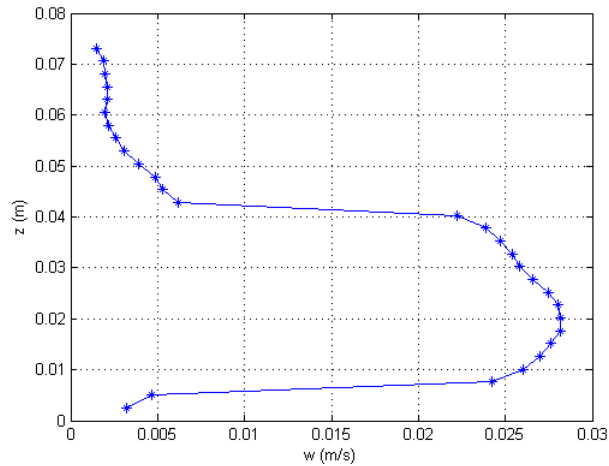


Figura 6.12: Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para el régimen de flujo laminar. $H/R = 2,0$

talle los resultados numéricos obtenidos correspondientes a la formación de la primera burbuja.

El modelo numérico nos permite obtener las tres componentes del campo

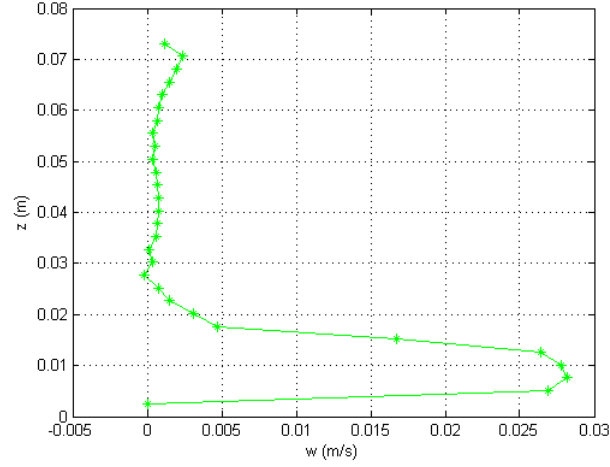


Figura 6.13: Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para la aparición de la primera burbuja.

de velocidades (u_r, u_θ, w) y sus derivadas. Los cambios de signo de la velocidad vertical w en la región cercana al eje nos brinda información sobre la aparición de zonas de recirculación (burbujas) que son una forma de determinación del rompimiento del vórtice. Por este motivo para los distintos casos, hemos simulado para varios valores de Reynolds el comportamiento de ésta componente de la velocidad. Otra característica es que al momento de realizar comparaciones con los resultados experimentales, ésta componente es la de mayor amplitud.

Para visualizar los resultados numéricos hemos graficado las líneas de corriente Ψ , el módulo del campo de velocidades, el momento angular $\Gamma = R \cdot u_\theta$ y la componente tangencial de la vorticidad $\eta_\theta = \eta_y \cos \theta - \eta_x \sin \theta$, la densidad de energía

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u_r^2 + u_\theta^2 + w^2)$$

y el perfil de velocidad vertical.

Las figuras 6.15 y 6.16 corresponden al régimen laminar, para valores del número de Reynolds muy cercanos a la aparición de la primera burbuja.

En la figura 6.15a) puede verse que hay un suave ensanchamiento de las líneas de corriente, pero aún no se ha formado la primera burbuja, debido a que la velocidad vertical es siempre positiva, 6.15b). En la figura 6.16 se han representado las cuatro magnitudes básicas para la caracterización del flujo: el módulo de la velocidad, el momento angular, la componente tangencial de la vorticidad y la densidad de energía. En ellas los niveles de los contornos están no uniformemente espaciados, con 20 niveles positivos y 20 negativos determinados por $nivel_{pos}(i) = Max(variable) \times (\frac{i}{20})^3$ y $nivel_{neg}(i) = Min(variable) \times (\frac{i}{20})^3$ [19]. Las líneas de corrientes en todos los casos están consideradas en el mismo

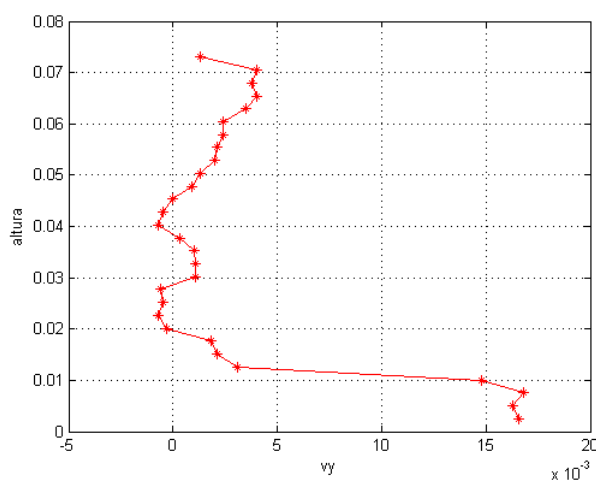


Figura 6.14: Velocidad vertical en el eje del cilindro en función de la altura para la aparición de la segunda burbuja.

plano meridiano de la malla.

Las figuras 6.17 y 6.18 corresponden al momento en que se forma la primera burbuja, para un $Re = 1474$.

En la figura 6.17 a) puede verse claramente en la deformación de las líneas de corriente indicando la presencia de la primera burbuja. En la figura 6.17 b) se observa que la velocidad vertical en el eje cambia de signo, lo que indica que se ha producido el punto de estancamiento. En las figura 6.18 se ha utilizado el mismo criterio que ya se mencionó para los niveles de los contornos. Si comparamos las figuras 6.16 y 6.18 presentan cambios sutiles ya que la diferencia entre los números de Re no es muy grandes en esta relación de aspecto. En la vorticidad se puede ver un aumento de la zona nula en la parte superior del sistema, para la situación en la cual hay burbuja. Estos resultados son consistentes con las soluciones que presenta López [19] quien trabaja con modelos numéricos axisimétricos y espectrales, por lo tanto no puede resolver situaciones no simétricas.

6.1.3 Relación de Aspecto $H/R = 2,5$

Para $H/R = 2,5$ se observaron tres regímenes distintos: laminar, formación de una burbuja para un $Re_c = 1935$. La segunda burbujas se observa para un $Re_c = 2000$. En esta configuración la primera burbuja y la segunda corresponden a números de Reynolds muy cercanos, lo que dificulta su observación. Para esta configuración se presentarán únicamente los curvas de la velocidad vertical en función de la altura, ya que los demás resultados son similares a los ya presentados y no aportan detalles novedosos, ver figuras 6.19, 6.20, 6.21.

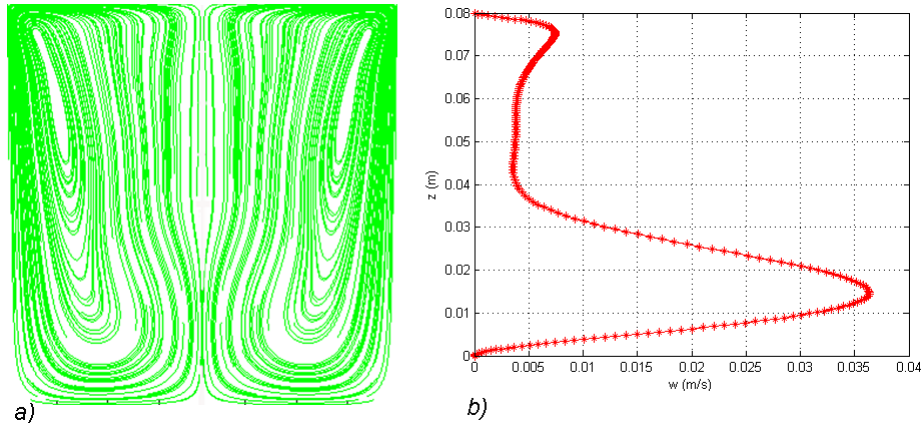


Figura 6.15: Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en función de la altura.

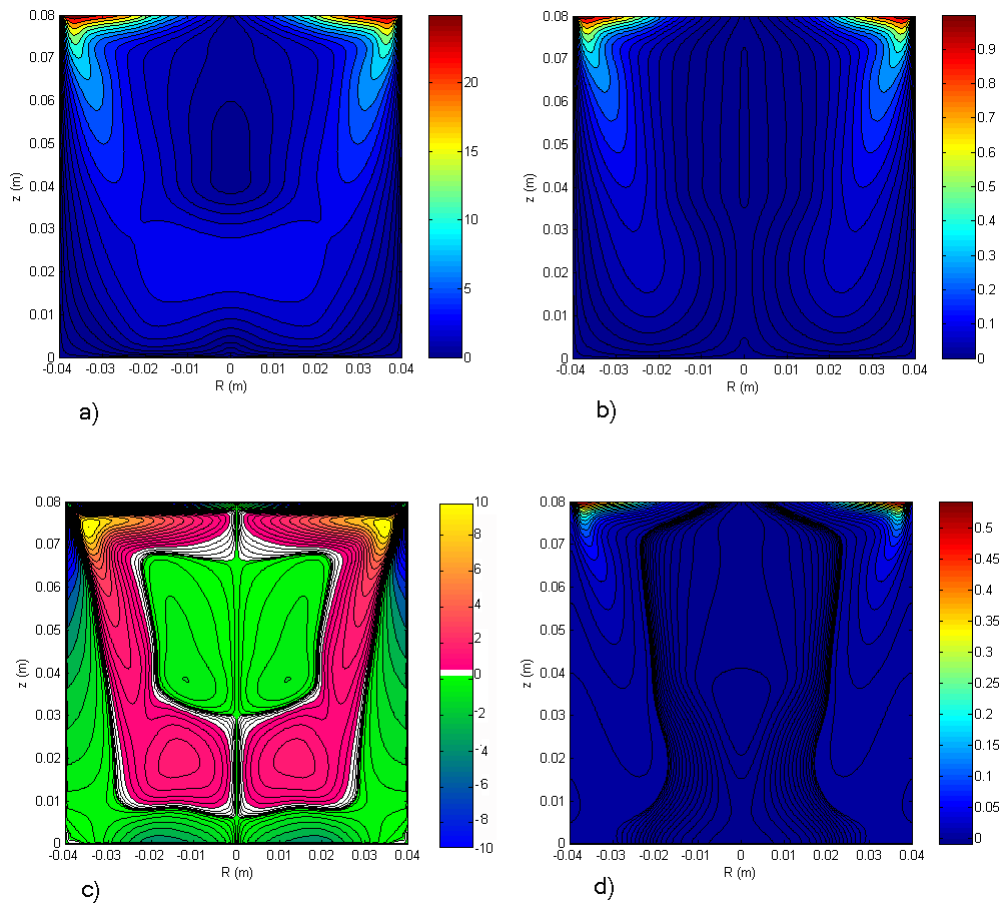


Figura 6.16: Flujo laminar sin burbuja, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía

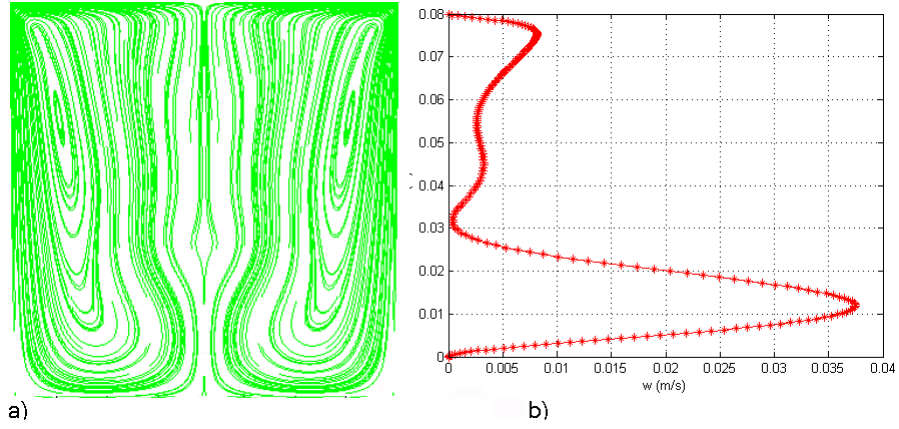


Figura 6.17: Nacimiento de la primera burbuja, $Re = 1474$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en función de la altura.

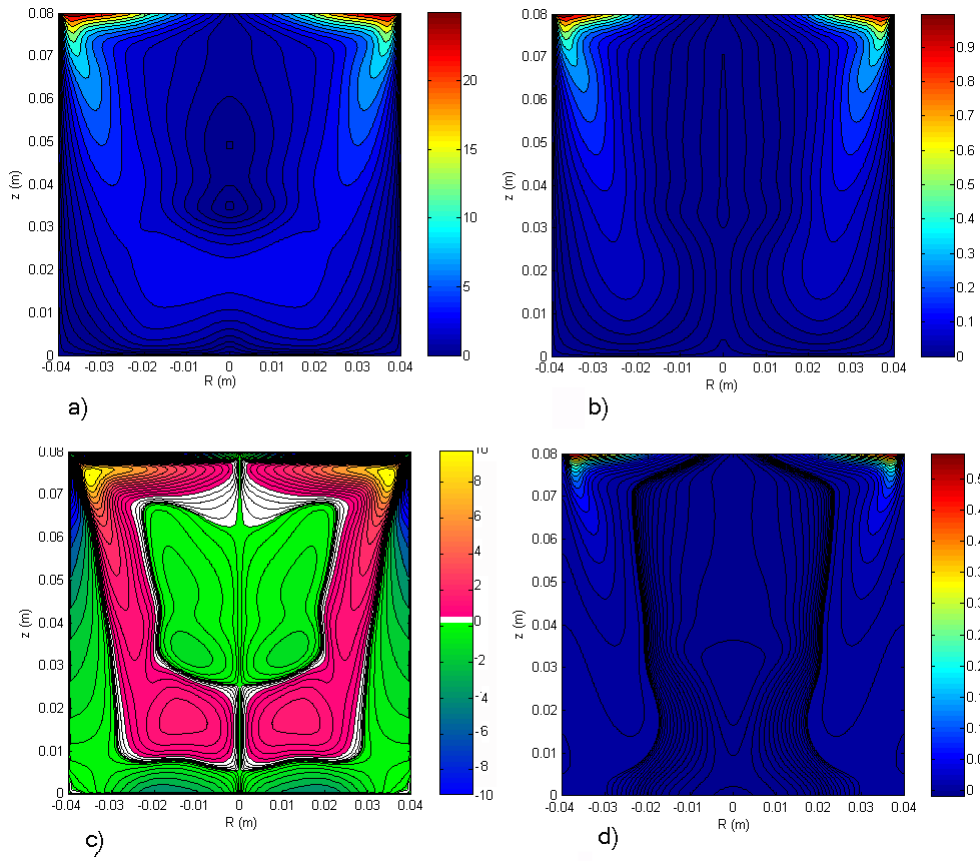


Figura 6.18: Nacimiento de la primera burbuja, $Re = 1474$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía

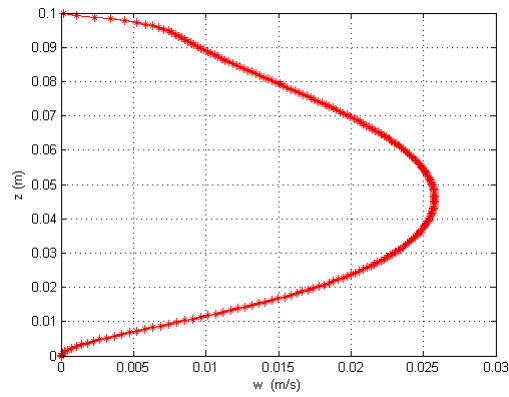


Figura 6.19: Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al regimen laminar, $H/R = 2,5$, $Re_c = 1000$.

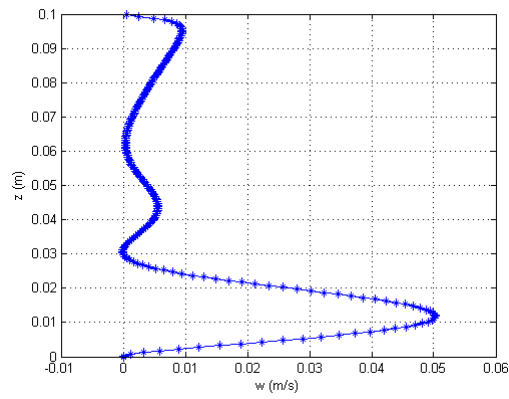


Figura 6.20: Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al nacimiento de la primera burbuja, $H/R = 2,5$, $Re_c = 1935$.

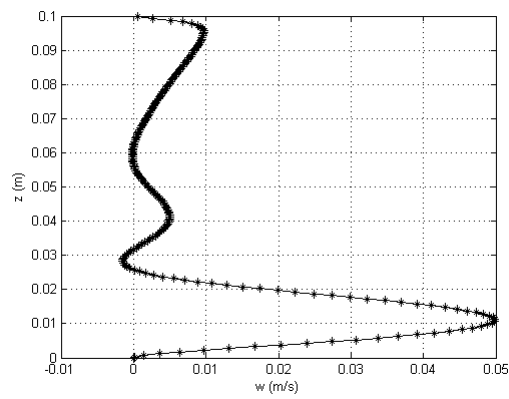


Figura 6.21: Velocidad vertical en el eje en función de la altura correspondiente al nacimiento de la segunda burbuja, $H/R = 2,5$, $Re_c = 2000$

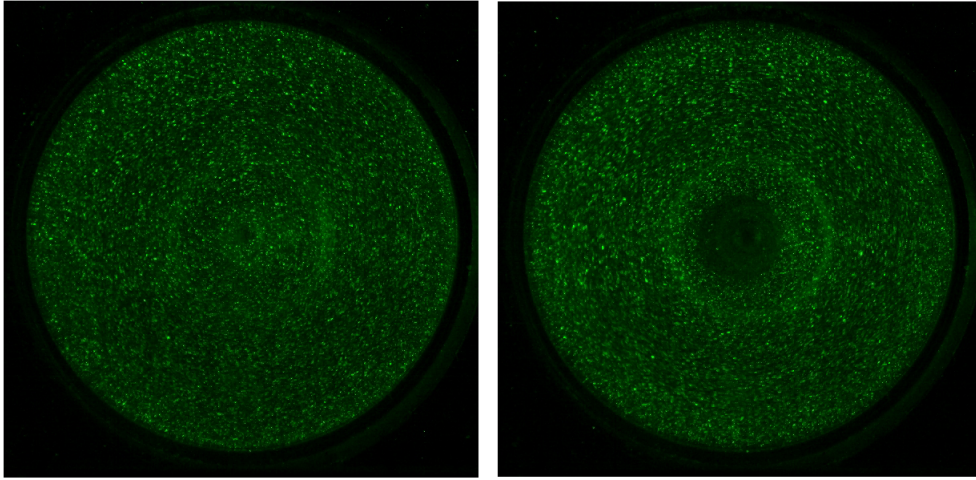


Figura 6.22: Imagen del plano horizontal para la configuración clásica, flujo laminar e inicio de la burbuja.

6.2 Visualización en el plano horizontal

En esta sección nos concentraremos en la visualización del sistema en el plano horizontal para diferentes configuraciones. Trabajar con un plano horizontal nos permite estudiar la componente acimutal del campo de velocidades. Para realizar mediciones en este plano se utilizó el sistema descrito en la sección 4.1, figura 4.2.

Todas las medidas se realizaron para un $H/R= 2,0$ y el plano de luz se ubicó en $z = 0,03m$ ya que esta relación de aspecto presenta la primera burbuja a esa altura para la configuración original, ver Figura 6.12.

En la figura 6.22 la imagen de la izquierda corresponde a un régimen de flujo laminar mientras que la imagen de la derecha corresponde a la aparición de la burbuja. La aparición de la burbuja se visualiza como un anillo oscuro concéntrico al eje del cilindro.

Podemos visualizar la burbuja en el plano horizontal mediante los contornos de velocidad vertical (figura 6.23), dichos contornos numéricos fueron obtenidos en la malla no estructurada a $z = 0,03$. Pueden verse tres regiones bien diferenciadas, velocidad positiva (líneas amarillas), velocidad nula (líneas magenta) y velocidad negativa (líneas azul), lo que nos está dando información de la región de la burbuja ya que la línea azul corresponde a la recirculación. Las líneas magenta corresponden al punto de estancamiento y las líneas amarillas al flujo que no se ve afectado por la recirculación.

La Figura 6.24 muestra resultados experimentales y numéricos de la componente tangencial de la velocidad en función del radio. La línea verde corres-

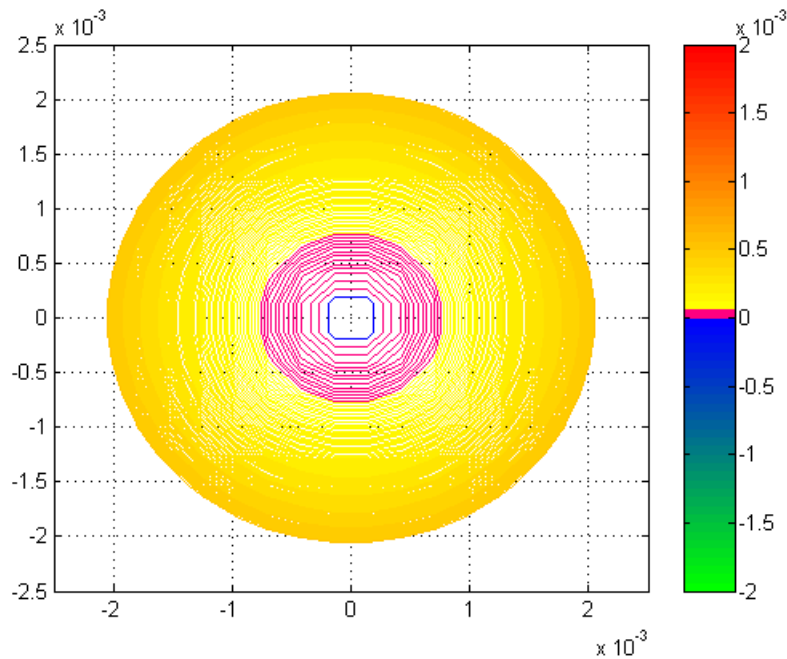


Figura 6.23: Ampliación de los contornos de velocidad vertical en la región del eje , $Re = 1474$, malla no estructurada

ponde al flujo laminar (experimental). Las líneas magenta y azul corresponden al momento de la formación de la burbuja (resultados experimentales y numéricos, respectivamente).

6.3 Resumen de los resultados obtenidos para visualización vertical

Numéricamente se obtuvieron resultados con mallas estructuradas (un bloque) y con mallas no estructuradas (dos bloques). Para poder decidir que tipo de malla es la más indicada para tratar la configuración clásica se debe analizar la Figura 6.25 en donde se comparan los resultados numéricos con los resultados obtenidos con PIV y los resultados obtenidos a partir de la figura 2.1. Los datos obtenidos a partir de las mallas no estructuradas poseen una diferencia con los datos experimentales obtenidos por Escudier [6] como máximo de un 2 % (para el $H/R=1,5$) mientras que los datos obtenidos con las mallas estructuradas poseen una diferencia máxima del 5 % (también para $H/R=1,5$). Es importante resaltar que un 5 % de error podría ser aceptable si no estuviéramos buscando un valor crítico en un lugar tan particular como es el eje del cilindro. Es decir, si nuestra intención fuera estudiar el flujo en otra zona, como por ejemplo, la mitad del radio, o si nos interesara estudiar el comportamiento de cualquiera

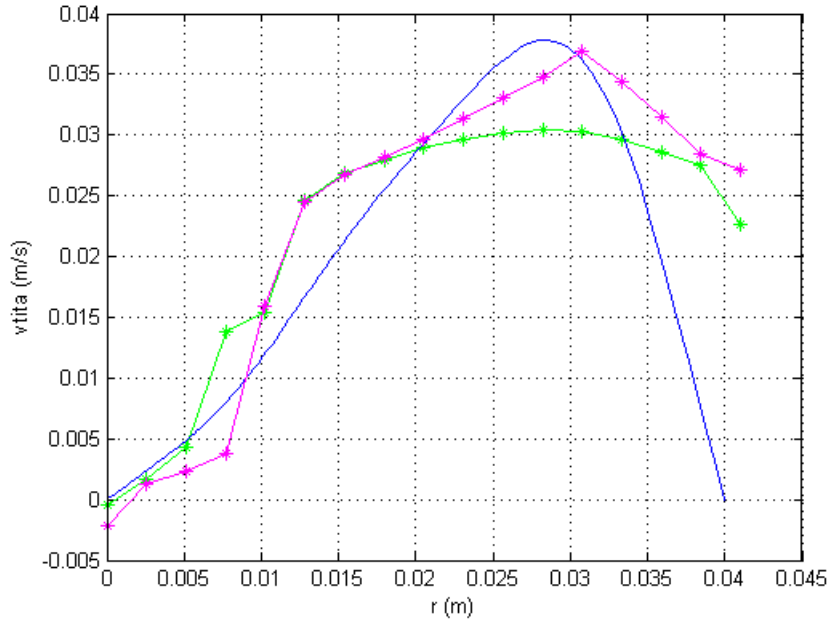


Figura 6.24: Velocidad angular en función del radio, plano horizontal

de las magnitudes dentro de las regiones donde se espera que exista una o dos burbujas (figura 2.1).

En el Cuadro 6.1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

H/R	Sin vástago (dos bloques)	Sin vástago (un bloque)	Experimentales PIV	Escudier
1.5	1095	1120	1098	1068
2	1474	1500	1474	1450
2.5	1935	1970	1973	1910

Cuadro 6.1: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja, resultados experimentales y numéricos

A partir de los resultados obtenidos experimental y numéricamente con cada una de las mallas elegidas podemos concluir que nuestros resultados ajustan de forma excelente los resultados presentados por Escudier [6] al obtener una diferencia máxima del 3% validando la implementación en nuestro laboratorio de la técnica PIV y validando además el código con el cual obtuvimos los resultados numéricos. Es importante recordar que los resultados presentados por Escudier no están exentos de error por ser datos experimentales y haber sido obtenidos mediante una técnica menos precisa que la utilizada en este trabajo.

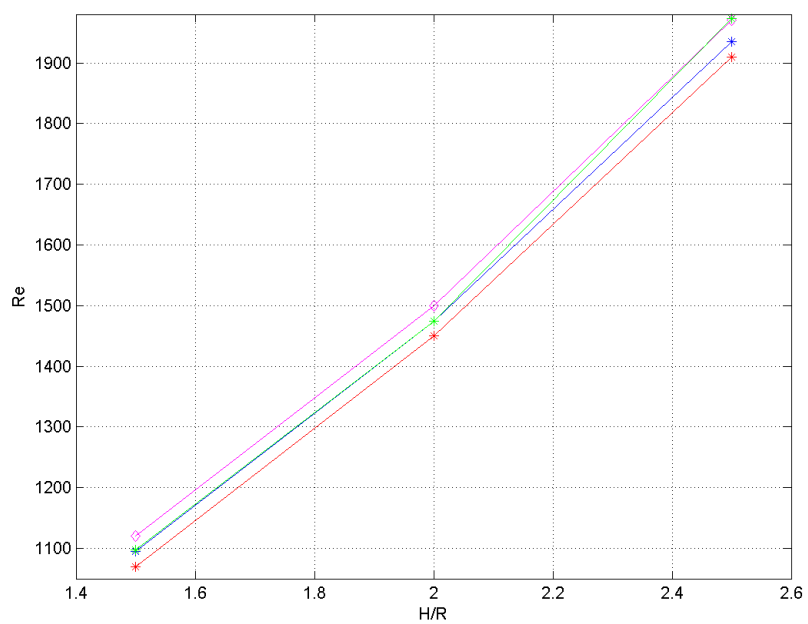


Figura 6.25: Re críticos. Numérico: Dos bloques: azul, Un bloque: magenta, Experimentales: Escudier: rojo, PIV: verde

Capítulo 7

Resultados con Vástagos

Los resultados presentados en este capítulo son originales, sistemáticos y detallados. A partir de estos resultados demostramos que es posible controlar el RV de una forma sencilla y efectiva.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento del flujo cuando se le introducen vástagos fijos en el eje del cilindro. Se realizaron medidas experimentales en el plano vertical para vástagos cilíndricos de radios $d = 1,0mm$, $d = 2,5mm$ y $d = 5,0mm$ y para cada uno de los radios se realizaron medidas para las tres diferentes relaciones de aspecto. Mientras que en plano horizontal se trabajó con vástagos cuadrados de lado $L = 4,4mm$ y $L = 8,8mm$ y cilíndrico de radio $d = 5,0mm$.

Elegimos presentar resultados numéricos para los vástagos de radio $d = 1,0mm$ y $d = 5,0mm$, ya que en el primer caso es el que se encuentra más cercano a la configuración clásica y los números de Reynolds son muy próximos y aún así existe una variación del comportamiento del sistema. El segundo fue elegido porque es el más alejado de la configuración clásica con el cual se tomaron también datos experimentales y los números de Reynolds elegidos son bastante diferentes. Estos resultados corresponden al $H/R = 2,0$.

7.1 Visualización en el plano vertical

Presentaremos los campos de velocidades y las velocidades verticales obtenidos experimentalmente para el sistema cuando se le introduce un vástago en el eje.

Si para cada configuración obtenemos N imágenes, mediante la aplicación de la técnica PIV obtendremos $N - 1$ campos de velocidades. Los perfiles de velocidad vertical que presentamos en esta sección corresponden al promedio sobre los $N - 1$ perfiles de velocidad vertical obtenidos para cada configuración. El error relativo que presentan dichos promedios es menor que un 5%.

Para determinar los valores de Re críticos cuando trabajamos con vástagos nos basamos en los resultados experimentales que utilizaban trazador líquido (fluoreceína) realizados por Cabeza *et al.* [4]

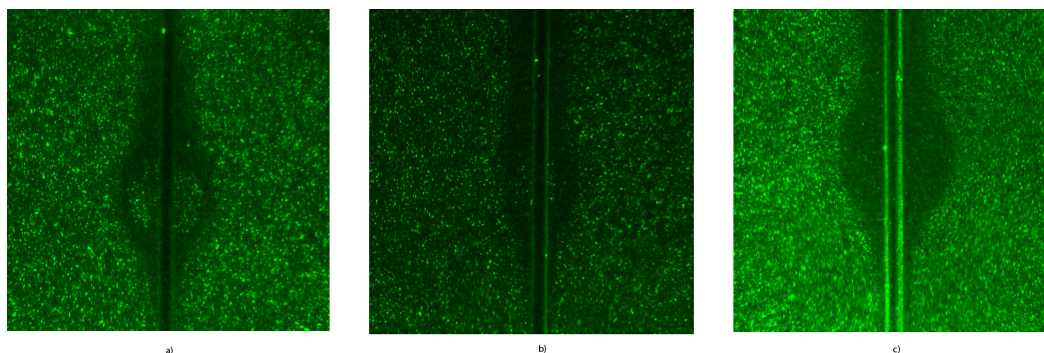


Figura 7.1: Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0mm$. Imágenes del flujo para $H/R=1,5$, $H/R=2,0$, $H/R=2,5$ para los valores de Re crítico correspondientes

Nuestro objetivo fue determinar el número de Re crítico para la aparición de la primera burbuja para todos los casos de interés. Para ello se utilizó el mismo criterio que en el capítulo anterior, es decir analizar el cambio de signo de la velocidad vertical.

7.1.1 Vástago cilíndrico, radio $d = 1mm$

En la figura 7.1, se muestran tres imágenes típicas que se utilizaron para aplicar los algoritmos de PIV para esta configuración. La diferencia de iluminación se debe a que el sistema tiene que alinearse cada vez que se varía Γ o se cambia el vástago.

En las Figuras 7.2, 7.3 y 7.4 podemos ver los campos de velocidades y los perfiles de velocidad vertical para cada una de las relaciones de aspecto en presencia de un vástago de $1mm$ de radio.

Obsérvese que los campos de velocidades para los diferentes valores de Γ son muy similares, ya que todos ellos corresponden a la situación para la cual se forma la primera burbuja. La diferencia entre ellos es el número de Reynolds crítico necesario para que se produzca el punto de estancamiento. La diferencia notable entre las tres situaciones se puede observar en la curva de la velocidad vertical en función de la altura. Allí puede verse que la altura para la cual la velocidad cambia de signo aumenta a medida que Γ se incrementa.

A continuación se presentan los resultados del estudio numérico para el $H/R=2,0$ en dos valores del número de Reynolds, flujo laminar correspondiente a $Re = 1300$, figuras 7.5 y 7.6 y el correspondiente al surgimiento de la burbuja, que en este caso será para $Re = 1340$, figuras 7.7 y 7.8.

Comparando estos resultados con los de la configuración clásica, Figuras 6.15 y 6.16, vemos que el momento angular y la densidad de energía son las magnitudes que presentan menores cambios, mientras que la vorticidad y el módulo de la velocidad experimentan cambios notables. La vorticidad sigue mante-

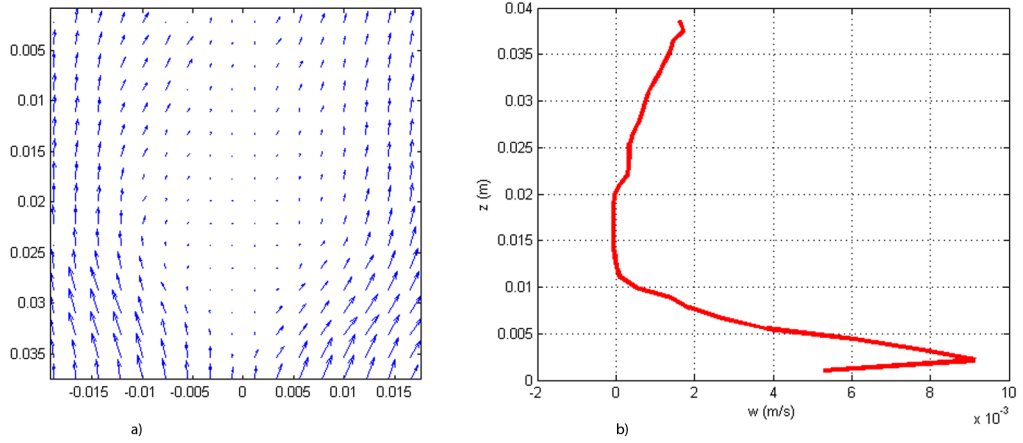


Figura 7.2: Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0\text{mm}$, $H/R=1,5$, $Re = 971$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

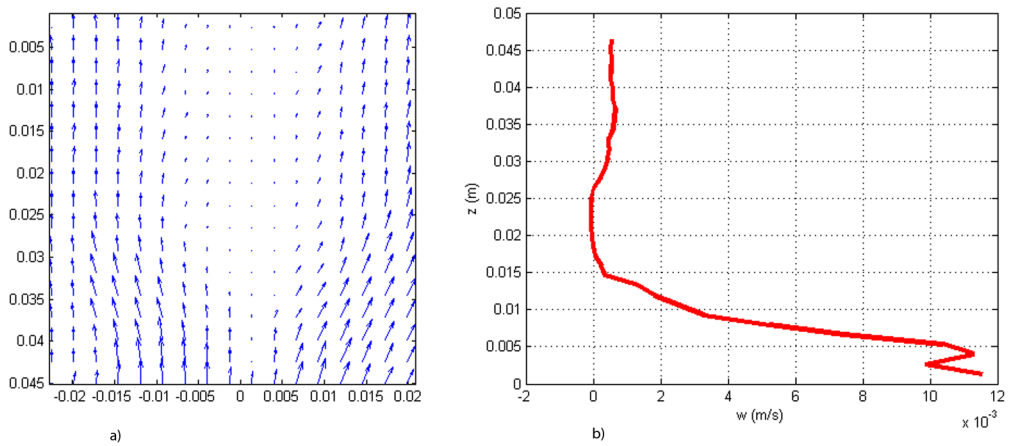


Figura 7.3: Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0\text{mm}$, $H/R=2,0$, $Re = 1313$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

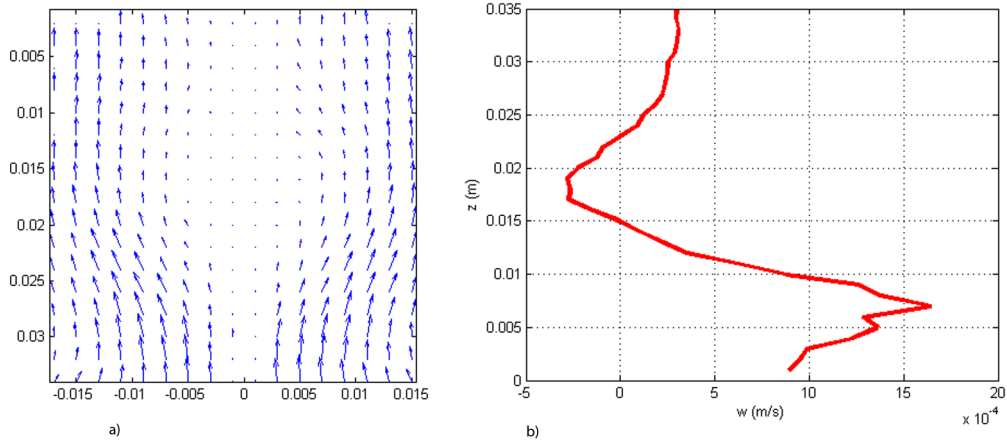


Figura 7.4: Vástago cilíndrico, radio $d = 1,0\text{mm}$ $H/R=2,5$, $Re = 1785$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

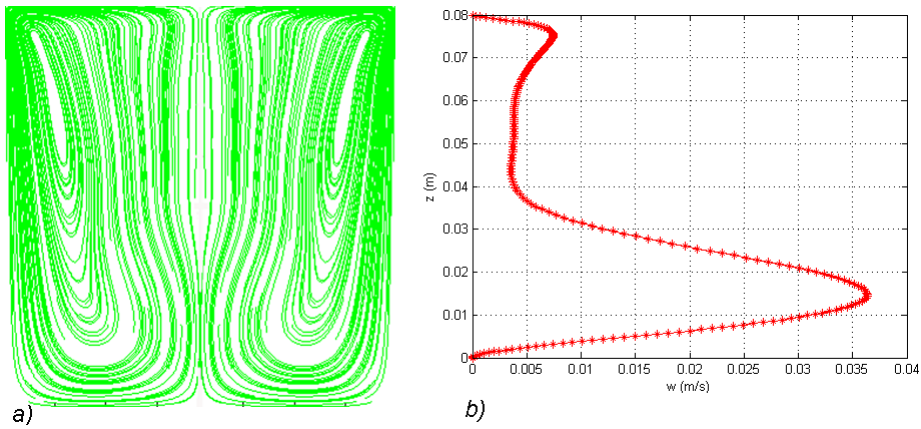


Figura 7.5: Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, b) Velocidad vertical en el eje.

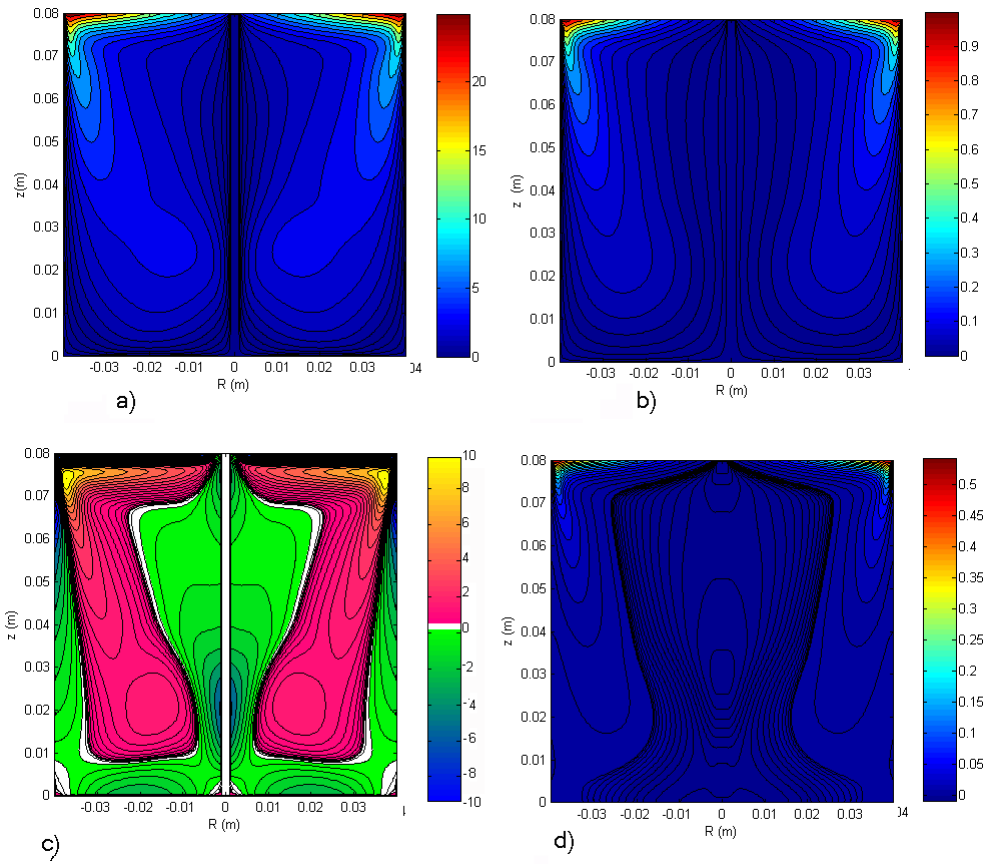


Figura 7.6: Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.

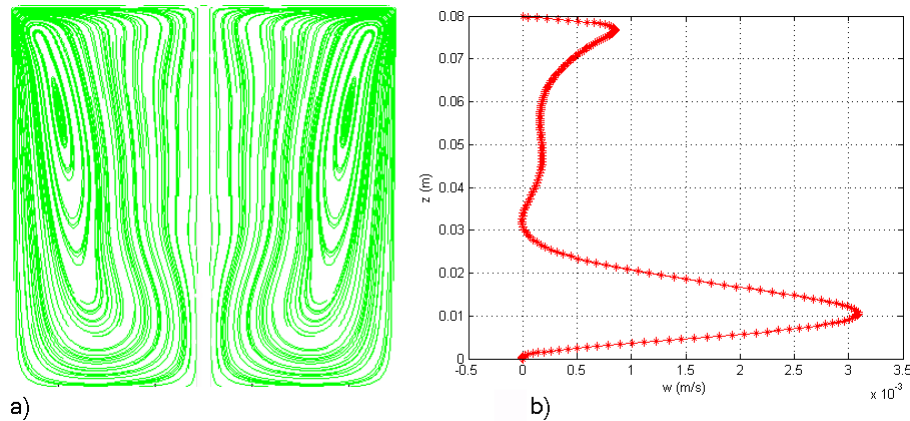


Figura 7.7: Flujo laminar, $Re = 1340$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.

niendo la diferenciación entre las tres zonas (vorticidad positiva, negativa y nula). Si comparamos la Figura 7.6 con la Figura 7.8 vemos que los contornos del momento angular se ensanchan pero lo hacen de manera diferente a la obtenida en la figura 6.16.

7.1.2 Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$

Al igual que en la sección anterior presentamos el campo de velocidades y el perfil de velocidad vertical, figuras 7.9, 7.10 y 7.11. Los campos de velocidades siguen resultando similares aunque para $\Gamma = 2,5$ el vástago luce más grande que en las otras figuras debido a que en este caso se utilizó un mayor aumento de la zona de estudio. Este aumento es el responsable de que el perfil de velocidades, para este caso, presente variaciones muy bruscas, las partículas enfocadas son las más rápidas y son las que desaparecen del área de interrogación más rápidamente.

7.1.3 Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$

Para el caso en el trabajamos con el vástago cilíndrico de radio $d = 5,0mm$ los campos de velocidades y los perfiles de velocidad vertical fueron similares que para los otros casos.

Los resultados numéricos para esta configuración muestran un ensanchamiento de los contornos del momento angular al surgir la burbuja acompañado de un cambio en la forma de los contornos para la vorticidad, Figuras 7.16 y 7.18. El ensanchamiento se puede ver también en las líneas de corriente y en los contornos del módulo de la velocidad, Figuras 7.16 y 7.18.

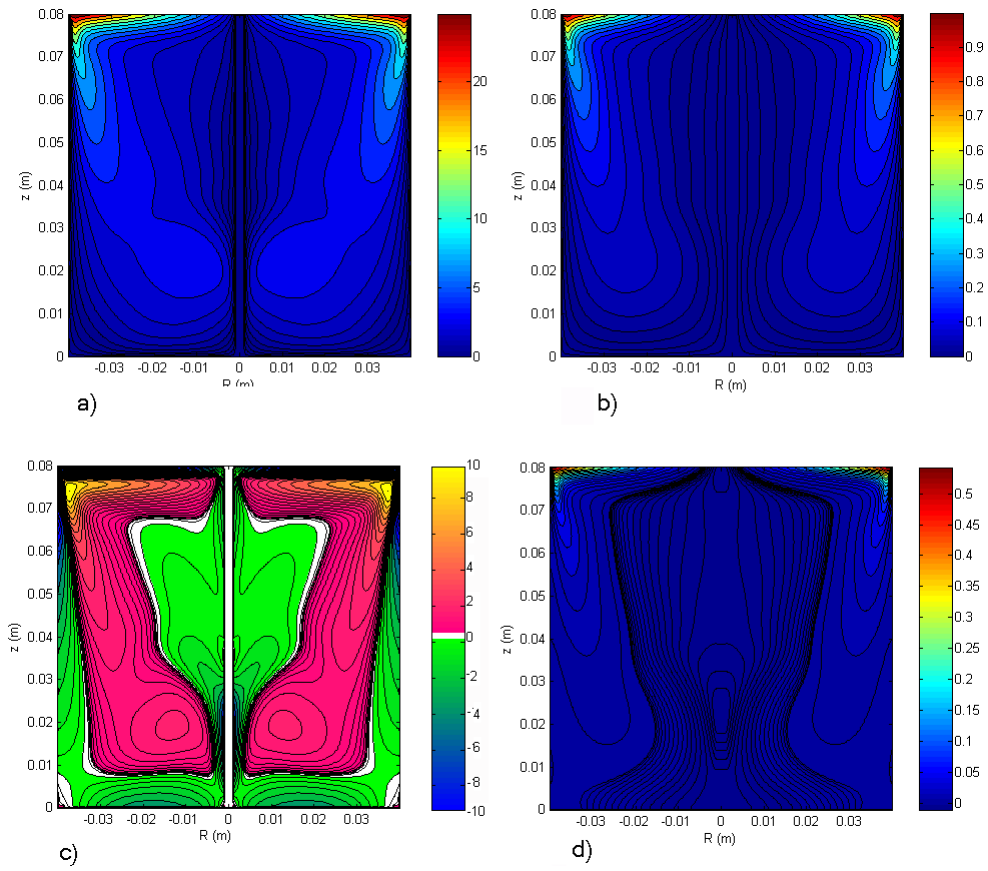


Figura 7.8: Flujo laminar, $Re = 1340$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.

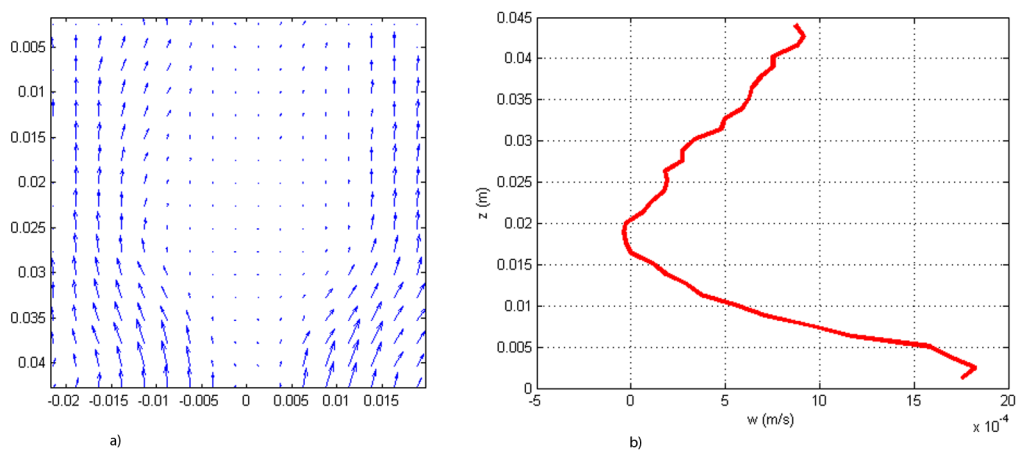


Figura 7.9: Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5\text{mm}$ $H/R=1,5$, $Re = 1036$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

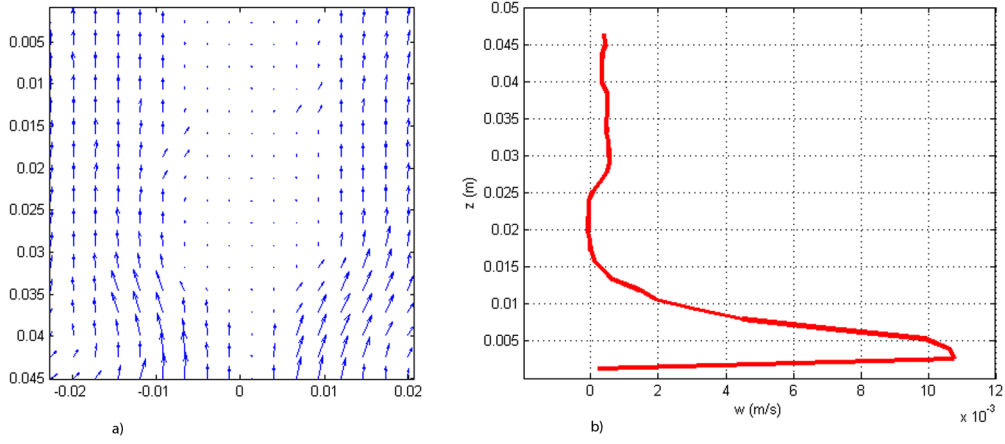


Figura 7.10: Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$ $H/R=2,0$, $Re = 1431$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

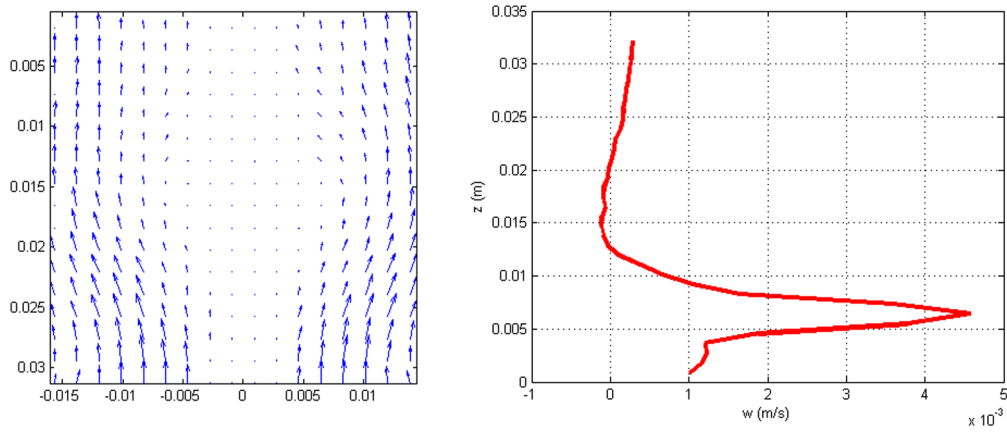


Figura 7.11: Vástago cilíndrico, radio $d = 2,5mm$ $H/R=2,5$, $Re = 1887$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

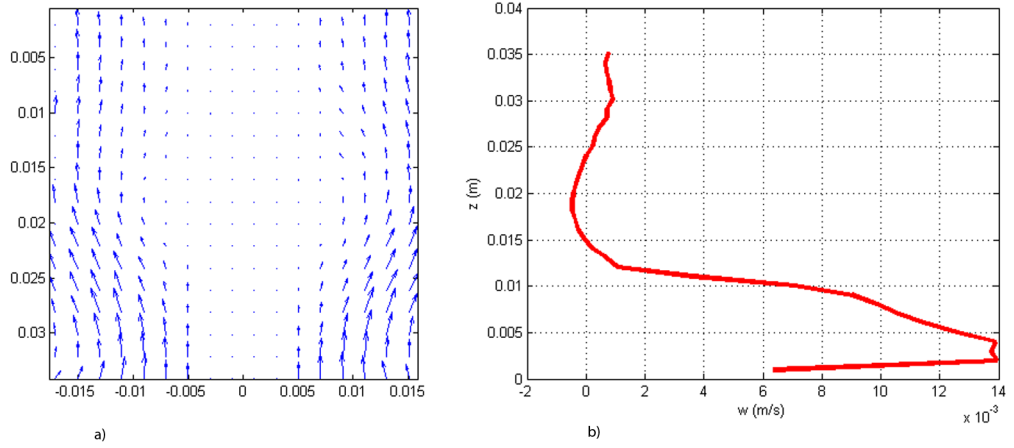


Figura 7.12: Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0\text{mm}$ $H/R=1.5$, $Re = 1246$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

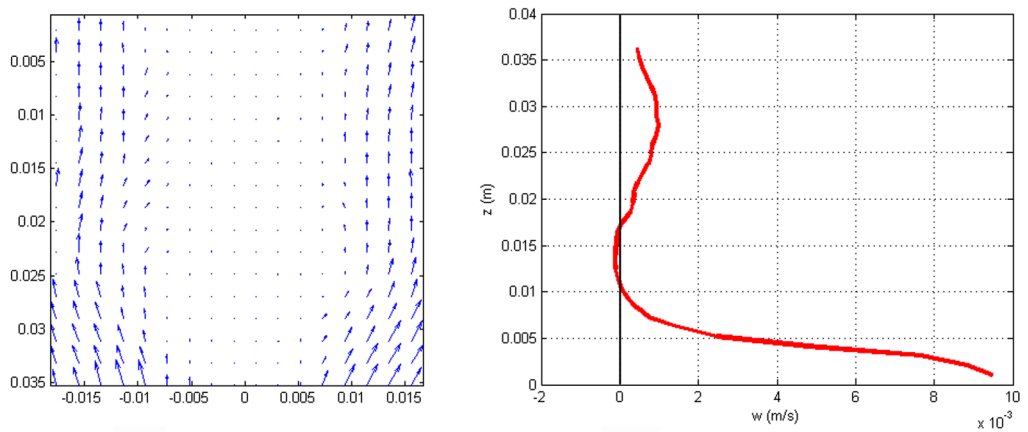


Figura 7.13: Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0\text{mm}$ $H/R=2.0$, $Re = 1671$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

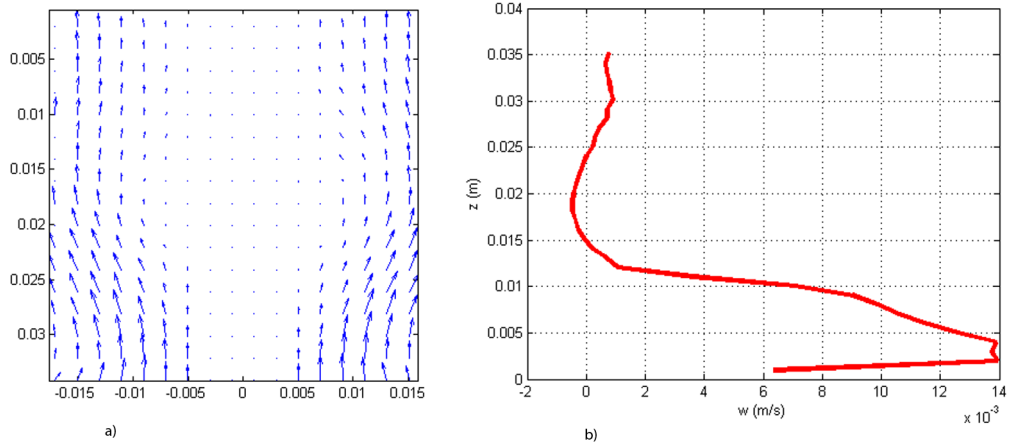


Figura 7.14: Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0\text{mm}$ $H/R=2.5$, $Re = 2187$, a) Campo de velocidades b) Velocidad vertical en el eje en función de la altura

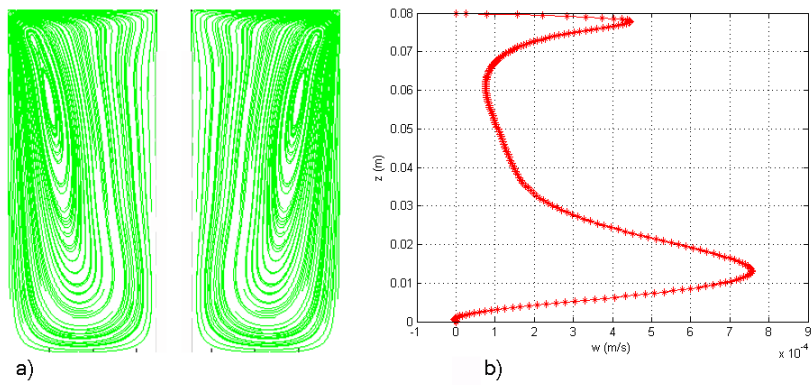


Figura 7.15: Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.

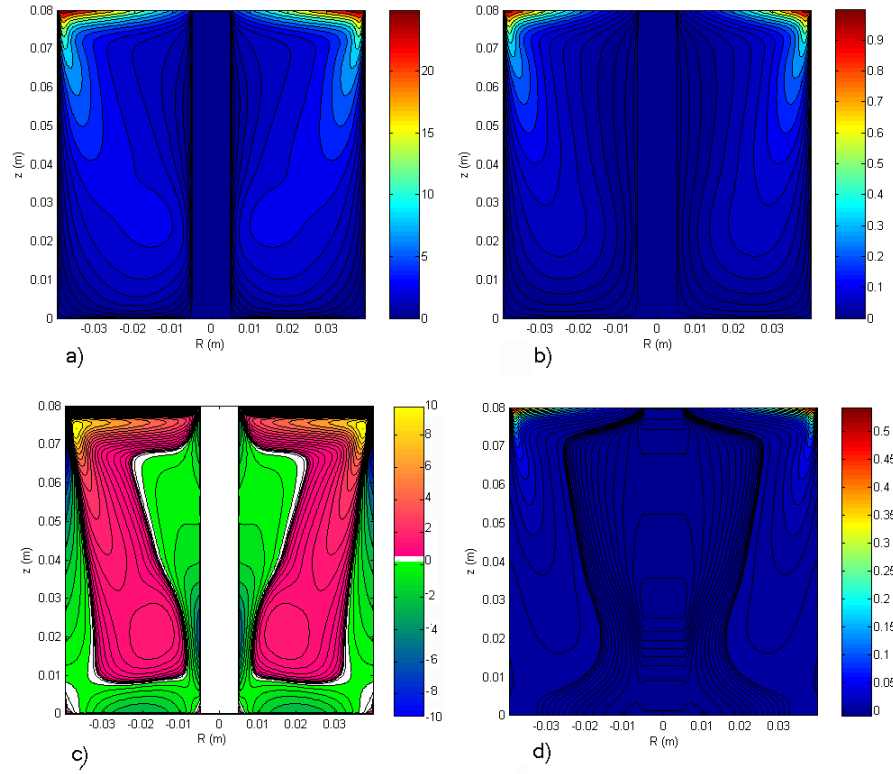


Figura 7.16: Flujo laminar, $Re = 1300$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.

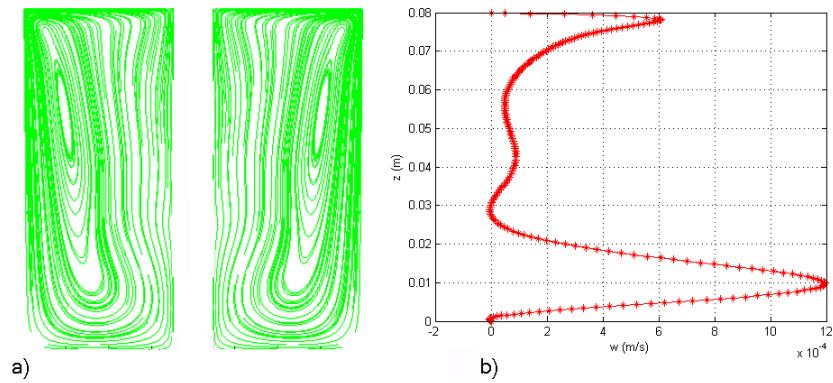


Figura 7.17: Flujo laminar, $Re = 1700$, a) Líneas de corriente, c) Velocidad vertical en el eje.

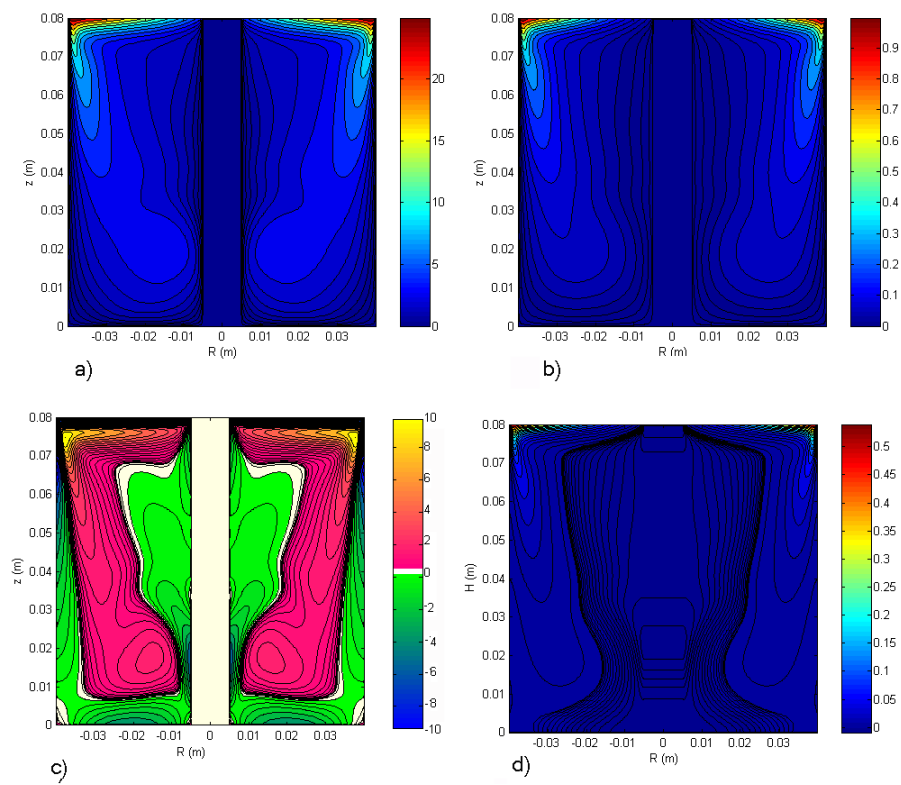


Figura 7.18: Flujo laminar, $Re = 1700$, a) Módulo de la velocidad, b) Momento angular, c) Componente tangencial de la vorticidad, d) Densidad de energía.

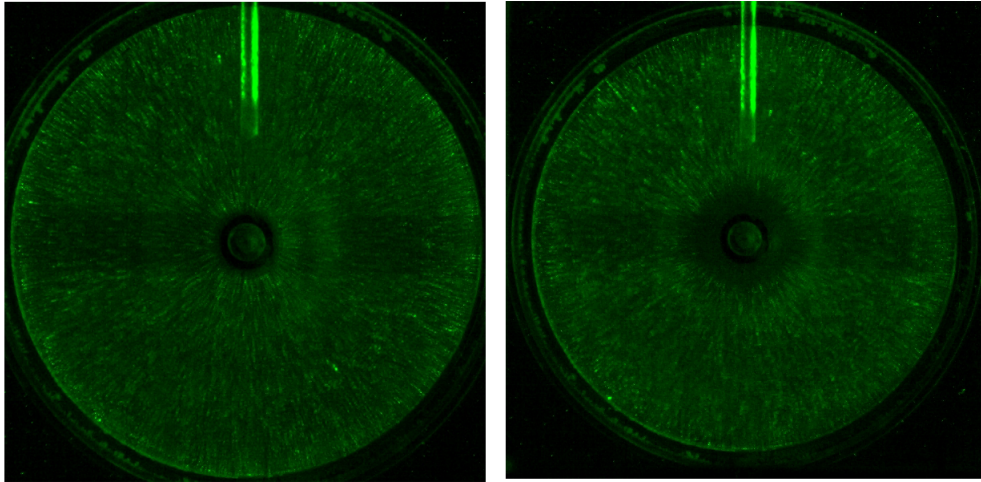


Figura 7.19: Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cilíndrica de radio $d = 5,0mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.

7.2 Visualización en el plano horizontal

En esta sección nos concentraremos en la visualización del sistema en el plano horizontal para diferentes configuraciones. En una primera instancia presentaremos resultados para el vástago cilíndrico de radio $d = 5mm$ para luego pasar a los vástagos cuadrados de $L = 4,4mm$ y $L = 8,8mm$ de lado.

Todas las medidas se realizaron para un $\Gamma = 2,0$ y el plano de luz se ubicó en $z = 0,03m$ al igual que las medidas realizadas para la configuración clásica. Las medidas con vástagos fueron realizadas utilizando dos láseres para disminuir el efecto de la sombra del propio vástago, que de todas maneras puede verse en las imágenes, Figuras 7.19, 7.22 y 7.26. En éstas imágenes puede verse un reflejo que corresponde al dispositivo de entrada de trazador líquido utilizado anteriormente por Cabeza *et al.*, [4].

7.2.1 Vástago cilíndrico, radio $d = 5,0mm$

Al igual que en la configuración clásica, el inicio de la burbuja se presenta como un aumento de la sombra anular centrada en el eje del cilindro. En la Figura 7.20 se compara la velocidad tangencial en función del radio para el flujo laminar (rojo) y para el flujo en el inicio de la burbuja que corresponde al $Re_{cr} = 1700$ (verde), donde podemos comprobar que cerca del radio $0,01m$ existe un cambio en la concavidad y donde el primer punto se encuentra ubicado dentro del vástago (tomado el valor nulo, como es de esperar). Así, al estudiar el plano horizontal determinamos experimentalmente todas las componentes del campo de velocidades. Los contornos de la velocidad vertical numéricos ubicados en el mismo plano horizontal para el cual se adquirieron los datos

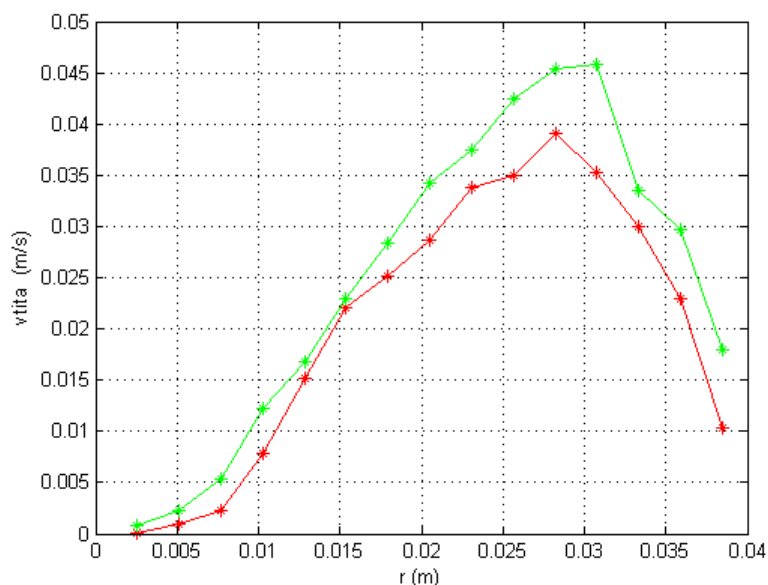


Figura 7.20: Velocidad angular en función del radio, Rojo: Flujo laminar, Verde: Inicio de la burbuja ($Re = 1700$)

experimentales terminan por completar el estudio de este sistema. Verificando que el $Re = 1700$ es el valor crítico a partir del cual se inicia la burbuja ya que como podemos ver solo tenemos un contorno correspondiente a velocidades negativas (línea azul), seguida de una zona de estancamiento (líneas magenta), Figura 7.21.

7.2.2 Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$

Resulta muy interesante el estudio de esta configuración ya que a priori no es sencillo predecir que sucederá con el flujo al introducir un vástago cuya simetría es diferente a la del recipiente que lo contiene.

Se estudió el sistema experimentalmente en los dos planos de visualización pero solo los resultados obtenidos en el plano horizontal han sido satisfactorios debido a que la alineación del sistema en el plano vertical presenta muchas dificultades, que podrían reducirse trabajando con un plano de luz más estrecho. En esta configuración vemos claramente la ventaja de realizar estudios numéricos además de experimentales.

La Figura 7.22 corresponde a la imagen en el plano horizontal para el sistema con un vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$. En esta figura el vástago es prácticamente invisible, eso se debe a que la sección cuadrada coincide con la sección del orificio en el cual se atornilla para fijarlo. Como para las configuraciones anteriores podemos ver el ensanchamiento de la zona

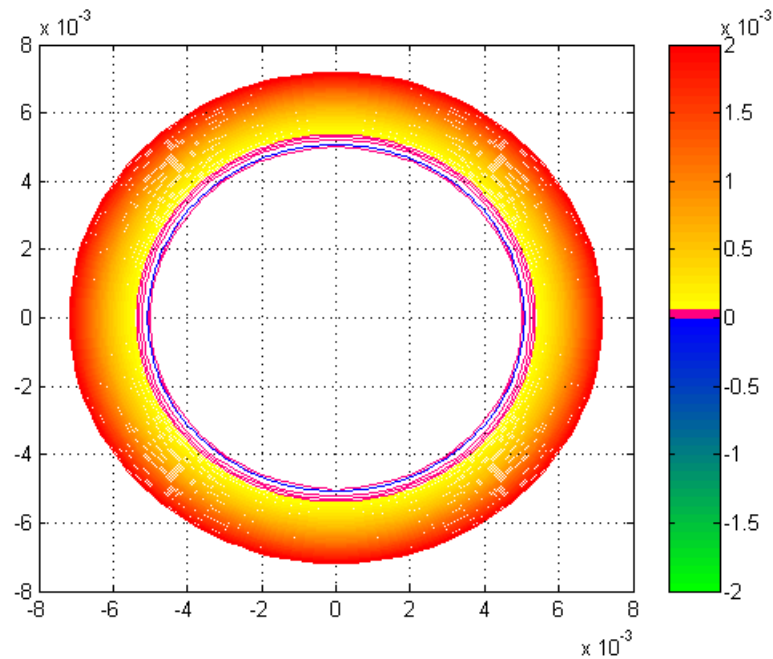


Figura 7.21: Vástago cilíndrico de radio $d = 5,0\text{mm}$, $z = 0,03$, contornos de velocidad vertical, $Re = 1700$

anular central cuando se inicia la burbuja.

El comportamiento de la velocidad tangencial es similar al presentado para el estudio del vástago cilíndrico mostrado en la sección anterior. Lo que estaría implicando que la forma y el volumen del vástago no afectan el comportamiento de esta componente del campo de velocidades.

A partir del estudio numérico en el plano vertical podemos ver que aparecen varias burbujas, una en cada cara del vástago, figura 7.24a). El perfil de la velocidad vertical en función de la altura presenta un cambio de signo en el plano meridiano correspondiente a la mitad de la cara. Este cambio de signo no aparece cuando el plano meridiano es rotado para asociarse a un vértice, figura 7.24b).

El mismo tipo de comportamiento encontramos para valores de Reynolds un poco mayores como por ejemplo $Re = 1600$ en donde se pueden ver las estructuras más desarrolladas que para el Re_{cr} mientras que los perfiles de la velocidad en función de la altura no muestran mayores diferencias, Figura 7.25.

7.2.3 Vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8\text{mm}$

En las imágenes 7.26 el vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8\text{mm}$ puede apreciarse más claramente que para el caso anterior, aunque la diferencia entre las sombras anulares no es tan evidente. El comportamiento de la componente tangencial de la velocidad es similar a los obtenidos anteriormente.

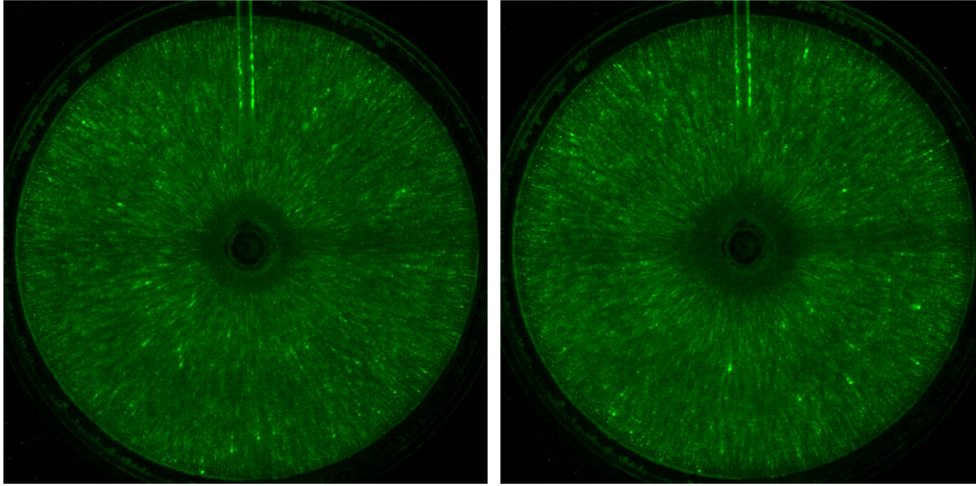


Figura 7.22: Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.

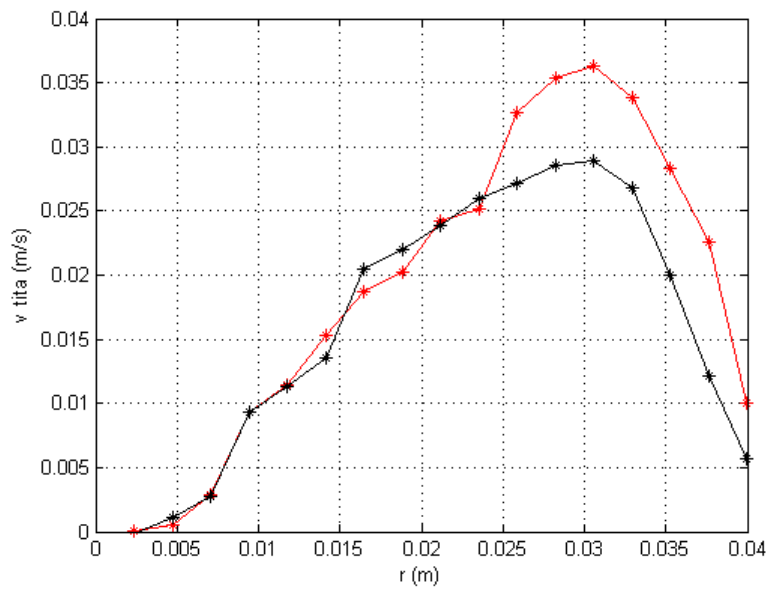


Figura 7.23: Velocidad angular en función del radio para el vástago cuadrado de lado $L = 4,4mm$, Negro: Flujo laminar, Rojo: Inicio de la burbuja ($Re = 1450$)

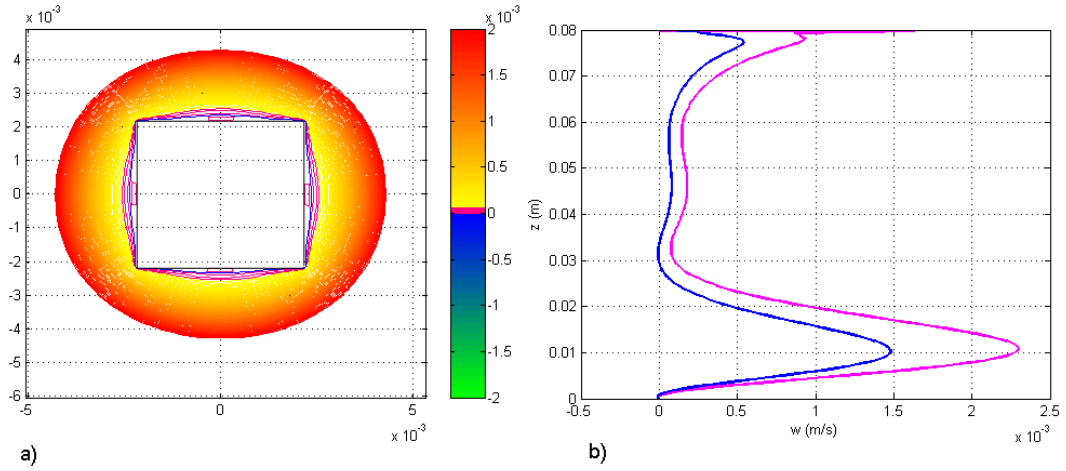


Figura 7.24: Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1450$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, azul: mitad de la cara, magenta: vértice

El estudio numérico muestra una 'anticipación' de la recirculación en las caras respecto a los vértices. Al igual que en el vástago de sección cuadrada más pequeño vemos la formación de cuatro burbujas una en cada cara de la sección.

7.3 Resumen de los resultados obtenidos para visualización vertical

Presentaremos los valores de Re críticos para cada uno de los vástagos cilíndricos antes mencionados, para cada una de las relaciones de aspecto. En el cuadro 7.1 se presentan resultados experimentales obtenidos utilizando un trazador líquido [4] mientras que el cuadro 7.2 los datos fueron obtenidos a partir de la técnica PIV (Particle Image Velocimetry), finalmente los resultados numéricos se presentan en el cuadro 7.3:

H/R	d=1 mm	d=2.5 mm	d=5.0 mm
1.5	940	1108	1132
2	1300	1420	1636
2.5	1756	1876	2260

Cuadro 7.1: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primera burbuja para vástagos cilíndricos. Experimental con trazador líquido

En la Figura 7.29 se presenta la variación del número de Reynolds asociado a la aparición de la primera burbuja en función de la relación de aspecto H/R

7. RESULTADOS CON VÁSTAGOS

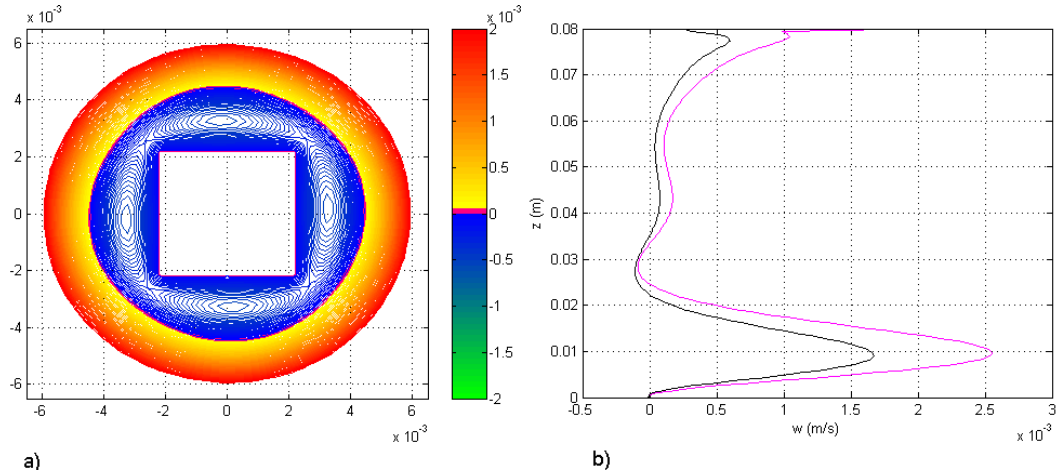


Figura 7.25: Vástago de sección cuadrada de lado $L = 4,4mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1600$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, negro: mitad de la cara, magenta: vértice

H/R	d=1 mm	d=2.5 mm	d=5.0 mm
1.5	971	1036	1246
2	1313	1431	1671
2.5	1785	1887	2187

Cuadro 7.2: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja. Experimental con PIV

para cada tamaño de vástago. Mientras que en la Figura 7.30b) se visualizan los valores de Re críticos en función del cociente entre el radio del vástago y el radio del cilindro d/R . Con el objetivo de analizar la tendencia en el comportamiento del número de Reynolds crítico, se calculó numéricamente el número de Reynolds crítico correspondiente a un vástago cilíndrico de radio $d = 10,0mm$. Pudiéndose ver que el sistema presenta el mismo comportamiento para las tres relaciones de aspecto.

Comparando los resultados numéricos con los experimentales obtenidos con PIV para distintos valores de d/R , considerando que la configuración clásica corresponde a vástago de radio nulo ($d = 0$), podemos ver que se presenta un

H/R	d=1 mm	d=2.5 mm	d=5.0 mm
1.5	950	1020	1200
2	1340	1435	1700
2.5	1780	1910	2250

Cuadro 7.3: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja. Numérico

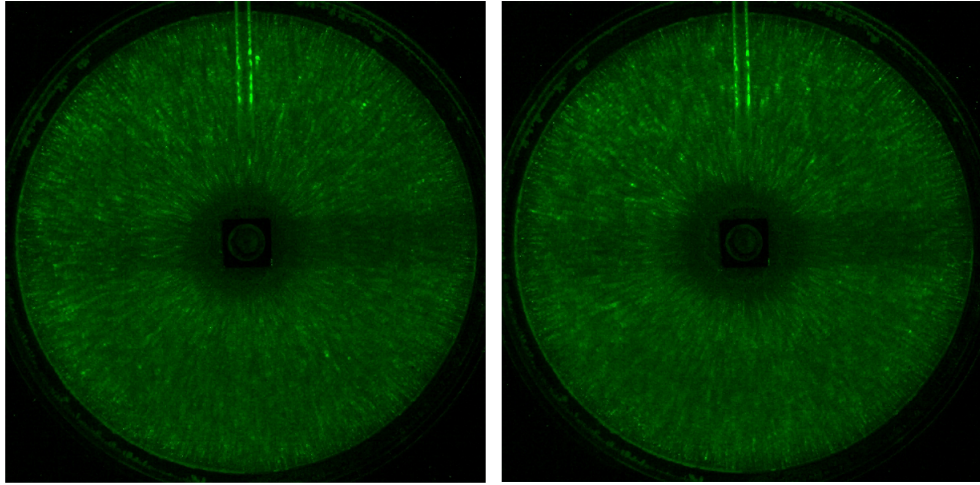


Figura 7.26: Imagen del plano horizontal para el vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8mm$, Flujo laminar e inicio de la burbuja.

mínimo para el vástago de 1 mm (figura 7.30), por lo que podemos concluir que la inclusión de un vástago de ese tamaño 'adelanta' el rompimiento de vórtice mientras que la colocación de vástagos de mayor radio lo 'retrasan'. Estos resultados difieren de los presentados por Mullin *et al.* [22], mostrando que sí se puede controlar el RV mediante vástagos fijos para diferentes relaciones de aspectos.

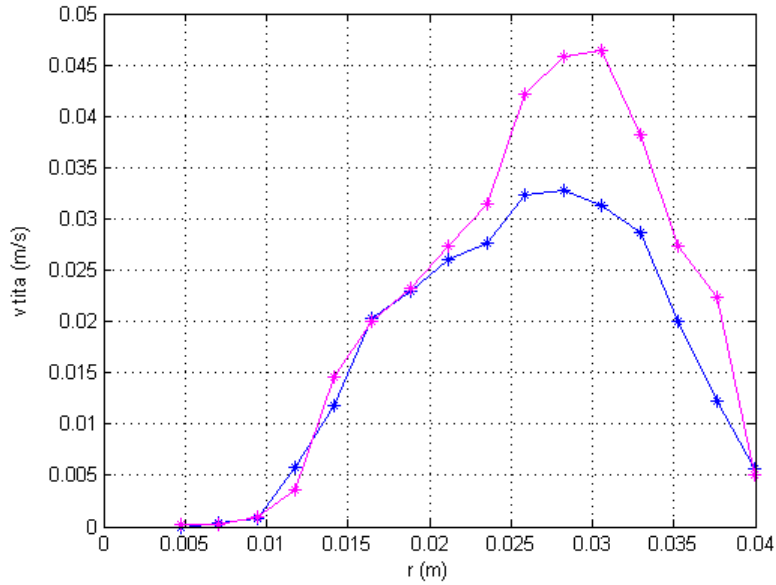


Figura 7.27: Velocidad angular en función del radio, Azul: Flujo laminar, Magenta: Inicio de la burbuja ($Re = 1700$)

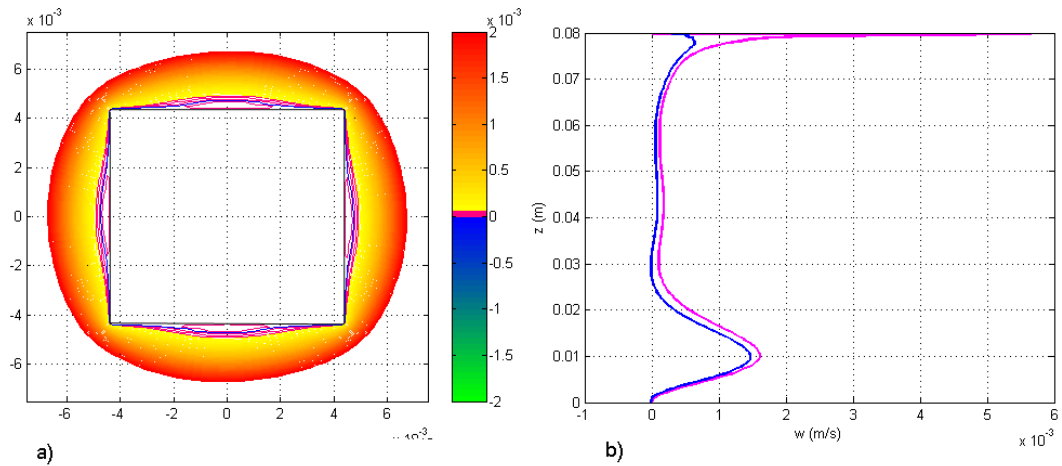


Figura 7.28: Vástago de sección cuadrada de lado $L = 8,8mm$, $z = 0,03$, a) Contornos de velocidad vertical, $Re = 1700$, b) Perfil de velocidad vertical en función de la altura en un plano meridiano, azul: mitad de la cara, magenta: vértice

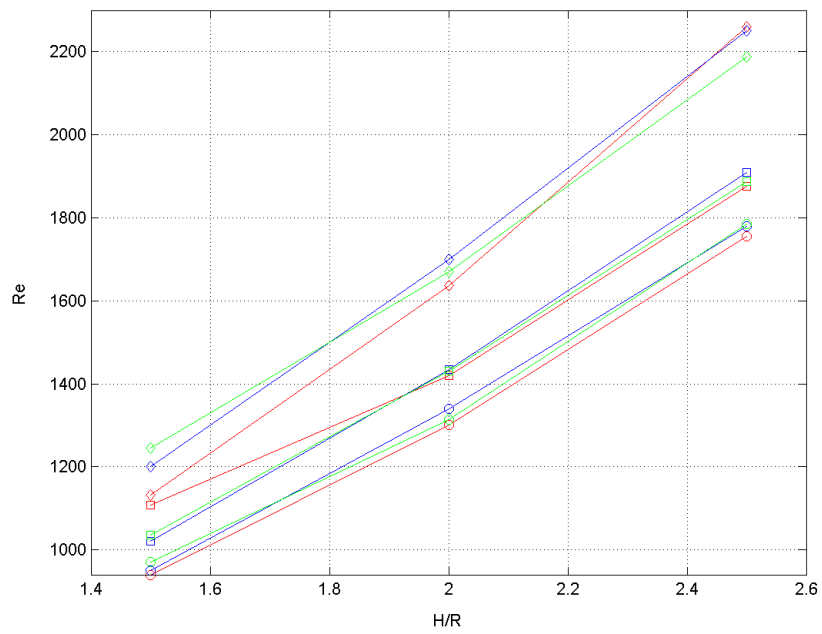


Figura 7.29: Re críticos. Numéricos: azul, Experimentales: Líquido: rojo, PIV: verde. Vástagos: $d = 1mm$ círculos, $d = 2,5mm$ cuadrados, $d = 5mm$ diamantes

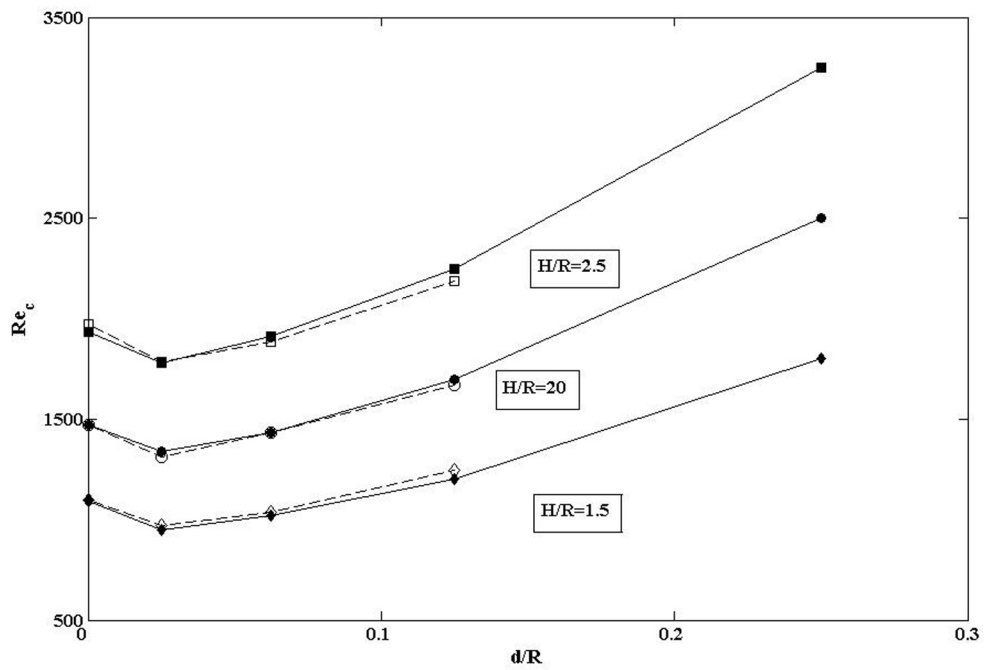


Figura 7.30: Valores experimentales (símbolos blancos) y numéricos (símbolos negros) de los valores críticos del número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primera burbuja como función del radio de los vástagos, para diferentes valores de la relación de aspecto $H/R = 1,5$ (diamantes), $H/R = 2,0$ (círculos) and $H/R = 2,5$ (cuadrados)

Capítulo 8

Discusión y Conclusiones

El estudio del rompimiento de vórtices en flujos confinados es un tema de gran importancia no solo desde el punto de vista de la investigación básica, sino también desde la óptica de las aplicaciones industriales. En especial el desarrollo de mecanismos de control sencillo del RV representa un desafío muy interesante y de gran actualidad. Para el estudio del sistema del RV ha sido necesario a lo largo de este trabajo de tesis implementar diversas técnicas tanto experimentales como numéricas. Para la validación de ambas se estudió en primer lugar una configuración clásica del sistema. Para esta situación hay un gran número de trabajos publicados de excelente nivel que son considerados como referentes en el tema, [6], [19]. Por esta razón fueron elegidos para validar los resultados obtenidos en este trabajo de tesis tanto a nivel experimental como numérico. Dada la excelente concordancia entre los resultados obtenidos en la configuración clásica y los resultados considerados de referencia, se aplicaron las técnicas desarrolladas a un sistema que no había sido aún estudiado y que permitió desarrollar un mecanismo de control del RV.

8.1 Comparación en la configuración clásica

En primer lugar analizaremos los resultados tanto numéricos como experimentales obtenidos para el número de Reynolds crítico para el cual se produce el primer rompimiento de vórtice.

Como primer paso en la implementación del modelo numérico para analizar el RV se estudió la influencia del tipo de malla en los resultados obtenidos. Se analizaron dos tipos de mallas, tal como se discutió en la sec. 5.4. Se estudiaron también varios refinamientos para cada una de las mallas y se concluyó que la mejor implementación para analizar el sistema del RV consistía en la utilización de un refinamiento de $144 \times 80 \times 200$ para el primer tipo de malla y un refinamiento de $36 \times 36 \times 200$ para el segundo tipo. Los resultados numéricos obtenidos a partir de estas mallas difieren con los datos experimentales obtenidos por Escudier [6] como máximo un 2% para las malla no estructura-

da y un 5% para la malla estructurada, ver cuadro 8.1. Para la obtención de

H/R	Dos bloques	Un bloque	Experimentales	Referencia
1.5	1095	1120	1098	1068
2	1474	1500	1474	1450
2.5	1935	1970	1973	1910

Cuadro 8.1: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primera burbuja. Las dos primeras columnas corresponden a los resultados numéricos para las mallas utilizadas. La tercera columna corresponde a los resultados experimentales obtenidos. La cuarta columna corresponde a los resultados de referencia de la literatura

los resultados experimentales se implementó la técnica de PIV para la determinación del campo de velocidades del fluido. Esto implicó poner a punto no sólo el montaje experimental, sino también los algoritmos necesarios para el procesamiento de las imágenes obtenidas. En el Cuadro 8.1 se muestran los resultados obtenidos. Cabe resaltar que estos resultados difieren en menos del 3% con los resultados considerados de referencia. Claramente estos resultados son superiores a los obtenidos mediante técnicas de visualización con tinta. En general, estos resultados presentan errores del orden del 10%.

De la tabla 8.1 puede concluirse que la concordancia entre los resultados obtenidos tanto experimental como numéricamente en esta tesis y los resultados utilizados como referencia es excelente. Esto permite validar la implementación de las técnicas utilizadas, garantizando así que pueden ser aplicadas en el estudio de nuevas situaciones, en las cuales aún no hay resultados conocidos en la bibliografía.

8.2 Comparación en el caso con vástagos

Una vez validadas las técnicas implementadas en el sistema clásico se procedió al estudio de un sistema que aún no había sido analizado en la literatura, con el objetivo de diseñar un sistema de control para el RV. Para ello se resolvió implementar un sistema similar al anterior en el cual se incluyeron vástagos axiales de diferente geometría, fijos en la tapa inferior del cilindro.

Numéricamente este sistema fue resuelto usando mallas estructuradas similares a la usada para la configuración clásica pero generando mayor refinamiento de la malla en las caras del dominio.

Los datos obtenidos tanto experimental como numéricamente permiten realizar varias observaciones interesantes. El número de Reynolds como función del radio de los vástagos presenta un mínimo para el vástago de radio $d = 1mm$, considerando la configuración clásica como aquella que posee radio nulo ($d = 0$). Este comportamiento está presente en todas las relaciones de aspecto estudiadas como puede verse en el cuadro 8.2. Este resultado implica que la

inclusión de un vástago pequeño ($d = 1mm$) 'adelanta' el rompimiento de vórtice mientras que la colocación de vástagos de mayor radio lo 'retrasan'. En definitiva, los experimentos muestran que la presencia de vástagos puede

H/R	d=0 mm dos bloques	d=0 mm un bloque	d=1 mm	d=2.5 mm	d=5.0 mm
1.5	1095	1120	950	1020	1200
2	1474	1500	1340	1435	1700
2.5	1935	1970	1780	1910	2250

Cuadro 8.2: Número de Reynolds correspondientes a la aparición de la primer burbuja para cada uno de los vástagos. Numérico

aumentar o disminuir el número de Reynolds crítico para la aparición del RV. El efecto de los vástagos pequeños es disminuir el Re_{cr} . Mientras que el Re_{cr} se incrementa cuando d/R es mayor que un cierto valor crítico de $(d/R)_{cr}$, que es el orden de 0,06.

Otro aspecto interesante que se estudió en esta tesis es la influencia de la forma de los vástagos utilizados. Para ello se estudió el efecto de introducir vástagos cuadrados de igual volumen que los vástagos cilíndricos.

Se pudo comprobar que la forma de los vástagos genera cambios importantes en la morfología de la burbuja. Mientras que en el caso de los vástagos cilíndricos la burbuja puede verse como un toroide alrededor del vástago, para los vástagos cuadrados vemos que el toroide se estrangula en cada uno de los vértices. Esto genera cuatro burbujas localizadas en cada una de las caras del vástago como puede verse en la figura 7.24.

Por último queremos resaltar que el efecto que producen los vástagos son de interés práctico ya que pueden utilizarse para realizar un control del RV de una manera más sencilla que otras propuestas anteriormente en la literatura, al no requerir dispositivos auxiliares adicionales. Cabe señalar que este método, a diferencia del enfoque propuesto en trabajos anteriores, no implica un movimiento adicional en el eje. Esta sencillez es una característica interesante, por lo que lo hace más factible para ser utilizado en dispositivos de ingeniería. La modificación del Reynolds crítico es muy notable. La razón de volúmenes (cilindro a vástago) es de $V_1/V_2 \sim 4 \times 10^{-3}$, mientras que la disminución del número de Reynolds crítico es de aproximadamente 10%. Esta variación del número de Reynolds crítico es 20 veces mayor que la modificación porcentual del volumen del cilindro, lo que muestra la eficacia del método. Por otro lado, combinando estos resultados con un modelo simple de flujos en tubos, [30] podemos concluir que el efecto producido por los vástagos en el RV es de origen viscoso.

Finalmente en el cuadro 8.3, puede verse la excelente concordancia entre los resultados numéricos y los experimentales. Este hecho es de vital importancia

H/R	d=0 mm		d=1 mm		d=2.5 mm		d=5 mm	
	Exp	Num	Exp	Num	Exp	Num	Exp	Num
1.5	1098	1095	971	950	1036	1020	1246	1200
2	1474	1474	1313	1340	1431	1435	1671	1700
2.5	1973	1935	1785	1780	1887	1910	2187	2250

Cuadro 8.3: Número de Reynolds críticos correspondientes a la aparición de la primera burbuja para diferentes relaciones de aspecto y diferentes vástagos.

ya que dada la validez de los resultados numéricos es posible realizar estimaciones en regiones para las cuales es imposible montar la experiencia.

8.3 Comentarios finales

Como conclusiones finales de esta tesis queremos resaltar:

1 A nivel experimental se puede concluir que la técnica Digital Particle Image Velocimetry (DPIV) fue implementada exitosamente en nuestro laboratorio convirtiéndolo en el único laboratorio del país en donde se aplica esta técnica. Los datos obtenidos para la configuración clásica presentan un excelente ajuste con datos plenamente aceptados en la comunidad científica [6].

2 A nivel numérico validamos el modelo `caffa3d` con esta geometría particular. Para esto se realizaron sucesivos refinamientos de malla, elección de refinamientos localizados y uso de mallas estructuradas y no estructuradas. El uso de mallas no estructuradas en el estudio de la configuración original permite obtener un excelente ajuste con los resultados experimentales. Además los resultados obtenidos son consistentes con las simulaciones en modelos a axisimétricos existentes.

La gran ventaja que presenta el modelo `caffa3d` es que al ser un modelo en tres dimensiones que no supone ninguna hipótesis de simetría permite aplicarlo a sistemas con geometrías muy variadas.

3 La inclusión de vástagos axiales en el sistema ha mostrado ser un mecanismo muy efectivo para el control del rompimiento del vórtice.

4 La inclusión de un vástago de sección cuadrada fijo en un contenedor cilíndrico con la tapa rotante cambia la morfología de la burbuja, rompiendo la simetría existente para el caso de los vástagos cilíndricos y para la configuración clásica.

Bibliografía

- [1] Adrian, R.J., 'Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow: speckle velocimetry vs. particle image velocimetry', *Appl. Optics* **23**, 1690-91, (1984).

- [2] Adrian, R.J., 'Statistical properties of particle image velocimetry measurements in turbulent flow', In *Laser Anemometry in fluid mechanics-III*, 115-129. Lisbon: Instituto Superior Technico, (1988).

- [3] Adrian, R.J., 'Particle-Imaging Techniques for Experimental Fluid Mechanics', *Ann. Rev. Fluid Mech* **23**, 261-304, (1991).

- [4] Cabeza, Cecilia; Sarasúa, Gustavo; Martí, Arturo C.; Bove, Ítalo; 'A simple mechanism for controlling vortex breakdown in a closed flow'; *ANALES AFA, Proceedings Avances en Fluidos 2006*. En prensa.

- [5] <http://www.dantecdynamics.com/Default.aspx?ID=731>.

- [6] M.P. Escudier, 'Observations of the flow produced in a cylindrical container by rotating endwall', *Exp. Fluids* **2**,189 (1984).

- [7] Ferziger J. Peric M, 'Computational methods for fluid dynamics', Springer-Verlag, (2002).

- [8] Goodman J.W., 'Introduction to Fourier Optics', New York: McGraw-Hill, (1968).

- [9] Benenson W., Harris J.W., Stoker H., Lutz H., 'Handbook of physics, ed AIP Press, (2002).

- [10] Herrada M.A. and Shtern V., 'Vortex breakdown control by adding near-axis swirl and temperature gradients', *Phys. Rev. E* 68, 041202 (2003).
- [11] Husain H.s., Shtern V. and Hussain F., 'Control of vortex breakdown by addition of near-axis swirl', *Phys. Fluids* 15(2), 271-279, (2003).
- [12] Jain A.K., 'Fundamentals of Digital Image Processing', Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, (1989).
- [13] Keane R.D and Adrian R.J., 'Optimization of Particle Image Velocimeters. part I: Double pulsed systems', *Meas. Sci. Technol.* 1, 1202, (1990).
- [14] Keane R.D. and Adrian R.J., 'Optimization of particle image velocimeters: II. Multiple pulsed systems', *Meas. Sci. Technol.* 2, 963, (1991).
- [15] Keane R.D. and Adrian R.J., 'Theory of cross-correlation analysis of PIV images', *Appl Sci Res* 49, 191-215, (1992).
- [16] Keane R.D., Adrian R.J. and Zhang Y., 'Super-resolution particle imaging velocimetry', *Meas. Sci. Technol.* 6, 754, (1995).
- [17] http://www.steminc.com/laser/LAS_SMM24P532100L.asp
- [18] Lievovich S., 'The structure of vortex breakdown', *Ann. Rev. Fluid Mech.* 10, 221-46 (1978).
- [19] Lopez J.M., 'Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow', *J. Fluid Mechanics* 221, 533-552,(1990).
- [20] Marques F., Lopez J.M., 'Precessing vortex breakdown mode in an enclosed cylinder flow', *Phys. Fluids* 13, 1679 (2001).
- [21] Lopez J.M., Marques F. y Jie Shen, 'An Efficient Spectral-Projection Method for Navier-Stokes Equation in Cylindrical GEometries. II. Three-Dimensional Cases',*J. Fluid Mech.* 470, 135-149 (2002).
- [22] Mulin T., Tavener J.S. and Cliffe K.A., 'On the creation of stagnation points near straight and sloped walls', *Phys. Fluids* 12, 425 (2000).
- [23] Mununga L., Hourigan K. and Thompson, M.C., 'Confined flow vortex breakdown control using a small rotating disk', *Phys. Fluids* 16, 4750 (2004).
- [24] Oppenheim A.V., Willsky A.S. and Young I.T., 'Signals and Systems', Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, (1983).
- [25] Prasad A.K, Adrian R.J., Landreth C.C. and Offutt P.W., 'Effect of resolution on the speed and accuracy of particle image velocimetryinterrogation', *Exp. Fluids* 13, 105, (1992).

-
- [26] Priestley M.B., 'Spectral Analysis and Time Series', 7th edn, San Diego, CA: Academic, (1992).
- [27] Raffel M., Westerweel J., Willert C., Gharib M. and Kompenhans J., 'Analytical and experimental investigations of dual-plane particle image velocimetry', *Opt. Eng.* 35, 2067, (1996).
- [28] Raffel M., Willert C., Kompenhans J., 'Particle Image Velocimetry. A Practical Guide', Springer, (1998).
- [29] G. Usera, A. Vernet, J. A. Ferré, 'Simulación numérica de las ecuaciones de Navier Stoke en 3D, por volúmenes finitos en mallas curvilíneas estructuradas por bloques', SEMNI, España 2005.
- [30] Varela S., Cabeza C., Sarasua L., Marti A., Bove I., Usera G. and Vernet A. Enviado a *Phys. Fluids*, (2008).
- [31] Westerweel J., 'Digital Particle Image Velocimetry - Theory and Application', (Delft: Delft University Press),(1993a).
- [32] Westerweel J., 'Optical diagnostics in fluid and thermal flow', *SPIE 2005*, 624-635, (1993b).
- [33] Westerweel J., 'Fundamentals of digital particle image velocimetry', *Meas. Sci. Technol.* 8, 1379-1392, (1997).
- [34] Westerweel J., Draad A.A., van der Hoeven, J.G.Th and van Oord J. 'Measurement of fully-developed turbulent pipe flow with digital particle image velocimetry ', *Exp. Fluids* 20, 165, (1996).
- [35] Willert C.E., 'The fully digital evaluation of photographic PIV recordings', *Appl. Sci. Res.* 56,79, (1996).
- [36] Willert C.E. and Gharib M., 'Digital particle image velocimetry', *Exp. Fluids* 10 181, (1991).