



TESIS DE DOCTORADO EN FISICA

**ELASTOGRAFIA ULTRASONORA EN SÓLIDOS BLANDOS.
ANALISIS DEL PROCESO DE RETORNO TEMPORAL Y APLICACIÓN AL
MONITOREO DE TEMPERATURA**

Presentada por:

Nicolás Benech

TRIBUNAL:

Dr. Arturo Marti

Dr. Stefan Catheline

Dr. Ing. Rafael Canetti

Dr. Ariel Moreno

Dr. Carlos Negreira (orientador)

21 de febrero de 2008

Agradecimientos

Agradezco a Carlos Negreira por poner sobre la mesa las ideas que dieron origen a este trabajo. El debate de esas ideas y el amplio apoyo brindado para hacer posible mi dedicación al tema durante estos años de tesista permitieron finalmente la realización de la tesis. A Nicolás Pérez por participar del debate de ideas y estar siempre dispuesto para resolver problemas que surgen con los instrumentos del laboratorio. A Stefan Catheline porque su estadía de dos años en nuestro laboratorio nos enriqueció muchísimo académica y personalmente. A Ismael Núñez por su colaboración en las medidas de ondas de superficie. A Javier Brum y Thomas Gallot por su participación y aporte de ideas en algunos temas abordados en esta tesis. A Gabriel Montaldo por recibirme muy amablemente en París y realizar propuestas para algunos pasajes del trabajo desarrollado aquí. Por supuesto a Leti, Leandro e Ignacio que vieron con resignación que el tiempo que les dedicaba a ellos disminuía conforme avanzaba esta tesis.

INDICE

Resumen	i
Introducción	1
Capítulo 1: Elastografía	5
I. Introducción.....	5
II. Métodos elastográficos: Estado del arte.....	5
II.1 Elastografía estática.....	8
II.2 Elastografía dinámica.....	9
III. Elastografía transitoria.....	12
III.1 La interferometría speckle como método de investigación.....	12
III.2 Elastografía transitoria 1D.....	17
III.3 Viscoelasticidad.....	32
III.4 Parámetros viscoelásticos por análisis de ondas de superficie.....	36
IV. Imágenes 2D.....	43
IV.1 Imagen ecográfica 2D.....	43
IV.2 Imagen elastográfica 2D.....	50
V. Conclusión del capítulo.....	52
Capítulo 2: Elastografía por retorno temporal	57
I. Introducción.....	57
II. Retorno temporal.....	57
II.1 Retorno temporal en acústica.....	57
II.2 Retorno temporal de 1 canal en cavidades sólidas reverberantes.....	65
III. Retorno temporal en el volumen de un sólido elástico.....	68
III.1 Experiencia de retorno temporal en geles.....	68
III.2 Experiencia virtual de retorno temporal.....	73
III.3 Retorno temporal en 2D.....	76
III.4 Aplicación a la estimación de la elasticidad.....	82
III.5 Efecto de la atenuación en las experiencias.....	91
III.6 Experiencia de elastografía por retorno temporal <i>in vivo</i>	94
III.7 Elastografía “libre” de ultrasonido.....	95
IV. Conclusión del capítulo.....	99
Capítulo 3: Monitoreo de cambios de temperatura por elastografía	103
I. Introducción.....	103
II. Efectos de la temperatura en la elasticidad.....	103
III. Estimación de temperatura por ultrasonido.....	106

III.1 Modelo.....	107
III.2 Resultados experimentales.....	110
IV. Variación de la elasticidad de corte con la temperatura.....	115
IV.1 Variaciones globales de temperatura.....	115
IV.2 Variaciones locales de temperatura.....	117
V. Conclusión del capítulo.....	129
Capítulo 4: Conclusión general y trabajos futuros.....	131
Apéndice A: Problema de Lamb.....	136
I. Planteo del problema.....	136
II. Solución.....	138
II.1. Inversión de las transformadas.....	141
III Solución final: Respuesta al impulso.....	148
IV Diagrama de directividad.....	149
Apéndice B: Solución aproximada al problema de Lamb.....	150
I. Introducción.....	150
II. Solución.....	150
II.1 Inversión de las transformadas.....	151
III. Aplicación a la elastografía transitoria.....	153
III.1 Fuente puntual.....	153
III.2 Fuente extendida.....	155
Apéndice C: Cavidad cerrada de retorno temporal en un sólido elástico.....	157
I. Introducción.....	157
II. Planteo del problema.....	157
II.1 Primer paso: Etapa de registro.....	157
II.2 Segundo paso: Etapa de reemisión.....	158

RESUMEN

Este trabajo está dedicado al estudio de la propagación de ondas de baja frecuencia en sólidos blandos. Los sólidos blandos son aquellos en los que el módulo elástico de compresión es varios órdenes de magnitud superior al módulo elástico de corte. La idea básica consiste en emplear las ondas acústicas a frecuencias ultrasonoras (~ 5 MHz) para detectar el campo de desplazamientos generado por una fuente de baja frecuencia (10-500 Hz) externa al medio. La medida está basada en la interferometría speckle ultrasonora y permite estimar desplazamientos con una resolución menor a la longitud de onda. El campo ondulatorio de baja frecuencia contiene información acerca de las propiedades elásticas del medio en el cual se propaga. El objetivo del trabajo es medir el módulo elástico de corte a partir de esta información. En la literatura se han propuesto muchos métodos con este objetivo y el nombre en común para todos ellos es *elastografía*.

En esta tesis mostramos que los métodos basados en ultrasonido propuestos dependen de una u otra manera de la difracción del campo de ondas. A fin de evitar estos efectos hemos elaborado un método elastográfico denominado *elastografía por retorno temporal*. Este método está basado en la invariancia de la ecuación de ondas bajo la transformación $t \rightarrow -t$ y en el teorema de reciprocidad del campo elástico. En el trabajo desarrollado en este manuscrito proponemos un análisis teórico-experimental original del proceso de focalización en el volumen de las muestras utilizadas. Como resultado de este análisis proponemos la aplicación del proceso a la medida de la elasticidad de corte en geles de agar-gelatina, tejidos biológicos *in vivo* o quesos. Los resultados obtenidos permiten pensar en el desarrollo de un método con diversas aplicaciones concretas por ejemplo en medicina o en control de calidad de algunos agroalimentos.

En la parte final del manuscrito se estudian los efectos que produce el cambio de temperatura sobre la propagación de ondas elásticas en sólidos blandos. En particular se analizan los efectos sobre el método de interferometría speckle utilizado para registrar el campo de baja frecuencia. Estos resultados representan un primer paso hacia un sistema que permita aplicar la elastografía como método de monitoreo de termoterapia por ultrasonido.

INTRODUCCION

Los temas abordados en esta tesis se enmarcan dentro de la acústica física, la elastodinámica y el tratamiento de señales. Estos temas se enfocan en el desarrollo y aplicación de métodos experimentales para medir localmente y en forma no invasiva la elasticidad (módulo de Young) en sólidos blandos. Esta aplicación de nuestro trabajo es llamada comúnmente en la literatura como *elastografía*. La elastografía es un área activa de investigación y surge motivada por su aplicación en medicina donde se conoce que algunas patologías están asociadas a un cambio en la elasticidad del tejido. Por ejemplo los tumores en el seno o en la próstata suelen presentarse como regiones más duras que el tejido circundante. También la cirrosis hepática se traduce en una dureza anormal del hígado. Esta información no es revelada sistemáticamente a través de los métodos ultrasonoros de pulso-eco convencionales donde la información que se obtiene es acerca de la compresibilidad del tejido. Tradicionalmente el médico tratante hace uso de la palpación para detectar nódulos duros. Pero su uso queda restringido a zonas del cuerpo accesibles y a un tamaño y contraste que pueda detectarse a través del tacto. La elastografía en forma genérica es por lo tanto un método de investigación que brinda una medida cuantitativa de la elasticidad a nivel local (hoy en día en la escala de $\sim 1\text{mm}$), en forma no invasiva, es decir, un sistema de “palpación remota”. Sin embargo, los métodos de investigación en la elastografía se extienden más allá del ámbito de la medicina. En este trabajo mostramos resultados de investigaciones fundamentales sobre la propagación de ondas elásticas en sólidos así como aplicaciones al control de calidad de agroalimentos.

Es posible hallar en la literatura diversas propuestas sobre la forma de alcanzar el objetivo de la elastografía. En forma resumida la idea básica en todas ellas es medir las deformaciones provocadas por la aplicación de una excitación externa ya sea estática o dinámica de baja frecuencia (10-1000 Hz). En el capítulo 1 se hace un breve repaso de las propuestas más relevantes en la materia donde se muestran los avances y las limitaciones en cada una. También allí describimos la *elastografía transitoria ultrasonora* que es el método que utilizamos en nuestro laboratorio y al que hemos contribuido en trabajos anteriores^(*). Este método pertenece a la categoría de elastografía dinámica ya que se basa en la propagación de ondas de corte de baja frecuencia. La medida de las deformaciones internas de la muestra reposa sobre la llamada *interferometría speckle acústica*. Este es un método de investigación que permite medir desplazamientos con una precisión muy inferior a la longitud de onda ultrasonora y que también se describe con detalle en el capítulo 1. Pero su alcance va más allá de la elastografía en sí. La interferometría speckle permite medir desplazamientos en el volumen de un sólido elástico en forma no invasiva. Esta característica

^{*} N. Benech, “Elastografía ultrasonora de medios viscoelásticos con ondas de cizalla de baja frecuencia”, Tesis de maestría en física, Universidad de la República – PEDECIBA, (2004).

representa una ventaja (comparado con otros métodos “clásicos” de evaluación del campo en sólidos donde usualmente se accede a desplazamientos superficiales) a la hora de comprobar experimentalmente algunas de las predicciones de la elastodinámica. En particular en el capítulo 1 se muestran resultados de nuestras investigaciones sobre la directividad de la fuente y la contribución de diferentes términos (campo cercano, onda de compresión, ondas de cabeza, ondas de superficie) al campo vectorial de difracción. La teoría involucrada en estos conceptos se desarrolla en los apéndices A y B.

Uno de los temas más cautivantes en la acústica física en los últimos años es el desarrollo del *retorno temporal*. Este concepto, que es común entre muchas áreas de la física, está basado en la invariancia de la dinámica del sistema bajo la transformación $t \rightarrow -t$. En particular en acústica el retorno temporal es el método más eficiente de focalizar una onda en el dominio espacio-temporal y ha tenido un desarrollo teórico-experimental con variadas aplicaciones. En el capítulo 2 se hace una descripción del concepto de retorno temporal en acústica y las condiciones experimentales necesarias para llevarlo a la práctica. Una de ellas está relacionada con el llamado *espejo de retorno temporal* de un canal en cavidades sólidas reverberantes. Allí se hace uso de las múltiples reflexiones del campo en los bordes para generar un campo difuso en su interior que evita la necesidad de usar una electrónica multivía para lograr la focalización del campo. En el capítulo 2 aplicamos este concepto a la elastografía. Gracias al método de interferometría speckle, podemos por primera vez hacer un estudio experimental del retorno temporal en el volumen de un sólido elástico donde se muestran algunas características particulares del proceso relacionadas al carácter vectorial del campo y la presencia de términos de campo cercano. Este proceso de focalización pone en juego las propiedades mecánicas de la cavidad. La “calidad” de la focalización espacial, es decir el ancho espacial del foco y su relación con lóbulos secundarios, está vinculada a la longitud de onda del campo mediante el criterio de Rayleigh. Esta relación entre la resolución del foco y la longitud de onda no se deriva en forma sencilla de las funciones de Green de la elastodinámica como se muestra en el apéndice C. La dificultad radica en que debido a la directividad de los distintos términos que intervienen en el campo elástico, el proceso de focalización no es isotrópico como en el caso de un campo escalar. En el capítulo 2 se muestra en forma experimental, validada mediante una simulación numérica del problema, cómo explotar este vínculo de manera de extraer información cuantitativa sobre la elasticidad en la muestra. Esta combinación original de la elastografía por un lado y el retorno temporal en sólidos por otro permite, junto con un tratamiento de señal adecuado, eliminar algunas de las limitaciones de los métodos elastográficos basados en ultrasonido y permite simplificar las aplicaciones *in vivo* del método.

Como en el proceso de retorno temporal solo intervienen ondas dentro del rango audible de frecuencias, es posible utilizar tecnología de baja frecuencia (sensores y electrónica) para medir el

campo sustituyendo el uso del ultrasonido. Esta variante permite medir la elasticidad en medios donde la señal de speckle es muy débil o la atenuación del ultrasonido es alta. En el capítulo 2 se muestra también una aplicación concreta a la medida de la elasticidad en quesos en el marco de un proyecto de investigación aplicada llevada adelante en nuestro laboratorio^(*).

Una de las aplicaciones más recientes de la elastografía en medicina está relacionada con la posibilidad de monitorear los efectos de acciones terapéuticas del ultrasonido. Concretamente en los últimos años existe un número creciente de investigaciones relacionadas a la cirugía acústica gracias al desarrollo de la tecnología de ultrasonido de alta potencia. El objetivo es localizar la energía acústica en una zona muy definida del tejido de manera de aumentar localmente la temperatura hasta niveles citotóxicos. De esta forma es posible destruir selectivamente un conjunto de células patológicas sin producir daño en el tejido sano circundante. El rol de la elastografía en este proceso es identificar la zona de tejido en tratamiento. Las altas temperaturas producen un cambio estructural permanente de modo que la elasticidad local aumenta significativamente respecto al tejido circundante.

Pensando en este tipo de aplicaciones investigamos en el capítulo 3 los efectos de la temperatura sobre el método de interferometría speckle y la propagación de las ondas de corte. El capítulo comienza con análisis general de un sólido termoelástico donde se muestra que la variación de temperatura produce cambios en la velocidad de propagación de las ondas elásticas junto con una deformación del medio debido a la dilatación térmica. La velocidad de la onda de compresión es sensible a pequeños cambios de temperatura lo que permite pensar en el uso del ultrasonido como herramienta para medir la temperatura en forma no invasiva. En este capítulo mostramos algunos resultados y limitaciones de un modelo lineal descrito en la literatura que relaciona la variación de velocidad y la dilatación térmica con el tiempo de vuelo del pulso ultrasonoro con este objetivo.

La medida de la velocidad de propagación de las ondas de corte por su lado no es tan directa. El mismo modelo de sólido termoelástico muestra que las ondas de corte son menos sensibles a las variaciones de temperatura. A esto debemos agregar que la variación local de la temperatura produce modificaciones sobre las señales de speckle acústico. Estas señales forman la base de nuestro método de investigación y por esta vía la variación de temperatura además de modificar el módulo de corte afecta el propio proceso de medición. En la sección final del capítulo 3 se analizan las consecuencias de estas modificaciones sobre el tratamiento de señal en elastografía transitoria. Por un lado surge de este análisis la manera de corregir algunos de estos efectos usando información disponible en estas señales cuando varía la temperatura. Esta corrección permite monitorear la evolución de elasticidad a nivel local a medida que cambia el perfil de temperatura interna en la

^{*} Proyecto PDT 34/09 “Mejora del control del proceso de fabricación y calidad de queso por aplicación de técnicas ultrasónicas”. Responsable científico: Dr. Carlos Negreira.

muestra. Por otro lado se identifican fuentes adicionales de error en la estimación de los desplazamientos por el método de interferometría speckle debido al cambio de temperatura. Los resultados presentados en el capítulo 3 constituyen un primer paso con vistas a la utilidad de la elastografía como herramienta para monitorear los efectos de la terapia ultrasonora.

CAPITULO 1

ELASTOGRAFIA

I. INTRODUCCION

Los métodos usuales de imaginería que se utilizan en medicina (radiografía, ecografía, tomografía, resonancia magnética) basan el contraste para elaborar la imagen en diferentes propiedades físicas del tejido (por ejemplo densidad o compresibilidad). Sin embargo ninguno de ellos es sensible al parámetro físico *elasticidad*. La elasticidad se refiere al módulo de Young del material que en el caso particular de tejidos (y sólidos blandos en general) es proporcional al módulo elástico de corte. Entonces surge la pregunta ¿Como medir el módulo de Young localmente y en forma no invasiva en un sólido blando? En este capítulo empezaremos por describir las distintas propuestas elastográficas que se encuentran en la literatura (basadas o no en ultrasonido). Luego describiremos con detalle la elastografía transitoria y en particular el método de interferometría speckle ultrasonora que es el método utilizado en esta tesis para medir desplazamientos al interior de la muestra. Las funciones de Green de la elastodinámica proveen el marco teórico para el análisis de los resultados obtenidos.

Todos los métodos elastográficos propuestos en la literatura han mostrado la posibilidad de detectar zonas de contraste elástico en tejidos, logrando así el objetivo de diagnosticar patologías asociadas a cambios anómalos de elasticidad. El objetivo de este capítulo es, además de describir la metodología utilizada, identificar las limitaciones de cada método a fin de poder visualizar claramente las ventajas del nuevo método elastográfico propuesto en esta tesis (elastografía por retorno temporal en el capítulo 2).

II. METODOS ELASTOGRAFICOS: ESTADO DEL ARTE

La determinación de los parámetros elásticos se debe hacer en base a un modelo reológico del material bajo estudio. En general en elastografía el modelo utilizado para los tejidos es en primera aproximación el de un medio elástico, lineal e isotrópico. En estas condiciones la ecuación que relaciona el tensor de esfuerzos τ_{ij} con el tensor de deformaciones e_{ij} (ecuación constitutiva) se puede escribir como ⁽¹⁾:

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

donde λ y μ son los módulos elásticos de Lamé. La relación entre el tensor de deformaciones y el campo de desplazamientos $\vec{u}(\vec{r})$ está dada por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

Por su lado, asumiendo la ausencia de fuerzas de volumen, la relación fundamental de la dinámica se expresa como:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en esta última expresión encontramos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

El problema en elastografía se puede resumir de la siguiente manera. Dado el campo de desplazamientos $\vec{u}(\vec{r})$ (medido experimentalmente) y la densidad ρ (que se asume conocida en todo el medio), determinar los parámetros de Lamé $\lambda(\vec{r})$ y $\mu(\vec{r})$ de manera de satisfacer la ecuación (4). Este es el llamado *problema inverso en elasticidad*^(*). Resolver este problema significa conocer todas las componentes del campo de desplazamiento $\vec{u}(\vec{r})$ en la región de interés. Sin embargo, esta información no siempre es accesible experimentalmente. El problema se debe simplificar en base a ciertas hipótesis y evidencias empíricas. En primer lugar podemos considerar que la variación espacial de los coeficientes elásticos es lenta y por lo tanto que la ecuación (4) es válida localmente con coeficientes constantes (medio homogéneo a trozos)⁽²⁾:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (5)$$

Tomando la divergencia en esta expresión encontramos:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

Esta ecuación muestra que la divergencia del campo satisface la ecuación de ondas con velocidad de propagación $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. Se trata de una onda de rotor nulo, es decir una onda de compresión. Por lo tanto c_p es la velocidad de propagación del sonido en el sólido. Empíricamente se conoce que esta velocidad es de ~ 1500 m/s en tejido blando⁽³⁾. Si trabajamos en un rango de frecuencias de modo que la longitud de onda correspondiente λ_p cumpla $\lambda_p \gg L$ donde L representa una dimensión característica del medio, entonces la variación espacial de la divergencia

* El problema directo se refiere a hallar el campo de desplazamientos $\vec{u}(\vec{r}, t)$ conociendo las condiciones de borde y las constantes elásticas del medio. El problema inverso se refiere a hallar los módulos elásticos conociendo el campo de desplazamientos.

del campo es mínima dentro del medio y se puede asumir razonablemente que $\partial(\partial u_k / \partial x_k) / \partial x_i \approx 0$. Si consideramos que L es del orden de 10^{-1} m entonces la condición sobre la frecuencia de excitación f_0 para que se cumpla esta aproximación es:

$$f_0 \ll \frac{c_p}{L} \approx 15000 \text{ Hz}$$

En elastografía usualmente se trabaja con frecuencias que varían entre 10 y 1000 Hz para cumplir con esta condición. Bajo esta aproximación la ecuación (5) queda:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (7)$$

Esta ecuación muestra que cada componente del campo de desplazamientos satisface la ecuación de ondas en forma desacoplada de las demás. La velocidad de propagación es $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$. Podemos ver que esta es la velocidad de propagación de las ondas de corte en el sólido. Tomando el rotor en la ecuación (5) encontramos:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \varepsilon_{ijk} \right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \varepsilon_{ijk} \right) \quad (8)$$

donde ε_{ijk} cumple:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si } ijk \text{ es permutación par de } 123 \\ -1 & \text{Si } ijk \text{ es permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{Si } ijk \text{ contiene índices repetidos} \end{cases}$$

Por lo tanto el rotor de los desplazamientos también satisface la ecuación de ondas con velocidad de propagación $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$. Se trata de una onda de divergencia nula, es decir una onda de corte. La velocidad c_s es entonces la velocidad de propagación de las ondas de corte en el sólido. En tejido blando su valor es del orden de 1-10 m/s⁽³⁾.

La relación entre las velocidades de propagación de cada onda revela la diferencia del orden de magnitud de cada módulo de Lamé en tejidos blandos:

$$\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} \approx 150 - 1500$$

Es decir que $\lambda \gg \mu$. Se denomina sólido blando a todos los materiales que cumplen esta característica donde el tejido blando es un representante entre otros posibles materiales. Durante esta tesis por ejemplo, trabajaremos con geles de agar-gelatina que cumplen esta condición como se muestra más adelante en este capítulo, simulando las propiedades mecánicas de tejido blando. El módulo de Young Y en un sólido elástico e isotrópico se define como⁽¹⁾:

$$Y = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad (9)$$

Utilizando la condición $\lambda \gg \mu$ encontramos:

$$Y \cong 3\mu \quad (10)$$

Es decir que el módulo de Young es proporcional al módulo de corte μ e independiente del módulo de compresión λ . Esto quiere decir que las imágenes ecográficas, que ponen en juego la compresibilidad del medio, son “insensibles” a cambios en la elasticidad del tejido. En elastografía el objetivo es medir el campo de desplazamientos $\vec{u}(\vec{r})$ de modo de obtener el módulo de corte μ invirtiendo localmente la ecuación (7). A continuación describiremos diferentes propuestas tomadas de la literatura que tienden a este objetivo.

II.1 Elastografía estática

La elastografía estática, fue uno de los primeros métodos en obtener imágenes relativas de elasticidad en un medio no homogéneo⁽⁴⁾. La base del método consiste en comprimir en forma estática al medio y medir la componente de la deformación interna así provocada en la dirección del haz ultrasonoro (dirección del eje z) por un método basado en las señales de speckle acústico (interferometría speckle) que se describirá más adelante en este capítulo. En elastografía estática no se usa directamente la ecuación (7) ya que presenta una inconsistencia. Para una compresión estática la derivada temporal del desplazamiento es cero lo que implica una ecuación de movimiento de un medio incompresible (es decir $\nabla \cdot \vec{u} = 0$). La inconsistencia proviene del hecho de que para medios incompresibles el módulo de compresión λ es infinito de modo tal que el producto $\lambda \nabla \cdot \vec{u}$ permanezca finito en el equilibrio estático⁽²⁾. Este producto finito se conoce como la presión estática ($-p$) y representa una incógnita adicional en la ecuación del movimiento:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (11)$$

La presión estática dentro del medio depende fuertemente de las condiciones de borde y no es constante en el caso más general. La solución analítica al problema de hallar la tensión interna conociendo las condiciones de borde (problema de Boussinesq) no es simple en un caso genérico. Un caso particular del problema es el de un medio semi-infinito deformado por un compresor circular de radio R para el cual existe una solución analítica que describe las componentes de la tensión interna en función de la profundidad⁽⁵⁾. La expresión matemática final muestra que si las dimensiones del compresor son mucho mayores que la profundidad de observación ($R \gg z$), la tensión se puede considerar uniforme dentro del medio. En estas condiciones el primer término de la ecuación (11) se anula y es posible hallar el módulo de corte μ . Sin embargo la profundidad de

exploración en el cuerpo humano alcanza algunos centímetros por lo que se necesitan compresores de gran tamaño que limitan la aplicación de la elastografía estática. Cuando las condiciones experimentales no son tan simples, algunos autores recurren a una solución numérica del problema (normalmente mediante elementos finitos⁽⁶⁾). Aun en este caso es necesario conocer en detalle las condiciones de borde. Pero estas condiciones son bastante complejas de modelizar en experiencias *in vivo* debido a la presencia de otros órganos, de huesos, etc. Por lo tanto la elastografía estática es en general un método cualitativo y de aplicación *in vivo* limitada a ciertas regiones del cuerpo como el seno y la próstata (vía rectal).

II.2 Elastografía dinámica

En elastografía dinámica se busca hallar el módulo de corte μ en base a la ecuación (7). El método, como lo dice el nombre, es dinámico y se basa en la propagación de ondas de baja frecuencia en el medio. La forma de medir los desplazamientos varía según los autores pero básicamente podemos dividirlo en dos grandes grupos. Por un lado las medidas del campo basadas en ultrasonido y por otro las que están basadas en la resonancia magnética nuclear. A continuación describiremos brevemente cada uno de estos métodos.

II.2.A Elastografía dinámica por ultrasonido

Con la electrónica disponible hoy en día, las medidas de desplazamientos en base a ultrasonido sólo se pueden hacer en un plano que queda determinado por la dirección del haz ultrasonoro (que llamaremos z) y una dirección lateral (que llamaremos x) que queda determinada por la dirección del arreglo lineal de transductores (cabezal multielemento) utilizado como se muestra en la figura 1.

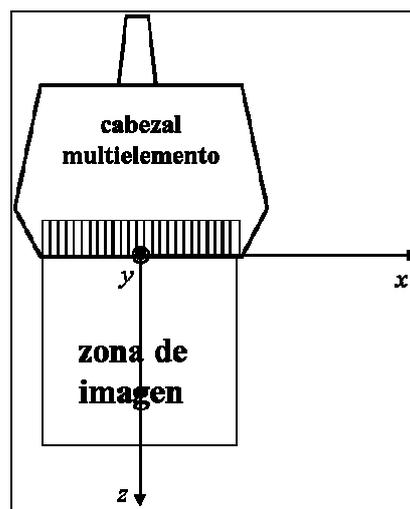


Figura 1. Con un cabezal multielemento es posible acceder a señales ecográficas contenidas en un plano dado por la dirección de propagación del ultrasonido (eje z) y la dimensión lateral del cabezal (eje x).

En estas condiciones experimentales la información sobre los desplazamientos en la dirección fuera del plano de imagen (dirección y) es inaccesible. Además de las tres componentes del campo

usualmente sólo es posible acceder con buena precisión a una de ellas, la componente en la dirección axial $z^{(7)}$. Para adaptarnos a estas condiciones reescribimos la ecuación (7) en notación vectorial para la componente z de los desplazamientos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u_z \quad (12)$$

Tomando la transformada de Fourier temporal encontramos:

$$\rho \omega^2 \tilde{u}_z(x, z, \omega) = \mu \nabla^2 \tilde{u}_z(x, z, \omega) \quad (13)$$

En esta ecuación interviene el laplaciano de la componente z al que no se puede acceder experimentalmente debido a la falta de información sobre la dependencia $u_z(y)$. Esta falta de información se debe suplir haciendo hipótesis adicionales sobre el campo. La menos restrictiva de ellas consiste en suponer que la onda no difracta en la dirección $y^{(2)}$:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_z &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &\ll \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 u_z \cong \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (14)$$

Con estas simplificaciones el módulo de corte se puede estimar con los datos experimentales a partir de:

$$\mu = \frac{\rho \omega_0^2 \tilde{u}_z}{\partial^2 \tilde{u}_z / \partial x^2 + \partial^2 \tilde{u}_z / \partial z^2} \quad (15)$$

donde ω_0 es la frecuencia central de la vibración. En la práctica se deben buscar las condiciones experimentales en las cuales la aproximación (14) sea válida. Una posibilidad es por ejemplo utilizar ondas planas con polarización en la dirección x . Pero el éxito en esta búsqueda es altamente dependiente del método utilizado para medir el campo de desplazamientos. En sonoelasticidad⁽⁸⁾ por ejemplo la herramienta utilizada con este fin es el efecto Doppler. Utilizando una electrónica standard donde a la medida de la amplitud de la vibración se agrega un estimador de la fase, es posible obtener un mapa de desplazamientos en el plano xz . Este método sólo es capaz de medir vibraciones monocromáticas. Por lo tanto, independientemente de la fuente que se utilice, se producirán reflexiones y conversiones de modo en los bordes ya que el medio es finito y la frecuencia de adquisición de los datos es baja ($\sim 5 \text{ Hz}^{(9)}$). Pero en estas condiciones es muy difícil asegurar un campo no difractante en la dirección y . Como consecuencia el método resulta ser dependiente de las condiciones en la frontera.

Una forma de evitar esta dependencia es medir el campo de desplazamientos en su período transitorio, es decir, en tiempos anteriores a que el campo se “contamine” por las reflexiones y

cambios de modo en los bordes. Esta técnica que se conoce como elastografía transitoria basa la medida de desplazamientos en la interferometría speckle. El “costo” del método es que se necesita una electrónica dedicada capaz de adquirir datos con una frecuencia de muestreo lo suficientemente elevada como para seguir la propagación de la onda en el medio antes de la reflexión en los bordes. Describiremos con más detalle este método en la sección III.

II.2.B Elastografía dinámica por resonancia magnética

La Resonancia Magnética Nuclear (RMN) representa un método alternativo al ultrasonido para medir los desplazamientos internos generados por la excitación mecánica⁽¹⁰⁾. En la resonancia magnética un campo magnético uniforme produce un movimiento de precesión de los spines en torno a la dirección del campo. La frecuencia de precesión es proporcional a la intensidad del campo (que es del orden de 1-3 T en los equipos de uso médico). En una experiencia de RMN se aplica un pulso de radiofrecuencia superpuesto al campo principal \vec{B}_0 . Si la frecuencia de este pulso es igual a la frecuencia de precesión de los spines nucleares ω_0 , estos se excitan y vuelven luego a su estado base emitiendo una señal electromagnética de frecuencia ω_0 que se detecta en un resonador. La amplitud recibida es proporcional a la densidad protónica en resonancia. Si al campo magnético principal se superpone un gradiente magnético en una determinada dirección, solo los spines localizados en torno a una posición dada \vec{r}_0 participan en la señal de frecuencia ω_0 fija que recibe el resonador. Dándole un carácter dinámico al gradiente para que varíe su dirección se puede aislar la señal de un pequeño volumen en la muestra. La imagen global se construye punto a punto por un tratamiento de señal apropiado.

Cuando en el tejido se propaga una onda de baja frecuencia la señal electromagnética emitida por los spines resonantes sufre una modificación en la fase. Esta modificación entre dos instantes t_1 y t_2 contiene la información a cerca del desplazamiento $\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)$ del punto dado. La ventaja de la elastografía por resonancia magnética es la precisión en la medida de los desplazamientos (~ 200 nm) y fundamentalmente la capacidad de medir todas las componentes del campo vectorial. Una vez medido el campo es posible estimar la elasticidad local a partir de la ecuación (7). Debemos notar que en este caso es posible medir experimentalmente la dependencia $u_z(x, y, z)$ y no es necesario hacer aproximación alguna sobre el campo de desplazamientos. Esta característica hace que los algoritmos de estimación local del módulo de corte permitan acceder a mapas muy precisos de elasticidad en tejidos⁽¹¹⁾. Las imágenes elastográficas que se obtienen no son en tiempo real ya que el tiempo de adquisición está limitado por el tiempo de relajación de los protones que es del orden de 1 segundo. Por esta razón, al igual que en sonoelasticidad, la excitación aplicada al tejido debe ser cíclica. Introduciendo un retardo variable entre la excitación de baja frecuencia y cada adquisición es posible construir la “evolución temporal” del campo de desplazamientos. Una

experiencia de elastografía por resonancia magnética dura del orden de 30-60 s (dependiendo del número total de cuadros en la evolución temporal). En experiencias *in vivo* esta condición requiere que el tejido bajo estudio se encuentre inmobilizado ya que el movimiento del paciente produce artefactos en la imagen final.

III ELASTOGRAFIA TRANSITORIA

El concepto de elastografía transitoria fue introducido por S. Catheline⁽¹²⁾. Como ya mencionamos, la ventaja de esta aproximación al problema es que el método resulta ser independiente de las condiciones de borde. Además, la modelización del problema se puede hacer a través de las funciones de Green de la elastodinámica en un medio infinito, funciones analíticas conocidas y que se pueden evaluar en forma numérica sin dificultad. El método de medida del campo de desplazamientos está basado al igual que en elastografía estática en la interferometría speckle que describimos a continuación con detalle ya que es el método de investigación utilizado en esta tesis.

III.1 La interferometría speckle como método de investigación

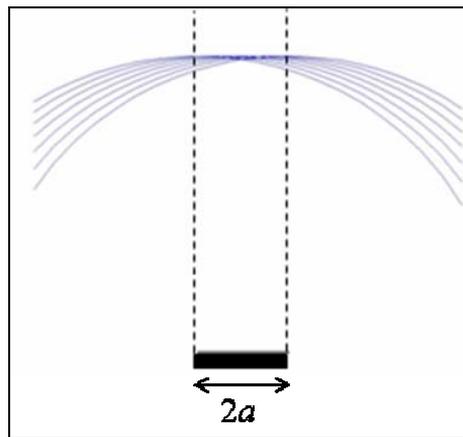


Figura 2 Representación gráfica del concepto de volumen isócrono. El volumen se compone de todos los puntos del espacio que en un instante t dado son capaces de contribuir a la señal recibida por el transductor. En esta figura el diagrama de radiación del transductor se confunde con su sombra por simplicidad.

Al utilizar ultrasonido pulsado, es posible relacionar el tiempo de vuelo t en una señal ultrasonora con la profundidad z de la estructura que le dio origen:

$$z = \frac{c_p t}{2} \quad (16)$$

donde c_p es la velocidad de sonido en el medio. Esta posibilidad está estrechamente relacionada con el concepto de volumen isócrono⁽¹³⁾ introducido a partir del formalismo impulsional de la difracción⁽¹⁴⁾. Se define el volumen isócrono como el conjunto de puntos del espacio que en cada instante t son capaces de contribuir a la señal ecográfica. La figura 2 muestra una representación

bidimensional de este concepto para un transductor monoelemento de radio a . Por simplicidad en el esquema, el diagrama de radiación del transductor se confunde con su sombra.

Extendiendo el concepto podemos considerar que la señal recibida entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 se compone del conjunto de volúmenes isócronos entre t_1 y t_2 . La señal de speckle acústico depende entre otros factores de la cantidad de difusores, de la posición relativa entre sí y de la diferencia de impedancia acústica de cada difusor respecto al medio de propagación. En un tejido estas características son muy heterogéneas por lo que podemos considerar entonces que se trata de una señal aleatoria espacialmente. Sin embargo no lo es en el tiempo. Si la posición relativa de los difusores no varía, la señal de speckle acústico recibida por el transductor tampoco lo hace. Por lo tanto la señal contiene una *firma acústica* única entre los instantes t_1 y t_2 como se muestra en la figura 3. Cuando el medio sufre una deformación (por la propagación de la onda de baja frecuencia) la firma acústica se modifica. Si la deformación es pequeña, podemos considerar en primera aproximación que su efecto es simplemente un corrimiento δt de la señal en el eje de tiempo. La base del método de interferometría speckle es estimar el desplazamiento local $\delta z = c_p \delta t / 2$ a partir de un algoritmo de correlación de las señales de speckle acústico aplicado localmente.

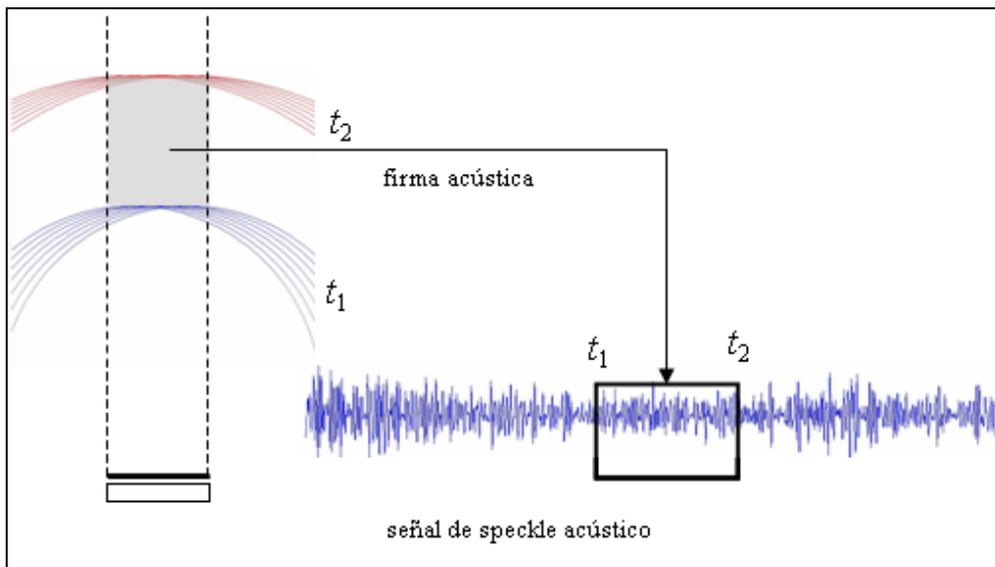


Figura 3 La señal recibida entre los instantes t_1 y t_2 contiene la contribución de los difusores dentro del conjunto de volúmenes isócronos entre t_1 y t_2 y representa una firma acústica única.

III.1.A Algoritmo de correlación

Consideremos dos señales de speckle consecutivas como se muestra en la figura 4. La diferencia entre estas dos señales puede ser debida a la compresión estática o a la propagación de la onda de baja frecuencia. Consideremos también una ventana temporal $X(t)$ de ancho $\Delta t = t_2 - t_1$ en la señal 1. Esta señal contiene una firma acústica única de los difusores que contribuyen a la señal entre t_1 y t_2 . El objetivo del tratamiento de señal es medir el corrimiento δt de esta firma entre las señales 1 y 2.

Para ello se toman una serie de ventanas $Y_j(t)$ en la señal 2 en torno a la posición de la ventana $X(t)$ y se calcula la covarianza normalizada $R(t_j)$ entre $X(t)$ e $Y_j(t)$:

$$R(t_j) = \frac{\sum_{\Delta t} (X(t) - \bar{X})(Y_j(t) - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{\Delta t} (X(t) - \bar{X})^2 \sum_{\Delta t} (Y_j(t) - \bar{Y})^2}} \quad (17)$$

donde \bar{X} (\bar{Y}) es el valor medio de la ventana temporal. La posición del máximo de correlación indica el corrimiento δt de la firma acústica como se muestra en la figura 4. El desplazamiento δz se obtiene a partir de la fórmula de modo ecográfico:

$$\delta z = \frac{c_p \delta t}{2} \quad (18)$$

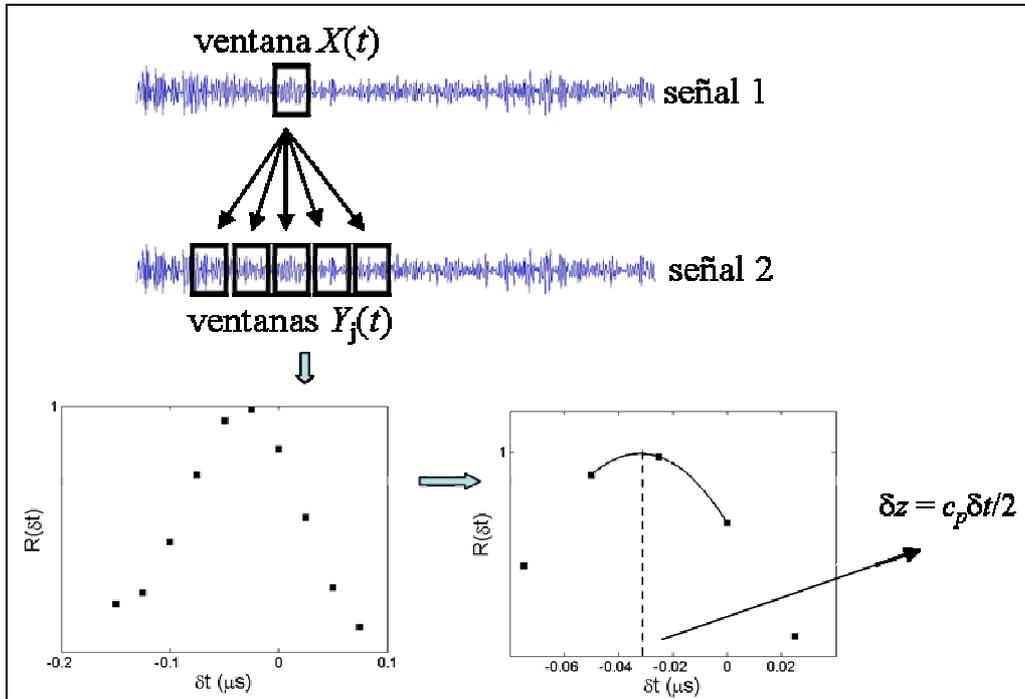


Figura 4 La firma acústica en la ventana $X(t)$ de la señal 1 se correlaciona con diferentes ventanas $Y_j(t)$ en la señal 2. Para mejorar la precisión de la estimación del desplazamiento ajustamos el entorno del máximo de correlación con una parábola

El desplazamiento mínimo que se puede medir de esta forma está dado por la frecuencia de muestreo de la señal acústica f_s . En el caso de nuestro laboratorio la electrónica permite un valor de muestreo de 40 MHz por lo tanto el desplazamiento mínimo es $\sim 20 \mu\text{m}$. Este valor se puede mejorar a partir de una interpolación de las señales de speckle dando por lo tanto un sobre muestreo a la misma. Sin embargo se obtiene el mismo resultado si la interpolación se hace sobre el coeficiente de correlación $R^{(12)}$. Existen en la literatura diferentes propuestas sobre como realizar la

interpolación. En nuestro caso preferimos una interpolación parabólica por su simplicidad y bajo costo computacional (línea continua en la figura 4).

III.1.B Precisión y límites del método

A partir de un modelo para las señales de speckle, es posible obtener un límite inferior en la estimación del corrimiento temporal $\sigma(\delta t)$ (límite inferior de Cramér-Rao)⁽¹⁵⁾:

$$\sigma(\delta t) \geq \sqrt{\frac{3}{2f_0^3 \Delta t (B^3 + 12B)} \left[\frac{1}{\zeta^2} \left(1 + \frac{1}{SNR^2} \right)^2 - 1 \right]} \quad (19)$$

Esta ecuación muestra cuales son los factores que afectan a la resolución del método. Ellos son: el ancho de la ventana temporal Δt , la frecuencia central del transductor f_0 , su ancho de banda B , la relación señal/ruido SNR y la decorrelación ζ de las señales de speckle como resultado de la deformación. En elastografía se trata de minimizar el valor de $\sigma(\delta t)$ eligiendo adecuadamente estos parámetros. En la práctica no es fácil optimizar todos ellos a la vez. Por ejemplo cuanto mayor es la frecuencia central del transductor f_0 , mejor es la estimación del corrimiento temporal. Sin embargo el coeficiente de atenuación del sonido en los tejidos aumenta con la frecuencia de modo que la relación señal/ruido (SNR) decrece con la profundidad y por lo tanto la profundidad de exploración se ve limitada. Por otro lado la estimación de δt mejora cuanto mayor es el ancho de la ventana temporal Δt . Pero esto atenta contra la resolución espacial del método como veremos más abajo. Por último, ζ es un parámetro cuyo valor está entre 0 y 1 que mide el nivel de correlación de la señal en función de la deformación $s = \Delta l / l_0$ del medio⁽¹⁶⁾:

$$\zeta = \frac{2}{\left[\left((1-s)^2 + 1 \right) \left(\left(\frac{1}{1-s} \right)^2 + 1 \right) \right]^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi f_0}{B^2} \right)^2 \right] \frac{s^2}{(1-s)^2 + 1}} \quad (20)$$

La deformación provocada por la compresión o por la propagación de una onda de baja frecuencia produce inevitablemente la decorrelación en la señal de speckle (es decir la correlación antes y después de la deformación nunca es igual a 1). Esta decorrelación se produce por un acortamiento (o estiramiento) de la señal y por los movimientos laterales que no pueden ser evaluados con el transductor como se muestra en la figura 5.

En elastografía estática existe una amplia literatura tendiente a mejorar la calidad final en un elastograma maximizando el valor de ζ . Este es el objetivo de un tratamiento de señal que consiste en “estirar” las señales de speckle comprimidas a fin de mejorar la correlación con la señal sin comprimir⁽¹⁷⁾. Para aplicar la corrección es necesario conocer *a priori* el nivel de deformación del medio. Como esta información no es accesible antes de realizar la medida, se hacen medidas

exploratorias antes de aplicar el algoritmo de corrección. También en elastografía estática se ha propuesto corregir el elastograma por los movimientos laterales del medio a partir de un modelo de un sólido incompresible⁽⁷⁾. En fin la literatura al respecto es amplia pero debe notarse que estas correcciones si bien mejoran la calidad final del elastograma tienen un alto costo computacional de modo que el ritmo de formación de imágenes es cada vez más lento. Al igual que en elastografía por resonancia magnética una experiencia puede durar varios segundos produciendo artefactos en la imagen final debido a movimientos en el paciente.

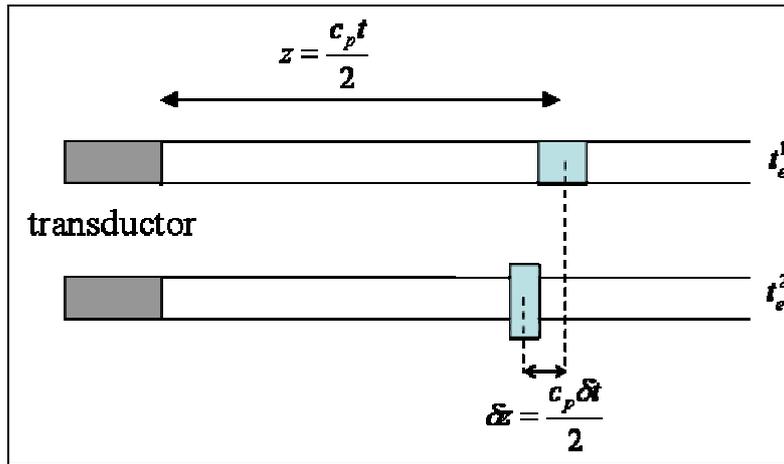


Figura 5 Un elemento de volumen del medio identificado con el instante t se desplaza y se deforma entre los tiempos t_e^1 y t_e^2 como consecuencia de la propagación de la onda de baja frecuencia o de la compresión estática. Por este motivo la correlación entre las señales de speckle asociadas no es igual a 1. El parámetro ζ mide el nivel de decorrelación entre las señales debido a esta deformación.

En elastografía transitoria estos algoritmos de corrección no son en general aplicables directamente porque el nivel de deformación no es fácilmente controlable y además es dependiente del tiempo. Un concepto útil para tener en cuenta en las experiencias de elastografía transitoria es la existencia de un filtro de deformación⁽¹⁸⁾. En efecto, si la deformación en el medio es muy débil, el algoritmo de correlación no la puede medir pues cae dentro de la incertidumbre. Por otro lado una deformación muy importante provoca la decorrelación de las señales de speckle con un resultado pobre en la estimación del corrimiento temporal. Por lo tanto existe un filtro “pasabanda” en deformación que maximiza la relación señal/ruido en el resultado final.

La configuración experimental que utilizamos en nuestro laboratorio incluye un transductor ultrasonoro de 5 Mhz, con un ancho de banda de $\sim 30\%$. El ancho temporal de las ventanas es usualmente de $2.4 \mu s$ (equivalente a 6 longitudes de onda). El parámetro ζ depende de la deformación del medio que a su vez depende de la amplitud y frecuencia de la excitación utilizada. Nuestra experiencia indica que los niveles de deformación máxima alcanzados ($\sim 3\%$) no son una limitante para el método. Por último, la relación señal ruido (SNR) depende de la muestra utilizada. En los geles de agar-gelatina es, en general, del orden de 20-25 dB. En algunas experiencias

realizadas con carne vacuna esta relación es algo menor (12-20 dB). Cuando sustituimos los parámetros de esta configuración en (19) encontramos que el límite inferior en la estimación de los desplazamientos $\sigma(\delta z) = c_p \sigma(\delta t)/2$ está entre 2 y 8 μm (dependiendo fundamentalmente de la SNR). Es decir que el método de interferometría speckle permite medir desplazamientos con una precisión muy inferior a la longitud de onda ultrasonora que es de 300 μm trabajando a 5 MHz.

III.2 Elastografía transitoria 1D

En elastografía transitoria 1D se utiliza un transductor monoelemento en la configuración experimental. Este es el tipo de medidas que podemos hacer en nuestro laboratorio ya que la electrónica que disponemos es de un solo canal. Como consecuencia accedemos solamente a una componente del campo vectorial de desplazamientos que identificaremos con la componente en la dirección z . Con esta única información se debe hacer una hipótesis más restrictiva sobre la vibración a fin de poder resolver el problema inverso⁽¹⁹⁾:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (21)$$

Esta ecuación implica la propagación de una onda plana en la dirección z . En las aplicaciones prácticas no siempre es posible enviar una onda plana al medio. Por lo tanto lo que es un problema inverso perfecto para una onda plana es una solución aproximada para el caso más general de una onda difractante. Esta sección está dedicada principalmente al estudio de la difracción del campo ondulatorio generado por fuentes puntuales. Conocer estas características es importante en elastografía pues permite decidir el tipo de fuente adecuada para las aproximaciones planteadas o eventualmente corregir los resultados obtenidos.

III.2.A Montaje experimental

La figura 6 muestra la configuración experimental utilizada que consta de dos partes principales, un vibrador mecánico de baja frecuencia y la electrónica de emisión-recepción de ultrasonido. El vibrador mecánico excita a un pistón circular de radio R que actúa sobre una superficie libre de la muestra. En el lado opuesto y alineado con el pistón se encuentra el transductor ultrasonoro. El generador de señales se utiliza para excitar al vibrador con una señal breve (por ejemplo un ciclo de senoide de 100 Hz). La electrónica de emisión-recepción está sincronizada con la emisión de baja frecuencia de manera que es posible seleccionar un retardo entre la adquisición ultrasonora y el envío del pulso mecánico de baja frecuencia. La parte ultrasonora del montaje incluye una electrónica que permite registrar en forma sucesiva una cantidad determinada N de señales ecográficas con una frecuencia de repetición de pulso (FRP) ajustable por el usuario. En el

laboratorio disponemos de dos equipamientos que pueden ser utilizados con este fin. La utilización de uno u otro depende de la experiencia a realizar como veremos más adelante.

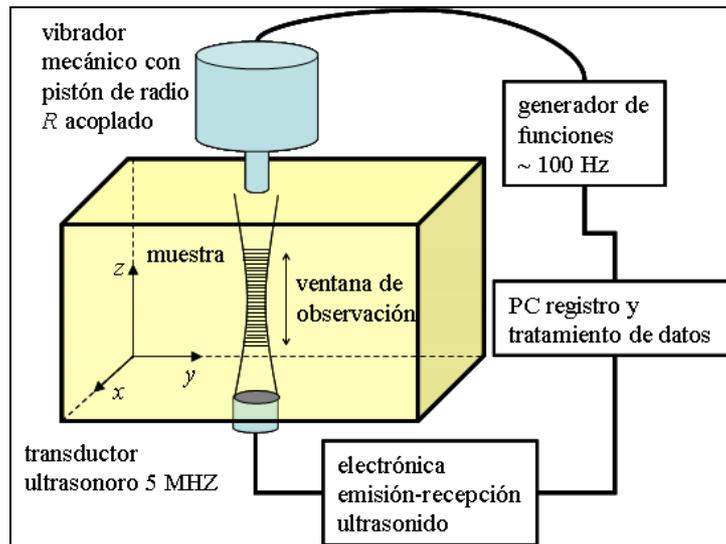


Figura 6 Montaje experimental de la elastografía transitoria 1D. El vibrador mecánico envía un pulso de baja frecuencia (~ 100 Hz) al medio a través del pistón de radio R. En forma sincronizada el transductor envía pulsos ultrasonoros con una frecuencia de repetición ajustable por el usuario. El ancho espacial y la posición de la ventana de observación son también ajustables. Las señales ecográficas se registran en el PC para un posterior tratamiento de datos.

Una de ellas, fabricada por la sociedad CORELEC, permite registrar hasta 512 señales consecutivas de 2048 puntos cada una muestreadas a 40 MHz, lo que representa una ventana de observación temporal de 50 μ s. Espacialmente esta ventana corresponde a 38 mm de longitud (asumiendo que la velocidad del sonido en el medio es 1.5 mm/ μ s). La FRP es ajustable entre 4 y 1000 Hz.

La segunda (USON II) fue fabricada a pedido del laboratorio como proyecto de final de carrera por estudiantes de ingeniería eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Esta electrónica tiene una frecuencia de muestreo fija de 40 MHz al igual que la anterior, pero permite ajustar la cantidad de puntos de cada señal. La FRP es ajustable entre 700 y 4000 Hz. La memoria disponible para la adquisición es de 128 Kb por lo que el tiempo de observación de la experiencia queda determinado por:

$$t_e = \frac{N_{\max}}{nf_r} \tag{22}$$

donde N_{\max} es la cantidad máxima de puntos que se pueden almacenar en la memoria (1.28×10^5 puntos), n es la cantidad de puntos en cada señal y f_r es la frecuencia de repetición de pulso (FRP). Como ejemplo $t_e = 64$ ms para una FRP de 1000 Hz y señales de 2000 puntos cada una.

En la mayor parte de la tesis utilizamos como muestra geles de agar-gelatina. Estos geles son fáciles de fabricar en el laboratorio. Consisten de una mezcla de agar (1 %) y gelatina (3 %) en agua a 80 °C. Esta mezcla se gelatiniza a temperatura ambiente (20 °C) y se usa para simular las

propiedades elásticas de tejidos blandos⁽²⁰⁾. Durante el enfriamiento ($\sim 50\text{ }^{\circ}\text{C}$) se agrega agar en polvo a la mezcla. Como el agar se funde a temperaturas más elevadas ($80\text{ }^{\circ}\text{C}$), este agregado permanece en estado sólido y su función es la de simular los difusores presentes en tejidos (fibras musculares, conjuntos de células, filamentos de actina, etc.) que dan origen a la señal de speckle. Los geles construidos de esta manera son homogéneos e isotrópicos en primera aproximación. Variando la proporción de agar y gelatina en la matriz se puede controlar la elasticidad final del gel.

III.2.B Tratamiento de señal

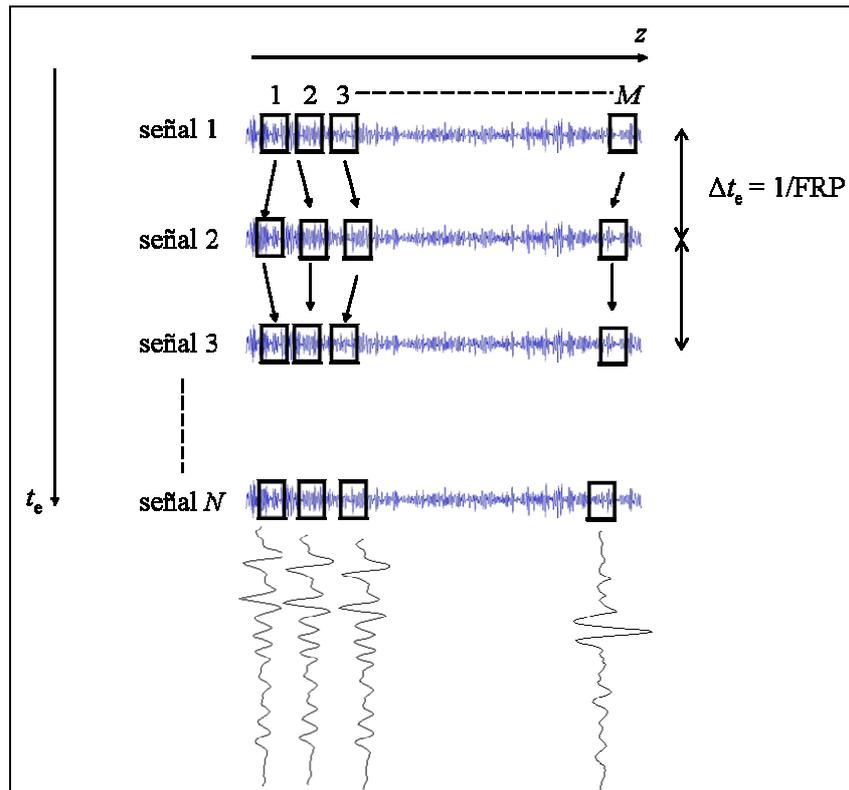


Figura 7 Esquema que describe todos los pasos del tratamiento de señal en elastografía transitoria. Cada señal de speckle se divide en M ventanas temporales cada una con una firma acústica única. Estas ventanas son objeto de la correlación descrita en el texto entre las N señales ultrasonoras consecutivas. El resultado final es una matriz \mathbf{V} que contiene la evolución temporal de los desplazamientos en función de la profundidad z

El tratamiento de señal en elastografía transitoria es una extensión del procedimiento básico de estimación del desplazamiento presentado más arriba como se muestra en la figura 7. En primer lugar este procedimiento se repite variando la posición de la ventana $X(t)$ sobre la señal de speckle. Dividiendo la señal total en M ventanas cada una de ancho Δt , obtenemos el desplazamiento en función de la profundidad $\delta z(z)$ entre dos señales consecutivas. Con el objetivo de mejorar la resolución espacial del método sin perder en la precisión de la estimación, la cantidad de ventanas temporales se elige para que éstas tengan cierto solapamiento entre sí. En nuestro trabajo normalmente utilizamos un solapamiento de 50 %. Finalmente se repite el paso anterior sobre las N señales ultrasonoras adquiridas durante la propagación de la onda de baja frecuencia. El resultado final se guarda en una matriz \mathbf{V} de dimensiones $(N-1) \times M$ donde cada columna contiene la

evolución temporal del desplazamiento a una profundidad dada. La frecuencia de muestreo de estos desplazamientos está dada por la frecuencia de repetición del pulso ultrasonoro (FRP).

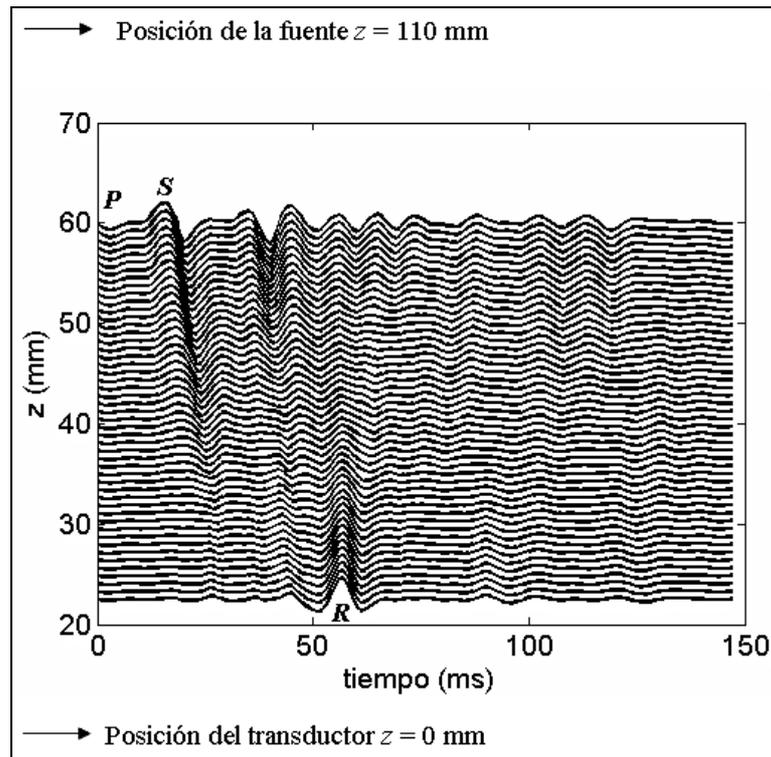


Figura 8 Sismograma experimental obtenido en un gel de agar-gelatina usando un pistón de 10 mm de diámetro. Se puede observar en la figura la onda de compresión marcada con *P*, la onda de corte marcada con *S* y la onda reflejada en el lado opuesto al pistón marcada con *R*.

Debemos notar que el tratamiento descrito mide el desplazamiento ocurrido en el intervalo de tiempo entre dos señales ultrasonoras consecutivas, es decir que lo que medimos es la velocidad de los desplazamientos o velocidad particular. La figura 8 muestra una representación gráfica de la matriz V en forma de sismograma de una experiencia realizada en un gel de agar-gelatina. La excitación mecánica en este caso es un ciclo de senoide de 100 Hz. Cada línea en la figura representa la evolución temporal de la velocidad particular en el medio a una profundidad z dada. La amplitud máxima medida en esta experiencia es de $\sim 40 \mu\text{m}$ por lo que los datos fueron amplificados para la visualización en el sismograma. La frecuencia de muestreo (FRP) en este caso es de 1 KHz. La distancia Δz entre dos líneas del sismograma queda determinada por la cantidad M de ventanas temporales en las que se divide a cada señal de speckle. En esta experiencia hemos tomado $M = 49$ lo que da un espaciado $\Delta z \cong 0.8 \text{ mm}$. Se puede observar en la figura que en $t = 5 \text{ ms}$ hay una perturbación que parece propagarse en forma instantánea en toda la profundidad (marcada con *P* en la figura). En $t = 13 \text{ ms}$ comienza otra perturbación cuya fase varía con la profundidad (marcada con *S*). Finalmente se puede observar una onda que viaja en sentido contrario a la anterior (marcada con *R*). Basaremos la interpretación de estos resultados en las funciones de Green.

III.2.C Funciones de Green

La interpretación de los resultados en un sismograma se debe hacer en base a un análisis detallado de la función de Green de la elastodinámica para un medio elástico e isotrópico. En nuestro caso debemos resolver el problema de una fuente circular que actúa normalmente sobre una superficie libre de la muestra. Como solamente estamos interesados en el período transitorio de la propagación (es decir para tiempos anteriores a la reflexión de la onda en los bordes), podemos considerar al medio como semi-infinito. Este problema, conocido como problema de Lamb, se muestra en la figura 9 y tiene solución analítica para una fuente puntual⁽²¹⁾. En la figura anterior, hemos definido la coordenada z como la distancia al transductor ultrasónico. Para evitar confusiones definiremos como z' a la distancia axial a la fuente del problema de Lamb como se muestra en la figura 9. La relación entre ambas es simplemente un cambio en el origen de coordenadas dado por la distancia D entre el transductor y el pistón:

$$z' = D - z \quad (23)$$

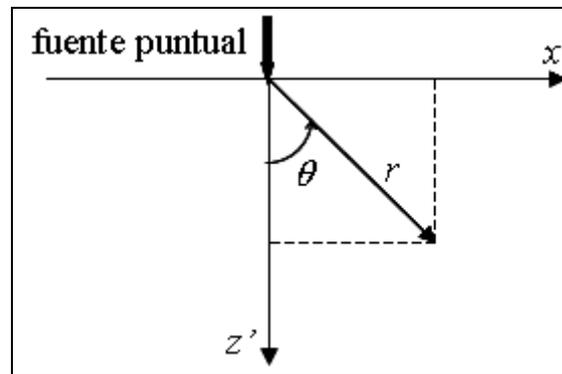


Figura 9 Definición de las coordenadas en el problema de Lamb. Una fuente puntual actúa en la dirección z' sobre la superficie libre de un sólido elástico, isotrópico que ocupa el semi-espacio $z' > 0$. El problema consiste en hallar el desplazamiento en un punto genérico dado por las coordenadas x, z' o r, θ .

Dada la simetría cilíndrica del problema alcanza con encontrar la solución en un punto genérico x, z' (o r, θ). Para resolverlo se aplica la transformada de Laplace en el tiempo y la doble transformada de Fourier en el espacio con el objetivo de manejar la ecuación de ondas y las condiciones de borde en términos algebraicos. Luego se invierten las transformaciones anteriores para obtener la solución en el dominio de espacio y tiempo usuales. La más laboriosa es la inversión de la transformada de Laplace que se hace utilizando el método de inversión de Cagniard-de Hoop⁽²¹⁾. La solución final queda expresada en términos de integrales finitas que no se pueden evaluar analíticamente excepto sobre el eje z' . En el apéndice A se muestran los pasos que llevan a la solución del problema en forma detallada. Allí se muestra que existe un término con polarización longitudinal (según z), que se propaga con la velocidad de la onda de corte. Se trata de un término de campo cercano llamado de acoplamiento al que accedemos sobre el eje de la fuente con nuestro método experimental como veremos más abajo.

La solución muestra que como consecuencia de la excitación se generan en el sólido cuatro tipos de onda cuyos frentes en un instante dado se muestran en la figura 10: dos ondas de volumen, la de compresión (**P**) y de corte (**S**), una onda que se propaga en la de superficie y tiene un modo evanescente dentro del medio (la onda de Rayleigh) y finalmente una onda llamada de cabeza (**HW**) que asegura la continuidad de la condición de esfuerzo nulo en la superficie. Esta onda es interpretada como una conversión de modo de la onda de compresión que se propaga en la superficie y que penetra al medio como una onda de volumen⁽²²⁾. La onda de cabeza tiene la particularidad de que está presente en el volumen a partir de cierto ángulo crítico con el eje z' dado por:

$$\theta_c = \sin^{-1}(c_s / c_p) \tag{24}$$

Como en sólidos blandos $c_s \ll c_p$ el ángulo crítico es prácticamente nulo por lo que podemos considerar que la onda de cabeza está presente en todo el medio. Al quedar la solución exacta del problema en términos de integrales finitas se presenta una dificultad para el análisis del campo fuera del eje debiéndose recurrir a soluciones numéricas de las mismas.

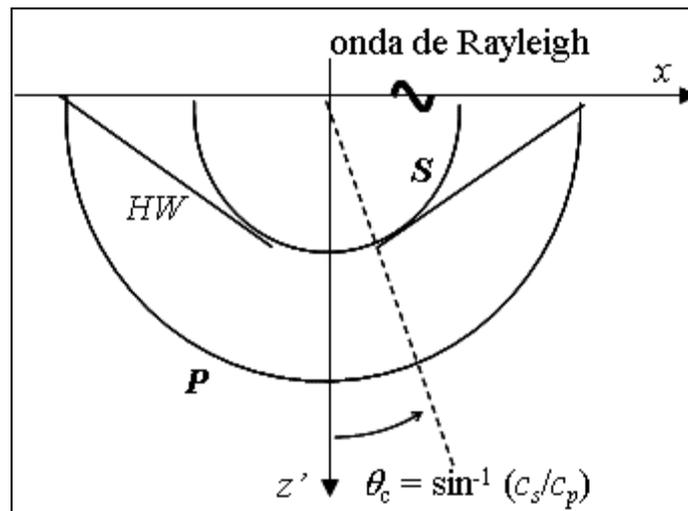


Figura 10 Frente de onda para los distintos tipos que se generan en un sólido elástico y semi infinito al aplicar una fuente puntual en la dirección z' : Onda de compresión (**P**), onda de corte (**S**), onda de Rayleigh y onda de cabeza (**HW**). Esta última tiene presencia en el volumen a partir del ángulo crítico $\theta_c = \sin^{-1}(c_s/c_p)$ con el eje z' .

Podemos simplificar el problema utilizando expresiones de la función de Green para un medio infinito adaptadas a un medio semi-infinito⁽²³⁾. Estas expresiones que se derivan en el apéndice B permiten manejar analíticamente la contribución de cada término al campo y resultan útiles sobre todo cuando se trabaja con fuentes extendidas. Sin embargo esta aproximación elimina la contribución al campo de los términos que provienen de la interfase, es decir, la onda de cabeza y la onda de superficie

III.2.C.1 La onda de cabeza

En un trabajo realizado en nuestro laboratorio hemos mostrado que la diferencia entre la solución exacta y la aproximada es más notoria fuera del eje de la fuente⁽²⁴⁾. Como es de esperar, a medida que el ángulo θ de la figura 9 aumenta, la influencia de los términos superficiales en el campo se hace más notoria. La contribución de la onda de cabeza al campo de velocidad particular puede observarse experimentalmente. Esta onda arriba a una posición (r, θ) del medio en el tiempo t_{hw} dado por (ver apéndice A):

$$t_{hw} = \frac{r}{c_p} \left[\sqrt{(c_p / c_s)^2 - 1} \cos(\theta) + \sin(\theta) \right] \quad (25)$$

y su contribución se extiende en el tiempo hasta $t = t_s = r/c_s$, el tiempo de arribo de la onda de corte al mismo punto. Dependiendo de la posición angular, t_{hw} varía entre $t_p = r/c_p$ (para $\theta = \pi/2$) y t_s (para $\theta = \theta_c \sim 0$). Es decir que para ángulos pequeños la onda de cabeza y la onda de corte se confunden en el tiempo de modo que no las podemos separar con nuestro método de adquisición. Para ángulos mayores la separación temporal es mayor y es posible medir la contribución de cada término al campo.

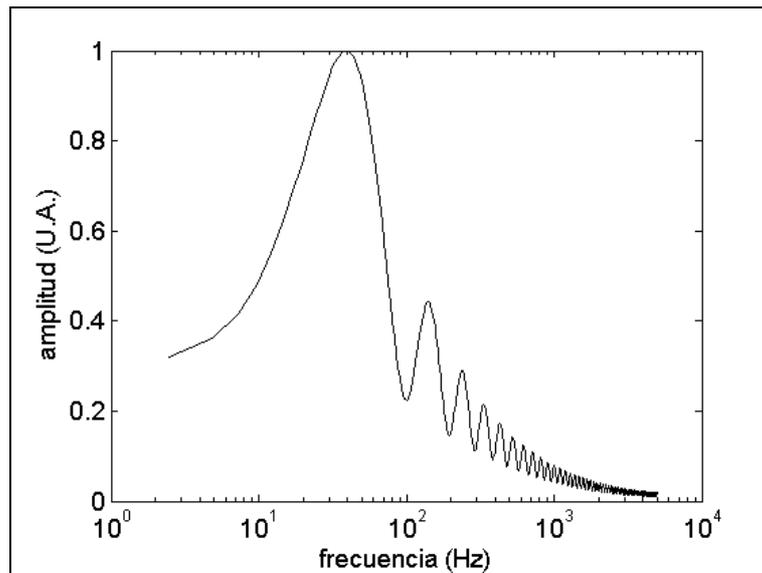


Figura 11 Espectro de la función de Green sobre el eje de la fuente a $z' = 30$ mm. Los valores usados para construir esta curva son $c_s = 3$ m/s y $c_p = 1500$ m/s, valores cercanos a los de nuestra experiencia. Los picos y valles en la amplitud son debidos a interferencia entre la onda de compresión y la onda de corte.

El campo medido experimentalmente se puede expresar como el producto de convolución entre la excitación impuesta a la fuente y la función de Green obtenida en el apéndice A. En el dominio de frecuencias el producto de convolución se expresa como el producto entre las transformadas de Fourier de cada término. Por lo tanto resulta útil un análisis espectral de estos términos. En la figura 11 se muestra el espectro de la función de Green exacta en $\theta = 0$ y $z' = 30$ mm usando valores de $c_s = 3$ m/s y $c_p = 1500$ m/s que son cercanos a los de nuestras experiencias. La amplitud presenta una serie de picos y valles debido a la interferencia entre la onda de compresión y la onda de corte⁽¹²⁾.

La excitación utilizada en la experiencia consiste en dos ciclos de senoide de 100 Hz de frecuencia central cuyo espectro se muestra en la figura 12(a). En la figura 12(b) se muestra el espectro del campo medido experimentalmente en $\theta = 0$ y $z' = 30$ mm. Vemos que la amplitud presenta dos picos en $f \cong 50$ y $f \cong 120$ Hz mientras que pasa por un valle en torno a $f \cong 100$ Hz debido a la interferencia entre las ondas de compresión y de corte como se mencionó antes. A medida que el ángulo θ aumenta, esta interferencia es más débil debido al diagrama de directividad del término de compresión (ver apéndice A). Sin embargo en estas posiciones la separación temporal entre la onda de cabeza y la onda de corte permite la interacción entre ellas a las frecuencias de trabajo (~ 100 Hz). La figura 13(a) muestra una medida experimental del desplazamiento en un gel de agar-gelatina realizada para $r = 30$ mm y $\theta = \pi/6$ comparado con el resultado de convolucionar la función de Green exacta obtenida numéricamente con la excitación enviada por la fuente medida sobre la superficie del gel. La velocidad de la onda de corte en el gel utilizado para esta experiencia (medida por el tiempo de vuelo como se explica más abajo) es $c_s = 2.81 \pm 0.06$ m/s y la de la onda de compresión $c_p \cong 1500$ m/s. Utilizando estos valores en la ecuación (25) encontramos que $t_{hw} \cong 6$ ms. Como la excitación comienza en $t = 5$ ms, el arribo de la onda de cabeza se da en $t = 11$ ms mientras que la onda de corte arriba a esta posición en $t = 16$ ms. Cada uno de estos tiempos se indica con una flecha en la figura.

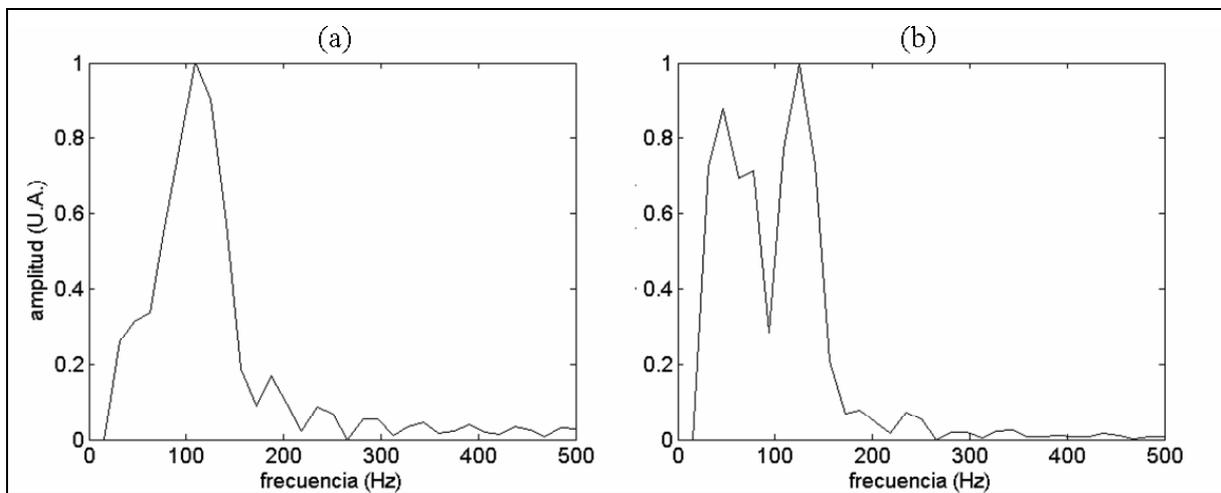


Figura 12 (a) Espectro de la función de excitación impuesta por la fuente. La medida en el dominio temporal se hizo sobre la superficie del gel. (b) Espectro del campo medido sobre el eje de la fuente en $z' = 30$ mm. Vemos que la amplitud pasa por un mínimo local en torno a $f = 100$ Hz de acuerdo con lo esperado por la función de Green.

Debido a la extensión temporal de la onda de cabeza (entre t_{hw} y t_s), ésta siempre interactúa con la onda de corte al hacer el producto de convolución con la excitación impuesta al medio. Esta interacción produce interferencias que modifican el espectro del pulso para las diferentes posiciones angulares. La figura 13(b) muestra la evolución de la frecuencia en los picos del espectro por encima de -6 dB para diferentes posiciones angulares manteniendo la distancia a la fuente r fija. Los resultados experimentales se comparan con los de la función de Green. Como vimos, para ángulos

pequeños existen dos picos de frecuencia y un valle en torno a los 100 Hz debido a la interferencia entre la onda de compresión y la onda de corte. Cuando el ángulo aumenta esta interferencia desaparece debido al diagrama de directividad de cada término. Sin embargo en esta zona se produce la interacción entre la onda de cabeza y la onda de corte lo que hace disminuir la frecuencia central del pulso a medida que aumenta el ángulo⁽²⁴⁾ por lo que la frecuencia central del espectro está por debajo de 100 Hz. Este resultado muestra que la influencia de la onda de cabeza en el campo de desplazamientos aunque es débil se puede medir experimentalmente.

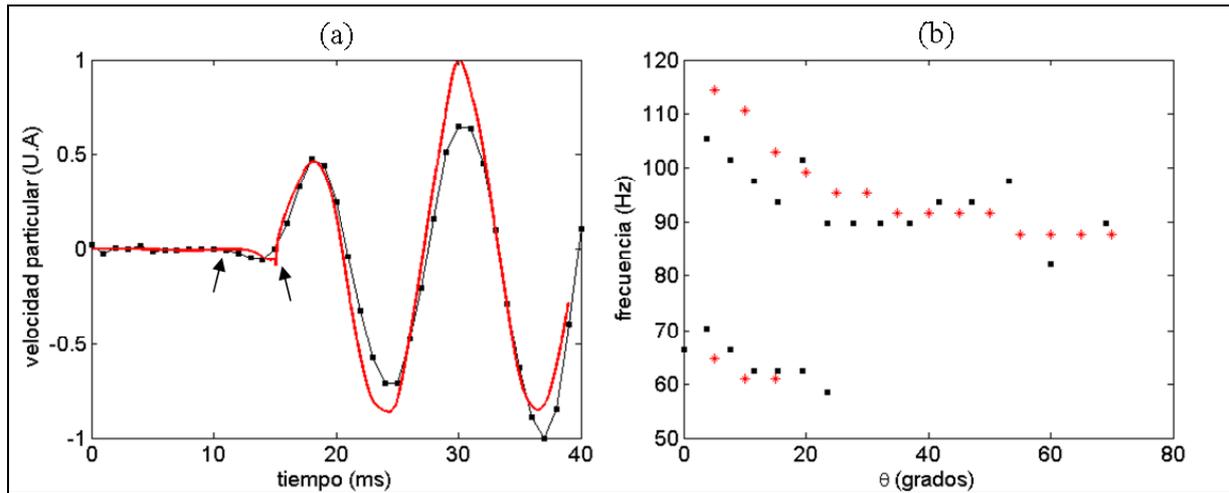


Figura 13 (a) Velocidad particular en función del tiempo medida a $r = 30$ mm de la fuente y $\theta = 30^\circ$. La medida experimental (■) se compara con la convolución entre la función de Green exacta con la excitación de entrada al vibrador mecánico (—). La contribución de la onda de cabeza al campo es pequeña pero apreciable entre $t = 11$ ms y $t = 16$ ms. (b) Debido a su duración temporal, la onda de cabeza interfiere con la onda de corte. Esta interacción produce una modificación en la frecuencia central del pulso en función del ángulo. Los valores teóricos (*) se comparan con las medidas experimentales (■).

III.2.C.2 Desplazamientos sobre el eje de la fuente: Función de Green aproximada

Como mencionamos, las mayores discrepancias entre la función de Green aproximada y la solución exacta se producen fuera del eje de la fuente. Estamos interesados ahora sobre los desplazamientos que se producen en el eje de la fuente ya que a partir de esos datos podremos estimar la elasticidad del medio. En este caso la solución aproximada del problema de Lamb está en buen acuerdo con los resultados experimentales y brinda la posibilidad de realizar un análisis detallado del campo aun cuando se utilizan fuentes extendidas, sin necesidad de recurrir a soluciones numéricas. La función de Green en este caso se compone de tres términos (ver apéndice B), el término de compresión $g^p(\vec{r}, t)$, el término de corte $g^s(\vec{r}, t)$ y el término de campo cercano o acoplamiento $g^{ps}(\vec{r}, t)$:

$$g_{zz}(\vec{r}, t) = g_{zz}^p(\vec{r}, t) + g_{zz}^s(\vec{r}, t) + g_{zz}^{ps}(\vec{r}, t) \tag{26}$$

con:

$$\begin{aligned}
 g_{zz}^p(r, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi\rho c_p^2} \cos^2(\theta) \frac{1}{r} \delta(t - r/c_p) \\
 g_{zz}^s(r, \theta, t) &= -\frac{1}{4\pi\rho c_s^2} \sin^2(\theta) \frac{1}{r} \delta(t - r/c_s) \\
 g_{zz}^{ps}(r, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3 \cos^2(\theta) - 1) \frac{t}{r^3} [H(t - r/c_p) - H(t - r/c_s)]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

donde r y θ están definidos en la figura 9, c_p es la velocidad de la onda de compresión y c_s la velocidad de la onda de corte ρ es la densidad del medio y $H(t)$ la función escalón ($H(t) = 0$ si $t < 0$, $H(t) = 1$ si $t \geq 0$). Según este resultado, sobre el eje de la fuente ($\theta = 0$) están presentes la onda de compresión y el término de campo cercano, mientras que la onda de corte es nula ya que $\sin(\theta)$ se anula en $\theta = 0$. El término de la onda de compresión es un término clásico de campo lejano cuya forma temporal es una delta que decae como $1/r$. La velocidad de la onda de compresión en nuestro caso es $c_p = 1500$ m/s. Como nuestro sistema experimental adquiere señales cada ~ 1 ms, en ese tiempo la onda viajó 1.5 m, una distancia mucho mayor a las dimensiones del gel y por ende la perturbación se ve como instantánea (onda **P** en la figura 8). Este hecho está de acuerdo con la hipótesis de que la variación espacial de la divergencia del campo es lenta en nuestras experiencias.

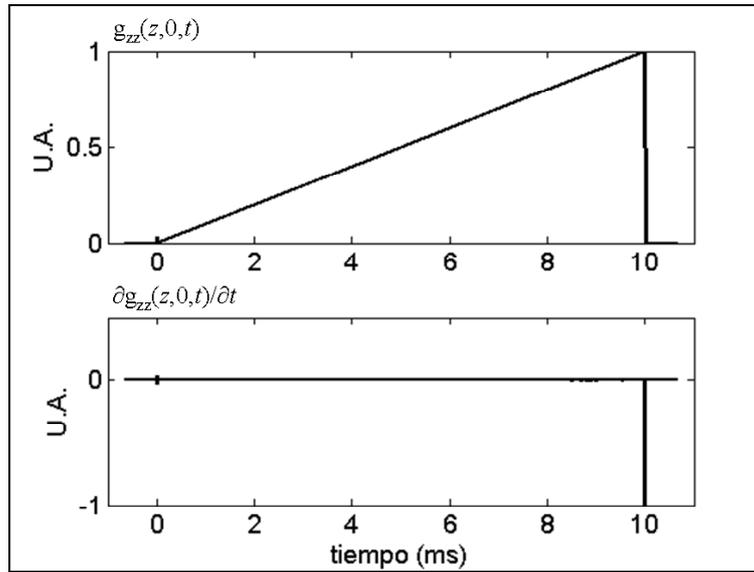


Figura 14 (a) Función de Green sobre el eje z' . En $t = t_p$ (~ 0) se puede apreciar una delta que corresponde al arribo de la onda de compresión. Luego comienza una rampa que crece hasta $t = t_s = 10$ ms que corresponde al término de acoplamiento. (b) derivada de la función de Green con respecto al tiempo. Esta función contiene una delta negativa en $t = t_s$. Las unidades del eje vertical en ambas figuras son arbitrarias (U.A.).

El término de acoplamiento tiene la forma temporal de una rampa que crece desde $t_p = r/c_p$ hasta $t_s = r/c_s$. En la expresión matemática el decaimiento parece ser como $1/r^3$, sin embargo la presencia del tiempo en el numerador (que varía entre r/c_p y r/c_s) hace que en realidad el decaimiento sea como $1/r^2$. La figura 14(a) muestra la forma temporal de la función de Green sobre

el eje z' para $c_p = 1500$ m/s, $c_s = 3$ m/s y $r = 30$ mm. Estos valores son un caso típico de los que se pueden encontrar en una experiencia. En la figura superior se distingue un impulso del tipo δ de Dirac en $t = t_p = 0.02$ ms correspondiente al tiempo de arribo de la onda de compresión (primer término en la ecuación (26)). Como en sólidos blandos se cumple $c_p \gg c_s$, de las expresiones de cada término en la ecuación (27) vemos que la contribución de este término es mínima comparada con los otros dos.

Este hecho se ve reflejado en la figura 14(a). Luego se produce una rampa que crece hasta $t_s = 10$ ms, el tiempo de arribo de la onda de corte. Esta rampa corresponde al término de acoplamiento. Como lo que medimos en la práctica es la velocidad de los desplazamientos, los resultados se deben comparar con la derivada temporal de la función de Green que se muestra en la figura 14(b). La onda de compresión aparece como la derivada de una función de Dirac (en $t \sim 0$) y la onda de corte como un Dirac negativo (en $t = t_s$). Este impulso se propaga a la velocidad de la onda de corte y tiene una componente longitudinal de amplitud mucho mayor a la de la onda de compresión. Esta es la componente que medimos experimentalmente sobre el eje de la fuente (marcada con S en la figura 8). Finalmente dado de que el medio no es infinito, existen ondas reflejadas en el extremo opuesto del pistón que registramos también en el sismograma (marcada con R en la figura 8).

III.2.D Medida de la elasticidad

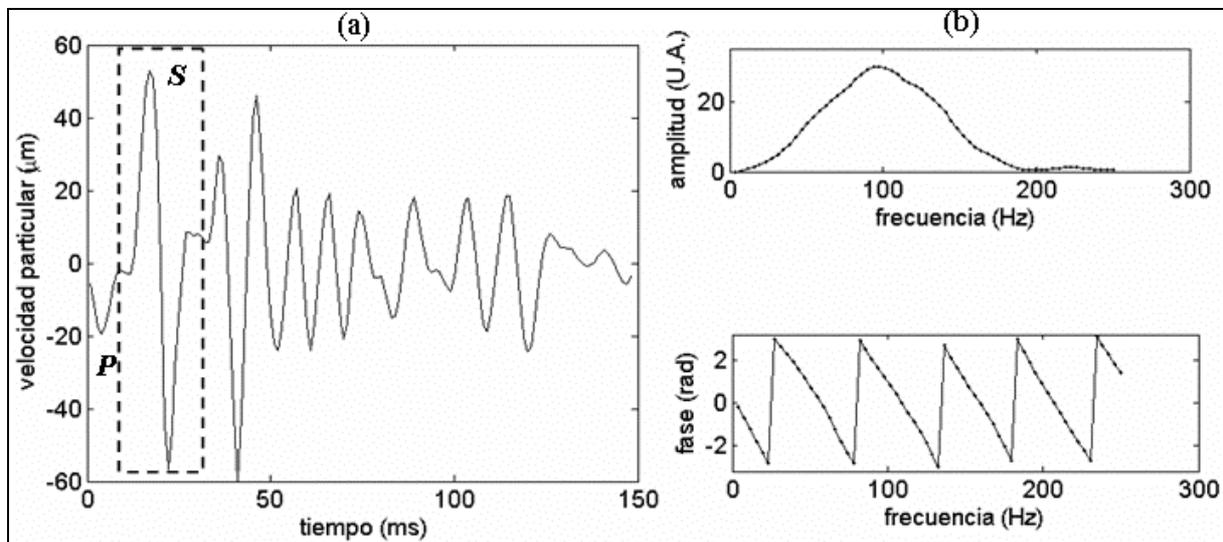


Figura 15 Primera línea del sismograma de la figura 8 donde se observa el arribo de la onda de compresión (P) y de corte (S) como dos pulsos de similar forma pero en oposición de fase. A la derecha se muestra la amplitud y la fase del espectro de la selección marcada con línea punteada. La frecuencia central del pulso f_0 es ~ 100 Hz

Con los datos del sismograma podríamos utilizar la ecuación (21) para estimar la elasticidad en el medio. Sin embargo usaremos aquí una forma alternativa propuesta por S. Catheline⁽¹⁴⁾ y que ya hemos usado en trabajos anteriores⁽²⁰⁾. La idea consiste en medir el tiempo de vuelo de la onda de

corte a medida que se propaga por el medio. La expresión matemática de una onda plana que se propaga en la dirección z' está dada por:

$$u_z(z', \omega) = A_0 e^{i(\omega t - kz')} \tag{28}$$

donde A_0 es la amplitud y k el número de onda. La fase $\phi = \omega t - kz'$ en esta expresión depende linealmente de la coordenada z' . La velocidad de fase de esta onda se puede expresar por tanto:

$$c_s = -\omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial z'} \right)^{-1} \tag{29}$$

Si asumimos conocida la densidad ρ del medio, podemos acceder entonces al módulo de corte $\mu = \rho c_s^2$. Experimentalmente la velocidad se determina evaluando la fase a la frecuencia central del pulso ω_0 a partir de la transformada de Fourier en cada línea del sismograma como se muestra en la figura 15. A la izquierda se muestra una línea del sismograma donde se aprecia claramente el arribo de la onda de compresión (P), y de la onda de corte (S) como dos pulsos de forma similar pero en oposición de fase. Para cada línea del sismograma se calcula la fase a la frecuencia central del pulso. Como el modelo está basado en la propagación de la onda en un medio infinito debemos tomar en cuenta el campo de velocidad particular en su período transitorio, es decir para tiempos anteriores a la reflexión en los bordes como se ilustra con la línea de puntos en el gráfico izquierdo en la figura 15. En caso contrario la interferencia con las reflexiones modifican tanto la fase como la amplitud brindando un valor erróneo de la velocidad⁽¹⁴⁾.

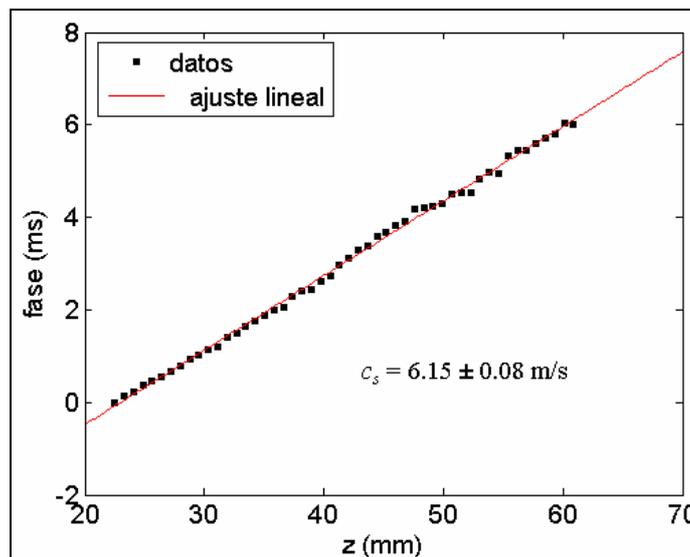


Figura 16 Fase (en ms) en función de z para el sismograma de la figura 8. Como el gel es homogéneo los datos se ajustan con una recta por mínimos cuadrados. El valor hallado para la velocidad es $c_s = 6.15 \pm 0.08 \text{ m/s}$.

La figura 16 muestra la fase (medida en ms) en función de z . Como el valor de la velocidad depende de la derivada de esta curva y no de su valor absoluto, se tomó el primer punto

arbitrariamente igual a cero. Es decir que el método consiste en medir el tiempo de vuelo de la onda de corte en su período transitorio dentro de la muestra. La ecuación (29) muestra que esta medida es equivalente a resolver el problema inverso dado en (21) ya que en ambos casos lo que se estima es el valor local del número de onda $k(z')$. Si el medio es homogéneo el número de onda es constante y en consecuencia también lo es la velocidad. Para medirla realizamos un ajuste de la fase con una recta por mínimos cuadrados. El inverso de la pendiente del ajuste es la velocidad de fase c_s . El valor hallado para el gel utilizado en esta experiencia es $c_s = 6.15 \pm 0.08$ m/s donde la incertidumbre representa la desviación standard de los puntos experimentales respecto a la recta. El coeficiente de correlación del ajuste es $r = 0.987$. Asumiendo para el gel una densidad igual a la del agua ($\rho = 1000$ Kg/m³), el módulo elástico de corte es $\mu = \rho c_s^2 = 37.8 \pm 1$ KPa.

II.2.D.1 Efectos de la difracción

En la ecuación (28) se asumió la expresión de una onda plana para finalmente obtener el módulo de corte en el gel. Sin embargo el pistón utilizado genera un campo difractante. Veremos ahora las consecuencias de la difracción en la medida de la velocidad de fase c_s . Con el valor de velocidad hallado la longitud de onda de la onda de corte queda determinada por: $\lambda_s = c_s / f_0 \cong 60$ mm. En una primera aproximación el pistón utilizado de radio $R = 10$ mm puede considerarse puntual comparado con esta longitud de onda. En estas condiciones y a partir de un análisis asintótico de la función de Green en el dominio de frecuencias (ver apéndice B), el término de acoplamiento se puede dividir en dos regiones. Una región denominada de campo muy cercano cuando $r \rightarrow 0$ donde la dependencia de la fase y la amplitud a una frecuencia ω dada se expresan por²³:

$$\begin{aligned}\phi_{r \rightarrow 0}(r, \omega) &\approx i\left(\omega t - \frac{2}{3} \frac{\omega}{c_s} r\right) \\ A_{r \rightarrow 0}(r, \omega) &\approx \frac{1}{2r}\end{aligned}\tag{30}$$

Según este resultado analítico, cuando $r \rightarrow 0$ la velocidad de fase es $3c_s/2$, es decir una vez y media la velocidad de la onda de corte, mientras que la amplitud decae como $1/r$ y no depende de la frecuencia. Fuera de este límite, en la región denominada campo cercano, la expresión asintótica de la función de Green queda expresada como:

$$\begin{aligned}\phi_{r \rightarrow \infty}(r, \omega) &\approx i\left(\omega t - \frac{\omega}{c_s} r - \frac{\pi}{2}\right) \\ A_{r \rightarrow \infty}(r, \omega) &\approx \frac{c_s}{\omega r^2}\end{aligned}\tag{31}$$

En este caso la velocidad de fase coincide con la velocidad de la onda de corte y la amplitud decae como $1/r^2$ y es inversamente proporcional a la frecuencia. El límite entre el campo muy cercano y el

campo cercano se puede definir como la distancia r_0 para la cual las dos expresiones asintóticas de la fase se igualan:

$$\phi_{r \rightarrow \infty}(r, \omega) = \phi_{r \rightarrow 0}(r, \omega) \Rightarrow r_0 = \frac{3}{4} \lambda_s \tag{32}$$

Esta distancia característica es de importancia pues indica el comportamiento de la fase en función de la distancia a la fuente y permite eventualmente corregir el valor hallado para la velocidad. La figura 17 resume los resultados anteriores mostrando el comportamiento de la amplitud y el límite entre las dos zonas.

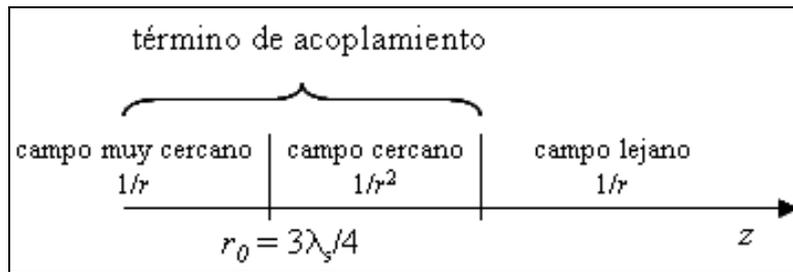


Figura 17 La zona de influencia del término de acoplamiento se puede dividir en dos regiones, una de campo muy cercano donde la amplitud decae como $1/r$ y la velocidad de fase vale $3c_s/2$. La otra de campo cercano donde la amplitud decae como $1/r^2$ y la velocidad de fase vale c_s . El límite entre las dos zonas lo podemos ubicar en $r_0 = 3\lambda_s/4$.

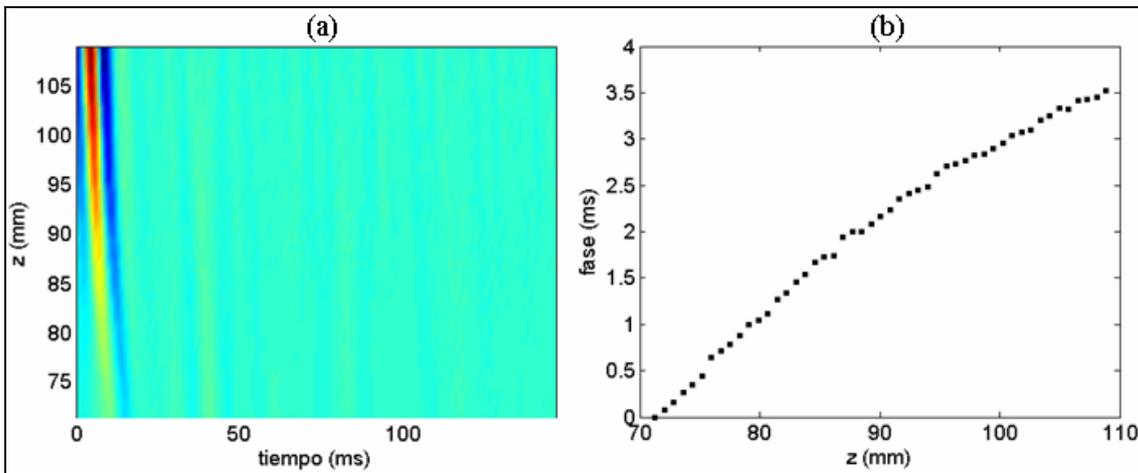


Figura 18 (a) Sismograma obtenido en un gel de agar-gelatina a corta distancia de la fuente (ubicada en $z = 110$ mm). (b) Fase correspondiente al sismograma. En ambas figuras se puede apreciar el efecto del campo muy cercano. A medida que la distancia a la fuente aumenta la velocidad de fase es menor y la amplitud de la onda decae más rápidamente.

En el caso particular de la experiencia mostrada en la figura 8, el límite se encuentra a una distancia $z_0 = 45$ mm. Para este caso tomamos la precaución de medir la fase a partir de distancias mayores a la fuente, concretamente a partir de 50 mm, por lo que el valor hallado corresponde a la velocidad de la onda de corte. La figura 18 muestra un sismograma en escala de colores y la fase medida a distancias muy cercanas a la fuente. En esta figura se puede apreciar el efecto del campo muy cercano descrito anteriormente, es decir la velocidad de fase disminuye a medida que nos alejamos de la fuente (ubicada en $z = 110$ mm). En este resultado queda de manifiesto el efecto de la

difracción sobre la medida de velocidad. La aproximación de onda plana se ajusta mejor a partir de cierta distancia crítica $r_0 = 3\lambda_s / 4$ de la fuente. Si la medida se hace a menor distancia los resultados se deben corregir por la expresión dada en (30).

III.2.D.2 Elasticidad local

El ajuste por mínimos cuadrados utilizando todos los puntos permite evaluar la elasticidad promedio de la muestra. Uno de los intereses en elastografía es medir el valor local de la elasticidad. Podemos considerar como antes que la ecuación (29) es válida localmente, es decir que el módulo de corte es lentamente variable. Bajo esta consideración, la pendiente de la curva $\phi(z')$ es en cada punto una estimación de la elasticidad local. Sin embargo, al evaluar directamente la derivada de la fase respecto a z' el ruido de alta frecuencia se amplifica resultando en una gran dispersión. La figura 19(a) muestra el inverso de la derivada local de la fase (es decir la velocidad) tomada de la figura 16. Allí se puede observar la amplificación del ruido de alta frecuencia al realizar la operación derivada. El valor medio de la velocidad es $c_s = 6.5$ m/s y la desviación standard $\sigma_s = 2.7$ m/s. Usualmente es necesario aplicar filtros para suavizar los resultados. Una alternativa a la diferenciación directa consiste en realizar un ajuste por mínimos cuadrados de manera segmentada⁽²⁵⁾. Es decir que podemos asumir un comportamiento lineal de la fase en torno a una posición z_i dada:

$$\phi(z_i) = az_i + b; \quad i = 1 \dots N_e \quad (33)$$

donde a y b son constantes a ser estimadas, a representa el inverso de la velocidad y N_e es la cantidad de puntos en torno a la posición z_i . El límite inferior de Cramér-Rao en la estimación de a , depende de N_e como $(N_e(N_e^2 - 1))^{-1/2}$. De modo que cuantos más puntos usamos para estimar el valor local de la velocidad menor es la dispersión. Por otro lado, al aumentar el número de puntos se pierde en resolución espacial. Por lo tanto existe un compromiso entre mejorar la calidad de la estimación local de la elasticidad y la resolución espacial del método. No hay a priori un número óptimo N_e de puntos a ser utilizados sino que la elección depende de la variación espacial de la fase. Para variaciones lentas puede usarse un gran número de puntos, al extremo de que en un medio homogéneo podemos usar todos los disponibles como en la figura 16.

Cuando las variaciones en la fase son más rápidas conviene utilizar un número menor de puntos ya que de otra forma se puede filtrar información física de interés. En la figura 19(b) se muestra el resultado de este proceso usando $N_e = 5$. El valor medio de la velocidad en este caso es similar al obtenido por el cálculo directo: $c_s = 6.3$ m/s pero la dispersión es mucho menor: $\sigma_s = 0.9$ m/s. La dispersión media representa ~15 % del valor medio de la velocidad. En nuestras experiencias en geles de agar-gelatina la relación σ_s / c_s está en general en el orden de 10-15 % (usando $N_e = 5$).

Este valor nos da una idea del contraste mínimo que podemos medir con este método. En general esta relación es proporcional a la relación $\sigma(\delta z)/u_z$ por lo que cuanto menor sea la dispersión en la estimación de los desplazamientos mejor es el contraste en la estimación local de la elasticidad. Por esta razón existen muchos trabajos en la literatura a cerca de algoritmos de estimación de desplazamientos y filtrado de datos⁽²⁶⁾. En esta tesis utilizaremos el estimador de mínimos cuadrados segmentado ya que mejora apreciablemente el resultado respecto a la diferenciación directa con un costo computacional menor.

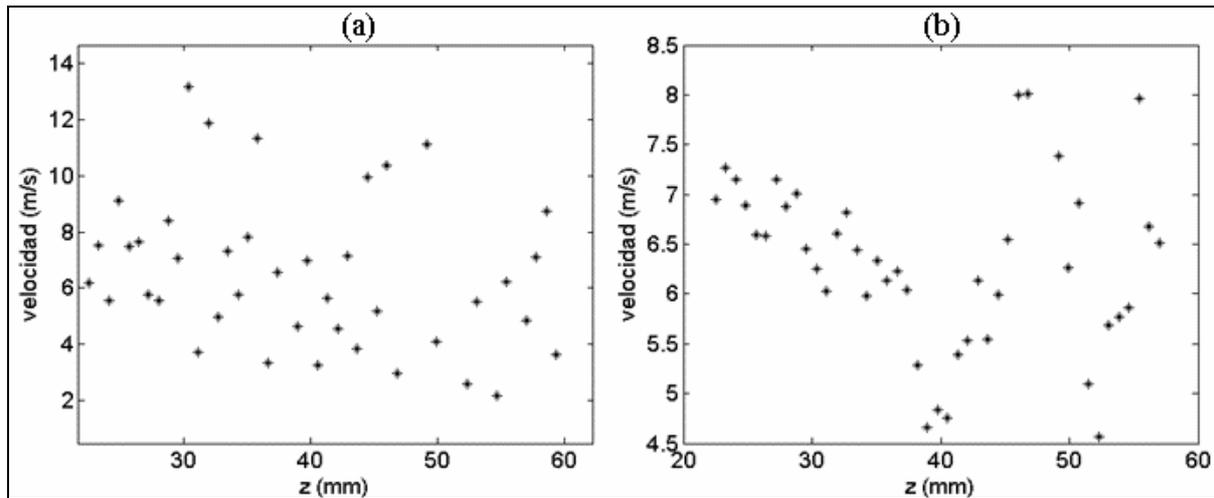


Figura 19 (a) Velocidad local tomada a partir del inverso de la derivada de la fase de la figura 7. Al realizar la operación en forma directa, el ruido de alta frecuencia se amplifica dando lugar a una dispersión no deseada en el valor local de la velocidad. (b) Velocidad local utilizando el estimador por mínimos cuadrados segmentado. Existe una disminución notoria en la dispersión respecto al cálculo directo del gradiente

III.3 Viscoelasticidad

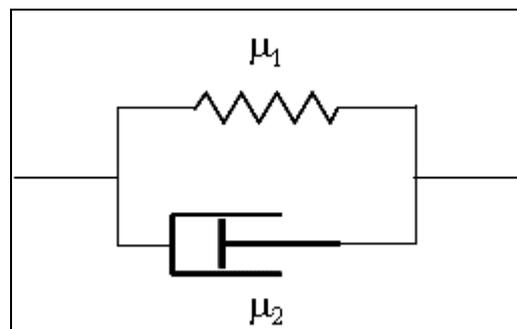


Figura 20 Modelo de sólido viscoelástico de Voigt. En este modelo unidimensional un resorte lineal de constante elástica μ_1 y un amortiguador de constante viscosa μ_2 están en paralelo. De este modo la deformación en cada elemento es la misma. La tensión en cada uno debe ajustarse para mantener este nivel de deformación.

Hasta ahora la única información que hemos utilizado para caracterizar el medio es la fase del campo de velocidad particular. Sin embargo podemos ampliar la información a cerca de las propiedades elásticas del medio a partir de la amplitud de la onda. En efecto, utilizando una fuente puntual la amplitud de la onda decae con la distancia por efecto de la atenuación geométrica (difracción) como se mostró en la sección III.2.D Pero además puede existir atenuación por pérdidas (absorción) en el medio. La cuantificación de las pérdidas por absorción puede ser de

interés práctico ya que es conocido que muchos tejidos blandos tienen comportamientos viscoelásticos⁽²⁷⁾. Además para las frecuencias utilizadas en elastografía (10-1000 Hz), no existen reómetros comerciales (que típicamente trabajan en el rango 0.01-10 Hz). Por lo tanto la cuantificación de parámetros viscoelásticos por elastografía puede contribuir a llenar el vacío de datos experimentales en este rango de frecuencias⁽¹⁹⁾.

Para pequeñas deformaciones del medio un modelo lineal que describe adecuadamente las principales características en sólidos blandos (como los geles de agar-gelatina y tejidos) es el modelo de Voigt⁽²⁸⁾. Este modelo simple se ilustra en su versión unidimensional en la figura 20. Consiste en un resorte lineal de constante μ_1 en paralelo con un amortiguador de constante viscosa μ_2 . Al estar los elementos en paralelo, la deformación ($e = \partial u / \partial z$) en cada uno de ellos es la misma. La tensión total T para mantener ese nivel de deformación es la suma de las tensiones individuales en cada elemento componente. En el resorte la tensión es proporcional a la deformación mientras que en el amortiguador es proporcional a la velocidad de deformación. Por lo tanto la ecuación constitutiva para este modelo se escribe:

$$T = \mu_1 e + \mu_2 \dot{e} \quad (34)$$

Insertando esta relación para una excitación monocromática en la ecuación de movimiento tenemos como resultado la ecuación de Hemholtz unidimensional para el modelo de Voigt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\rho \omega^2}{(\mu_1 + i\omega \mu_2)} u = 0 \quad (35)$$

donde ω es la frecuencia de la excitación y ρ la densidad del medio. A partir del vector de onda complejo $k^2 = (\mu_1 + i\omega \mu_2)$ podemos deducir la velocidad y atenuación de la onda de corte:

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{\omega}{\text{Re}[k]} = \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2})}} \\ \alpha_s &= \text{Im}[k] = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 (\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2} - \mu_1)}{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}} \end{aligned} \quad (36)$$

Estas expresiones se pueden invertir para obtener los parámetros viscoelásticos del modelo de Voigt μ_1 y μ_2 en función de los que podemos medir experimentalmente, la velocidad c_s y la atenuación α_s :

$$\mu_1 = \frac{\rho c_s^2}{\left(|1 - \eta^2| \left(\frac{2}{1 - \eta^2} - 1 \right) \right)^2} \tag{37}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\rho \mu_1 c_s^2}{1 - \eta^2} - \mu_1^2}$$

donde $\eta = (\alpha_s c_s / \omega)$. Nótese que si $\alpha_s = 0$ (es decir no hay atenuación) entonces $\mu_1 = \rho c_s^2$ y $\mu_2 = 0$ recuperando el caso del sólido elástico.

Al utilizar un pistón circular en la configuración experimental, las ondas generadas no son planas. Como ya mencionamos la amplitud de la onda decae por pérdidas pero también por la difracción. Para una fuente circular de radio R la amplitud en el eje depende de la distancia z' como (ver apéndice B):

$$A(z') \cong \frac{A_0}{\rho} \frac{2R^2}{(R^2 + z'^2)} \tag{38}$$

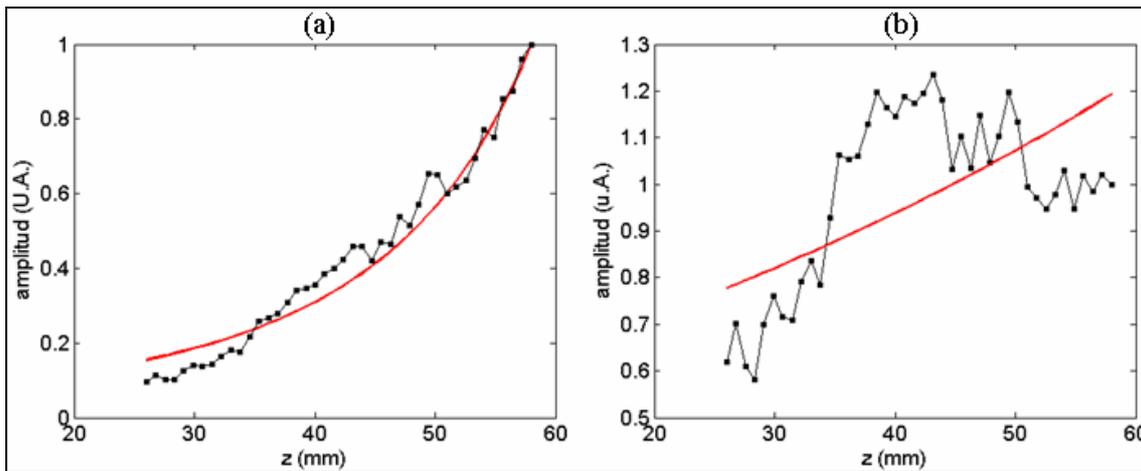


Figura 21 (a) Amplitud normalizada del término de acoplamiento en función de z . Datos experimentales (■) y curva teórica (—). Para una fuente circular de radio R el decaimiento de amplitud por difracción está dado en la ecuación (38). La medida de amplitud es sensible al ruido en particular en los puntos más alejados de la fuente donde estamos en los límites de la precisión del método de interferometría speckle. (b) Amplitud experimental corregida por difracción (■) y ajuste con una exponencial decreciente (—).

La figura 21(a) muestra la amplitud medida en función de z' tomada del sismograma de la figura 8 superpuesto con la atenuación prevista por la fórmula anterior. La medida de amplitud es muy sensible al ruido. Debido a su decaimiento con la distancia se llega rápidamente al límite de precisión del método. Esto puede explicar en parte las variaciones que se observan en la amplitud especialmente en la zona más alejada de la fuente. Para medir el coeficiente de atenuación α_s es necesario corregir la amplitud por la difracción. La figura 21(b) muestra el resultado del cociente entre los datos experimentales y el resultado analítico ajustado con una exponencial decreciente que arroja el valor $\alpha_s = 13 \pm 3$ np/m y el coeficiente de correlación del ajuste es $r = 0.87$. Utilizando los

valores medidos de la velocidad ($c_s = 6.15 \text{ m/s}$) y atenuación a la frecuencia central del pulso ($f_0 = 100 \text{ Hz}$) en la ecuación (37) encontramos:

$$\mu_1 = 37 \pm 1 \text{ KPa}$$

$$\mu_2 = 1.4 \pm 0.9 \text{ Pa s}$$

Una manera de evitar los efectos de la difracción es utilizar una fuente que genere ondas planas. Experimentalmente podemos lograr este objetivo con una placa que vibra tangencialmente a una superficie libre de la muestra. Si las dimensiones de la placa son mayores a la longitud de onda entonces podemos considerar que la fuente es infinita y genera ondas de corte planas polarizadas en el sentido de su vibración. De esta forma la atenuación medida de la amplitud de la onda está directamente relacionada con el coeficiente de absorción α_s . La figura 22(a) muestra una placa que genera una onda de corte que se propaga según z y polarizada según x . Para poder medir los desplazamientos así generados utilizando un transductor monoelemento es necesario disponer de un cierto ángulo entre la dirección de propagación y el haz ultrasonoro (figura 22(b)). De esta forma medimos la componente de los desplazamientos a lo largo del haz ultrasonoro.

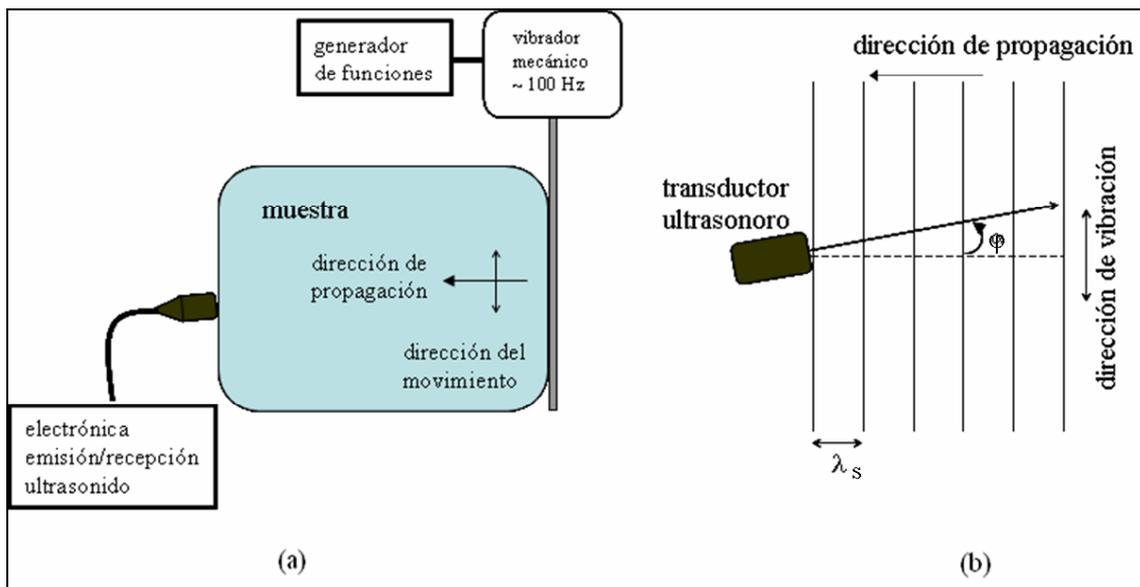


Figura 22 (a) Montaje experimental de elastografía transitoria 1D usando ondas de corte planas. Una placa plana vibra en la dirección x provocando la propagación de una onda transversal en la dirección z . Con esta configuración no se generan ondas de compresión. (b) Para poder medir los desplazamientos utilizando un transductor monoelemento es necesario disponer de cierto ángulo entre la dirección del haz ultrasonoro y la dirección de propagación.

Nótese que el valor de velocidad obtenido es una sobre estimación del valor real por un factor $1/\cos(\varphi)$. En la figura 23 se observa el sismograma en escala de colores. Las experiencias fueron realizadas en un gel diferente al de la figura 8. A la derecha se muestra la fase en función de z' junto con un ajuste lineal. El valor obtenido para el gel utilizado en esta experiencia es $c_s = 4.6 \pm 0.03 \text{ m/s}$. En la parte inferior se muestra la amplitud en función de z' con un ajuste exponencial. Debemos notar que el ajuste exponencial en este caso es de mejor calidad (dada por el coeficiente

de correlación del ajuste $r = 0.94$) que el obtenido con el pistón en la experiencia anterior. El ajuste arroja $\alpha_s = 12.5 \pm 1.6$ np/m. Usando estos valores en la ecuación (37) obtenemos:

$$\mu_1 = 21.2 \pm 0.5 \text{ KPa}$$

$$\mu_2 = 0.4 \pm 0.2 \text{ Pa s}$$

Este valor para el módulo viscoso de corte está más de acuerdo con el que se puede encontrar en la literatura para geles de este tipo⁽¹⁹⁾.

Hasta el momento nos hemos ocupado de la propagación de ondas al interior (en el volumen) del medio. Sin embargo, al utilizar una fuente superficial, gran parte de la energía elástica se propaga en la interfase del gel con el aire. En la siguiente sección mostraremos cómo podemos obtener información sobre los parámetros viscoelásticos analizando la propagación de ondas en la superficie del gel.

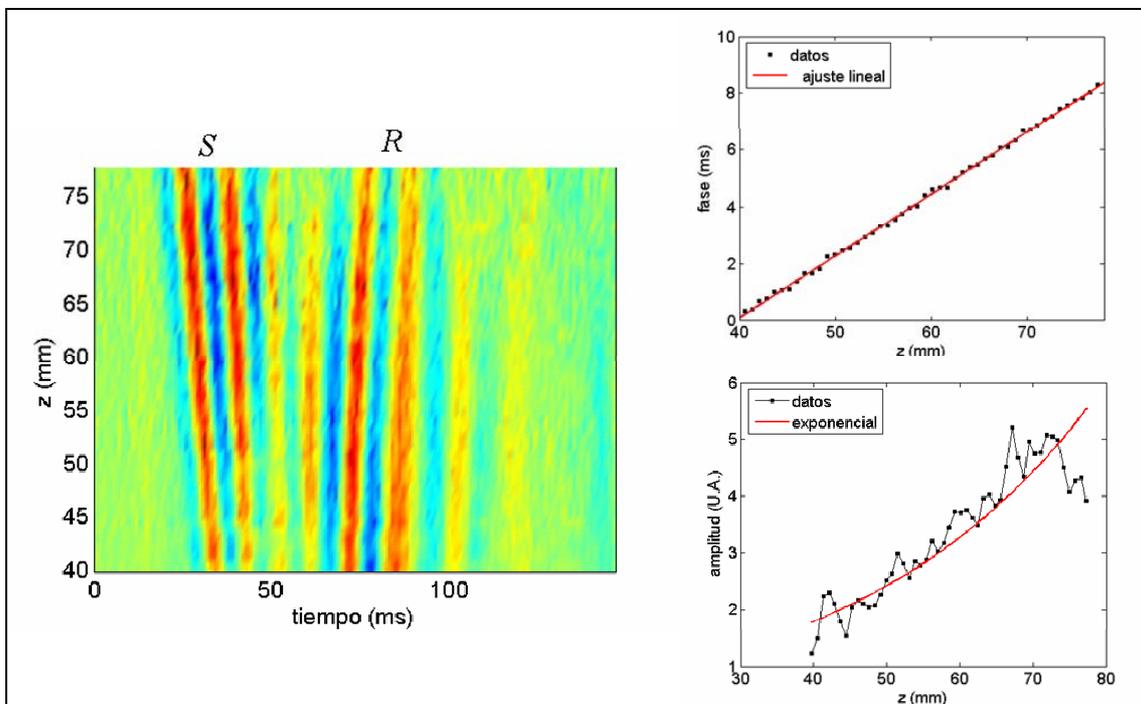


Figura 23 Sismograma obtenido utilizando el montaje de ondas planas mostrado en la figura anterior. Para tiempos anteriores a 50 ms (dependiendo de la distancia a la fuente), se puede observar la propagación de la onda de corte directa (*S*). Para tiempos mayores, se observan también ondas reflejadas que viajan en sentido contrario (*R*). La medida de fase y amplitud se muestran a la derecha con un ajuste lineal y exponencial respectivamente.

III.4 Parámetros viscoelásticos por análisis de ondas de superficie

La elastografía a partir de ondas de superficie es una derivación con creciente interés en el área. Su aplicación incluye la posibilidad de detectar inclusiones internas a partir de desplazamientos superficiales o realizar medidas elastográficas de la piel. También existe un interés físico en la propagación de ondas de superficie en sólidos blandos ya que pueden coexistir en ella ondas de superficie elásticas (ondas de Rayleigh) y también ondas de capilaridad, donde la fuerza restauradora es la tensión superficial⁽²⁹⁾.

En esta sección veremos la posibilidad de estimar los parámetros viscoelásticos de un gel homogéneo a partir de medidas del campo ondulatorio en la superficie. Al utilizar una fuente superficial que vibra normalmente a la superficie gran parte de la energía elástica se mantiene confinada en las cercanías de la misma. Así lo evidencia la experiencia que se muestra en la figura 24 donde el campo de desplazamientos se ha medido a una distancia $r = 30$ mm de la fuente pero variando la posición angular θ . Para ángulos pequeños domina el término de acoplamiento que es el que medimos en elastografía transitoria 1D. Sin embargo, la amplitud de la onda de corte crece a medida que también lo hace el ángulo mientras que la amplitud del término de acoplamiento decrece y pasa por un mínimo. Finalmente como se puede observar en la figura los desplazamientos son máximos para grandes ángulos, es decir cerca de la superficie. En efecto la onda de superficie puede detectarse en el volumen porque presenta una componente normal evanescente que se penetra al medio hasta una profundidad de una longitud de onda aproximadamente. La velocidad de la onda de Rayleigh en sólidos blandos es muy similar a la velocidad de la onda de corte⁽³⁰⁾ $c_R \cong 0.95 c_s$. Como consecuencia resulta imposible separar en el tiempo estas dos contribuciones con nuestro sistema de adquisición.

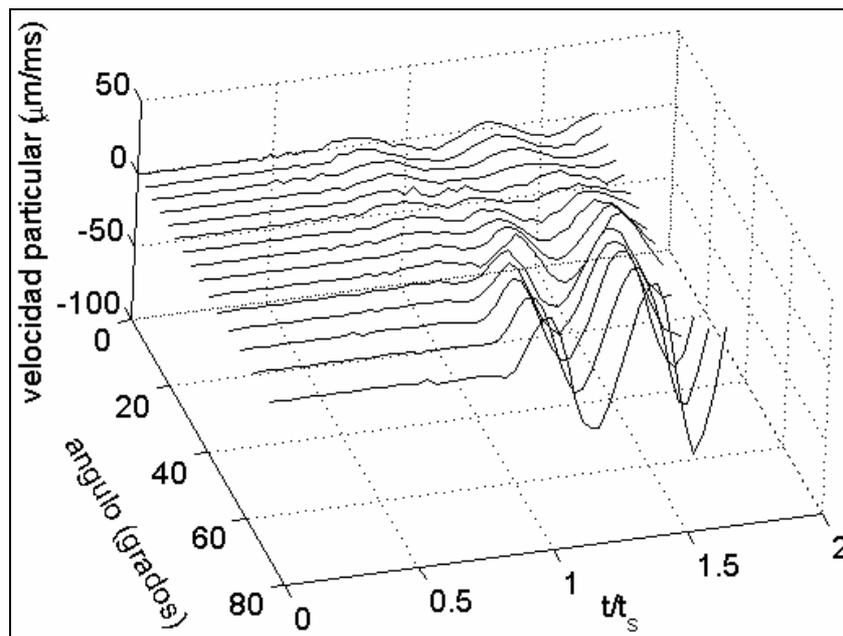


Figura 24 Campo de velocidad particular medido a $r = 30$ mm de la fuente en función del tiempo normalizado (t/t_s) para diferentes posiciones angulares. La amplitud de la onda crece a medida que aumentamos el ángulo. Para posiciones cercanas a la superficie podemos notar la contribución de la componente evanescente de la onda de Rayleigh.

Utilizaremos para medir los desplazamientos en la superficie un método óptico desarrollado en nuestro laboratorio por I. Núñez y C. Negreira⁽³¹⁾ conocido como método de desfocalización que se muestra esquemáticamente en la figura 25. El montaje experimental utilizado para excitar las ondas de superficie es similar al utilizado en elastografía transitoria y no se muestra en el esquema. Un pistón circular vibra sobre la superficie libre de un gel de agar-gelatina generando ondas de

volumen y en la propia superficie libre. La luz incidente se refleja en el espejo M_1 e incide sobre la superficie de la muestra donde se propaga la onda de superficie. La luz reflejada en ella se colecta a través del espejo M_2 y la lente L hacia la cámara CCD.

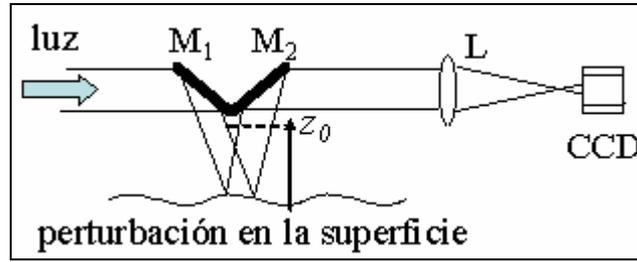


Figura 25 Esquema del montaje en el método óptico de desfocalización para medir ondas de superficie. Las ondas al igual que en elastografía transitoria se generan con un pistón (que no se muestra) que vibra normalmente en la superficie libre del gel

Describiremos ahora la relación entre la intensidad de luz registrada en la cámara CCD y la vibración en la superficie. Sea $E_0(x,y)$ el campo óptico monocromático en la superficie $z = 0$ y sea $E_z(x,y)$ el campo en un plano dado para $z > 0$. Si $F\{E(x,y)\}_{u,v}$ denota la doble transformada de Fourier en el plano xy con variables espaciales uv , la relación entre E_0 y E_z viene dada por:

$$F\{E_z(x,y)\}_{u,v} = H_z(u,v)F\{E_0(x,y)\} \quad (39)$$

donde $H_z(u,v)$ es:

$$H_z(u,v) = \exp\left[iKz\sqrt{1 - (\Lambda u)^2 - (\Lambda v)^2}\right] \quad (40)$$

En esta expresión Λ es la longitud de onda óptica y $K = 2\pi/\Lambda$ el número de onda. Las frecuencias espaciales u y v son del mismo orden que el inverso de la longitud de onda en la superficie⁽³¹⁾ por lo que $\Lambda u, \Lambda v \ll 1$ y la ecuación anterior se puede aproximar por:

$$H_z(u,v) \cong e^{iKz}\left(1 - i\pi\Lambda z(u^2 + v^2)\right) \quad (41)$$

Sustituyendo esta expresión en (39) y aplicando la transformada inversa de Fourier encontramos:

$$E_z(x,y) = E_0(x,y) - i\pi\Lambda z F^{-1}\left\{(u^2 + v^2)F\{E_0(x,y)\}_{u,v}\right\}_{x,y} \quad (42)$$

y usando la igualdad:

$$F\{\nabla^2 E(x,y)\}_{u,v} = -4\pi^2(u^2 + v^2)F\{E(x,y)\}_{u,v} \quad (43)$$

llegamos finalmente a:

$$E_z(x,y) = E_0(x,y) + i\frac{\Lambda z}{4\pi}\nabla^2 E_0(x,y) \quad (44)$$

Si suponemos que el efecto de la onda de superficie es simplemente una modulación en fase del campo óptico entonces:

$$E_0(x, y) = A_0 e^{i\phi(x, y)} \tag{45}$$

siendo A_0 una amplitud constante. En la cámara CCD se registra en cada píxel un valor proporcional a la intensidad de luz recibida. Sustituyendo (45) en (44) y multiplicando por el complejo conjugado encontramos luego de despreciar términos de segundo orden:

$$\frac{I(x, y)}{I_0} \cong 1 - \frac{\Lambda z}{2\pi} \nabla^2 \phi(x, y) \tag{46}$$

donde I_0 es la intensidad uniforme del campo incidente. En el caso que estamos analizando la variación de fase $\phi(x, y)$ se debe a la perturbación de la superficie por la onda de baja frecuencia. Si $u_z(x, y)$ es la componente z del desplazamiento tenemos que la variación de fase es:

$$\phi(x, y) = 2Ku_z(x, y) \tag{47}$$

Podemos expresar la onda armónica de longitud de onda λ_{sup} que se propaga en el plano xy como

$u_z(r) = u_0 \sin(2\pi r / \lambda_{sup})$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la intensidad de la luz queda:

$$\frac{I(r)}{I_0} = 1 + \frac{8\pi^2 z}{\lambda_{sup}^2} u_z(r) \tag{48}$$

Esta ecuación establece que podemos tener una imagen directa de la componente vertical de la onda de superficie midiendo la intensidad de la luz recibida. El sistema óptico se debe focalizar a cierta distancia z_0 de la superficie conveniente para mejorar el contraste en la imagen (hacer máxima la relación entre las intensidades). Nótese que la focalización en $z = 0$ no produce contraste por ello el nombre de método de desfocalización.

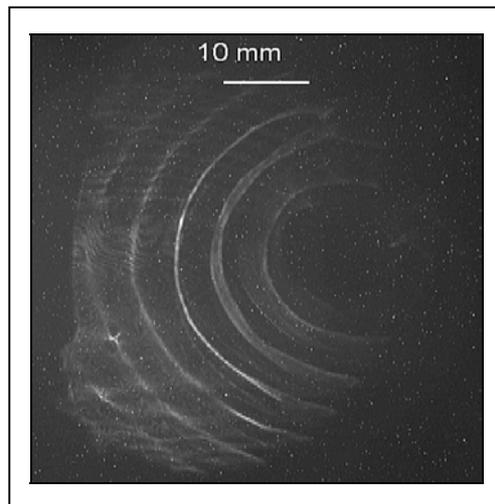


Figura 26 Componente vertical de la onda de superficie medida a través del método de desfocalización. A partir de esta figura es posible medir la longitud de onda y conociendo la frecuencia de excitación la velocidad. Este mismo procedimiento se puede aplicar para diferentes valores de frecuencia y obtener así la curva de dispersión de la onda superficial.

La figura 26 muestra la imagen de una onda de frecuencia $f_0 = 250$ Hz sobre la superficie de un gel de agar-gelatina tomada con este método donde se distingue claramente el campo de desplazamientos generado por el pistón circular. De esta imagen es posible medir la longitud de onda λ_{sup} de la onda de superficie haciendo un promedio de frecuencia espacial sobre los picos de la transformada de Fourier en varias posiciones. El valor obtenido en el caso que se muestra en la figura es $\lambda_{\text{sup}} = 4.7 \pm 0.3$ mm donde la incertidumbre representa la desviación standard sobre 10 mediciones. La velocidad de la onda en la superficie es por lo tanto $v = \lambda_{\text{sup}} f_0 = 1.17 \pm 0.08$ m/s.

Repitiendo el procedimiento anterior para diferentes valores de frecuencia podemos construir una curva de velocidad en función de la frecuencia (relación de dispersión). En un medio perfectamente elástico la onda de Rayleigh no es dispersiva⁽³²⁾. Sin embargo en los resultados experimentales que se muestran en la figura 27 se observa que la velocidad v aumenta junto con la frecuencia. Como ya mencionamos, en experiencias de ondas de superficie en sólidos blandos reportadas en la literatura se muestra la coexistencia entre ondas elásticas (de Rayleigh) y ondas de capilaridad. Estas últimas tienen una relación de dispersión de la forma: $v \cong Bf^{1/3}$ donde B es una constante que depende de la tensión superficial y la densidad del medio⁽²⁹⁾. Sin embargo, el ajuste de los datos experimentales a una relación de este tipo es pobre como se muestra en la figura 28(a). El coeficiente de correlación en este caso es $r = 0.6$.

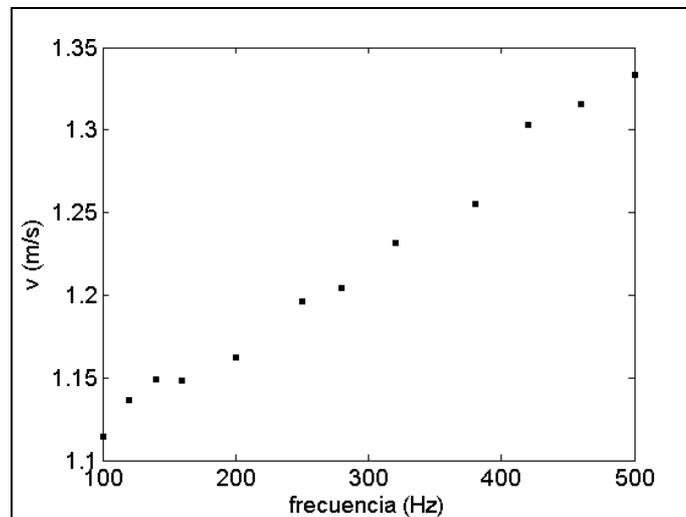


Figura 27 Medida de velocidad de propagación de la onda en la superficie del gel en función de la frecuencia. Se observa un leve aumento de la velocidad con la frecuencia. En principio este hecho puede ser explicado por dos fenómenos. O bien se trata de una onda dispersiva como las ondas de capilaridad, o bien el medio no es elástico y se trata de una onda de Rayleigh en un medio viscoelástico.

La relación de dispersión también se puede explicar si el sólido no es perfectamente elástico. Utilizaremos nuevamente el modelo viscoelástico de Voigt para describir este comportamiento. La velocidad de la onda de superficie viene dada por:

$$c_R = \frac{\omega}{\text{Re}[k_R]} \quad (49)$$

donde k_R es el vector de onda de la onda de superficie. Su valor se obtiene como una de las raíces de la ecuación de Rayleigh para un medio viscoelástico⁽³³⁾:

$$R(k) = \frac{1}{k_p^4} \left[(2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2 (k^2 - k_s^2)^{1/2} (k^2 - k_p^2)^{1/2} \right] \quad (50)$$

donde k_p y k_s son los números de onda de la onda de compresión y de corte respectivamente:

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}; \quad \lambda = \lambda_1 + i\omega\lambda_2; \quad \mu = \mu_1 + i\omega\mu_2 \quad (51)$$

$$k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

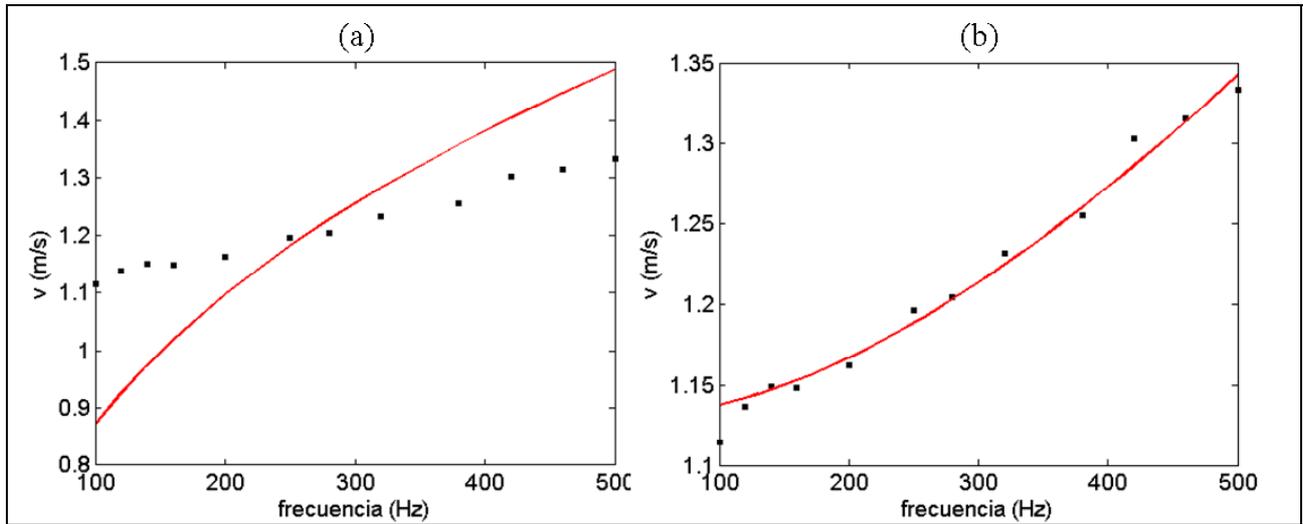


Figura 28 (a) Ajuste de la curva $v(f)$ medida experimentalmente con la relación de dispersión prevista para una onda de capilaridad $v \sim f^{1/3}$ (b) Ajuste de la misma curva con el modelo de un sólido viscoelástico de Voigt. Este modelo ajusta mucho mejor a los resultados experimentales.

En las expresiones anteriores el subíndice 1 indica el coeficiente elástico y el 2 el coeficiente viscoso. La expresión (50) es un polinomio de tercer grado en k^2 por lo que existen 6 posibles raíces para k . Sin embargo se ha demostrado que las únicas raíces que corresponden a la propagación de ondas de superficie son aquellas que cumplen $k^2 > k_s^2$ que son solamente dos y corresponden a la misma onda ya que cada raíz es la conjugada compleja de la otra. En el caso general en que $\lambda_2, \mu_2 > 0$ no es posible obtener una solución analítica de estas raíces. Dicha solución depende de la relación:

$$\gamma = \frac{k_s}{k_p} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + i\omega\lambda_2 + 2(\mu_1 + i\omega\mu_2)}{\mu_1 + i\omega\mu_2}} \quad (52)$$

Si el sólido es perfectamente elástico ($\lambda_2 = \mu_2 = 0$) la ecuación (50) tiene solución analítica dada aproximadamente por la fórmula de Viktorov⁽³²⁾:

$$k_R \cong \frac{0.75 - (1/\gamma)^2}{0.718 - (1/\gamma)^2} k_s \quad (53)$$

Si además se trata de un sólido blando se cumple $k_p \ll k_s$ y por lo tanto $\gamma \gg 1$. En estas condiciones vemos de la expresión anterior que la velocidad de la onda de Rayleigh c_R en función de la velocidad de la onda de corte c_s se puede aproximar por:

$$c_R \cong 0.955c_s \quad (54)$$

En el caso de un sólido blando viscoelástico esta relación depende de la frecuencia y la expresión anterior no es válida en el caso general. Sin embargo tanto en tejidos como en geles el coeficiente viscoso de compresión λ_2 es despreciable a las frecuencias en que realizamos las experiencias⁽³³⁾. Si además trabajamos en un rango de frecuencias para los que $\omega\mu_2 \ll \mu_1$ podemos asumir que la relación es válida como primera aproximación. En estas condiciones podemos sustituir la expresión superior de la ecuación (36) en (54) y obtener:

$$c_R \cong 0.955 \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2\mu_2^2)}{\rho(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2\mu_2^2})}} \quad (55)$$

La figura 28(b) muestra la medida de la velocidad de la onda de superficie en función de la frecuencia y un ajuste por mínimos cuadrados de la expresión (55). Como se puede apreciar este modelo ajusta mejor a los resultados experimentales que la relación de dispersión de las ondas de capilaridad. En este caso el coeficiente de correlación es $r = 0.97$. Podemos concluir entonces que nuestras medidas corresponden a ondas de superficie de origen elástico (es decir donde la fuerza restauradora está dada por la elasticidad del medio) de un medio viscoelástico.

Los valores obtenidos a partir del ajuste son: $\mu_1 = 1.53$ KPa y $\mu_2 = 0.38$ Pa·s. Para comprobar la validez de la aproximación anterior en el rango de frecuencias utilizado calculamos, con los valores de μ_1 y μ_2 hallados, por un lado la raíz de (50) numéricamente para finalmente obtener la velocidad de la onda de superficie a partir de (49). Por otro lado hallamos la velocidad de la onda de corte en función de la frecuencia a partir de la ecuación (55). El rango de frecuencias va desde 100 Hz hasta 500 Hz en pasos de a 10 Hz. La figura 29 muestra la relación entre c_R y c_s para ese rango de frecuencias. Como se puede apreciar la relación es lineal indicando que el factor de proporcionalidad no cambia apreciablemente. Un ajuste lineal por mínimos cuadrados arroja para la pendiente un valor de 0.954 y coeficiente de correlación de este ajuste es $r = 0.999$. Por lo tanto la aproximación utilizada en (55) para estimar los parámetros viscoelásticos a partir de la onda de superficie resulta adecuada en esta experiencia.

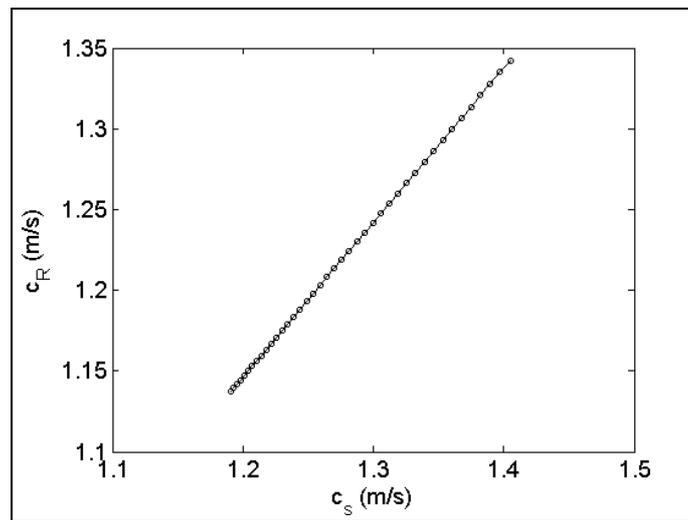


Figura 29 Relación entre la velocidad de superficie y la velocidad de corte para las frecuencias utilizadas en la experiencia. La calidad del ajuste lineal muestra que esta relación es prácticamente constante por lo que la aproximación utilizada para realizar el ajuste en la figura 28(b) es adecuada en este rango.

La solución propuesta aquí para medir los parámetros viscoelásticos contando con la información de los desplazamientos superficiales representa un primer abordaje a este tema. Como ya mencionamos, el problema de la propagación de ondas de superficie en medios viscoelásticos tiene un creciente interés por sus potenciales aplicaciones sobre todo en el área médica. Por otro lado existe un interés físico en la propagación de las ondas de superficie en sólidos blandos pues allí pueden coexistir diferentes tipos de ondas o incluso existir una transición entre ellas⁽³⁴⁾. No profundizaremos sobre esta área de trabajo en esta tesis aunque sin dudas es un tema abierto sobre el cual seguiremos trabajando en nuestro laboratorio.

IV. IMÁGENES 2D

En las aplicaciones de la elastografía transitoria el interés está centrado en una imagen bidimensional (y si fuera posible tridimensional) de la elasticidad local en el medio. De esta forma se puede evaluar la extensión espacial de las inhomogeneidades presentes. Al igual que en elastografía estática y sonoelastografía, en elastografía transitoria se puede utilizar un cabezal multielemento para obtener información de los desplazamientos en el plano xz . La diferencia aquí radica en que para poder seguir la propagación de la onda de baja frecuencia en su etapa transitoria se necesita una frecuencia de repetición de pulso acorde con tal fin. En los ecógrafos standard dicha frecuencia es del orden de 50 Hz o menor ya que su finalidad es obtener imágenes ecográficas en tiempo real (~ 25 cuadros por segundo) con la mejor calidad (relación señal/ruido, contraste) posible.

IV.1 Imagen ecográfica 2D

Para construir imágenes con calidad suficiente como para el uso en diagnóstico médico, los ecógrafos utilizan una ley de retardos entre los diferentes elementos del cabezal de manera de

focalizar la energía acústica en una profundidad dada dentro del medio como se muestra en la figura 30(a). El proceso de focalización en emisión mejora sustancialmente la relación señal/ruido y el contraste logrado en la imagen ecográfica. La focalización en emisión debe complementarse con la focalización en la recepción (beamforming) para seleccionar los ecos de una zona determinada del medio. La figura 30(b) muestra los ecos provenientes de dos difusores (puntos identificados con negro y gris). La ley de retardos introducida en cada elemento del cabezal luego de la recepción hace que la suma de las señales del difusor en negro se produzca en fase resultando en una señal que identifica al difusor. Las señales recibidas del difusor en rojo se suman en forma incoherente dando como resultado un ruido acústico de fondo en la ecografía.

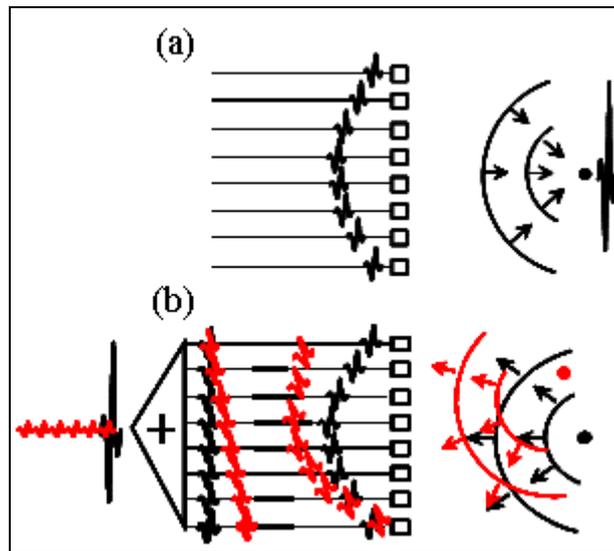


Figura 30 (a) Proceso de focalización en emisión. Utilizando un cabezal multielemento se introduce una ley de retardo en cada uno de ellos que permite focalizar la energía acústica a una profundidad dada. (b) Proceso de focalización en recepción. Introduciendo una ley de retardo en cada elemento del cabezal en modo recepción, se puede seleccionar la zona del medio desde la cual proviene la señal (difusor marcado con negro). Los difusores de otras zonas (difusor marcado con gris) producen una suma incoherente de los pulsos y resultan en una señal de ruido acústico de fondo en la ecografía.

Para construir una imagen bidimensional con la misma calidad en toda la extensión lateral, la focalización se debe realizar en torno a una posición x_0, z_0 utilizando una subapertura del cabezal como se muestra en la figura 31(a). Variando secuencialmente los elementos activos del cabezal se puede focalizar en diferentes posiciones x_i como se muestra esquemáticamente en la figura 31(b). El tiempo insumido en cada etapa del proceso (focalización en emisión y recepción) es del orden de 0.13 ms debido básicamente al tiempo de propagación de la onda ultrasónica hasta la profundidad de exploración y el retorno al cabezal (estamos asumiendo aquí una profundidad de exploración de ~ 10 cm y que la velocidad de propagación del sonido es ~ 1.5 mm/ μ s). Por lo tanto el tiempo total para un cabezal de 128 elementos es 128×0.13 ms $\cong 17$ ms lo que permite construir imágenes a un ritmo de ~ 50 cuadros por segundo (cps).

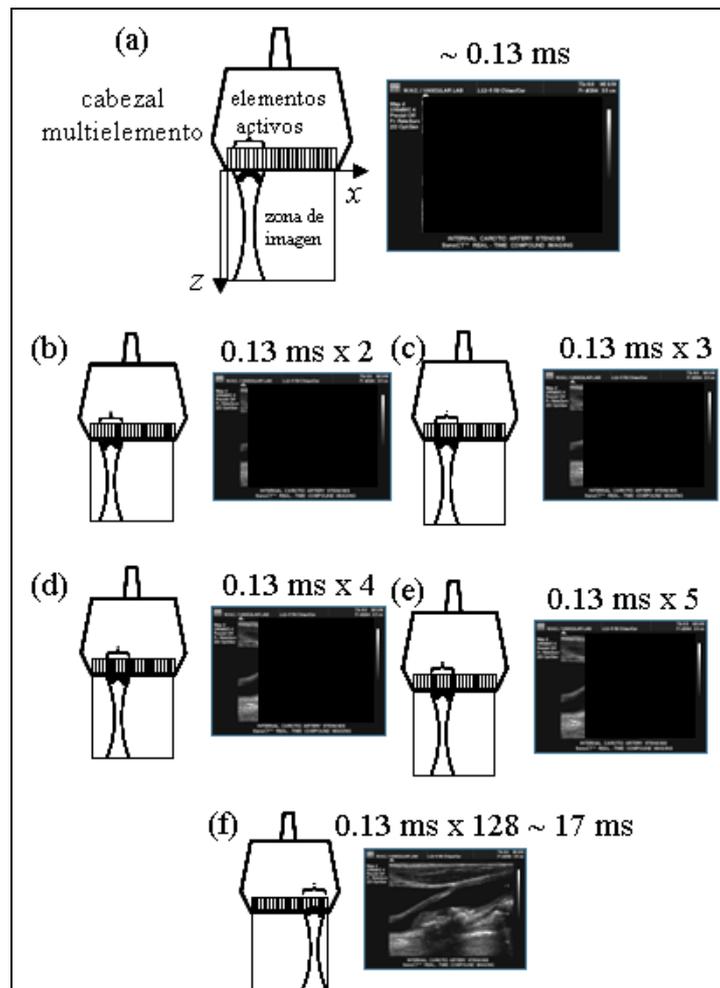


Figura 31 Esquema que muestra como elaborar una imagen ecográfica utilizando una profundidad de focalización en emisión. Los elementos activos del cabezal se modifican secuencialmente hasta barrer toda la dimensión lateral x . El tiempo insumido en cada paso es del orden de 0.13 ms por lo que el tiempo total es de 17 ms para un cabezal con 128 elementos. Esto permite elaborar imágenes con una frecuencia de ~ 50 Hz.

Para mejorar la calidad de la imagen en lugar de focalizar a una sola profundidad z_0 , se puede focalizar en dos profundidades z_0 y z_1 . El tiempo total para elaborar cada cuadro ahora se duplica ya que se deben realizar dos emisiones para cada posición x_i dando entonces un ritmo de ~ 25 cps. Los humanos percibimos esta frecuencia de actualización como tiempo real⁽³⁵⁾. Por lo tanto la imagen ecográfica con focalización a la emisión en dos profundidades diferentes es la de mejor calidad en tiempo real. Algunos ecógrafos permiten aun mayor cantidad de focalizaciones en la emisión lo que mejora la calidad final en la imagen, a costa de que la información en este caso ya no es en tiempo real.

Como ya hemos visto, la elastografía transitoria necesita una frecuencia de repetición de pulso del orden de 1 KHz para poder seguir la propagación de la onda de baja frecuencia en el medio por lo que el ritmo de 25 o 50 Hz logrado con los instrumentos convencionales resulta insuficiente. Para aumentar la frecuencia de repetición en un cabezal multielemento es necesario entonces eliminar el proceso de focalización en la emisión ya que es la etapa que insume mayor cantidad de tiempo. Esto no es posible con la electrónica standard usada en los ecógrafos. Por esta razón la elastografía

transitoria 2D necesita una electrónica dedicada que recibe el nombre de sistema de imaginería ultrarápida (Ultrafast Imaging System). Con esta electrónica cada uno de los canales del cabezal (128 en un caso típico), se controla en forma independiente con la consecuente multiplicación en los costos. De este modo es posible excitar a cada uno de los elementos del cabezal por separado con una ley de retardos dada por el usuario. Si se envía un pulso en cada elemento sin retardo entre ellos se puede enviar una onda plana^(*), manteniendo la focalización solamente en la recepción (beamforming). Como consecuencia el tiempo insumido en elaborar una imagen es de solamente ~ 0.13 ms. La frecuencia de repetición está limitada únicamente por la profundidad de exploración y puede elevarse hasta ~ 8 KHz.

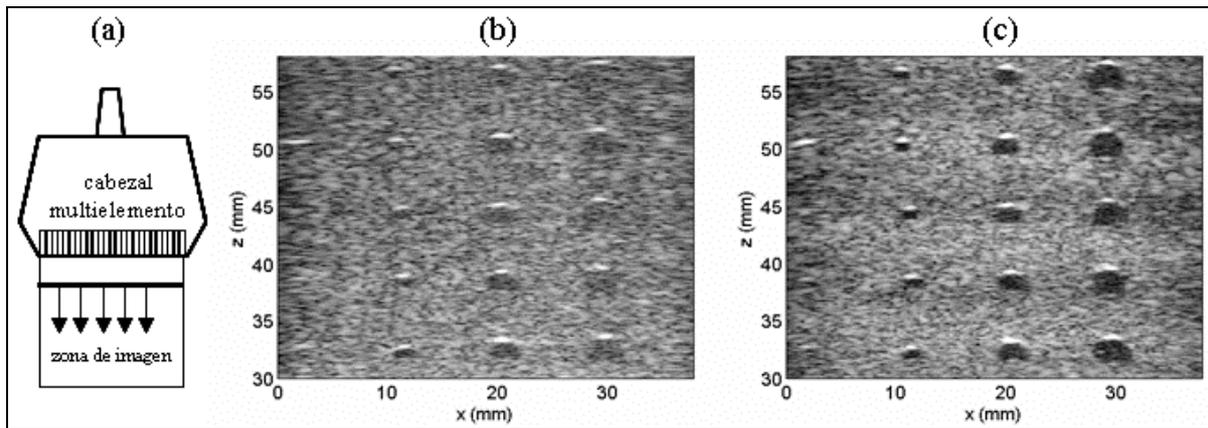


Figura 32 Imagen ecográfica obtenida en un fantoma de calibración con objetos anecoicos de diferente diámetro. Al centro se muestra la imagen elaborada a partir de la emisión de una onda plana como se muestra a la izquierda. En la imagen derecha se utilizaron 4 profundidades de focalización. La diferencia en la calidad de la imagen es notoria. La imagen derecha tiene mejor contraste y resolución. Sin embargo la elastografía transitoria requiere de frecuencias de repetición de pulso muy elevadas para poder seguir la propagación de la onda de baja frecuencia. El tiempo empleado en construir la imagen izquierda es de solo 0.073 ms (la profundidad de exploración en esta medida es de ~ 55 mm) comparado con $128 \times 4 \times 0.073 = 37$ ms.

En un trabajo que hemos realizado en el Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA) de la ciudad de París, hemos investigado la elaboración de imágenes ecográficas a partir de la composición coherente de ondas planas^{(**)(36)}. El objetivo es mantener la calidad de la imagen aumentando la frecuencia de repetición. Como este trabajo solo toca lateralmente a la elastografía brindaremos aquí los principales resultados. La imagen ecográfica obtenida con la emisión de una sola onda plana (donde el vector de ondas es paralelo al eje z) es pobre en contraste y resolución. La figura 32 muestra una comparación de dos imágenes de un fantoma de calibración con objetos anecoicos. La imagen de la izquierda fue construida a partir de una onda plana mientras que la derecha se hizo utilizando focalización a la emisión en cuatro profundidades diferentes. Es notoria la diferencia del contraste alcanzado con los objetos anecoicos entre ellas.

* En un sentido estricto la onda no es plana pues difracta en la dirección y . Sin embargo en este trabajo emplearemos este término para referirnos a este tipo de propagación pero teniendo claro que existe atenuación geométrica.

** Este trabajo, realizado en forma conjunta con el Dr. Gabriel Montaldo, está siendo implementado en un ecógrafo prototipo.

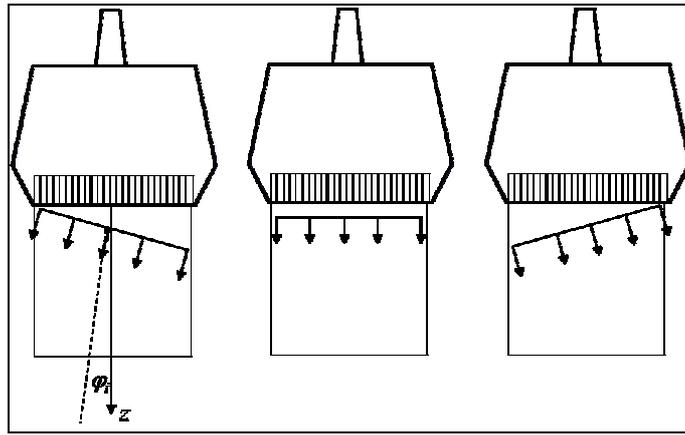


Figura 33 La imagen ecográfica se puede construir a partir de la composición coherente de la emisión de sucesivas ondas planas cada una formando un ángulo dado φ_i con el eje z

Desde el punto de vista de la ecografía, la imagen central se puede mejorar si se construye a partir de la composición coherente de ondas planas. La idea es enviar múltiples ondas planas al medio de manera que el vector de ondas en cada emisión forme un ángulo dado φ_i con el eje z como se muestra en la figura 33. Para un ángulo dado la componente según x del vector de ondas es:

$$k_x = k_0 \sin(\varphi_i) \tag{56}$$

El valor máximo que puede tomar esta componente está dado por el criterio de Nyquist-Shannon. Si dx es la separación espacial entre dos elementos consecutivos del cabezal entonces la frecuencia de muestreo en la dirección x es $f_x = 1/dx$ y por lo tanto:

$$k_x^{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{dx} \right) \tag{57}$$

Por otro lado si N_{el} es el número de elementos del cabezal, la variación mínima dk_x que podemos medir en la componente x del vector de ondas está dada por:

$$dk_x = \frac{2\pi}{dx} \frac{1}{N_{el}} \tag{58}$$

Por lo tanto el número máximo de ondas planas que podemos enviar con ángulos diferentes (positivos y negativos) entre si es N_{el} y la cantidad anterior define el paso entre dos ángulos consecutivos. La emisión de N_{el} ondas planas con ángulos $\varphi_j = \arcsin(j\lambda / N_{el}dx)$ garantiza que no hay pérdida de información en el espectro del conjunto de ondas planas. Sin embargo en la práctica es posible utilizar una cantidad menor de emisiones para construir la imagen ecográfica sin perder calidad respecto a la emisión focalizada. El cabezal multielemento representa una ventana espacial en la adquisición de datos en la dirección x entre $x = -a$ y $x = a$. Esta ventana oficia de filtro para las frecuencias altas del espectro. En particular, si se emite una onda desde la apertura $(-a, a)$ que focaliza a una distancia z_f , el campo de presión $p(x)$ en la dirección x es⁽³⁶⁾:

$$p(x) = p_0 g(z_f) \text{sinc}\left(\frac{k_0 x a}{z_f}\right) \tag{59}$$

donde $g(z_f)$ representa la ganancia del arreglo de transductores y $k_0 = 2\pi / \Lambda_0$ es el número de onda de la emisión. Tomando la transformada de Fourier de esta función vemos que el espectro espacial $P(k_x)$ de la focalización standard es una función rectangular que se muestra en la figura 34 y está dada por:

$$P(k_x) = \begin{cases} p_0 g(z_f) \sqrt{\pi/2} & \text{si } |k_x| < k_0 a / z_f \\ 0 & \text{si } |k_x| > k_0 a / z_f \end{cases} \tag{60}$$

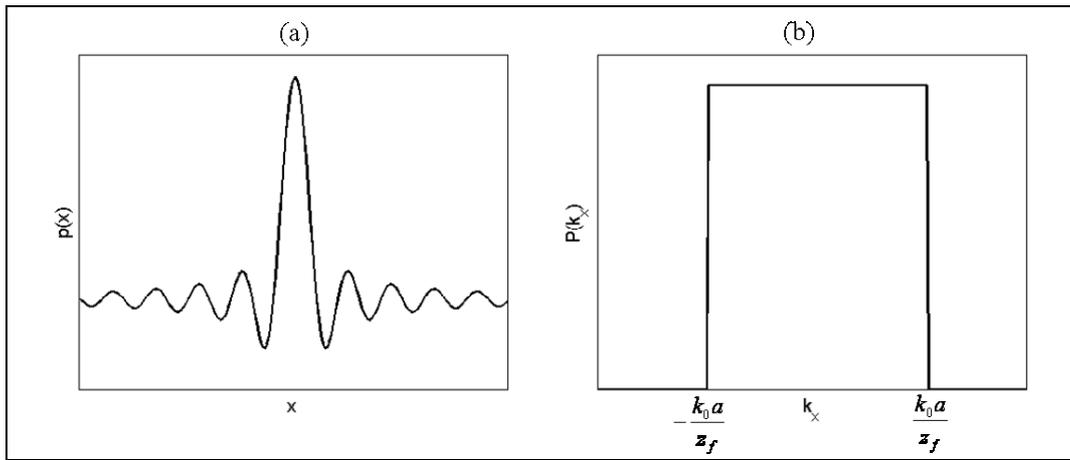


Figura 34 (a) En la emisión focalizada el campo de presión en función de x tiene la forma de una función sinc (b) Espectro espacial de la función anterior donde se observa que la ventana actúa como un filtro para las altas frecuencias.

Si tomamos $k_0 a / z_f$ como el valor máximo del vector de ondas en la dirección x , el número de ondas planas se reduce a:

$$n_k = \frac{a}{z_f} \frac{k_0}{dk_x} = \frac{a}{z_f} \frac{L}{\Lambda_0} \tag{61}$$

donde Λ_0 es la longitud de onda ultrasonora y hemos usado $N_{el} dx = L$, el largo del cabezal. La relación $2a/z_f$ se conoce como apertura numérica n_{ap} del cabezal. La resolución espacial de la imagen ecográfica (tanto axial como lateral) depende de esta relación⁽³⁷⁾. Cuanto mayor el valor de n_{ap} , mejor es la resolución espacial en la imagen. Sin embargo en la práctica el largo L de un cabezal lineal es del orden de ~ 4 cm mientras que la profundidad de observación varía pudiendo alcanzar 10-15 cm. Por lo tanto un valor típico de la apertura numérica a estas profundidades es $n_{ap} \sim 0.4$. Cuando se construye una imagen es deseable que toda la zona de observación mantenga la misma resolución espacial. Esto quiere decir que cuando la profundidad de observación z_f disminuye, se utiliza una cantidad menor de elementos del cabezal de modo de mantener la apertura numérica constante. Como consecuencia en general se cumple que el cociente $a/z_f = n_{ap}/2 < 1$. De

modo que podemos construir la imagen con la contribución de las frecuencias más bajas del espectro espacial usando un número menor de ángulos y por lo tanto de emisiones. Como resultado se obtiene que la frecuencia de repetición aumenta respecto a la emisión focalizada.

Las condiciones experimentales en nuestro trabajo son: $L = 40$ mm, $\Lambda_0 = 0.43$ mm (frecuencia central de emisión $f_c = 3.5$ MHz) y hemos elegido $n_{ap} = 0.6$. Utilizando estos valores en la ecuación (61) encontramos $n_k = 28$. Como debemos enviar tanto ángulos positivos como negativos, el número total de emisiones es $2n_k = 56$. En la figura 35 se muestra la imagen obtenida con esta cantidad de emisiones. El contraste en esta imagen es comparable a la obtenida por focalización en emisión en 4 profundidades diferentes. Sin embargo el tiempo insumido para formar esta imagen es de 56×0.073 ms $\cong 4$ ms. En este caso la frecuencia de repetición de pulso es de 250 Hz. Este alto valor se puede aprovechar para hacer un tratamiento extra de los datos (como por ejemplo un promedio sobre varias adquisiciones) y todavía mostrar imágenes en tiempo real (~ 25 Hz) en la pantalla.

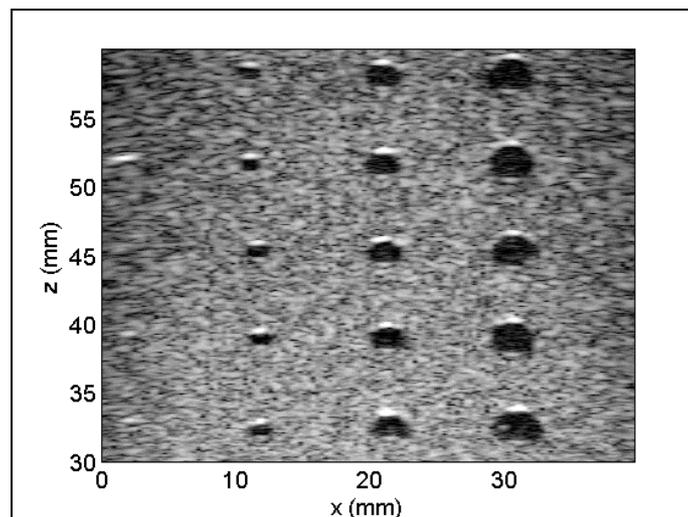


Figura 35 Imagen de objetos anecoicos de un fantoma de calibración obtenida a partir de la composición coherente de 56 ondas planas. La mejora del contraste respecto a la emisión de una sola onda plana es notoria. La calidad de esta imagen es comparable a la que se obtiene con múltiples focos a la emisión con la ventaja de que el tiempo total de la adquisición es mucho menor.

Enviando un número menor de ondas planas es posible aumentar la FRP con el compromiso de perder calidad en la imagen ecográfica pero útil para la realización de experiencias de elastografía transitoria. Si bien es posible ahondar sobre este tema (la investigación sobre la calidad y el tratamiento de datos en este tipo de imágenes aun sigue en curso), consideramos que los resultados mostrados aquí son suficientes en el marco de esta tesis ya que la aplicación de esta investigación a la elastografía es lateral.

IV.2 Imagen elastográfica 2D

En elastografía transitoria no es necesario que la imagen tenga buen contraste y resolución sino una señal de speckle acústico con buena relación señal/ruido por lo que la información registrada con una sola onda plana es suficiente para aplicar el algoritmo de correlación para estimar los desplazamientos de la onda de baja frecuencia en su período transitorio. Una vez medido el campo de desplazamientos se puede evaluar la elasticidad a nivel local a partir de la ecuación (12). En este caso se debe tener en cuenta la hipótesis expresada en la ecuación (14) sobre la dependencia del campo en la dirección y . En este sentido se han realizado en el LOA diferentes propuestas sobre el tipo de fuente a utilizar para lograr esta condición⁽³⁸⁾.

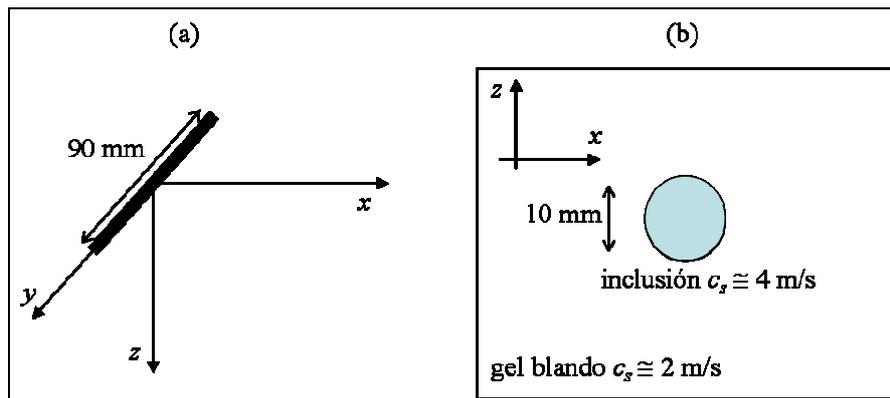


Figura 36 (a) Esquema que muestra la fuente lineal de 9 mm dispuesta sobre el eje y . La simetría del problema hace que la dependencia de los desplazamientos con y sea pequeña. (b) Esquema de un gel heterogéneo compuesto de dos fases. Una región cilíndrica de 10 mm de diámetro y velocidad promedio 4 m/s está inmersa en un gel más blando de velocidad promedio 2 m/s.

En nuestro laboratorio no disponemos de la electrónica para manejar un cabezal multielemento por lo que las imágenes elastográficas bidimensionales las construimos a partir de un barrido con el transductor en la dirección x . El barrido se hace en pasos de 1 mm. Para cada posición x_0 se hace una experiencia de elastografía transitoria unidimensional donde se obtiene una matriz con la información sobre $u_z(x_0, z, t)$. Obviamente el tiempo insumido en este proceso no permite obtener los resultados en tiempo real. Para generar el campo de baja frecuencia hemos utilizado una fuente lineal de 3 mm de ancho y 90 mm de largo dispuesta en la dirección y sobre la superficie del gel como se muestra en la figura 36(a). Dada la simetría del problema, el campo generado por esta fuente cumple con la aproximación dada en (14)⁽²⁴⁾. La experiencia la hemos realizado sobre un gel inhomogéneo construido con dos fases como se muestra en la figura 36(b). Una fase consiste en un gel con forma cilíndrica de 10 mm de diámetro y dispuesto sobre la dirección y , con velocidad promedio $c_s^1 = 4 \text{ m/s}$. La otra fase rodea es un homogéneo de velocidad promedio $c_s^2 = 2 \text{ m/s}$ que rodea a la anterior.

Una vez adquiridos los datos para todas las posiciones x_i del barrido contamos con la información necesaria para elaborar un mapa elástico del medio, es decir la dependencia temporal

de la componente z del campo de desplazamientos en el plano xz : $u_z(x, z, t)$. Aplicando la transformada de Fourier temporal a estos datos obtenemos $\tilde{u}_z(x, z, \omega)$.

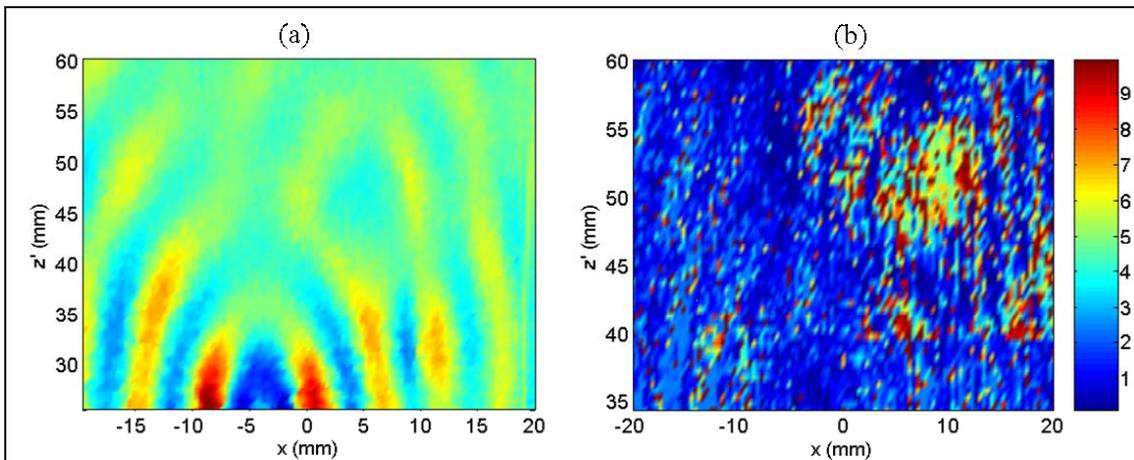


Figura 37 (a) Campo de desplazamiento $\tilde{u}_z(x, z, \omega)$ evaluado en $\omega = \omega_0$. Se observa claramente en la imagen que la presencia de la inclusión distorsiona localmente la longitud de onda. (b) Mapa de velocidad de la onda de corte. Se puede observar claramente la presencia de la inclusión aunque la frontera entre un medio y otro no queda bien definida. En esta imagen no se muestran los valores de c_s por debajo de 0 y por encima de 10 m/s

En la figura 37(a) se muestra el campo evaluado en $\omega = \omega_0$, la frecuencia central de excitación de la fuente. Se puede observar claramente en esta imagen que la presencia de la inclusión produce una perturbación en la longitud de onda siendo mayor en la zona de la inclusión que en el resto del medio. La reconstrucción local del módulo de corte en el caso general implica calcular la derivada espacial del campo de baja frecuencia. Como vimos en la sección III.2, la derivada espacial amplifica los ruidos de alta frecuencia de manera que es necesario aplicar algún tipo de filtro para suavizar la curva y obtener resultados útiles. En estos casos la aplicación de filtros implica un compromiso entre la precisión en la estimación de la derivada y la resolución espacial del resultado. Como vimos este compromiso es común a todas las técnicas elastográficas. Existen en la literatura numerosas propuestas sobre este punto. Una excelente revisión de ellas y su aplicación a la elastografía se encuentra en la referencia [2]. En este trabajo solamente estamos interesados en las causas físicas del problema por lo que no haremos demasiado hincapié en la elección del algoritmo para calcular el laplaciano (aunque este punto es importante en la aplicación médica del método). Aplicamos aquí el algoritmo de Savitsky-Golay que consiste en aproximar la función localmente por un polinomio de bajo orden (2 o 4) hallado por mínimos cuadrados⁽²⁾. El resultado se muestra en la figura 37(b) junto con una escala de colores que muestra el valor de la velocidad de la onda de corte (asumimos $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ para las dos fases). En la práctica las frecuencias útiles (por encima del valor de ruido) son varias, por lo tanto la imagen se hizo a través de un promedio para las distintas frecuencias. Finalmente al resultado le aplicamos un filtro pasabajos para eliminar el ruido de alta frecuencia residual. En esta imagen no se muestran los valores de c_s por debajo de 0 y

por encima de 10 m/s ya que estos valores se dan en posiciones puntuales y aleatorias y son debido a fluctuaciones en el cálculo de la derivada. La inclusión es claramente visible en la imagen aunque la frontera entre los dos medios no quede bien definida. Los artefactos que se observan en la imagen pueden ser debidos a que la aproximación polinómica no sea adecuada para ajustar las variaciones locales de los datos.

Para finalizar debemos agregar que los resultados de este tipo que se encuentran en la literatura obtenidos a partir de la propagación de ondas planas muestran mejor resolución espacial. Esto se debe a que además de crear condiciones experimentales para acercarse a las aproximaciones del problema inverso, el uso de ondas planas en elastografía dinámica permite utilizar algoritmos de estimación local de frecuencia para acceder a la longitud de onda local. Estos algoritmos suelen ser más eficaces y precisos que los de estimación de derivadas⁽²⁾. En un caso genérico esto no es posible porque la solución general de la ecuación de Helmholtz se puede construir a partir de una integral de ondas planas viajando en todas las direcciones.

V. CONCLUSION DEL CAPITULO

El trabajo de investigación en elastografía en los últimos 15 años ha llevado a que se elaboraran diferentes propuestas resumidas en la primera parte de este capítulo. Actualmente todas ellas convergen de una u otra manera en la resolución del problema inverso para la estimación local de la elasticidad. En este sentido la elastografía por resonancia magnética es la que se presenta como la más precisa ya que puede acceder a todas las componentes del campo vectorial, resultando ser independiente de las condiciones de borde y del tipo de fuente utilizada. Sin embargo la frecuencia de adquisición de datos es baja (del orden de 1 Hz) por lo que una medida puede tardar varios segundos o inclusive minutos. Pero la mayor limitación de la elastografía por resonancia magnética son sus altos costos. Estos costos no son altos solamente para nuestro laboratorio en particular sino que es un hecho generalizado^(*). La elastografía basada en ultrasonido tiene desde el punto de vista médico una serie de ventajas. Los equipos resultan más económicos y se pueden trasladar hacia el paciente. Además no tiene contraindicaciones ni efectos secundarios a los niveles de potencia utilizados en diagnóstico. Por estas razones la investigación en elastografía ultrasonora es relevante y existen en el mundo una cantidad importante de laboratorios dedicados a este tema.

Con la tecnología actual las técnicas ultrasonoras solo pueden acceder a la dependencia espacial en dos de las tres dimensiones de una de las componentes del campo vectorial (es decir $u_z(x,z)$). Para resolver el problema inverso en estas condiciones (a menos que se haga un barrido en la

* En un artículo publicado en el periódico The New York Times en su edición del 28 de marzo de 2007 sobre el uso de la resonancia magnética para diagnóstico de cáncer de mamas se hace referencia a este hecho. Según el periódico un estudio por resonancia magnética cuesta entre US\$ 1000 y 2000 en Estados Unidos lo que limita el número de exámenes que la población de riesgo (mujeres con antecedentes familiares o ciertas mutaciones genéticas) debería hacerse al año.

dirección y), es necesario hacer hipótesis sobre la información faltante. Estas hipótesis son muy restrictivas sobre todo en elastografía estática y sonoelastografía ya que su validez depende de las condiciones de borde. Desde este punto de vista la elastografía transitoria es más ventajosa pues es independiente de estas condiciones. Los resultados cuantitativos en este caso se ajustan mejor a las hipótesis del algoritmo de inversión si el frente de ondas es plano. Este hecho limita en cierto sentido el tipo de fuentes que se pueden utilizar en las aplicaciones prácticas.

El método de interferometría speckle ultrasonora es un método de investigación que permite medir los desplazamientos en el volumen del medio con una precisión muy inferior a la longitud de onda ultrasonora. Esta posibilidad no es muy común en el estudio de la propagación de ondas elásticas en sólidos y permite confirmar experimentalmente algunos de los resultados previstos teóricamente por las funciones de Green en medios elásticos y viscoelásticos. En este trabajo hemos utilizado el método para investigar el campo de difracción de una fuente de volumen en un sólido semi-infinito. En particular hemos mostrado la contribución de los términos de origen superficial, como lo son las ondas de cabeza, al campo de desplazamientos. Si bien su amplitud es débil comparado con los otros términos del campo elástico, experimentalmente es posible medir su contribución en posiciones angulares donde el término de acoplamiento pasa por un mínimo. La interacción de la onda de cabeza con la onda de corte produce un corrimiento del espectro hacia las bajas frecuencias. Estos resultados pueden tener consecuencias en la práctica cuando se utilizan fuentes extendidas para generar el campo.

Por otro lado también hemos contribuido a extraer información de los parámetros elastográficos a partir de la propagación de ondas de superficie. La dependencia de la velocidad de la onda de Rayleigh con la frecuencia obtenida experimentalmente revela las propiedades viscoelásticas del medio. En una primera aproximación al problema esta curva nos permitió extraer los parámetros viscoelásticos en base al modelo de Voigt. El método utilizado para medir los desplazamientos superficiales presenta la ventaja de que permite medir el campo en toda la superficie. Este estudio permite pensar en aplicaciones en medicina como elastografía a partir de fuentes internas o evaluación de la elasticidad de la piel. Este punto queda abierto a futuras investigaciones en la materia.

Para realizar experiencias de elastografía transitoria es necesario contar con una electrónica capaz de adquirir datos con una frecuencia llamada ultrarápida (Ultrafast Imaging System). Esta condición de electrónica dedicada además de incrementar notoriamente los costos impide utilizar ecógrafos standard para este tipo de experiencias. En este capítulo hemos mostrado una forma alternativa a la focalización en emisión basado en la emisión de ondas planas que permite aumentar la frecuencia de adquisición de datos en imágenes ecográficas manteniendo la calidad de las imágenes. Las frecuencias alcanzadas en este trabajo (~ 250 Hz) con buena calidad de imagen

todavía no son útiles para la elastografía transitoria de modo que se pueda integrar en un solo equipo “económico” la imagen ecográfica con la imagen elastográfica. Sin embargo esta posibilidad queda planteada a partir de una nueva propuesta de elastografía dinámica que se describe en el siguiente capítulo.

REFERENCIAS

- ¹ L. Landau, E. Lifchitz, “Théorie de l'élasticité”, MIR, Moscou, (1967).
- ² T. Oliphant, “Direct methods for dynamic elastography reconstruction: Optimal inversion of the interior Hemholtz problem”, Tesis de doctorado en Ciencias Biomédicas, Mayo Graduate School, (2001).
- ³ A. Sarvazyan, O. Rodenko, S. Swanson, J. Flowkers, Y. Emilianov, “Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnosis”, *Ultrasound Med. & Biol.* **24** (9), 1419-1435, (1998).
- ⁴ J. Ophir, I. Céspedes, H. Ponnekanti, Y. Yazdi, X. Li, “Elastography: a method for imaging the elasticity of biological tissue”, *Ultrasonic Imaging* **13** (2), 111-134, (1991).
- ⁵ A. Saada, “Elasticity: Theory and applications” Pergamon Press, New York, (1974).
- ⁶ H. Ponnekanti, J. Ophir, Y. Huang, I. Céspedes, “Fundamental mechanical limitations on the visualization of elasticity contrast in elastography”, *Ultrasound Med. & Biol.* **21** (4), 533-543, (1995).
- ⁷ J. Bai, C. Ding, J. Luo, P. He, “Estimation and reduction of decorrelation effect due to tissue lateral displacement in elastography”, *IEEE Trans. Ultras. Ferroelec. Freq. Control*, **49** (5), 541-549, (2002).
- ⁸ K. Parker, S. Huang, R. Musulin, R. Lerner, “Tissue response to mechanical vibrations for sonoelasticity imaging”, *Ultrasound in Med. & Biol.* **16** (3), 241-246, (1990).
- ⁹ Z. Whu, K. Hoyt, D. Rubens, K. Parker, “Sonoelastographic imaging of interference patterns for estimation of shear velocity distribution in soft materials”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **120** (1), 535-545, (2006).
- ¹⁰ R. Muthupillari, D. Lomas, P. Rossman, J. Greenleaf, A. Manduca, R. Ehman, “Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves”. *Science* **269**, 1854-1857, (1995).
- ¹¹ A. Manduca, R. Muthupillai, R. Rossman, J. Greenleaf, R. Ehman, “Image processing for magnetic resonance elastography”, *Proc. SPIE* **2710**, 616-623, (1996).
- ¹² S. Catheline, “Interferometrie speckle ultrasonore: application a la mesure de l'élasticité” Tesis de doctorado en fisica especialidad acústica fisica, Université Paris VII, (1998).
- ¹³ C. Negreira, M. Sigwalt, M. Fink, “Volume isochrone et ondes de bord en diffraction impulsionnelle”, *Revue du CETHEDEC-Ondes et Signal* **79** (2), 153-165, (1984).
- ¹⁴ P. Stephanishen, “Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle”, *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 1639-1648, (1971).
- ¹⁵ W. Walter, G. Trahey, “A fundamental limit on delay estimation using partially correlated speckle signals”, *IEEE Trans. Ultras. Ferroelec. Freq. Control*, **42** (2), 301-308, (1995)
- ¹⁶ J. Meunier, M. Bertrand, “Ultrasonic speckle motion inherent to tissue motion: Theory and simulation”, *Proc. Ultrasonics Symp. IEEE*, 865-868, (1989).
- ¹⁷ T. Varghese, J. Ophir, I. Céspedes, “Noise reduction in elastograms using temporal stretching with multicompression averaging”, *Ultrasound in Med. & Biol.* **22** (8), 1043-1052, (1996)
- ¹⁸ T. Varghese, J. Ophir, “A theoretical framework for performance characterization of elastography: The strain filter”, *IEEE Trans. Ultras. Ferroelec. Freq. Control*, **44** (1), 164-172, (1997).
- ¹⁹ S. Catheline, J-L. Gennisson, G. Delon, M. Fink, R. Sinkus, S. Abouelkaram, J. Culioli, “Measurement of viscoelastic properties of homogeneous soft solid using transient elastography: An inverse problem approach”, *J. Acoust. Soc. Am.* **116** (6), 3734-3741, (2004).
- ²⁰ N. Benech, “Elastografía ultrasonora de medios viscoelásticos con ondas de cizalla de baja frecuencia”, Tesis de Maestría en fisica, especialidad: acústica fisica. Universidad de la República – PEDECIBA, (2004)
- ²¹ D. Gakenheimer, J. Miklowitz, “Transient excitation of an elastic half space by a point load travelling on the surface”, *J. Appl. Mechanics* **91**, 505-515, (1969).
- ²² A. Lheméry, “A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid” *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (6), 3776-3786, (1996).
- ²³ L. Sandrin, D. Cassereau, M. Fink, “The role of the coupling term in transient elastography”, *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (1), 73-83, (2004).
- ²⁴ N. Benech, C. Negreira, “Longitudinal and lateral head wave analysis in soft media”, *J. Acoust. Soc. Am.* **117** (6), 3424-3431, (2005).
- ²⁵ F. kallel, J. Ophir, “A least squares strain estimator for elastography”, *Ultrason. Imaging* **19**, 195-208, (1997).

- ²⁶ S. Srinivasan, J. Ophir, S. Alam, “Elastographic imaging using staggered strain estimates”, *Ultrason. Imaging* **24**, 229-245, (2002).
- ²⁷ Y. Fung “Biomechanics: mechanical properties of living tissues”, Springer-Verlag, New York, (1993).
- ²⁸ R. Lakes, “Viscoelastic solids”, CRC Press, University of Wisconsin, (1999).
- ²⁹ N. Kikuchi, K. Sakai, K. Takagi, “Complex propagation of surface waves on soft gels”, *Phys. Rev B*, **49** (3), 3061-3065, (1994).
- ³⁰ N. Benech, I. Núñez, C. Negreira, “Elastographic parameters by surface wave analysis”, *Proc. IEEE Ultrasonic Symposium*, 1364-1367, (2005).
- ³¹ I. Núñez, C. Negreira, “Optical detection of evanescent ultrasound waves in water”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control* **45** (2), 511-519, (1998).
- ³² D. Royer, E. Dieulesaint, “Elastic waves in solids”, John Willey & Sons, New York, (1980).
- ³³ T. Royston, H. Mansy, R. Sandler, “Excitation and propagation of surface waves on a viscoelastic half-space with application to medical diagnosis”, *J. Acoust. Soc. Am.* **106** (6), 3678-3686, (1999).
- ³⁴ F. Monroy, D. Langevin, “Direct experimental observation of the crossover from capillary to elastic surface waves on soft gels”, *Phys. Rev Letters*, **81** (15), 3167-3170, (1998).
- ³⁵ J. Anderson, B. Anderson, “The myth of persistence of vision revisited”, *J. Film and Video*, **45** (1), 3-12, (1993).
- ³⁶ G. Montaldo, M. Tanter, N. Benech, J. Bercoff, M. Fink, “Coherent plane wave compounding for very high frame rate ultrasonography and transient elastography”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control* (En revisión)
- ³⁷ L. Kinsley, A. Frey, A. Coppens, J. Sanders, “Fundamentals of acoustics”, John Willey & Sons, New York, (1962).
- ³⁸ L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, M. Fink, “Shear modulus imaging with 2D transient elastography”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control*, **49** (4), 426-435, (2002).

CAPITULO 2

ELASTOGRAFIA POR RETORNO TEMPORAL

I. INTRODUCCION

Como quedó de manifiesto en el capítulo anterior, los métodos que basan la medida del campo vectorial de desplazamientos en técnicas ultrasonoras presentan algunas limitaciones para estimar la elasticidad. Estas varían desde requerir una posición y forma geométrica específica para la fuente hasta la realización de hipótesis sobre las componentes del campo no accesibles. La validez de estas hipótesis depende en muchos casos de las condiciones de borde. En el caso particular de la elastografía transitoria se debe agregar que la electrónica utilizada debe ser capaz de emitir pulsos ultrasonoros con frecuencias de repetición del orden de ~ 1 KHz. El objetivo de resolver el problema inverso es equivalente a encontrar la longitud de onda local en la muestra.

En este capítulo proponemos un método de estimación de la elasticidad basado en el retorno temporal de las ondas de corte. El retorno temporal está basado en la invariancia de la ecuación de ondas bajo la inversión temporal ($t \rightarrow -t$) y el principio de reciprocidad fuente-receptor. Como consecuencia el método permite la focalización de la onda independientemente de las inhomogeneidades presentes en el medio. En ausencia de componentes evanescentes de alta frecuencia, el ancho espacial del foco está limitado a una escala comparable con la longitud de onda. Esta información en forma conjunta con la frecuencia de la onda permite estimar la elasticidad del medio. Este método presenta la ventaja de que funciona con fuentes de cualquier tipo, dimensión y forma de la excitación temporal utilizada.

II. RETORNO TEMPORAL

Uno de los problemas más significativos en la propagación de ondas acústicas radica en la corrección de las distorsiones de fase durante la propagación. Por ejemplo, es difícil focalizar un campo acústico en un objetivo luego de la propagación en un medio inhomogéneo. De hecho las inhomogeneidades generan una distorsión del frente de ondas de modo tal que el solo conocimiento de la localización espacial del objetivo no es suficiente para optimizar la focalización. Entre los diferentes métodos propuestos para resolver este tipo de problemas el retorno temporal es el que provee resultados teóricos y experimentales más satisfactorios.

II.1 Retorno temporal en acústica

II.1.A Cavidad cerrada de retorno temporal

Si bien el concepto de retorno temporal no es nuevo en física, su investigación en acústica ha tenido un desarrollo reciente principalmente en el Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA) de la universidad de París VII. Los primeros desarrollos teóricos y experimentales de retorno temporal en

el LOA se remontan a principios de los 90⁽¹⁾⁻⁽³⁾ y están basados en la invariancia de la ecuación de ondas bajo la transformación $t \rightarrow -t$. En el caso general, la ecuación de ondas en un medio sin pérdidas es una ecuación diferencial donde la derivada temporal aparece a segundo orden. Por lo tanto si $p(\vec{r}, t)$ es solución, también lo es $p(\vec{r}, -t)$. Es decir, la ecuación de ondas no se modifica bajo la inversión temporal. Si $p(\vec{r}, t)$ es el campo de presión generado por una fuente puntual, la manera óptima de focalizar en este punto sin conocer su posición absoluta consiste en invertir temporalmente el campo $p(\vec{r}, t)$ en todo el volumen. Considerando el principio de Huygens, se puede reducir la operación de inversión temporal a una superficie cerrada. Esto es lo que da origen al concepto de *cavidad cerrada de retorno temporal* que funciona como un proceso de focalización en dos pasos que se resume en la figura 1. En el primer paso una fuente puntual emite un pulso de presión acústica que se propaga en el medio. La figura 1(a) muestra el campo divergente para dos instantes de tiempo. Para tiempos cercanos a la emisión el medio es homogéneo e isotrópico y el frente de ondas es esférico. En el segundo instante el campo atraviesa zonas donde hay cambios de impedancia acústica. Como consecuencia el frente de ondas altera su forma (ya no es esférica). En la construcción teórica de la cavidad cerrada se considera que sobre la superficie cerrada S que envuelve a la fuente cada punto se comporta como un sensor que permite registrar el campo de presión incidente así como su derivada normal⁽³⁾.

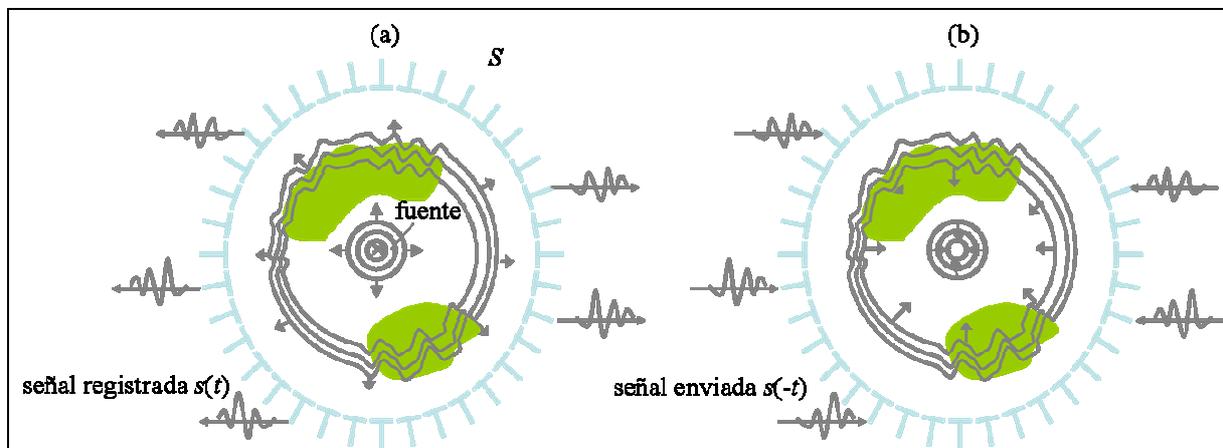


Figura 1 (a) Primer paso en una cavidad cerrada de retorno temporal. Una fuente puntual emite un pulso de presión. El frente de ondas se modifica en función de las inhomogeneidades del medio. El campo acústico se registra con sensores (transductores) ubicados sobre una superficie cerrada S . En una cavidad de retorno temporal ideal cada transductor registra el campo de presión incidente así como su derivada normal. (b) Segundo paso en una cavidad RT. Las señales acústicas se invierten temporalmente y se reenvían hacia el medio. En este paso los transductores actúan como fuente y la fuente original permanece pasiva. El proceso de retorno temporal logra reconstruir la fase de la onda incidente de modo que se obtiene una focalización espacio-temporal en la posición original de la fuente.

En el segundo paso del proceso de retorno temporal, el campo se invierte temporalmente y se reenvía al medio donde ahora la fuente original permanece pasiva. Este proceso reconstruye el frente de ondas a cada instante del proceso anterior pero invertido en el tiempo, es decir la onda se propaga en el sentido contrario como se muestra en la figura 1(b). De esta forma se logra una

focalización de la energía acústica en la zona donde originalmente estaba la fuente. El proceso de retorno temporal es una manera eficiente de focalizar la energía acústica particularmente en medios no homogéneos, a diferencia de otras técnicas como la ley de retardos o de correlación cruzada⁽⁴⁾. Una descripción analítica detallada de este proceso en una cavidad cerrada de retorno temporal se encuentra en la referencia [3]. Brindaremos aquí los principales pasos en un medio homogéneo a fin de obtener expresiones que indiquen la calidad del proceso de focalización espacio-temporal así como sus características intrínsecas.

En el primer paso del proceso consideremos una fuente puntual ubicada arbitrariamente en el origen del sistema de coordenadas. Esta fuente da origen a una campo de presión escalar que satisface la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\phi(t)\delta(\vec{r}) \quad (1)$$

donde c_p es la velocidad del sonido, $\delta(\vec{r})$ representa la distribución de Dirac espacial y $\phi(t)$ describe la variación temporal de la fuente que supondremos es de soporte acotado en $[0, T_\phi]$, es decir $\phi(t) = 0$ si $t > T_\phi$. Si el campo de presión se propaga en un medio libre e infinito la solución a (1) es⁽⁵⁾:

$$p(\vec{r}, t) = \int_V \delta(\vec{r}_0)\phi(t) \otimes g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t) d^3\vec{r}_0 \quad (2)$$

donde \otimes representa el producto de convolución temporal y $g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ es la función de Green divergente:

$$g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \delta(t - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c_p) \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) el campo de presión acústica se reduce a:

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \phi(t - |\vec{r}|/c_p) \quad (4)$$

Para completar el primer paso del proceso supondremos que la superficie S que rodea a la fuente es capaz de medir $p(\vec{r}, t)$ y su derivada normal en cada punto durante un tiempo T_m tal que si d_m es la mayor distancia entre la fuente y la superficie S , T_m cumple: $T_m > d_m/c_p + T_\phi$.

En el segundo paso supondremos que cada punto de la superficie se comporta como fuente (monopolar y dipolar) de manera que las condiciones de borde en S corresponden exactamente a la inversión temporal del campo de presión registrado durante el primer paso. Resulta entonces que cada fuente en la superficie de la cavidad se puede escribir como:

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_0, t) = p(\vec{r}_0, T_m - t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}_0|} \phi(T_m - t - |\vec{r}_0|/c_p) \\ f_0(\vec{r}_0, t) = \vec{n}_0 \cdot \nabla p(\vec{r}_0, T_m - t) \end{cases} \quad (5)$$

donde \vec{n}_0 representa la normal saliente a S y \vec{r}_0 es un punto genérico en la superficie. La fuente considerada en el primer paso permanece ahora pasiva. De estas condiciones de borde se genera un campo de presión acústica $p_{TR}(\vec{r}, t)$ en el volumen V al interior de la cavidad que cumple con la ecuación de ondas homogénea:

$$\nabla^2 p_{TR}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 p_{TR}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

La solución del campo $p_{TR}(\vec{r}, t)$ al interior de la cavidad se puede obtener como⁽³⁾:

$$p_{TR}(\vec{r}, t) = \int_S [f_0(\vec{r}_0, t) \otimes g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t) - f_1(\vec{r}_0, t) \otimes \vec{n}_0 \cdot \nabla_0 g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t)] d^2 \vec{r}_0 \quad (7)$$

Usando el teorema de Green, la integral sobre la superficie se puede escribir como una integral sobre el volumen V encerrado por S :

$$p_{TR}(\vec{r}, t) = \int_V [g_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \otimes \nabla_0^2 f_1(\vec{r}_0, t) - f_1 \otimes \nabla_0^2 G_d(\vec{r}, \vec{r}_0, t)] d^3 \vec{r}_0 \quad (8)$$

Sustituyendo la expresión de f_1 dada en (5) llegamos finalmente a:

$$p_{TR}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \phi(T_m - t - |\vec{r}|/c_p) - \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \phi(T_m - t + |\vec{r}|/c_p) \quad (9)$$

Este resultado es independiente de la forma geométrica de la superficie S . Esta expresión para el campo de presión invertido temporalmente es simple y permite realizar interpretaciones físicas de lo que sucede en el proceso de focalización en la cavidad. En primer lugar el campo acústico se puede interpretar como la interacción de dos ondas esféricas una que converge y la otra diverge desde el origen (posición inicial de la fuente). Resulta que esta interacción conduce a un campo acústico que no focaliza perfectamente en el origen (en el sentido que no se obtiene una singularidad en el origen). Si bien cada onda esférica por separado presenta una singularidad en el origen, la combinación de ambas produce un campo que es finito para cualquier valor de $|\vec{r}|$ y t . La causa de esto es que durante el segundo paso del proceso de focalización la fuente permanece pasiva y por lo tanto no existe discontinuidad del campo acústico al interior de la cavidad sino solo sobre la superficie que la limita.

La calidad de la focalización espacial (en términos de resolución espacial) se puede obtener a partir de la transformada de Fourier en el tiempo de (9) dada por:

$$P_{TR}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\sin(kr)}{kr} \tilde{\phi}^*(\omega) e^{i\omega T_m} \quad (10)$$

donde λ es la longitud de onda ($\lambda = 2\pi c/\omega$), k el número de onda ($k = 2\pi/\lambda$) y $\tilde{\phi}^*(\omega)$ es la conjugada compleja de la transformada de Fourier de $\phi(t)$. Vemos en esta expresión que la función que gobierna la focalización espacial a una frecuencia dada es la función de Bessel esférica $\sin(kr)/kr$. De esta expresión se deduce que el campo es isotrópico, es decir que el foco tiene simetría esférica. También obtenemos que la máxima resolución del proceso de focalización que se puede alcanzar con una cavidad cerrada está dada según el criterio de Rayleigh por $\lambda/2$ (que corresponde al ancho a mitad de altura de la intensidad acústica). Como ya mencionamos, el resultado no depende de la forma de la superficie S , es decir, cualquier cavidad cerrada brinda la misma focalización. Sin embargo, el proceso de retorno temporal por una cavidad cerrada no realizable en la práctica veamos porque:

- i) En el modo recepción, los transductores no pueden medir simultáneamente el campo de presión y su derivada normal
- ii) En el modo transmisión no es posible imponer simultáneamente la presión y su derivada normal
- iii) Las operaciones de recepción y transmisión no se pueden realizar en cada punto de la superficie de la cavidad; los transductores ultrasónicos tienen una apertura finita que resulta en un filtrado espacial del campo acústico incidente.
- iv) La superficie cerrada en torno a la región de interés no es fácilmente realizable en la práctica.

Por estas razones las cavidades cerradas de retorno temporal se deben considerar una construcción teórica que permite realizar un análisis de las limitaciones intrínsecas del proceso de retorno temporal debidas a la propagación y difracción del campo acústico.

II.1.B Espejo de retorno temporal

Experimentalmente la realización del proceso de retorno temporal es posible a través del llamado espejo de retorno temporal. En acústica ultrasonora consiste en una superficie no cerrada de dimensión finita con un arreglo múltiple de transductores capaz de recibir y emitir el campo acústico en forma independiente uno del otro con una electrónica programable. En general la aplicación médica del espejo de retorno temporal consiste en realidad en tres pasos como se muestra en la figura 2. Dado que en general no existen naturalmente fuentes internas de presión acústica a frecuencias ultrasonoras, en el primer paso se debe crear una fuente artificial (conocida como estrella artificial). En este paso el medio se ilumina de modo que un difusor puntual ubicado en una

posición \vec{r} dada se comporta como fuente al difundir el campo incidente. Este paso es necesario para tener la información de la propagación de la onda en el “sentido directo”. Luego el espejo de retorno temporal se usa para recrear el campo acústico en el “sentido inverso”. El segundo paso consiste en registrar el campo acústico incidente en el cabezal multielemento. Finalmente la señal recibida en cada elemento se invierte temporalmente y se reenvía al medio logrando la focalización en la posición del difusor.

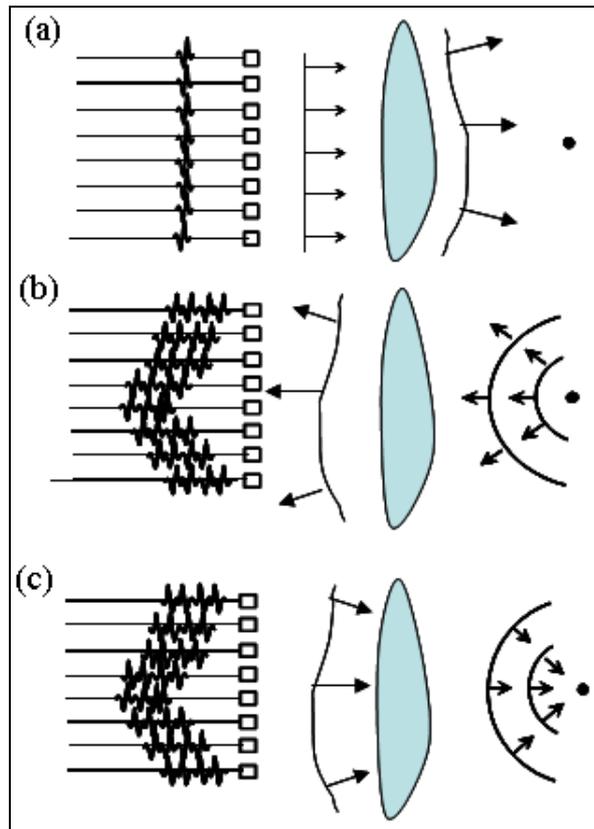


Figura 2 Aplicación del espejo de retorno temporal en tres pasos en un medio no homogéneo. (a) En el primer paso el medio se ilumina de modo que un difusor puntual ubicado en \vec{r} se comporta como fuente al difundir el campo acústico incidente. (b) El campo difundido se registra en cada uno de los elementos del cabezal que componen el espejo de retorno temporal. (c) La señal recibida en cada elemento se invierte temporalmente y se reenvía al medio logrando la focalización del campo en la posición del difusor.

Mostraremos ahora que este proceso maximiza la presión en la posición del foco. Para calcular el campo de presión de todo el proceso calcularemos primero el campo producido por un elemento genérico E_i del cabezal. Cuando un transductor E_i emite una excitación impulsional $\delta(t)$, el campo en una posición \vec{r} del medio se puede representar mediante la respuesta al impulso de la difracción $h_i'(\vec{r}, t)$. Debido al tamaño finito del transductor esta respuesta no es simplemente un pulso de Dirac retardado sino que es una señal de duración temporal finita. En forma similar es posible definir una respuesta al impulso de la difracción en modo recepción $h_i'(\vec{r}, t)$ como el campo en la superficie del transductor generado por una excitación impulsional ubicada en \vec{r} . Existen soluciones analíticas de la respuesta al impulso en el caso de un medio homogéneo para diferentes geometrías del

transductor⁽⁶⁾. En medios no homogéneos la evaluación de la respuesta al impulso es en general bastante complicada de modo que no es posible obtener expresiones útiles analíticamente⁽²⁾. Sin embargo para el análisis del proceso del retorno temporal no se requiere un conocimiento detallado de estas funciones. El único punto importante en la discusión es el resultado del teorema de reciprocidad en acústica que establece que la respuesta al impulso en modo transmisión y recepción son idénticas, aun en medios no homogéneos. Si $g(\vec{r}_0, \vec{r}, t)$ es el campo en la posición \vec{r} a tiempo t producido por una fuente puntual ubicada en \vec{r}_0 en $t = 0$ (función de Green), el teorema de reciprocidad en acústica nos dice que⁽⁵⁾:

$$g(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = g(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \quad (11)$$

Esta igualdad es evidente en un medio homogéneo e infinito ya que en este caso la función de Green es:

$$g(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \delta\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c_p}\right) \quad (12)$$

que es invariante bajo la transformación $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$. La respuesta al impulso en emisión $h_i^t(\vec{r}, t)$ se puede escribir como la integral de la función de Green sobre la superficie S_i del transductor:

$$h_i^t(\vec{r}, t) = \int_{S_i} g(\vec{r}_0, \vec{r}, t) d^2 r_0 \quad (13)$$

Donde \vec{r}_0 varía sobre la superficie del transductor. La respuesta al impulso en modo recepción se escribe de manera análoga como:

$$h_i^r(\vec{r}, t) = \int_{S_i} g(\vec{r}, \vec{r}_0, t) d^2 r_0 \quad (14)$$

En virtud de la ecuación (11) tenemos como resultado del teorema de reciprocidad que:

$$h_i^t(\vec{r}, t) = h_i^r(\vec{r}, t) = h_i(\vec{r}, t) \quad (15)$$

Luego de la iluminación del medio (primer paso en la figura 2), el difusor ubicado en \vec{r} se comporta como una fuente y la señal recibida por el elemento E_i del cabezal, que supondremos que se registra durante un tiempo T_m igual para todos los elementos, es $h_i^t(\vec{r}, t)$. En el tercer y último paso esta señal se invierte en el tiempo y se envía por el mismo elemento. De este modo el campo de presión en la posición \vec{r} del difusor queda dado por:

$$p_i(\vec{r}, t) = h_i^t(\vec{r}, T_m - t) \otimes h_i^r(\vec{r}, t) = h_i(\vec{r}, T_m - t) \otimes h_i(\vec{r}, t) \quad (16)$$

donde se ha usado el resultado en (15) para escribir la última igualdad. Vemos entonces que el proceso de focalización por retorno temporal está íntimamente relacionado con el principio de filtro

adaptado (matched-filter) usado en teoría de procesamiento de señales. Este principio establece que la señal de salida de un sistema lineal cuya respuesta al impulso es $h(t)$ se maximiza cuando la entrada al sistema es de la forma $h(-t)$. La respuesta que resulta de la convolución $h(-t) \otimes h(t)$ es una función par que tiene un máximo en $t = 0$ y es igual a la energía de la señal de entrada. Este es el caso de la ecuación (16) con la diferencia de que el máximo se alcanza en $t = T_m$ (debido a la causalidad el máximo se alcanza cuando el tiempo iguala a la duración de la señal registrada en el paso 2). Notemos que este resultado es independiente de la ubicación del elemento E_i en el cabezal de modo que todos los elementos producen la focalización al mismo tiempo. Como el sistema es lineal la presión total en el punto focal es la suma de la presión producida por cada elemento:

$$p(\vec{r}, t) = \sum_i p_i(\vec{r}, t) = \sum_i h_i(\vec{r}, T_m - t) \otimes h_i(\vec{r}, t) \quad (17)$$

Tomando la transformada de Fourier de este resultado encontramos:

$$P(\vec{r}, \omega) = \sum_i e^{j\omega T_m} H_i^*(\vec{r}, \omega) H_i(\vec{r}, \omega) = e^{j\omega T_m} \sum_i |H_i(\vec{r}, \omega)|^2 \quad (18)$$

donde se ha usado a j como la unidad imaginaria para evitar confusiones con el índice i de la sumatoria. De esta forma vemos que el efecto del proceso de retorno temporal es cancelar la fase para cada frecuencia en todos los elementos del cabezal (a excepción de un factor de fase global $e^{j\omega T_m}$) y la presión total es máxima en el foco a $t = T_m$.

El análisis de la focalización espacial utilizando un espejo de retorno temporal no es en general sencillo y se debe realizar o bien experimentalmente o bien numéricamente a partir de las condiciones de borde del problema particular. En forma genérica si quisiéramos calcular la presión generada por el elemento E_i en una posición $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ en torno a la posición del foco, debemos sustituir la ecuación (16) por:

$$p_i(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t) = h_i(\vec{r} + \Delta\vec{r}, T_m - t) \otimes h_i(\vec{r}, t) \quad (19)$$

Al variar la posición donde se evalúa la respuesta al impulso introduce una variación en la amplitud y la fase. Si se cumple que $|\Delta\vec{r}|/|\vec{r}| \ll 1$ podemos considerar que la variación de amplitud no es relevante y el término que importa es la variación de fase para cada componente frecuencial de la respuesta al impulso $h_i(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)$. De este modo podemos escribir la presión en el dominio de frecuencias como:

$$P_i(\vec{r} + \Delta\vec{r}, \omega) \cong e^{j\omega T_m} H_i^*(\vec{r}, \omega) e^{j\omega \Delta r / c} H_i(\vec{r}, \omega) = e^{j\omega T_m} |H_i(\vec{r}, \omega)|^2 e^{j\omega \Delta r / c} \quad (20)$$

El último término en esta expresión introduce una variación de fase debida a la diferencia de caminos. Esta dependencia es por lo tanto diferente para cada componente frecuencial y para cada

elemento del cabezal. Como consecuencia, la interferencia final hace que en general la presión en la posición bajo estudio sea menor que en el foco. Este proceso depende de la física del sistema (propiedades mecánicas del medio, geometría del espejo de retorno temporal), y no del proceso de retorno temporal en sí. Podemos considerar geometrías de transductores donde la respuesta al impulso en un medio homogéneo es conocida analíticamente. En el caso concreto en que la superficie emisora sea plana de apertura D y distancia focal F como se muestra en la figura 3, el ancho del foco en la aproximación de Fresnel (en la curva de isonivel a -6dB) es $\lambda F/D$ mientras que la profundidad es $7\lambda(F/D)^2$ ⁽⁷⁾. Este resultado muestra por un lado que la focalización con un espejo de retorno temporal ya no es isotrópica como en la cavidad cerrada discutida anteriormente. Por otro lado la resolución del foco depende de la relación F/D . Dada una apertura del espejo si la distancia de focalización aumenta el ancho focal se degrada respecto al caso de la cavidad cerrada. Como ya mencionamos, en el caso genérico de un medio no homogéneo o cuando la geometría de la superficie emisora no es simple, estas relaciones deben determinarse experimentalmente. Sin embargo en general las conclusiones anteriores no se modifican, es decir, utilizando un espejo de retorno temporal el foco no es isotrópico y la resolución espacial del foco es mayor a $\lambda/2$.

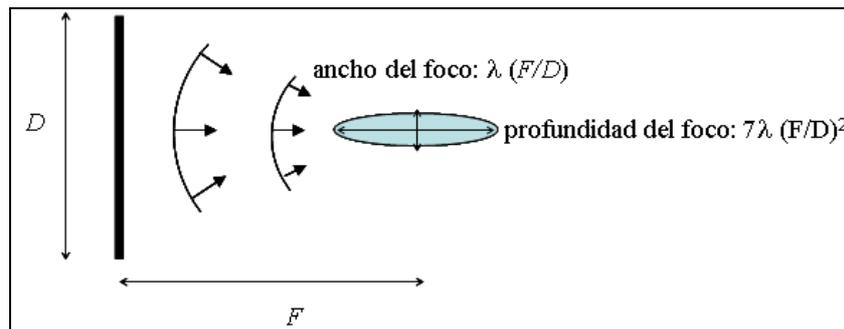


Figura 3 Utilizando un espejo de retorno temporal de apertura finita D en un medio homogéneo el foco no es isotrópico sino que depende de la dirección y la distancia a la fuente. La resolución mejora a menor distancia.

II. 2 Retorno temporal de 1 canal en cavidades sólidas reverberantes

Las experiencias de retorno temporal presentadas en la sección anterior requieren una electrónica totalmente programable capaz de controlar en forma independiente varios canales a la vez con señales arbitrarias del tiempo que resultan en equipamientos costosos. Una alternativa eficiente utilizando un solo canal consiste en realizar las experiencias de retorno temporal en cavidades sólidas reverberantes. Un parámetro importante en la caracterización de la propagación de ondas en un medio cerrado es el tiempo de reverberación⁽⁸⁾. Su valor caracteriza al decrecimiento del campo ondulatorio luego de la excitación de la fuente. Debido a las múltiples reflexiones en los bordes y eventualmente a las inhomogeneidades internas, el tiempo de reverberación puede ser mucho mayor a la duración inicial de la fuente, estando limitado por la absorción intrínseca del medio. El campo que resulta de la superposición de estos múltiples ecos da origen a una señal de

apariciencia aleatoria llamada “coda” en sismología. Sin embargo sólo la apariciencia es aleatoria ya que el sistema es determinista y el campo es perfectamente reproducible si una misma fuente emite la misma señal. Es importante destacar este punto ya que de otra forma no sería posible la realización del retorno temporal en cavidades reverberantes.

La información espacial contenida en las múltiples reflexiones en un medio reverberante es suficiente para sustituir el espejo de retorno temporal por un único transductor y recrear una cavidad cerrada de retorno temporal. Desde el punto de vista balístico, cada reflexión en las paredes de la cavidad se puede interpretar como una fuente virtual⁽⁹⁾. En nuestro laboratorio este fue el objeto de tesis de Nicolás Pérez⁽¹⁰⁾ Un esquema del montaje experimental utilizado se muestra en la figura 4. El montaje incluye una cavidad prismática de aluminio, con una cerámica piezoeléctrica adherida y un hidrófono para medir el campo de presión en la superficie. La cerámica piezoeléctrica actuando en modo pistón emite un pulso breve de $\sim 1 \mu s$ de duración. El hidrófono ubicado en una de las superficies libres de la cavidad recibe una señal $y(t)$ durante un tiempo T_m que se compone de la onda directa más todas las reflexiones internas (coda) ocurridas durante el tiempo de observación (que puede ser de algunos ms) que llegan a él. En el segundo paso la señal $y(t)$ se invierte temporalmente y se reenvía al medio a través de la cerámica piezoeléctrica. En virtud de la reciprocidad del medio, la señal focaliza en la posición del hidrófono al tiempo $t = T_m$.

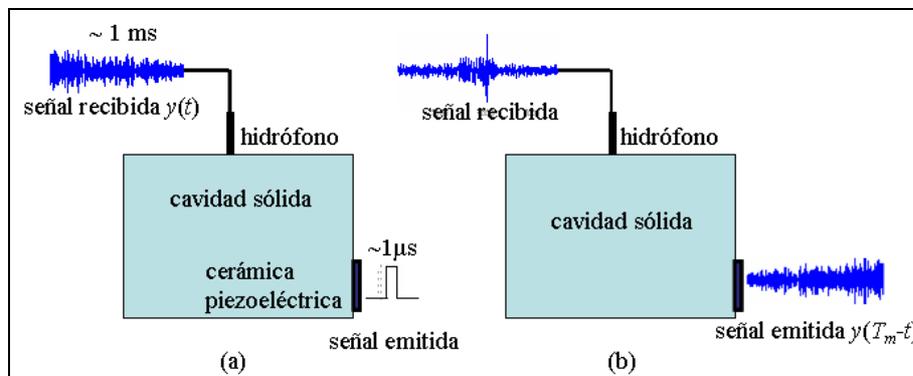


Figura 4 Experiencia de retorno temporal realizada en una cavidad cúbica de aluminio por N. Pérez en su trabajo de tesis de doctorado⁽¹⁰⁾. (a) Primer paso del retorno temporal. La cerámica piezoeléctrica emite un pulso breve al interior del medio. El hidrófono ubicado en una de las superficies libres registra una señal que se compone de las múltiples reflexiones internas y puede tener una duración cientos de veces mayor a la emisión original de la fuente. (b) En el segundo paso la cerámica envía la señal del hidrófono invertida temporalmente. Debido a la reciprocidad emisor/receptor del medio el hidrófono registra una señal focalizada en el tiempo.

Una característica importante de la focalización temporal alcanzada es la relación entre la intensidad en el pico y la intensidad del “ruido” residual alrededor del mismo (lóbulos secundarios). Llamaremos contraste del proceso de retorno temporal a esta relación. Escribimos ruido entre comillas porque como ya mencionamos se trata de una señal determinista. Al realizar la experiencia de retorno temporal es necesario, por la memoria de la electrónica utilizada, elegir sólo un segmento (ventana temporal) de la señal total recibida $y(t)$ para invertir temporalmente. Experimentalmente se

ha mostrado⁽¹¹⁾ que el contraste no depende de la ubicación de la ventana sino de su duración T_m . El contraste es pobre para pequeños valores de T_m ($\sim 10 \mu\text{s}$ en cavidades de duraluminium) y crece rápidamente a medida que la duración aumenta hasta llegar a una saturación. Esta saturación puede interpretarse como consecuencia de la presencia de frecuencias de resonancia en la respuesta impulsional del sistema inducidas por el carácter reverberante del medio⁽¹²⁾. El comportamiento del contraste es diferente de acuerdo a si la duración de la señal es mayor o menor a la densidad de modos (número de modos por unidad de frecuencia en la cavidad) conocido como tiempo de Heisenberg. Si la duración es mayor, la señal no contiene información “extra” que permita mejorar el contraste y por lo tanto éste llega a una saturación. El tiempo de saturación depende de la geometría y propiedades mecánicas (valor de las constantes elásticas) de la cavidad. Vemos entonces que el “costo” de sustituir la electrónica múltiple por una con un solo canal para las experiencias de retorno temporal es que se debe registrar una señal de larga duración con la consecuente ocupación de memoria.

El retorno temporal de un canal puede utilizarse con el fin de sustituir un arreglo múltiple de transductores para focalizar la energía acústica en un fluido. Un trabajo realizado por S. Catheline en el LOA de Paris muestra este hecho⁽¹³⁾. En la figura 5(a) se muestra el arreglo experimental utilizado. La cavidad sólida inmersa en agua tiene un transductor acoplado que emite una señal breve que reverbera en el sólido. Una parte de la energía se transmite hacia el fluido. El hidrófono registra la señal acústica en varios puntos sobre el plano xz . Estas señales se guardan en memoria donde se registra la posición que tenía el hidrófono en el plano. Finalmente una de las señales se invierte en el tiempo y es emitida por el transductor. La figura 5(b) muestra un relevamiento del campo acústico en el plano xz mientras se emite una de estas señales. Se observa claramente la focalización espacial del campo en torno a la posición $z = 80 \text{ mm}$ $x = 11 \text{ mm}$. Emitiendo secuencialmente todas las señales registradas por el hidrófono se logra focalizar el campo acústico en distintos puntos en el fluido (beam steering).

Este proceso de retorno temporal tiene algunas limitaciones intrínsecas debido a la interfase sólido-fluido. Cuando la fuente emite un pulso corto al interior del medio elástico se generan ondas de corte (\mathbf{S}) y ondas de compresión (\mathbf{P}). Estas ondas se transmiten solo parcialmente a través de la interfase con el fluido. En particular las ondas de corte con polarización horizontal (\mathbf{SH}) son totalmente reflejadas al interior del sólido⁽¹⁴⁾ y es imposible aplicar el proceso de retorno temporal con este tipo de ondas. En un trabajo realizado en nuestro laboratorio por N. Pérez⁽¹⁵⁾, se mostró además el efecto de la rugosidad de la superficie en la focalización espacial en el fluido. La conversión de modos cuando la superficie es rugosa introduce en el fluido componentes de mayor frecuencia espacial de modo que la resolución del foco mejora (resulta en un foco que es más estrecho). En fin, la literatura al respecto es amplia^{(16),(17)} pero en este trabajo de tesis estamos

interesados en lo que sucede al interior de la cavidad y no fuera de ella. Como hemos visto la focalización espacial del proceso de retorno temporal está ligado con la longitud de onda en el medio a través del criterio de Rayleigh. A una frecuencia dada el ancho del foco espacial depende de la velocidad de propagación de la onda, es decir que está relacionado con las propiedades mecánicas del medio. En la siguiente sección nos proponemos explotar esta idea para medir la elasticidad en sólidos elásticos blandos.

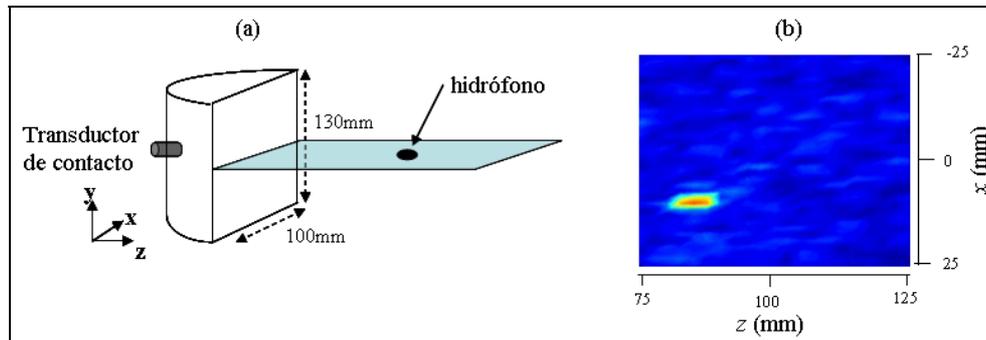


Figura 5 Cavidad reverberante utilizada para focalizar energía acústica en agua (a) Montaje experimental. El transductor de contacto emite un pulso que reverbera dentro de la cavidad y una parte de la energía se transmite al fluido. El hidrófono registra la señal en varias posiciones del plano xz . (b) Relevamiento del campo acústico luego de la emisión de una de las señales registrada por el hidrófono invertida temporalmente. Estas imágenes corresponden a un trabajo de S. Catheline en el LOA de Paris⁽¹³⁾.

III RETORNO TEMPORAL EN EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO ELÁSTICO.

III. 1 Experiencia de retorno temporal en geles

Las experiencias de retorno temporal en sólidos presentadas antes se realizaron en el rango de frecuencias ultrasonoras ($\sim 1\text{MHz}$) y evalúan el campo elástico en la superficie del sólido o el campo acústico fuera del mismo. En esta sección mostraremos experiencias de retorno temporal conducidas en el volumen de un sólido elástico blando y en el rango de frecuencias audible ($\sim 100\text{Hz}$). La diferencia respecto a las experiencias presentadas anteriormente consiste en el carácter vectorial del campo. En un trabajo realizado en nuestro laboratorio⁽¹⁸⁾ hemos mostrado, como veremos más abajo, que esta condición rompe la simetría de la focalización en una cavidad, al contrario del caso de fluidos. El criterio de resolución de Rayleigh es dependiente de la dirección de observación respecto a la dirección de la fuente siendo el foco más ancho en el sentido de la fuente que en la dirección perpendicular. Por último para longitudes de onda del orden del centímetro, se hacen aparentes los efectos del campo cercano en el proceso de retorno temporal.

Como hemos visto en el capítulo anterior, utilizando la configuración experimental de la elastografía transitoria, podemos medir una componente del campo vectorial de velocidad particular en el volumen de un gel de agar-gelatina. El campo cumple con la ecuación de ondas en un medio elástico e isotrópico que en principio asumimos sin pérdidas:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (21)$$

Por lo tanto si $u_i(\vec{r}, t)$ es solución $u_i(\vec{r}, -t)$ también lo es. Al igual que en acústica, la solución invertida temporalmente es la representación de la propagación en el sentido inverso y la onda focaliza en la posición inicial de la fuente. La figura 6 muestra esquemáticamente el montaje experimental así como la notación utilizada. La configuración es muy similar a la utilizada en elastografía transitoria con la diferencia de que en el caso actual el transductor y el pistón no necesariamente están alineados. Como sabemos, la experiencia de retorno temporal es un proceso en dos pasos. En el primer paso el vibrador mecánico actúa en un punto B de la superficie libre del gel en la dirección normal (identificada como la dirección k en la figura) emitiendo un pulso breve.

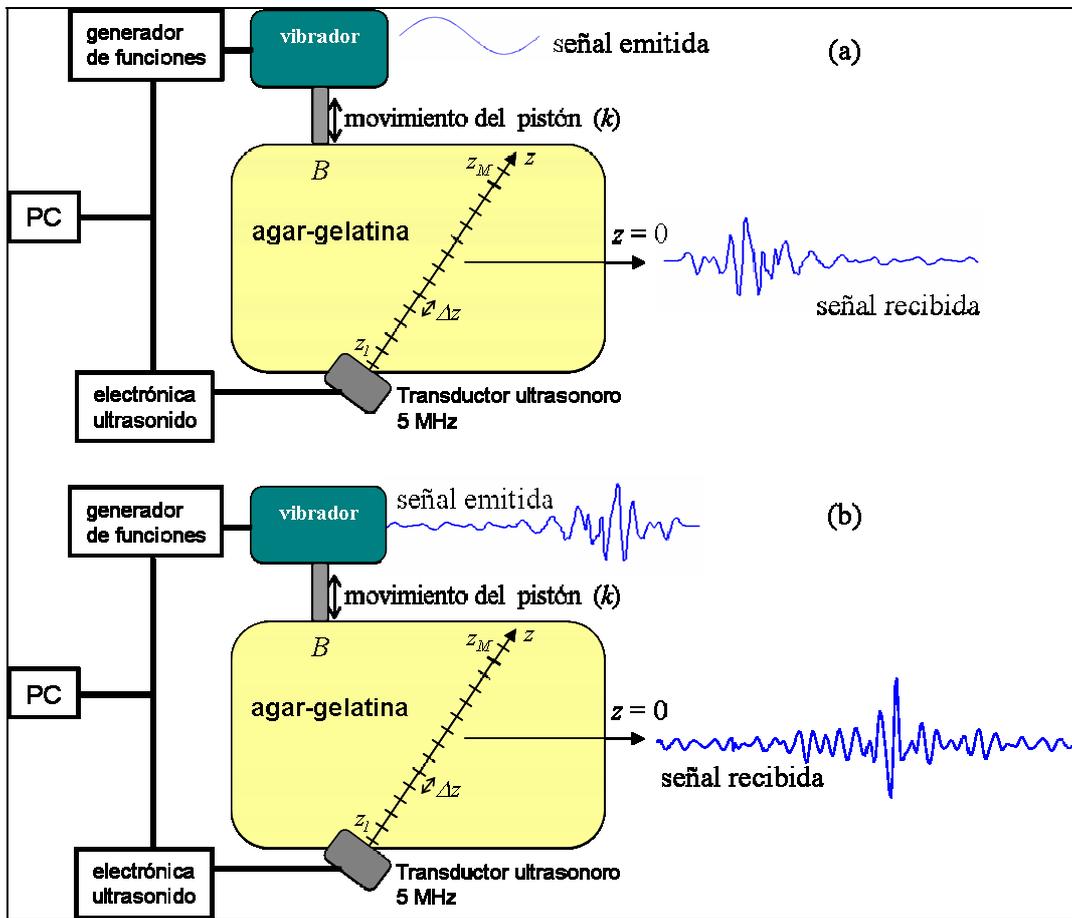


Figura 6 Montaje experimental que permite realizar el retorno temporal en el volumen de un sólido elástico. (a) El vibrador mecánico envía un pulso de baja frecuencia al medio. Mediante el método de interferometría speckle se registra el campo durante un período de observación T_m en la dirección z . (b) El campo registrado en $z = 0$ se invierte temporalmente y se reenvía al medio obteniéndose la focalización temporal de la onda de corte en ese punto.

El transductor ultrasonoro se utiliza para medir, mediante el método de interferometría speckle, el campo de velocidad particular en los puntos z_i de la figura, orientados en una dirección arbitraria respecto a la dirección k . Los puntos de medida están separados una distancia Δz entre sí que queda determinada en el algoritmo de correlación. Como vimos en el capítulo anterior su valor mínimo

está limitado por la precisión del método. La excitación impuesta en la fuente es un ciclo de senoide de 100 Hz de frecuencia central y el medio es un gel de agar-gelatina como los utilizados en el capítulo anterior. Por lo tanto la mayor parte de la energía se propaga bajo la forma de ondas de corte⁽¹⁹⁾. Como resultado del primer paso tenemos una matriz con el campo de velocidad particular de la onda de corte. El campo evaluado en la posición elegida arbitrariamente como $z = 0$ se muestra en la figura 6(a). La medida del campo para todas las posiciones z_i se representa en forma de sismograma en la figura 7. Se puede observar que el campo permanece en el medio aun para tiempos mucho mayores a la duración inicial de la fuente (coda). El tiempo de observación T_m es en este caso de 500 ms mientras que la excitación original dura ~ 10 ms. La velocidad de la onda de corte en el gel medida por elastografía transitoria es $c_s \cong 2.5$ m/s. Durante el tiempo de observación de la experiencia esta onda viaja 1.25 m, una distancia mucho mayor que las dimensiones del gel (un cilindro de ~ 12 cm de altura y ~ 16 cm de diámetro). El campo por lo tanto se compone de un período transitorio (~ 30 ms) y decenas de rebotes en los bordes.

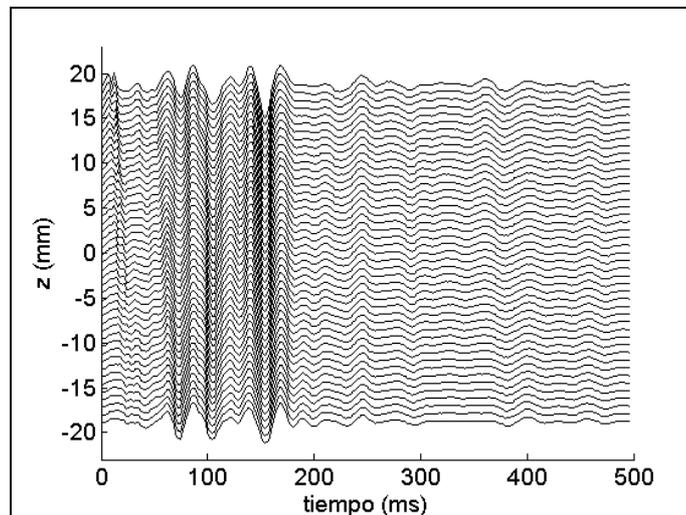


Figura 7 Sismograma experimental medido en un gel de agar-gelatina por el método de interferometría speckle. Para tiempos de 500 ms se observa que el campo persiste y que corresponde a reflexiones en los bordes.

El segundo paso de la experiencia de retorno temporal consiste en tomar el campo en una posición z_0 dada (en este caso $z = 0$) e invertirla temporalmente. En una experiencia “clásica” de retorno temporal, esta señal se reenvía al medio desde la posición de recepción (que actúa como fuente) y se registra la refocalización de la onda en la posición original de la fuente (punto B) que permanece pasiva en esta etapa. Como ya señalamos antes, la reciprocidad fuente-receptor permite intercambiar los roles en la segunda etapa y reenviar la señal invertida temporalmente a través de la fuente original de modo que el campo focaliza en la posición de observación (en este caso $z = 0$). Experimentalmente podemos enviar la señal invertida a través de un generador de funciones arbitrario (HP 33120 A). La segunda etapa del proceso se muestra en la figura 6(b) donde se observa la focalización temporal del campo luego de reenviada la señal invertida en el tiempo. El

campo evaluado en todas las posiciones z_i se muestra en la figura 8 en escala de colores. En la parte superior de la figura se muestra la evolución temporal del campo en $z = 0$. Se puede observar que en torno a $t = 500$ ms se produce un pico en la señal temporal. A la derecha se muestra la evolución espacial a $t = 500$ ms. También se observa allí que se produce un máximo en la posición desde donde se tomó la señal para la inversión temporal ($z = 0$ mm). Con esta experiencia hemos mostrado que la realización del retorno temporal es realizable en el rango de frecuencias audibles en sólidos blandos lo que le brinda algunos aspectos originales a saber: a) El proceso de focalización se puede observar directamente en el volumen de un sólido elástico y b) no se necesita la estrella artificial para crear el proceso de retorno temporal al interior de la cavidad. Analizaremos ahora con un poco más de detalle el proceso que permite estos resultados experimentales.

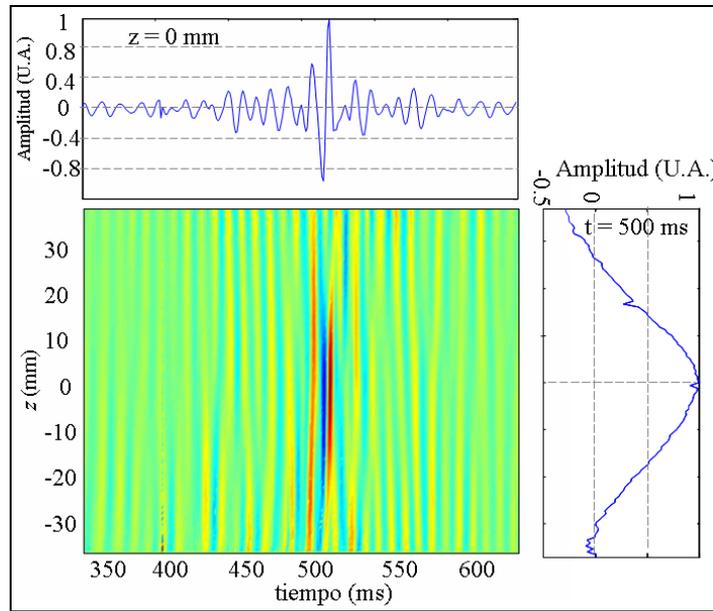


Figura 8 Experiencia de retorno temporal en el volumen de un sólido blando. El campo registrado en $z = 0$ se invierte temporalmente y se reenvía al medio utilizando un generador de funciones arbitrario. Como resultado se obtiene una señal que presenta un pico en $z = 0$ y $t = T_m = 500$ ms. Esta experiencia muestra que a partir del retorno temporal es posible la focalización de ondas de corte al interior de un sólido elástico blando.

III.1.A Análisis del proceso de retorno temporal

Sea $\Psi_z(\vec{r}_0, t)$ la componente z del campo vectorial en una posición \vec{r}_0 dada y al tiempo t . No es fácil abordar el problema de la cavidad formalmente a partir de las funciones de Green como se hizo para la cavidad cerrada de retorno temporal en acústica en la sección II.1.A. En el apéndice C se muestra el resultado analítico al que hemos llegado. La expresión final del campo de retorno temporal no permite un análisis sencillo que permita extraer conclusiones directas sobre la focalización. Por esta razón utilizaremos el formalismo de la respuesta impulsional para describir el proceso conjuntamente con simulaciones numéricas que permiten confirmar y extender las conclusiones de este trabajo.

Desde el punto de vista del análisis en sistemas lineales, la función $\Psi_z(\vec{r}_0, t)$ se puede expresar como el producto de convolución entre la función de excitación de la fuente $e_k(\vec{r}_s, t)$ ubicada en \vec{r}_s y orientada hacia una dirección arbitraria k y la respuesta al impulso entre las componentes k y z de la fuente y el receptor respectivamente $h_{kz}(\vec{r}_s, \vec{r}_0, t)$:

$$\Psi_z(\vec{r}_0, t) = e_k(\vec{r}_s, t) \otimes h_{kz}(\vec{r}_s, \vec{r}_0, t) \quad (22)$$

Esta ecuación describe todo el proceso, desde la emisión hasta la recepción eléctrica de la señal. Para emisores y receptores puntuales y respuestas acusto-eléctricas cercanas a funciones delta, la respuesta al impulso es proporcional a la función de Green. Al igual que en el caso del retorno temporal en acústica usaremos el teorema de reciprocidad espacial de la función de Green. Debido al carácter vectorial del campo, la reciprocidad del campo elástico es ligeramente diferente al caso acústico⁽¹⁴⁾. Si $g_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ es la componente i del campo en la posición \vec{r} y al tiempo t debido a una fuente puntual ubicada en \vec{r}_0 actuando en la dirección j en $t = 0$ entonces:

$$g_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = g_{ji}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \quad (23)$$

Notemos que además del intercambio $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$ hay un cambio en los subíndices $ij \rightarrow ji$. Es decir que el campo en la dirección i medido en la posición \vec{r} debido a una fuente ubicada en \vec{r}_0 actuando en la dirección j es igual al campo en la dirección j medido en la posición \vec{r}_0 debido a una fuente puntual ubicada en \vec{r} actuando en la dirección i . Al igual que en acústica el teorema de reciprocidad implica que la función de respuesta al impulso h_{ij} es la misma tanto en emisión como en recepción pero teniendo en cuenta el carácter vectorial del campo. Aplicando esta propiedad a la ecuación (22) encontramos:

$$\Psi_z(\vec{r}_0, t) = \Psi_k(\vec{r}_s, t) = e_z(\vec{r}_0, t) \otimes h_{zk}(\vec{r}_0, \vec{r}_s, t) \quad (24)$$

Resulta entonces que \vec{r}_s puede considerarse como un receptor y \vec{r}_0 como una fuente virtual actuando en la dirección z en el volumen del medio. Si ahora el campo se invierte temporalmente y se reemite desde la superficie por el vibrador mecánico obtenemos:

$$\Psi_z^{TR}(\vec{r}, t) = e_z(\vec{r}_0, T_m - t) \otimes h_{zk}(\vec{r}_0, \vec{r}_s, T_m - t) \otimes h_{kz}(\vec{r}, \vec{r}_s, t) \quad (25)$$

donde T_m es la duración temporal de la señal registrada. Deducimos de esta ecuación que $\Psi_z^{TR}(\vec{r}, t)$ es la componente según z del campo de velocidad particular creado por una fuente de volumen actuando en la dirección z , cualquiera sea la dirección k en la que actúa la fuente original (vibrador mecánico de baja frecuencia). Este importante resultado que tiene origen en el teorema de reciprocidad del campo elástico nos permitirá medir la elasticidad del medio como veremos más abajo.

III. 2 Experiencia virtual de retorno temporal

Si se desea realizar el experimento anterior para varias posiciones sobre el eje z , éste se debe repetir para cada posición. Una alternativa simple que además elimina la necesidad de utilizar una electrónica programable proviene de las aplicaciones de interactividad del retorno temporal en placas⁽²⁰⁾. El método consiste en realizar una experiencia “virtual” de retorno temporal a partir de la correlación entre las señales de velocidad particular. De la ecuación (22), la expresión de la correlación cruzada entre el campo medido en \vec{r}_0 y en \vec{r} es:

$$C(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = \Psi_z(\vec{r}_0, T_m - t) \otimes \Psi_z(\vec{r}, t) \quad (26)$$

Usando la propiedad de reciprocidad obtenemos:

$$C(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = (e_z(\vec{r}_0, T_m - t) \otimes h_{zk}(\vec{r}_0, \vec{r}_s, T_m - t)) \otimes (e_z(\vec{r}, t) \otimes h_{zk}(\vec{r}, \vec{r}_s, t)) \quad (27)$$

Comparando esta ecuación con la expresión (25) encontramos:

$$C(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = e_z(\vec{r}_0, T_m - t) \otimes \Psi_z^{TR}(\vec{r}, t) \quad (28)$$

Vemos por lo tanto que si la función de excitación $e_z(\vec{r}_0, t)$ es una delta de Dirac la correlación temporal (ec. (26)) y el retorno temporal (ec. (25)) son idénticos. En la práctica no siempre es posible utilizar una delta como excitación. La señal emitida es usualmente uno o dos ciclos de senoide y por lo tanto pueden surgir diferencias entre la correlación y el retorno temporal. Sin embargo la dependencia del resultado con la señal emitida se puede eliminar en el tratamiento de señal como mostraremos más adelante.

Una vez medido el campo de velocidad particular, podemos construir la matriz C de correlaciones, es decir, realizar el experimento virtual de retorno temporal entre dos posiciones diferentes sobre el eje z digamos $z = 0$ y $z = z_1$. Si por un momento asumimos que la función de excitación es una delta de Dirac, según la ecuación (26) tenemos que el resultado de esta correlación se escribe como:

$$C((x_0, 0), (x_0, z_1), t) = \delta((x_0, 0), T_m - t) \otimes \Psi_z^{TR}((x_0, z_1), t) = \Psi_z^{TR}((x_0, z_1), t) \quad (29)$$

Es decir que la correlación es igual al campo de retorno temporal evaluado en $\vec{r} = (x_0, z_1)$ debido a una fuente puntual ubicada en $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$. Si ahora variamos la posición de z_1 entre todos los puntos del eje z donde fue medido el campo obtenemos el campo de retorno temporal en función de z y t , tal cual una experiencia de retorno temporal real. El resultado de este tratamiento se muestra en la figura 9. Notemos que cuando $z_1 = 0$ obtenemos la autocorrelación de la señal, que evaluada en $t = T_m$ nos da el pico del foco espacio-temporal. Comparando con la figura 8 vemos que ambos resultados son prácticamente iguales. Más allá de pequeñas diferencias, la figura muestra que la correlación es una alternativa eficiente a la experiencia “real” de retorno temporal.

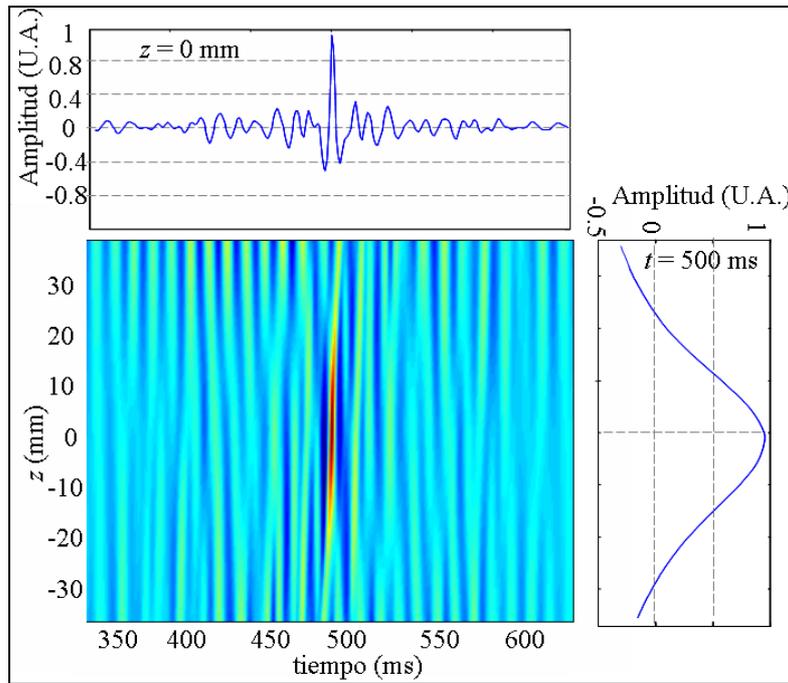


Figura 9. Campo de retorno temporal obtenido a partir de la matriz de correlación $C((x_0,0),(x_0,z),t)$. Vemos que el campo es muy similar comparado con el campo obtenido en una experiencia activa como en la figura 8. Este resultado muestra experimentalmente la equivalencia entre la correlación del campo elástico y el proceso de retorno temporal.

Si ahora variamos la posición $\vec{r}_0 = (x_0, z)$ (es decir la posición de la fuente) entre todas las posiciones z_i en las cuales fue medido el campo (para un valor de x_0 dado) y hacemos nuevamente la correlación con todas las posiciones z_j la matriz C es tridimensional y contiene el campo de retorno temporal para todos los valores de z en función del tiempo para una posición x_0 fija. Introduciremos ahora una nueva variable $t' = t - T_m$ que redefine el origen del tiempo en el tiempo de focalización. De esta manera los valores negativos de t' son previos a la focalización y los valores positivos son posteriores a la misma. La figura 10 muestra la matriz C para cuatro instantes de tiempo: $t' = -8$ ms, -2 ms, 0 ms y $+6$ ms. Se puede observar en estas imágenes la evolución temporal del campo. Para tiempos negativos es posible observar dos frentes de onda que convergen hacia la zona de focalización alcanzada en $t' = 0$ y luego divergen. La distribución de energía en los frentes convergentes no es uniforme sino que uno de ellos presenta mayor intensidad. Este hecho está asociado a la atenuación del campo dentro del medio ya que los geles utilizados están lejos de ser sólidos reverberantes. El factor de calidad Q de la cavidad calculado como el promedio del cociente entre la frecuencia de cada resonancia del campo y su correspondiente ancho de banda a -6 db arroja un valor $Q \sim 9$. Para comparación, el factor de calidad en las experiencias de retorno temporal en cavidades bidimensionales de duraluminium descritas en la literatura es del orden de $Q \sim 1000^{(11)}$. De todas formas cabe destacar que el efecto de la atenuación no es prohibitivo para la experiencia de retorno temporal como se observa en las figuras 8 y 9. Volveremos sobre este punto más adelante en este capítulo.

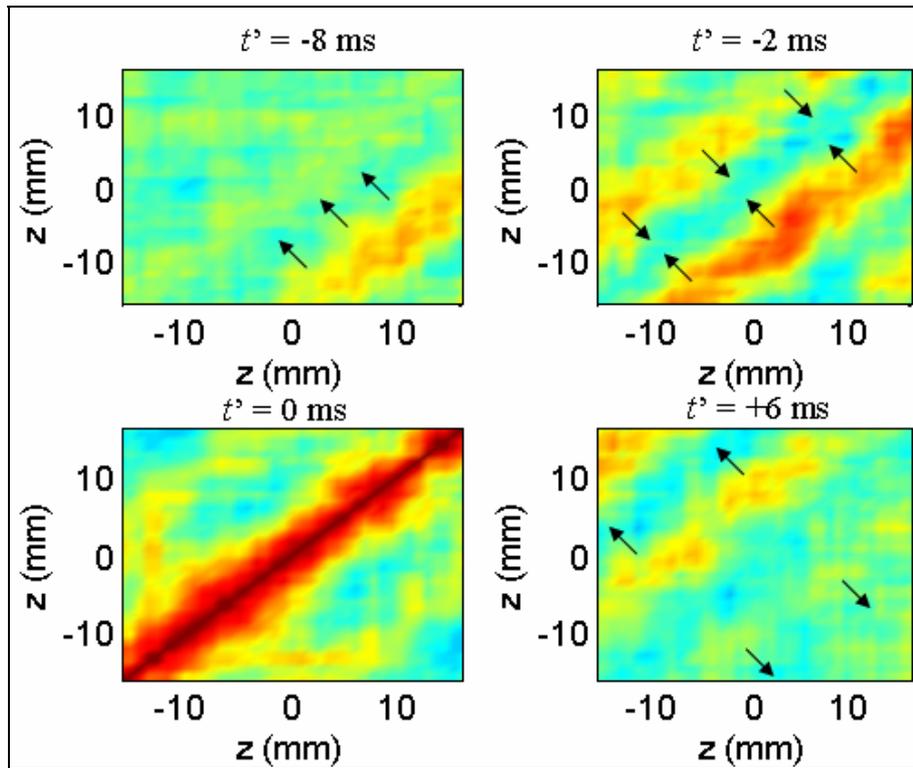


Figura 10 Proceso de focalización de la matriz C evaluada en cuatro instantes diferentes. Para los instantes previos al tiempo de focalización se observan dos frentes de onda convergentes que dan un máximo en $t' = 0$ y luego divergen. Es posible observar en este proceso que la mayor parte de la energía proviene de una zona específica del gel (en este caso de la zona más cercana a la fuente).

III. 2.A Promedio espacial del campo de retorno temporal

Aun en el caso de retorno temporal de un canal en una cavidad sólida sin atenuación, no podemos esperar que la focalización por retorno temporal sea perfecta como para la cavidad cerrada de retorno temporal presentada en la sección II.1.A. Luego de la etapa de excitación podemos asumir que el sistema adquiere una cierta distribución de modos propios. La señal adquirida en cada punto es interpretada entonces como la superposición de las frecuencias propias del sistema. Para producir un campo de retorno temporal perfecto durante la etapa de inversión temporal, cada modo propio debe tener el mismo peso que en la etapa de emisión. Sin embargo cada punto mide (y reenvía) cada modo propio con un valor proporcional al valor de la función propia en ese punto. En particular los modos propios con un nodo en el punto de medición no pueden ser medidos. Para evitar esta pérdida de información espacial y reducir efectos del ruido en la estimación del campo, haremos un promedio espacial sobre la matriz C para cada instante de tiempo. En particular cuando $t' = 0$ obtenemos la focalización espacial en cada punto z_i . Si el medio es homogéneo, el proceso de focalización es igual en cada punto y por lo tanto podemos promediar en el eje z . Notemos que los puntos equivalentes entre sí están distribuidos en forma diagonal en la matriz C . Para realizar el promedio debemos tener en cuenta este hecho desplazando espacialmente en forma acorde cada fila de modo que el promedio sea en fase como se muestra en la figura 11(a). Como resultado de este tratamiento el eje espacial tiene el doble de la longitud original como se muestra en la figura 11(b).

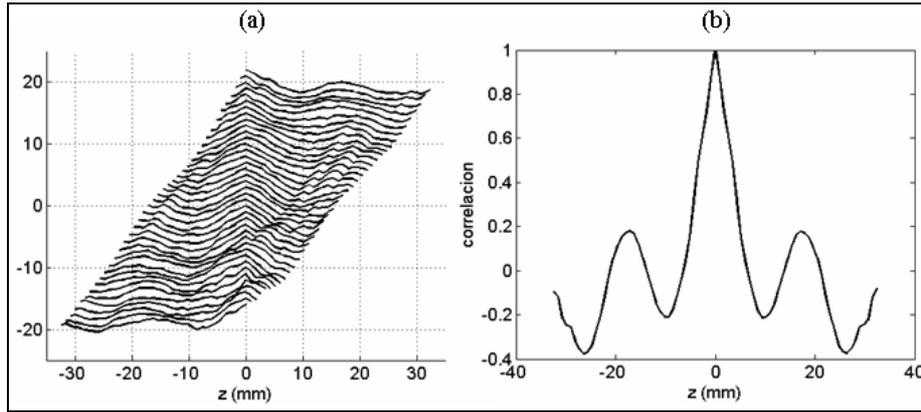


Figura 11. Promedio espacial de la focalización por retorno temporal. (a) Cada fila entra en la suma desplazada de manera que el máximo coincida en el origen para todas ellas. (b) Resultado final del proceso. Además de reducir el ruido el promedio espacial elimina la pérdida de información debida al registro del campo elástico en un solo punto al interior de la cavidad.

Debido al teorema de reciprocidad del campo elástico y a la linealidad del sistema, la realización del promedio es equivalente a utilizar múltiples fuentes para el proceso de retorno temporal. Notemos en la figura 11(a) que en torno al foco ($z = 0$), participan en el promedio todas las señales mientras que a medida que nos alejamos del centro hacia un lado o el otro, algunas de las señales quedan fuera del promedio. Por lo tanto podemos escribir el campo de retorno temporal en torno al foco como:

$$\Psi_z^{TR}(z \approx 0, t) = \left(\sum_i h_{z_k}(z_i, T_m - t) \right) \otimes h_{z_k}(z, t) \quad (30)$$

Esta expresión es equivalente a observar el proceso de retorno temporal en la posición $z \sim 0$ debido a la inversión temporal de múltiples fuentes ubicadas en las posiciones z_i .

III. 3 Retorno temporal en 2D

III. 3.A Experiencia

Estamos interesados ahora en observar el proceso de focalización en el plano xz . En la experiencia que se muestra a continuación, se emite un ciclo de senoide de 140 Hz desde la superficie del gel y se mide el campo a lo largo del eje z . Luego el transductor se mueve 2.5 mm en el eje x y se repite la experiencia. Este procedimiento se sigue hasta completar 30 medidas en el eje x de modo que la distancia mínima entre la fuente y el campo medido es de 8 cm. Para una longitud de onda del orden de 1 cm esta distancia representa varias longitudes de onda y podemos considerar que las medidas se hacen en campo lejano. Para cada posición x del transductor se registra el campo en 30 puntos sobre el eje z . El tiempo de observación en cada medida es de 500 ms y la frecuencia de repetición del pulso es de 1000 Hz. El resultado se guarda en una matriz M de dimensiones $30 \times 30 \times 500$. El montaje experimental y la definición de las coordenadas se resumen en la figura 12.

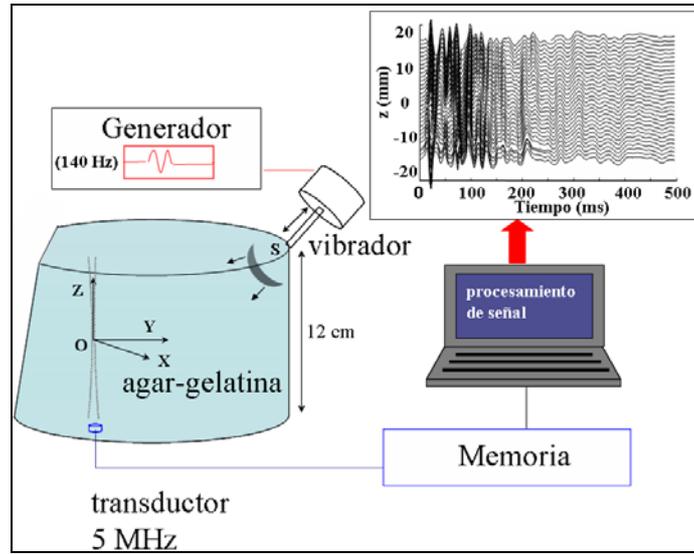


Figura 12 Esquema del montaje experimental utilizado para observar experimentalmente la focalización espaciotemporal en el plano xz . El transductor ultrasonoro se desplaza 2.5 mm sobre el eje x en cada medida. La distancia mínima entre la zona de medida y la fuente es de 8 cm de modo que podemos considerar que las señales registradas corresponden a términos de campo lejano.

El tiempo total de reverberación y los modos de vibración que se producen en la cavidad dependen de su geometría. En su origen el gel es de forma cilíndrica pero con el objetivo de evitar efectos geométricos debidos a la alta simetría cilíndrica se cortó un segmento plano en el gel como se muestra en la figura. Una vez registrada la matriz M , se calcula el campo de retorno temporal a través de la correlación entre las señales. Al disponer de información en la dirección x es posible construir el proceso de focalización virtual $\Psi_z^{TR}(x, z, t')$ en dos dimensiones. La figura 13 muestra el campo de retorno temporal en cuatro instantes de tiempo diferentes en torno a $t' = 0$. Las flechas indican la dirección de propagación. Un aspecto notorio en el instante de focalización que se puede apreciar en la figura es que el ancho del foco es mayor en la dirección z que en la dirección x . Su valor medido a -6 dB es $\Delta_z = 21$ mm (dirección z) y $\Delta_x = 13$ mm (dirección x). Podemos explicar cualitativamente este resultado en base al diagrama de directividad de una fuente de volumen en un sólido elástico. El campo creado por una fuente monocromática está dado por⁽¹⁴⁾:

$$u_{ij} = \frac{U_0(\omega)e^{ik_p r}}{4\pi\rho c_p^2 r} \left[\gamma_i \gamma_j + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{-1}{ik_p r} \right) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{-1}{ik_p r} \right)^2 \right] - \frac{U_0(\omega)e^{ik_s r}}{4\pi\rho c_s^2 r} \left[(\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{-1}{ik_s r} \right) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(\frac{-1}{ik_s r} \right)^2 \right] \quad (31)$$

donde $\gamma_i = x_i/r$. Por lo tanto la componente z de una fuente que actúa según z es:

$$u_{zz}(\theta) = \frac{U_0(\omega)e^{ik_p r}}{4\pi\rho c_p^2 r} \left[\cos^2 \theta + (3\sin^2 \theta - 1) \left(\frac{-1}{ik_p r} \right) + (3\sin^2 \theta - 1) \left(\frac{-1}{ik_p r} \right)^2 \right] - \frac{U_0(\omega)e^{ik_s r}}{4\pi\rho c_s^2 r} \left[\sin^2 \theta + (3\sin^2 \theta - 1) \left(\frac{-1}{ik_s r} \right) + (3\sin^2 \theta - 1) \left(\frac{-1}{ik_s r} \right)^2 \right] \quad (32)$$

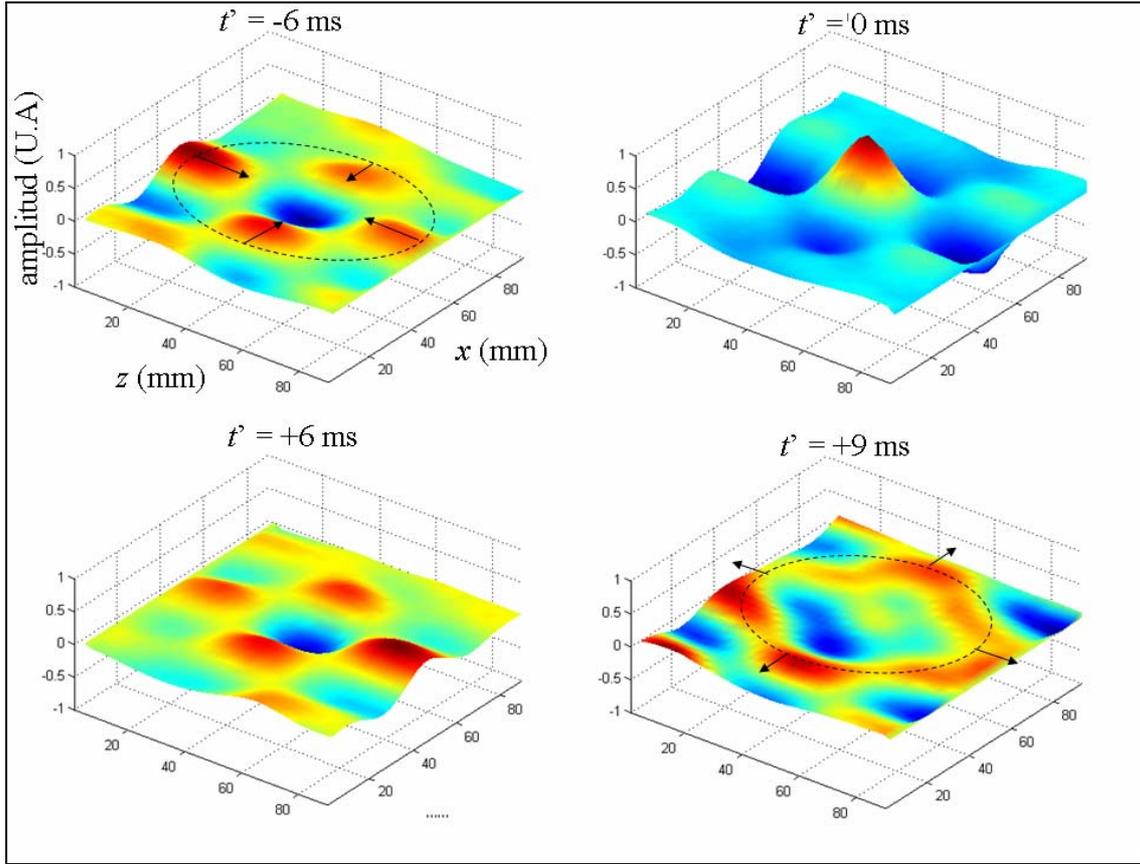


Figura 13. Campo de retorno temporal evaluado en cuatro instantes diferentes, $t' = -6$ ms (previo a la focalización), $t' = 0$ (tiempo de focalización), $t' = +6$ ms y $t' = +9$ ms (posteriores a la focalización). Es posible ver en esta secuencia el proceso convergente y divergente del retorno temporal. En el instante de focalización vemos que el foco no es isotrópico sino que es más ancho en la dirección de la fuente (eje z).

Tomando la parte real y teniendo en cuenta que en un sólido blando $c_p \gg c_s$ podemos hacer la aproximación $\cos(k_p r) \sim 1$ y $\sin(k_p r) \sim 0$. Luego de algunos pasos encontramos:

$$\text{Re}[u_{zz}(\theta)] = \frac{U_0(\omega)}{4\pi\rho c_s^2 r} \left[\sin^2(\theta) \cos(k_s r) - \frac{(3 \sin^2(\theta) - 1)}{k_s r} \left(\sin(k_s r) \left(1 + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{k_s r} \right) \right] \quad (33)$$

De esta expresión se deduce el carácter anisotrópico de la emisión. En la figura 14 se muestra el diagrama de directividad del campo en función del ángulo θ para valores de r comprendidos entre 10 y 35 mm. La amplitud es mayor en la dirección perpendicular que en la de la fuente aunque sobre el eje el campo no es nulo debido a los términos de campo cercano. La flecha indica la dirección de la fuente. Podemos explicar cualitativamente el resultado experimental notando que cada punto fuente en el proceso de retorno temporal emite con una distribución espacial de este tipo, resultando en una focalización anisotrópica.

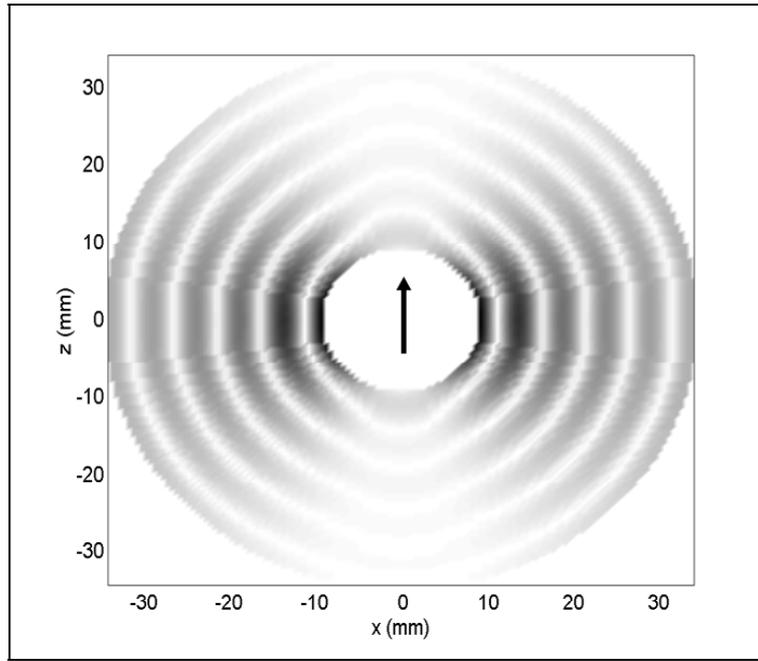


Figura 14 Diagrama de directividad de la componente z del campo generado por una fuente de volumen monocromática actuando en la dirección z de un sólido elástico blando. Vemos que la distribución de energía no es isotrópica. La inversión temporal de este campo genera un foco cuya resolución depende de la dirección de observación respecto a la dirección original de la fuente.

III. 3.B Simulación numérica

Con el objetivo de confirmar los efectos observados experimentalmente e ir más allá en el análisis, realizamos una simulación numérica del experimento basada el teorema de Betti⁽¹⁴⁾. Si bien los geles de agar-gelatina utilizados en nuestras experiencias son atenuantes⁽¹⁹⁾, preferimos pararnos para el análisis del problema en la hipótesis más sencilla, es decir, un medio sin pérdidas. Más adelante mostraremos experimentalmente los efectos de la atenuación en nuestros resultados.

En una primera instancia una fuente de volumen puntual ubicada en el origen emite un pulso breve en la dirección z $e_z(\vec{0}, t)$. Usando la función de Green de la elastodinámica, la componente k del campo de desplazamientos $u_k(\vec{r}_0, t)$ en una posición \vec{r}_0 dada es:

$$u_k(\vec{r}_0, t) = e_z(\vec{0}, t) \otimes g_{kz}(\vec{r}_0, \vec{0}, t) \tag{34}$$

Haremos ahora la hipótesis de que la superficie de la cavidad donde se registra este campo es libre y que está cubierta de sensores ideales de la velocidad particular (es decir sensores que no afectan la propagación de la onda respecto a como hubieran sido en un medio libre e infinito). Una vez registrado en la superficie, el campo se invierte temporalmente. En la segunda etapa (etapa de reemisión) la fuente de volumen original permanece pasiva de manera que el campo de retorno temporal medido en \vec{r} es:

$$u_z(\vec{r}, t) = \int_S g_{zk}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \otimes T_k(\vec{r}_0, T_m - t) d^2 r_0 \tag{35}$$

donde $T_k(\vec{r}_0, t) = \tau_{kj} n_j$ es la componente según k de la tracción sobre la superficie de la cavidad y n_j es la componente j del vector \vec{n} normal saliente a S . En nuestro caso particular la tracción está dada por la derivada temporal del desplazamiento dado en (34) multiplicado por la impedancia mecánica en la superficie⁽¹⁸⁾:

$$T_k(\vec{r}_0, t) = Z \frac{\partial (e_z(\vec{0}, t) \otimes g_{kz}(\vec{r}_0, \vec{0}, t))}{\partial t} \quad (36)$$

Sustituyendo en (35) obtenemos:

$$u_z^{TR}(\vec{r}, t) = Z \int_S g_{zk}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \otimes \frac{\partial (e_z(\vec{0}, T_m - t) \otimes g_{kz}(\vec{r}_0, \vec{0}, T_m - t))}{\partial t} d^2 r_0 \quad (37)$$

Esta ecuación es la base para obtener la componente z del campo de retorno temporal numéricamente como sigue. La cavidad de retorno temporal es un cubo de 80 mm de lado. Los puntos de recepción-emisión del campo están distribuidos en las 6 caras del cubo en grillas con separación de 2 mm entre sí. Los parámetros físicos fueron elegidos lo más cercano posible a la experiencia: densidad $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, velocidad de compresión $c_p = 1500 \text{ m/s}$, velocidad de corte $c_s = 3.35 \text{ m/s}$. El pulso emitido por la fuente ubicada en el centro del cubo está orientado en la dirección z y consiste en dos ciclos de senoide de frecuencia central $f_c = 130 \text{ Hz}$, con una envoltura gaussiana. En los puntos de las grillas en las seis caras del cubo se registran todas las componentes k ($k = x, y, z$) del campo dado por (34). Antes de reemitir el campo se toma su derivada temporal y se invierte en el tiempo. La componente z del campo reemitido se calcula a partir de (37) con un valor arbitrario de la impedancia mecánica $Z = 1$. La figura 15 muestra el campo en cuatro instantes de tiempo diferentes en torno al tiempo de focalización $t' = 0$ (nuevamente hemos definido $t' = t - T_m$). Debemos notar que el proceso de construcción simulado del campo tiene diferencias respecto a lo que medimos experimentalmente. Este es el campo en un medio libre y sin pérdidas y por lo tanto no hay atenuación ni reverberación. De todas formas ambos resultados muestran un buen acuerdo confirmando el hecho de que la información contenida en la reverberación del campo es suficiente para reconstruir una cavidad de retorno temporal.

La ausencia de ruido en la simulación permite confirmar algunos de los resultados observados experimentalmente. En primer lugar el campo no es isotrópico. En el instante de focalización $t' = 0$, es evidente que el ancho del foco en la dirección z es mayor que en la dirección x . En este caso encontramos $\Delta_z = 25 \text{ mm}$, $\Delta_x = 12 \text{ mm}$. La relación entre ambas es $\cong 2$, un poco mayor que en el resultado experimental. Otro aspecto que se puede observar es la presencia del campo cercano, una onda de corte con polarización longitudinal, en torno al foco en $t' = +6 \text{ ms}$. Como hemos visto en el capítulo anterior, la amplitud del campo cercano decae como $1/r^2$ y por lo tanto podemos considerar

que el campo medido en la superficie de la cavidad es esencialmente campo lejano. Es decir que la inversión temporal de campo lejano crea en torno al foco componentes de campo cercano. Simulaciones hechas en escalas más grandes vuelven a confirmar este hecho. Sin embargo, estos términos de campo cercano no involucran mejora de la resolución espacial como si lo hacen los términos de campo cercano de ondas evanescentes⁽¹²⁾.

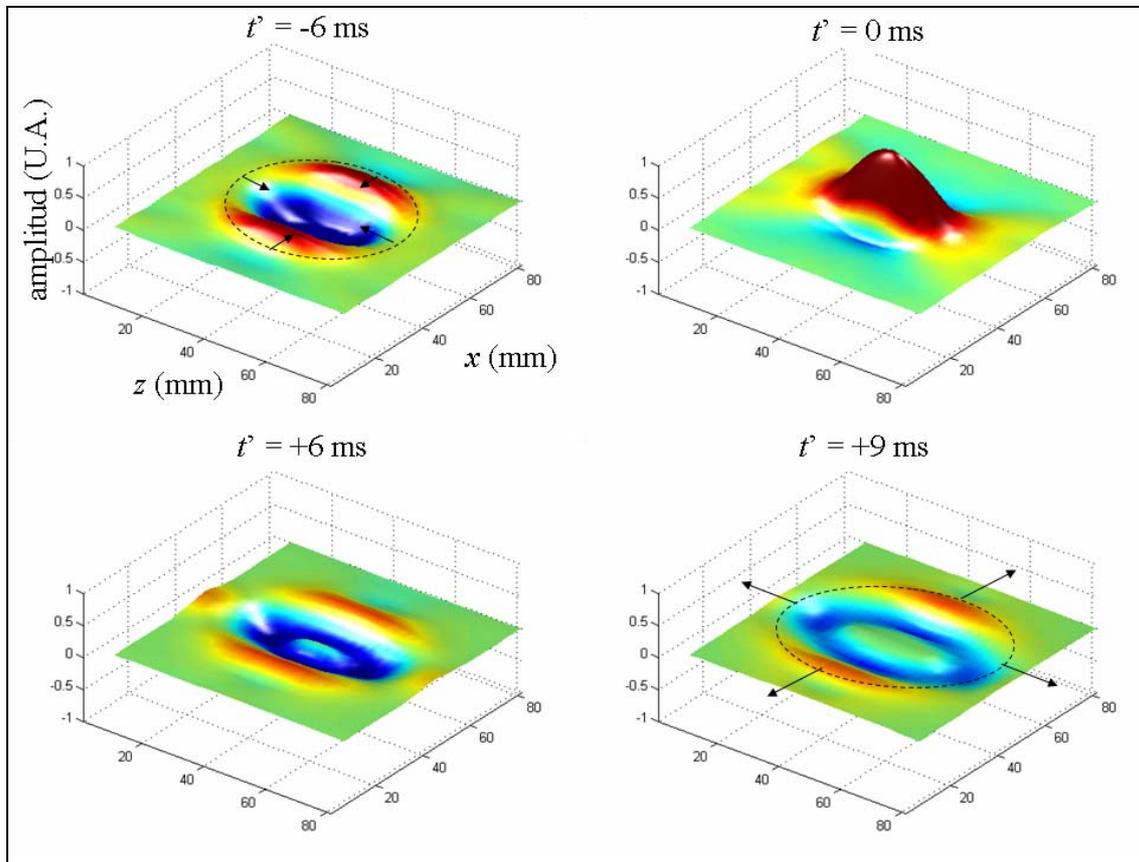


Figura 15 Simulación numérica del campo de retorno temporal evaluado en cuatro instantes diferentes, $t' = -6$ ms (previo a la focalización), $t' = 0$ (tiempo de focalización), $t' = +6$ ms y $t' = +9$ ms (posteriores a la focalización). Es posible ver en esta secuencia el proceso convergente y divergente del retorno temporal. Al igual que en el resultado experimental, es posible observar aquí que en el instante de focalización el foco no es isotrópico sino que es más ancho en la dirección de la fuente (eje z) que en la dirección perpendicular.

Estas conclusiones son válidas para sólidos isotrópicos en general más allá de la relación entre sus constantes elásticas. La ventaja de trabajar con sólidos blandos es que podemos medir el campo directamente en el volumen del mismo y confirmar experimentalmente estas conclusiones mostrando la diferencia fundamental entre una fuente puntual en un sólido respecto a un fluido. Un último aspecto a destacar es que el campo no es simétrico respecto al tiempo de focalización $t' = 0$. Por ejemplo el campo observado a -6 ms y $+6$ ms es diferente. Este hecho sin embargo no está relacionado con la naturaleza del medio (sólido o fluido) sino más bien con la naturaleza de la fuente utilizada y su diagrama de radiación. Se puede demostrar que una fuente dipolar en un fluido también genera un campo de retorno temporal no simétrico. Por lo tanto la falta de simetría temporal en el campo de retorno temporal es evidencia de la asimetría espacial con que se emite la

energía por la fuente de volumen inicial. Una conclusión similar a esta ha sido demostrada para campos ondulatorios difusos en el área de la geofísica⁽²¹⁾. Esto trae como consecuencia inmediata que el criterio de resolución de Rayleigh debe ser reconsiderado en experiencias de retorno temporal: la resolución espacial es dependiente de la dirección de observación respecto a la orientación inicial de la fuente aunque su valor permanece en el orden de una longitud de onda.

III. 4 Aplicación a la estimación de la elasticidad

En esta sección aplicaremos el proceso de retorno temporal para estimar la elasticidad en geles de agar-gelatina⁽²²⁾. Para ello nos basaremos en el hecho de que la resolución espacial del foco de retorno temporal es del orden de la longitud de onda de la onda de corte. Con el fin de optimizar la información contenida en el campo de reverberación creado por la fuente inicial, modificaremos el tratamiento de señal empleando la correlación de fase⁽²³⁾. Consideremos la matriz de correlaciones dada en la ecuación (27):

$$C(\vec{r}_0, \vec{r}, t) = (e_z(\vec{r}_0, T_m - t) \otimes h_{zk}(\vec{r}_0, \vec{r}_s, T_m - t)) \otimes (e_z(\vec{r}, t) \otimes h_{zk}(\vec{r}, \vec{r}_s, t)) \quad (38)$$

Sean $E(\omega)$ y $H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)$ la transformada de Fourier de la excitación temporal y de la respuesta al impulso respectivamente. En el dominio de frecuencias la matriz de correlación se escribe:

$$\begin{aligned} C(\vec{r}_0, \vec{r}, \omega) &= E^*(\omega) e^{i\omega T_m} E(\omega) H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) e^{i\omega T_m} H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega) = \\ &= E^2(\omega) e^{2i\omega T_m} H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega) \end{aligned} \quad (39)$$

Podemos construir ahora una matriz de correlaciones modificada dividiendo este resultado entre su módulo y tomando la transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\vec{r}_0, \vec{r}, t) &= FT^{-1} \left[\frac{E^2(\omega) H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)}{|E^2(\omega) H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)|} \right] = \\ &= FT^{-1} \left[\frac{H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)}{|H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega) H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)|} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Como el sistema es invariante en el tiempo hemos eliminado de la expresión anterior los factores de fase que dependen de T_m ya que su único efecto es introducir un retardo global en el campo de retorno temporal. Nótese que como la señal de excitación que aparece en la ecuación (39) es la misma en los dos términos, al dividir por el módulo se cancela. De esta forma eliminamos en la experiencia de retorno temporal la dependencia del resultado con la señal impuesta a la fuente original (más allá de un factor de fase constante). Al dividir entre el módulo, la amplitud de la señal es igual a la unidad para todas las componentes frecuenciales y por esta razón se llama correlación de fase. Este tratamiento hace un uso óptimo de la información contenida en el campo de reverberación. Para eliminar las componentes con fase aleatoria usamos un filtro a -20 dB

determinado como el nivel de ruido típico en nuestras experiencias y una ventana W en frecuencias para seleccionar un ancho de banda determinado $[\omega_1, \omega_2]$:

$$\tilde{C}(r_0, r, t) = FT^{-1} \left[\frac{H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega)H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)}{|H^*(\vec{r}_0, \vec{r}_s, \omega)H(\vec{r}, \vec{r}_s, \omega)|} S_{-20}(\omega)W(\omega_1, \omega_2) \right] \quad (41)$$

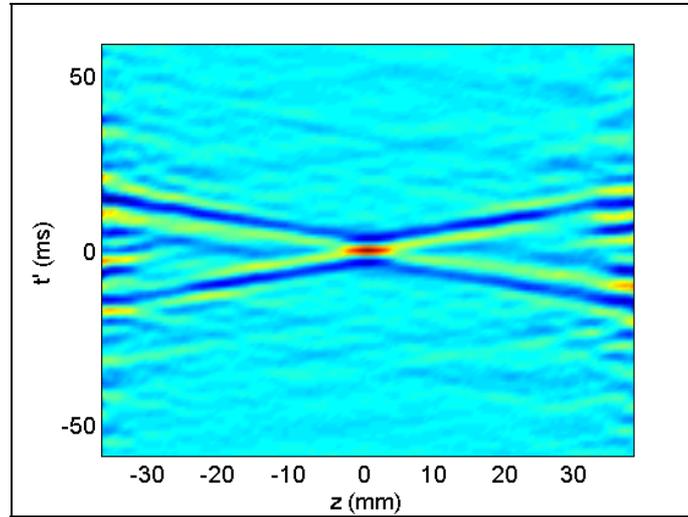


Figura 16 Evolución espacio-temporal del campo de retorno temporal. La figura es una representación unidimensional de un frente de ondas esférico que converge hacia el foco ($t' < 0$) donde se registra un máximo ($t' = 0, z = 0$) y luego diverge ($t' > 0$).

La figura 16 muestra la evolución espacio temporal del campo en una experiencia realizada en un gel de agar-gelatina, con un arreglo experimental similar al mostrado en la figura 6. La orientación del haz ultrasonoro (eje z) respecto a la dirección de movimiento de la fuente (k) es arbitraria. En esta experiencia hemos seleccionado el ancho de banda comprendido entre 30 y 140 Hz. La forma de cruz en la figura es la visión unidimensional de una onda esférica convergente ($t' < 0$) que presenta un máximo en el foco ($t' = 0, z = 0$) y luego diverge ($t' > 0$). La evolución espacio-temporal del campo permite hallar su velocidad de propagación con un tratamiento similar al utilizado en elastografía transitoria. Como el campo está dominado por ondas de corte, la velocidad de propagación del campo de retorno temporal corresponde a la velocidad de las ondas de corte c_s . Para medir la velocidad de fase es necesario separar las ondas que se propagan en sentidos diferentes (los brazos de la cruz) en el diagrama espacio-temporal de la figura 16. La forma de separarlas está basada en una descomposición del campo en el espacio de frecuencias espaciales (k_s) y frecuencias temporales (ω). La doble transformada de Fourier del campo se compone de 4 cuadrantes como se muestra en la figura 17. Los dos cuadrantes en los que la frecuencia espacial y temporal tienen el mismo signo ($\omega k_s > 0$) corresponden a la onda que se propaga en el sentido negativo de z mientras que en los dos cuadrantes en que las frecuencias tienen signo opuesto ($\omega k_s < 0$) corresponden al sentido positivo. Una vez separadas podemos medir la velocidad de fase del

campo de retorno temporal. Como el medio es homogéneo la fase es lineal en función de z . En la figura 18 se muestra este comportamiento. El valor hallado para la velocidad con un ajuste por mínimos cuadrados es $c_s = 2.6 \pm 0.1$ m/s.

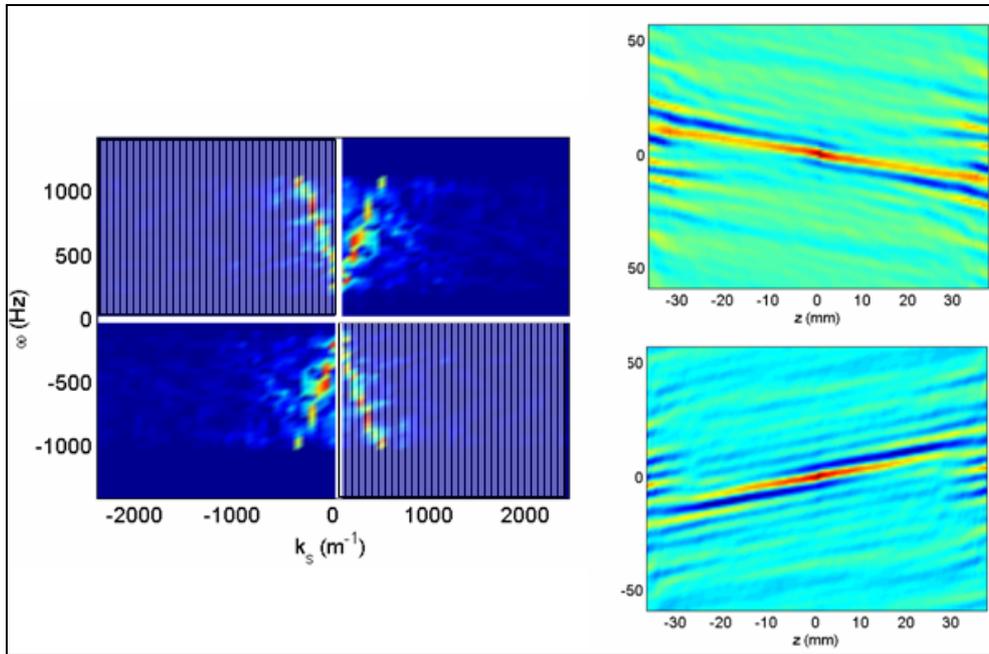


Figura 17 Doble transformada de Fourier del campo de retorno temporal de la figura 16. De los cuatro cuadrantes que componen esta figura, los dos para los cuales la frecuencia temporal y espacial tienen el mismo signo corresponden a una onda que se propaga en el sentido negativo de z mientras que los dos cuadrantes en los que estas frecuencias tienen signos opuestos corresponden a una onda que se propaga en el sentido positivo de z .

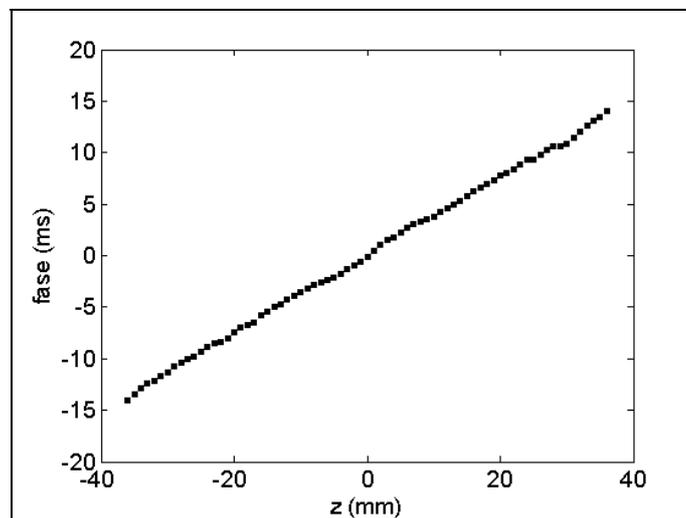


Figura 18. Fase (ms) en función de z del campo de retorno temporal correspondiente a uno de los brazos de la cruz de la figura. Como el medio es homogéneo, la dependencia es lineal. La velocidad de fase se obtiene como el inverso de la pendiente de esta curva ajustada a una recta por mínimos cuadrados. El valor hallado es $c_s = 2.6 \pm 0.1$ m/s en buen acuerdo con la medida por elastografía transitoria.

Realizamos en el mismo gel medidas de elastografía transitoria para medir la velocidad de la onda de corte. Este método, descrito en el capítulo anterior, está ampliamente tratado en la literatura y consideraremos sus resultados como una referencia a la hora de compararlos con los que

obtenemos por retorno temporal. En este caso particular el valor hallado por elastografía transitoria es $c_s = 2.53 \pm 0.06$ m/s, en buen acuerdo con el resultado anterior. Quiere decir que es posible utilizar la información contenida en el campo de retorno temporal para estimar la elasticidad del medio. En este caso obtenemos $Y \cong 3\rho c_s^2 = 20.3 \pm 0.8$ KPa (usando $\rho = 1000$ Kg/m³). La medida de fase, al igual que otras técnicas de tiempo de vuelo, es precisa y brinda una buena estimación de la elasticidad en la muestra. En un trabajo realizado en nuestro laboratorio⁽²⁴⁾ hemos mostrado sin embargo que la medida de fase es sensible a la falta de reverberación del campo y puede resultar en una sobreestimación de la elasticidad si la distribución espacial del campo no es uniforme. Mostraremos más adelante este resultado experimental.

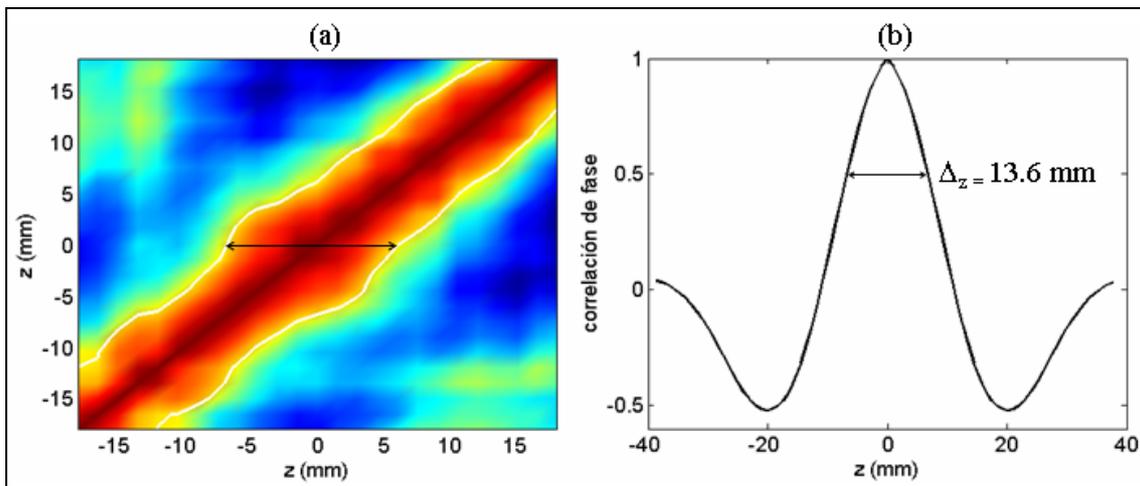


Figura 19 (a) Matriz de focalización espacial evaluada en $t' = 0$. Las líneas blancas muestran la curva de isonivel a -6 dB. Podemos percibir que el ancho del foco tiene pequeñas fluctuaciones en función de la posición z . La desviación standard es $\sigma_{\Delta} \cong 0.8$ mm que representa un 6 % del valor medio $\Delta_z \sim 14$ mm. (b) Promedio espacial de la focalización. El promedio elimina fluctuaciones del campo debido a ruido pero también la pérdida de información espacial del campo. El ancho del foco a mitad de altura es $\Delta_z = 13.6$ mm y es una estimación de la longitud de onda.

Una forma alternativa de estimar la elasticidad consiste, como ya mencionamos, en medir el ancho del foco del campo de retorno temporal que está relacionado con la longitud de onda a través del criterio de Rayleigh. Como vimos en la sección anterior el ancho del foco es dependiente de la dirección de observación respecto a la dirección de la fuente. La figura 19(a) muestra la matriz de correlaciones cruzadas C evaluada en $t' = 0$. Las líneas blancas muestran el contorno a -6 dB y se muestra con una doble flecha el ancho del foco en $z = 0$ que en este caso es de 13.5 mm. En un medio homogéneo, como en este caso, el ancho del foco permanece aproximadamente constante a lo largo del eje z . La desviación standard obtenida es $\sigma_{\Delta} = 0.8$ mm que representa un 6 % de variación sobre el valor medio 14 mm. En la figura 19(b) se muestra el resultado del promedio espacial de la focalización. Como se discutió antes, este promedio elimina la pérdida de información espacial al ser equivalente a emplear múltiples fuentes en el proceso de retorno temporal. Surge entonces la pregunta de cómo relacionar el ancho del foco con la longitud de onda. En el área de la sismología

algunos trabajos han mostrado que la correlación espacial entre las ondas sísmicas de superficie provenientes de todas las direcciones toma la forma de una función de Bessel de orden cero⁽²⁵⁾. En la sección II.1.A hemos mostrado que la focalización espacial en una cavidad acústica toma la forma de una función de Bessel esférica. Sin embargo en este caso estamos tratando con ondas de volumen en un sólido elástico y la relación entre el ancho y la longitud de onda no se obtiene en forma directa de las expresiones analíticas del campo de retorno temporal en una cavidad sólida (ver apéndice C). Determinaremos entonces empíricamente esta relación. Llamaremos α al coeficiente de proporcionalidad entre la longitud de onda λ_s y el ancho del foco Δ_z , es decir:

$$\lambda_s = \alpha \Delta_z \tag{42}$$

El valor de la velocidad de la onda de corte en el gel es conocida a través de la medida realizada por elastografía transitoria: $c_s = 2.5$ m/s. Por lo tanto podemos conocer la longitud de onda de la onda de corte por la relación:

$$c_s = \lambda_s f_0 = \alpha \Delta_z f_0 \tag{43}$$

donde f_0 es la frecuencia de la vibración. En las experiencias clásicas de retorno temporal es usual elegir f_0 como la frecuencia central del pulso que se propaga en el medio⁽²⁶⁾. Sin embargo en nuestro caso hemos calculado el campo de retorno temporal a partir de la correlación de fase y por lo tanto todas las componentes frecuenciales dentro del ancho de banda seleccionado tienen el mismo peso. Si suponemos que el campo se compone de la superposición de modos normales no degenerados de la cavidad, el ancho espacial se corresponde con la máxima frecuencia del campo⁽¹⁰⁾.

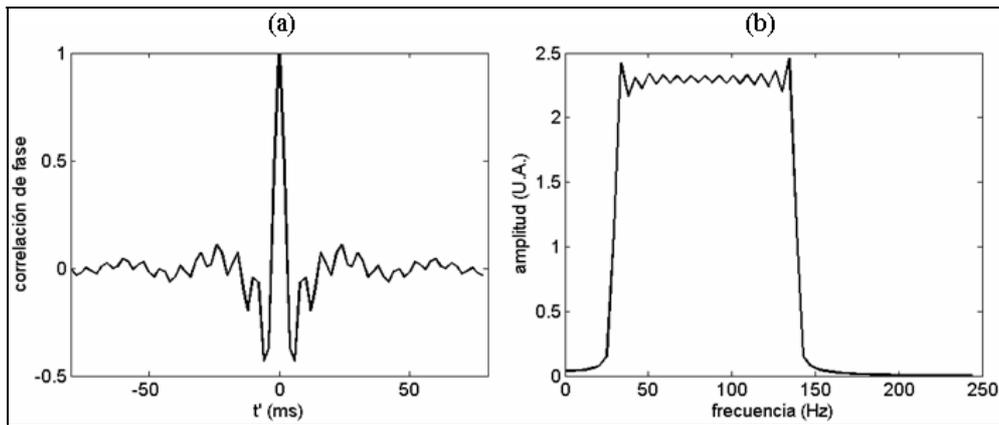


Figura 20 (a) Focalización en el tiempo del campo de retorno temporal. Se observa en $t' = 0$ un pico rodeado por un nivel de ruido lateral. (b) Amplitud del espectro de la focalización temporal. En esta figura se observa que el contenido frecuencial del campo coincide con el tratamiento de señal descrito, es decir, todas las componentes frecuenciales dentro de la banda 30-140 Hz contribuyen con el mismo peso al campo.

En la figura 20 se muestra la focalización temporal y su correspondiente espectro. Más allá de las fluctuaciones de amplitud debidas a un muestreo finito del campo⁽²⁷⁾, vemos que la amplitud del espectro es esencialmente constante dentro del ancho de banda 30-140 Hz. Fuera de este rango

decae rápidamente a cero. Despejando el valor de α de la ecuación utilizando $f_0 = 140$ Hz y $\Delta_z = 13.6$ mm encontramos $\alpha \cong 1.33 \cong 4/3$. Es decir que experimentalmente llegamos a la relación $\lambda_s \cong 4/3 \Delta_z$.

Recurrimos nuevamente a la simulación numérica para confirmar esta relación. El proceso numérico es similar al utilizado en la sección anterior pero eliminando la etapa inicial de emisión. La superficie de la cavidad es un cubo de 80 mm de lado con puntos de emisión distribuidos en una grilla sobre la superficie con separación de 2 mm entre sí. Cada punto emite un ciclo de senoide de frecuencia f_c con un retardo aleatorio entre sí de modo de recrear el campo elástico de reverberación de la experiencia. Los parámetros de la simulación se eligieron de acuerdo a la experiencia: $\rho = 1000$ Kg/m³, $c_p = 1500$ m/s $c_s = 2.5$ m/s, $f_c = 100$ Hz. La componente z del campo así creado se mide en puntos discretos sobre una línea recta con una orientación arbitraria en el medio. Este campo se somete al mismo tratamiento de señal que los datos experimentales, es decir se construye la matriz de correlación dada por la ecuación (41).

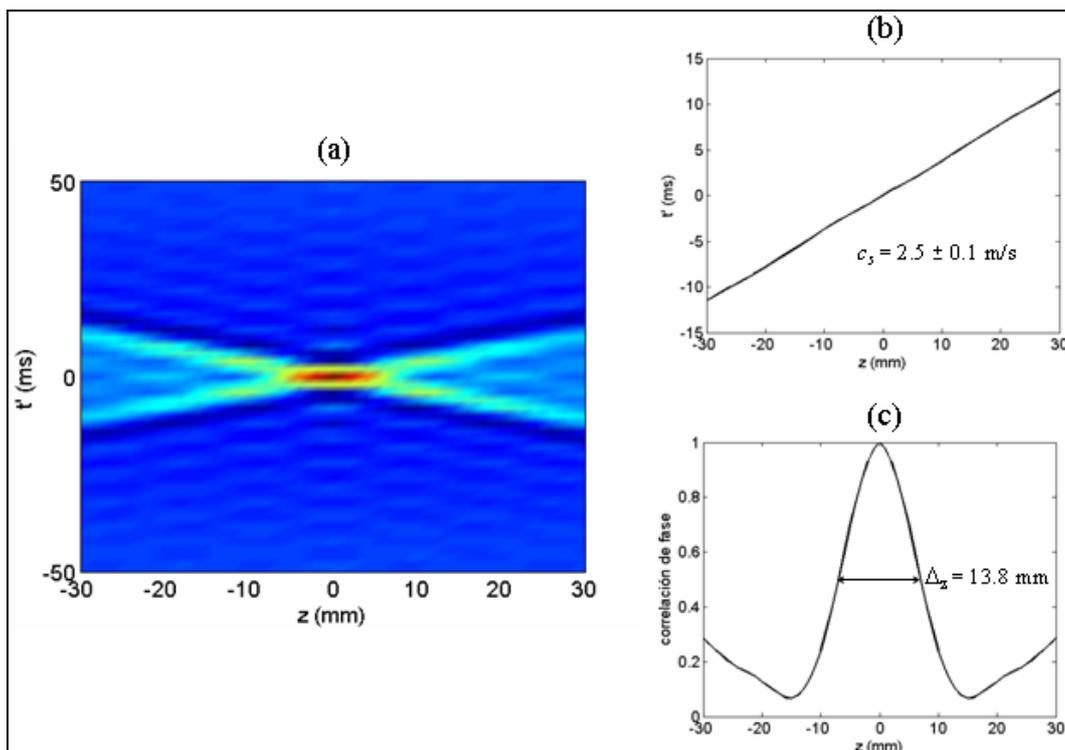


Figura 21 (a) evolución espacio temporal del campo de retorno temporal obtenido numéricamente. Vemos aquí los dos brazos de la forma de cruz que al igual que en la experiencia indica un campo ondulatorio que converge hacia el foco ($z = 0$) y luego diverge. (b) Medida de la fase de uno de los brazos de la cruz que muestra una evolución lineal que permite conocer la velocidad de propagación a partir de un ajuste lineal: $c_s = 2.5 \pm 0.1$ m/s. Este valor se corresponde con el valor que se ingresó en la simulación. (c) Focalización espacial del campo donde se muestra el ancho a mitad de altura. Su valor coincide con el encontrado experimentalmente lo que permite confirmar la relación empírica $\lambda_s \cong 4/3 \Delta_z$

La figura 21 resume los resultados obtenidos. En la figura 21(a) se observa la evolución espacio-temporal del campo. En la figura 21(b) se muestra la medida de velocidad de fase cuyo valor está en excelente acuerdo con el valor entrado en la simulación (2.5 m/s). Por último la figura 21(c)

muestra el promedio de la focalización espacial donde vemos que el ancho del foco es muy similar al encontrado experimentalmente. En este caso se confirma entonces la relación dada por el resultado experimental, es decir, $\lambda_s \cong 4/3 \Delta z$. Hemos repetido la simulación numérica para diferentes valores de los parámetros la configuración de c_s y frecuencias de emisión f_c . Más allá de pequeñas diferencias, en todas ellas se confirma la relación anterior. En ausencia de expresiones analíticas que vinculen el ancho focal con la longitud de onda asumiremos la relación hallada empíricamente como válida en esta tesis. Sin embargo este punto debe ser abordado en futuras investigaciones.

III. 4.A Ventajas de la elastografía por retorno temporal

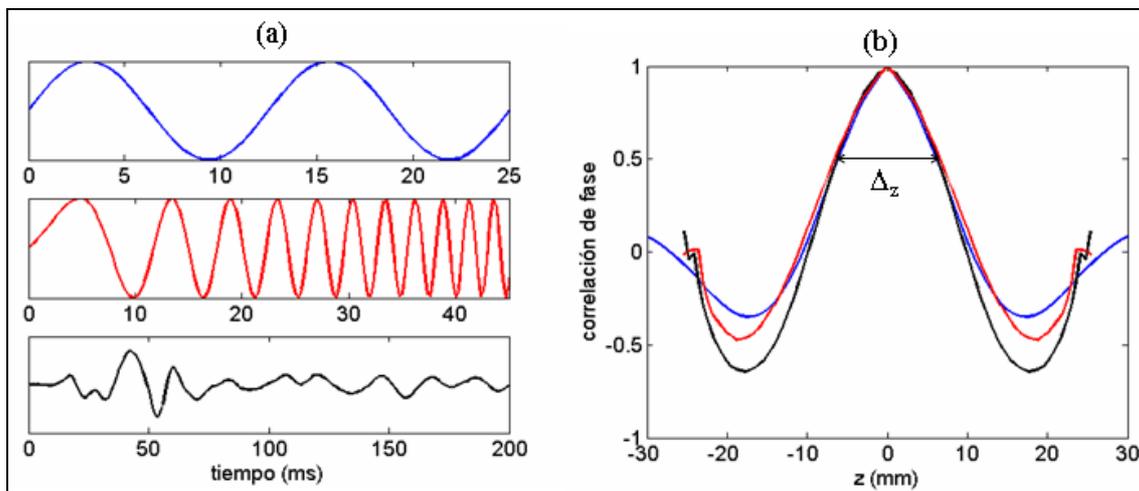


Figura 22 (a) Tres funciones temporales diferente utilizadas en experiencias de retorno temporal arriba (azul) dos ciclos de senoide de 80 Hz. Centro (rojo) barrido en frecuencias desde 30 hasta 250 Hz en 45 ms. Abajo (negro) pulso cardíaco. (b) Comparación entre la focalización espacial obtenida con cada una de las excitaciones anteriores. Como vemos el ancho focal es independiente de la función utilizada. Este resultado es la verificación experimental de lo establecido en la ecuación (40).

Con las experiencias realizadas hasta el momento hemos mostrado la manera de acceder a valores cuantitativos de la elasticidad mediante la información contenida en el campo de retorno temporal. Mostraremos en esta sección las ventajas de este método comparado con otros también basados en ultrasonido. En primer lugar mostraremos la independencia del resultado con respecto a la forma temporal de la función de excitación de la fuente establecido en la ecuación (40). Utilizando el generador de señales arbitrarias es posible elegir diferentes tipos de funciones para excitar el vibrador mecánico. La figura 22(a) muestra tres señales temporales diferentes utilizadas en la experiencia. Arriba (azul) dos ciclos de senoide de 80 Hz, al medio (rojo), un barrido en frecuencias entre 30 y 250 Hz con una duración total de 45 ms y abajo (negro) un pulso cardíaco. En la figura 22(b) se muestra el promedio de la focalización espacial en cada caso (los colores se corresponden con los de la figura (a)). Como se observa, el ancho focal a mitad de altura es prácticamente el mismo en cada caso: 12.3, 12.5 y 13 mm respectivamente, teniendo en cuenta que

la desviación standard del ancho focal a lo largo del eje z es del orden de 1 mm. Este resultado es la confirmación experimental de que usando la correlación de fase, la estimación de la elasticidad es independiente de la excitación original de la fuente.

En el siguiente experimento, estudiamos el proceso de focalización en función de la posición y forma de la fuente utilizada. Realizamos tres experiencias. En dos de ellas la fuente es la misma, un pistón circular de 10 mm de diámetro, actuando en diferentes direcciones respecto al haz ultrasonoro (eje z). En la primera de ellas en forma paralela y en la segunda perpendicular. En la tercera experiencia se cambió el pistón por un anillo de 15 cm de diámetro. La función de excitación consiste en dos ciclos de senoide de 100 Hz. La figura 23 muestra esquemáticamente cada experiencia y la focalización espacial en cada caso. Vemos que el ancho del foco es prácticamente el mismo en los tres casos: 12.3, 12.9 y 12.4 mm respectivamente. Las diferencias pueden ser atribuidas al diferente contenido frecuencial en cada experiencia así como a las fluctuaciones de la focalización espacial en cada punto que dan una dispersión $\sigma_{\Delta} \sim 1$ mm.

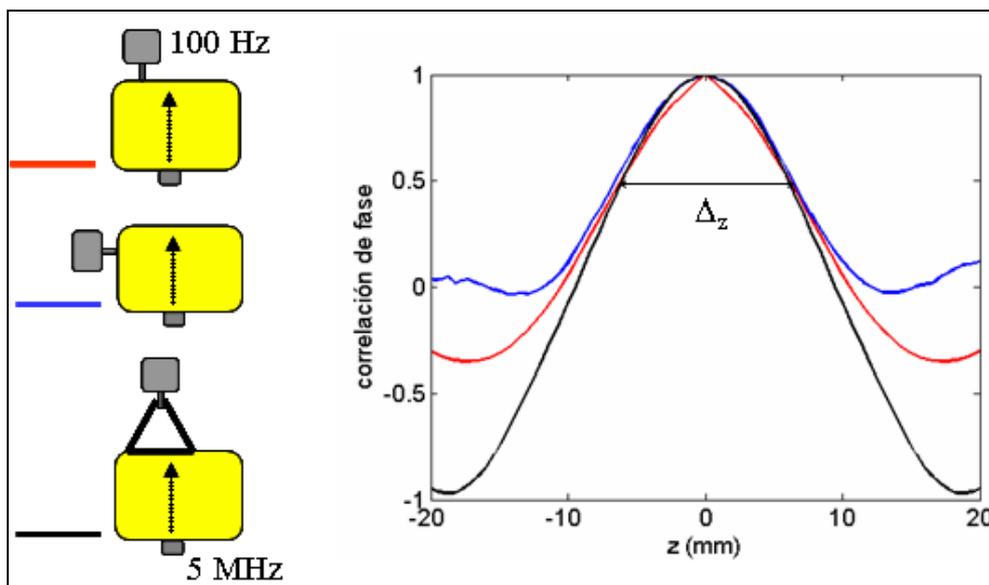


Figura 23 (a) Esquema del montaje utilizado en experiencias de retorno temporal para tres configuraciones de fuente diferentes. Fuente circular paralela (rojo) y perpendicular (azul) al haz de ultrasonido. Fuente anular de 15 cm de diámetro (negro). (b) Comparación de la focalización espacial obtenida en cada caso. El ancho focal es independiente de la posición y forma de la fuente utilizada, lo que muestra que el campo de retorno temporal depende solamente de las características del medio.

Con estas dos últimas experiencias hemos mostrado que el método de elastografía por retorno temporal es robusto en cuanto a la posición, forma y excitación temporal de la fuente utilizada. Vemos entonces que presenta una serie de ventajas comparado con los otros métodos ultrasonoros descritos en el capítulo anterior. En elastografía estática el compresor debe tener dimensiones mayores a la profundidad de observación para considerar que la presión estática es uniforme dentro del medio. Además el transductor debe estar alineado en la dirección donde se aplica la compresión. En sonoelastografía la excitación impuesta por la fuente debe ser monocromática y los resultados

son dependientes de las condiciones en la frontera. Por último, en elastografía transitoria 1D, la fuente y el transductor deben estar alineados y en caso de una fuente puntual (o de dimensiones comparables a la longitud de onda) los resultados (basados en propagación de ondas planas) deben corregirse por difracción. Al igual que todos los métodos ultrasonoros, la elastografía por retorno temporal sólo puede acceder a una parte de la información del campo vectorial (a la componente z en el caso 1D). Sin embargo no es necesario hacer hipótesis alguna sobre la información faltante. Como en el proceso de retorno temporal participan todas las componentes del campo vectorial, al medir la componente z estamos en realidad haciendo uso de toda la información contenida en él. Esto representa una gran ventaja respecto a los otros métodos que para obtener resultados cuantitativos satisfactorios deben tratar de asegurar con la configuración experimental la condición de un campo no difractante.

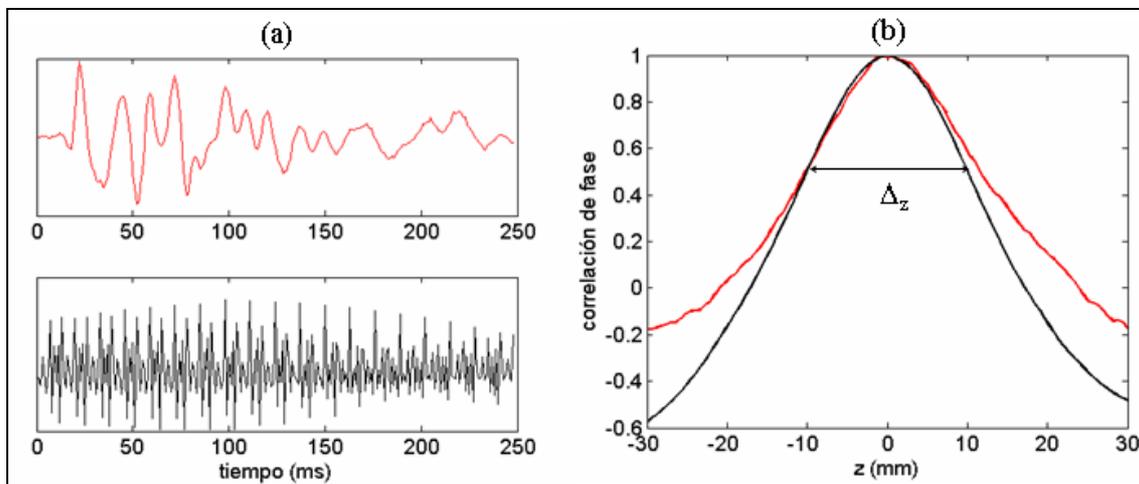


Figura 24 (a) Campo de velocidad particular debido a una excitación de un ciclo de senoide de 100 Hz medido a una profundidad dada en el medio. En la parte superior la frecuencia de repetición de pulso es de 1000 Hz lo que permite una perfecta reconstrucción del campo. En la parte inferior la FRP es de 40 Hz, bien por debajo del criterio de Nyquist – Shannon por lo que la señal aparece como ruido. (b) Focalización espacial para las dos señales anteriores. El ancho del foco es similar en ambos casos lo que muestra que el método de elastografía por retorno temporal es adaptable a la electrónica standard en ecografía.

Mostraremos ahora otro aspecto en el cual la elastografía por retorno temporal puede tener aplicaciones prácticas ventajosas. Como mostramos en el capítulo anterior, los ecógrafos convencionales pueden elaborar imágenes con un ritmo de aproximadamente 50 Hz. Quiere decir que si utilizamos una electrónica de este tipo para realizar elastografía la frecuencia de repetición de pulso es de 50 Hz. Como vimos esto limita a la elastografía transitoria ya que con este valor de frecuencia de muestreo no es posible seguir la propagación de la onda de baja frecuencia en el medio en su período transitorio. De forma similar con este valor no es posible reconstruir la fase del campo de retorno temporal como se mostró en la figura 18. Sin embargo la focalización espacial del campo de retorno temporal no depende de la frecuencia de muestreo, sino de la resolución espacial del método. Por lo tanto es posible obtener un valor estimativo de la longitud de onda aun cuando la

frecuencia de repetición del pulso (FRP) sea inferior al contenido frecuencial de la señal de excitación. Este resultado se muestra en la figura 24. El pulso de excitación es un ciclo de senoide de 100 Hz. En la figura 24(a) se muestra el registro del campo (una línea del sismograma) cuando la FRP es de 1000 Hz (arriba) y de 40 Hz (abajo). En este último caso la frecuencia de muestreo está bien por debajo del criterio de Nyquist-Shannon lo que le da un aspecto ruidoso a la reconstrucción del campo. La información de frecuencias ya no está disponible pero la información espacial está intacta. El ancho del foco es similar en los dos casos 21.7 y 20.1 mm (figura 24(b)) respectivamente. Esta información permite una evaluación cualitativa de la elasticidad en el medio utilizando electrónica standard en ecografía de uso médico. Si tenemos en cuenta ahora los resultados sobre construcción de imágenes ecográficas a partir de la composición coherente de ondas planas del capítulo anterior, vemos que por un lado es posible aumentar la frecuencia de repetición de pulso en un equipo ecográfico manteniendo la calidad de la imagen. Por otro lado el método de elastografía por retorno temporal no requiere que la FRP sea demasiado elevada. La combinación de estos resultados puede eventualmente dar origen a un solo equipo “económico” que permita realizar ambos procedimientos.

III. 5 Efecto de la atenuación en las experiencias

Volveremos ahora a este punto mencionado anteriormente en el capítulo. El efecto de la atenuación es el de quebrar la invariancia temporal de la ecuación de ondas. Desde el punto de vista balístico su efecto es el de reducir el tiempo total de reverberación del campo al interior del medio. Como consecuencia la energía se concentra en zonas específicas como en torno a la posición de la fuente de baja frecuencia inicial o eventualmente los reflectores más fuertes. El efecto de fuentes virtuales creado por las múltiples reflexiones se desvanece y el campo ya no es ergódico. Intuitivamente podemos pensar que la cavidad se comporta como un espejo de retorno temporal de apertura finita más que como una cavidad cerrada. En estas circunstancias, ya no podemos suponer que el campo en cada punto se compone de la superposición de ondas planas que arriban a él desde todas las direcciones sino que existe un sentido de propagación privilegiado dado por la posición de la fuente, las condiciones de borde de la cavidad y eventualmente de las inhomogeneidades internas. Debido a la complejidad y multiplicidad de parámetros que deben considerarse, es difícil a priori determinar cuál será esta dirección. Al observar este campo en una dirección arbitraria z , que en general no coincide con la dirección privilegiada de propagación, obtendremos una sobre estimación de la velocidad como se describe en el caso del espejo finito de retorno temporal en fluidos⁽²⁸⁾.

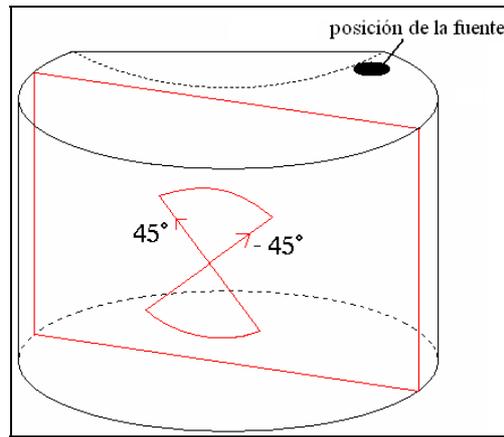


Figura 25 Esquema que muestra la medida experimental para estudiar la dependencia del resultado respecto a la orientación relativa fuente-haz ultrasonoro. Se realizaron 10 medidas en un mismo plano desde $\pm 45^\circ$ a -45° en pasos de 10° .

Experimentalmente podemos tener cierto control sobre la elasticidad y atenuación final en los geles variando la concentración de agar en relación con la gelatina utilizada en la mezcla. A continuación se muestran resultados experimentales en un gel altamente atenuante ($Q \sim 3$). Estas medidas fueron hechas en forma conjunta con Thomas Gallot en el marco de su tesis de maestría. En la experiencia, la fuente se mantiene en la misma posición y se hacen varias medidas con diferentes orientaciones θ del haz ultrasonoro respecto a la dirección de actuación de la fuente. Estas direcciones están contenidas en un mismo plano como se muestra en la figura 25 totalizando 10 medidas desde $\theta = +45^\circ$ hasta -45° en pasos de 10° . Debido al efecto de la atenuación la distribución de modos no es la misma para cada una de estas direcciones.

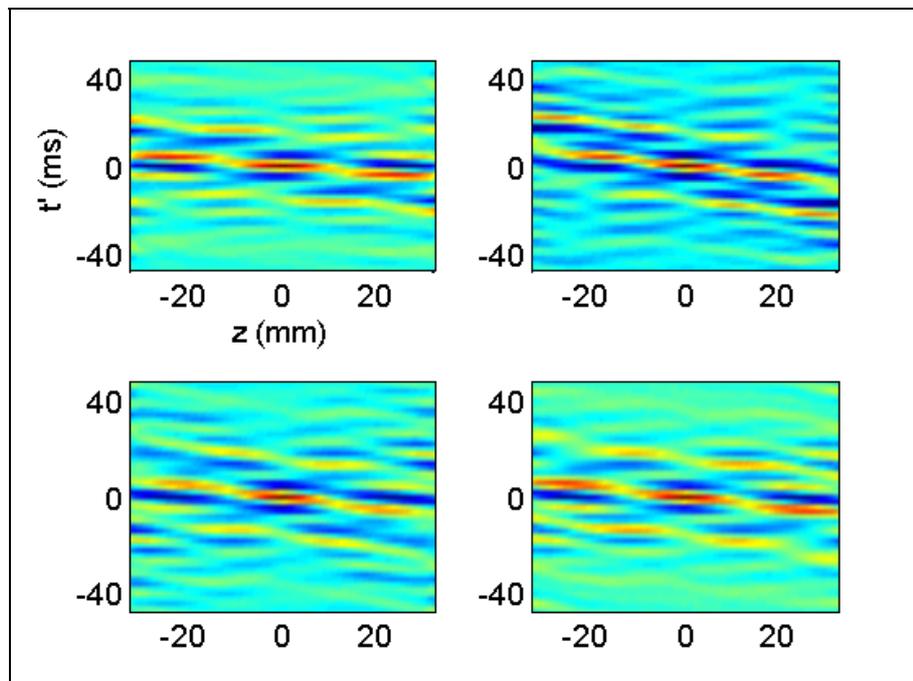


Figura 26 Evolución espacio-temporal del campo de retorno temporal para cuatro diferentes orientaciones del haz de ultrasonido respecto a la dirección de la fuente en un medio altamente atenuante. La medida de velocidad de fase resulta ser dependiente de la dirección y una sobreestimación del valor obtenido por elastografía transitoria (~ 4.5 m/s)

En la figura 26 se muestra la evolución espacio-temporal del campo de retorno temporal para $\theta = +45, +5, -5$ y -45° . En primer lugar se puede observar que el proceso no tiene forma de cruz típica en las experiencias de retorno temporal. Además se puede ver en la figura que la velocidad de fase es diferente para cada posición mostrando entonces que la falta de reverberación afecta esta medida. El valor de velocidad para cada una de las figuras es $c_s = 7.0, 4.8, 5.3, 6.5$ m/s respectivamente. La dispersión de estos datos representa un error relativo de 18% sobre el valor medio en la estimación de la velocidad.

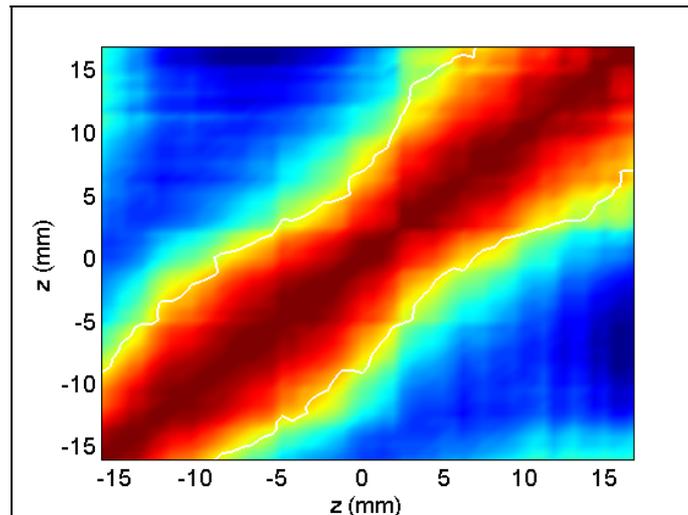


Figura 27 Matriz de focalización espacial en un medio altamente atenuante ($Q \sim 3$). Las líneas blancas representan la curva de isonivel a -6 dB. La fluctuación espacial del ancho de focalización es consecuencia de una distribución espacial no homogénea del campo de retorno temporal

Pero incluso en una misma dirección la distribución de modos del campo no es homogénea sobre el eje z . La figura 27 muestra la matriz C en $t' = 0$ para $\theta = +45^\circ$, donde las líneas blancas representan la curva de isonivel a -6 dB. Vemos que el ancho del foco varía en función de la posición z . La desviación standard es en este caso es $\sigma_\Delta \cong 2.3$ mm, bastante mayor a la mostrada en la figura 19. ¿Quiere decir esto que en medios atenuantes la estimación de la elasticidad es dependiente de la posición relativa entre la fuente y el haz ultrasonoro? La respuesta es que si, tanto la medida de la fase y como de la longitud de onda local dependen de esta orientación. No es fácil a priori determinar una dirección para la cual la medida se vea libre de fluctuaciones locales. Sin embargo si realizamos un promedio sobre la focalización la falta de información local se reduce. Como ya mencionamos, el promedio espacial de la focalización es equivalente a utilizar múltiples fuentes en el proceso de retorno temporal, lo que reduce la pérdida de información introducida por la atenuación del medio, es decir, la ausencia de fuentes virtuales del campo de reverberación se sustituye por fuentes “reales” al interior del gel. En la figura 28 se muestra este promedio para las cuatro posiciones angulares de la figura 26. El ancho focal en cada una es $\Delta_z = 11.2, 12.6, 12.3$ y 10 mm respectivamente. La dispersión de estos datos representa un error relativo de 9% sobre el valor

medio. Si bien persisten diferencias, la dispersión del resultado es menor (la mitad) que para la medida de fase.

En base a estos resultados experimentales podemos afirmar que el método de la focalización espacial es más robusto respecto a la medida de fase para estimar la elasticidad. Sin embargo la atenuación del campo ondulatorio introduce la necesidad de hacer el promedio espacial. De esta manera solo es posible medir la elasticidad promedio de la muestra. Como vimos en el capítulo anterior las aplicaciones médicas de la elastografía requieren que el método sea capaz de medir la elasticidad a nivel local con una resolución del entorno de 1 mm (o menor) para poder distinguir patologías. En principio la elastografía por retorno temporal es capaz de medir localmente la longitud de onda evitando la resolución del problema inverso. Pero de la figura 27 es claro que la medida local de la longitud de onda resultará en fluctuaciones (artefactos en la imagen) no deseadas en un método de imaginería. Una posibilidad para solucionar este problema sería sustituir el promedio matemático por un campo homogéneamente distribuido a partir de la utilización de fuentes apropiadas (por ejemplo fuentes extendidas o múltiples fuentes). En principio este hecho limita el tipo de fuentes que se pueden utilizar. En las aplicaciones médicas sin embargo podríamos tomar ventaja de las fuentes de ruido internas del organismo (ruido muscular, ruido gastrointestinal o del sistema cardiovascular). Esta posibilidad ya ha sido planteada por otros autores en lo que se ha denominado elastografía pasiva (es decir sin utilizar fuentes externas)⁽²⁹⁾. La distribución de estas fuentes se puede considerar aleatoria y por lo tanto la distribución espacial del campo es homogénea.

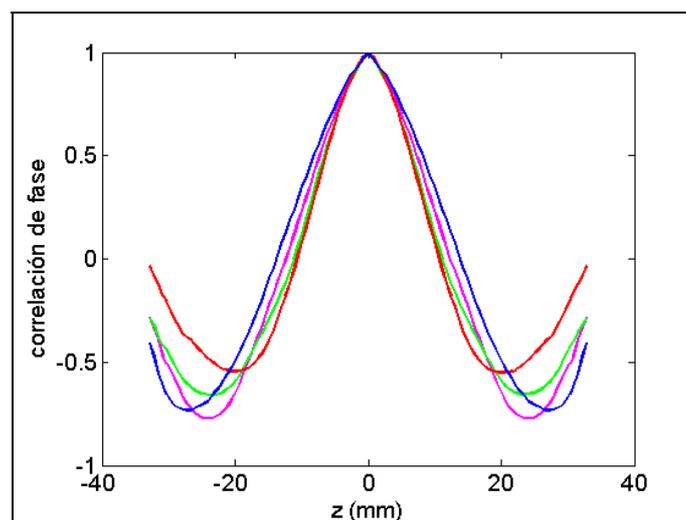


Figura 28 Comparación del promedio de focalización espacial entre cuatro medidas con diferentes orientaciones del haz ultrasonoro dentro del medio. Si bien persisten diferencias, la dispersión es menor que en la medida de fase.

III.6 Experiencia de elastografía por retorno temporal *in vivo*

En la siguiente experiencia mostramos una aplicación *in vivo* de la elastografía por retorno temporal⁽³⁰⁾. La experiencia se realizó en el bíceps de un voluntario con el brazo ligeramente

flexionado El coeficiente de atenuación en tejido muscular es mayor que en geles de agar-gelatina. Para tratar de obtener un campo elástico distribuido en forma espacialmente homogénea utilizamos una fuente extendida que consiste en una placa cuadrada con nueve pistones dispuestos en una grilla y separados 1.5 cm entre sí. El transductor está ubicado lateralmente a la fuente como se muestra esquemáticamente en la figura 29(a). En la figura 29(b) se muestra el resultado del promedio de la focalización espacial. El ancho del foco a mitad de altura es $\Delta_z = 16.1$ mm y la frecuencia máxima de la banda utilizada es 160 Hz. Con estos datos obtenemos la velocidad de la onda de corte $c_s = 3.4$ m/s, y por lo tanto el módulo de Young es $Y \cong 34.7$ KPa. Este valor está dentro de los valores que se pueden encontrar en la literatura⁽³¹⁾ para este tipo de tejidos. Con esta experiencia no se pretende un análisis riguroso de la elasticidad en el bíceps donde es necesario tener en cuenta la anisotropía⁽³²⁾, la viscosidad y el grado de tensión interna entre otros factores que afectan el resultado final. El objetivo aquí es mostrar que el método de elastografía por retorno temporal es aplicable *in vivo* y que la versatilidad del mismo (independencia con la posición forma y excitación temporal de la fuente) permite que la aplicación sea relativamente sencilla. Dejamos para futuros trabajos un análisis más detallado de los resultados de este tipo de experiencias en tejidos reales.

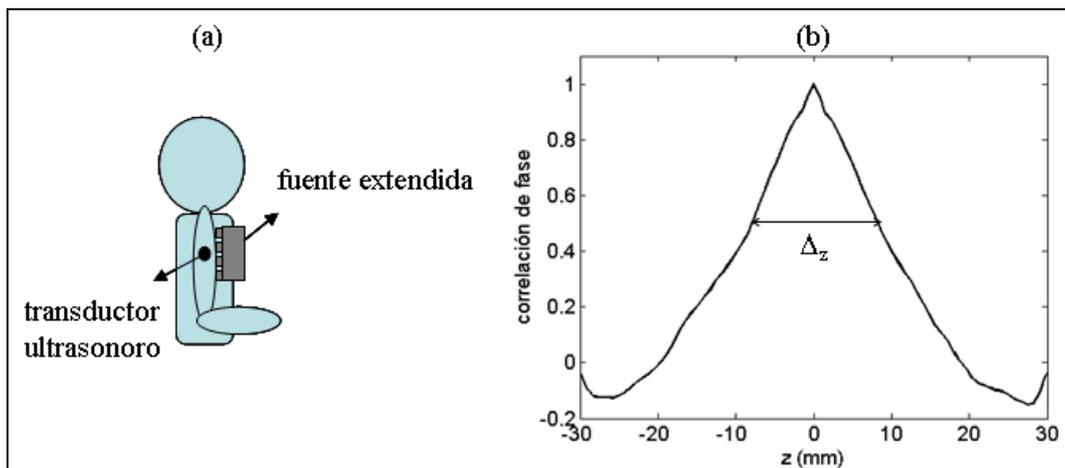


Figura 29 (a) Esquema que muestra la medida realizada *in vivo* en el bíceps de un voluntario. Se utiliza una fuente extendida para tratar de lograr una distribución espacialmente homogénea del campo elástico.(b) Focalización espacial correspondiente. El ancho del foco es 16.1 mm.

III. 7 Elastografía “libre” de ultrasonido.

En esta sección proponemos una variante de la aplicación de la elastografía por retorno temporal que también hemos desarrollado en nuestro laboratorio⁽³³⁾. En lugar de investigar el proceso en el volumen de un sólido blando lo haremos en la superficie del mismo. El montaje experimental se muestra en la figura 30. La parte emisora (electrónica de baja frecuencia y vibrador) es igual a la utilizada en las secciones anteriores. Lo que se modifica es la recepción de la señal. En lugar de utilizar ultrasonido, la recepción se realiza ahora a través de sensores acústicos de contacto que trabajan en un rango de frecuencias audible (Murata PKS1-4A type). Esta señal se digitaliza con

una frecuencia de muestreo de 500 Hz utilizando un osciloscopio digital (HP 54520 A) y se envía al PC para su posterior análisis.

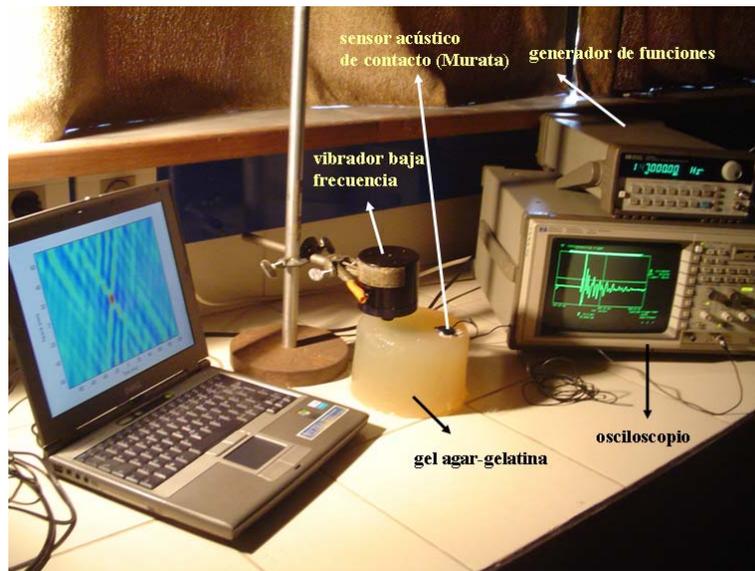


Figura 30 Montaje experimental de la elastografía por retorno temporal de superficie. La medida del campo de baja frecuencia se realiza sobre la superficie del gel con un sensor acústico de contacto. La señal se registra en un osciloscopio y se transfiere al PC para el análisis. Para poder observar la focalización espacial hacemos un barrido con la fuente sobre una recta.

En la figura 31(a) se muestra una de las señales recibidas por el sensor cuando la excitación es un ciclo de senoide de 60 Hz en una de las muestras de agar-gelatina. Aquí también se observa que la duración de la señal es mucho mayor a la duración del pulso inicial. Utilizando una sola fuente y un solo sensor no es posible ver la focalización espacial del campo de retorno temporal con una sola medida. Para disponer de una serie de puntos de medida, como en el caso de la interferometría speckle, es necesario hacer un barrido sobre la superficie de la muestra. Dada la reciprocidad fuente/receptor, el resultado es el mismo si movemos el sensor o la fuente. En esta experiencia preferimos hacer un barrido con la fuente debido a que el sensor es de contacto y se hace difícil y tedioso moverlo entre todas las posiciones. La fuente se mueve a lo largo de una línea recta sobre la superficie de la muestra con pasos de 3 mm. En cada paso se registra la señal en el sensor. En la figura 31(b) se muestra el resultado final de 24 medidas.

Esta matriz de datos se somete al mismo tratamiento de señal descrito en las secciones anteriores para las señales obtenidas por interferometría speckle, es decir a la correlación de fase expresada en la ecuación (41). La figura 32 muestra el resultado de este tratamiento. Al igual que en la figura (16) se observa la representación unidimensional de ondas que convergen al foco y luego divergen. También se muestra en la figura la focalización espacial en $t' = 0$ (arriba) y la focalización temporal en $z = 0$ (derecha). Debemos notar sin embargo que existe una diferencia respecto a las medidas de volumen. En este caso estamos midiendo la componente vertical de los desplazamientos sobre la superficie del medio. Como vimos en el capítulo anterior la mayor parte de la energía generada por

la fuente se propaga bajo la forma de una onda elástica de superficie (onda de Rayleigh). Esperamos en este caso entonces que la focalización espacial sea isotrópica, es decir, que el ancho focal sea independiente de la dirección de observación respecto a la dirección de la fuente. Esto es debido a que el diagrama de directividad de la energía es isotrópico para las ondas de superficie (ver figura 26 del capítulo 1). En este caso la relación entre el ancho del foco y la longitud de onda es $\Delta_z = \lambda/2$.

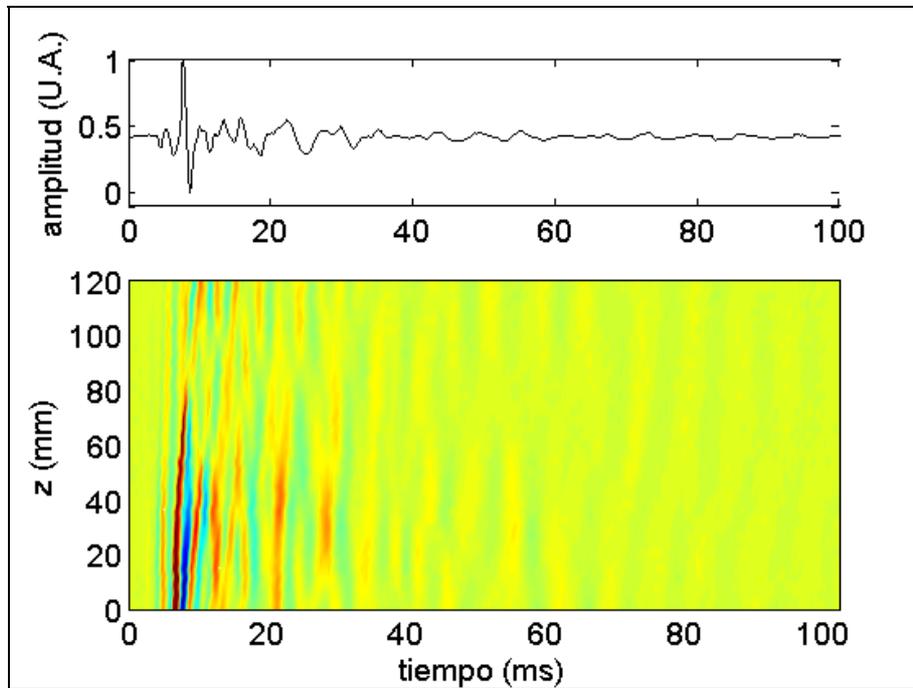


Figura 31 (a) Señal recibida por el sensor acústico cuando la excitación es un ciclo de sinusoide de 60 Hz. En la figura se observa que la duración total de la señal es mucho mayor al pulso inicial. (b) Señales recibidas por el sensor acústico cuando la fuente varía su posición a lo largo de una recta sobre la superficie de la muestra mientras el sensor se mantiene fijo. Esta matriz es equivalente al sismograma obtenido por interferometría speckle acústica.

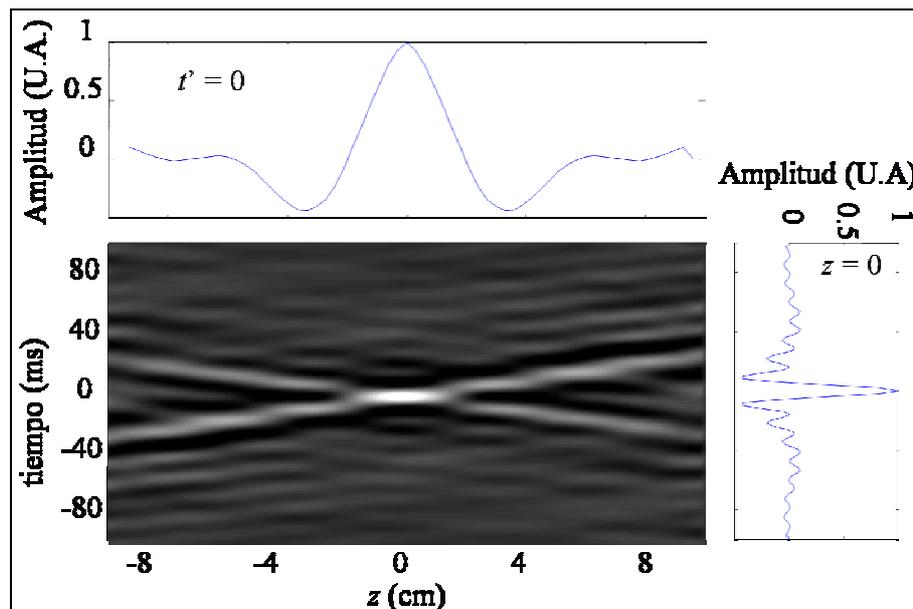


Figura 32 Diagrama de focalización espacio-temporal en un gel de agar-gelatina. Arriba se muestra la focalización espacial en $t' = 0$ y a la derecha la focalización temporal en $z = 0$.

Para verificar la validez de este método hemos realizado medidas sobre dos geles diferentes contruidos con diferente proporción de agar-gelatina. En el gel que llamaremos **A** utilizamos una mezcla de 1% de agar y 2 % de gelatina. La velocidad de la onda de corte medida por elastografía transitoria es $c_s^A = 2.21 \pm 0.04$ m/s y por lo tanto el módulo de Young $Y = 3\rho c_s^2 = 14.5$ KPa. En el segundo gel (**B**), utilizamos 1.5 % de agar y 4 % de gelatina en la mezcla. La velocidad hallada es $c_s^B = 4.01 \pm 0.06$ m/s y por lo tanto $Y = 48$ KPa. Por último decidimos también utilizar el método para evaluar la elasticidad en un trozo de queso tipo “parmesano” en el marco del proyecto PDT “Mejora del control del proceso de fabricación y calidad de queso por aplicación de técnicas ultrasónicas”. Las medidas de esta sección fueron realizadas conjuntamente con Javier Brum.

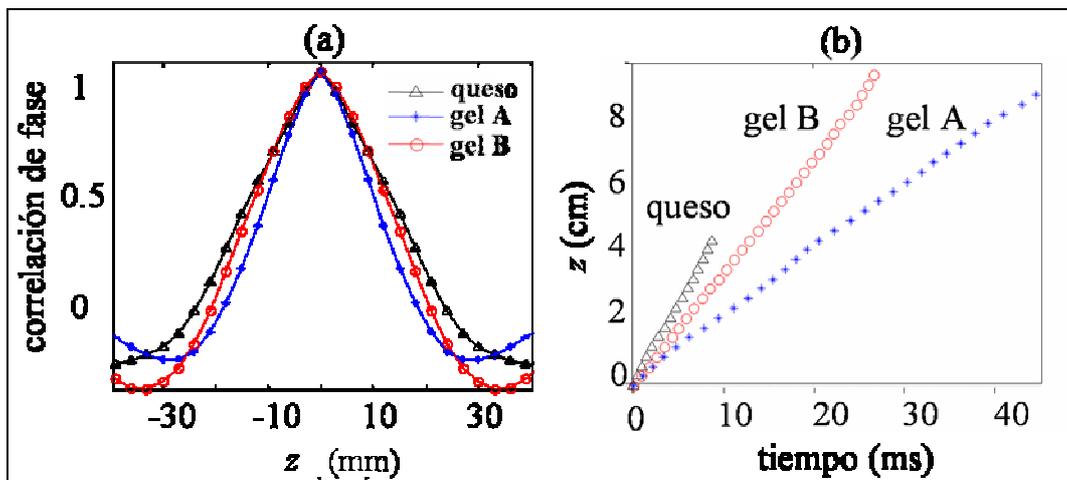


Figura 33 (a) Focalización espacial en dos geles de agar-gelatina y en una muestra de queso. El ancho a mitad de altura en cada caso es diferente indicando que la elasticidad de cada muestra es diferente. (b) Medida de la velocidad de fase para cada muestra. La pendiente es diferente en cada caso lo que muestra que la velocidad en el queso es mayor que en los geles.

En el caso particular de la muestra de queso la medida de superficie es útil ya que la señal de ultrasonido al interior del queso se atenúa muy rápidamente y además el speckle en el interior es muy débil o nulo (debido a la ausencia de difusores internos). Por esta razón la medida de elastografía por retorno temporal es el único método no invasivo y de bajo costo para evaluar la elasticidad promedio en este tipo de muestra (a diferencia por ejemplo de la elastografía por resonancia magnética o de los métodos invasivos clásicos como Instron o Warner-Blatzer⁽³⁴⁾). En la figura 33 se muestra el resultado obtenido para cada una de las experiencias, es decir, gel **A**, gel **B** y queso parmesano. El ancho focal a mitad de altura para cada muestra es 14.6, 23 y 48 mm respectivamente. Multiplicando el doble de este valor por la frecuencia máxima de la banda utilizada en cada caso (80, 80 y 100 Hz) obtenemos la velocidad de la onda de superficie en cada medio: $c_R = 2.3, 3.7$ y 9.6 m/s respectivamente. Como vimos en el capítulo 1, la relación entre la velocidad de la onda de Rayleigh y la velocidad de la onda de corte en un sólido blando es $c_R \cong 0.95 c_s$. Haciendo uso de esta relación llegamos a que el módulo de Young Y en cada una de las muestras

es $Y = 15.6, 41$ y 276 KPa respectivamente. Comparando estos resultados con los que se obtuvieron por elastografía transitoria en el caso de los geles vemos que si bien existen diferencias los valores son similares mostrando la concordancia entre los dos métodos.

IV. CONCLUSION DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos mostrado una manera alternativa y original de medir en forma no invasiva la elasticidad en sólidos elásticos blandos. El método propuesto combina dos áreas de la acústica en pleno desarrollo a nivel de investigación en varios laboratorios: la elastografía mediante la interferometría speckle acústica por un lado con el retorno temporal de ondas elásticas por otro. Esta investigación muestra por primera vez el proceso de retorno temporal en el volumen de un sólido elástico. Desde el punto de vista físico esta posibilidad permite mostrar ciertas diferencias entre el retorno temporal de un campo escalar (retorno temporal en acústica) y un campo vectorial. Entre ellas destacamos que la focalización no es isotrópica en una cavidad cerrada perfecta de retorno temporal en un sólido elástico. El ancho focal depende de la dirección de observación respecto a la dirección original de la fuente. En segundo lugar hemos mostrado cómo a partir del retorno temporal de términos de campo lejano se da nacimiento a una onda de corte polarizada según el eje, es decir, un término de campo próximo. Este término sin embargo no permite una mejora de resolución espacial a diferencia del campo próximo de ondas evanescentes.

Desde el punto de vista de la aplicación, la elastografía por retorno temporal presenta una serie de ventajas respecto a los otros métodos basados en ultrasonido que se pueden encontrar en la literatura. Entre estas ventajas destacamos la independencia del resultado respecto a la fuente (forma, posición y función de excitación) así como el uso de toda la información contenida en el campo elástico. En particular el método no requiere realizar ninguna hipótesis adicional sobre las componentes del campo no accesibles en la medida. Estas ventajas permiten que la aplicación *in vivo* sea relativamente sencilla aunque es necesario profundizar la investigación para tener en cuenta características específicas de algunos tejidos biológicos (anisotropía, viscosidad, no linealidad).

En las aplicaciones de retorno temporal es sabido que la atenuación de la onda rompe la invariancia de la solución a la ecuación de ondas bajo la transformación $t \rightarrow -t$. En nuestro caso particular su efecto es el de reducir el tiempo de reverberación del campo en la cavidad. Sin embargo hemos mostrado cómo el promedio espacial de la focalización ayuda a compensar en parte esta pérdida de información ya que es equivalente al empleo de múltiples fuentes en el proceso de retorno temporal. La contraparte de este tratamiento es que sólo es posible acceder a un valor promedio de la elasticidad. Sin embargo la elaboración de un mapa elástico de la muestra requiere acceso a la información local. Este es un punto que dejamos abierto en este trabajo aunque creemos

que existen soluciones más o menos sencillas a este problema. Dada la independencia del resultado con la función de excitación una posibilidad en aplicaciones *in vivo* sería utilizar las fuentes de ruido internas del cuerpo (ruido muscular, ruido gastrointestinal o del sistema cardiovascular) para analizar el campo de retorno temporal. Esta posibilidad ya ha sido planteada por otros autores.

Por último hemos mostrado que el método de elastografía por retorno temporal puede hacerse con una electrónica bajo costo y además es aplicable en medios donde no hay speckle acústico como en la muestra de queso parmesano utilizada en experiencias de este capítulo.

Sin dudas a partir de este trabajo se abren muchas posibilidades de investigación futura en el tema del retorno temporal de ondas elásticas y su aplicación a la medida de la elasticidad. En particular algunas preguntas quedan pendientes a partir de este trabajo: ¿Es posible cuantificar las pérdidas por absorción?, ¿Cuál es el efecto de las inhomogeneidades en las medidas?, ¿Cuál es el efecto de la anisotropía del medio de propagación en el proceso de retorno temporal?

REFERENCIAS

- ¹ M. Fink, "Time-reversal of ultrasonic fields part I: Basic principles", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control* **39** (5), 555-566, (1992).
- ² F. Wu, J.L. Thomas, M. Fink, "Time-reversal of ultrasonic fields part II: Experimental results", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control* **39** (5), 567-578, (1992).
- ³ D. Cassereau, M. Fink, "Time-reversal of ultrasonic fields part III: Theory of the closed time-reversal cavity", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control* **39** (5), 579-592, (1992).
- ⁴ F. Wu, M. Fink, R. Mallart, J. L. Thomas, N. Chakroun, D. Cassereau, C. Prada, "Optimal focusing through aberrating media: A comparison between time-reversal mirror and time delay correction techniques", *Proc. IEEE Ultrason. Symp.*, (1991).
- ⁵ P. Morse K. Ingard, "Theoretical acoustics", Princeton University Press, New Jersey, (1986).
- ⁶ P. Stephanishen, "Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle", *J. Acoust. Soc. Am.* **49**, 1639-1648, (1971).
- ⁷ J-L. Thomas, "Etude des miroirs à retournement temporel : Application à la focalisation des ondes ultrasonores et à la lithotritie", Tesis de Doctorado en Física, especialidad: Acústica física, Université Paris VI.
- ⁸ A. Ishimaru, "Wave propagation and scattering in random media", Oxford University Press, (1997).
- ⁹ C. Draeger, M. Fink, "One channel time-reversal of elastic waves in a 2D silicon cavity", *Phys. Rev. Letters*, **79** (3), 407-410, (1997).
- ¹⁰ N. Pérez, "Inversión temporal de ondas ultrasónicas en cavidades acústicas", Tesis de Doctorado en Física, especialidad: acústica, Universidad de la República-PEDECIBA (2006).
- ¹¹ C. Dreager, J. Aime, M. Fink, "One channel time-reversal in chaotic cavities: Experimental results", *J. Acoust. Soc. Am.* **105** (2), 618-625, (1999).
- ¹² J. de Rosny, "Milieux reverberantes et reversibilité", Tesis de Doctorado en Física especialidad campos, partículas y materia, Universidad de París VI, (2000).
- ¹³ N. Quieffin, S. Catheline, R. Ing, M. Fink, "Real-time focusing using an ultrasonic one channel time-reversal mirror coupled to a solid cavity", *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (5), 1955-1960, (2004).
- ¹⁴ K. Aki, P. Richards, "Quantitative seismology: Theory and methods", W. H. Freeman & Co. San Francisco, (1980).
- ¹⁵ N. Pérez, C. Negreira, G. Montaldo, "Spatial focalization using temporal inversion in chaotic cavities: Influence of surface roughness", *Proceedings of the 2005 IEEE Ultrasonic Symposium*, (2005).
- ¹⁶ C. Draeger, D. Cassereau, M. Fink, "Theory of the time-reversal process in solids", *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (3), 1289-1295, (1997).
- ¹⁷ A. Sutin, J. Tencate, P. Johnson, "Single-channel time-reversal in elastic solids", *J. Acoust. Soc. Am.* **116** (5), 2779-2784, (2004).
- ¹⁸ S. Catheline, N. Benech, J. Brum, C. Negreira, "Time-reversal of elastic waves in soft solids", *En revisión Phys. Rev. Letters*.
- ¹⁹ N. Benech, "Elastografía ultrasonora de medios viscoelásticos de ondas de cizalla de baja frecuencia", Tesis de Maestría en Física especialidad: acústica, Universidad de la República-PEDECIBA, (2004).
- ²⁰ R. Ing, N. Quieffin, S. Catheline, M. Fink, "In solid localization of finger impacts using acoustic time-reversal process", *Appl. Phys. Letters*, **87** (204104), 1-3, (2005).
- ²¹ A. Paul, M. Campillo, L. Margerin, E. Larose, A. Derode, *J. Geophys Res* **100**, (2005).
- ²² N. Benech, S. Catheline, J. Brum, C. Negreira, "Elasticity assessment in soft solids by time-reversal of shear waves", *Proceedings of the 2007 IEEE International Ultrasonics Symposium*, New York, (2007).
- ²³ E. de Castro, C. Morandi, "Registration of rotated and translated images using finite Fourier Transforms", *IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell.*, **9** (5), 700-703, (1987).
- ²⁴ N. Benech, S. Catheline, J. Brum, T. Gallot, C. Negreira, "Time-reversal elastography: shear elasticity assessment in soft solids", *En revisión J. Acoust. Soc. Am.*
- ²⁵ K. Aki, "Space and time spectra of stationary stochastic waves with special reference to microtremors", *Bull Earthquake Res Inst Univ Tokio*, **25**, 415-457, (1957).

- ²⁶ S. Yon, M. Tanter, M. Fink, "Sound focusing in rooms: The time-reversal approach", *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (3), 1533-1543, (2003).
- ²⁷ S. Stearns, R. David, "Signal processing algorithms", Prentice-Hall Inc, New Jersey, (1988).
- ²⁸ D. Cassereau, M. Fink, "Focusing with plane time-reversal mirrors: An efficient alternative to closed cavities" *J. Acoust. Soc. Am* **94** (4), 2373-2386, (1993).
- ²⁹ K. Sabra, S. Conti, P. Roux, "Passive in vivo elastography from skeletal muscle noise", *Appl. Phys. Letters*, **90** (194101), (2007).
- ³⁰ T. Gallot, N. Benech, J. Brum, S. Catheline, C. Negreira, "Soft tissues elasticity using time-reversal elastography", *Proceedings of the 6th International Conference on Biological Physics, ICBP*,(363), Montevideo (2007).
- ³¹ A. Sarvazyan, O. Rodenko, S. Swanson, J. Flowkers, Y. Emilianov, "Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnosis", *Ultrasound Med. & Biol*, **24** (9), 1419-1435, (1998).
- ³² J-L. Gennisson, S. Catheline, S. Chafai, M. Fink, "Transient elastography in anisotropic medium : Application to the measurement of slow and fast shear wave speeds in muscles", *J. Acoust. Soc. Am.*, **114** (1), 536-541, (2003).
- ³³ J. Brum, S. Catheline, N. Benech, C. Negreira, "Shear elasticity estimation from surface waves: A time-reversal approach", en revisión *Appl. Phys. Letters*.
- ³⁴ Estos nombres se refieren a ensayos destructivos de muestras. Instron es el nombre comercial de equipamientos para ensayos de compresión, tracción, fricción, plegado y cizallamiento (ver <http://instron.com.es>). El método de Warner/Blatzer se refiere a medidas destructivas de cizallamiento a partir del corte del material con una cuchilla a velocidad constante. El fabricante también es Instron (entre otras empresas).

CAPITULO 3

MONITOREO DE CAMBIOS DE TEMPERATURA POR ELASTOGRAFIA

I. INTRODUCCIÓN

La elastografía tiene una variada gama de aplicaciones desde el diagnóstico de patologías en medicina hasta el control de calidad en alimentos como carne o productos lácteos. Más recientemente se ha identificado a la elastografía como un potencial candidato para monitorear los efectos producidos por tratamiento térmico con ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU por sus siglas en inglés)⁽¹⁾. Esta modalidad de terapia ultrasonora consiste en focalizar la energía acústica en la región de interés y producir un aumento súbito de la temperatura con el objetivo de producir necrosis celular. En un caso típico la temperatura en la zona focal alcanza los 60 °C en 1-3 s. La ventaja de este procedimiento frente a otros métodos de tratamiento no invasivo (como la radioterapia o la quimioterapia) es que el límite entre el volumen de tejido tratado y el tejido sano es muy estrecho minimizando así los efectos no deseados del tratamiento. Para capitalizar esta ventaja es necesario contar con un método de imagen que permita conocer la zona de tejido dañada a medida que avanza el tratamiento. La técnica de pulso-eco convencional no es adecuada para este fin ya que la difusión del sonido por el tejido tratado no es significativamente diferente a la del tejido sano. La porción de tejido que fue sometido a altas temperaturas presenta dos características que pueden ser útiles a la hora de elaborar métodos de imagen alternativos. En primer lugar, la absorción del sonido es significativamente mayor que en el tejido no tratado. Al momento un área activa de investigación son los métodos de elaboración de imágenes basados en esta propiedad. En segundo lugar el tejido “quemado” es más rígido que el entorno y por lo tanto la elastografía es una herramienta potencialmente útil en este caso.

Pensando en este tipo de aplicaciones nos proponemos en este capítulo estudiar los efectos de la temperatura en nuestro método de investigación (interferometría speckle). Las variaciones de temperatura afectan la elasticidad del medio de modo que tanto las ondas de corte como las de compresión sufren modificaciones. Como nuestro método elastográfico de investigación está basado en la propagación de ondas de compresión, debemos tener en cuenta estas modificaciones para poder estimar la variación de la elasticidad local con la temperatura. Los resultados obtenidos, especialmente en elastografía transitoria, son un aporte en esta materia ya que permiten seguir la evolución de la elasticidad a nivel local a medida que cambia la temperatura. Los reportes previos que podemos hallar en la literatura muestran variaciones de la elasticidad a nivel local entre medidas anteriores y posteriores al tratamiento térmico pero no la evolución intermedia.

II. EFECTOS DE LA TEMPERATURA EN LA ELASTICIDAD

En forma genérica, la dependencia de los módulos elásticos de un sólido con la temperatura no se deriva en forma sencilla a partir de principios físicos básicos. El problema consiste en expresar la energía de interacción entre los constituyentes del sólido y su dependencia con la temperatura. En la literatura se pueden encontrar algunos modelos que describen esta interacción a partir de modelos para estructuras periódicas⁽²⁾. Las expresiones obtenidas ajustan bien con datos experimentales para algunos materiales cristalinos, pero distan de ser leyes universales ya que en estos mismos trabajos se mencionan materiales que no obedecen el comportamiento descrito. Además la presencia de defectos en la red alteran de forma significativa estas predicciones. El problema se torna aun más complejo en el caso de materiales amorfos como cadenas de polímeros o tejidos biológicos por lo que una descripción detallada es inviable. Modelos sencillos como el de Flory-Huggins⁽³⁾ resultan en expresiones que describen el comportamiento de polímeros en forma correcta pero en términos cualitativos. Por lo tanto las investigaciones en esta materia están fuertemente basadas en datos experimentales.

En nuestro caso estamos interesados en evaluar los efectos de la temperatura en la elasticidad a la escala del milímetro. Por esta razón haremos aquí una descripción genérica de un sólido termoelástico desde el punto de vista de la termodinámica de la deformación. Se define un sólido termoelástico como aquel en el que las variables de estado de la energía libre F son la deformación e_{ij} y la temperatura T , es decir⁽⁴⁾:

$$F = F(e_{ij}, T) \quad (1)$$

Podemos obtener una descripción del sólido para pequeñas deformaciones a partir de un desarrollo de la energía libre en torno a una configuración de referencia $T_0, e_{ij} = 0$:

$$\begin{aligned} F(e_{ij}, T) = & F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_0 e_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2 \\ & + \frac{1}{2} e_{kl} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} \right)_0 e_{ij} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \right)_0 (T - T_0) e_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

donde $()_0$ expresa que la cantidad en cuestión es evaluada en el estado de referencia. La ecuación constitutiva del sólido termoelástico (que relaciona el tensor de esfuerzos con la deformación interna) queda expresada como⁽⁵⁾:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} \right)_0 e_{kl} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \right)_0 (T - T_0) + \dots \quad (3)$$

Si asumimos que el esfuerzo es nulo en el estado de referencia $(\partial F / \partial e_{ij})_0 = 0$ entonces la expresión anterior se reduce a:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + \beta_{ij}(T - T_0) \quad (4)$$

en donde hemos usado las definiciones:

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \right)_0 \quad (5)$$

$$\beta_{ij} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \right)_0$$

Como el tensor de módulos elásticos C_{ijkl} es definido positivo siempre es posible determinar la cantidad α_{ij} de la ecuación⁽⁵⁾:

$$C_{ijkl}\alpha_{kl} = \beta_{ij} \quad (6)$$

podemos entonces reescribir la ecuación (4) como:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}(e_{kl} + e_{kl}^0); \quad e_{kl}^0 = \alpha_{kl}(T - T_0) \quad (7)$$

Vemos que el término e_{kl}^0 representa una deformación adicional del medio debido al cambio de temperatura. Se trata del llamado tensor de deformación térmica y por lo tanto α_{ij} es el tensor de coeficientes de expansión térmica.

En un medio isotrópico el tensor de módulos elásticos y el de expansión térmica se reducen a:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé y α el coeficiente de expansión térmica. Sustituyendo (8) en (7) y usando la expresión explícita del tensor de deformaciones e_{ij} en términos de los desplazamientos encontramos la ecuación constitutiva de un sólido termoelástico e isotrópico en primera aproximación:

$$\tau_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + (\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \quad (9)$$

Podemos obtener ahora la ecuación de ondas del sólido termoelástico aplicando la relación fundamental de la dinámica:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial(T - T_0)}{\partial x_i} \quad (10)$$

Al igual que en el capítulo 1, podemos estudiar la propagación de ondas irrotacionales y de divergencia nula. Tomando la divergencia y el rotor en esta expresión encontramos en ese orden:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \alpha(T - T_0) \right) \right) \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \varepsilon_{ijk} \right) &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \varepsilon_{ijk} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Comparando estas expresiones con las análogas para un sólido perfectamente elástico (ecuaciones (6) y (8) del capítulo 1) concluimos que las variaciones de temperatura respecto al estado de referencia solo afectan a la propagación de la onda irrotacional, es decir, a la onda de compresión. La expresión de la ecuación de ondas para el término de divergencia nula (ondas de corte) no se ve alterada por las variaciones de temperatura. En consecuencia la velocidad de la onda de corte no cambia respecto a la configuración de referencia. Este resultado deriva del hecho de que según la formulación del sólido termoelástico que hemos brindado, el cambio de temperatura solamente produce una variación de volumen en la muestra, pero no cambios de forma. Esto se puede ver en la primera ecuación dada en (11) donde el efecto del cambio de temperatura aparece como un término adicional a la divergencia de los desplazamientos, es decir a la variación de volumen. Para encontrar variaciones en la velocidad de corte con la temperatura debemos recurrir a una descripción no lineal del sólido, introduciendo derivadas de orden superior en el desarrollo de la energía libre.

Podemos mantener una descripción de un sólido termoelástico lineal generalizando la ecuación constitutiva hallada en (4). Desde el punto de vista de la termodinámica, la única restricción impuesta por la segunda ley es que el tensor de módulos elásticos C_{ijkl} debe ser definido positivo⁽⁴⁾. De modo que es posible describir un sólido termoelástico en forma más general manteniendo la forma de la ecuación constitutiva pero permitiendo que los tensores involucrados dependan explícitamente de la temperatura⁽⁵⁾:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}(T)e_{kl} + \beta_{ij}(T)(T - T_0) \quad (12)$$

La forma específica de esta dependencia debe determinarse experimentalmente en cada caso, dependiendo de las características del material bajo estudio. De este análisis general de un sólido termoelástico podemos adelantar que las ondas de corte son menos “sensibles” a los cambios de temperatura que las ondas de compresión. La posibilidad de detectar variaciones en el módulo de corte con la temperatura dependerá entonces del material, la diferencia de temperatura alcanzada y de la precisión del método utilizado para medirla. En las siguientes secciones de este capítulo mostraremos resultados experimentales sobre el efecto de la temperatura en ondas de compresión y de corte en geles de agar-gelatina.

III. ESTIMACION DE TEMPERATURA POR ULTRASONIDO

III.1 Modelo

Las señales ecográficas de speckle acústico forman la base de los métodos elastográficos estudiados en esta tesis (elastografía transitoria y elastografía por retorno temporal). Por lo tanto empezaremos el capítulo por discutir los efectos de la temperatura sobre la propagación del sonido. Mostraremos también cómo es posible relacionar estos cambios con la temperatura de modo de obtener un método para medirla en forma no invasiva.

Como se mostró en la sección anterior, la variación de temperatura produce dos fenómenos físicos: la deformación del medio y un cambio en la velocidad de propagación de las ondas elásticas. En particular la velocidad de la onda de compresión es sensible a pequeñas variaciones de la temperatura. Estos hechos son los que permiten estimar la temperatura en forma no invasiva mediante ultrasonido. Como mencionamos en el capítulo 1, la señal ecográfica recibida en tejidos biológicos se compone de la suma de las reflexiones en las inhomogeneidades internas. Estas pueden ser de dimensiones mucho mayor a la longitud de onda (cuando se pasa de un órgano a otro por ejemplo) o de dimensiones comparables o incluso menores a la misma dando origen a una señal de speckle acústico. Debido a la variación de temperatura se produce un movimiento real (por la dilatación) y aparente (por la variación de la velocidad) de los difusores lo que provoca a su vez una modificación en la firma acústica de la señal de speckle. Al igual que en elastografía, la correlación entre señales de speckle consecutivas permite medir el corrimiento temporal de los difusores. Para poder evaluar cuantitativamente los cambios de temperatura debemos relacionar el corrimiento temporal medido en la experiencia con la variación de temperatura. Se ha propuesto en la literatura⁽⁶⁾ un modelo que relaciona linealmente estas cantidades y que describiremos más adelante

III.1.A Los tres tiempos

En este capítulo nos referiremos a tres variables relacionadas con el tiempo, que se miden en escalas bien distintas entre sí y que describiremos a continuación para evitar confusiones. En primer lugar llamaremos t al tiempo de vuelo del pulso ultrasonoro dentro de la muestra que está estrechamente vinculado a la coordenada z , es decir a la profundidad de observación. Como la velocidad del sonido en nuestras muestras es de ~ 1500 m/s y las distancias involucradas del orden de ~ 10 cm., este tiempo está en la escala de $\sim 10^{-6}$ s. En segundo lugar llamaremos τ al tiempo que controla la experiencia de cambios de temperatura. En general la difusión del calor es lenta en nuestras muestras por lo que una experiencia puede durar varios segundos o inclusive minutos. La escala del tiempo τ es por lo tanto del orden de ~ 1 s. Finalmente llamaremos t_e al tiempo que mide la duración de la experiencia elastográfica. Este tiempo está relacionado con el tiempo de vuelo de las ondas de corte. Para las dimensiones de trabajo de nuestras muestras y las velocidades involucradas este tiempo está en una escala de $\sim 10^{-3}$ s, intermedia entre las otras dos. En las

experiencias que presentaremos más adelante en este capítulo, están involucrados estos tres tiempos por lo que su definición en este momento ayuda a comprender los diferentes fenómenos que describiremos más adelante en el capítulo.

III.1.B Relación entre tiempo de vuelo t y cambio de temperatura ΔT

Supondremos que en el instante inicial $\tau = 0$, la temperatura en el medio es homogénea e igual a cierto valor de referencia T_0 . En estas circunstancias el tiempo de vuelo t que le toma al pulso de ultrasonido en propagarse hasta cierta distancia z del transductor y regresar se expresa como:

$$t(z) = 2 \int_0^z \frac{d\xi}{c_p(\xi, T_0)} \quad (13)$$

donde $c_p(\xi, T_0)$ es la velocidad del sonido en la posición ξ y a temperatura T_0 . Si en el tiempo $\tau = \tau_1$ en cierta zona del medio se produce un cambio de temperatura de T_0 a $T_0 + \Delta T(\xi)$, el tiempo de vuelo se modifica respecto al anterior. Su nuevo valor depende por un lado de la variación en la velocidad del sonido con la temperatura:

$$t_{1c}(z) = 2 \int_0^z \frac{d\xi}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} \quad (14)$$

Por otro lado la variación de temperatura produce una deformación en el medio cuyo efecto relevante en nuestras experiencias es el desplazamiento en la dirección del haz ultrasonoro. Usaremos por tanto el coeficiente de dilatación lineal dado por:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \Big|_P \right)_{T_0} \quad (15)$$

donde L_0 indica cierta longitud del medio a $T = T_0$ y el subíndice P indica que la cantidad se mide a presión constante o en nuestro caso en dilatación libre de esfuerzos. El movimiento de los difusores causado por la expansión térmica depende de las condiciones de borde, de la posición del difusor respecto al foco térmico y de la estructura del medio. En tejidos biológicos por ejemplo, es una superposición compleja de la expansión térmica de los diferentes componentes. Esta expansión puede incluso no ser isotrópica dependiendo de la organización celular del tejido⁽⁷⁾. Si como primera aproximación suponemos un medio homogéneo e isotrópico que se expande libremente entonces los difusores se moverán en ambas direcciones desde el foco térmico. La zona ubicada entre el transductor y el foco se moverá hacia el transductor mientras que la zona posterior se moverá alejándose del transductor. Los difusores ubicados en la posición del foco térmico z_f no se desplazan. Teniendo en cuenta esta consideración y según la definición dada en (15), la contribución de la expansión térmica al corrimiento temporal viene dada por:

$$t_{1d}(z) = 2 \int_{z_f}^z \frac{\alpha \Delta T(\xi)}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} d\xi \quad (16)$$

Como la variación de temperatura $\Delta T(z)$ tiende a T_0 a medida que la distancia $|z - z_f|$ es mayor, el retardo temporal $t_{1d}(z)$ alcanza un valor máximo (o mínimo) a cierta distancia del foco térmico. Si las condiciones de borde son otras, la ecuación sigue siendo válida pero con z_f reemplazado por una nueva referencia fija. Teniendo en cuenta los dos factores anteriores el tiempo de vuelo t_1 en esta nueva configuración estará dado por:

$$t_1(z) = t_{1c}(z) + t_{1d}(z) = 2 \int_0^z \frac{d\xi}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} + 2 \int_{z_f}^z \frac{\alpha \Delta T(\xi)}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} d\xi \quad (17)$$

La diferencia entre este valor y el tiempo de vuelo en el estado de referencia es:

$$\delta t = t_1 - t_0 = 2 \int_{z_f}^z \frac{\alpha \Delta T(\xi)}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} + 2 \int_0^z \left[\frac{1}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi))} - \frac{1}{c_p(\xi, T_0)} \right] d\xi \quad (18)$$

Diferenciando esta expresión respecto a z obtenemos:

$$\frac{\partial(\delta t)}{\partial z} = 2 \left[\frac{1 \pm \alpha \Delta T(z)}{c_p(z, T_0 + \Delta T(z))} - \frac{1}{c_p(z, T_0)} \right] \quad (19)$$

donde el signo que precede a α depende si la contribución es hacia (-) o alejándose (+) del transductor. Esta igualdad es la relación que buscábamos, es decir la que relaciona el corrimiento temporal de las señales de speckle δt con el cambio de temperatura ΔT . Sin embargo no podemos usar directamente la ecuación (19) para medir el cambio de temperatura debido a la presencia de la función $c(z, T_0 + \Delta T(z))$ que como se indica es dependiente de la distribución de temperatura $\Delta T(z)$ (que no conocemos). Para saltar este hecho podemos, en una primera aproximación, suponer una dependencia lineal entre la velocidad del sonido y la temperatura:

$$c_p \cong c_0 + \left. \frac{\partial c_p}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T = c_0 (1 + \chi \Delta T) \quad (20)$$

donde c_0 es la velocidad a la temperatura de referencia y hemos definido $\chi = 1/c_0 (\partial c_p / \partial T)_{T_0}$. Esta aproximación es válida dependiendo de la temperatura de referencia T_0 y del valor del cambio ΔT . En algunas experiencias *in vitro* con tejido muscular se ha mostrado que el rango de validez de la aproximación es del orden de 10-15 °C⁽⁸⁾. Sustituyendo (20) en (19) encontramos:

$$\frac{\partial(\delta t)}{\partial z} = \frac{2}{c_0} \frac{(\alpha(z) - \chi) \Delta T}{1 + \chi \Delta T} \quad (21)$$

donde hemos usado $\alpha(z)$ para indicar que el sentido de la expansión térmica depende de la posición z respecto a la referencia fija z_f . Valores típicos de estos parámetros en tejidos son $c_0 \sim 1500$ m/s, $\alpha \sim 0.1 \times 10^{-3}$ y $\partial c/\partial T \sim 1-5$ m/s°C. Por lo tanto $\chi \sim 10^{-3} \ll 1$. Teniendo en cuenta estos datos podemos avanzar un poco más en la aproximación y sustituir $(1+\chi\Delta T)^{-1}$ por $(1-\chi\Delta T)$. Despreciando los términos de segundo orden $\alpha\chi\Delta T^2$ encontramos finalmente:

$$\Delta T \cong \frac{c_0}{2} \frac{1}{(\alpha(z) - \chi)} \frac{\partial(\delta t)}{\partial z} = \Gamma \frac{\partial(\delta t)}{\partial z} \quad (22)$$

donde hemos definido $\Gamma = c_0/2 (\alpha-\chi)^{-1}$. Esta expresión muestra que el cambio de temperatura es proporcional a la derivada espacial del corrimiento temporal δt . Notemos que dependiendo de la relación $(\alpha(z)-\chi)$ el valor de Γ puede ser positivo o negativo cuando se produce un aumento de temperatura. El corrimiento δt se puede medir a través de los métodos de correlación de señales de speckle descrito para la elastografía. Por lo tanto la expresión permite cuantificar el cambio de temperatura en forma no invasiva. Sin embargo su aplicación es limitada ya que en la situación más general el valor de Γ es desconocido a priori.

III.2 Resultados experimentales

En esta sección realizamos experiencias que permiten poner en práctica la estimación no invasiva de temperatura por ultrasonido. También nos proponemos estudiar experimentalmente la validez de la ecuación (22). Las fuentes necesarias para aplicaciones de cirugía acústica requieren la potencia suficiente como para aumentar en $\sim 30 - 40$ °C la temperatura en el foco en tiempos del orden de 1-3 segundos de modo que la intensidad acústica es del orden de 1.5×10^3 W/cm². Estos niveles de intensidad acústica se logran con superficies emisoras de ~ 50 cm² (normalmente con un arreglo múltiple de cerámicas piezoeléctricas de alta potencia) que consumen una potencia del orden de 200 W. No disponemos en nuestro laboratorio fuentes capaces de lograr estos niveles de intensidad. Sin embargo, en esta tesis estamos interesados sobre los efectos del cambio de temperatura en las señales de speckle acústico y no sobre la forma específica de generar el calor. Por lo tanto podemos utilizar cualquier fuente que produzca un gradiente local de temperatura en el medio. En este trabajo utilizamos una resistencia eléctrica con este objetivo.

El montaje experimental utilizado se muestra esquemáticamente en la figura 1. La muestra es un gel de agar-gelatina como los utilizados en elastografía. Para generar un gradiente de temperatura al interior del gel, colocamos una resistencia eléctrica de 10 Ω con forma cilíndrica de 4 mm de diámetro y 8 mm de largo. Para evitar que su presencia afecte el campo acústico del transductor, colocamos a este último desplazado sobre el eje x de modo que exista una cierta distancia $d \sim 10$ mm entre el haz de ultrasonido y la resistencia.

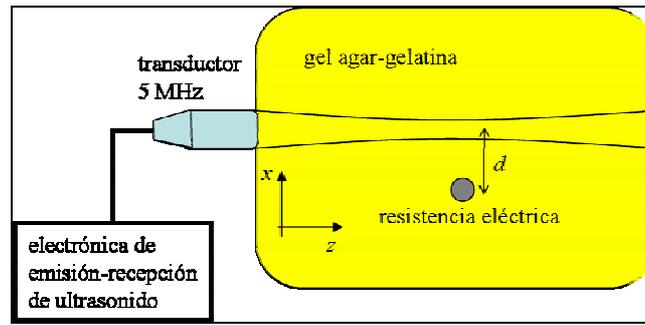


Figura 1 Montaje experimental utilizado para medir cambios de temperatura en forma no invasiva en el volumen de un gel de agar-gelatina. La resistencia eléctrica se utiliza para generar un gradiente de temperatura al interior del gel mientras se adquieren las señales ecográficas.

La electrónica de emisión-recepción (CORELEC) fue ajustada para adquirir 60 señales ecográficas de 2048 puntos cada una muestreadas a 40 MHz en torno a la posición de la resistencia ($z = 38 \text{ mm}$) con un intervalo de 1 segundo entre sí. La resistencia eléctrica se alimenta con una fuente de tensión continua de 10 V de modo que la potencia disipada en la superficie es de 10 W. La fuente se enciende en el tiempo $\tau = 8 \text{ s}$ y se apaga en $\tau = 26 \text{ s}$. Estas señales se someten al mismo tratamiento de correlación local utilizado en elastografía transitoria con la diferencia que esta vez se calcula el corrimiento total, es decir, el corrimiento temporal respecto a la señal inicial.

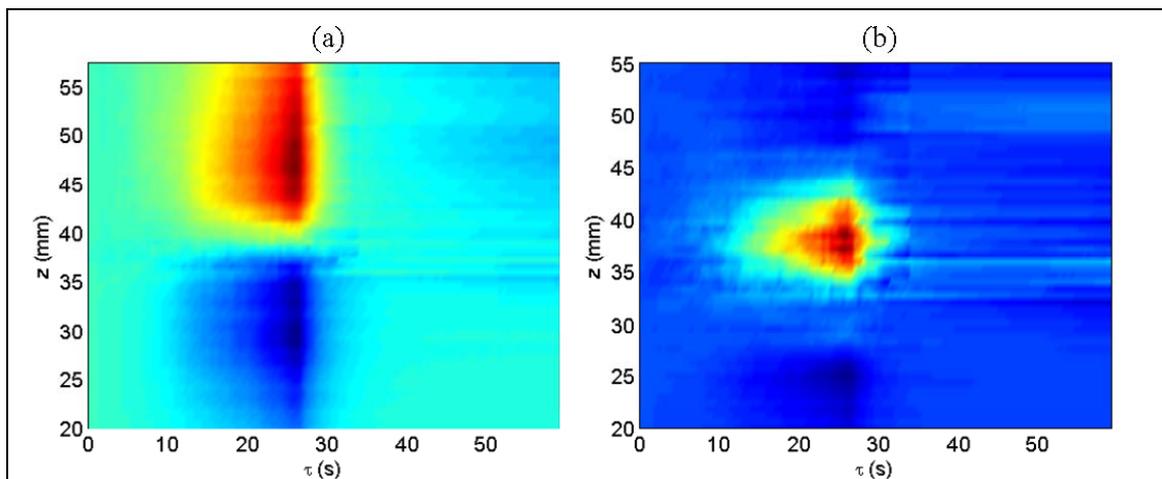


Figura 2 (a) Matriz de corrimiento temporal en función de z y τ medido a partir de la correlación de las señales de speckle acústico. La dependencia del corrimiento con la distancia z al transductor muestra que la expansión térmica juega un rol importante en nuestras muestras de agar gelatina. (b) Derivada espacial del corrimiento temporal. Un análisis cualitativo muestra que el resultado refleja los cambios de temperatura producidos en el gel mientras la resistencia eléctrica está activa entre $\tau = 8 \text{ s}$ y $\tau = 26 \text{ s}$

La figura 2(a) muestra el corrimiento temporal en función de z y τ mientras que la figura 2(b) muestra la derivada con respecto a z . Aplicamos para ello el algoritmo de mínimos cuadrados segmentado con $N_e = 5$ descrito en el capítulo 1. Observamos que el corrimiento temporal es negativo en la zona entre el transductor ($z = 0 \text{ mm}$) y la resistencia ($z = 38 \text{ mm}$) y positivo más allá de esta posición. Este resultado indica que para nuestros geles de agar gelatina la expansión térmica juega un rol importante haciendo que el valor de Γ sea positivo. Este no es el caso en la mayoría de

los tejidos biológicos donde la diferencia $\alpha-\chi$ es en general negativa. Una excepción a esto lo constituye el tejido adiposo donde la velocidad del sonido decrece con la temperatura y por lo tanto χ es negativo haciendo que Γ sea positivo. Por lo tanto en tejidos donde el contenido graso es relativamente importante, la “constante” Γ puede variar con la posición.

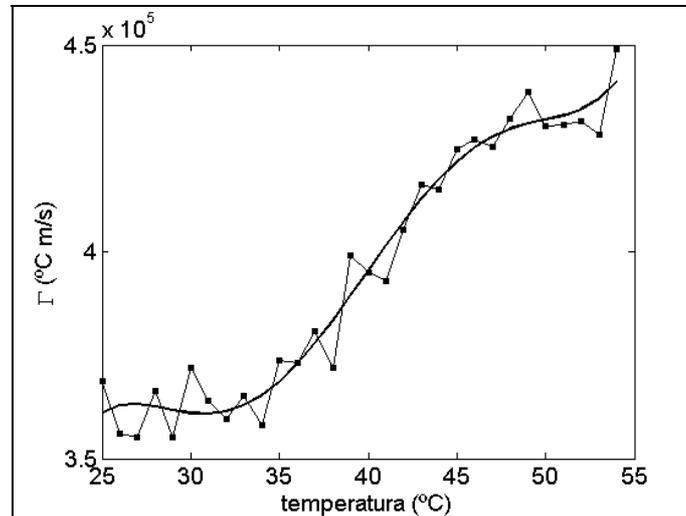


Figura 3 Dependencia experimental de Γ con la temperatura. Su valor puede ser considerado aproximadamente constante en el rango inicial entre 25°C y 35°C. Para temperaturas mayores la curva crece en forma monótona. La curva roja es un ajuste por un polinomio de 5^{to} orden a fin de obtener una expresión analítica de la función $\Gamma(T)$.

Según la ecuación (22) la imagen de la figura 2(b) es proporcional al cambio de temperatura producido por acción de la disipación en la resistencia. Observamos que existe una correspondencia entre el tiempo en que la resistencia estuvo encendida y la variación espacial del corrimiento. Además el máximo de variación se produce a la profundidad donde está ubicada la resistencia $z = 38$ mm. Estos resultados parecen indicar la validez de las aproximaciones que condujeron al resultado expresado en ella. Sin embargo debemos tener en cuenta que estas apreciaciones son sólo cualitativas ya que por un lado al no disponer del valor de la constante Γ , no podemos cuantificar el cambio de temperatura. Por otro lado no tenemos en esta experiencia una medida independiente de la temperatura que confirme la validez de este resultado. Por esta razón realizamos un trabajo experimental que permite analizar cuantitativamente estas aproximaciones⁽⁹⁾. En primer lugar evaluamos el valor de Γ a diferentes temperaturas. Para ello colocamos la muestra en un horno a temperatura controlada y la hicimos variar entre 25 y 55 °C a un ritmo de 1 °C cada 5 minutos aproximadamente. En cada medida adquirimos la señal ecográfica y despejamos Γ de la ecuación (22):

$$\Gamma = \Delta T \left(\frac{\partial(\delta t)}{\partial z} \right)^{-1} \quad (23)$$

Como el medio es homogéneo, podemos hacer un promedio del valor de Γ para las diferentes posiciones z . El resultado se muestra en la figura 3 donde también realizamos un ajuste polinómico

de quinto orden con el objetivo de obtener una expresión analítica que nos servirá para la estimación de la temperatura en una experiencia posterior. De este resultado podemos observar que el valor de Γ puede ser considerado aproximadamente constante en un rango de ~ 10 °C entre 25 °C y 35 °C. Por encima de esta temperatura comienza a crecer en forma monótona.

Podemos concluir de esta experiencia que la estimación de la temperatura dada por el modelo lineal usando un valor constante de Γ evaluada a la temperatura de referencia (en este caso $T_0 = 25$ °C) resultará en un valor inferior al de la temperatura real cuando esta supere los 35 °C. Este es precisamente el fenómeno que observamos cuando realizamos una experiencia con un gradiente local de temperatura como el mostrado en la figura 2. En esta ocasión repetimos la experiencia con un mayor tiempo de actividad de la resistencia eléctrica de manera de lograr una temperatura final mayor. Además agregamos en el volumen del gel una termocupla para tener una medida independiente de la temperatura y comparar con la estimación por ultrasonido. Con los datos experimentales estimamos por un lado la temperatura aplicando la ecuación (22) usando el valor de Γ evaluado a la temperatura inicial $T_0 = T(\tau = 0)$:

$$T(\tau) = T_0 + \Gamma(T_0) \frac{\partial(\delta t)}{\partial z} \quad (24)$$

Por otro lado estimamos la temperatura a partir de la ecuación (22) pero adaptando el valor de Γ a partir de su expresión analítica dada por el ajuste polinómico mostrado en la figura 3:

$$T(\tau) = T(\tau - \delta\tau) + \Gamma(T(\tau - \delta\tau)) \frac{\partial(\delta t)'}{\partial z} \quad (25)$$

donde $\delta\tau$ es el intervalo de tiempo entre dos medidas consecutivas. La diferencia del tratamiento de datos dado en la ecuación (25) respecto a la (24) es que, además de la actualización del valor de Γ en cada paso, el corrimiento temporal δt se calcula respecto a la medida anterior y no respecto a la medida inicial tomada como referencia. Para diferenciar esta situación hemos notado el corrimiento temporal como $\delta t'$ en (25). En la figura 4 se muestra el resultado de cada tratamiento así como la medida de temperatura en la termocupla. Como ya habíamos adelantado la estimación de temperatura dada en (24) es una subestimación de la temperatura medida en la termocupla. La diferencia es mayor cuanto mayor es la temperatura final, llegando a ser de ~ 3 °C en el pico. Como es de esperar, la estimación adaptativa concuerda mejor con la medida de la termocupla. Las diferencias en este caso pueden ser debidas a que en la práctica la distancia entre la termocupla y la resistencia no sea igual a la distancia entre la resistencia y el haz ultrasonoro.

Por supuesto que el método adaptativo no representa una solución al problema planteado porque implica conocer a priori la curva $\Gamma(T)$ para la muestra particular. Lo que se pretende aquí es mostrar una de las limitaciones del modelo expresado en la ecuación (22). Para mejorarlo es necesario tener

en cuenta el carácter esencialmente no lineal de la relación entre el corrimiento temporal δt y la variación de temperatura ΔT expresado en la ecuación (19). Uno de los métodos propuestos que toman en cuenta esta situación es la estimación de temperatura a partir del “entrenamiento” del sistema por redes neuronales⁽¹⁰⁾.

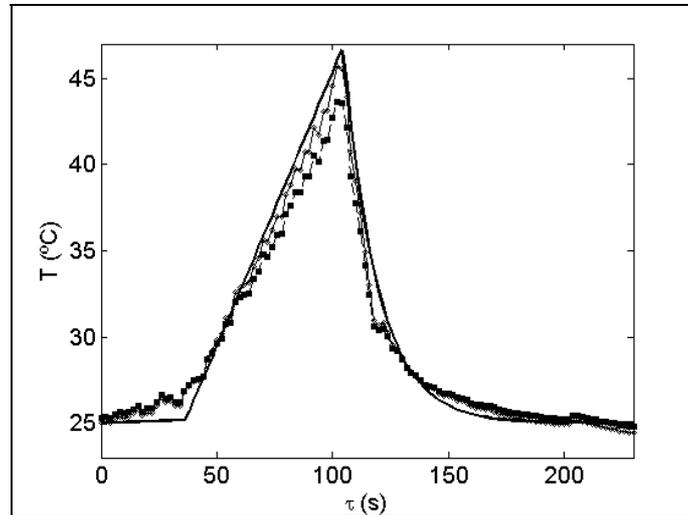


Figura 4 Comparación entre la estimación de temperatura mediante el modelo lineal (-■-), la medida adaptativa (-◇-) y la medida por la termocupla (—). Se puede apreciar que el modelo lineal produce una subestimación de la temperatura. La diferencia en el pico máximo es de $\sim 3^{\circ}\text{C}$

A modo de conclusión general, basados en esta y otras experiencias descritas en la literatura, podemos decir que si el objetivo es guiar aplicaciones terapéuticas donde los cambios de temperatura se mantienen en un rango de $\sim 10^{\circ}\text{C}$ de variación, el modelo lineal parece ser adecuado. Si por el contrario el objetivo final es guiar la cirugía por ultrasonido focalizado de alta intensidad donde la temperatura en el foco alcanza hasta 60°C , la subestimación de la temperatura puede provocar efectos no deseados en el tratamiento. A esto debemos agregar que algunos tejidos como el muscular son anisotrópicos por lo que la dependencia de la velocidad con la temperatura es dependiente de la dirección de observación. Además los tejidos biológicos no son en general homogéneos en su estructura y los distintos componentes responden en forma diferente a los cambios de temperatura. Esto trae como consecuencia que el valor de Γ además de depender de la temperatura sea dependiente de la posición z . Por lo tanto al considerar su valor como una constante se comete un error que depende de la zona del tejido en observación además de la temperatura⁽¹¹⁾. En fin, existe un interés creciente en la literatura al respecto del estudio de las ventajas y limitaciones del método^{(12),(13)}. El tema es amplio y sin dudas está abierto a contribuciones que podamos realizar en el futuro desde nuestro laboratorio. Pero en este capítulo estamos interesados en los efectos de la temperatura sobre la elastografía, es decir sobre la propagación de las ondas de corte y sobre los métodos utilizados para medir su velocidad. Este es el tema que abordaremos en la siguiente sección.

IV. VARIACION DE LA ELASTICIDAD DE CORTE CON LA TEMPERATURA

IV.1 Variaciones globales de temperatura

Empezaremos esta sección estudiando la elasticidad cuando se produce un cambio de temperatura global en la muestra. Como mostramos en el capítulo 1, la incertidumbre en la estimación de la velocidad y la atenuación de la onda de corte por elastografía transitoria en un medio homogéneo es menor si la medimos con ondas planas. Esta salvedad es importante en este caso ya que en la sección II mostramos que las ondas de corte son poco “sensibles” a los cambios de temperatura. Para lograr la variación de temperatura en la experiencia, la muestra se saca de la heladera a una temperatura inicial de 6 °C y se deja llegar al equilibrio térmico a temperatura ambiente, ~ 25 °C. Una termocupla inserta en el volumen del gel, próximo a la zona de medición permite medir la temperatura de la muestra. Las medidas se hacen cada vez que la termocupla detecta una variación de 0.4 °C. La figura 5(a) muestra la velocidad de fase de la onda de corte como función de la temperatura mientras que la figura 5(b) muestra la atenuación. Las barras de error se obtienen del ajuste lineal por mínimos cuadrados en cada caso. Se observa en los datos que inicialmente la velocidad permanece prácticamente constante cerca de la temperatura inicial (entre 6 y 10 °C) y luego sigue una curva decreciente indicando que el gel es más blando a mayor temperatura. Por otro lado en la curva de atenuación, a pesar de que los resultados son bastante más ruidosos, se observa un incremento de la misma hasta aproximadamente 20 °C y luego un decaimiento.

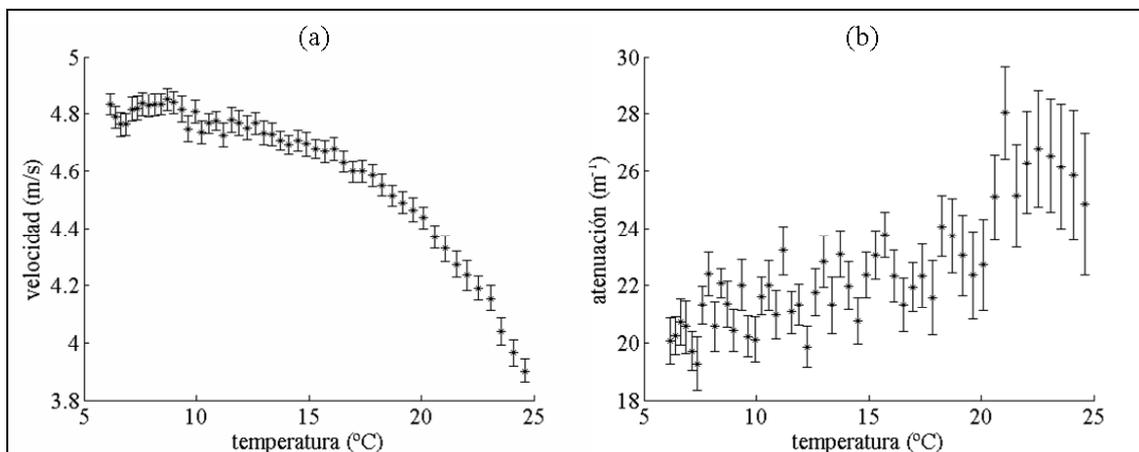


Figura 5 (a) Dependencia de la velocidad de fase de la onda de corte con la temperatura global de la muestra. Las barras de error provienen del ajuste lineal en cada medida. Inicialmente (entre 6 °C y 10 °C) la velocidad es prácticamente constante pero luego presenta un decrecimiento monótono. (b) Dependencia de la atenuación con la temperatura. Las medidas de amplitud en general se ven más afectadas por el ruido pero se de todas formas se observa un aumento en la atenuación con la temperatura.

La forma de estas curvas es atribuible al material en particular (gel de agar-gelatina). Estos resultados están de acuerdo con descripciones fenomenológicas para polímeros amorfos que se pueden encontrar en la literatura⁽¹⁴⁾. Sin embargo, no pretendemos dar aquí una descripción

detallada del comportamiento termoelástico de los geles de agar-gelatina. Este material solamente nos sirve para controlar varios parámetros experimentales referidos a la muestra (elasticidad, homogeneidad, isotropía, dimensiones, etc.) que en el caso de trabajar directamente con tejidos biológicos no sería posible. En la curva de la figura 5(a) vemos que inicialmente la velocidad permanece prácticamente constante (entre 6 °C y 10 °C) y luego comienza a decrecer en forma monótona. En la zona de mayor temperatura el ritmo de variación es aproximadamente 0.4 m/s°C. Esta experiencia muestra que si la variación de temperatura supera cierto nivel, la velocidad de la onda de corte se modifica significativamente de modo que el método de elastografía transitoria es susceptible de medir los cambios. El valor de la pendiente hallada representa ~ 10% de variación de la velocidad por cada grado. De acuerdo a los resultados mostrados en el capítulo 1 el método de elastografía transitoria podría detectar variaciones de velocidad local en la onda de corte para variaciones de 1-2 °C.

Tal vez debido al interés relativamente reciente de la dependencia del módulo elástico de corte con la temperatura en tejidos, no encontramos en la literatura más que un trabajo experimental que reporte este tipo de curvas en tejidos⁽¹⁵⁾. En él se estudia la dependencia del módulo de Young con la temperatura global de muestras de tejido muscular esquelético vacuno en experiencias *in vitro*. La experiencia es similar a la presentada aquí en geles pero las medidas se hacen utilizando elastografía por resonancia magnética. Allí se muestra que la elasticidad del tejido decrece conforme aumenta la temperatura hasta cierto valor de temperatura (~ 50 °C) a partir de la cual la elasticidad comienza a crecer nuevamente. Las experiencias muestran que la curva de elasticidad seguida cuando el tejido se enfría depende del valor máximo de temperatura alcanzado. Si la temperatura máxima superó el valor crítico de ~ 50 °C la curva vuelve por un camino diferente mostrando un comportamiento del tipo histerético. Si por el contrario la temperatura máxima no supera el valor crítico la curva vuelve aproximadamente por el mismo camino anterior. Este comportamiento se resume cualitativamente en la figura 6 donde se muestra el comportamiento del módulo de corte con la temperatura dividido en tres regiones. En la región I el módulo elástico decrece cuando aumenta la temperatura y el proceso es reversible. Superada cierta temperatura crítica T_c (~ 50 °C en este caso) la pendiente en la curva cambia el signo y ahora el tejido se vuelve más rígido cuando aumenta la temperatura como se muestra en la región II. Finalmente cuando el tejido se deja enfriar, el módulo elástico sigue la curva III cuya pendiente es similar a la registrada en la región I.

La interpretación de estos resultados en el mismo trabajo de la referencia [15] surge a partir de la estructura de las proteínas como función de la temperatura. Cuando la temperatura aumenta, se produce un proceso de desordenamiento (unfolding) de la estructura. Dependiendo de la temperatura final alcanzada este proceso puede o no ser reversible. En caso de que se produzca una

desnaturalización de las proteínas⁽¹⁶⁾, la estructura original se transforma en una configuración más aleatoria cambiando la entropía de la configuración. Por lo tanto el tratamiento térmico puede causar cambios significativos en la elasticidad en tejidos blandos debido a un cambio estructural permanente. Si bien los datos experimentales publicados hasta el momento son pocos, esta característica resultaría muy útil a la hora de la aplicación de la elastografía en el monitoreo del tratamiento térmico. Para ello es necesario poder seguir la evolución local de la elasticidad. Este es el tema de la siguiente sección.

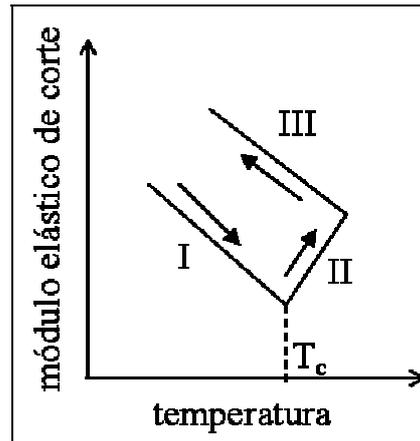


Figura 6 Esquema que muestra el resultado de medidas de elasticidad de corte en músculo esquelético bovino en función de la temperatura global (el esquema se hizo en base a datos tomados de la referencia [15]). Las medidas fueron hechas mediante elastografía por resonancia magnética. El esquema muestra que el resultado se puede dividir en tres regiones. En la región I la pendiente es negativa. Luego que la temperatura supera cierto valor crítico (~ 50 °C en estas experiencias) la pendiente cambia el signo y el módulo en la región II. Finalmente cuando el tejido se deja enfriar sigue la curva de la región III.

IV.2 Variaciones locales de temperatura

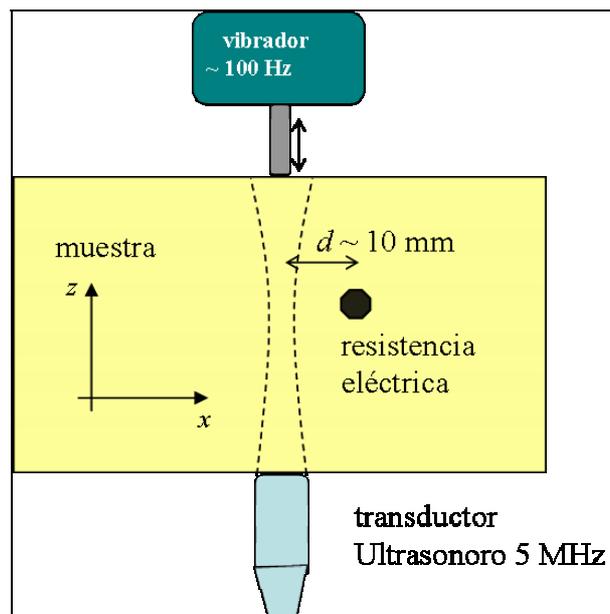


Figura 7 Esquema del montaje utilizado para medir cambios locales de elasticidad producidos por el aumento de temperatura en torno a la resistencia eléctrica (la electrónica no se muestra por simplicidad)

En esta sección analizamos la capacidad de nuestro método para estimar la elasticidad del medio cuando se producen variaciones de temperatura a nivel local. El montaje experimental utilizado que se muestra en la figura 7 es similar al utilizado en la sección anterior para cuantificar la temperatura local por ultrasonido. La resistencia eléctrica se coloca al interior de un gel de agar gelatina de manera de generar un gradiente de temperatura en la muestra. La medida de elastografía transitoria se hace, como es usual, con el transductor y el pistón alineados. La distancia d entre el haz de ultrasonido y la resistencia se toma de modo que la presencia de la resistencia no altere el campo de baja frecuencia. Esta distancia determinada experimentalmente es aproximadamente 10 mm. La resistencia se conecta a una fuente de corriente continua funcionando a 10 V. El equipo utilizado para las medidas es el USON II y se configuró de manera de realizar una medida elastográfica de 64 señales con 2000 puntos cada una muestreadas a 40 MHz y una frecuencia de repetición de pulso de 2.5 KHz. Se realiza una medida elastográfica cada 2 segundos totalizando 64 medidas (128 s en total). La fuente que alimenta la resistencia actúa durante 60 segundos, se enciende en $\tau = 0$ s y se apaga en $\tau = 60$ s. En cada medida se obtiene una matriz de 64x2000 puntos. Con cada una de estas matrices se construye el campo de velocidad particular en función de z y el tiempo. Un ejemplo del campo y la fase cuando la temperatura en el medio es homogénea se muestra en figura 8. Recordemos que la velocidad y la fase se relacionan mediante la expresión (ecuación (29) del capítulo 1):

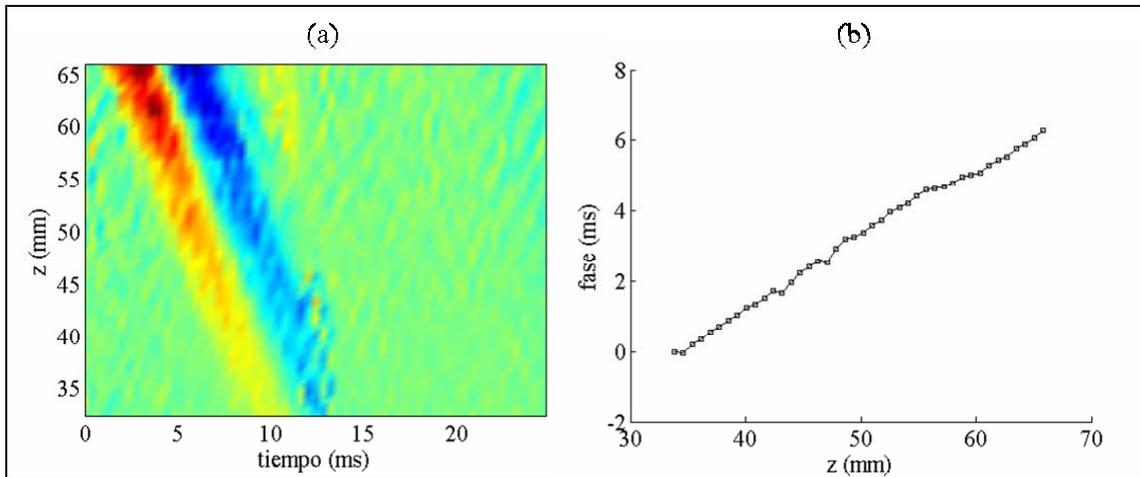


Figura 8 (a) Ejemplo de sismograma donde se observa la propagación de la onda de corte. La excitación es un ciclo de sinusoide de 100 Hz. (b) Fase en función de la profundidad. La pendiente en cada punto es el inverso de la velocidad de fase y por lo tanto un indicador de la elasticidad local.

$$c_s(z') = -\omega_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z'} \right)^{-1} \tag{26}$$

donde z' es la distancia al pistón sobre su eje y se relaciona con z (la distancia al transductor) por: $z' = z - D$, siendo D la distancia entre el transductor y el pistón. Si la temperatura en el medio es homogénea, la relación entre el tiempo de vuelo del ultrasonido t y la coordenada z es:

$$t = \frac{2z}{c_0} \tag{27}$$

Por lo tanto cuando en el algoritmo de correlación la señal de speckle acústico se divide en intervalos temporales igualmente espaciados, estamos en realidad evaluando el campo de velocidad particular en intervalos regulares de z . Por ejemplo, si el ancho de la ventana temporal en el algoritmo de correlación es de 6 longitudes de onda solapadas 50 % entre si, el intervalo temporal entre los centros de cada ventana es de $1.2 \mu\text{s}$ (trabajando a 5 MHz), que equivale a una separación espacial de 0.9 mm (cuando la velocidad es $1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$).

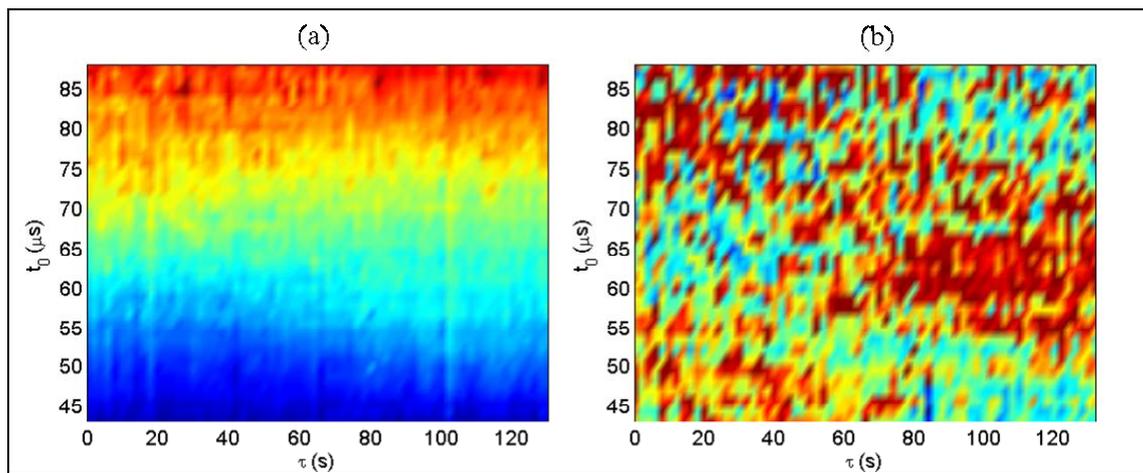


Figura 9 (a) Matriz que contiene la fase de la onda de corte en función de la profundidad z para cada medida elastográfica. En esta figura no hay un cambio apreciable en la fase mientras actúa la resistencia eléctrica (entre 0 y 60 s). (b) Inverso de la derivada de la fase con respecto a z . Las zonas en azul indican una velocidad menor. Sin embargo la figura no es concluyente en el sentido que no indica claramente la zona del gel que ha sido calentada. Se observa además un corrimiento de estas zonas hacia el transductor o alejándose de él según la distancia al mismo.

Cuando existe un gradiente de temperatura en la muestra, la situación anterior no es válida. Debido a la dilatación térmica y al cambio de velocidad del sonido, si mantenemos el intervalo temporal constante en el algoritmo de correlación, la separación espacial donde se evalúa el campo de baja frecuencia varía de un punto al otro dependiendo del perfil de temperatura. Por lo tanto al medir la fase de la onda de corte bajo estas circunstancias, aparecen artefactos en la imagen como se ilustra en la figura 9. La figura 9(a) muestra la fase (medida en ms) en función del tiempo de vuelo ultrasonoro (t en μs) y del tiempo de la experiencia (τ en s). En esta figura vemos que la fase (el tiempo de vuelo de la onda de corte) es mayor durante el intervalo de tiempo en que está encendida la resistencia eléctrica, es decir entre $\tau \cong 0$ y 60 s. En la figura 9(b) se muestra el inverso de la derivada de la fase respecto al tiempo de vuelo t . Observamos que si bien se producen variaciones locales, estas aparecen desplazadas tanto hacia el transductor (ubicado en $t = 0$) como alejándose de él. Este efecto es de esperar ya que la posición z a la que es evaluada la fase varía en cada medida. La variación de velocidad con la temperatura produce en general un corrimiento de la imagen hacia el transductor porque al mismo tiempo de vuelo le corresponde un valor mayor de z (ver ecuación

(14)). Pero además, la dilatación térmica también juega un papel en el desplazamiento. Como mencionamos anteriormente, dependiendo de las condiciones de borde y de la posición del foco térmico el corrimiento espacial provocado por la dilatación puede ir a favor o en contra del movimiento aparente producido por el cambio de velocidad. Por esta razón la imagen se puede ver desplazada hacia el transductor o alejándose de él. Debemos notar además de que esta imagen no corresponde exactamente al valor local de la velocidad de corte pues la derivada se hizo respecto al tiempo de vuelo t y no sobre z . Veremos cómo podemos utilizar la información de las señales de speckle de manera de corregir estos artefactos en la imagen final.

IV.2.A Corrección del corrimiento del speckle acústico debido a cambios locales de temperatura

En esta sección mostraremos cómo utilizar la información sobre la relación entre el tiempo de vuelo y la coordenada z de manera que la imagen final no contenga los artefactos que se observan en la figura 9(b)⁽¹⁷⁾. El procedimiento consiste en monitorear el movimiento de las señales de speckle antes de aplicar la excitación de baja frecuencia, de la misma manera que lo hicimos en la estimación de temperatura por ultrasonido en la sección anterior. El eje z queda definido cuando el medio está a una temperatura uniforme como:

$$z = \frac{c_0 t}{2} \quad (28)$$

donde c_0 es la velocidad de sonido a temperatura T_0 . El tiempo τ mide la duración de la experiencia de modo que para $\tau \leq 0$ la muestra está a una temperatura constante y homogénea. En estas circunstancias el tiempo de vuelo hasta una posición z_0 dada queda expresado como:

$$t(z_0, 0) = 2 \int_0^{z_0} \frac{d\xi}{c_0} = \frac{2z_0}{c_0} \quad (29)$$

Para $\tau > 0$ la temperatura se modifica localmente. Como ya vimos, el tiempo de vuelo hasta la misma posición z_0 tiene en general un valor diferente:

$$t(z_0, \tau) = 2 \int_0^{z_0} \frac{d\xi}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi, \tau))} + 2 \int_{z_f}^{z_0} \frac{\alpha(\xi) \Delta T(\xi, \tau)}{c_p(\xi, T_0 + \Delta T(\xi, \tau))} d\xi \quad (30)$$

Esta ecuación expresa el corrimiento temporal de la señal de speckle correspondiente a un elemento de volumen centrado en z_0 debido al cambio de velocidad y la dilatación térmica. Como lo hicimos en la sección III.2, el corrimiento temporal $\delta t(z_0, \tau) = t(z_0, \tau) - t(z_0, 0)$ se puede obtener a partir de la correlación de las señales de speckle acústico. La diferencia en este caso es que se debe tomar la precaución de registrar una señal de speckle previo a la excitación de baja frecuencia de la medida elastográfica como se muestra en la figura 10(a). De otra forma la señal de speckle se ve afectada

por la propagación de la onda de corte y el valor de $\delta t(z_0, \tau)$ no representa solamente el corrimiento debido a los cambios de temperatura. En la figura se muestra en rojo una ventana temporal ubicada en $z = z_0$ correspondiente a un elemento de volumen del sólido en torno a esa posición. Esta ventana se toma en la señal de speckle adquirida previo a la realización de la experiencia elastográfica (indicada con el rectángulo de 64 ms de duración). El corrimiento temporal δt de este volumen entre la primer y segunda medida se obtiene por correlación y se produce en el tiempo transcurrido entre dos medidas. Asumiremos que durante el tiempo t_e de la medida elastográfica (64 ms), la temperatura no varía apreciablemente en la muestra y que por lo tanto el perfil $T(z)$ es el mismo en el desarrollo de esta experiencia. Repitiendo el proceso en las N medidas y variando la posición de la ventana temporal sobre las señales de speckle obtenemos la curva $\delta t(z, \tau)$ que se muestra en la figura 10(b).

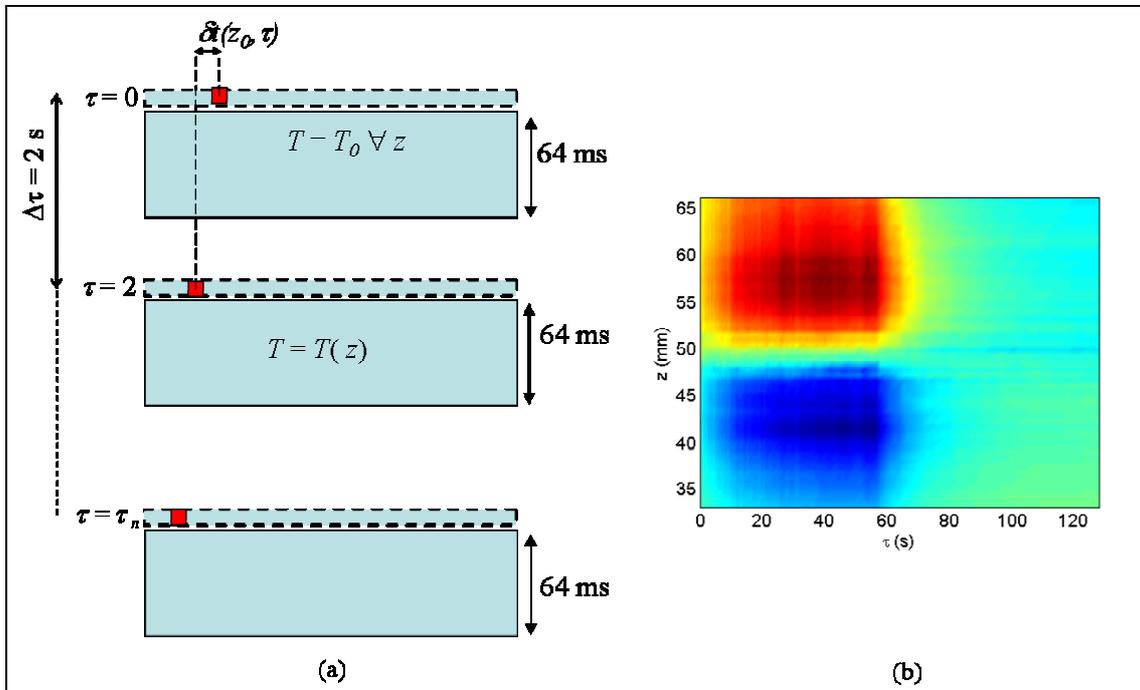


Figura 10 Esquema que muestra cómo construir la matriz δt de corrimiento temporal debido al cambio local de temperatura. Esta matriz es la guía para reconstruir la curva $t(z)$ y poder estimar la velocidad de fase a nivel local eliminando los artefactos que aparecen en la figura 8(b). Asumimos que durante la experiencia elastográfica (64 ms de duración) el perfil de temperatura es constante. (b) resultado del proceso de correlación anterior que muestra el corrimiento temporal en función de z y τ . Debido al cambio de velocidad y la dilatación térmica el corrimiento es negativo en la zona anterior a la resistencia ($z \sim 49$ mm), positivo en la zona posterior y prácticamente nulo en su posición.

Para un valor arbitrario $\tau = \tau_0$, esta información nos permite conocer experimentalmente la relación $t(z)$ a partir de:

$$t(z) = t_0(z, 0) + \delta t(z, \tau_0) \tag{31}$$

La figura 11(a) muestra una comparación de $t(z)$ para $\tau = 0$ y para $\tau = 60$ s (en este caso hemos multiplicado el corrimiento temporal medido por un factor 4 para poder visualizar mejor el

concepto que muestra la figura). En el primer caso la relación es lineal ya que la velocidad es homogénea en el medio. En el segundo caso se observa una curva que se desvía de la relación anterior hacia tiempos menores o mayores dependiendo de la influencia de la expansión térmica y la variación local de la velocidad del sonido. En nuestra experiencia estamos interesados en evaluar el campo de velocidad particular en la misma posición espacial en cada medida elastográfica de manera de poder seguir la evolución local de la elasticidad a medida que cambia la temperatura. Como vimos este objetivo no se logra evaluando el campo en intervalos regulares del tiempo de vuelo ultrasonoro. Para lograrlo debemos tener en cuenta en el algoritmo de correlación de la elastografía transitoria la relación $t(z)$ de manera de ubicar el centro de cada ventana temporal en la señal de speckle para que coincida en la misma posición z que la medida anterior. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 11(b). En el instante inicial $\tau = 0$, el tiempo de vuelo hasta una posición z_0 es t_0 . En un tiempo arbitrario posterior el tiempo de vuelo es $t_0 + \delta t(z, \tau)$.

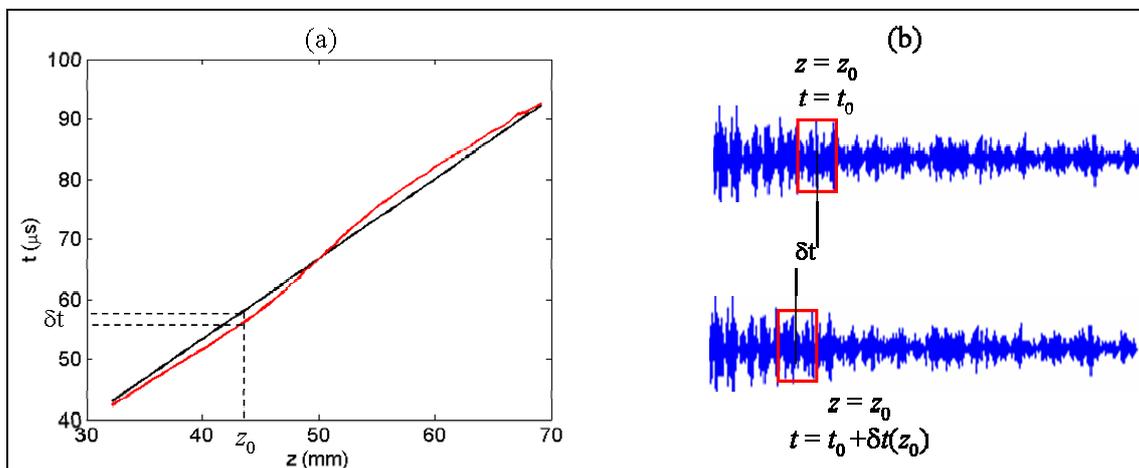


Figura 11 (a) comparación del tiempo de vuelo ultrasonoro para $\tau = 0$ (negro) y $\tau = 60$ s (gris). El corrimiento temporal es positivo o negativo dependiendo de la posición respecto al foco térmico (resistencia eléctrica ubicada en $z = 49$ mm). (b) Para poder evaluar el campo de baja frecuencia en las mismas posiciones z en cada medida elastográfica es necesario tener en cuenta la curva $t(z)$ en el algoritmo de correlación. En esta figura se muestra esquemáticamente que a la misma posición z_0 le corresponden tiempos de vuelo diferentes.

Podemos apreciar el resultado de realizar esta corrección en cada matriz de datos en la figura 12. La figura 12(a) muestra la fase y la figura 12(b) el valor local de la velocidad en función de z y τ . Es notorio que la fase se modifica durante el período de actividad de la resistencia. Al corregir la posición donde se evalúa la fase, en la figura 12(b) se eliminan los artefactos de la figura 9(b). Se observa claramente que durante el período de actividad de la resistencia eléctrica se produce una disminución de la velocidad de corte, es decir que la elasticidad en la zona calentada es menor que en el resto del gel. Este resultado está de acuerdo con los presentados en la figura 5(a) donde se mostró que la velocidad de la onda de corte en el gel disminuye al aumentar la temperatura. Este importante resultado muestra por primera vez que mediante la elastografía transitoria es posible

seguir la evolución local de la elasticidad en sólidos blandos debido a variaciones locales de temperatura representando un primer paso hacia un sistema de monitoreo en tiempo real.

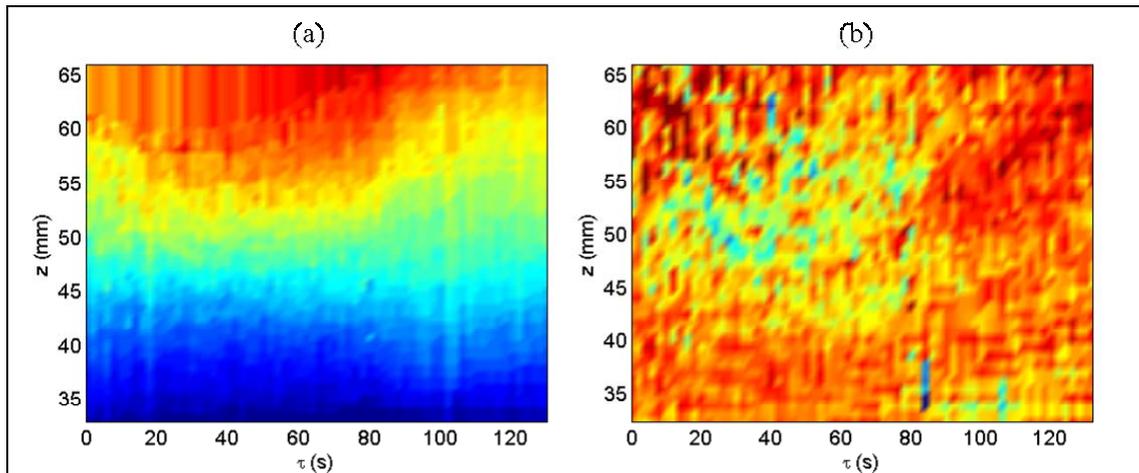


Figura 12 (a) Fase en función de z y τ una vez realizado el proceso de corrección por la curva $t(z)$ en el algoritmo de correlación para cada medida elastográfica. Es notorio que la fase se modifica en la zona donde la temperatura es mayor. (b) Velocidad local de la onda de corte calculada como el inverso de la derivada espacial de la fase. Si bien la imagen es ruidosa, se han eliminado los artefactos presentes en la figura 9(b) y es posible observar una disminución de la velocidad en la zona donde la temperatura es mayor.

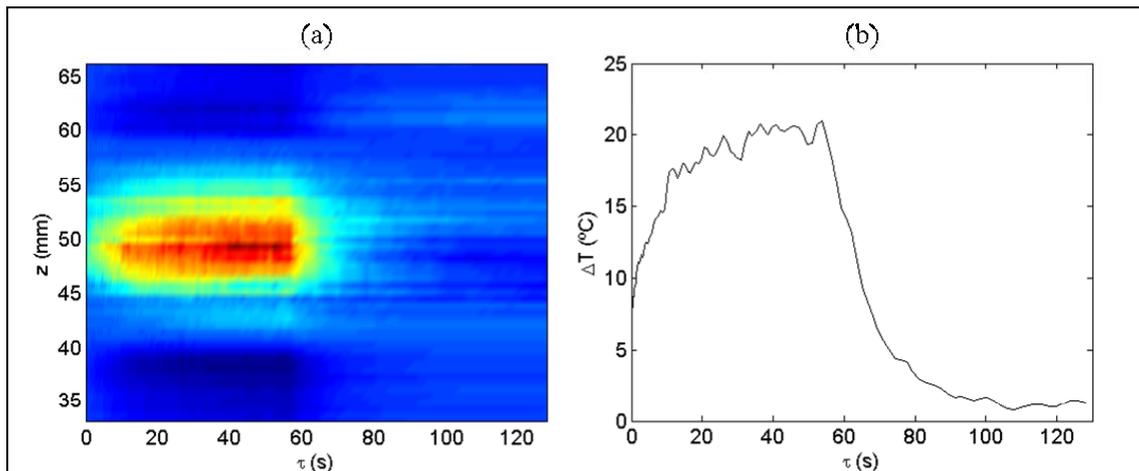


Figura 13 (a) Derivada espacial del corrimiento temporal $\delta t(z, \tau)$. Según el modelo lineal desarrollado en la sección III esta imagen es proporcional al cambio de temperatura en cada punto. (b) Variación de temperatura en función de τ evaluada en $z = 49$ mm. El pico máximo estimado es de 20.5 °C. Si tenemos en cuenta los resultados de la sección III este valor es en realidad una subestimación del valor real.

En la figura 13 se muestra la estimación de la variación de temperatura por ultrasonido a partir de la derivada espacial de la figura 10(b) como se explicó en la sección III.2. La figura 13(a) muestra la estimación local de temperatura en función de τ . Para construir la figura hemos usado un valor de $\Gamma = c_0/2 (\alpha - \chi)^{-1}$ tomada de los datos experimentales que se muestran en la figura 3 a la temperatura de referencia 25 °C. Si bien en esta experiencia hemos utilizado otro gel, esperamos que el valor de Γ sea similar para concentraciones similares de agar-gelatina. Podemos observar comparando esta figura con la figura 12(b) que el aumento de temperatura es acompañado de un decrecimiento en la velocidad de la onda de corte. La figura 13(b) muestra la variación estimada de

temperatura ΔT a la profundidad donde está ubicada la resistencia, es decir en $z = 49$ mm. El pico máximo estimado es $\Delta T_{max} = 20.5$ °C

IV.2.B Consideración sobre fuentes adicionales de error

La figura 14 muestra la velocidad de la onda de corte en función de τ para $z = 49$ mm. Si bien el comportamiento promedio de la curva muestra un decrecimiento cuando la temperatura mayor, es notoria la presencia de ruido de alta frecuencia, a pesar de que en el cálculo de la derivada hemos utilizado el algoritmo de mínimos cuadrados segmentado. Es conocido en elastografía que el ruido en el cálculo de la derivada espacial de la fase proviene de la decorrelación de las señales de speckle acústico. Como ya mencionamos en el capítulo 1, las causas físicas de la decorrelación (estamos dejando de lado aquí el ruido electrónico y de digitalización en las señales de speckle) provienen de la deformación del medio expresado por el parámetro ζ en la ecuación (19) del capítulo 1. Cuando el medio se deforma debido a la propagación de la onda de baja frecuencia, la firma acústica de un conjunto dado de volúmenes isócronos del medio no es simplemente una versión retardada de la configuración anterior sino que existe una compresión o dilatación temporal en la señal de speckle. Es decir que además de trasladarse, la señal se comprime o se estira temporalmente de modo que la correlación antes y después de la deformación no es igual a la unidad aun en ausencia de ruido. Este efecto produce una incertidumbre en la estimación del corrimiento temporal que es más importante cuanto mayor sea la deformación del medio. Además el método de interferometría speckle sólo es capaz de medir los desplazamientos en la dirección del haz ultrasonoro (sobre el eje z) de modo que los desplazamientos laterales también provocan una decorrelación. En el caso actual a estos factores que afectan la calidad final de los resultados debemos agregar otros dos.

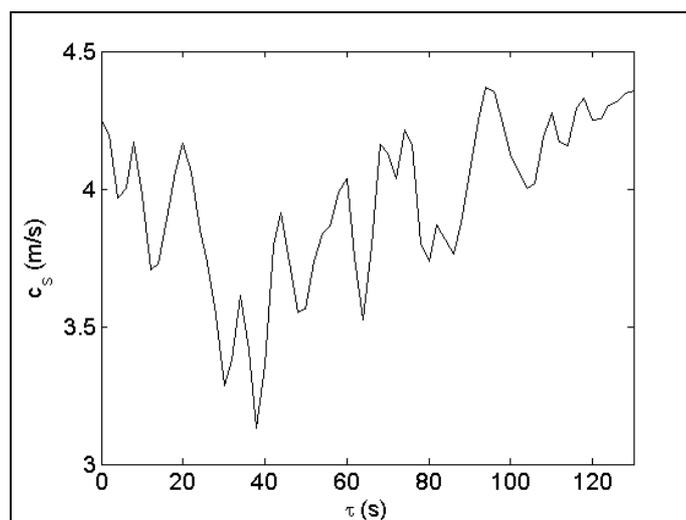


Figura 14 Velocidad de la onda de corte en función de τ . Si bien se observa que en promedio la velocidad decrece mientras aumenta la temperatura la relación señal/ruido es pobre. Este resultado es consecuencia de la decorrelación adicional que sufren las señales de speckle acústico debido al cambio de temperatura.

IV.2.B.1 Lente termoacústico

En primer lugar la incertidumbre en la estimación del corrimiento temporal de las señales de speckle aumenta debido al efecto del lente termoacústico⁽¹⁸⁾. Este efecto es debido al cambio de la velocidad del sonido con la temperatura. En la zona de mayor temperatura la velocidad del sonido es mayor produciendo la refracción del haz ultrasonoro. En términos de acústica de rayos, se produce una desviación lateral del camino acústico una vez que atraviesa la zona de mayor temperatura. Esto quiere decir que la zona de la muestra posterior al foco térmico que es “iluminada” por el haz ultrasonoro cambia a medida que cambia el mapa interno de temperatura como se muestra esquemáticamente en la figura 15. Desde el punto de vista de la correlación, este efecto es equivalente a un desplazamiento lateral del medio y por lo tanto produce una decorrelación en las señales de speckle. El corrimiento lateral debido al lente termoacústico se hace más notorio a medida que aumenta la distancia axial (eje z) al foco de temperatura. Debemos notar que este efecto aumenta el ruido en la estimación del corrimiento temporal de los métodos basados en la correlación. En nuestro caso particular esto concierne al corrimiento temporal $\delta t(z, \tau)$ mostrado en la figura 10(b) y al cálculo de cada sismograma en la elastografía transitoria y por lo tanto de la fase en cada medida. Es decir que el lente termoacústico tiene un doble efecto sobre el ruido en el resultado final mostrado en la figura 12 ya que el cálculo de la posición z para la medida de fase se hace en base a la matriz $\delta t(z, \tau)$.

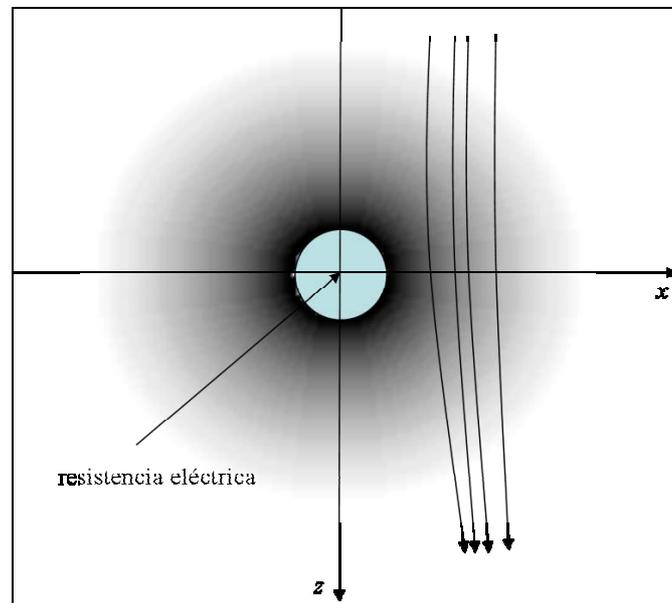


Figura 15 Distribución de temperatura en el plano xz creado por la resistencia eléctrica. Los rayos acústicos que atraviesan este perfil de temperatura se desvían de su trayectoria original. El ángulo de desviación depende de la distancia a la resistencia. Los rayos más lejanos se desvían poco mientras que en los más cercanos la desviación es mayor.

Si bien es posible estimar el corrimiento axial del haz ultrasonoro conociendo la distribución de temperatura⁽¹⁹⁾, no disponemos de expresiones analíticas que muestren el efecto sobre la

incertidumbre en la estimación del desplazamiento. Experimentalmente se ha determinado⁽²⁰⁾ que la decorrelación de la señal debido al movimiento lateral depende de la geometría del transductor utilizado y de la profundidad de observación. Para entender cualitativamente este hecho mostramos en la figura 16 un esquema del diagrama de radiación de un transductor circular plano de radio a ⁽²¹⁾. Debido a la apertura del haz con la distancia z al transductor, el volumen isócrono que contribuye a la señal de speckle acústico aumenta con z . Como consecuencia la decorrelación debida a un movimiento lateral de la misma magnitud es menor a mayor profundidad debido a que porcentualmente el cambio de difusores que participan de la señal es menor.

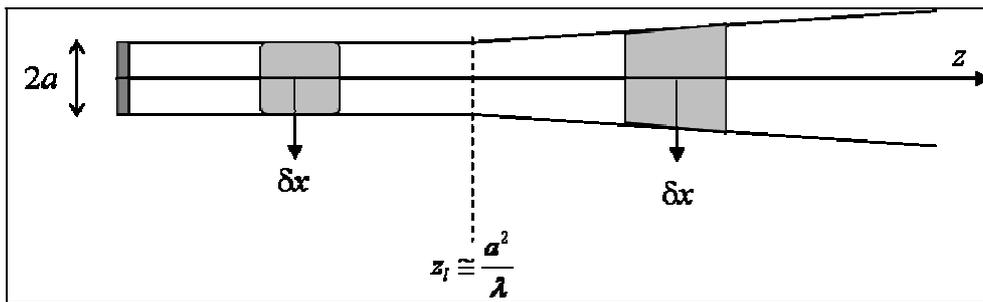


Figura 16 Debido al diagrama de directividad de un transductor plano el efecto del movimiento lateral sobre la correlación de señales de speckle depende de la distancia z . Para valores de z mayores a z_i , el volumen que contribuye a las señales de speckle es mayor. Como consecuencia la decorrelación debida a un movimiento lateral de la misma magnitud es menor debido a que porcentualmente el cambio de los difusores que participan de la señal es menor.

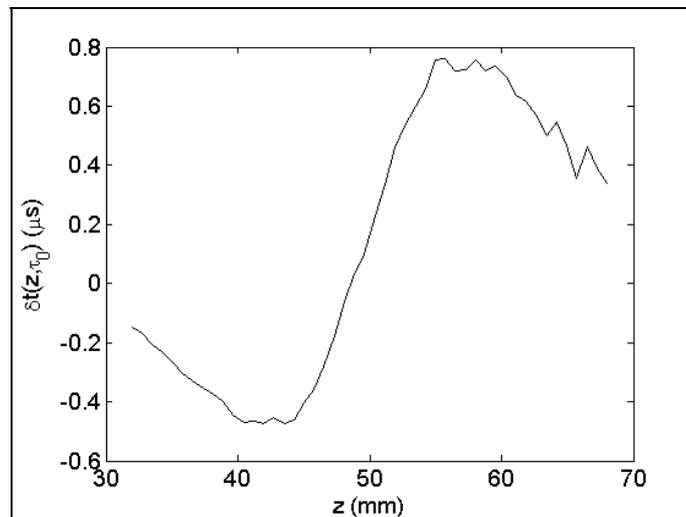


Figura 17 Corrimiento temporal δt en función de z , evaluado en $\tau = 54$ s. El efecto del lente termoacústico en la estimación es visible en la zona posterior al foco térmico ($z > 49$ mm) donde se producen fluctuaciones debido a la decorrelación en las señales de speckle.

Sin embargo en nuestro caso el movimiento lateral aparente aumenta conforme aumenta la distancia z al foco térmico (y por lo tanto al transductor). El efecto neto es que el ruido en la estimación del corrimiento temporal aumenta con la distancia z como se observa en la figura 17 donde se muestra la estimación del corrimiento temporal en función de z para $\tau = 54$ s. El ruido en la estimación es mayor cuanto mayor es la distancia posterior a la posición de la resistencia ubicada en $z \cong 49$ mm..

18. Desde el punto de vista de la correlación este fenómeno produce un aumento adicional en la incertidumbre de la estimación de los desplazamientos ya que el conjunto de volúmenes isócronos que participa en la señal de speckle local es diferente entre dos instantes consecutivos de la experiencia τ_n y τ_{n+1} . Si llamamos $\Delta z(z, \tau_n)$ a la extensión espacial correspondiente al ancho temporal Δt en torno a la posición z en el instante τ_n , podemos estimar en primera aproximación el efecto del ancho constante de la ventana temporal tratándolo como una deformación adicional del medio. Definimos la cantidad $e(z, \tau_n)$ como:

$$e(z, \tau_n) = \frac{\Delta z(z, \tau_{n+1}) - \Delta z(z, \tau_n)}{\Delta z(z, \tau_n)} \tag{32}$$

Con nuestros datos experimentales encontramos que esta cantidad tiene un mínimo para $z \sim 49$ mm y $\tau \sim 58$ s es decir en torno a la profundidad y tiempo donde se da el máximo de temperatura. Su valor mínimo (máximo en valor absoluto) es $e_{\min}(z, \tau_n) \cong -0.01$. Es decir que el hecho de mantener el ancho de la ventana temporal constante en el algoritmo de correlación introduce un efecto aparente de deformación adicional con un máximo del 1% en este caso. En la figura 19 se muestra la curva de incertidumbre en la estimación del desplazamiento $\sigma(\delta z)$ en función de la deformación s del medio. La curva fue calculada a partir de la ecuación (19) del capítulo 1 (es decir el límite inferior de Cramér-Rao). Los parámetros fijos utilizados para construir esta curva son: $f_0 = 5$ MHz, $B = 0.3$, $SNR = 15$, $\Delta t = 2.4 \mu s$. Podemos observar que $\sigma(\delta z)$ crece rápidamente con s de modo que el efecto de la deformación adicional puede ser importante dependiendo del valor de la deformación de “base” dada por la deformación debida a la expansión térmica y las condiciones de borde.

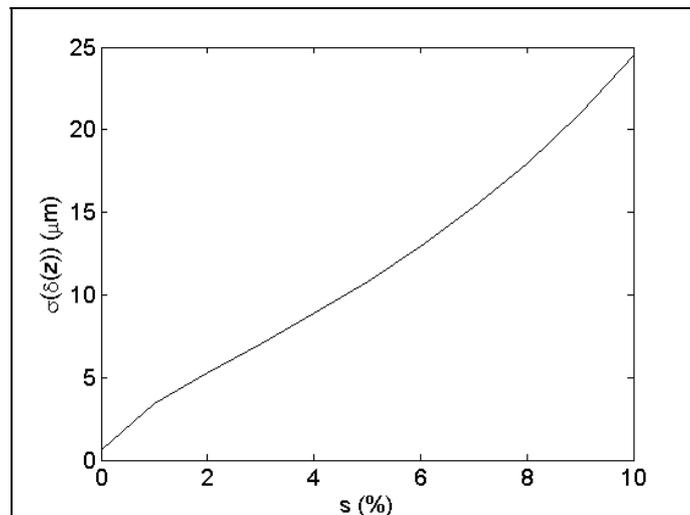


Figura 19 Estimación de la incertidumbre en la medida de los desplazamientos por el método de interferometría speckle como función de la deformación s del medio obtenida a partir del límite inferior de Cramér-Rao (ecuación (19) del capítulo 1). El efecto de deformación aparente incrementa la incertidumbre final en el resultado de elasticidad local.

Debemos notar que debido a que las señales de speckle durante la experiencia elastográfica se adquieren con intervalos de ~ 1 ms, el perfil de temperatura no se modifica apreciablemente en este tiempo. Por lo tanto la deformación aparente solo afecta la estimación del corrimiento temporal en intervalos de tiempo del orden de τ (~ 1 s) es decir en la figura 10(b). Sin embargo este resultado es el que permite corregir las medidas elastográficas cuando cambia la temperatura y por lo tanto está vinculado directamente con el resultado final de la figura 12 (b). En principio es posible disminuir este efecto a partir del “estiramiento” temporal de las señales de speckle una vez conocida la curva $t(z)$ en forma similar a las propuestas realizadas en elastografía estática⁽²³⁾. Dejaremos este como un punto abierto para tratar en trabajos futuros y brindar una estimación cuantitativa de este efecto sobre los resultados finales.

V. CONCLUSION DEL CAPITULO

En este capítulo hemos estudiado los efectos de la temperatura en la estimación de la elasticidad por elastografía transitoria. En particular hemos mostrado cómo afecta a nuestro método de investigación, la interferometría speckle ultrasonora, los corrimientos locales (reales y aparentes) del tiempo de vuelo. En una primera aproximación estos corrimientos permiten la estimación no invasiva de temperatura en la muestra. Un análisis experimental con un poco más de profundidad permite ver que la estimación cuantitativa requiere tomar en cuenta el carácter no lineal de la relación entre el corrimiento temporal y la temperatura local. En particular la dependencia del parámetro Γ con la temperatura y la posición afectan de manera significativa la estimación.

En lo referido a la evolución de la elasticidad de corte a nivel local es necesario ir adaptando el algoritmo de correlación de las señales de speckle a la curva $t(z)$ para evitar artefactos en la imagen final. En este trabajo se obtuvieron por primera vez resultados que muestran la evolución local de la elasticidad como función de la temperatura a partir de medidas elastográficas. En particular hemos identificado los factores que afectan la calidad final de estos resultados. La variación local de la velocidad y la expansión térmica del medio producen dos fuentes adicionales de ruido en el cálculo de la fase del campo de baja frecuencia. Por un lado el lente termoacústico aumenta la decorrelación de las señales de speckle debido al movimiento lateral aparente. Por otro lado la variación espacial correspondiente al mismo ancho temporal en las ventanas del algoritmo de correlación produce un efecto equivalente a la compresión o dilatación del medio, aumentando el nivel final de ruido. La reducción de estos efectos forma parte de la investigación actual en nuestro laboratorio y sin dudas serán abordados en futuros trabajos.

Como la elastografía por retorno temporal también está basada en la medida del campo elástico a partir de la interferometría speckle, las conclusiones extraídas aquí son extensibles para este caso.

REFERENCIAS

- ¹ G. teer Haar, "Acoustic surgery", *Physics Today* **54**, 29-33 (2001).
- ² Y. Varshni, "Temperature dependence of elastic constants", *Physical Review B*, **2** (10), 3952-3958, (1970).
- ³ E. Gopal, "Statistical mechanics and properties of matter", John Wiley & sons, New York, (1974).
- ⁴ L. Landau, E. Lifchitz, "Théorie de l'élasticité", MIR, Moscou, (1967).
- ⁵ N. Ottosen, M. Ristinmaa, "The mechanics of constitutive modelling", Elsevier, (2005).
- ⁶ C. Simon, P. VanBaren, E. Ebbini, "Two dimensional temperature estimation using diagnostic ultrasound", *IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Control* **45** (4), 1088-1099, (1996).
- ⁷ R. Moreno, C. Damianou, "Non-invasive temperature estimation in tissues via ultrasound echo shifts part I: analytical model", *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (4), 2514-2521-, (1996).
- ⁸ R. Moreno, C. Damianou, "Non-invasive temperature estimation in tissues via ultrasound echo shifts part II: experimental results", *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (4), 2522-2530, (1996).
- ⁹ N. Benech, C. Negreira, "Temperature estimation with adaptive temperature-strain relation", *Proceedings of the 6th International Congress on Biological Physics, ICBP, (#360), Montevideo, (2007).*
- ¹⁰ C. Teixeira, A. Ruano, M. Ruano, W. Pereira, C. Negreira, "Non-invasive Temperature prediction of in-vitro therapeutic ultrasound signals using neural networks", *Medical and Biological Engineering and Computing*, **44** (2), 111-116, (2006).
- ¹¹ N. Miller, J. Bamber, P. Meaney, "Fundamental limitations of non-invasive temperature imaging by means of ultrasound echo strain estimation", *Ultrasound in Med. & Biol.* **28** (10), 1319-1333, (2002).
- ¹² A. Amini, E. Ebbini, T. Georgiou, "Non-invasive estimation of tissue temperature via high-resolution spectral analysis technique", *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, **52** (2), 221-228, (2005).
- ¹³ R. Arthur, W. Straube, J. Trobaugh, E. Moros, "Non-invasive estimation of hyperthermia temperatures with ultrasound", *Int. J. Hyperthermia*, **21** (6), 589-600, (2005).
- ¹⁴ R. Lakes, "Viscoelastic solids" CRC Press Edited by F. Kulacki, University of Minesota, (1999).
- ¹⁶ D. Nelson, M. Cox, "Principios de bioquímica", Ediciones Omega, Barcelona, (2006).
- ¹⁵ T. Wu, J. Felmlee, J. Greeneleaf, S. Riederer, R. Ehman, "Assessment of thermal tissue ablation with MR elastography", *Magnetic Resonance in Medicine*, **45**, 80-87, (2001).
- ¹⁷ N. Benech, C. Negreira, "Monitoring thermal changes in soft tissues by 1D transient elastography" *Proceedings of the 2007 International Congress on Acoustics (ULT -13 -012), Madrid, (2007).*
- ¹⁸ I. Hallaj, R. Cleveland, K. Hynynen, "Simulation of the thermo-acoustic lens effect during focused ultrasound surgery", *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (5), 2245-2253, (2001)
- ¹⁹ A. Alaniz, F. Kallel, E. Hungerford, J. Ophir, "Variational method for estimating the effects of continuously varying lenses in HIFU, sonography and sonography-based cross-correlation methods". *J. Acoust. Soc. Am.* **111** (1), 468-474, (2002).
- ²⁰ L. Ledoux, J. Willigers, P. Brands, A. Hoeks, "Experimental verifications of the correlation behaviour of analytic ultrasound radiofrequency signals received from moving structures", *Ultrasound in Med. & Biol.* **24** (9), 1383-1396, (1998).
- ²¹ T. Otani, "Physical principles and theoretical concepts of transient acoustic fields", *Jpn. J. Appl. Phys.*, **39**, 2888-2897, (2000).
- ²² M. Pernot, M. Tanter, J. Bercoff, K. Waters, M. Fink, "Temperature estimation using ultrasonic spatial compounding imaging", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control*, **51** (5), 606-615, (2004).
- ²³ T. Varghese, J. Ophir, I. Céspedes, "Noise reduction in elastograms using temporal stretching with multicompression averaging", *Ultrasound in Med. & Biol.* **22** (8), 1043-1052, (1996)

CAPITULO 4

CONCLUSION GENERAL Y TRABAJOS FUTUROS

Podemos dividir las contribuciones de este trabajo de tesis en dos grandes áreas. Por un lado un trabajo de análisis teórico-experimental de la propagación de ondas elásticas en sólidos y en particular en sólidos blandos. Por otro lado la aplicación de este análisis a la elastografía ultrasonora para medir la elasticidad en casos concretos, ya sea alimentos, experiencias con tejidos biológicos *in vivo* o monitoreo de cambios locales de temperatura. Ambos aspectos del trabajo experimental están fuertemente basados en la interferometría speckle ultrasonora. Este es un método de investigación que por si solo constituye un área activa de interés actual en acústica ultrasonora. En nuestro trabajo lo hemos empleado como herramienta para medir desplazamientos en forma no invasiva en el volumen de nuestras muestras. Al igual que otros métodos interferométricos permite medir desplazamientos con una resolución muy inferior a la longitud de onda ultrasonora. La incertidumbre en su estimación es del orden de 2-10 μm , dependiendo de las condiciones de la experiencia.

Dentro del enfoque analítico podemos mencionar el estudio de ondas de cabeza en sólidos blandos. En este trabajo original hemos mostrado que a diferencia de sólidos “clásicos” la onda de cabeza en sólidos blandos está presente en todo el volumen debido a que el ángulo crítico en este caso es prácticamente nulo. Si bien su contribución al campo de desplazamientos es débil, existe, debido a su duración temporal, una interacción con la onda de corte que afecta el espectro hacia las bajas frecuencias sobre todo para posiciones angulares donde la contribución del término de acoplamiento también es débil.

Otro aspecto dentro de esta área es el análisis de ondas de superficie en sólidos blandos. Hemos mostrado con resultados experimentales que es posible obtener los parámetros elastográficos de interés en un medio homogéneo midiendo la curva de dispersión de las ondas de Rayleigh en un medio viscoelástico. La dificultad de obtener expresiones analíticas a la ecuación del Rayleigh en este caso nos llevó a realizar aproximaciones para obtener resultados cuantitativos. Sin embargo la resolución numérica muestra la validez de las mismas en nuestras condiciones experimentales. La investigación de ondas de superficie abre futuras puertas en aplicaciones de la elastografía como estudios de la elasticidad de la piel o la posibilidad de detectar desplazamientos superficiales generados por fuentes internas. El método experimental utilizado en este caso constituye una forma original de medir los desplazamientos superficiales en sólidos blandos. La imagen óptica (es decir el contraste) se logra aprovechando la desfocalización generada por la perturbación que causa la propagación de la onda en la superficie. Un aspecto que diferencia el método óptico con respecto a

otras medidas elastográficas es que no es una condición necesaria la presencia de difusores en el medio bajo estudio ya que en este caso no utilizamos señales de speckle. Esta característica es una ventaja cuando la aplicación se hace sobre materiales sin difusores o con alta atenuación acústica a las frecuencias ultrasonoras.

Finalmente, debemos destacar que la posibilidad que brinda el método de interferometría speckle de medir los desplazamientos en el volumen de la muestra nos ha permitido por primera vez investigar experimentalmente el proceso de retorno temporal en el volumen de una cavidad elástica. Podemos resumir en tres aspectos las contribuciones que surgen de este trabajo. En primer lugar debido al carácter vectorial del campo la focalización espacial no es isotrópica como en una cavidad acústica. En el caso de una cavidad sólida, el ancho focal es mayor en la dirección de la fuente que en una dirección perpendicular. Es decir que el criterio de Rayleigh que relaciona la resolución espacial del proceso con la longitud de onda es dependiente de la dirección de observación. En segundo lugar hemos mostrado que en el proceso de focalización a partir del retorno temporal de términos de campo lejano se obtiene entre otros términos una onda de corte con polarización longitudinal, es decir, un término de campo cercano asociado al término de acoplamiento. Sin embargo a diferencia de otros términos de campo cercano, como lo son las ondas evanescentes, este no implica una resolución espacial por debajo de la longitud de onda. Finalmente hemos mostrado que en nuestro caso concreto existe una asimetría temporal respecto al tiempo de focalización. El campo elástico no es el mismo para tiempos equidistantes anteriores y posteriores al de focalización. Esta observación sin embargo no es exclusiva de los sólidos sino que es debida al diagrama de directividad de la fuente. Es posible mostrar que una asimetría similar ocurre en una cavidad acústica utilizando fuentes dipolares. Sin dudas estos temas requieren mayor profundización desde el punto de vista analítico ya sea a partir de las funciones de Green de la elastodinámica o mediante la simulación numérica del problema. Los resultados aquí presentados son el primer paso en esta dirección.

Entrando ahora en el terreno de las aplicaciones las contribuciones realizadas durante este trabajo de tesis cubren varios aspectos. En lo que refiere al uso de electrónica multivía hemos mostrado una modalidad de imagen ecográfica a partir de la composición coherente de ondas planas. Experimentalmente encontramos que la calidad de la imagen (contraste, relación señal/ruido) es simialar o mejor a la que se logra con la ecografía convencional. Una ventaja adicional de esta aproximación es que permite un ritmo mayor en la elaboración de imágenes. Existe un compromiso entre la calidad de la imagen ecográfica y la frecuencia con que se producen. Dependiendo de la aplicación podemos estar interesados en uno u otro aspecto de este compromiso. Para la elastografía transitoria 2D claramente el interés está centrado en adquirir señales con la mayor frecuencia posible para poder seguir la evolución de la onda de baja frecuencia. En

ecografías de diagnóstico el interés está centrado en mejorar el contraste y definir de la mejor manera posible los bordes entre distintas estructuras con el costo de reducir la frecuencia de las imágenes. Sin embargo, el método propuesto a partir de la composición coherente de ondas planas apunta en la dirección de unificar los dos criterios en un solo equipo.

La aplicación del retorno temporal de las ondas de corte a la medida de la elasticidad ha mostrado tener ventajas respecto a otros métodos basados en ultrasonido descritos en la literatura. Podemos resumir el trabajo del capítulo 2 mencionando estas ventajas. En primer lugar y la más importante es que no es necesario hacer hipótesis adicionales sobre las componentes del campo de baja frecuencia que no conocemos para estimar la elasticidad ya que en el proceso de focalización interviene toda la información del campo vectorial. Desde este punto de vista la elastografía por retorno temporal se sitúa en un nivel comparable con la elastografía por resonancia magnética pero evitando las dificultades (prácticas y económicas) que implica trabajar con campos magnéticos de alta intensidad. En segundo lugar, el método propuesto resulta ser independiente de las condiciones de borde, de la forma y excitación temporal de la fuente. Esta característica le brinda una mayor versatilidad al método pudiendo adaptarse a diferentes situaciones prácticas. Como ejemplo se mostró que la realización de una experiencia *in vivo* en el bíceps de un voluntario no representa mayor dificultad (pensemos por lo pronto en la elastografía transitoria 1D donde el pistón y el haz ultrasonoro deben estar alineados). Otro ejemplo fue la medida de elasticidad en quesos utilizando electrónica audible. En este caso la medida por retorno temporal fue la única manera que encontramos de estimar la elasticidad en forma no invasiva. (debido a la atenuación del ultrasonido y la carencia de señales de speckle no fue posible hacer medidas de elastografía transitoria en este caso). Por último hemos mostrado que es posible obtener una estimación cualitativa de la elasticidad aun cuando la frecuencia de muestreo del campo se encuentre bien por debajo del criterio de Nyquist-Shannon. Desde el punto de vista práctico esto significa que la electrónica utilizada no debe ser dedicada exclusivamente a la elastografía sino que se podría implementar en ecógrafos convencionales.

Los resultados enumerados en el párrafo anterior fueron posibles gracias a un tratamiento de señal adecuado para este proceso. En primer lugar mostramos, basados en las aplicaciones interactivas del retorno temporal, que el proceso usual de dos pasos del retorno temporal se puede sustituir por uno solo aplicando la correlación cruzada de la dependencia temporal del campo entre posiciones diferentes. En segundo lugar utilizando la correlación de fase (o filtro inverso) pudimos hacer un uso óptimo de esta información lo que a su vez resulta en la independencia del resultado con la función de excitación temporal de la fuente.

Dentro del marco de una evaluación cuantitativa de la elasticidad debimos recurrir a una simulación numérica del problema para hallar una expresión que relacione la longitud de onda con

el ancho espacial del foco. La dificultad aquí surge de las expresiones analíticas del proceso basadas en el teorema de Betti que no nos permiten obtener en forma sencilla esta relación. A diferencia de un campo escalar en fluidos la integración de las ecuaciones de la elastodinámica en este caso resultan complejas debido al diagrama de directividad de cada término en las funciones de Green. Sin dudas este es uno de los temas que quedan abiertos luego de este trabajo y que deberemos abordar en el futuro. Otro aspecto relacionado con este es la frecuencia temporal que corresponde a la longitud de onda hallada. En una primera aproximación para obtener valores cuantitativos hemos supuesto que el campo se compone de la superposición no degenerada de modos de la cavidad elástica. Sin embargo experimentalmente hallamos que esta hipótesis de trabajo no es cierta. Una de las razones es debida a la atenuación del campo elástico reflejada en el bajo valor del factor de calidad Q en nuestras experiencias. En este trabajo nos hemos limitado a describir las consecuencias de la atenuación en el proceso de retorno temporal mostrando algunos resultados experimentales. Vimos que se pueden reducir estos efectos haciendo un promedio espacial de la focalización que a su vez es equivalente a utilizar múltiples fuentes en el proceso de retorno temporal en torno al foco. Como conclusión podemos decir que para dar un salto en la aplicación y que el método sea también capaz de medir el valor local de la elasticidad se deben buscar fuentes apropiadas de modo de generar una distribución homogénea de la energía del campo elástico. Una posibilidad que queda abierta a investigaciones futuras es utilizar las fuentes internas de ruido del propio organismo haciendo que el método sea pasivo.

Para terminar con el capítulo de aplicaciones hemos decidido investigar los efectos de la temperatura sobre el método de elastografía transitoria. Este es un tema de investigación con interés reciente debido a la posibilidad de monitorear las aplicaciones terapéuticas del ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU). En un análisis muy general de un sólido termoelástico mostramos que las ondas de corte son poco sensibles a los cambios de temperatura. A esto debemos agregar que la variación de la velocidad de la onda de corte debe ser mayor que la incertidumbre en su estimación mediante elastografía transitoria. Por lo tanto los cambios de temperatura deben ser importantes (algunos grados en geles de agar-gelatina) para poder construir una curva de velocidad en función de la temperatura. Pero la temperatura también afecta la velocidad de las ondas de compresión y la relación tensión-deformación en la muestra. Como nuestra modalidad de medida está basada en ultrasonido, debemos tener en cuenta estas modificaciones para evaluar correctamente la elasticidad a nivel local. En particular debemos seguir la evolución de la curva $t(z)$ de manera de evaluar en el algoritmo de correlación el campo de baja frecuencia en las mismas posiciones a medida que cambia el perfil de temperatura en la muestra. De esta manera eliminamos los artefactos producidos por tal modificación en el resultado final. Esta misma curva permite en primera aproximación obtener un mapa del perfil de temperatura en la muestra y compararlo con el

mapa de elasticidad. Sin embargo a la hora de la evaluación cuantitativa de la temperatura el modelo utilizado brinda en general una subestimación debiendo recurrirse a métodos que tomen en cuenta el carácter no-lineal del proceso.

Los cambios de temperatura producen un ruido adicional en la estimación de la fase debido a la decorrelación de las señales de speckle acústico. En este trabajo hemos identificado las causas físicas de este fenómeno en el efecto del lente termoacústico y la deformación (real y aparente) de las señales. El algoritmo de correlación utilizado introduce un término adicional de deformación aparente que afecta el resultado final. Este aspecto de la investigación también queda abierto a futuras contribuciones ya que en principio es posible disminuir esta decorrelación mediante un tratamiento de señal adecuado. En definitiva hemos mostrado con un trabajo original que es posible seguir la evolución local de la elasticidad mediante elastografía transitoria teniendo en cuenta los factores que influyen en el método de medición. Estas conclusiones también son aplicables a la elastografía por retorno temporal debido a que la base de las mediciones es la misma.

APENDICE A

PROBLEMA DE LAMB

I. PLANTEO DEL PROBLEMA

En este apéndice buscamos la solución al campo de desplazamientos generados por una fuerza puntual aplicada normalmente a la superficie libre de un sólido elástico, isotrópico y semi-infinito. El problema se muestra en la figura 1. En grandes líneas la estrategia de resolución es modificar la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde $j = p, s$, utilizando la transformada de Laplace y la transformada de Fourier. El objetivo de estas transformaciones es eliminar la derivada temporal y el operador laplaciano. Estas mismas transformadas se aplican a las condiciones de borde y las condiciones iniciales del problema. Con esto se obtiene un sistema lineal de ecuaciones cuya solución son las componentes del vector de desplazamientos en el espacio de Laplace y Fourier. La última etapa consiste en invertir las transformadas para obtener la solución en el dominio del tiempo y el espacio. Esta etapa es la más difícil de lograr.

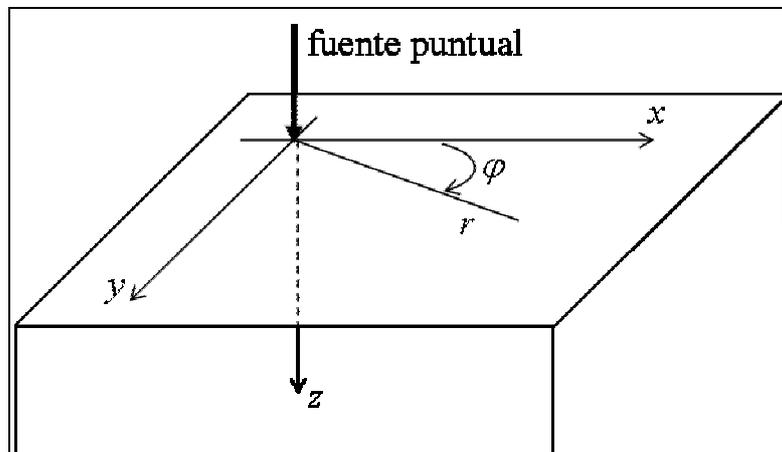


Figura 1: Geometría y definición de las coordenadas del problema planteado.

En la práctica utilizaremos como dependencia temporal para la fuente la función escalón de Heaviside: $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ con el objetivo de evitar singularidades en el cálculo de desplazamientos al utilizar la función de Dirac: $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$. Llamaremos $\vec{u}^H(\vec{r}, t)$ a la respuesta del medio a la función escalón o de Heaviside y $g(\vec{r}, t)$ a la respuesta al impulso o

función de Dirac. Pero notando que $\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$, podemos obtener la solución buscada haciendo la derivada temporal de los desplazamientos hallados, es decir:

$$g(\vec{r}, t) = \frac{\partial u^H(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

A causa de la simetría cilíndrica del problema, los desplazamientos solo dependen de las coordenadas r y z de la figura 1. Por lo tanto:

$$\vec{u}(r, z, t) = u_r(r, z, t)\hat{e}_r + u_z(r, z, t)\hat{e}_z \quad (2)$$

En términos de los potenciales de Lamé $\phi(\vec{r}, t)$ y $\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)\hat{e}_\phi$ podemos escribir los desplazamientos como:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \nabla\phi(\vec{r}, t) + \nabla \times (\Psi(\vec{r}, t)\hat{e}_\phi) \quad (3)$$

Las ecuaciones de movimiento para ϕ y Ψ son entonces:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{r^2}\Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$\text{con: } c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Es posible reducir la segunda ecuación de (4) definiendo:

$$\Psi = \frac{\partial\chi}{\partial r} \quad (5)$$

Con este cambio se obtiene para el potencial vector:

$$\nabla^2\chi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \quad (6)$$

El desplazamiento en función de los potenciales ϕ y χ es:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z} \\ u_z &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial r} \\ u_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Las componentes relevantes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas se expresan:

$$\begin{aligned}\tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right] \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right]\end{aligned}\tag{8}$$

donde se han usado las ecuaciones (4) y (6) para expresar el esfuerzo en términos de los potenciales. Las condiciones de borde en $z = 0$ toman la forma:

$$\begin{aligned}\tau_{zz}(r, 0, t) &= \frac{\delta(r)}{2\pi r} H(t) \\ \tau_{zr}(r, 0, t) &= \tau_{rz} = 0\end{aligned}\tag{9}$$

Para representar quietud en $t = 0$, las condiciones iniciales son:

$$\phi(r, z, 0) = \frac{\partial \phi(r, z, 0)}{\partial t} = \chi(r, z, 0) = \frac{\partial \chi(r, z, 0)}{\partial t} = 0\tag{10}$$

Finalmente, se requiere que los potenciales ϕ y χ y sus derivadas espaciales, se anulen en el infinito.

II. SOLUCIÓN

La estrategia para la solución es entonces hacer la transformada de Laplace y de Fourier de la primera de las ecuaciones (4), la ecuación (6) y las condiciones en (9). La transformada de

Laplace: $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, se anotará para las diferentes cantidades involucradas

como:

$$\Phi(r, z, p) = \mathcal{L}(\phi(r, z, t)); \quad X(r, z, p) = \mathcal{L}(\chi(r, z, t)); \quad T_{ij}(r, z, p) = \mathcal{L}(\tau_{ij}(r, z, t))$$

$$U_i(r, z, p) = \mathcal{L}(u_i(r, z, t))$$

Apliquemos la transformada de Laplace a la primera de las ecuaciones (4) y a la ecuación (6). El resultado es:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \left(\frac{p}{c_p} \right)^2 \Phi = k_p^2 \Phi \\ \nabla^2 X &= \left(\frac{p}{c_s} \right)^2 X = k_s^2 X\end{aligned}\tag{11}$$

La transformada de los desplazamientos y el tensor de esfuerzos es:

$$U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 X}{\partial r \partial z}$$

$$U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r}$$
(12)

$$T_{zz} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + k_s^2 X \right)$$

$$T_{zr} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + k_s^2 X \right)$$
(13)

Finalmente la transformada de las condiciones de borde es:

$$T_{zr}(r, 0, p) = 0$$

$$T_{zz}(r, 0, p) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \frac{1}{p}$$
(14)

Aplicaremos ahora la transformada de Fourier a las ecuaciones precedentes. Para ello anotaremos:

$$\tilde{\Phi}(\xi, z, p) = \int_0^{\infty} r \Phi(r, z, p) J_0(\xi r) dr$$

como la transformada de Fourier o transformada de Hankel de orden cero del potencial Φ . La notación es similar para las otras cantidades. La transformada de Fourier de las ecuaciones (11) queda:

$$\tilde{\Phi}'' - (\xi^2 + k_p^2) \tilde{\Phi} = 0$$

$$\tilde{X}'' - (\xi^2 + k_s^2) \tilde{X} = 0$$
(15)

donde la prima indica derivada respecto a z . Estas ecuaciones tienen como solución:

$$\tilde{\Phi} = A_1(\xi, p) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = +\sqrt{\xi^2 + k_p^2}$$
(16)

$$\tilde{X} = A_2(\xi, p) e^{-\beta z} \quad \text{con } \beta = +\sqrt{\xi^2 + k_s^2}$$
(17)

Las raíces se toman positivas para que los potenciales se anulen para $z \rightarrow \infty$. Falta todavía encontrar la forma de A_1 y A_2 . Para esto necesitaremos las condiciones de borde.

Aplicaremos ahora la transformada a los desplazamientos. Sin embargo a causa de la manera en que opera la transformada en las derivadas respecto a r , la transformación apropiada para U_r es la de primer orden y para U_z la de orden cero. Es decir:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_r(\xi, z, p) &= \int_0^{\infty} r U_r(r, z, p) J_1(\xi r) dr \\ \tilde{U}_z(\xi, z, p) &= \int_0^{\infty} r U_z(r, z, p) J_0(\xi r) dr\end{aligned}\tag{18}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_r &= -\xi(\tilde{\Phi} - \tilde{X}') \\ \tilde{U}_z &= \tilde{\Phi}' - \tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X}\end{aligned}\tag{19}$$

De manera similar la transformada de los esfuerzos es:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{zz} &= \lambda k_p^2 \tilde{\Phi} + 2\mu(\tilde{\Phi}'' - \tilde{X}''' + k_s^2 \tilde{X}') \\ \tilde{T}_{rz} &= -\mu\xi(2\tilde{\Phi}' - 2\tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X})\end{aligned}$$

Las condiciones de borde son por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lambda k_p^2 \tilde{\Phi} + 2\mu(\tilde{\Phi}'' - \tilde{X}''' + k_s^2 \tilde{X}')\Big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p} \\ 2\tilde{\Phi}' - 2\tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X}\Big|_{z=0} &= 0\end{aligned}\tag{20}$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (16) y (17) en (20) obtenemos:

$$(\lambda k_p^2 + 2\mu\alpha^2)A_1 + 2\mu\beta(\beta^2 - k_s^2)A_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p}\tag{21}$$

$$2\alpha A_1 + (2\beta^2 - k_s^2)A_2 = 0\tag{22}$$

Usando que:

$$\lambda k_p^2 + 2\mu\alpha^2 = \mu(k_s^2 + 2\xi^2); \quad \beta^2 - k_s^2 = \xi^2; \quad 2\beta^2 - k_s^2 = 2\xi^2 + k_s^2$$

podemos escribir las ecuaciones (21) y (22) en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2\xi^2 + k_s^2 & 2\beta\xi^2 \\ 2\alpha & (2\xi^2 + k_s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\pi\mu p)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{23}$$

Como resultado del sistema anterior encontramos:

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{1}{2\pi\mu p} \frac{2\xi^2 + k_s^2}{R} \\ A_2 &= \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{2\alpha}{R} \\ R &= (2\xi^2 + k_s^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2\end{aligned}\tag{24}$$

A la función R se la conoce como función de Rayleigh porque uno de sus polos da origen a la onda superficial de Rayleigh. Los desplazamientos transformados por Laplace y Fourier son entonces:

$$\bar{U}_r = \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{\xi \left[(2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} + 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right]}{R} \quad (25)$$

$$\bar{U}_z = \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{\alpha \left[(2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{R} \quad (26)$$

II.1 Inversión de las transformadas

La inversión de Fourier de las ecuaciones (25) y (26) es:

$$U_r(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[(2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} + 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right]}{R} J_1(\xi r) d\xi \quad (27)$$

$$U_z(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi \left[(2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{R} J_0(\xi r) d\xi \quad (28)$$

Debemos ahora invertir la transformada de Laplace para obtener la solución a los desplazamientos en el dominio temporal. La inversión para r y z arbitrarios no es materia sencilla. Empecemos por obtener los desplazamientos sobre el eje z de la figura 1, es decir para $r = 0$.

II.1.A Solución sobre el eje

En el eje $r = 0$. Este es el caso más sencillo y el único para el que se puede tener una solución analítica. Como $J_1(0) = 0$ y $J_0(0) = 1$, tenemos de (27) y (28):

$$U_r(0, z, p) = 0 \quad (29)$$

$$U_z(0, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi \left[(2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{pR} d\xi \quad (30)$$

De manera que sólo es necesario invertir U_z . La ecuación (30) se puede expresar como:

$$U_z(0, z, p) = U_{zp} + U_{zs}$$

con:

$$U_{zp} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi (2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z}}{pR} d\xi \quad (31)$$

$$U_{zs} = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha\xi^3 e^{-\beta z}}{pR} d\xi \quad (32)$$

La inversión de cada uno de estos términos se puede hacer a través de la técnica de Cagniard. El procedimiento consiste en manipular la ecuación haciendo cambios de variable de manera se pueda escribir en la forma:

$$U(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt$$

de esta manera tenemos simplemente que:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(p)) = h(t)$$

Empecemos con la ecuación (31). Por la forma de la ecuación es inmediata la asignación $\alpha z = pt$.

Recordando que $\alpha^2 = \xi^2 + (p/c_p)^2$ tenemos entonces:

$$\xi^2 = \left(\frac{p}{c_p}\right)^2 \left(\left(\frac{c_p t}{z}\right)^2 - 1 \right) \Rightarrow d\xi = \frac{p}{c_p} \frac{c_p^2 t}{z^2} \left(\left(\frac{c_p t}{z}\right)^2 - 1 \right)^{-1/2} dt$$

Como ξ es una variable real tenemos como condición para t : $t \geq t_p = z/c_p$. Distinguiamos a t_p como el tiempo de arribo de la onda de compresión al punto z . Sustituyendo este cambio de variable en la ecuación (31) encontramos:

$$U_{zp}(0, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu z} \int_{t_p}^{\infty} \frac{\tau^2 (2(\tau^2 - 1) + \gamma^2) e^{-pt}}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} dt \quad (33)$$

donde $\tau = c_p t / z = t / t_p$ y $\gamma = c_p / c_s$. De esta ecuación surge entonces:

$$u_{zp}^H(0, z, t) = u_{zp}^0 = \frac{1}{2\pi\mu z} \left[\frac{H(t - t_p) \tau^2 (2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad (34)$$

donde H es la función escalón de Heaviside.

La inversión de la ecuación (32) se hace en forma análoga. El resultado es:

$$u_{zs}^H(0, z, t) = u_{zs}^0 = \frac{1}{2\pi\mu z} \left[\frac{H(t - t_s) \tau (\tau^2 - \gamma^2) (\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}}{(\tau^2 - \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \gamma^2) (\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (35)$$

donde $t_s = z/c_s$ es el tiempo de arribo de la onda de corte al punto z , y como antes, $\tau = c_p t / z$ y H es la función de Heaviside. La solución buscada sobre el eje es entonces:

$$g_z(0, z, t) = g_{zp}(0, z, t) + g_{zs}(0, z, t) = g_{zp}^0 + g_{zs}^0 \quad (36)$$

con:

$$g_{zp}^0 = \frac{\partial u_{zp}^0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H(t-t_p) \tau^2 (2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad (37)$$

$$g_{zs}^0 = \frac{\partial u_{zs}^0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H(t-t_s) \tau (\tau^2 - \gamma^2) (\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}}{(\tau^2 - \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \gamma^2) (\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (38)$$

Este resultado muestra que sobre el eje de la fuente se puede registrar la contribución de un término que viaja a la velocidad de las ondas de compresión y de un término que viaja a la velocidad de las ondas de corte. Esta componente es a la que accedemos en elastografía transitoria 1D.

II.1.B Solución fuera del eje

II.1.B.1 Componente z

Obtendremos ahora la solución para puntos arbitrarios del semi-espacio. Empezaremos por invertir la componente z. Para ello partimos de la ecuación (28) que se puede escribir como:

$$U_z = U_z^p + U_z^s$$

$$U_z^p = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi (2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z}}{Rp} J_0(\xi r) d\xi \quad (39)$$

$$U_z^s = -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi^3 e^{-\beta z}}{Rp} J_0(\xi r) d\xi$$

La dificultad radica ahora en que la función de Bessel $J_0(\xi r)$ no toma una forma sencilla para $r \neq 0$. La inversión de la transformada de Laplace se hace a través de la técnica de Cagniard modificada, debida a de Hoop. La técnica consiste en expresar la función de Bessel en su forma integral:

$$J_0(\xi r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi \cos\varphi} d\varphi \quad (40)$$

y hacer el cambio de variable:

$$\tan(\varphi) = \frac{w}{q}; \quad \xi = \frac{p}{c_p} \sqrt{q^2 + w^2}$$

Sustituyendo en las expresiones dadas en (39) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 U_z^p &= \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_p m_0 e^{-\frac{p}{c_p}(m_p z - iqr)}}{R} dqdw \\
 U_z^s &= -\frac{1}{\pi^2\mu} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_p (q^2 + w^2) e^{-\frac{p}{c_p}(m_s z - iqr)}}{R} dqdw
 \end{aligned} \tag{41}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 m_p &= (q^2 + w^2 + 1)^{1/2}; & m_s &= (q^2 + w^2 + \gamma^2)^{1/2}; & \gamma &= c_p / c_s \\
 m_0 &= \gamma^2 + 2(q^2 + w^2); & R &= m_0^2 - 4m_p m_s (q^2 + w^2)
 \end{aligned}$$

Onda de compresión (P)

El procedimiento ahora es análogo al que se hizo para hallar la solución sobre el eje. Para invertir U_z^p , se hace la identificación:

$$t = \frac{1}{c_p} (m_d z - iqr) \tag{42}$$

por lo que:

$$q = q_p^{\pm} = \frac{c_p}{\rho} \left[itr \pm z(t^2 - t_{wp}^2)^{1/2} \right] \tag{43}$$

para $t \geq t_{wp}$ donde:

$$t_{wp} = \frac{\rho}{c_p} (w^2 + 1)^{1/2}; \quad \rho = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

La ecuación (43) define un contorno en el plano q -complejo que permite realizar la integral en la variable q de las ecuaciones (41) a partir del teorema de Cauchy. Para ello es necesario identificar singularidades y puntos de ramificación en el integrando. Ellas son las raíces de la función de Rayleigh R que representa un polo simple en $q = Q_R$ y dos puntos de ramificación en $q = Q_p$ y $q = Q_s$ donde:

$$\begin{aligned}
 Q_R &= i(w^2 + \gamma_R^2)^{1/2}; & \gamma_R &= c_p / c_R; & c_R &= \text{velocidad onda Rayleigh} \\
 Q_p &= i(w^2 + 1)^{1/2}; & Q_s &= i(w^2 + \gamma^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Estas singularidades y el contorno definido por (43) se muestran en la figura 2. Se trata de una rama de una hipérbola con t como parámetro. Tiene vértice en: $q = i(w^2 + 1)^{1/2} r / \rho$. Como $r / \rho < 1$, la hipérbola no interseca el corte entre Q_p y Q_s en el eje imaginario. Los arcos C_I y C_{II} se introducen de manera de formar un contorno cerrado $C = \text{Re}[q] + C_I + q_d^+ + q_d^- + C_{II}$. Aplicando el teorema de Cauchy a la integral (41) en el contorno C obtenemos:

$$U_z^P(r, z, p) = \frac{1}{\pi^2 c_p \mu} \int_0^\infty \int_{t_{wp}}^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{m_p m_0}{R} \frac{dq_p}{dt} \right] e^{-pt} dt dw \quad (44)$$

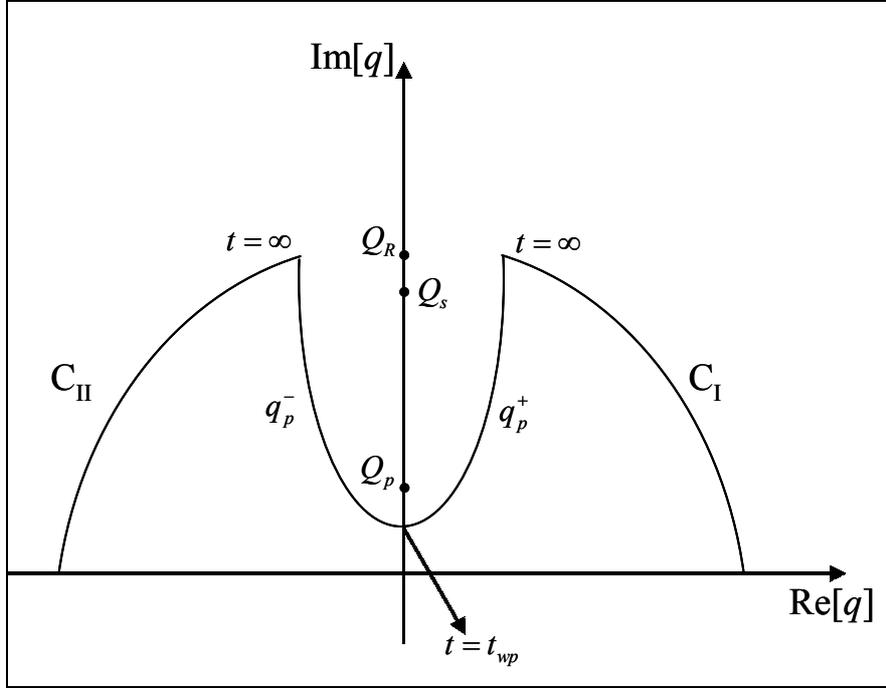


Figura 2. Contorno de integración para la componente z de la onda de compresión p que queda definido por la curva cerrada $C = \operatorname{Re}[q] + C_I + q_p^+ + q_p^- + C_{II}$

U_z^P es la contribución de q_p^\pm ya que la contribución a la integral a lo largo de C_I y C_{II} es nula cuando el radio de los contornos tienden a infinito ($t \rightarrow \infty$). Como $t \leq t_{wp}$ tenemos que $w \leq T_p = \left((t/t_p)^2 - 1 \right)^{1/2}$ con $t_p = \rho/c_p$. Intercambiando el orden de integración en (44), e invirtiendo la transformada de Laplace encontramos:

$$u_{zp}^H(r, z, t) = \frac{H(t-t_p)}{\pi^2 c_p \mu} \int_0^{T_p} \operatorname{Re} \left[\frac{m_d m_0}{R} \frac{dq_p}{dt} \right] dw \quad (45)$$

Onda de corte (S)

Para la inversión de U_z^S se sigue el mismo procedimiento. La inversión de la ecuación:

$$U_z^S = -\frac{1}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{m_p (q^2 + w^2) e^{-\frac{p}{c_p}(m_s z - iqr)}}{R} dq dw \quad (46)$$

se hace identificando:

$$t = \frac{1}{c_p} (m_s z - iqr)$$

de manera que

$$q = q_s^\pm = \frac{c_p}{\rho^2} \left(itr \pm z(t^2 - t_{ws}^2)^{1/2} \right) t \geq t_{ws}; \quad t_{ws} = \frac{\rho}{c_p} (w^2 + \gamma^2)^{1/2} \quad (47)$$

Las singularidades en este caso son las mismas que para la inversión de U_z^p . La ecuación (47) define también una rama de hipérbola con vértice en:

$$q_s = i(w^2 + \gamma^2)^{1/2} \frac{r}{\rho}$$

Como $r/\rho < 1$, el vértice cae debajo de la singularidad en Q_s , pero puede caer encima de Q_p . La condición para que esto se dé es:

$$(w^2 + \gamma^2)^{1/2} \frac{r}{\rho} > (w^2 + 1)^{1/2}$$

Esta condición se cumple si:

$$\frac{r}{\rho} \geq \frac{c_s}{c_d} \text{ y } w \in [0, w_1) \text{ con } w_1 = \frac{(r^2 \gamma^2 - \rho^2)^{1/2}}{z}$$

Si se cumplen estas condiciones, es necesario modificar el camino de integración para evitar el corte entre Q_p y Q_s en el eje imaginario. Esta modificación da origen a la llamada onda de cabeza. El contorno de integración en el plano q -complejo se muestra en la figura 3. Nuevamente se introducen las curvas C_I y C_{II} a fin de lograr un contorno cerrado. Las singularidades son las mismas que para U_z^p , pero el contorno tiene dos posibilidades que se muestran en la figura, uno en línea entera y el otro en línea a trazos. Si se cumple $r/\rho < c_s/c_d$, o si $r/\rho > c_s/c_d$ y $w \in [w_1, \infty)$, entonces el contorno es el de línea entera anotado como q_s^\pm , dado por la ecuación (47). Sin embargo si $r/\rho > c_s/c_d$ y $w \in [0, w_1)$, el vértice de q_s^\pm cae entre las singularidades $q = Q_p$ y $q = Q_s$. En este caso el contorno de integración se ve modificado por la línea a trazos indicada con q_s^\pm más q_{sp} con:

$$q_{sp} = \frac{ic_p}{\rho^2} \left[tr - z(t_{ws}^2 - t^2)^{1/2} \right]; \quad \text{para: } t_{ws} \geq t \geq t_{wsp}, \text{ donde:}$$

$$t_{wsp} = \frac{1}{c_p} \left[(\gamma^2 - 1)^{1/2} z + (w^2 + 1)^{1/2} r \right]$$

Por lo tanto aplicando el teorema de Cauchy a la integral (46) obtenemos para $t \geq t_{ws}$:

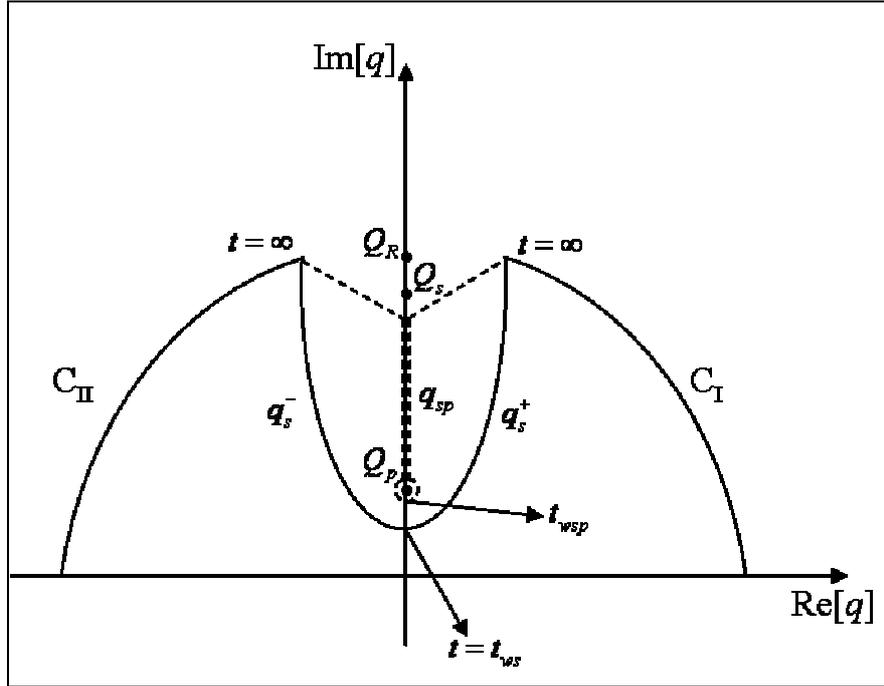


Figura 3. Contorno de integración para la componente z de la onda de corte s

$$U_z^{s1}(r, z, p) = -\frac{1}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{t_{ws}}^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{m_p (q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] e^{-pt} dw \quad (48)$$

Como $t \geq t_{ws}$ tenemos $w \leq T_s = \gamma \left((t/t_s)^2 - 1 \right)^{1/2}$ con $t_s = \rho/c_s$. Intercambiando el orden de integración e invirtiendo la transformada de Laplace obtenemos:

$$u_{zs}^1(r, z, t) = -\frac{H(t-t_s)}{\pi^2 \mu} \int_0^{T_s} \operatorname{Re} \left[\frac{m_p (q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (49)$$

Sin embargo si $r/\rho > c_s/c_d$ y $w \in [0, w_1)$ entonces el contorno de integración pasa a ser el contorno punteado en la figura 3 y la aplicación del teorema de Cauchy a la integral en (46) queda:

$$U_z^{s2}(r, z, p) = -\frac{H(r/\rho - c_s/c_d)}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{t_{wsp}}^{t_{ws}} \operatorname{Re} \left[\frac{m_p (q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] e^{-pt} dw \quad (50)$$

Como $t_{ws} \leq t \leq t_{wsp}$ tenemos $T_s \leq w \leq T_{sp}$ con:

$$T_{sp} = \left[\left(\frac{c_p(t-t_{sp})}{r} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} ; t_{sp} = \frac{1}{c_p} \left(\left(\gamma^2 - 1 \right)^{1/2} z + r \right)$$

Además $w < w_1$ por lo que:

$$t \leq t_B = \frac{\rho^2 (\gamma^2 - 1)^{1/2}}{z c_p}$$

Intercambiando el orden de integración e invirtiendo la transformada de Laplace obtenemos finalmente:

$$u_{zs}^2(r, z, t) = -\frac{H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t)}{\pi^2\mu} \int_{T_s}^{T_{sp}} \text{Re} \left[\frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (51)$$

Este último término proviene de bordear a la singularidad Q_p en el camino de integración como se muestra en la figura 3. Esto es, su origen se debe a la intersección superficial de la componente P en $t = t_p$ y es consecuencia de las condiciones de borde libre. Combinando las ecuaciones (49) y (51) tenemos la expresión final para el término $u_{zs}(r, z, t)$:

$$u_{zs}^H(r, z, t) = -\frac{H(t-t_s)}{\pi^2\mu} \int_0^{T_s} \text{Re} \left[\frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw - \frac{H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t)}{\pi^2\mu} \int_{T_s}^{T_{sp}} \text{Re} \left[\frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (52)$$

III SOLUCIÓN FINAL: RESPUESTA AL IMPULSO

La inversión de la componente r se hace en forma análoga. El resultado final se puede resumir en la siguiente expresión:

$$u_{\alpha p}^H(r, z, t) = H(t-t_p) \int_0^{T_p} \text{Re} \left[K_{\alpha p}(q_p, w) \frac{dq_p}{dt} \right] dw \quad (53)$$

$$u_{\alpha s}^H(r, z, t) = H(t-t_s) \int_0^{T_s} \text{Re} \left[K_{\alpha s}(q_s, w) \frac{dq_s}{dt} \right] dw + H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t) \int_{T_s}^{T_{sp}} \text{Re} \left[K_{\alpha s}(q_{sp}, w) \frac{dq_{sp}}{dt} \right] dw \quad (54)$$

donde $\alpha = r, z$ y

$$K_{rp} = -iqm_0M ; \quad K_{zp} = m_p m_0 M$$

$$K_{rs} = 2iqm_p m_s M ; \quad K_{zs} = -2m_p (q^2 + w^2) M$$

$$M = \frac{1}{\pi^2 c_p \mu} \frac{1}{R}$$

Como el resultado buscado es la respuesta al impulso tenemos finalmente que la solución fuera del eje es la derivada temporal de las ecuaciones (53) y (54):

$$g_{\alpha p}(r, z, t) = \frac{\partial u_{\alpha p}^H(r, z, t)}{\partial t} \quad (55)$$

$$g_{\alpha s}(r, z, t) = \frac{\partial u_{\alpha s}^H(r, z, t)}{\partial t} \quad (56)$$

IV DIAGRAMA DE DIRECTIVIDAD

A pesar de que no podemos evaluar las expresiones (55) y (56) como función del tiempo, si podemos posicionarnos al tiempo de arribo de cada onda (P o S) estudiar la amplitud en función del ángulo, es decir obtener el diagrama de directividad de cada término. La solución se expresa como sigue:

Onda P

$$g_{zp}(r, \theta, t_p^+) \cong \frac{1}{\pi\mu} \frac{N_{pz}(\theta)}{D_p(\theta)} T_p^{-1}$$

$$g_{rp}(r, \theta, t_p^+) \cong \frac{1}{\pi\mu} \frac{N_{pr}(\theta)}{D_p(\theta)} T_p^{-1}$$

con:

$$N_{pz}(\theta) = \cos^2(\theta) [\gamma^2 - 2 \sin^2(\theta)]$$

$$N_{pr}(\theta) = \sin(\theta) \cos(\theta) [\gamma^2 - 2 \sin^2(\theta)]$$

$$T_p = (t^2 - t_p^2)^{1/2}$$

Onda S

$$g_{zs}(r, \theta, t_s^+) \cong \frac{1}{\gamma\pi\mu} \frac{N_{sz}(\theta)}{D_s} T_s^{-1}$$

$$g_{rs}(r, \theta, t_s^+) \cong \frac{1}{\gamma\pi\mu} \frac{N_{sr}(\theta)}{D_{sr}} T_s^{-1}$$

con:

$$N_{sz}(\theta) = \begin{cases} -8 \sin^4(\theta) \cos^2(\theta) [\sin^2(\theta) - \gamma^{-2}] & \text{si } \theta > \theta_c \\ -2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) [\gamma^{-2} - \sin^2(\theta)]^{1/2} & \text{si } \theta < \theta_c \end{cases}$$

$$N_{sr}(\theta) = \begin{cases} -8 \sin^3(\theta) \cos^3(\theta) [\sin^2(\theta) - \gamma^{-2}] & \text{si } \theta > \theta_c \\ -2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) [\gamma^{-2} - \sin^2(\theta)]^{1/2} & \text{si } \theta < \theta_c \end{cases}$$

$$D_s(\theta) = \begin{cases} [1 - 2 \sin^2(\theta)]^4 + 16 \sin^4(\theta) \cos^2(\theta) [\sin^2(\theta) - \gamma^{-2}] & \text{si } \theta > \theta_c \\ [1 - 2 \sin^2(\theta)]^2 + 4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) [\gamma^{-2} - \sin^2(\theta)]^{1/2} & \text{si } \theta < \theta_c \end{cases}$$

$$T_s = (t^2 - t_s^2)^{1/2}$$

APENDICE B

SOLUCION APROXIMADA AL PROBLEMA DE LAMB

I. INTRODUCCION

En el apéndice A mostramos la solución exacta al problema de Lamb. Si bien es posible obtener el campo de desplazamientos en cualquier punto del semi-espacio mediante una integración numérica de las ecuaciones, los cálculos son tediosos y largos. Por esta razón obtendremos aquí una solución aproximada que permite obtener expresiones analíticas para todo el espacio. En particular estas ecuaciones son útiles para calcular el campo de difracción de una fuente extendida.

El procedimiento consiste en manejar la ecuación de ondas con fuente en el dominio de Fourier espacial y temporal. En estas condiciones la ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica que puede resolverse en forma directa. El paso final consiste en retornar las ecuaciones en soluciones dependientes del espacio y tiempo reales. La solución al problema de Lamb se simplifica debido a consideraciones que simplifican las condiciones de borde.

Empezaremos por escribir la ecuación de ondas para un sólido elástico e isotrópico con una fuente puntual e impulsional ubicada en el origen del sistema de coordenadas:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u}(\vec{r},t) + \mu\nabla^2\vec{u}(\vec{r},t) - \rho\frac{\partial^2\vec{u}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\vec{A}\delta(t)\delta(\vec{r}) \quad (1)$$

donde \vec{A} es un vector que representa la amplitud y dirección de la fuerza puntual.

II. SOLUCION

Para resolver esta ecuación empecemos por usar la transformada de Fourier en el tiempo definida como:

$$\vec{U}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{u}(\vec{r},t) e^{i\omega t} dt \quad (2)$$

El segundo paso consiste en aplicar la transformada de Fourier en el espacio definida como:

$$\vec{U}(\vec{k},\omega) = \int_V \vec{U}(\vec{r},\omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad (3)$$

Aplicando las transformaciones (2) y (3) a (1) obtenemos:

$$(\lambda + \mu)(\vec{k}\cdot\vec{U}(\vec{k},\omega))\vec{k} + (\mu|k|^2 - \rho\omega^2)\vec{U}(\vec{k},\omega) = \vec{A} \quad (4)$$

El segundo término del lado izquierdo en esta ecuación es proporcional al desplazamiento $\vec{U}(\vec{k},\omega)$, mientras que el primer término depende del producto escalar del desplazamiento con el vector \vec{k} . Si

calculamos el producto escalar de la ecuación (4) con \vec{k} obtenemos una simplificación que permite despejar el producto $\vec{k} \cdot \tilde{U}(\vec{k}, \omega)$:

$$\vec{k} \cdot \tilde{U}(\vec{k}, \omega) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{A}}{(\lambda + 2\mu)|k|^2 - \rho\omega^2} = \frac{\vec{k} \cdot A}{\rho(c_p^2|k|^2 - \omega^2)} \quad (5)$$

donde c_p es la velocidad de las ondas de compresión. Sustituyendo (5) en (4) podemos despejar finalmente el desplazamiento $\tilde{U}(\vec{k}, \omega)$:

$$\rho c_s^2 \tilde{U}(\vec{k}, \omega) = \frac{\vec{A}}{|k|^2 - k_s^2} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{A})\vec{k}}{k_s^2} \left(\frac{1}{|k|^2 - k_s^2} - \frac{1}{|k|^2 - k_p^2} \right) \quad (6)$$

donde c_s es la velocidad de las ondas de corte y $k_p = \omega / c_p$, $k_s = \omega / c_s$.

II.1 Inversión de las transformadas

Empecemos por invertir la transformada espacial. Para hacerlo consideremos la función $\vec{G}_\alpha(\vec{r}, \omega)$ con $\alpha = p, s$ definida como:

$$G_\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} e^{i\omega|\vec{r}|/c_\alpha} \quad (7)$$

Esta expresión corresponde a una onda esférica que diverge desde el origen de coordenadas con velocidad c_α . Su transformada de Fourier espacial es:

$$\tilde{G}_\alpha(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{|k|^2 - k_\alpha^2}$$

Basados en este resultado, la inversión del primer término de la ecuación (6) es inmediata y se reduce a $G_s(\vec{r}, \omega)\vec{A}$. De la expresión (7) podemos notar que la transformada de $\nabla \cdot (G_\alpha(\vec{r}, \omega)\vec{A})$ está dada por $-\tilde{G}_\alpha(\vec{k}, \omega)(\vec{k}, \vec{A})\vec{k}$. Combinando estos dos resultados encontramos la siguiente expresión para el campo de desplazamientos:

$$\rho c_s^2 \vec{U}(\vec{r}, \omega) = G_s(\vec{r}, \omega)\vec{A} + \frac{1}{k_s^2} \nabla \cdot [(G_s(\vec{r}, \omega) - G_p(\vec{r}, \omega))\vec{A}] \quad (8)$$

Debemos ahora invertir la transformada en el tiempo. Para hacerlo se requiere expandir el segundo término a la derecha en (8):

$$\begin{cases} \nabla \cdot (G_\alpha(\vec{r}, \omega)\vec{A}) = G'_\alpha(\vec{r}, \omega)\hat{e}_r \cdot \vec{A} \\ \nabla \nabla \cdot (G_\alpha(\vec{r}, \omega)\vec{A}) = \frac{1}{r} G'_\alpha(\vec{r}, \omega)(\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r) + G''_\alpha(\vec{r}, \omega)(\vec{A} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r \end{cases}$$

donde $r = |\vec{r}|$, $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ y la prima indica derivada con respecto a r :

$$\begin{cases} G'_\alpha(\vec{r}, \omega) = \left(\frac{i\omega}{c_\alpha} - \frac{1}{r} \right) G_\alpha(\vec{r}, \omega) \\ G''_\alpha(\vec{r}, \omega) = \left(\frac{-\omega^2}{c_\alpha^2} - \frac{2i\omega}{rc_\alpha} + \frac{2}{r^2} \right) G_\alpha(\vec{r}, \omega) \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en (8) y luego de algunos pasos encontramos:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho U(\vec{r}, \omega) = & \frac{1}{rc_p^2} (\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r e^{i\omega r/c_p} + \frac{1}{rc_s^2} [\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r] e^{i\omega r/c_s} + \\ & \frac{1}{r^3} [\vec{A} - 3(\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r] \left[\frac{e^{i\omega r/c_p}}{\omega^2} - \frac{ir e^{i\omega r/c_p}}{\omega c_p} - \frac{e^{i\omega r/c_s}}{\omega^2} + \frac{ir e^{i\omega r/c_s}}{\omega c_s} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Esta ecuación se compone de tres términos. La dependencia de los dos primeros con ω es simplemente $e^{i\omega r/c_\alpha}$ por lo que la inversión en el tiempo es inmediata y está dada por $\delta(t - r/c_\alpha)$.

Para invertir el tercer término usaremos las propiedades de la transformada de Fourier respecto a las derivadas notando que:

$$\begin{cases} TF^{-1} \left(\frac{e^{i\omega r/c_\alpha}}{\omega^2} \right) = - \left(t - \frac{r}{c_\alpha} \right) H \left(t - \frac{r}{c_\alpha} \right) \\ TF^{-1} \left(\frac{ir e^{i\omega r/c_\alpha}}{\omega} \right) = H \left(t - \frac{r}{c_\alpha} \right) \end{cases}$$

donde TF^{-1} indica la transformada inversa y $H(t)$ es la función escalón. Usando estos resultados en (9) encontramos finalmente:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho\vec{u}(\vec{r}, t) = & \frac{(\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r}{rc_p^2} \delta \left(t - \frac{r}{c_p} \right) + \frac{\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r}{rc_s^2} \delta \left(t - \frac{r}{c_s} \right) + \\ & \frac{\vec{A} - 3(\vec{A} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r}{r^3} \left[tH \left(t - \frac{r}{c_p} \right) - tH \left(t - \frac{r}{c_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

En un sistema de coordenadas cartesiano (x_1, x_2, x_3) el vector inicial de la fuente \vec{A} se expresa como $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ y el vector unitario \hat{e}_r como $\hat{e}_r = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ donde $\gamma_i = x_i/r$. Por lo tanto la componente j de la solución que resulta de la componente i del vector inicial de la fuente $g_{ij}(\vec{r}, t)$ se puede escribir como la contribución de tres términos:

$$g_{ij}(\vec{r}, t) = A_i [g_{ij}^p + g_{ij}^s + g_{ij}^{ps}]$$

donde:

$$\left\{ \begin{aligned} g_{ij}^p(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho c_p^2} \frac{\gamma_i \gamma_j}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c_p}\right) \\ g_{ij}^s(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho c_s^2} \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c_s}\right) \\ g_{ij}^{ps}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j}{r^3} \left[tH\left(t - \frac{r}{c_p}\right) - tH\left(t - \frac{r}{c_s}\right) \right] \end{aligned} \right. \quad (11)$$

El primer término representa una onda esférica que se propaga con velocidad c_p y corresponde al término de compresión. Como el diagrama de directividad es proporcional a γ_j el desplazamiento es paralelo a \vec{r} de modo que se trata de una onda longitudinal. Análogamente el segundo término corresponde con la onda de corte ya que podemos verificar que el desplazamiento es perpendicular a \vec{r} . El tercer término es el llamado término de acoplamiento entre la onda de compresión y la onda de corte. Este término no es ni puramente longitudinal ni puramente transversal. Se trata de un término de campo cercano ya que su amplitud decae más rápidamente que los otros dos.

III. APLICACIÓN A LA ELASTOGRAFÍA TRANSITORIA

III.1 Fuente puntual

Como aplicación de estos resultados a la elastografía transitoria, estamos interesados en la componente z de los desplazamientos generados por una fuente puntual actuando en la dirección z en la superficie libre de un sólido blando, es decir en el problema de Lamb. En la sección anterior calculamos la función de Green para un medio infinito. La expresión para un medio semi-infinito difiere de ésta solo en un factor 2. La presencia de este factor está relacionada con la interfase que actúa como espejo y por lo tanto brinda una fuente imagen a la original por la simetría con el plano. Como en nuestro caso la fuente está ubicada en la interfase, la fuente imagen coincide con la original. Esto explica entonces el factor 2.

Estamos interesados en los resultados sobre el eje de la fuente, es decir en $2g_{zz}(z, t)$. Como la fuente actúa en la dirección z , el único término no nulo del vector inicial de la fuente es A_3 y el coseno director $\gamma_3 = z/r = \cos(\theta)$. En un sólido blando ($c_p \gg c_s$) el primer término de (11) es despreciable frente a los otros dos (asumiendo que las medidas se hacen en campo cercano). Además en el eje de la fuente ($\theta = 0$) el término de la onda de corte se anula. Por lo tanto el único término relevante en nuestras experiencias es el término de acoplamiento $2g_{zz}^{ps}(z, t)$. La figura 1 muestra una comparación entre la función de Green exacta para el problema de Lamb (calculada en el apéndice A) y la función aproximada obtenida aquí. Vemos que la mayor diferencia entre ellas ocurre para tiempos posteriores a $t_s = z/c_s$. Estas diferencias son debidas a que la función aproximada no tiene en cuenta la contribución al campo de términos de origen superficial.

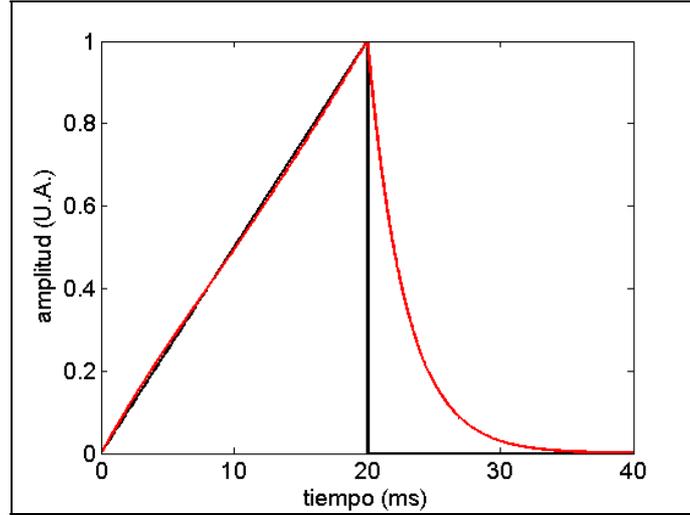


Figura 1. Comparación entre la solución exacta (—) y aproximada (—) al problema de Lamb sobre el eje de la fuente. La mayor diferencia entre las dos soluciones se da luego del tiempo t_s (20 ms en este ejemplo) y es debida a que la solución aproximada no tiene en cuenta la contribución de términos de origen superficial al campo.

Nos interesa ahora conocer el comportamiento del término de acoplamiento con la distancia a la fuente pues este es el término que medimos experimentalmente. Para ello trabajaremos en el dominio de frecuencia temporal ω ya que el análisis resulta más sencillo. La transformada de Fourier temporal del término de acoplamiento está expresada en el tercer término a la derecha en la ecuación (9). Si las medidas se toman a una distancia tal que se cumpla $r \ll c_p / \omega = \lambda_p$ podemos aproximar esa expresión sobre el eje de la fuente por:

$$F(\vec{r}, \omega) = G_{zz}^{ps}(\vec{r}, \omega) \cong \frac{c_s^2}{\omega r^3} \left[1 - \frac{i\omega r}{c_s} - e^{-i\omega r / c_s} \right] e^{i\omega r / c_s} \quad (12)$$

dada una frecuencia angular ω el comportamiento de $F(\vec{r}, \omega)$ solamente depende de r y podemos estudiar los dos comportamientos asintóticos $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$. En el primer caso obtenemos:

$$F_{r \rightarrow 0}(\omega) \cong \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{i\omega r}{3c_s} \right) e^{i\omega r / c_s} \quad (13)$$

Por lo tanto en este límite la amplitud A_F y la fase ϕ se comportan como:

$$\begin{cases} A_F \cong \frac{1}{2r} \\ \phi \cong \arctan\left(-\frac{\omega r}{3c_s}\right) + \frac{\omega r}{c_s} \cong \frac{2\omega r}{3c_s} \end{cases} \quad (14)$$

Estas expresiones asintóticas indican que el término de acoplamiento se propaga con una velocidad da fase igual a $3c_s/2$ y la amplitud decae como r^{-1} . En el segundo caso tenemos:

$$F_{r \rightarrow \infty}(\omega) \cong \frac{c_s}{\omega r^2} e^{i(\omega r / c_s - \pi / 2)} \quad (15)$$

Por lo tanto la amplitud y la fase se comportan como:

$$\begin{cases} A_F \cong \frac{c_s}{\omega r^2} \\ \phi \cong \frac{\omega r}{c_s} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En este caso el término de acoplamiento se propaga con una velocidad de fase igual a la velocidad de la onda de corte y su amplitud decae como r^{-2} . El límite entre las dos expresiones asintóticas ocurre a una distancia que puede definirse como la distancia r_0 para la cual las dos expresiones de la fase se igualan:

$$\phi_{r \rightarrow \infty} = \phi_{r \rightarrow 0} \Rightarrow \frac{\omega r_0}{c_s} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\omega r_0}{3c_s} \Rightarrow r_0 = \frac{3c_s}{4f} = \frac{3}{4}\lambda_s \quad (16)$$

III.2 Fuente extendida

En las experiencias de elastografía transitoria 1D utilizamos en general fuentes circulares. Conocer la atenuación geométrica de este tipo de fuentes es útil pues permite corregir los datos experimentales y obtener la caída de la amplitud debida a la absorción. Consideraremos entonces el caso de una fuente circular de radio R que actúa en modo pistón en el plano $z = 0$. De todas las componentes del campo solamente nos interesa la componente z que es la que medimos en elastografía transitoria. De las expresiones de Green, podemos escribir el campo generado por esta fuente como:

$$u_{zz}(r, t) = 2A_3 \int_S \left(g_{zz}^p(\vec{r} - \vec{r}', t) + g_{zz}^s(\vec{r} - \vec{r}', t) + g_{zz}^{ps}(\vec{r} - \vec{r}', t) \right) dS \quad (17)$$

donde $S = \pi R^2$ y \vec{r}' varía sobre la superficie del pistón. Como vimos, la contribución del primer término (onda de compresión) es despreciable frente a los otros dos.

Calcularemos aquí solamente el campo sobre el eje de la fuente. Si bien es posible obtener expresiones del campo fuera del eje, la alta simetría de esta situación simplifica mucho las cuentas. Empezaremos por calcular la contribución de la onda de corte:

$$u_{zz}^s(r, t) = \frac{A_3}{2\pi\rho c_s^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'^2}{r'^2 + z^2} \frac{1}{(r'^2 + z^2)^{1/2}} \delta\left(t - \frac{(r'^2 + z^2)^{1/2}}{c_s}\right) r' dr' d\varphi' \quad (18)$$

Esta integral no representa dificultad pues por la simetría del problema el integrando no depende de φ' . Mediante cambios de variables apropiados ampliamente descritos en la literatura para el caso de un pistón en fluidos llegamos a:

$$u_{zz}^s(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ \frac{A_3}{\rho c_s} \left(1 - \frac{z^2}{c_s^2 t^2} \right) & \text{si } t_0 < t < t_1 \\ 0 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (19)$$

donde $t_0 = z/c_s$ y $t_1 = \sqrt{z^2 + R^2}/c_s$.

La contribución del término de acoplamiento sobre el eje se puede escribir como:

$$u_{zz}^{ps}(r, t) = \frac{A_3 t}{\rho} \int_{r'=0}^{r'=R} \left[\frac{1 - 3(z^2/(r'^2 + z^2))}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right] \left[H\left(t - \frac{(r'^2 + z^2)^{1/2}}{c_p}\right) - H\left(t - \frac{(r'^2 + z^2)^{1/2}}{c_s}\right) \right] r' dr' \quad (20)$$

Haciendo el cambio de variable $v = (z^2 + r'^2)^{1/2}$ encontramos:

$$u_{zz}^{ps}(r, t) = \frac{A_3 t}{\rho} \int_z^{\sqrt{z^2 + R^2}} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{3z^2}{v^4} \right] h(v) dv$$

donde hemos definido $h(v) = H(t - v/c_p) - H(t - v/c_s)$. Esta expresión simplemente vale 1 o 0 dependiendo del valor de v comparado con $c_s t$ y $c_p t$. Podemos ver que vale 1 dentro del rango de integración de v y por lo tanto:

$$u_{zz}^{ps}(r, t) = \begin{cases} \frac{A_3 t}{\rho} \left[\frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{z} \right] - \frac{A_3 z^2 t}{\rho} \left[\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^3} \right] = \frac{A_3 t R^2}{\rho (z^2 + R^2)^{3/2}} & \text{si } t_0 < t < t_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde hemos usado que $t_p \sim 0$. Combinando este resultado con la expresión (19) obtenemos:

$$u_{zz}(z, t) = \frac{A_3}{\rho} \left[\frac{R^2 t}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{c_s} - \frac{z^2}{c_s^3 t^2} \right] \quad (21)$$

Si evaluamos esta expresión en el tiempo de arribo de las ondas de corte $t \approx (z^2 + R^2)^{1/2}/c_s$ obtenemos finalmente:

$$u_{zz}(z, t) = \frac{A_3}{\rho c_s} \left[\frac{2R^2}{(z^2 + R^2)} \right] \quad (22)$$

Esta expresión permite corregir la atenuación geométrica de la onda medida por elastografía transitoria sobre el eje de la fuente. Vemos que para distancias $z \gg R$ recuperamos la atenuación de una fuente puntual ($\sim z^{-2}$)

APENDICE C

CAVIDAD CERRADA DE RETORNO TEMPORAL EN UN SÓLIDO ELASTICO

I. INTRODUCCIÓN

El objetivo en este apéndice es formular las expresiones que permiten obtener el campo de desplazamientos debido al retorno temporal del campo creado por una fuente puntual sobre la superficie cerrada en un sólido elástico. Dejaremos expresado el resultado en términos de integrales finitas. Dejaremos como un punto abierto en esta tesis la solución analítica de estos resultados (de existir) y la interpretación de las mismas. En el trabajo de tesis (capítulo 2) recurrimos a una simulación numérica de este problema para comparar y validar los resultados experimentales.

II. PLANTEO DEL PROBLEMA

Plantearemos el problema de acuerdo a nuestras condiciones experimentales. Supongamos una fuente puntual actuando en la dirección z en el origen del sistema de coordenadas. En el primer paso, el campo de desplazamientos generado por esta fuente es registrado en cada punto de una superficie cerrada S por sensores ideales (en el sentido de que son sensores puntuales capaces de medir las tres componentes del campo y que no alteran la propagación respecto a un medio libre). En el segundo paso cada uno de estos puntos actúa como fuente y emite la versión invertida temporalmente del campo registrado mientras que la fuente inicial permanece pasiva.

II.1 Primer paso: Etapa de registro

Supondremos que la superficie S es una superficie esférica de radio R y que la fuente está ubicada en su centro como se muestra en la figura 1. Sea $e_z(t)$ la función temporal que gobierna a la fuente. En estas condiciones la componente k del campo en un punto arbitrario $\vec{r}' = (R, \theta', \varphi')$ de la esfera es:

$$u_k(R, \theta', t) = u_k^p(R, \theta', t) + u_k^s(R, \theta', t) + u_k^{ps}(R, \theta', t) \quad (1)$$

Con:

$$u_k^\beta(R, \theta', t) = e_z(t) \otimes g_{kz}^\beta(R, \theta', t) \quad (2)$$

donde $\beta = p, s, o ps$ y

$$\begin{aligned}
 g_{kz}^p(R, \theta', t) &= \frac{1}{4\pi\rho c_p^2} \frac{\gamma_k \cos(\theta')}{R} \delta(t - R/c_p) \\
 g_{kz}^s(R, \theta', t) &= \frac{1}{4\pi\rho c_s^2} \frac{(\gamma_k \cos(\theta') - \delta_{kz})}{R} \delta(t - R/c_s) \\
 g_{kz}^{ps}(R, \theta', t) &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{(3\gamma_k \cos(\theta') - \delta_{kz})t}{R^3} [H(t - R/c_p) - H(t - R/c_s)]
 \end{aligned} \tag{3}$$

Como el problema es axisimétrico, el campo no depende de la coordenada azimutal ϕ' .

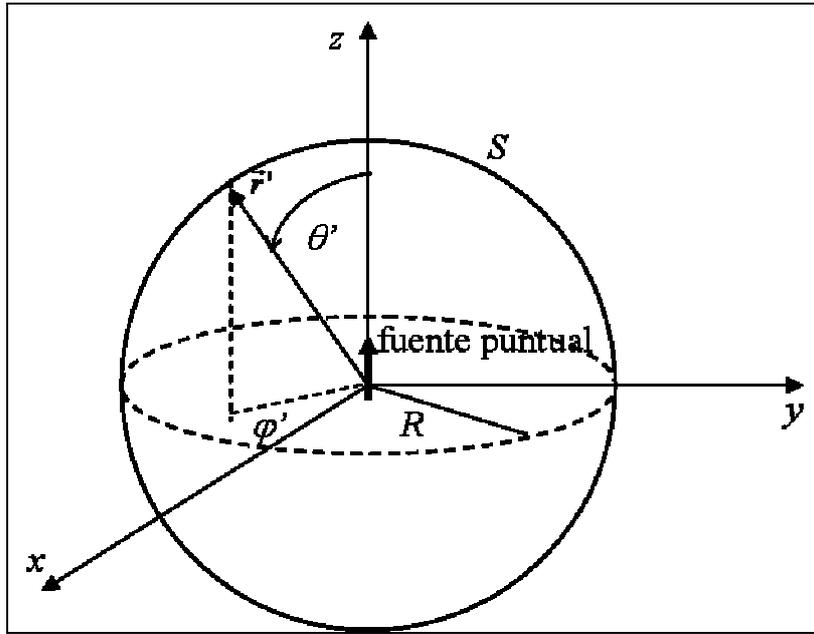


Figura 1 Una fuente puntual ubicada en el origen del sistema de coordenadas actúa en forma impulsional. El campo generado se registra sobre todos los puntos de la superficie esférica S de radio R .

II.2 Segundo paso: Etapa de reemisión

Es el turno ahora de reenviar al medio la versión invertida en el tiempo del campo registrado en cada punto. La fuente original permanece pasiva. Para que la solución sea acorde a nuestras experiencias suponemos que en cada punto \vec{r} del interior de la cavidad se registra la componente z del campo de velocidad particular. En la figura 2 se muestra la definición de variables en este paso del proceso.

Según el teorema de Betti, el campo de desplazamientos en el volumen de la cavidad para las condiciones de borde planteadas está dado por:

$$u_z^{TR}(\vec{r}, t) = \int_S g_{kz}(\vec{u}, t) \otimes T_k(R, \theta', T_m - t) dS' \tag{4}$$

donde $T_k = \tau_{kj} n_j$ representa la tracción sobre la superficie de emisión y n_j la componente j de la normal saliente a la superficie y \vec{u} está definido en la figura 2 como el vector posición entre el punto emisor de la superficie y una posición arbitraria dentro de la cavidad.

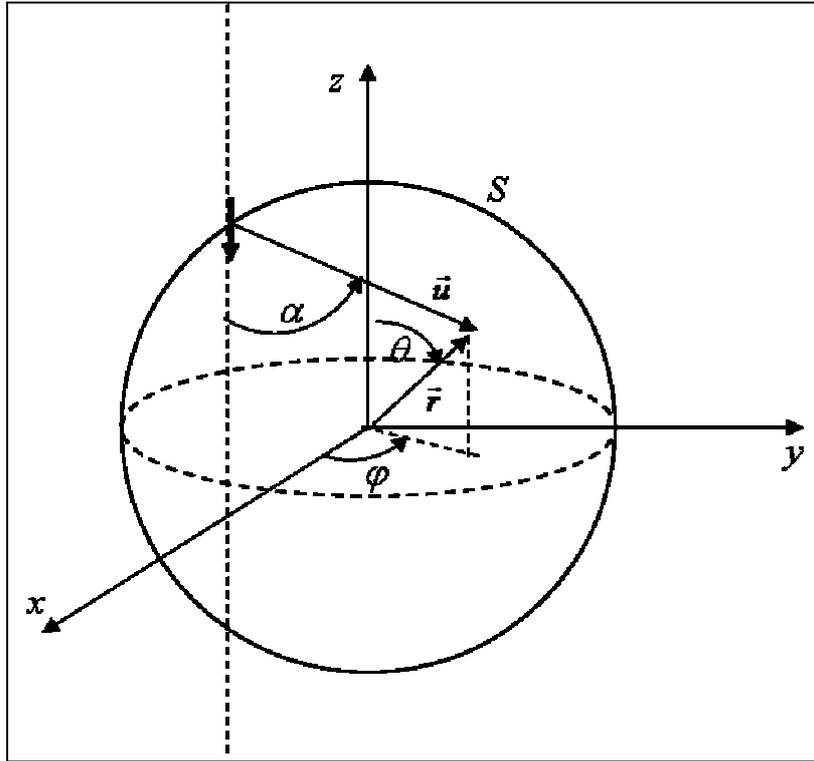


Figura 2 Cada punto de la superficie se comporta ahora como fuente. El objetivo es calcular la componente z del campo en una posición arbitraria dentro de la cavidad.

En las condiciones que nos hemos planteado la tracción está dada por la velocidad de los desplazamientos registrados en el primer paso multiplicada por la impedancia mecánica de la superficie emisora, es decir:

$$T_k(R, \theta', t) = Z \frac{\partial}{\partial t} (e_z(t) \otimes u_k(R, \theta', t)) \tag{5}$$

Sustituyendo esta expresión en (4) encontramos:

$$u_z^{TR}(\vec{r}, t) = Z \int_S g_{kz}(\vec{u}, t) \otimes \frac{\partial}{\partial t} (e_z(T_m - t) \otimes g_{kz}(R, \theta', T_m - t)) dS' \tag{6}$$

Evaluar estas integrales en una posición arbitraria dentro de la cavidad no es sencillo. La dificultad radica en la integración del producto de los términos del diagrama de directividad sobre la superficie S para las que no hemos podido hallar soluciones analíticas. Aun para casos particulares (como por ejemplo la solución sobre el eje z), solo es posible obtener expresiones analíticas para la contribución de la componente z de la onda de corte. Dejaremos en esta tesis este problema abierto para seguir abordándolo en futuros trabajos. Sin embargo en forma genérica podemos ver que la contribución del término de acoplamiento decae como $\sim R^{-1}$ a medida que el radio de la superficie S tiende a infinito. Sin embargo hemos demostrado que el proceso de retorno temporal recupera el término de acoplamiento en la focalización. La medida de ondas de volumen a través del método de interferometría speckle nos permitió observar por primera vez este hecho.