II

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y DE ADMINISTRACION

INSTITUTO DE ECONOMIA

SOBRE UNA CLASE DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

FERNANDO LUIS GARAGORRY

Apartado de la Revista Nº 25 de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración.

MONTEVIDEO
URUGUAY
1965

Sobre una clase de problemas de Programación Lineal

1. *Introducción.*

En el presente trabajo se estudia una clase de problemas de Programación Lineal vinculados al modelo abierto de Leontieff. Se discute la existencia de soluciones en función de algunos parámetros. Un problema genérico (que indicaremos con (I)) de la clase, es de la forma siguiente:

$$\text{Hallar} \qquad \min z = mX$$

con las restricciones

$$\begin{array}{lrl} (1) & (I - A)X \geqslant Y & \\ (2) & BX \geqslant P & \qquad (I) \\ (3) & CX \leqslant Q & \\ & X \geqslant O\,. & \end{array}$$

Se admite que:

1) m es un vector de elementos no-negativos;

2) $(I - A)$ es una matriz de Leontieff de orden n, de la que se conoce su inversa $(I - A)^{-1}$;

3) B y C son matrices de elementos positivos, de orden p x n y q x n respectivamente;

4) Y, P y Q son vectores de elementos positivos, de n, p y q componentes respectivamente.

Al variar los vectores m, Y, P y Q (pero siempre cumpliendo las condiciones 1 y 4), permaneciendo constantes las matrices $(I - A)$, B y C, se tienen todos los problemas de la clase que consideramos. Según los valores que demos a los componentes de los vectores Y, P y Q, e independientemente de m, el problema que se obtenga puede tener solución factible o no. Se discutirá la existencia de soluciones en función de los vectores Y, P y Q. Se admite que se cumplen las condiciones del siguiente teorema fundamental: "Si existe algún vector X tal que $(I - A)$ X es un vector estrictamente positivo, entonces $(I - A)^{-1}$ existe y transforma vectores no-negativos en vectores no-negativos" [3] (por supuesto, se supone que X es no-negativo).

2. *Notación.*

La distinción entre vectores-fila y vectores-columna será obvia en cada caso. Indicaremos las componentes de un vector con índices superiores. Por ejemplo: $X = (X^1, \ldots, X^n)$.

Dados dos vectores U y V del mismo espacio r-dimensional, usaremos las siguientes definiciones: $U = V$, si $U^i = V^i$ para todo i; $U \geqslant O$, si $U^i \geqslant O$ para todo i; $U > O$, si $U \geqslant O$ y algún $U^i > O$; $U \gg O$, si $U^i > O$ para todo i; $U \geqslant V$, si $U - V \geqslant O$; $U > V$, si $U - V > O$; $U \gg V$, si $U - V \gg O$. Y análogamente para $\leqslant$, $<$ y $\ll$. El signo $U \leqslant' V$ indica que no es $U \leqslant V$.

3. *Clasificación de un problema.*

Veremos que dado un problema de la familia —o sea, dados ciertos vectores m, Y, P y Q—, se le puede clasificar teniendo en cuenta los vectores Y, P y Q.

En primer lugar, observemos que la relación $\geqslant$ definida anteriormente, en un espacio r-dimensional, es un orden parcial. O sea, dados dos vectores U y V de ese espacio, pueden no ser comparables por esa relación. De modo que dados dos vectores U y V de un espacio r-dimensional en que se han definido las relaciones del parágrafo anterior, se tendrá uno de los seis casos siguientes: $U \gg V$, $U > V$, $U = V$, $U < V$, $U \ll V$, U y V no-comparables. Por lo tanto, dados dos pares de vectores, siendo que cada par es de un espacio en que se han definido las relaciones anteriores, se tendrán 36 posibilidades.

En segundo lugar, para simplificar la escritura en lo que sigue, definiremos dos matrices:

$$D = B\,(I - A)^{-1}$$

$$E = C\,(I - A)^{-1}$$

En realidad las matrices D y E tienen interpretaciones interesantes, en cada caso concreto, pero no nos ocuparemos de ese aspecto en el presente trabajo.

Para clasificar un problema dado, en la clasificación que propondremos, se hacen los dos pasos siguientes:

1) Calcular DY y EY;

2) Comparar DY con P, y EY con Q.

Los distintos resultados posibles de esas comparaciones pueden agruparse en las siguientes clases, que definen la clasificación propuesta:

(a) $DY \geqslant P$ y $EY \leqslant Q$;

(b) $DY < P$ y $EY < Q$;

(c) $EY < Q$, y DY y P no-comparables;

(d) Otros resultados.

La definición de la clase (d) implica que la clasificación es exhaustiva. Por otra parte, es fácil ver que las clases son disjuntas, como se muestra en el cuadro siguiente. Por lo tanto, se trata de una clasificación lógica.

EY con Q \ DY con P	$\gg$	$>$	$=$	$<$	$\ll$	no-comparables
$\gg$	d	d	d	d	d	d
$>$	d	d	d	d	d	d
$=$	a	a	a	d	d	d
$<$	a	a	a	b	b	c
$\ll$	a	a	a	b	b	c
no-comparables	d	d	d	d	d	d

Para estudiar los distintos casos, será útil la siguiente

Proposición 1. $C(Y) = \{X : (I - A)X \geqslant Y\}$ es un cono (poliédrico) contenido en el interior del ortante no-negativo ($R_n{}^+$), con vértice $X = (I - A)^{-1}Y$.

Demostración. Sea $D(Y) = \{X : X \geqslant Y\}$. Sea $\{e_i : i = 1,\ldots,n\}$ la base canónica de R_n. Es decir, los vectores e_i son de la forma $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, teniendo un 1 en la i-ésima componentes, y 0 en las restantes. Se tiene:

$$D(Y) = \{ X : X = Y + \sum_i t_i e_i \,,\ t_i \geqslant 0\}.$$

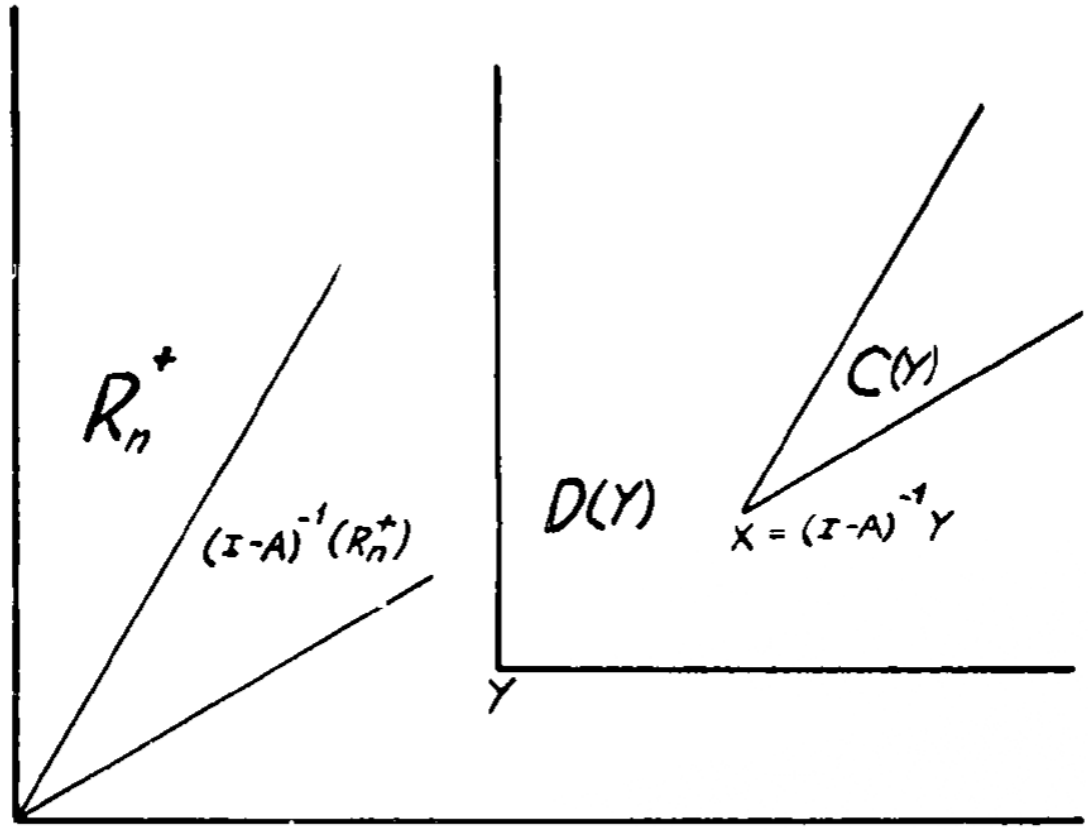
Sea E(Y) la imagen de D(Y) por $(I - A)^{-1}$ (considerado como un operador sobre R_n). Se tiene:

$$E(Y) = \{ X : X = (I - A)^{-1}Y + \sum_i t_i\,(I - A)^{-1}e_i \,,\ t_i \geqslant 0 \}.$$

O sea, E(Y) es un cono poliédrico contenido en $R_n{}^+$, y con vértice $X = (I - A)^{-1}Y$. Es claro que $E(Y) = C(Y)$.

Además, como es sabido, en el modelo de Leontieff se tiene: $X = (I - A)^{-1}Y \rightarrow X \geqslant Y \rightarrow C(Y)$ está contenido en el interior de R_n^+.

Nota. Hemos dado esa demostración, en lugar de otra "más directa", para hacer resaltar un hecho importante que es conveniente tener presente: la imagen de $D(Y)$ por $(I - A)^{-1}$, es el cono poliédrico "paralelo" a la imagen de R_n^+ por $(I - A)^{-1}$, que se obtiene trasladando ésta según el vector $(I - A)^{-1}Y$.



Además, observamos que en virtud de la forma de las restricciones (3), si el problema (I) tiene solución factible, entonces tiene solución óptima.

A continuación pasamos a estudiar los distintos casos por separado.

4. *Caso (a).*

Este caso queda resuelto con la siguiente

Proposición 2. La condición necesaria y suficiente para que $X = (I - A)^{-1}Y$ sea óptimo, es que se verifique $DY \geqslant P$ y $EY \leqslant Q$.

Demostración.

Condición necesaria. $X = (I - A)^{-1}Y$ óptimo $\rightarrow$ X factible. Por lo tanto X verifica las restricciones (2) y (3), y se tiene:

$$BX \geqslant P \rightarrow B(I-A)^{-1}Y = DY \geqslant P$$
$$CX \leqslant Q \rightarrow C(I-A)^{-1}Y = EY \leqslant Q.$$

Condición suficiente. $X = (I-A)^{-1}Y$ verifica (1). Además:

$$BX = B(I-A)^{-1}Y = DY \geqslant P$$
$$CX = C(I-A)^{-1}Y = EY \leqslant Q.$$

O sea, X verifica (2) y (3). Por otra parte, $X \gg O$. Es decir, X es una solución factible.

Sea X_1 otra solución factible. Se tiene:

X_1 factible $\rightarrow (I-A)X_1 = Y_1 \geqslant Y \rightarrow$ (por la Proposición 1) $X_1 \geqslant X \rightarrow mX_1 \geqslant mX \rightarrow X$ es óptimo.

Nota. En el caso (a) el óptimo puede no ser único. Pero, aun en el caso de que no fuese único, por la Proposición 1 se tiene que $X = (I-A)^{-1}Y$ será el óptimo que está "más cerca" del punto O.

En resumen, en el caso (a) el problema tiene una solución inmediata, que *no depende* del vector m.

5. *Caso (b).*

Para estudiar este caso, consideramos el problema siguiente, que llamaremos (II):

$$\min w = mX + HV_p$$

$$\begin{array}{llcccl} (1') & (I-A)X - I_nU_n & & & & = Y \\ (2') & BX & - I_pU_p & & + I_pV_p & = P \\ (3') & CX & & + I_qU_q & & = Q \end{array} \qquad \text{(II)}$$

$$X \geqslant O,\ U_n \geqslant O,\ U_p \geqslant O,\ U_q \geqslant O,\ V_p \geqslant O,$$

donde $H = (h, \ldots, h)$ es un vector en que h es una constante "grande" (según la terminología usual en Programación Lineal), U_n es un vector de n componentes, U_p y V_p son vectores de p componentes, U_q es un vector de q componentes, I_n, I_p e I_q son matrices unidad apropiadas $(I = I_n)$.

Con la aplicación usual del método simplex, en que junto a las variables de holgura de la restricción (1'), deberíamos agregar también variables artificiales, el número total de variables del problema sería:

$$n + (n+p+q) + (n + p) = 3n + 2p + q.$$

En cambio en el problema (II) aparecen solamente

$$n + (n+p+q) + p = 2n + 2p + q.$$

Veremos que es posible partir del problema (II), pues éste tiene una solución de partida inmediata. Para hallarla, usaremos la siguiente

Proposición 3. Sea la matriz particionada G, de la siguiente forma:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & O & O \\ G_{21} & G_{22} & O \\ G_{31} & O & G_{33} \end{bmatrix}$$

en que G_{11}, G_{22} y G_{33} son submatrices cuadradas no-singulares. Entonces G es no-singular y su inversa está dada por

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11}^{-1} & O & O \\ -\,G_{22}^{-1}\,G_{21}\,G_{11}^{-1} & G_{22}^{-1} & O \\ -\,G_{33}^{-1}\,G_{31}\,G_{11}^{-1} & O & G_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

Demostración. Una simple computación nos muestra que $G \,.\, G^{-1} = I$.

Volviendo al problema (II), observemos que las restricciones con ecuaciones de éste se pueden escribir del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} (I-A) & O & O \\ B & I_p & O \\ C & O & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V_p \\ U_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\,I_n & O \\ O & -\,I_p \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ P \\ Q \end{bmatrix}$$

Sea

$$G = \begin{bmatrix} (I-A) & O & O \\ B & I_p & O \\ C & O & I_q \end{bmatrix}$$

Por la Proposición 3 se tiene:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} (I-A)^{-1} & O & O \\ -\,B(I-A)^{-1} & I_p & O \\ -\,C(I-A)^{-1} & O & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-A)^{-1} & O & O \\ -\,D & I_p & O \\ -\,E & O & I_q \end{bmatrix}$$

Premultiplicando las restricciones anteriores por G^{-1}, se tiene:

$$\begin{bmatrix} X \\ V_p \\ U_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & 0 \\ D & -I_p \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}Y \\ P - DY \\ Q - EY \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces la siguiente solución de partida:

$X = (I - A)^{-1}Y$, $V_p = P - DY$, $U_q = Q - EY$, $U_n = 0$, $U_p = 0$.

Como estamos en el caso (b), todas las componentes de esos vectores X, V_p y U_q son no-negativas. Se trata de una solución básica, pues no tiene más de $n + p + q$ componentes positivas; en particular, si $P \gg DY$ y $Q \gg EY$, será no-degenerada.

Con lo anterior se puede construir una tabla de partida para aplicar el método simplex al problema (II). Si a cierta altura del procedimiento no aparece ninguna variable V^i, $i = 1,\ldots,p$, en la base, el problema (I) tendrá solución factible, y por lo tanto óptima.

Además, en virtud de la Proposición 1, si (I) tiene solución óptima, en esa solución intervendrán con valores positivos todas las variables X^i, $i = 1,\ldots,n$.

Ahora bien, las variables X^i, $i = 1,\ldots,n$, ya intervienen en la solución de partida que hemos hallado para el problema (II). Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar provechosamente un teorema recientemente demostrado [1], y del cual daremos a continuación solamente el enunciado.

Teorema. Supongamos que si el problema propuesto tiene solución óptima, la variable X^k entra en la solución óptima. Supongamos además, que en una determinada aplicación del método simplex, la primera tabla en que entra X^k es la tabla número j, que indicamos T(j), y que X^k entra en la fila i de T(j). Entonces, para saber si el problema propuesto tiene óptimo y, en ese caso, qué otra variables intervienen en la solución óptima, con qué valores, y cuánto vale la función objetiva en el óptimo, es suficiente aplicar el método simplex a la tabla $T^0(j)$, que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna k de T(j).

La tabla inicial que tenemos para el problema (II) es la siguiente:

			m	O	O	O	H
		P^{o}	$X^1 \dots X^n$	$U^1 \dots\dots U^n$	$U^{n+1} \dots U^{n+p}$	$U^{n+p+1} \dots U^{n+p+q}$	$V^1 \dots V^p$
m^1 ⋮ m^n	X^1 ⋮ X^n	$(I - A)^{-1}Y$	I	$-(I - A)^{-1}$	O	O	O
h ⋮ h	V^1 ⋮ V^p	$P - DY$	O	D	$-I_p$	O	I_p
O ⋮ O	U^{n+p+1} ⋮ U^{n+p+q}	$Q - EY$	O	E	O	I_q	O
		$m(I - A)^{-1}Y$	O	$-m(I - A)^{-1}$	O	O	O
		$H(P - DY)$	O	HD	$-H$	O	O

(Como es sabido, para aplicar el método simplex se puede dividir toda la última fila por h).

En virtud de las consideraciones anteriores y del Teorema enunciado, podemos pasar a la tabla $T^0(1)$, que se obtiene suprimiendo, en la tabla anterior, las filas y las columnas indicadas con los símbolos $X^1,\ldots,X^n$.

Mientras que la tabla inicial es de orden $(n + p + q + 2) \times (1 + 2n + 2p + q)$, la tabla que obtenemos aplicando el Teorema enunciado es sólo de orden $(p + q + 2) \times (1 + n + 2p + q)$.

Si aplicando el método simplex a la tabla $T^0(1)$, no podemos eliminar de la base a alguna variable V^i, $i = 1,\ldots,p$, entonces el problema (I) no tiene solución. En el caso contrario, (I) tiene solución. La aplicación del métoda simplex se efectúa en la tabla $T^0(1)$ exactamente del mismo modo que en cualquier problema de Programación Lineal (en realidad, esa tabla corresponde a cierto problema de Programación Lineal).

En el caso de que el problema (I) tenga solución óptima, en ella entrarán a lo sumo $p + q$ variables de las U^i, $i = 1,\ldots,n + p + q$. Además, en ese caso se verifica:

$$\begin{aligned} (I - A)X - I_nU_n &= Y \\ BX - I_pU_p &= P \\ CX + I_qU_q &= Q\ , \end{aligned}$$

para determinados vectores U_n, U_p y U_q correspondientes a la solución óptima hallada. Si en la solución óptima fuese $U_n = 0$, el óptimo estaría dado por $X = (I - A)^{-1}Y$, lo cual es imposible en virtud de la Proposición 2. Por lo tanto, en el óptimo se tiene: $U_n > 0$.

O sea, el óptimo, si existe, está dado por

$$X = (I - A)^{-1}(Y + U_n),$$

en que U_n se obtiene al aplicar el Teorema enunciado en la tabla $T^0(1)$.

6. *Caso (c).*

En este caso se considera el problema siguiente:

$$\min w = mX + H_nV_n + H_pV_p$$

$$\begin{array}{llllllll} (1') & (I - A)X & - I_nU_n & & & + I_nV_n & & = Y \\ (2') & BX & & - I_pU_p & & & + I_pV_p & = P \\ (3') & CX & & & + I_qU_q & & & = Q \end{array}$$

$$X \geqslant 0,\ U_n \geqslant 0,\ U_p \geqslant 0,\ U_q \geqslant 0,\ V_n \geqslant 0,\ V_p \geqslant 0,$$

donde $H_n = (h,\ldots,h)$ y $H_p = (h,\ldots,h)$ son vectores de n y p componentes respectivamente, y en que h es una constante "grande".

Al no contar con una solución "buena" de partida, debemos hacer la aplicación usual del método simplex. No obstante, en virtud del Teorema enunciado, cada vez que en una solución básica entra una variable

X^i, $i = 1,\ldots,n$, eliminamos la columna y la fila correspondientes. En caso de que el problema (I) tenga óptima, éste se calcula en la forma indicada al final del parágrafo anterior.

7. *Caso (d).*

En este caso el problema no tiene solución. Para demostrarlo, lo dividimos en dos subcasos.

(d_1) $EY \leqslant' Q$. Se tiene lo siguiente:
$EY \leqslant' Q \rightarrow C(I - A)^{-1}Y \leqslant' Q \rightarrow X = (I - A)^{-1}Y$ es tal que $CX \leqslant' Q$.
Pero además: X_1 está en $C(Y) \rightarrow X_1 \geqslant X \rightarrow CX_1 \geqslant CX \rightarrow CX_1 \leqslant' Q$.
Es decir, el cono $C(Y)$ tiene intersección vacía con la región $\{X: CX \leqslant Q\}$, que constituye la restricción (3), y por lo tanto en el subcaso (d_1) no hay solución.

(d_2) $DY \geqslant' P$ y $EY = Q$. Observemos que el vector $X = (I - A)^{-1}Y$ es el único que satisface las restricciones (1) y (3). En efecto, sea $X_1 \neq X$ y tal que satisfaga (1). Se tiene:
X_1 está en $C(Y)$, $X_1 \neq X \rightarrow X_1 > X \rightarrow CX_1 \gg CX = Q \rightarrow X_1$ no satisface (3). Pero, por otra parte, X no satisface (2), puesto que: $BX = B(I - A)^{-1}Y = DY \geqslant' P$. O sea, en el subcaso ($d_2$) no hay solución.

Es fácil ver que estos dos subcasos agotan el caso (d).

8. *Conclusión.*

El objetivo principal de este trabajo, es dar un ejemplo sobre un hecho que ha sido reiteradamente señalado en Programación Lineal: "el modelo matemático de una aplicación específica puede llevar a un sistema de cómputo simplificado" [2].

En primer lugar, la discusión realizada nos permite separar los casos en que la respuesta —solución óptima, o no-existencia de solución— es inmediata, de los casos en que es necesario aplicar un algoritmo para obtener una respuesta. Observemos que esa discusión se puede realizar, en muchos de los casos que pudieran presentarse en la práctica, con una calculadora de mesa.

En segundo lugar, en los casos en que la solución no es inmediata, la aplicación del método simplex se ve simplificada por la definición de la familia. En efecto, la teoría matemática del modelo de Leontieff nos permite afirmar que si cierto problema de la familia tiene solución óptima, en ella entran todas las variables X^i, $i = 1, \ldots, n$. Ese hecho nos permite aplicar el Teorema que hemos enunciado, y con el cual se logran grandes economías en los cálculos, al punto de que se puede intentar, en muchos casos, la resolución con una máquina de mesa, de problemas que a primera vista solo podrían ser tratados con una computadora electrónica.

No creemos que el supuesto de que conocemos la matriz $(I - A)^{-1}$ sea restrictivo, puesto que lo lógico es pensar que sólo se plantearía un problema de la familia si se está trabajando con el modelo de Leontieff en su aplicación habitual, para la cual es imprescindible contar con esa matriz.

REFERENCIAS

[1] GARAGORRY, F. L., Un teorema de Programación Lineal (se publicará próximamente).

[2] GASS, S. I., Programación Lineal, Métodos y aplicaciones. México, C.E.C.S.A., 1961, (p. 157).

[3] KARLIN, S., Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics, Addison-Wesley Pub. Co., 1959 (Vol. I, p. 257).