Formas de transgresión como principio unificador en Teoría de Campos

Pablo Mora
Instituto de Fisica, Facultad de Ciencias
Iguá 4225, Montevideo, Uruguay

February 1, 2008

Abstract

En este trabajo se consideran extensiones de las gravedades y supergravedades de Chern-Simons asociadas al uso de formas de transgresión en las acciones correspondientes, en vez de formas de Chern-Simons.
Se observa que las formas de transgresión permiten:
(i) hacer las teorías de Chern-Simons estrictamente invariantes gauge,
(ii) tener un principio de acción bien definido, de modo que la acción es un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento,
(iii) calcular cargas conservadas covariantes de acuerdo con las calculadas por métodos hamiltonianos,
(iv) y regularizar la acción de modo que la entropía calculada a partir de la versión euclídea de esta acción es finita y coincide con la calculada de nuevo por métodos hamiltonianos.
También se introduce y estudia una clase de modelos para objetos extendidos o branas con y sin supersimetría con acciones definidas por la suma de integrales de las formas de transgresión para grupos de gauge ordinarios, grupos espaciotemporales o sus extensiones supersimétricas. Estos modelos son generalmente covariantes, independientes de background y verdaderos sistemas de gauge.
Un modelo de esta clase podría proporcionar una formulación independiente de background de la teoría M.

Contents

"Los sabios de antaño no temían estar solos en sus opiniones.
Sin grandes empresas. Sin planes.
Si fracasaban, sin pena.
Sin congratularse en el éxito..."
- Chuang-Tzu

1 Introducción

A pesar de muchos trabajos afirmando lo contrario, la Relatividad General, actualmente la teoría aceptada de la gravitación, no es una teoría de gauge, como lo son las teorías de las otras tres interacciones fundamentales conocidas [1]. La construcción de una teoría de gauge que incluya el campo gravitatorio plantea la dificultad de que, mientras en el caso de las demás interacciones se dispone de un ámbito espaciotemporal fijo con una métrica de Minkowski, es este caso no hay tal fondo fijo de referencia, al ser la métrica (o el vielbein) parte de la dinámica. Cuando existe una métrica de referencia fija la acción usual para los campos de gauge es la de Yang-Mills, en cuya construcción se utiliza la métrica de Minkowski. Veremos que si no hay un fondo fijo dado por una métrica de referencia la acción natural para una teoría de gauge para los grupos espaciotemporales (Poincaré, los grupos de de Sitter y sus extensiones supersimétricas) que pueda generalizar la relatividad general está dada por la forma de Chern-Simons.

1.1 Panorama del desarrollo de las teorías de Chern-Simons

Las teorías de gauge de Chern-Simons son modelos físicos con una lagrangiana dada por la forma de Chern-Simons para el grupo de gauge. Estos modelos fueron introducidos en el caso abeliano por A. Schwarz [2] y estudiados como 'modelos de juguete' en muchos trabajos posteriormente (ver por ejemplo [3])hasta el reconocido artículo de Witten [4] en el que se muestra que estos modelos son teorías cuánticas de campos exactamente solubles en 2+1 dimensiones, con observables dados por invariantes topológicos (invariantes de nudos) de la variedad tridimensional de base.

Las gravedades y supergravedades de Chern-Simons son teorías de gauge de Chern-Simons con grupo de gauge dado por uno de los grupos espaciotemporales y alguna de sus extensiones supersimétricas respectivamente. Estas teorías fueron introducidas en refs.[5, 6, 7] para espaciotiempos tridimensionales (2+1). Se observó que la Relatividad General en dimensión 2+1 es equivalente *on shell* (cuando valen las ecuaciones del movimiento) a la teoría de CS para el grupo de Poincaré ISO(2,1), lo que fue explotado por Witten para mostrar que la teoría es exactamente soluble a nivel cuántico [7].

Más tarde Chamseddine [8] extendió las supergravedades de Chern-Simons a dimensiones mas altas y sugirió que esta clase de modelos podían considerarse como la base de un enfoque para la unificación de las interacciones fundamentales alternativo a la teoría de Supercuerdas [9]. Las supergravedades de Chern-Simons (CS-SUGRA) en dimensiones más altas fueron extensivamente estudiadas en diferentes aspecto por la 'Escuela Chilena' [10, 11, 12, 13, 15, 1, 16].

En uno de esos trabajos Troncoso y Zanelli [12] sugirieron que el límite de bajas energías de la teoría M [17, 18, 19, 20] podría ser una CS-SUGRA con grupo de gauge $OSp(1 \mid 32)$, contribuyendo desde otro ángulo a la convergencia entre Teorías CS y Supercuerdas, ya mostrada en las refs.[7, 21, 22]. Más recientemente Horava [23] propuso que una CS-SUGRA podría ser en realidad la Teoría M, la cual sería en entonces una teoría de campos ordinaria. La propuesta de Horava a sido considerada mas recientemente por Nastase [24].

1.2 Relación de la Relatividad General y la Supergravedad estándar con las gravedades y supergravedades de Chern-Simons

La cuestión de las relaciones entre las teorías CS y la Relatividad General y/o supergravedad estándar en diversas dimensiones ha sido discutido en las refs.[7, 8, 1, 10, 12, 23, 15]. Un trabajo reciente que me parece importante, respecto al problema de hallar una solución (un 'vacío') de una supergravedad de Chern-Simons tal que la teoría linealizada alrededor de este vacío es la versión linealizada de la supergravedad en 11D, es ref. [16].

Se puede entender la diferencia entre los dos enfoques considerando que hay esencialmente dos clases de transformaciones locales en geometría diferencial.Estas son difeomerfismos (vistos como transformaciones generales de coordenadas o deformaciones arbitrarias de la variedad, dependiendo de si tomamos el punto de vista pasivo o activo) y rotaciones locales de una fibra (transformaciones de gauge). Hay entonces también dos maneras de hacer local una simetría global, que son realizarla como una clase de transformaciones generales de coordenadas o realizarla como una simetría de gauge.

En lo que respecta a las simetrías espaciotemporales la primera via es la que se toma en Relatividad General, mientras que la segunda se toma en las gravedades de Chern-Simons. Ya se mencionó que estas teorías son equivalentes en 2+1 dimensiones, pero esta equivalencia no vale en dimensiones más altas.

En el caso supersimétrico nuevamente la primera opción se toma en supergravedad estándar. Los procedimientos principales para construir estas teorías son el método de Noether [38] y los basados en el 'Superespacio'[46].

El método de Noether involucra los pasos siguientes:

(i) Considerar representaciones de el álgebra de la supersimetría con estados de espín 2 ('gravitones') como máximo.

(ii) Escribir una acción incluyendo campos de esos espines con los términos cinéticos estándar de segundo orden en las derivadas y sin interacciones, contruida de modo tal que sea invariante bajo transformaciones supersimétricas globales. Esta parte es bastante directa.

(iii) Hacer las transformaciones locales, entendidas como extensiones de transformaciones generales de coordenadas, agregando tanto nuevos campos con propiedades de transformación adecuadas como términos nuevos a las reglas de transformación previas. Un punto importante es que se requiere que la acción resultante de este proceso sea de segundo orden como máximo en las derivadas, y que de lugar a ecuaciones del movimiento de segundo orden

(iv) Iterar hasta que la acción final sea invariante bajo las nuevas transformaciones locales. No hay garantía de que este proceso termine despues de un número finito de pasos, pero de hecho termina en la mayoría de los casos interesantes.

En el método del Superespacio el espaciotiempo con coordenadas x^m se extiende a un espacio con coordenadas adicionales que son números de Grassmann que anticonmutan θ^α y realizando las transformaciones supersimétricas como transformaciones generales de coordenadas del espacio extendido (superdifeomorfismos).

Como se mencionó, en las teorías de Chern-Simons la estrategia seguida es tomar los grupos espaciotemporales o sus extensiones supersimétricas como grupos de gauge. Las teorías CS contienen términos de orden mayor que dos en las derivadas en su acción, al contrarioque la Relatividad General y las supergravedades estándar. Es importante señalar sin embargo que solo derivadas segundas de los campos aparecen en las ecuaciones del movimiento [1]. Las teorías CS no son entonces 'higher derivative theories', que es como se conoce a aquellas teorías con ecuaciones del movimiento involucrando derivadas de orden mayor al segundo de los campos, las cuales se sabe tienen muchas dificultades que las hacen inconvenientes como modelos físicos.

Como se señaló desde varios puntos de vista Refs.[7, 8, 10, 12, 23, 15]. las teorías CS pueden aproximarse para pequenãs desviaciones respecto a ciertas configuración de referencia o 'background' y para bajas energías (perturbaciones de pequeã amplitud y longitud de onda larga alrededor de esas configuraciones). La cuestió de en que condiciones, para que backgrounds y hasta que punto gravedades o supergravedades CS corresponden a la Relatividad General o supergravedad estándar esta sin embargo lejos de estar zanjada. Lo que está claro es que las gravedades CS no pueden considerarse en modo alguno descartadas como candidatos a teorías físicas de la gravitación, dando Relatividad General despues de alguna compactificación dinámica apropiada en algún límite de longitudes de onda largas.

La presencia de términos de mayor orden en la curvatura en las gravedades CS no debería ser considerado problemático, ya que tales términos aparecen

[1]De hecho de primer orden, derivadas de segundo orden aparecen p.ej. si la torsion es cero, porque la conexión de espín en ese caso es función del vielbein involucrando derivadas primeras de este.

por ejemplo en correcciones de la teoría de cuerdas a la Relatividad General, y no pueden descartarse, dada nuestra ignorancia sobre el comportamiento del campo gravitacional en distancias cortas

En resumen hay dos caminos para entender estas interacciones como consecuencia de principios de simetría, el programa de gauge desarrollado por Maxwell, Weyl, London, Yang, Mills y otros y el propuesto por Riemann, Clifford, Einstein, Kaluza, Klein y otros de 'simetrías como transformaciones generales de coordenadas'. De las cuatro interacciones fundamentales conocidas, las tres que conocemos a nivel microscópico, como teorías cuánticas de campos, son teorías de gauge.

Creo que no es irrazonable esperar que una completa descripción cuántica de todas las interacciones será realizada dentro del marco de las teorías de gauge. Entonces el requerimiento de la independencia de background lleva a alguna clase de teoría de Chern-Simons como la única posibilidad para tal teoría completa.

1.3 Transgresiones y teoría de campos

En este trabajo consideramos extensiones de las teorías de Chern-Simons basadas en el uso de *formas de transgresión* [25, 26, 27, 28, 29, 30], las cuales son generalizaciones de las formas de Chern-Simons involucrando dos campos de gauge. Recíprocamente las formas de Chern-Simons pueden pensarse como formas de transgresión con uno de los campos de gauge igual a cero.

Se puede pensar el segundo campo de gauge en las formas de transgresión como un background de referencia fijo no dinámico, o como un campo dinámico en pie de igualdad con el primero. En el segundo caso además puede pensarse que ambos campos están definidos en el mismo espaciotiempo, o que están definidos en variedades con un borde común.

A nivel de teoría de campos las formas de transgresión poseen:

(i) Invariancia Gauge

Las teorías de Chern-Simons no son estrictamente invariantes gauge, sino cuasi-invariantes, en el sentido de que la acción cambia por un término de borde bajo transformaciones de gauge. Las trangresiones en cambio son invariantes gauge.

(ii) Principio de Acción

Para tener un principio de acción bien definido, en el sentido de que la acción sea un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento es necesario en general agregar términos de borde a la acción, lo cual a veces se hace caso por caso para configuraciones específicas. La acción de transgresión permite dar una prescripción general de los términos de borde que hacen el principio de acción bien definido, los cuales son de hecho parte de su definición (por lo que puede decirse que 'vienen con la acción').

(iii) Cargas Conservadas Covariantes

Las cargas conservadas que vienen de la acción de Chern-Simons no son covariantes, en el sentido de que su álgebra de corchetes de Poisson contiene términos centrales, como sucede siempre que se parte de una acción cuasi-invariante. Además en el caso de las masas de agujeros negros en diversas dimensiones para gravedades de CS, los valores obtenidos aplicando el Teorema de Noether a estas teorías no coinciden con los obtenidos por métodos hamiltonianos, que son los que tienen significado físico. Las cargas calculadas utilizando transgresiones como acciones son covariantes, reflejando la invariancia estricta de la acción, y dan los mismos valores que los métodos hamiltonianos.

(iv) Termodinámica de Agujeros Negros

La entropía de los agujeros negros en gravedades de Chern-Simons en diversas dimensiones, calculada a partir de la versión euclídea de la acción, diverge, por lo que se debe 'regularizar' esta acción con 'contratérminos' apriopiados. La acción de transgresión correspondiente da una entropía finita y que coincide con la calculada por métodos hamiltonianos.

La parte arriba mencionada de este trabajo se basa en trabajo realizado en colaboración con Rodrigo Olea, Ricardo Troncoso y Jorge Zanelli, recogido en los artículos [31, 32].

1.4 Transgresiones y acciones para objetos extendidos

Otra área interesante de aplicación de las formas de transgresión tiene que ver con el estudio de modelos de objetos extendidos de diversas dimensionalidades, como cuerdas y membranas, llamados en general branas, el cual ha recibido mucha atención en los últimos años.

Moore y Seiberg [22] mostraron que muchas intrincadas propiedades de una amplia clase de teorías bidimensionales (2D, signatura 1+1) con invariancia conforme o 'Conformal Field Theories' (CFT) (las llamadas 'Rational Conformal Field Theories') se pueden entender de forma muy simple si uno considera estas teorías como inducidas por una teoría de CS en 3D en su borde bidimensional, como consecuencias de la invariancia gauge y covariancia general de esta última. Las CFT en 2D son importantes porque las Teorías de Cuerdas corresponden a teorías de este tipo. Resultó natural tratar de reescribir las acciones en 1+1 dimensiones de las Supercuerdas como teorías de CS en 2+1 dimensiones [33] (ver también [7, 21, 22]) por una especie de 'engrosamiento' de la superficie de mundo, como modo de sacar ventajas de las propiedades atractivas de las teorías de CS.

Las formas de transgresión se usarán en la construcción de una clase de modelos [34, 35] describiendo objetos extendidos con o sin supersimetría, como sistemas de gauge. La acción de estos modelos es la suma de las integrales de las formas de transgresión para el grupo de gauge en cuestión, integradas sobre subvariedades de la variedad de base (el volumen de mundo de la brana) y la variedad de base propiamente dicha. El propósito original era introducir objetos extendidos fundamentales en supergravedades de Chern-Simons a través de la inmersión de acciones de CS de menor dimensión en un background de CS. Si se permitía que estas branas tuvieran bordes la acción no sería invariante gauge en ese caso. Fijar el gauge en los bordes de las branas no era plausible, ya que estos bordes podían moverse. Pareció natural entonces usar formas de transgresión en vez de CS en la construcción, lo cual da acciones invariantes gauge. El precio que se paga es la duplicación de los campos de gauge. En esta clase de modelos confluyen varias líneas separadas de trabajo, previamente no relacionadas. Sus principales ventajas son:

(i) Invariancia Gauge

Los modelos de branas construidos con transgresiones también son invariantes gauge. Este es un punto importante que contrasta con lo que pasa con la teoría de cuerdas estándar, la cual no es un sistema de gauge, lo cual se critica como uno de sus puntos débiles [36]).

(ii) Independencia de Background y Democracia Brana-Background

En estos modelos los objetos extendidos y el background están descritos por acciones de la misma forma, atractiva propiedad que podemos llamar 'democracia brana-background'. El background sin embargo no es fijo, sino que es dinámico e interactúa con las branas, por lo que el modelo es independiente de background.

(iii) Teoría de Cuerdas como una Teoría Topológica

Estos modelos avanzan el programa propuesto por Moore y Seiberg [22], Witten [7], Green [33] y Kogan [21] de formular la teoría de cuerdas como un teoría de CS en 2+1 dimensiones. Incluso se puede conjeturar que uno de los modelos de la clase propuesta podría proporcionar una formulación independiente de background de la teoría M.

(iv) Branas Heteróticas Supersimétricas

Estos modelos proporcionan una extensión supersimétrica de el modelo de Dixon, Duff y Sezgin (DDS) [50] para el acoplamiento de objetos extendidos a campos de Yang-Mills. Sin embargo nuestros modelos difieren de estos en que los modelos DDS contienen branas que se mueven en un background fijo dado por campos de gauge A, la métrica g_{rs} y el campo-RR B_d, mientras que nuestro modelo es independiente de background y todos los campos son campos de gauge dinámicos.

La parte de este trabajo que trata con objetos extendidos se basa en los trabajos [34, 35], el primero de los cuales en colaboración con Hitoshi Nishino.

1.5 Plan del trabajo

El plan de este trabajo es el siguiente:

Las secciones 2 y 3 están dedicadas a revisar material de otros autores que se utilizará adelante.

En la Sección 2 se repasarán brevemente los elementos de la teoría de fibrados y clases características que se usan en la construcción de nuestros modelos. En el apéndice A se incluyen detalles adicionales de este tema.

En la sección 3.1 se revén los modelos físicos de los que los modelos propuestos acá son extensiones. Estos son teorías de gauge y gravedades de Chern-Simons (3.1), En la sección 4 discutiremos las acciones de transgresión en teoría de campos, con la sección 4.1 dedicada a las propiedades generales de esta y una discusión de las opciones disponibles en su formulación, la sección 4.2 a gravedad con formas de transgresión, la sección 4.3 dedicada a las cargas conservadas en general, la 4.4 a las cargas conservadas para teorías con el grupo AdS como grupo de gauge.

La sección 5 se dedica a la termodinámica de agujeros negros.

La sección 6 comienza con una subsección en que se revisan los tópicos de la teoría de objetos extendidos que conducen a la clase de modelos propuestos. Los temas revisados incluyen incluyendo las acciones de Green-Schwarz para supercuerdas y el acoplamiento de branas a campos de Yang-Mills y trabajos sobre la relación entre teoría de cuerdas y modelos de CS.

Luego se introducen las acciones de branas basadas en formas de transgresión, se discuten sus simetrías, sus ecuaciones del movimiento y algunos aspectos de la teoría cuántica, así como posibles relaciones con la teoría de cuerdas.

La Discusión y Conclusiones van en la sección 7.

El apéndice A se dedica a la geometría y topología de fibrados.

En el apéndice B se repasan los grupos espaciotemporales y sus extensiones supersimétricas.

2 Geometría y Topología de los Campos de Gauge

That non-Abelian gauge fields are conceptually identical to ideas in the beautiful theory of fiber bundles, developed by mathematicians without reference to the physical world, was a great marvel to me. In 1975, I discussed my feelings with Chern and said "This is both thrilling and puzzling, since you mathematicians dreamed up this concepts out of nowhere." He immediately protested, "No, no, this concepts were not dreamed up. They were natural and real."

-C.N. Yang

Los objetos conocidos en Física como Campos de Gauge y en Geometría Diferencial como Fibrados desempeñan un rol central en ambas disciplinas. En esta sección se repasan las propiedades geométricas y topológicas básicas de estos objetos que se utilizan más adelante en este trabajo. Debe consultarse el apéndice A por más detalles.

La herramientas matemáticas que se requieren son esencialmente las mismas usadas en el estudio de Anomalías en Teoría Cuántica de Campos (TCC), por lo que las referencias en esta sección son los artículos en ese tema de Stora [25], Zumino [26], Mañés, Stora and Zumino [27], y Alvarez-Gaumé y Ginsparg [28], y el libro de Bertlmann [37]. Un muy buen libro que contiene estos temas es ref.[30].

En lo que respecta a la literatura de matemáticas puras algunos de los resultados presentados en esta sección pueden encontrarse en el libro de Chern [29]. Por una lista extensiva de referencias ver [25, 26, 27, 28, 29].

2.1 Fibrados y campos de gauge

Un fibrado diferenciable (E, π, M, F, G) consiste de los siguientes elementos[30]:
(i) Una variedad diferenciable E llamada el *espacio total*.
(ii) Una variedad diferenciable M llamada el *espacio base*.
(iii) Una variedad diferenciable F llamada la *fibra*.
(iv) Un mapa $\pi : E \to M$ llamado la *proyección*. La imagen inversa $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \approx F$ es llamada la fibra en p.
(v) Un grupo de Lie G llamado *grupo de estructura*, que actúa en F por la izquierda.
(vi) Un conjunto de abiertos $\{U_i\}$ cubriendo M con un difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi\phi_i(p, f) = p$. El mapa ϕ_i se llama una *trivialización local* dado que mapea $\pi^{-1}U_i$ en $U_i \times F$.
(vii) Si escribimos $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, el mapa $\phi_{i,p} : F \to F_p$ es un difeomorfismo. Si la intersección de U_i con U_j es no vacía, se requiere que en la intersección $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \to F$ sea un elemento de G. Por lo tanto ϕ_i y ϕ_j están relacionados por un mapa suave de la intersección de U_i y U_j a G, $\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$. Las $\{t_{ij}\}$ se llaman *funciones de transición*.

En física el espacio base M es el espaciotiempo,con coordenadas denotadas por x. La fibra F es usualmente un espacio vectorial (isomorfo a R^n) dado por los valores de un campo de materia (lo más fácil es pensarlo como un conjunto de escalares, pero suelen ser espinores) ψ^I con índice en una representación del álgebra de un grupo G. El grupo G es el grupo de estructura, correspondiente en física al *grupo de gauge*. Los campos de materia se escriben usualmente $\psi(x) = \psi^I(x)T^I$, donde T^I son los generadores del álgebra del grupo en alguna representación. La acción del grupo de estructura G en la fibra se define por $\psi \to \psi^g = g^{-1}\psi$ donde $g(x) \equiv exp[\lambda^I(x)T^I]$ es un elemento del grupo. Esta acción del grupo corresponde en física a las *transformaciones de gauge*.

La derivada exterior usual no transforma covariantemente bajo transformaciones de gauge $d\psi^g = d(g^{-1}\psi) \neq g^{-1}d\psi$. Para definir una *derivada covariante* D se introduce la *conexión en el fibrado* dada por la 1-forma definida en M, $A = A^I_m(x)T^I\, dx^m$. La conexión corresponde en física al *potencial de gauge*. La derivada covariante se define por su acción sobre una forma diferencial con índices en el grupo $\Omega = \Omega^I T^I$ como

$$D\Omega = d\Omega + [A, \Omega]$$

donde d es la derivada exterior y el conmutador entre dos matrices de formas diferenciales de ordenes p y q se define por

$$[\Lambda_p, \Sigma_q] = \Lambda_p\Sigma_q - (-1)^{pq}\Sigma_q\Lambda_p \tag{1}$$

Definiendo la regla de transformación de A bajo transformaciones de gauge como

$$A \to A^g = g^{-1}(A + d)g$$

se sigue que D transforma covariantemente

$$D^g = g^{-1}Dg$$

y también

$$D^g\psi^g = g^{-1}D\psi$$

El *tensor de campo* o *curvatura* se define como la 2-forma

$$F = D^2 = dA + A^2$$

De la definición de la curvatura resulta que esta satisface idénticamente la *identidad de Bianchi*

$$DF = 0$$

La curvatura F es covariante bajo transformaciones de gauge

$$F^g = (D^g) = g^{-1}Dgg^{-1}Dg = g^{-1}Fg$$

Claramente tanto A como F corresponden en realidad a una matriz de formas diferenciales, para cualquier representación concreta de los generadores T^I.

Bajo transformaciones de gauge infinitesimales (con los elementos de $\lambda \to 0$) se tiene

$$\delta_\lambda A = d\lambda + [A, \lambda] \quad = D(A)\lambda$$

de donde

$$\delta_\lambda F = [F, \lambda]$$

2.2 Polinomios invariantes, formas de transgresión y formas de Chern-Simons

Un *polinomio invariante* $P(F)$ se define como la suma formal

$$P(F) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \, \mathrm{STr}\left(F^{n+1}\right) \quad , \tag{2}$$

donde

$$\mathrm{STr}\left(T^{I_1} \dots T^{I_{n+1}}\right) = g^{I_1 \cdots I_{n+1}}$$

corresponde a una *traza simétrica invariante*[2] en el álgebra de G. Esto es lo mismo que decir que $g^{I_1 \cdots I_{n+1}}$ es un tensor invariante simétrico en el álgebra del G, el cual por contrucción tiene sus índices en la representación adjunta del grupo G.

En el apéndice A se prueba que los polinomios invariantes son cerrados

$$dP(F) = 0$$

y por lo tanto **localmente** exactos

$$P(F) = d\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F)$$

donde se introdujo la forma de Chern-Simons, definida por

$$\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F) \equiv (n+1) \int_0^1 ds \; \mathrm{STr}\left(AF_s^n\right)$$

con $A_t = tA$ y $F_t = dA_t + A_t^2$.

Una relación similar pero que vale globalmente es la *fórmula de transgresión*, que involucra dos potenciales de gauge A_0 y A_1 en la misma fibra, con curvaturas F_0 y F_1 respectivamente.

$$\mathrm{STr}\left(F_1^{n+1}\right) - \mathrm{STr}\left(F_0^{n+1}\right) = d\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0)$$

[2]Ver apéndice B por el significado de 'simétrica' en el caso de un supergrupo, el cual tiene generadores fermiónicos. En ese caso debemos hablar de una 'supertraza' en vez de una traza.

con la *forma de transgresión* definida como

$$\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0) \equiv (n+1) \int_0^1 dt\ \ \mathrm{STr}\ ((A_1 - A_0)F_t^n)$$

con $A_t = tA_1 + (1-t)A_0$ y $F_t = dA_t + A_t^2$.

La forma de transgresión es invariante bajo transformaciones de gauge en las que A_0 y A_1 transforman con el mismo elemento g del grupo G, debido a la covariancia de $J \equiv A_1 - A_0$,$J^g = g^{-1}Jg$, la covariancia de F_t, $F_t^g = g^{-1}F_t g$, y la invariancia de la traza simétrica.

La invariancia bajo transformaciones de gauge de las transgresiones es de fundamental importancia para nosotros, ya que esa propiedad es la motivación para usar transgresiones en la construcción de acciones para sistemas físicos, que es de lo que trata este trabajo.

Bajo variaciones infinitesimales genéricas de A_1 y A_0 la variación de la transgresión es

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n{+}1) < F_1^n \delta A_1 > -(n{+}1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n{+}1)\, d \int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

con $A_t = tJ + A_0 = tA_1 + (1-t)A_0$, $\delta A_t = t\delta A_1 + (1-t)\delta A_0$ y $F_t = dA_t + A_t^2$

Bajo transformaciones de gauge involucrando solo A_1 tenemos $\delta A_1 = D_1\lambda$, $\delta A_t = tD_1\lambda$ y entonces

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = d[(n+1) < F_1^n\lambda > -n(n+1) \int_0^1 dt\ t\ \ < JF_t^{n-1}D_1\lambda >]$$

Esto significa que la transgresión varía por un término de borde si solo uno de los campos se varía. Un resultado análogo vale si se varía solo A_0 (ver apéndice A)

La expresión previa con $A_1 = A$ y $A_0 = 0$ da la variación de gauge de la forma de Chern-Simons:

$$\delta\mathcal{Q}_{2n+1} = d[(n+1) < F^n\lambda > -n(n+1) \int_0^1 dt\ t\ \ < AF_t^{n-1}D\lambda >]$$

con $F_t = tF + (t^2 - t)A^2$ y $D\lambda = d\lambda + [A, \lambda]$. Esto implica que la forma de Chern-Simons no es invariante gauge, sino que cambia por un término de borde. Por esta razón se dice que la forma de Chern-Simons es cuasi-invariante, al contrario que las transgresiones, que son invariantes. Como se verá esto representa una gran diferencia cuando se consideran las cargas conservadas o la entropía de agujeros negros en teorías de la gravitación con acciones de Chern-Simons o transgresiones.

Las consideraciones de esta sección se extienden directamente a supergrupos, que se definen en el apéndice B.

3 Repaso de la Construcción de Acciones de Chern-Simons

If one may borrow a term used by the biologists, one would say that there is gradually forming a "dogma" that all interactions are due to gauge fields.
C.N. Yang

3.1 La Acción

Se considera un sistema físico consistente de campos de gauge definidos en cierta variedad de base como en la sección 2.1 y se busca una acción que describa la dinámica clásica y cuántica del sistema. Se asume que no hay una métrica dada de antemano en la variedad que podamos usar en la construccińı de la lagrangiana. La lagrangiana en dimensión D debe ser una D-forma invariante gauge. El único objeto local covariante gauge que se puede construir con los potenciales de gauge A es el tensor de campo F. Como no tenemos una métrica, no podemos construir una acción de Yang-Mills. Una 2n-forma genérica covariante gauge sería $F^{I_1}...F^{I_n}$ y podemos construir un objeto invariante gauge contrayendo esta con un tensor invariante $g_{I_1...I_n}$ (el cual debe ser simétrico en sus índices debido a que al ser las F 2-formas conmutan, de modo que $F^{I_1}...F^{I_n}$ es simétrico) El invariante $g_{I_1...I_n}F^{I_1}...F^{I_n}$ no sirve como lagrangiana sin embargo, debido a que es una derivada total (localmente) como ya vimos. Sin embargo podemos tomar como nuestra acción para dimensiones impares $D = 2n + 1$

$$S = k \int_{S^{2n+1}} \mathcal{Q}_{2n+1}(F, A) = k \int_{M^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1}) \tag{3}$$

donde k es una constante. Esta lagrangiana, dada por la forma de Chern-Simons, no es invariante gauge, cambia localmente por una derivada total

$$\delta_\lambda \mathcal{Q}_{2n+1}(A, F) = -dQ^1_{2n}(A, F, \lambda)$$

lo que significa que la acción dada es invariante gauge en una variedad sin borde suponiendo que la topología de la fibra es trivial. La variación de la forma de Chern-Simons es solo localmente exacta, entonces si la topología de la fibra es no trivial las contribuciones de diferentes cartas locales superpuestas no se cancelarán en la región de intersección. La acción tampoco es invariante bajo transformaciones de gauge globalmente no triviales. Por construcción la acción es generalmente covariante y no depende de ninguna métrica definida en la variedad.

3.2 Ecuaciones del movimiento

Bajo variaciones del potencial de gauge se tiene

$$\delta S = k\ (n+1) \int_{M^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(D(\delta A)F^n) = k\ (n+1) \int_{M^{2n+2}} d\,[\,\mathrm{STr}\,(\delta A F^n)] \quad (4)$$

donde usamos $\delta F = D(\delta A)$ y ec.(4). Del teorema de Stokes

$$\delta S = k\ (n+1) \int_{S^{2n+1}} \mathrm{STr}\,(\delta A F^n) \quad (5)$$

Entonces las ecuaciones del movimiento $\frac{\delta S}{\delta A} = 0$ son [8, 10, 12]

$$\mathrm{STr}\,(T^I F^n) = 0 \quad (6)$$

En 2+1 dimensiones ($n = 1$) y si la 'métrica del grupo' $d^{IJ} = \mathrm{STr}\,(T^I T^J)$ es invertible ('no degenerada') las ecuaciones del movimiento implican que $F^I = 0$ y por lo tanto el campo de gauge es gauge puro. Esto significa que no hay grados de libertad locales que se propaguen, y el campo de gauge puede hacerce cero por una transformación de gauge en cualquier carta local (pero no en todas simultaneamente) En dimensiones mas altas esto no es verdad, las ecuaciones del movimiento aun tienen la solución $F^I = 0$, pero existen soluciones para las que esto no es cierto.

3.3 Gravedad y Supergravedad de Chern-Simons

Las gravedades de Chern-Simons son teorías de CS con un grupo espaciotemporal como grupo de gauge

$$A = e^r\ P_r + \frac{1}{2}\omega^{rs} J_{rs} \quad (7)$$

donde e^r es el vielbein (por una constante con dimensiones de longitud inversa) y ω^{rs} es la conexión de spin. La dimensión del espaciotiempo es $D = 2n+1$ y se toma $P_r = J_{r,D+1}$. La Torsión T^r y la Curvatura R^{rs} se definen como

$$T^r = de^r + \omega^r_{\ s} e^s \quad (8)$$
$$R^{rs} = d\omega^{rs} + \omega^{rp}\omega_p^{\ s} \quad (9)$$

Bajo transformaciones de gauge infinitesimales

$$\lambda = \lambda^r P_r + \frac{1}{2}\lambda^{rs} M_{rs} \quad (10)$$

los campos cambian como

$$\delta e^r = D\lambda^r \quad , \quad \delta\omega^{rs} = 0 \quad (11)$$

para traslaciones de gauge y

$$\delta e^r = \lambda^r{}_s e^s \quad , \quad \delta\omega^{rs} = -D\lambda^{rs} \tag{12}$$

para transformaciones de Lorentz de gauge. Las expresiones para los grupos de de Sitter son similares, con algunos términos adicionales que se reducen a cero en el caso de Poincaré, y pueden calcularse a partir del álgebra (ver las referencias al comienzo de esta sección).

Para especificar el modelo se debe dar el tensor invariante a usar. La opción mas común es el pseudo-tensor de Levi-Civita

$$< J_{r_1 r_2} ... J_{r_D r_{D+1}} >= \epsilon_{r_1 ... r_{D+1}} \tag{13}$$

El polinomio invariante obtenido en este caso se llama 'densidad de Euler' En el caso $D = 2+1$ la acción es

$$S_3 = k \ \epsilon_{rsp} \int_{S^3} e^r \left(d\omega^{sp} + \omega^{sq}\omega_q{}^p + \lambda \frac{1}{3} e^s e^p \right) \tag{14}$$

donde $\lambda = 0$ para el grupo de Poincaré $ISO(2,1)$, $\lambda = +1$ para el grupo AdS $SO(2,2)$ y $\lambda = -1$ para el grupo dS $SO(3,1)$. Las ecuaciones del movimiento correspondientes a extremizar la acción bajo variaciones de la conexión de spin ω^{rs} son

$$T^r = de^r + \omega^r_s e^s = 0 \tag{15}$$

Se sigue que si el vielbein es invertible (no degenerado) como matriz $det(e^r_m) \neq 0$, donde m es un índice espaciotemporal 'curvo', se puede escribir la conexión de spin como función del vielbein (on-shell)

$$\omega^{rs}_m = \omega^{rs}_m(e^r_m) \tag{16}$$

Las ecuaciones del movimiento correspondientes a e^r son

$$\epsilon_{rsp}(R^{sp} + \lambda e^s e^p) = 0 \tag{17}$$

La acción de Einstein-Hilbert (EH) en cualquier dimensión es

$$S_{EH} = k \ \epsilon_{r_1 .... r_D} \int_{S^D} R^{r_1 r_2} e^{r_3} ... e^{r_D} \tag{18}$$

donde R^{rs} se define como antes, pero en términos de la conexión de spin correspondiente al caso de torsión cero $\omega(e)$ of eq.(75).

Esta claro que la Relatividad General en 2+1 dimensiones es equivalente *on-shell* a la teoría de Chern-Simons para el grupo de Poincaré ($\lambda = 0$), si el vielbein es no degenerado.

En dimensiones mas altas y para el tensor invariante $< M_{r_1 r_2} ... M_{r_D r_{D+1}} >= \epsilon_{r_1 ... r_{D+1}}$ la acción es

$$S_{2n+1} = k \int_{S^{2n+1}} \mathcal{Q}_{2n+1} \tag{19}$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\epsilon_{r_1 \dots r_{2n+1}} T^{r_1} (R^{r_2 r_3} + \lambda e^{r_2} e^{r_3}) \dots (R^{r_{2n-2} r_{2n-1}} + \lambda e^{r_{2n-2}} e^{r_{2n-1}}) = 0 \tag{20}$$

$$\epsilon_{r_1 \dots r_{2n+1}} (R^{r_1 r_2} + \lambda e^{r_1} e^{r_2}) \dots (R^{r_{2n-1} r_{2n}} + \lambda e^{r_{2n-1}} e^{r_{2n}}) = 0 \tag{21}$$

Esta teoría no es equivalente ni siquiera *on-shell* a la Relatividad General, y el que la torsión sea cero no es requerido por las ecuaciones del movimiento, al contrario de lo que sucecede en 2+1. Sin embargo se cree que las gravedades de Chern-Simons en dimensiones mas altas son equivalentes a la Relatividad General en ciertos límites, como se menciona en la sección 3.1.5.

Es posible también construir acciones de CS para los grupos espaciotemporales usando combinacines simetrizadas de trazas ordinarias como tensores invariantes. Estas se conocen como 'acciones de gravedades exóticas de Chern-Simons'. Se diferencian de las mencionadas anteriormente en que en general la torsión aparece explícitamente en estas acciones. Los invariantes $\mathrm{STr}\,(F^k)$ se conocen como 'densidades de Pontryagin' y son nulas a menos que k sea par para los grupos $SO(d)$ con cualquier signatura, lo que implica que acciones de CS de este tipo solo existen para $D = 4n - 1$.

Las supergravedades de Chern-Simons ('CS-sugra') son modelos con acciones de Chern-Simons para extensiones supersimétricas de los grupos espaciotemporales. Si los generadores fermiónicos son espinores de Majorana, los potenciales de gauge son de la forma

$$A = e^r \ P_r + \frac{1}{2}\omega^{rs} M_{rs} + \psi^\alpha Q_\alpha + \sum_k b_{(k)}^{r_1 \dots r_k} (Z_{(k)})_{r_1 \dots r_k} \tag{22}$$

donde ψ_m^α es el 'gravitino' y las $b_{(k)}^{r_1 \dots r_k}$ 1-formas son los potenciales de gauge asociados a las cargas bosónicas adicionales que puedan requerirse para cerrar el álgebra. Los tensores invariantes pueden ser una extensión supersimétrica apropiada de $\epsilon_{r_1 \dots r_k}$ (que puede ser difícil de construir), o cualquier producto simetrizado de trazas de generadores (que puede construirse de manera directa).

3.4 Teoría Cuántica

La teoría cuántica se define formalmente a través de la integral de caminos

$$Z = \sum_{topologias} \int \mathcal{D}A \ e^{iS/\hbar} \tag{23}$$

donde se asume que sumamos sobre todas las configuraciones del campo de gauge, y sobre todas las geometrías y topologías de la variedad deferencial de base. En principio deberían además utilizarse procedimientos adecuados, analogos al método de Fadeev-Popov, para evitar redundancias en esta suma, como sumar configuraciones de gauge correspondientes al mismo estado físico.

Los observables naturales invariantes gauge son no locales, los llamados 'loops de Wilson' o 'lazos de Wilson'

$$W[\gamma] = Tr\ \left[\mathcal{P}\ exp(\int_\gamma A)\right] \tag{24}$$

donde γ es una curva cerrada cualquiera y $\mathcal{P}\ exp$ es la exponencial ordenada de camino, definida como el producto de las $1+A_\mu dx^\mu$ en segmentos infinitesimales en que se divide el camino, en el orden en que este es recorrido. Witten mostró que para teorías de gauge de CS en 2+1 los valores esperados cuánticos de los loops de Wilson son invariantes topológicos de nudos

$$K(\gamma) = < W[\gamma] > = \int \mathcal{D}A\ W[\gamma]\ e^{iS/\hbar} \tag{25}$$

como cabía esperar de la ausencia de una métrica de referencia que proporcionara una noción de distancia entre puntos de γ.

Un punto importante es que la constante de acoplamiento en la acción esta cuantizada, en el sentido de que la consistencia de la teoría a nivel cuántico requiere que esta tome alguno de un conjunto discreto de valores. La idea es que la acción puede escribirse como

$$S = k\ \int_{M^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1}) \tag{26}$$

o

$$\overline{S} = k\ \int_{\overline{M}^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1}) \tag{27}$$

dependiendo de si extendemos S^{2n+1} en M^{2n+2} o en $\overline{M}^{2n+2}$ de modo que $S^{2n+1} = \partial M^{2n+2} = \partial \overline{M}^{2n+2}$. Es natural pedir que la física descrita por tal teoría no pueda depender del modo en que uno extienda S^{2n+1}, ya que la teoría está definida en esta. Para que la integral de camino no dependa de que extensión elegimos debemos requerir

$$S - \overline{S} = 2\pi i\ m \tag{28}$$

donde m es un entero. Pero

$$S - \overline{S} = k\ \int_{M_T^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1}) \tag{29}$$

donde M_T^{2n+2} es la variedad cerrada formada por la unión de M^{2n+2} y $\overline{M}^{2n+2}$, esta última con la orientación invertida, unidas en S^{2n+1}. Observamos que $\int_{M_T^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1})$ es un número de Chern, invariante topológico. La condición de cuantización en k queda

$$k\ \int_{M_T^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1}) = 2\pi i\ m \tag{30}$$

Esta condición de cuantización es satisfecha por cualquier M_T^{2n+2} posible solo si la integral $\int_{M_T^{2n+2}} \mathrm{STr}\,(F^{n+1})$ es proporcional a un número entero. Sabemos por el teorema de índice ec.(37) que esto es verdad para la traza simetrizada usual. También es cierto en el caso del grupo $SO(D)$ para D par y signatura arbitraria, con $\epsilon_{r_1 \ldots r_D}$ como tensor invariante, en cuyo caso la integral se conoce como el 'número de Euler' de la variedad $\chi(M_T)$(el cual tambien se relaciona con el índice de un operador diferencial).

Una importante consecuencia del resultado anterior es que se espera que la acción clásica sea ya la 'acción efectiva cuántica'. Normalmente se espera que despues de insertar la acción clásica en la integral de caminos y calcular los efectos cuánticos usando técnicas apropiadas (desarrollos porturbativos y regularización, etc.) se obtiene la acción efectiva cuántica como la acción clásica mas correcciones cuánticas ('contratérminos'), que pueden tener la misma dependencia funcional en los campos dinámicos que la acción clásica (dando lugar solo a la renormalización de los campos, masas y constantes de acoplamiento) o, como sucede en general, una dependencia diferente.

Para teorías de CS los posibles contratérminos consistentes con las simetrías de la acción (invariancia gauge y covariancia general) son también Chern-Simons. Esto fue señalado por primera vez en el estudio de las anomalías en TCC (y las matemáticas son esencialmente las mismas aca) donde se conoce como 'teorema de Adler-Bardeen' [42]. El teorema de Adler-Bardeen para anomalías quirales establece que las correcciones cuánticas de mayor orden (radiativas) a la anomalía solo dan origen a la renormalización de la función de ondas (redefinición de los campos) y de las cargas, pero la forma de la anomalía está determinada por la contribución de orden mas bajo. Este resultado fue extendido a situaciones mas generales por Piguet y Sorella [43],quienes usaron métodos BRST para independizarse de cualquier procedimiento específico de regularización. Podemos interpretar este resultado mas la condición de cuantización como implicando que despues de que todas las correcciones cuánticas y la regularización se toman en cuenta se debe finalizar con una acción efectiva de la forma original con una constante k que satisface la condición de cuantización dada arriba.

En teoría cuántica de campos aquellas teorías que son bien definidas para todas las escalas de energía[3] se dice que tienen un 'punto fijo ultravioleta'. Una clase de teorías que tienen esta propiedad es la de las teorías 'asintoticamente libres', como por ejemplo la Cromodinámica Cuántica(QCD) (ver p. ej. [44]). Sin embargo para estas teorías el punto fijo se dice 'trivial', porque en el límite ultravioleta la constante de acoplamiento se anula y la teoría es libre. No se conocen teorías con puntos fijos ultravioletas no triviales, pero hay teoremas en el sentido de que si esas teorías existen el número de constantes de acoplamiento no nulas en ese límite debe ser finito (ver [45]).

[3] por lo que no es necesario truncarlas a una escala determinada de distancias o energía, lo que se conoce como un 'cut-off'.

Es interesante observar que de los puntos previos se puede concluir que las teorías de Chern-Simons al nivel cuántico son TCC con un punto fijo ultravioleta no trivial.

4 Transgresiones en Teoría de Campos

Santiago, y adelante.
Hernán Cortés

4.1 Transgresiones como acciones de teorías de gauge

En esta sección se consideran generalizaciones de las teorías con acciones de Chern-Simons en las que la lagrangiana se toma como dada por formas de Transgresión, $L_{trans} = \mathcal{T}_{2n+1}$ en dimensión $D = 2n+1$, en vez de formas de Chern-Simons. Este tipo de generalización fue considerada primero en [53, 34, 35] y posteriormente en [54, 55]. Los resultados originales contenidos en esta sección y la siguiente sobre termodinámica de agujeros negros fueron presentados en nuestro trabajo en [31, 32].

El uso de transgresiones [31, 32] tiene la ventaja inmediata de que la acción es ahora estrictamente invariante gauge, en vez de solo cuasi-invariante, pero ademas tiene las importantes ventajas mencionadas en la introducción de:
(i) dar un principio de acción bien definido, en el sentido de que la acción es un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento con condiciones de borde apropiadas,
(ii) dar cargas conservadas covariantes a través del método de Noether (debido a la invariancia de gauge estricta, como se observó en general en [56]), y en el caso de gravitación una masa que coincide con la obtenida por métodos hamiltonianos (al contrario de lo que pasa con la acción de Chern-Simons),
(iii) regularizar la acción a través de los términos de borde dictados por la invariancia gauge de modo que la entropía de los agujeros negros en gravitación de AdS calculada a partir de la acción euclídea es la correcta, comparada con la calculada con métodos hamiltonianos (donde estos términos de borde deben calcularse caso por caso).
Se puede pensar que una vez que se logra la invariancia gauge de la teoría, los demás puntos se siguen como resultado de la 'magia del principio de gauge', pero aún así resulta sorprendente que la extensión de las acciones de Chern-Simons requerida por la invariancia gauge resuelva además estos otros problemas.

Las ecuaciones del movimiento pueden determinarse a partir de la fórmula general para variaciones de las transgresiones

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1) d \int_0^1 < J F_t^{n-1} \delta A_t > \tag{31}$$

donde las interpolaciones son entre A_0 y A_1.

Las ecuaciones del movimiento (E.d.M.)que se siguen de esta acción son

$$< F_1^n T^I >= 0 \quad , \quad < F_0^n T^I >= 0 \tag{32}$$

las cuales deben suplirse con condiciones de borde apropiadas que anulen el término de borde

$$-n(n+1)d\int_0^1 < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

, de modo que sea $\delta\mathcal{T}_{2n+1}=0$ cuando valen las E.d.M., con lo que la acción sería realmente un extremo. El término de borde en la variación de la transgresión se anula si las variaciones δA_1 y δA_0 se toman como cero en el borde, pero esto, que equivale a tomar los potenciales de gauge fijos en el borde como condición de borde, es demasiado restrictivo, considerando que la lagrangiana contiene solo derivadas primeras de los campos.

Una condición de borde que parece natural dada la forma del término de borde es pedir que $J=0$ (o que tienda a cero lo suficientemente rápido) en el borde, con lo que $A_0=A_1$ en el borde, y que F_t sea finito en el borde. Esto aseguraría que el término de borde se anule. Se considerará otra posible condición de borde en el caso de gravitación.

En esta discusión de las ecuaciones del movimiento se asumió que ambos campos de gauge son dinámicos. Sin embargo se pueden distinguir dos posibilidades:
(i) la ya mencionada de considerar tanto A_1 como A_0 campos dinámicos que satisfacen las E.d.M., o
(ii) solo A_1 es dinámico, mientras A_0 es un background fijo. En ese caso Solo A_1 debe satisfacer las E.d.M..

Observese que cualquiera sean las condiciones de borde, tanto en caso (i) como (ii) la acción es un extremo para variaciones que se reducen a transformaciones de gauge en borde. En el caso (i) podemos tomar δA_1 y δA_0 como arbitrarios en el interior ('bulk') pero reduciendose a transformaciones de gauge infinitesimales con el mismo parámetro de gauge λ en el borde. Esto es así porque debido a la invariancia gauge de la trangresión se tiene

$$0=\delta_\lambda\mathcal{T}_{2n+1}=(n+1) < F_1^n D_1\lambda > -(n+1) < F_0^n D_0\lambda > -n(n+1)d\int_0^1 < JF_t^{n-1}\delta_\lambda A_t >=$$

$$=d\left\{(n+1) < F_1^n\lambda > -(n+1) < F_0^n\lambda > -n(n+1)\int_0^1 < JF_t^{n-1}D_t\lambda >\right\}$$

mientras que si miramos a la variación general de la transgresión se tiene que los términos de bulk son cero debido a las E.d.M. y el término de borde es el mismo de la expresión previa para variaciones de gauge, porque de todos modo $< F_1^n\lambda >$ y $< F_0^n\lambda >$ son cero (E.d.M.), lo que prueba que la acción es un extremoaún si variaciones de gauge de los potenciales se permiten en el borde.

En el caso (ii) no asumimos que $< F_0^n T^I >= 0$, y se toma δA_1 arbitrario en el bulk pero reduciendose a transformaciones de gauge con parámetro λ en el borde, mientras δA_0 es una variación de gauge con parámetro λ tanto en el bulk como en el borde (con un λ que es el mismo que aparece en las variaciones de δA_1 en el borde). Un argumento análogo al usado en el caso (i) muestra que también en este caso la variación de la acción será cero. La situación es similar a la discutida por Regge y Teitelboim [57] en Relatividad General, donde la adición de términos de borde se requería para tener un principio de acción bien definido, mientras se permitían transformaciones de Poincaré en el infinito espacial. La similitud será aún mas estrecha al considerar gravitación.

Las formas explícitas de las formas de Chern-Simons y Transgresión en 3D son

$$\mathcal{Q}_3 =< AdA + \frac{2}{3}A^3 >=< AF - \frac{1}{3}A^3 > \tag{33}$$

y

$$\mathcal{T}_3 =< A_1 dA_1 + \frac{2}{3}A_1^3 > - < A_0 dA_0 + \frac{2}{3}A_0^3 > - < A_1 A_0 > \tag{34}$$

En 5D estas son

$$\mathcal{Q}_\triangledown =< A(dA)^2 + \frac{2}{3}A^3 dA + \frac{3}{5}A^5 >=< AF^2 - \frac{1}{2}A^3 F + \frac{1}{10}A^5 > \tag{35}$$

y

$$\mathcal{T}_5(0,1) = \mathcal{Q}_5(1) - \mathcal{Q}_5(0) - dC_4 \tag{36}$$

donde

$$C_4 = \frac{1}{2} < (A_1 A_0 - A_0 A_1)(F_1 + F_0) + A_0 A_1^3 + A_0^3 A_1 + \frac{1}{2}A_1 A_0 A_1 A_0 > \tag{37}$$

La notación $\mathcal{Q}_5(1)$ ($\mathcal{Q}_5(0)$) significa que el argumento es A_1 (A_0).

4.2 Gravedad con Formas de Transgresión

4.2.1 Generalidades

Consideraremos teorías de la gravitación en las que la acción está dada por formas transgresión con el grupo G dado por el grupo de Anti-de Siter $SO(d-2,2)$, $d = 2n+1$ [31, 32], con generadores J_{AB} con el algebra

$$[J_{AB}, J_{CD}] = +\eta_{BC}J_{AD} - \eta_{AC}J_{BD} - \eta_{BD}J_{AC} + \eta_{AD}J_{BC} \tag{38}$$

y la traza simétrica definida por

$$< J_{A_1 A_2} ... J_{A_{d-1} A_d} >= \epsilon_{A_1 .... A_d} \tag{39}$$

La traza simétrica puede definirse a veces con otra normalización, por ejemplo mas adelante usaremos

$$< J_{A_1 A_2} ... J_{A_{d-1} A_d} >= \kappa \frac{2^n}{(n+1)} \epsilon_{A_1 .... A_d} \tag{40}$$

donde $\kappa = [2(d-2)!\Omega_{d-2}G_k]^{-1}$ con Ω_{d-2} el volumen de la la esfera en $d-2$ dimensiones y G_d la 'constante de Newton' en dimensión d. Esto solo da el mismo que aparece en la traza simétrica factor de normalización en frente de la transgresión o el CS. Los generadores se dividen en generadores del 'grupo de Lorentz' J_{ab} with $a, b = 0, ..., d-2$ y los generadores de 'traslaciones' $P_a = J_{a,d-1}$. El potencial de gauge A es

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \tag{41}$$

En d=2+1 la forma de Chern-Simons es

$$\mathcal{Q}_3(e,\omega) = \epsilon_{abc}(R^{ab}e^c + \frac{1}{3}e^3) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d(e^a\omega^{bc}) \tag{42}$$

y la forma de Transgresión es

$$\mathcal{T}_3(e_1,\omega_1;e_0,\omega_0) = \epsilon_{abc}(R_1^{ab}e_1^c + \frac{1}{3}e_1^3) - \epsilon_{abc}(R_0^{ab}e_0^c + \frac{1}{3}e_0^3) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d[(e_1^a + e_0^a)(\omega_1^{bc} - \omega_0^{bc})] \tag{43}$$

En d=4+1 la forma de Chern-Simons es

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_5(e,\omega) = \frac{3}{4}\epsilon_{abcde}(R^{ab}R^{cd}e^e + \frac{2}{3}e^a e^b e^c R^{de} + \frac{1}{5}e^a e^b e^c e^d e^e) + \\ \frac{1}{4}\epsilon_{abcde}d(-2\omega^{ab}d\omega^{cd}e^e + \frac{1}{2}e^a e^b e^c \omega^{de} - \frac{3}{2}\omega^{af}\omega_f{}^b\omega^{cd}e^e)\end{aligned} \tag{44}$$

En una notación mas compacta

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_5(e,\omega) = \frac{3}{4}\epsilon(3R^2e + 2e^3R + \frac{1}{5}e^5) + \\ \frac{\epsilon}{4}d(-2\omega d\omega e + \frac{1}{2}e^3\omega - \frac{3}{2}((\omega^2))\omega e)\end{aligned} \tag{45}$$

donde el paréntesis doble implica contracciones, como por ejemplo $((\omega^2)) \equiv \omega^{af}\omega_f{}^b$, y $((\omega e)) \equiv \omega^{af}e_f$. Para la transgresión en d=4+1 tenemos

$$\mathcal{T}_5 = \frac{3}{4}\epsilon(R^2e + \frac{2}{3}Re^3 + \frac{1}{5}e^5) - \frac{3}{4}\epsilon(\tilde{R}^2\overline{e} + \frac{2}{3}\tilde{R}\overline{e}^3 + \frac{1}{5}\overline{e}^5) -$$

$$\frac{1}{4}\epsilon\ d[\theta(e+\overline{e})(R - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}e^2) + \theta(e+\overline{e})(\tilde{R} - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\overline{e}^2) + \theta Re + \theta\tilde{R}\overline{e}]$$

donde $\theta^{ab} = \omega^{ab} - \overline{\omega}^{ab}$.

4.2.2 Configuración de Variedad Cobordante (VC)

Una elección particular de la configuración A_0 que permite apartarse lo menos posible de las teorías de gravitación de Chern-Simons, en el sentido de agregar un mínimo de estructura adicional, es la configuración de variedad cobordante (VC) [31, 32], donde si $A_1 = A$ y $A_0 = \overline{A}$, tenemos

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \quad , \quad \overline{A} = \frac{1}{2}\overline{\omega}^{ab}J_{ab} + \overline{e}^a P_a \tag{46}$$

con $\overline{A}$ definido solo en el borde por

$$\overline{e}^a = 0 \quad , \quad \overline{\omega}^{1\underline{i}} = 0 \quad , \quad \overline{\omega}^{\underline{ij}} = \omega^{\underline{ij}} \tag{47}$$

donde el índice 1 corresponde a la dirección normal al borde y los índices subrayados, como $\underline{i}$, pueden tomar cualquier valor diferente de 1.

Para esta elección de A_0 puede verse que la acción puede escribirse como la forma estándar del término de bulk para la lagrangiana de Chern-Simons con el tensor invariante

$$< J_{A_1 A_2} ... J_{A_{d-1} A_d} >= \kappa \frac{2^n}{(n+1)} \epsilon_{A_1 .... A_d} \tag{48}$$

el cual puede escribirse notablemente solo en términos de e y R (y no de ω) en la forma conocida como de Lanczos-Lovelock- Chern-Simons

$$L_{LCS}(R, e) = \kappa \int_0^1 dt \epsilon \left(R + t^2 e^2\right)^n e \tag{49}$$

mas un término de borde dado por

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\kappa n \int_0^1 dt \epsilon \theta e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{n-1}}{2k+1} \sum_{l=0}^{n-1-k} C_l^{n-1-k} \tilde{R}^{n-1-k-l} t^{2l} \theta^{2l} t^{2k} e^{2k} \\
&= -\kappa n \int_0^1 dt \int_0^t ds \epsilon \theta e \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} C_l^{n-1-k} \tilde{R}^{n-1-k-l} t^{2l} \theta^{2l} s^{2k} e^{2k} \\
&= -\kappa n \int_0^1 dt \int_0^t ds \epsilon \theta e \left(\tilde{R} + t^2\theta^2 + s^2 e^2\right)^{n-1} .
\end{aligned}$$

Es decir que la lagrangiana de transgresión en este caso esta dada por

$$L_{trans} = L_{LCS} + d\alpha \tag{50}$$

Este resultado es particularmente notable si se tiene en cuenta que el término de borde que debe adicionarse a la lagrangiana L_{LCS} para obtener la lagrangiana de Chern-Simons con el tensor invariante dado no se conoce en general para cualquier dimensión.

La configuración de variedad cobordante permite otra elección de condiciones de borde particularmente conveniente que también hace que la acción sea un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento. La fórmula de la variación de la transgresión para la configuración de variedad cobordante da

$$\delta\mathcal{T}^0_{2n+1} = d[\kappa n \int_0^1 dtt\epsilon(\delta\theta e - \theta\delta e)(\tilde{R} + t^2\theta^2 + t^2e^2)^{n-1}]$$

Lo que sugiere la condición de borde natural

$$\epsilon_{abca_3.....a_{2n+1}}\delta\theta^{ab}e^c = \epsilon_{abca_3.....a\theta^{ab}_{2n+1}}\delta e^c$$

Puede verse [32] que esto implica que la curvatura extrínseca del borde K_{ij} satisface

$$\delta K_{ij} = 0$$

para las variaciones permitidas en esta condición de borde, y

$$K_{ij} = \Omega g_{ij}$$

donde Ω es una constante y g_{ij} es la métrica del borde. Esta última ecuación implica que la normal es un vector de Killig conforme, ya que la curvatura extrínseca está dada por la derivada de Lie de la métrica del borde según la normal

$$K_{ij} = \mathcal{L}_n g_{ij}$$

4.3 Cargas Conservadas

En esta subsección se estudiarán las corrientes y cargas conservadas para teorías de Chern-Simons y Transgresión, calculadas a partir del Teorema de Noether [31, 32] . Empezaremos repasando el teorema de Noether, entonces discutiremos las corrientes conservadas asociadas a las transformaciones de gauge y a los difeomorfismos. Otros trabajos que se han ocupado del cálculo de las cargas conservadas en teorías de gauge y gravitación de Chern-Simons, que no tienen sin embargo una superposición de contenido significativa con nuestro trabajo, son las referencias [54, 55, 58]. Un trabajo previo en el caso de 2+1 dimensiones es ref.[53]. El prolema relacionado de la elección de términos de borde apropiados y de las cargas conservadas en teorías de la gravitación de Einstein-Hilbert con constante cosmológica en dimensiones pares se trató en ref.[59].

4.3.1 Teorema de Noether

La variación de formas diferenciales bajo difeomorfismos en que las coordenadas cambian como $\delta x^\mu = \xi^\mu$ esta dada por

$$\delta\alpha(x) = \alpha'(x) - \alpha(x) = -\mathcal{L}_\xi\alpha$$

donde $\mathcal{L}_\xi$ es la derivada de Lie, que para formas diferenciales puede escribirse como

$$\mathcal{L}_\xi\alpha = [dI_\xi + I_\xi d]\alpha$$

con d la derivada exterior y el operador de contracción dado por

$$I_\xi\alpha_p = \frac{1}{(p-1)!}\xi^\nu\alpha_{\nu\mu_1...\mu_{p-1}}dx^{\mu_1}...dx^{\mu_{p-1}}$$

El operador I_ξ es una antiderivación, en el sentido de que actuando en el el producto exterior de dos formas diferenciales α_p y β_q de ordenes p y q respectivamente da $I_\xi(\alpha_p\beta_q) = I_\xi\alpha_p\beta_q + (-1)^p\alpha_p I_\xi\beta_q$. Un resultado útil es que la derivada de Lie actuando sobre potenciales de gauge es

$$\mathcal{L}_\xi A = D(I_\xi A) + I_\xi F$$

donde D es la derivada covariante y F el tensor de campo.
Se considera una densidad de lagrangiana dada por una forma diferencial $L(\phi, \partial\phi)$, donde ϕ representa todos los campos dinámicos. La variación de la lagrangiana bajo difeomorfismos esta dada por $\delta L = -d(I_\xi L)$, ya que $dL = 0$ porque el orden de L es igual a la dimensión del espacio. Se considera una clase de transformaciones bajo las que la lagrangiana sea cuasi-invariante, combinadas con difeomorfismos. Bajo estas la variación de la lagrangiana se asume de la forma

$$\delta L = d\Omega - d(I_\xi L)$$

donde la primera derivada total viene de las transformaciones consideradas y la segunda de los difeomorfismos. Por otro lado el procedimiento usual que lleva a las ecuaciones del movimiento (E.d.M.) de Euler-Lagrange da la variación de la lagrangiana como las ecuaciones del movimiento mas un término de borde

$$\delta L = (E.d.M.)\delta\phi + d\Theta$$

donde las variaciones $\delta\phi$son infinitesimales pero arbitrarias en su forma. A partir de estas expresiones de la variación obtenemos, asumiendo las variaciones en ambas restringidas a transformaciones de la clase considerada en la primera expresión de δL e igualando, que si valen las E.d.M.

$$d[\Omega - I_\xi L - \Theta] = 0$$

Se sigue que la llamada 'corriente de Noether'

$$\star j = \Omega - I_\xi L - \Theta$$

Se puede ver que si se agrega un término de borde a L, como $L' = L + dB$, con B función de los campos y sus drivadas, entonces la corriente conservada asociada a la invariancia bajo difeomorfismos cambia como $\star j' = \star j + I_\xi B$.

En las siguientes dos subsecciones deduciremos la forma general de las cargas de gauge y difeomorfismos para teorías de gauge con acciones de transgresión y Chern-Simons.

4.3.2 Cargas de Gauge

La variación de la transgresión es

$$\delta \mathcal{T}_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1)\, d \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} \delta A_t > \tag{51}$$

Bajo transformaciones de gauge

$$\delta_\lambda A_1 = -D_1 \lambda \quad , \quad \delta_\lambda A_0 = -D_0 \lambda \tag{52}$$

de donde

$$\delta_\lambda A_t = -D_t \lambda = -d\lambda - A_t \lambda + \lambda A_t \tag{53}$$

Las E.d.M., que asumiremos son satisfechas por ambos campos A_1 y A_0, son $< F_1^n T^a >= 0$ y $< F_0^n T^a >= 0$, de donde se sigue que podemos leer la forma Θ que aparece en el teorema de Noether de la expresión de la variación

$$\Theta = n(n+1) \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} D_t \lambda > \tag{54}$$

La forma Ω es cero en este caso, ya que la transgresión es invariante gauge. Se sigue que la corriente conservada es

$$* j_\lambda = -\Theta = -n(n+1) \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} D_t \lambda > \tag{55}$$

Además $* j_\lambda = dQ_\lambda$ con

$$Q_\lambda = n(n+1) \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} \lambda > \tag{56}$$

ya que

$$dQ_\lambda = n(n+1) \int_0^1 dt < D_t [J F_t^{n-1} \lambda] > \tag{57}$$

o

$$dQ_\lambda = n(n+1)\int_0^1 dt < \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}\lambda - JF_t^{n-1}D_t\lambda] > \tag{58}$$

y, usando $\frac{d}{dt}F_t^{n-1} = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}F_t^n$

$$dQ_\lambda = (n+1) < (F_1^n - F_0^n)\lambda > -n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}D_t\lambda > \tag{59}$$

donde el primer término del segundo miembro es cero debido a las E. de M..

Esta expresión de las cargas es válida para Chern-Simons, poniendo $A_1 = A$ y $A_0 = 0$, ya que la configuración $A_0 = 0$ satisface las E.d.M..

4.3.3 Cargas de Difeomorfismos

La variación de la Transgresión es

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n{+}1) < F_1^n\delta A_1 > -(n{+}1) < F_0^n\delta A_0 > -n(n{+}1)\, d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t > \tag{60}$$

La variación de los potenciales bajo difeomorfismos es

$$\delta_\xi A_1 = -\mathcal{L}_\xi A_1 = D_1[I_\xi A_1] - I_\xi F_1 = -[I_\xi d + dI_\xi]A_1 \tag{61}$$
$$\delta_\xi A_0 = -\mathcal{L}_\xi A_0 = D_0[I_\xi A_0] - I_\xi F_0 = -[I_\xi d + dI_\xi]A_0 \tag{62}$$
$$\delta_\xi A_t = -\mathcal{L}_\xi A_t = D_t[I_\xi A_t] - I_\xi F_t = -[I_\xi d + dI_\xi]A_t \tag{63}$$

Podemos leer el Θ que aparece en el teorema de Noether de la variación de la transgresión

$$\Theta = -n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta_\xi A_t > \tag{64}$$

o

$$\Theta = n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t] + JF_t^{n-1}I_\xi F_t > \tag{65}$$

pero

$$D_t[JF_t^{n-1}I_\xi A_t] = D_tJF_t^{n-1}I_\xi A_t - JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t] = \frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1}I_\xi A_t - JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t]$$

entonces

$$\Theta = n(n{+}1)\int_0^1 dt < \frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1}I_\xi A_t + JF_t^{n-1}I_\xi F_t > -n(n{+}1)\, d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}I_\xi A_t > \tag{66}$$

Para el término $I_\xi L$ en la corriente de Noether tenemos

$$I_\xi L = I_\xi\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < I_\xi JF_t^n - nJF_t^{n-1}I_\xi F_t > \tag{67}$$

La corriente es $*j = \Omega - [\Theta + I_\xi L]$, pero $\Omega = 0$ debido a la invariancia de la acción bajo difeomorfismos, entonces

$$*j = -[\Theta + I_\xi L] = -(n+1)\int_0^1 dt < n\frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1} I_\xi A_t + I_\xi J F_t^n >$$

$$+n(n+1)\ d\ \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} I_\xi A_t >$$

pero $I_\xi A_t = t I_\xi J + I_\xi A_0$, entonces $I_\xi J = \frac{d}{dt} I_\xi A_t$ y por lo tanto

$$< n\frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1} I_\xi A_t + I_\xi J F_t^n > = \frac{d}{dt} < F_t^n I_\xi A_t >$$

lo que permite integrar los primeros términos de la corriente dando

$$*j = < F_1^n I_\xi A_1 > - < F_0^n I_\xi A_0 > + n(n+1)\ d\ \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{68}$$

Los primeros dos términos del segundo miembro son cero debido a las E. de M., entonces

$$*j = \ dQ_\xi \tag{69}$$

con

$$Q_\xi = +n(n+1)\int_0^1 dt < J F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{70}$$

Como en el caso de las cargas de gauge, esta expresión es válida para Chern-Simons, poniendo $A_1 = A$ y $A_0 = 0$, ya que la configuración $A_0 = 0$ satisface las E.d.M.. Otra forma de plantear estas cargas es como

$$Q'_\xi = Q_\xi + I_\xi B \tag{71}$$

Entonces de las ecuaciones (22) y (23) resulta

$$Q_\xi^{trans}(0,1) = Q_\xi^{CS}(1) - Q_\xi^{CS}(0) - I_\xi C_{2n}(0,1) \tag{72}$$

con

$$C_{2n} = -(n+1)n\int_0^1 ds \int_0^1 dt < t A_s J (F_s)_t^{n-1} > \tag{73}$$

donde $(F_s)_t = tF_s + (t^2 - t)A_s^2$, $A_s = sA_1 + (1-s)A_0$ and $F_s = dA_s + A_s^2$, y de ahí

$$I_\xi C_{2n}(0,1) = -n(n+1)\int_0^1 ds \int_0^1 dt < t I_\xi A_s J (F_s)_t^{n-1} + t A_s I_\xi J (F_s)_t^{n-1} + \tag{74}$$

$$(n-1) t A_s (F_s)_t^{n-2} I_\xi (F_s)_t >$$

4.4 Cálculo de las Cargas en Casos Concretos para Chern-Simons y Transgresiones

En esta subsección calcularemos las cargas conservadas para agujeros negros en gravedades de Chern-Simons y transgresiones (ver refs. [60, 61] sobre estas soluciones), como se hizo en refs. [31, 32]. En el caso de transgresiones haremos el cálculo en dimensión arbitraria, usando como referencia tanto otro agujero negro, en particular el de $M = 0$ (masa cero) y el de $M = -1$ (AdS), y la configuración de variedad cobordante (VC).

Veremos que el resultado de la masa es el que se esperaba dado el resultado hamiltoniano para transgresiones, pero no para Chern-Simons.

4.4.1 Chern-Simons en d=2+1

Se considera la solución de las E.d.M. de gravedad de Chern-Simons para un agujero negro en rotación en d=2+1, con vielbein [60]

$$e^0 = \Delta dt \quad , \quad e^1 = \frac{1}{\Delta}dr \quad , \quad e^2 = rd\phi - \frac{J}{2r}dt \tag{75}$$

con

$$\Delta = \sqrt{r^2 - 2G_3M + \frac{2G_3J}{4r^2}}$$

y conexión de espín

$$\omega^{01} = rdt - \frac{J}{2r}d\phi \quad , \quad \omega^{02} = -\frac{J}{2r^2\Delta}dr \quad , \quad \omega^{12} = -\Delta d\phi \tag{76}$$

y la solución de anti de Sitter (AdS) con vielbein

$$\overline{e}^0 = \overline{\Delta}dt \quad , \quad \overline{e}^1 = \frac{1}{\overline{\Delta}}dr \quad , \quad \overline{e}^2 = rd\phi \tag{77}$$

con

$$\overline{\Delta} = \sqrt{r^2 + 2G_3}$$

y conexión de espín

$$\overline{\omega}^{01} = rdt \quad , \quad \overline{\omega}^{02} = 0 \quad , \quad \overline{\omega}^{12} = -\overline{\Delta}d\phi \tag{78}$$

A Gauge

En d=2+1 la corriente de gauge es

$$*j^{CS}_{\lambda} = -2d < A\lambda > \tag{79}$$

O, para gravedad CS, si $\lambda = \frac{1}{2}\lambda^{ab}J_{ab} + \lambda^a P_a$

$$*j^{CS}_{\lambda} = \kappa d[\epsilon_{abc}\omega^{ab}\lambda^c + \epsilon_{abc}e^a\lambda^{bc}] \tag{80}$$

con la traza simétrica mencionada

$$< J_{A_1 A_2}...J_{A_{d-1}A_d} >= \kappa \frac{2^n}{(n+1)} \epsilon_{A_1....A_d} \tag{81}$$

en el caso $n = 1$. La constante es $\kappa = [2(d-2)!\Omega_{d-2}G_d]^{-1}$ con Ω_{d-2} el volumen de la la esfera en $d-2$ dimensiones y G_d la 'constante de Newton' en dimensión d. En este caso $\kappa = [4\pi G_2]^{-1}$

La carga $\int_\Sigma *j_\lambda^{CS}$, donde Σ en uns sección espacial es 0 o ∞ a menos que se elija un λ que cumpla determinadas condiciones. Esto parece corresponder a la elección de los llamados 'parámetros de reducibilidad', discutidos por Barnich et al. [62]. En el caso de los difeomorfismos lo que se requiere es que ξ^μ sea un vector de Killing asintóticamente (lo cual desde luego es una parte bien conocida del folcklore de la Relatividad General). Para transformaciones de gauge lo que se requiere es que λ sea un parámetro covariantemente constante asintóticamente, esto es $D\lambda = 0$ asintóticamente(para transgresiones debe ser $D_1\lambda = D_0\lambda = 0$ asintóticamente), lo que implica que $\delta_\lambda A = 0$ en el borde espacial, condición análoga a la condición de ser vector de Killing para vectores quegeneran difeomorfismos. La condición $D\lambda = 0$ implica, tanto para el agujero negro como AdS,

$$\lambda^0 = \lambda^{01} = c_1 r \quad , \quad \lambda^1 = \lambda^{02} = 0 \quad , \quad \lambda^2 = -\lambda^{12} = c_2 r \tag{82}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Las cargas conservadas $\int_\Sigma *j_\lambda^{CS}$ en $d = 2+1$ dan:
(i) M para el parámetro de gauge que corresponde a $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$.
(ii) J para el parámetro de gauge que corresponde a $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$,
si la integral, que se reduce a una integral en el borde espacial, se toma en el circulo de radio infinito.

B Difeomorfismos

En d=2+1

$$*j_\xi^{CS} = d < AI_\xi A > \tag{83}$$

Las cargas conservadas $\int_\Sigma *j_\xi^{CS}$ en $d = 2+1$ dan:
(iii) M para el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$.
(iv) $-J$ para el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial \phi}$,
no importa que radio se tome la integración (al contrario de lo que sucede para las cargas de gauge)

4.4.2 Momento Angular para Transgresión en 2+1

Mas adelante se evaluará la masa de gauge y difeomorfismos en cualquier dimensión para transgresiones, pero la única solución que se conoce con momento angular es en d=2+1, por lo que daremos el resultado del cálculo del momento angular tomando A_1 y A_0 como agujeros negros con la misma masa y momento angular J y $\overline{J}$ respectivamente. Las corrientes de gauge y difeomorfismos de las acciones de transgresión son, en d=2+1

$$*j_\lambda^{trans} = -2d < (A_1 - A_0)\lambda > \tag{84}$$

para la de gauge y

$$*j_\xi^{trans} = d < (A_1 - A_0)(I_\xi A_1 + I_\xi A_0) > \tag{85}$$

para la de difeomorfismos.

El resultado para la carga de difeomorfismos $\int_\Sigma *j_\xi^{trans}$ en $d = 2+1$ es $-(J - \overline{J})$ para el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial\phi}$,
no importa que radio se tome la integración. El resultado para la carga de gauge $\int_\Sigma *j_\lambda^{trans}$ en $d = 2+1$ es el mismo, pero la integración debe tomarse para radio infinito de la sección espacial. Es importante notar que el hecho de que el resultado involucre las diferencias de los valores de J para cada configuración no es obvio que debiera cumplirse a partir de la expresión original de la corriente conservada.

4.4.3 Masa de agujeros negros en cualquier dimensión con variedades cobordantes

La carga de Noether asociada a la invariancia bajo difeomorfismos es para $d = 2n+1$

$$Q_\xi = n(n+1)\int_0^1 < \Delta A F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{86}$$

donde $\Delta A = A - \overline{A}$.
Calcularemos esta carga tomando A como una solución de las E.d.M. correspondiente a un agujero negro para gravedad de AdS en dimensión arbitraria $d = 2n+1$ (ver [60, 61]) y $\overline{A}$ como la configuración correspondiente a una variedad cobordante

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \quad , \quad \overline{A} = \frac{1}{2}\overline{\omega}^{ab}J_{ab} + \overline{e}^a P_a \tag{87}$$

Donde

$$e^0 = \Delta dt \quad , \quad e^1 = \frac{1}{\Delta}dr \quad , \quad e^m = r\tilde{e}^m \tag{88}$$

$$\omega^{01} = rdt \quad , \quad \omega^{1m} = -\Delta\tilde{e}^m \quad , \quad \omega^{0m} = 0 \quad , \quad \omega^{mn} \tag{89}$$

donde las coordenadas 0 y 1 corresponden a las direcciones temporal y espacial radial y $\tilde{e}^m$ y ω^{mn} son el velbein y la conexión de espín de la esfera S^{d-1}, correspondiente a las variables angulares. Tenemos

$$\Delta = \sqrt{r^2 - (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}} + 1} = \sqrt{r^2 - \alpha + 1} \tag{90}$$

donde $\alpha = (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}}$. Para $\overline{A}$ tenemos

$$\overline{e}^a = 0 \quad , \quad \overline{\omega}^{1\underline{i}} = 0 \quad , \quad \overline{\omega}^{\underline{ij}} = \omega^{\underline{ij}} \tag{91}$$

donde los índices subrayados como $\underline{i}$ pueden tomar cualquier valor posible diferente de 1.
Si

$$\Delta A = A - \overline{A} \equiv \frac{1}{2}\Theta^{ab} J_{ab} + E^a P_a \tag{92}$$

con $\Theta^{ab} \equiv \omega^{ab} - \overline{\omega}^{ab}$ y $E^a \equiv e^a - \overline{e}^a$. Entonces

$$E^a = e^a \quad , \quad \Theta^{1\underline{i}} = \omega^{1\underline{i}} \quad , \quad \Theta^{\underline{ij}} = 0 \tag{93}$$

y para ΔA tenemos

$$\Delta A = \frac{1}{2}\Theta^{ab} J_{ab} + e^a P_a = \Theta^{1\underline{i}} J_{1\underline{i}} + e^a P_a \tag{94}$$

También

$$A_t = t\Delta A + \overline{A} = \frac{1}{2}[t\Theta + \overline{\omega}]J + [tE + \overline{e}]P \tag{95}$$

entonces para el vector de Killig temporal $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ obtenemos

$$I_\xi A_t = t e^0_t P_0 + t\Theta^{01}_t J_{01} \tag{96}$$

donde se usó que $E = e$, $\overline{e} = 0$ y $I_\xi \overline{\omega} = 0$.

Los tensores de campo son

$$F = \frac{1}{2}\overline{R}^{ab} J_{ab} + T^a P_a \quad , \quad \overline{F} = \frac{1}{2}\overline{\tilde{R}}^{ab} J_{ab} + \overline{T}^a P_a \tag{97}$$

donde $\overline{R}^{ab} = R^{ab} + e^a e^b$ o en una notación mas simple $\overline{R} = R + e^2$ y $\overline{\tilde{R}}^{ab} = \tilde{R}^{ab} + \overline{e}^a \overline{e}^b$, con $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ y $\tilde{R}^{ab} = d\overline{\omega}^{ab} + \overline{\omega}^a{}_c \overline{\omega}^{cb}$. Para las soluciones de agujero negro

$$T^a = 0 \quad , \quad \overline{R}^{0a} = 0 \quad , \quad \overline{R}^{1m} = 0 \quad , \quad \overline{R}^{mn} = \alpha \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tag{98}$$

y para la configuración de variedad cobordante

$$\overline{T}^a = 0 \quad , \quad \overline{\tilde{R}}^{1\underline{i}} = \tilde{R}^{1\underline{i}} = 0 \quad , \quad R^{\underline{ij}} = \tilde{R}^{\underline{ij}} + (\Theta^2)^{\underline{ij}} \tag{99}$$

de donde

$$\overline{\tilde{R}}^{\underline{ij}} = \overline{R}^{\underline{ij}} - [(\Theta^2)^{\underline{ij}} + (e^2)^{\underline{ij}}] \tag{100}$$

La configuración $\overline{A}$ de variedad cobordante con el agujero negro también satisface las ecuaciones del movimiento, como el propio agujero negro.
Necesitaremos

$$F_t = dA_t + A_t^2 = \overline{F} + t\overline{D}\Delta A + t^2 \Delta A^2 \tag{101}$$

con $\overline{D}\Delta A = d\Delta A + \overline{A}\Delta A + \Delta A \overline{A}$, entonces

$$F_t = \frac{1}{2}[\overline{\tilde{R}} + t(\overline{D}\Theta + \overline{e}E + E\overline{e}) + t^2(\Theta^2 + E^2)]J + [\overline{T} + t(\overline{D}E + ((\Theta\overline{e}))) + t^2((\Theta E))]P \tag{102}$$

donde los parentesis dobles indican contracciones, y $\overline{D}$ es la derivada covariante con $\overline{\omega}$, por ejemplo $[\overline{D}\Theta]^{ab} = d\Theta^{ab} + \overline{w}^a{}_c\Theta^{cb} + \overline{w}^b{}_c\Theta^{ac}$. Por definición $F_t =\equiv \frac{1}{2}\overline{R}_t J + T_t P$.

Para las dos configuraciones consideradas

$$F_t = \frac{1}{2}[\tilde{R} + t\overline{D}\Theta + t^2(\Theta^2 + e^2)]J + [t\overline{D}e + t^2((\Theta e))]P \tag{103}$$

Juntando todo, con el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ y la traza simétrica que lleva a la gravedad de Chern-Simons usual para el grupo AdS

$$< J_{a_1a_2}J_{a_3a_4}...J_{a_{2n-1}a_{2n}}P_{a_{2n+1}} >= \kappa\frac{2^n}{(n+1)}\epsilon_{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+1}} \tag{104}$$

donde $\kappa = [2(d-2)!\Omega_{d-2}G_k]^{-1}$ con Ω_{d-2} el volumen de la la esfera en $d-2$ dimensiones y G_d la 'constante de Newton' en dimensión d.
De la forma de ΔA y $I_\xi A_t$ vemos que el índice 1 debe estar en ΔA or $I_\xi A_t$, y por lo tanto también el generador P. Por lo tanto los índices e F_t deben ser angulares mn.

Necesitamos

$$[\overline{D}\Theta]^{mn} = 0 \tag{105}$$

$$(\Theta^2 + e^2)^{mn} = (\alpha - 1)\tilde{e}^m\tilde{e}^n \tag{106}$$

$$\tilde{R}^{mn} = \tilde{e}^m\tilde{e}^n \tag{107}$$

Reuniendo todo obtenemos

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa n \int_0^1 dt\, t\epsilon_{01m_1...m_{2n-2}}(2\Theta_t^{01}e^{m_1} + 2e_t^0\Theta^{1m_1})[1 + t^2(\alpha-1)]^{n-1}\tilde{e}_{m_2}...\tilde{e}_{m_{2n-1}} \tag{108}$$

pero $\Theta_t^{01} = r$, $e^{m_1} = r\tilde{e}^{m_1}$, $e_t^0 = \Delta$ y $\Theta^{1m_1} = -\Delta\tilde{e}^{m_1}$, entonces

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa n \int_0^1 dt\ \epsilon_{01m_1...m_{2n-2}}2t(\alpha-1)[1 + t^2(\alpha-1)]^{n-1}\tilde{e}_{m_1}...\tilde{e}_{m_{2n-1}} \tag{109}$$

esta expresión puede integrarse en t tomando

$$u = [1 + t^2(\alpha - 1)]$$

y el resultado es

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa\epsilon_{01m_1...m_{2n-2}}(\alpha^n - 1)\tilde{e}_{m_1}...\tilde{e}_{m_{2n-1}} \tag{110}$$

Integrado en la esfera S^{d-2} esto da

$$\int_{S^{d-2}} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa(d-2)!\Omega_{d-2}(\alpha^n - 1) \tag{111}$$

donde usamos $\int_{S^{d-2}} \epsilon_{01m_1...m_{2n-2}}\tilde{e}_{m_1}...\tilde{e}_{m_{2n-1}} = (d-2)!\Omega_{d-2}$. Finalmente

$$\int_{S^{d-2}} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = M \tag{112}$$

4.4.4 Masa de agujeros negros en cualquier dimensión respecto a otro agujero negro

La carga de Noether asociada a los difeomorfismos es para $d = 2n+1$

$$Q_\xi = n(n+1)\int_0^1 < \Delta A F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{113}$$

donde $\Delta A = A - \overline{A}$.
Calcularemos esta carga tomando tanto A como $\overline{A}$ como soluciones de las E.d.M. de tipo agujero negro para gravedad de AdS en dimensión arbitraria $d = 2n+1$ [60, 61]. Si

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \quad , \quad \overline{A} = \frac{1}{2}\overline{\omega}^{ab}J_{ab} + \overline{e}^a P_a \tag{114}$$

tenemos

$$e^0 = \Delta dt \quad , \quad e^1 = \frac{1}{\Delta}dr \quad , \quad e^m = r\tilde{e}^m \tag{115}$$

$$\omega^{01} = rdt \quad , \quad \omega^{1m} = -\Delta\tilde{e}^m \quad , \quad \omega^{0m} = 0 \quad , \quad \omega^{mn} \tag{116}$$

donde las coordenadas 0 y 1 corresponden a las direcciones temporal y espacial y $\tilde{e}^m$ y ω^{mn} son el vielbein y la conexión de espín de la esfera S^{d-2} correspondiente a las variables angulares. Tenemos

$$\Delta = \sqrt{r^2 - (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}} + 1} = \sqrt{r^2 - \alpha + 1} \tag{117}$$

donde $\alpha = (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}}$. Para $\overline{A}$ tenemos expresiones similares con

$$\overline{\Delta} = \sqrt{r^2 - (2G_k\overline{M} + 1)^{\frac{1}{n}} + 1} = \sqrt{r^2 - \overline{\alpha} + 1} \tag{118}$$

Los tensores de campo son

$$F = \frac{1}{2}\overline{R}^{ab}J_{ab} + T^a P_a \quad , \quad \overline{F} = \frac{1}{2}\overline{\tilde{R}}^{ab}J_{ab} + \overline{T}^a P_a \tag{119}$$

donde $\overline{R}^{ab} = R^{ab} + e^a e^b$ o en una notación mas simple $\overline{R} = R + e^2$ y $\overline{\tilde{R}}^{ab} = \tilde{R}^{ab} + \overline{e}^a \overline{e}^b$, con $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ y $\tilde{R}^{ab} = d\overline{\omega}^{ab} + \overline{\omega}^a{}_c \overline{\omega}^{cb}$. Para las soluciones de agujero negro

$$T^a = 0 \quad , \quad \overline{R}^{0a} = 0 \quad , \quad \overline{R}^{1m} = 0 \quad , \quad \overline{R}^{mn} = \alpha \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tag{120}$$

y

$$\overline{T}^a = 0 \quad , \quad \overline{\tilde{R}}^{0a} = 0 \quad , \quad \overline{\tilde{R}}^{1m} = 0 \quad , \quad \overline{\tilde{R}}^{mn} = \overline{\alpha} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tag{121}$$

Tenemos

$$\Delta A = A - \overline{A} \equiv \frac{1}{2} \Theta^{ab} J_{ab} + E^a P_a \tag{122}$$

con $\Theta^{ab} \equiv \omega^{ab} - \overline{\omega}^{ab}$ y $E^a \equiv e^a - \overline{e}^a$. También

$$A_t = t\Delta A + \overline{A} = \frac{1}{2}[t\Theta + \overline{\omega}]J + [tE + \overline{e}]P \tag{123}$$

y

$$F_t = dA_t + A_t^2 = \overline{F} + t\overline{D}\Delta A + t^2 \Delta A^2 \tag{124}$$

con $\overline{D}\Delta A = d\Delta A + \overline{A}\Delta A + \Delta A \overline{A}$ entonces

$$F_t = \frac{1}{2}[\overline{\tilde{R}} + t(\overline{D}\Theta + \overline{e}E + E\overline{e}) + t^2(\Theta^2 + E^2)]J + [\overline{T} + t(\overline{D}E + ((\Theta\overline{e}))) + t^2((\Theta E))]P \equiv \frac{1}{2}\overline{R}_t J + T_t P \tag{125}$$

donde el parentesis doble indica contracciones, y $\overline{D}$ es la derivada covariante con $\overline{\omega}$, por ejemplo $[\overline{D}\Theta]^{ab} = d\Theta^{ab} + \overline{w}^a{}_c \Theta^{cb} + \overline{w}^b{}_c \Theta^{ac}$.
Para las soluciones de agujero negro consideradas las componentes de E son

$$E^0 = (\Delta - \overline{\Delta})dt \quad , \quad E^1 = \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\right) dr \quad , \quad E^m = 0 \tag{126}$$

mientras las componentes de Θ son

$$\Theta^{01} = 0 \quad , \quad \Theta^{0m} = 0 \quad , \quad \Theta^{mn} = 0 \quad , \quad \Theta^{1m} = (\overline{\Delta} - \Delta)\tilde{e}^m \tag{127}$$

Entonces, en este caso,

$$\Delta A = \Theta^{1m} J_{1m} + E^a P_a \tag{128}$$

donde $E^a P_a$ es según dr y dt solamente. Además

$$I_\xi A_t = [t(\Delta - \overline{\Delta}) + \overline{\Delta}]P_0 + rJ_{01} \tag{129}$$

para el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Tomamos de nuevo la traza simétrica

$$< J_{a_1a_2} J_{a_3a_4} ... J_{a_{2n-1}a_{2n}} P_{a_{2n+1}} >= \kappa \frac{2^n}{(n+1)} \epsilon_{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+1}} \tag{130}$$

donde $\kappa = [2(d-2)!\Omega_{d-2}G_k]^{-1}$ con Ω_{d-2} correspondiendo al volumen de la esfera en $d-2$ dimensiones y G_k la 'constante de Newton' en dimensión d.
Para calcular Q_ξ, para $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, descartamos términos según dr o dt porque la integral se tomará a tiempo fijo sobre las variables angulares. Esto implica que el índice 1 debe estar en la parte de ΔA. Entonces solo el generador P_0 contribuirá de $I_\xi A_t$, y de ahí solo términos según J_{mn} contribuirán de F_t^{n-1}. Necesitamos

$$[\overline{D}\Theta]^{mn} = 2\overline{\Delta}(\overline{\Delta}-\Delta)\tilde{e}^m\tilde{e}^n \tag{131}$$

$$E^m\overline{e}^n + \overline{e}^m E^n = 0 \tag{132}$$

$$(\Theta^2 + E^2)^{mn} = -(\overline{\Delta}-\Delta)^2\tilde{e}^m\tilde{e}^n \tag{133}$$

$$\overline{\tilde{R}}^{mn} = \overline{\alpha}\tilde{e}^m\tilde{e}^n \tag{134}$$

Juntando todo

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa n \int_0^1 dt\; 2\epsilon_{01m_1\ldots m_{2n-2}}(\overline{\Delta}-\Delta)[t(\Delta-\overline{\Delta})+\overline{\Delta}]$$
$$\left(\overline{\alpha} + 2t\overline{\Delta}(\overline{\Delta}-\Delta) - t^2(\overline{\Delta}-\Delta)^2\right)^{n-1}\tilde{e}_{m_1}\ldots\tilde{e}_{m_{2n-1}}$$

Esto puede integrarse en t tomando

$$u = \left(\overline{\alpha} + 2t\overline{\Delta}(\overline{\Delta}-\Delta) - t^2(\overline{\Delta}-\Delta)^2\right)$$

y el resultado es

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa\epsilon_{01m_1\ldots m_{2n-2}}(\alpha^n - \overline{\alpha}^n)\tilde{e}_{m_1}\ldots\tilde{e}_{m_{2n-1}} \tag{135}$$

Integrado en la esfera S^{d-2} da

$$\int_{S^{d-2}} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = \kappa(d-2)!\Omega_{d-2}(\alpha^n - \overline{\alpha}^n) \tag{136}$$

donde usamos $\int_{S^{d-2}}\epsilon_{01m_1\ldots m_{2n-2}}\tilde{e}_{m_1}\ldots\tilde{e}_{m_{2n-1}} = (d-2)!\Omega_{d-2}$. Entonces

$$\int_{S^{d-2}} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = M - \overline{M} \tag{137}$$

Este es el resultado que se esperaría, pero es no trivial el modo en que se obtiene. En particular para una teoría de CS pura no se obtiene M como resultado para la masa, como vimos en el caso de 5D.

4.4.5 Masa de gauge en cualquier dimension para transgresiones

La carga de Noether asociada a transformaciones de gauge es para $d = 2n+1$

$$Q_\lambda = n(n+1)\int_0^1 < \Delta A F_t^{n-1}\lambda > \tag{138}$$

donde $\Delta A = A - \overline{A}$.
Calcularemos esta carga tomando tanto A como $\overline{A}$ como soluciones de las E.d.M. de tipo agujero negro para AdS en dimensión arbitraria $d = 2n + 1$ [60, 61] . No consideraremos un parámetro de gauge arbitrario λ, sino uno que satisfazga la condición de ser covariantemente constante

$$D\lambda = d\lambda + A\lambda - \lambda A = 0 \tag{139}$$

válida asintoticamente. Por ejemplo para soluciones de tipo agujero negro requeriremos que la condición valga para $r \to \infty$. Esta condición implica que la variación de gauge del potencial es cero asintóticamente, $\delta_\lambda A = 0$ para $r \to \infty$. Para soluciones de tipo agujero negro hay $d-1$ soluciones independientes a esta condición, marcadas por $d-1$ constantes arbitrarias C^1, C^m, con $m = 2, ..., d$. La condición de covariancia constante da en ese caso

$$\lambda^1 = \lambda^{0m} = 0 \tag{140}$$
$$\lambda^0 = \lambda^{01} = C^1 r \tag{141}$$
$$\lambda^m = -\lambda^{1m} = C^m r \tag{142}$$
$$\lambda^m_n \tilde{e}^n = \omega^m_n C^n \tag{143}$$

Elegimos el parámetro de gauge temporal, generador de 'boosts' de gauge

$$\lambda_{(1)} = rP_0 + rJ_{01} \tag{144}$$

que corresponde a $C^1 = 1$ y $C^m = 0$.

Notese que la fórmula para las cargas de gauge es idéntica a la fórmula para cargas de difeomorfismos, con λ en vez de $I_\xi A_t$. Pero

$$I_\xi A_t = [t(\Delta - \overline{\Delta}) + \overline{\Delta}]P_0 + rJ_{01} \tag{145}$$

para el vector de Killing temporal $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Para $r \to \infty$,

$$\Delta - \overline{\Delta} \approx \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2r} = \mathcal{O}(\frac{1}{r}) \to 0$$

y

$$\overline{\Delta} \approx r + \mathcal{O}(\frac{1}{r}) \to r$$

entonces

$$I_\xi A_t \to \lambda_{(1)}$$

. Se sigue que

$$\int_{S^{d-2}} Q_\lambda = M - \overline{M} \tag{146}$$

si la integral se calcula sobre una esfera de radio infinito. Esto contrasta con lo que pasa en el caso de la masa de difeomorfismo, donde la integral puede calcularse en cualquier hipersuperficie espacial que rodee el origen.

4.4.6 Cálculo de la masa del agujero negro en d=4+1 para Chern-Simons

El cálculo de la masa de gauge o de difeomorfismos para la gravedad de Chern-Simons pura en 5D muestra el problema antes mencionado de que el valor obtenido no es el parámetro M en la solución de agujero negro, el cual se sabe por métodos hamiltonianos que corresponde a la masa física.

A Gauge

La corriente de gauge es

$$*j_{\lambda}^{CS} = d < [-3AF + A_1^3]\lambda > \tag{147}$$

la cual al ser evaluada para el prámetro de gauge covariantemente constante considerado arriba $\lambda_{(1)}$ que genera los 'boosts' de gauge e integrada de una 'masa'

$$\int_{\Sigma} *j_{\xi}^{CS} = \frac{2}{6G_5}(\alpha - 1)^2 \tag{148}$$

con la constante α definida arriba y G_5 la constante de Newton en 5D. Esta expresión claramente no da M

B Difeomorfismos

$$*j_{\xi}^{trans} =< [\frac{3}{2}AF + \frac{1}{2}AdA]I_{\xi}A > \tag{149}$$

Esta corriente, evaluada para el vector de Killing temporal $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ e integrada da una 'masa'

$$\int_{\Sigma} *j_{\xi}^{CS} = \frac{1}{2G_5}(\alpha + \frac{2}{3})(\alpha - 1) \tag{150}$$

Este valor es nuevamente distinto de M.

5 Termodinámica de Agujeros Negros

En esta sección se discutirá la termodinámica de los agujeros negros de Chern-Simons. Se verá que estos tienen asociada una temperatura definida y una entropía [63, 64], y que esta entropía se puede calcular a partir de la evaluación de la acción euclídea (con tiempo imaginario y periódico) en la configuración de agujero negro considerada [65].

El problema que resuelven las formas de transgresión en este contexto es la regularización de la acción [31, 32]. Sucede que la acción de Chern-Simons pura diverge en estas configuraciones, lo cual se resuelve a nivel de una formulación hamiltoniana de mini-superespacio agregando los términos de borde necesarios para que la acción sea un extremo (tenga variación cero) cuando valen las ecuaciones del movimiento y condiciones de borde apropiadas (como se dijo antes, pedir que las variaciones sean cero en el infinito espacial es demasiado restrictivo) [60, 61]. Este procedimiento tiene el inconveniente de que los términos de borde apropiados tienen que buscarse caso por caso, para cada solución. La acción de transgresión contiene los términos de borde apropiados por construcción, resolviendo así este problema en general. Esto se prueba para cualquier dimensión para la configuración de variedad cobordante, y en 3 y 5 dimensiones si se toma como referencia el agujero negro de masa cero.

5.1 Repaso de los fundamentos

Hace unos treinta años Bekenstein [63] y Hawking [64] observaron que las soluciones de agujero negro en Relatividad General tienen una entropía y una temperatura definidas. Estos resultados se extienden a agujeros negros en gravedades de Chern-Simons. Se puede llegar a la temperatura y entropía por varios caminos, todos los cuales conducen a las mismas conclusiones. Una de las formas mas concisas y elegantes, si bien algo oscura y misteriosa en sus fundamentos, tiene que ver con la formulación de integrales de camino con acción euclídea de la teoría cuántica de campos[65]. En esta subsección repasaremos las ideas básicas de este método, siguiendo esencialmente [65].

5.1.1 Teoría Cuántica de Campos y Mecánica Estadística

En la formulación de integrales de camino la amplitud de pasar de la configuración Φ_1 de los campos en el instante t_1 a la configuración Φ_2 en el instante t_2 esta dada por

$$< \Phi_2, t_2 \mid \Phi_1, t_1 >= \int \mathcal{D}\Phi e^{iI[\Phi]} \tag{151}$$

donde la integral se toma sobre todas las configuraciones que interpolan entre las configuraciones inicial y final dadas y $I[\Phi]$ es la acción. También

$$< \Phi_2, t_2 \mid \Phi_1, t_1 >=< \Phi_2 \mid e^{-iH(t_2-t_1)} \mid \Phi_1 > \tag{152}$$

donde H es el hamiltoniano.

Supongamos que se hace ahora $t_2 - t_1 = -i\beta$, lo que equivale a pasar a un tiempo imaginario, y se hace $\Phi_2 = \Phi_1$, sumando sobre todos los Φ_1 se obtiene

$$Tr[exp(-\beta H)] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iI[\Phi]} \tag{153}$$

donde la integral se toma sobre todos los campos periódicos con período β en tiempo imaginario y para la acción euclídea $\hat{I} = -iI$. Pero

$$Z = Tr[exp(-\beta H)] \tag{154}$$

es simplemente la función de partición Z en el ensemble canónico para el campo Φ con temperatura $T = \beta^{-1}$ (tomando de acá en mas la constante de Boltzman $k_B = 1$), la cual puede calcularse entonces usando este procedimiento.

La evaluación concreta de la función de partición usualmente se basa en que la integral funcional que la define es dominada por la contribución de las configuraciones próximas a aquellas para las cuales la acción es un extremo (aproximación de punto de silla) con las condiciones de periodicidad requeridas. Si estas configuraciones son Φ_0, y las configuraciones próximas a estas son de la forma $\Phi = \Phi_0 + \overline{\Phi}$ mientras que la acción euclídea desarrollada alrededor de esa configuración hasta segundo orden en los campos tiene la forma

$$\hat{I}[\Phi] = \hat{I}[\Phi_0] + I_2[\overline{\Phi}] \tag{155}$$

donde I_2 es de segundo orden en las fluctuaciones. Se sigue que

$$lnZ = -\hat{I}[\Phi_0] + ln \int \mathcal{D}\Phi e^{-I_2[\overline{\Phi}]} \tag{156}$$

donde el primer término del segundo miembro representa el background y el segundo las fluctuaciones.

En el ensemble canónico el logaritmo de Z y la energía libre se relacionan entre si y con la entropía S y la masa (energía interna) M como

$$lnZ = \beta F = S - \beta M \tag{157}$$

Esta ecuación permite calcular la entropía, dadas M (la energía total) y la función de partición Z.

5.1.2 Termodinámica de Agujeros Negros

En el caso de gravitación, analogamente, la función de partición en función de la métrica g (o el vielbein y la conexión de espín) es

$$Z = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}\Phi e^{iI[g,\Phi]} \tag{158}$$

Se Z como la función de partición mecánica estadística para configuracione periódicas en tiempo imaginario β y para la acción euclídea $\hat{I} = -iI$, por analogía con la discusión para otros campos cuánticos, a pesar de que no se conocen los estados cuánticos del campo gravitatorio. Otra vez la función de partición es dominada por las configuraciones próximas a aquellas para las cuales la acción es un extremo (aproximación de punto de silla) con las condiciones de periodicidad requeridas. Si estas configuraciones son g_0 y Φ_0, y las configuraciones próximas a estas son de la forma $g = g_0 + \overline{g}$ y $\Phi = \Phi_0 + \overline{\Phi}$ mientras que la acción desarrollada alrededor de esa configuración hasta segundo orden en los campos tiene la forma

$$\hat{I}[g, \Phi] = \hat{I}[g_0, \Phi_0] + I_2[\overline{g}, \overline{\Phi}] \tag{159}$$

donde I_2 es de segundo orden en las fluctuaciones. Se sigue que

$$lnZ = -\hat{I}[g_0, \Phi_0] + ln \int \mathcal{D}g\mathcal{D}\Phi e^{-I_2[\overline{g},\overline{\Phi}]} \tag{160}$$

donde el primer término del segundo miembro representa el background y el segundo las fluctuaciones.

También en el caso gravitatorio vale que en el ensemble canónico el logaritmo de Z y la energía libre se relacionan entre si y con la entropía S y la masa (energía interna) M como

$$lnZ = \beta F = S - \beta M \tag{161}$$

A fines de la década de 1960 se observó que aparentemente se podría violar la segunda ley de la termodinámica y reducir la entropía del universo arrojando objetos con entropía en un agujero negro. Esta observación, junto con la propiedad previamente conocida de que el área de un agujero negro (o mas bien de su horizonte de eventos) siempre se incrementa (clásicamente), y en particular el agujero negro que resulta de unir dos agujeros negros tiene un área mayor que la suma de la de los dos originales, llevo a J. Bekenstein [63] a proponer que los agujeros tienen una entropía proporcional a su área. Posteriormente Hawking [64] observó que si tenían entropía debían tener una temperatura, la cual calculó en base a argumentos de teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos. En retrospectiva resulta natural que los agujeros negros sean objetos susceptibles de una descripción termodinámica, ya que debido a los teoremas llamados de *no hair* se puede caracterizar un agujero negro con un pequeño número magnitudes macroscópicas (masa, momento angular, carga eléctrica y otras cargas conservadas asociadas a interacciones de largo alcance), con independencia como se formó o los detalles del estado de su interior (cualquier estado interior con los mismos valores de las magnitudes microscópicas mencionadas da lugar al mismo agujero negro en el exterior).

Si se consideran backgrounds correspondientes a agujeros negros se encuentra que las soluciones euclídeas solo son no singulares para un valor específico de la temperatura. Esto se ve al considerar las métricas de agujero negro, que suelen tener la forma genérica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \tag{162}$$

donde la función $f(r)$ tiene una raíz en el horizonte $f(r_+) = 0$ y $d\Omega^2$ representa el elemento de línea en la esfera de dimensión d-2. Cerca del horizonte se puede desarrollar $f(r)$ como $f(r) = (r - r_+)f'(r_+)$ con lo que la métrica queda

$$ds^2 = -(r - r_+)f'(r_+)dt^2 + \frac{dr^2}{(r - r_+)f'(r_+)} \tag{163}$$

ignorando la parte angular. Si elegimos una nueva variable ρ tal que

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{f'_+}\sqrt{r - r_+}} \tag{164}$$

(donde $f'_+ = f'(r_+)$) lo que implica $r > r_+$ si ρ es real, entonces

$$\rho = \frac{2\sqrt{r - r_+}}{\sqrt{f'_+}} \tag{165}$$

y de ahí

$$f'_+(r - r_+) = \frac{[f'_+\rho]^2}{4} \tag{166}$$

por lo que la métrica, sin la parte angular y pasando al espacio euclídeo $t \to i\tau$ queda

$$ds^2 = +\frac{[f'_+\rho]^2}{4} d\tau^2 + d\rho^2 = \rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 \tag{167}$$

con $\phi = \frac{f'_+}{2}\tau$. Para evitar una singularidad cónica ϕ debe tener período 2π, que corresponde a τ con período β dado por

$$\beta = \frac{4\pi}{f'_+} \tag{168}$$

La temperatura correspondiente es la 'Temperatura de Hawking' $T_H = 1/\beta$

Notese que las coordenadas definidas arriba (τ, ρ), para el β correspondiente a la temperatura de Hawking, son coordenadas polares en un plano correspondiente a valores de $r \geq r_+$ y cuyo origen corresponde a $r = r_+$. Es importante señalar que no hay borde en el origen (correspondiente al horizonte de eventos) del plano euclídeo .

Por ejemplo, para la métrica de Schwarszchild $f(r) = 1 - 2M/r$ (en las unidades en que $c = G = \hbar = k_B = 1$), entonces $r_+ = 2M$ y $\beta = 8\pi M$

Para los agujeros negros de Chern-Simons de la sección previa $f(r) = \Delta^2(r)$, entonces $r_+^2 = \alpha - 1$, y $\beta = 2\pi/r_+$ [60, 61].

Estas diferentes dependencias de la energía M con la temperatura dan lugar a un comportamiento bastante diferente de los calores específicos en función de M para agujeros negros de Schwarzschild y Chern-Simons (ver p. ej. ref.[61]).

En lo que respecta a la función de partición Z (y de ahí la entropía), el orden más bajo de aproximación (llamada aproximación semiclásica) se obtiene, como se observó antes, evaluando la acción en la configuración periódica en tiempo imaginario con período β, correspondiente a los valores dados de la energía M y cualquier otra magnitud macroscópica que caracterize el estado termodinámico.

En el caso de gravitación en el ensemble canónico la magnitud macroscópica es M y la solución correspondiente es el agujero negro de masa M, el cual es periódico en tiempo imaginario ya que es estático. En el caso de momento angular, carga eléctrica y/o otras cargas macroscópicas distintas de cero, la solución correspondiente será el agujero negro con esas cargas.

Es importante mencionar algunas sutilezas de la evaluación de la acción de agujeros negros para calcular Z. En primer lugar la acción que se debe tomar debe tener términos de borde apropiados para que la acción sea un extremo (tenga variación cero) cuando valen las ecuaciones del movimiento [57]. En segundo lugar al pasar a la acción euclídea el origen está en $r = r_+$, por lo que la si la integración se hace en la variable r el rango de integración debe ser de $r = r_+$ a $r = \infty$, y los términos de borde que existan deben evaluarse en el borde en infinito, pero no en el horizonte de eventos, ya que ahí no hay borde en coordenadas euclídeas.

Para el caso del agujero negro de Schwarzschild en relatividad general la acción con el término de borde apropiado en una región Ω con borde $\partial\Omega$es

$$I = \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega} R\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} K\sqrt{-h}d^3x$$

donde g es el determinante de la métrica, R es el escalar de curvatura, h es el determinante de la métrica inducida en el borde y K es la traza de la curvatura extrínseca [57]. La acción da

$$I = 4\pi M^2$$

y la entropía da

$$S = \frac{A}{4}$$

con $A = 4\pi r_+^2$ el área del horizonte de eventos, en unidades de Planck (recordar que tomamos $c = G = \hbar = k_B = 1$). Este es el resultado justamente reconocido de Bekenstein y Hawking [63, 64, 65].

5.2 Entropía de agujeros negros en cualquier dimensión para la configuración de variedad cobordante

En esta sección se calcula la entropía de agujeros negro de Chern-Simons usando la acción de variedad cobordante discutida en la sección anterior. La razón para elegir esta configuración es que el término de borde es tal que la acción es un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento, para la condición de borde considerada.

La entropía de agujeros negros de Chern-Simons fue calculada antes utilizando métodos hamiltonianos de minisuperespacio [60, 61]. El mérito del enfoque discutido acá es que se da una prescripción general de los términos de borde, mientras que en el enfoque de minisuperespacio deben buscarse caso por caso para cada solución.

Los cálculos de esta sección están incluidos en [32].

Al elegir $\overline{e}^a = 0$ en la conexión de AdS $\overline{A}$, la acción de transgresión se reduce a la de Lanczos-Lovelock-Chern-Simons mas un término de borde

$$I_{2n+1}(A, \overline{A}) = \int\limits_M L_{2n+1}^{LCS}(R, e) + d\alpha$$

con

$$L_{2n+1}^{LCS}(R, e) = \kappa \int\limits_0^1 dt\epsilon \left(R + t^2 e^2\right)^n e$$

y

$$\alpha = -\kappa n \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t ds\epsilon\theta e \left(\tilde{R} + t^2\theta^2 + s^2 e^2\right)^{n-1}.$$

La constante κ se toma como antes igual a $\kappa = \frac{1}{2(d-2)!\Omega_{d-2}G_{n-1}}$.

y también las configuraciones de agujero negro estático son las dadas arriba, con métrica

$$ds^2 = -\Delta^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta^2(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2$$

donde la función $\Delta(r)$ es

$$\Delta^2(r) = 1 - \sigma + r^2$$

y la constante $\sigma = (2G_{n-1}M + 1)^{\frac{1}{n}}$ es la que antes llamamos α (cambiamos la notación para evitar confusión con el término de borde α), con el parámetro M correspondiendo a la masa, como puede verse a partir del modelo de minisuperespacio en el formalismo hamiltoniano.

Si evaluamos la forma euclídea del término de borde en esta familia de soluciones se obtiene

$$\int\limits_{\partial M} \alpha_E =$$

$$2(d-2)!\Omega_{d-2}\beta\kappa n \left[\frac{\left(\Delta^2\right)'}{2} r \int\limits_0^1 dt \left(1-\Delta^2+t^2r^2\right)^{n-1} + \left(\Delta^2 - \frac{\left(\Delta^2\right)'}{2} r\right) \int\limits_0^1 dtt \left(1-t^2\Delta^2+t^2r^2\right)^{n-1} \right]^{r=\infty}$$

donde β es el período del tiempo euclídeo τ. Debido a la forma particular de la función en la métrica la segunda integral no depende de r, y será proporcional a la masa M

$$\frac{\beta}{G_n} n\left(1-\sigma\right) \int\limits_0^1 dtt \left(1-t^2\left(1-\sigma\right)\right)^{n-1} = -\beta M$$

y el término restante, que contiene potencias divergentes de r, se combina con este de modo que el borde se escribe

$$\int\limits_{\partial M} \alpha_E = 2(d-2)!\Omega_{d-2}\beta\kappa n \left[r^2 \int\limits_0^1 dt \left(\sigma + \left(t^2-1\right) r^2\right)^{n-1} \right]^{r=\infty} - \beta M.$$

La acción euclídea en el bulk −*on-shell*-toma la forma explícita

$$I_E^{LCS} = (d-2)!\Omega_{d-2}\beta\kappa \left[2nr^2 \int\limits_0^1 dt \left(t^2-1\right)\left(\sigma + \left(t^2-1\right) r^2\right)^{n-1} + \int\limits_0^1 dt \left(\sigma + \left(t^2-1\right) r^2\right)^{n} \right]_{r=r_+}^{r=\infty}$$

y, dado que está claro que la potencia mas alta en σ en el segundo término es cero porque es independiente de r, podemos poner la expresión anterior en la forma

$$I_E^{LCS} = 2(d-2)!\Omega_{d-2}\beta\kappa n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \sigma^{n-1-k} \int\limits_0^1 dt \frac{2k+3}{2k+2} \left(t^2-1\right)^{k+1} r^{2(k+1)} \right]_{r=r_+}^{r=\infty}.$$

Sorprendentemente, los coeficientes que vienen de la integración en t se simplifican, debido a la relación

$$\int\limits_0^1 dt \frac{2k+3}{2k+2} \left(t^2-1\right)^{k+1} = -\int\limits_0^1 dt \left(t^2-1\right)^{k}$$

que hace que la continuación euclídea de la acción de Lovelock-Chern-Simons se reduzca a

$$I_E^{LCS} = -2(d-2)!\Omega_{d-2}\beta\kappa n \left[r^2 \int_0^1 dt \left(\sigma + \left(t^2 - 1\right) r^2\right)^{n-1} \right]_{r=r_+}^{r=\infty} .$$

Juntando todo la acción euclídea total $I_E = I_E^{LCS} + \int\limits_{\partial M} \alpha_E$ tiene las divergencias en el infinito espacial canceladas. Como veremos abajo la contribución del horizonte de eventos r_+ da exactamente la entropía del agujero negro, ya que

$$S = I_E + \beta M = \frac{\beta}{G_n} n r_+^2 \int_0^1 dt \left(\sigma + \left(t^2 - 1\right) r_+^2\right)^{n-1} .$$

Por definición el radio del horizonte r_+ satisface la relación

$$\Delta^2(r_+) = 0 = 1 - \sigma + r_+^2$$

y asumiendo que el período en el tiempo euclídeo β se calcula como se dijo arriba,

$$\beta = \frac{1}{T}$$

donde T representa la temperatura del agujero negro

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r_+} .$$

Por lo tanto, la expresión para la entropía de un agujero negro de Chern-Simons es

$$S = \frac{2\pi k_B}{G_n} n r_+ \int_0^1 dt \left(1 + t^2 r_+^2\right)^{n-1}$$

la que por medio de un cambio de variables lleva a la fórmula

$$S = \frac{2\pi k_B}{G_n} n \int_0^{r_+} dr \left(1 + r^2\right)^{n-1} .$$

5.3 Entropía de agujeros negros con respecto al agujero negro de masa cero en 3D y 5D

Se puede pensar en regularizar la acción euclídea en el cálculo de la entropía tomando la configuración A correspondiente a un agujero negro de masa M y la configuración $\overline{A}$ como una configuración especial correspondiente a una solución estática de las ecuaciones del movimiento. Dado que el período β esta fijado para el agujero negro, la configuración $\overline{A}$ debe ser tal que β pueda ser arbitrario, o no este definido para esta configuración. Dos configuraciones que satisfacen este requisito son el espacio AdS ($M = -1$) y el agujero negro de masa cero($M = 0$). Elegimos el agujero negro de masa cero. El cálculo [31] se realizará para d=3 y d=5 porque solo en esos caso conocemos la forma explícita de la acción en términos de los vielbeins y conexiones de espín como la diferencia de acciones de Lovelock-Chern-Simons para cada campo mas un término de borde. Se comprueba que el resultado en estos casos es el esperado, como en el caso de variedad cobordante, si se aplican las siguientes prescripciones:
(i) La integral en el bulk se toma entre los radios cero e infinito para el agujero negro de masa cero pero entre r_+ e infinito para el agujero negro de masa M.
(ii) Los términos de borde se consideran en infinito, pero no en r_+, donde en la representación euclídea de hecho no hay borde.

5.3.1 Entropía en 3D

La acción de transgresión para el grupo AdS en 3D, con la traza simétrica considerada arriba

$$I_3^0 = \kappa\epsilon(Re + \frac{1}{3}e^3) - \kappa\epsilon(\tilde{R}\overline{e} + \frac{1}{3}\overline{e}^3) + \frac{1}{2}\kappa\epsilon\ d[(e + \overline{e})\theta]$$

donde la notación es la de la sección anterior. Se toma la configuración e, ω correspondiente a un agujero negro de masa M y la configuración $\overline{e}$, $\overline{\omega}$ correspondiente a un agujero negro de masa cero. La acción euclídea I se evalúa en los rangos de las coordenadas en que está definida

$$I = \kappa \int_{\Omega_+} \epsilon(Re + \frac{1}{3}e^3) - \kappa \int_{\Omega} \epsilon(\tilde{R}\overline{e} + \frac{1}{3}\overline{e}^3) + \frac{1}{2}\kappa \int_{\Sigma} \epsilon\ [(e + \overline{e})\theta]$$

donde Ω_+ es la región comprendida entre $\tau = 0$ y $\tau = \beta$ y entre $r = r_+$ y $r = +\infty$, Ω es la región comprendida entre $\tau = 0$ y $\tau = \beta$ y entre $r = 0$ y $r = +\infty$, y Σ es la superficie con $r = +\infty$ y τ entre 0 y β. Utilizando la forma explícita del vielbein, la conexión de espín y la curvatura para cada configuración resulta

$$I = \kappa \int_0^{r_+} dr\ r\ 6\frac{2}{3}2\pi\beta - 2\kappa\pi\beta 2G_3 M$$

donde el primer término del segundo miembro viene del bulk y el segundo del borde. Se tiene

$$I = \kappa(4\pi r_+^2\beta - 2\pi\beta 2G_3 M) = 2\pi\beta\kappa 2G_3 M$$

donde se uso que $r_+^2 = 2G_3 M$. Usando que en 3D

$$\kappa = \frac{1}{2G_3 2\pi}$$

resulta $I = \beta M$ pero $I = \beta F = S - \beta M$ de donde la entropía S es

$$S = 2\beta M$$

Usando $\beta = 2\pi/r_+$ y $r_+^2 = 2G_3 M$ resulta también

$$S = \frac{2\pi}{G_3} r_+$$

que coincide con el resultado de la subsección anterior para 3D.

5.3.2 Entropía en 5D

La acción de transgresión para el grupo AdS en 5D, con la traza simétrica antes considerada es

$$\mathcal{T}_5 = \kappa\epsilon(R^2 e + \frac{2}{3}Re^3 + \frac{1}{5}e^5) - \kappa\epsilon(\tilde{R}^2\overline{e} + \frac{2}{3}\tilde{R}\overline{e}^3 + \frac{1}{5}\overline{e}^5) -$$

$$\frac{1}{3}\kappa\epsilon\ d[\theta(e+\overline{e})(R - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}e^2) + \theta(e+\overline{e})(\tilde{R} - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\overline{e}^2) + \theta Re + \theta\tilde{R}\overline{e}]$$

con la notación de la sección anterior. Se toma de nuevo la configuración e, ω correspondiente a un agujero negro de masa M y la configuración $\overline{e}$, $\overline{\omega}$ correspondiente a un agujero negro de masa cero. La acción euclídea I se evalúa en los rangos de las coordenadas en que está definida

$$I = \kappa\int_{\Omega_+}\epsilon(R^2 e + \frac{2}{3}Re^3 + \frac{1}{5}e^5) - \kappa\int_{\Omega}\epsilon(\tilde{R}^2\overline{e} + \frac{2}{3}\tilde{R}\overline{e}^3 + \frac{1}{5}\overline{e}^5) -$$

$$\frac{1}{3}\kappa\int_{\Sigma}\epsilon\ [\theta(e+\overline{e})(R - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}e^2) + \theta(e+\overline{e})(\tilde{R} - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\overline{e}^2) + \theta Re + \theta\tilde{R}\overline{e}]$$

donde otra vez Ω_+ es la región comprendida entre $\tau = 0$ y $\tau = \beta$ y entre $r = r_+$ y $r = +\infty$, Ω es la región comprendida entre $\tau = 0$ y $\tau = \beta$ y entre $r = 0$ y $r = +\infty$, y Σ es la superficie con $r = +\infty$ y τ entre 0 y β. Utilizando la forma explícita del vielbein, la conexión de espín y la curvatura para cada configuración resulta que el término de borde divergente cancela la divergencia que viene del bulk (regularizando asi la acción) y se obtiene

$$I = \frac{\beta}{2G_5}[-\frac{8}{3}r_+^4 + 4\alpha r_+^2 - 2G_5 M]$$

donde $\alpha = \sqrt{2G_5 M + 1}$, y G_5 es la constante de Newton en 5D. Usando como antes que $I = \beta F = S - \beta M$, la entropía S es

$$S = \frac{\beta}{G_5}[-\frac{4}{3}r_+^4 + 2\alpha r_+^2]$$

Usando $\beta = 2\pi/r_+$ y $r_+^2 = \alpha - 1$ resulta también

$$S = \frac{4\pi}{G_5}[r_+ + \frac{r_+^3}{3}]$$

que coincide con el resultado de la subsección anterior para 5D.

6 Acoplamiento de Branas con Gravedades de Chern-Simons

6.1 Repaso de Modelos de Objetos Extendidos

However, I do not believe that scientific progress is always best advanced by keeping an altogether open mind. It is often necessary to forget one's doubts and to follow the consecuences of one's assumptions wherever they may lead- the great thing is not to be free of theoretical prejudices, but to have the right theoretical prejudices. And always, the test of any theoretical preconception is in where it leads

-S. Weinberg

La Teoría de Supercuerdas [9] es actualmente el único candidato para una teoría cuántica de toda la materia y las interacciones. Como tal es destacable que incluye una teoría cuántica de la gravitación. La teoría se definió originalmente través de desarrollos perturbativos involucrando todas las superficies bidimensionales interpolando entre configuraciones iniciales y finales dadas de lazos cerrados y/o abiertos (dependiendo de la teoría). Esta definición perturbativa de la teoría es su principal desventaja, dado que la mayor parte de las cuestiones interesantes que se plantean (incluyendo hacer predicciones experimentalmente verificables) son intrinsecamente no perturbativas.

La consistencia de la teoría cuántica resulta ser una condición muy restrictiva, que es pasada por solo cinco modelos definidos en un espaciotiempo de diez dimensiones, llamados Tipo IIA, IIB and I y los dos modelos de Cuerdas Heteróticas con grupos de gauge $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. Estas teorías tienen como límite de bajas energías diferentes teorías de supergravedad estándar.

Durante los últimos años se progresó mucho en la comprensión de los aspectos no perturbativos de la teoría, lo que llevó a establecer una red de 'Dualidades' entre las diferentes teorías. Estas dualidades implican que el régimen de acoplamiento fuerte de alguno de los cinco modelos consistentes corresponde al régimen de acoplamiento débil de otra y que las compactificaciones de diferentes teorías en diferentes variedades llevan a la misma teoría. Algunas de las dualidades, sin embargo, relacionan teorías de cuerdas en diez dimensiones con una teoría desconocida en once dimensiones. También resultó que al nivel no perturbativo aparecen objetos extendidos de dimensión mayor que dos, conocidos como 'branes'. Estos resultados llevaron a postular que existe una única teoría cuántica supersimétrica que tiene como límites especiales las cinco teorías de cuerdas consistentes conocidas, la cual ha sido llamada teoría M [17, 18, 19, 20]. Se sabe que esta teoría tiene supergravedad estándar en once dimensiones como su límite de bajas energías, y que incluye objetos extendidos con volumen de mundo de dimensión 2+1 y 5+1 (membranas y 5-branas respectivamente)

En esta sección se revisarán aspectos de la teoría de objetos extendidos que se utilizarán en lo que sigue. Estos son (1) la formulación de Green-Schwarz de las supercuerdas y superbranas con supersimetría espaciotemporal, (2) las acciones de cuerdas y branas heteróticas y (3) trabajos orientados a reescribir la teoría de cuerdas como un modelo de Chern-Simons.

6.1.1 La Acción de Green-Schwarz

La acción de cuerdas con supersimetría espaciotemporal de propuesta por Green y Schwarz [47] es

$$S = T \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (L_1 + L_2) \tag{169}$$

donde

$$L_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Pi_i^r \Pi_{jr} \tag{170}$$

$$L_2 = -i\ \epsilon^{ij}\partial_i X^r \left[\overline{\theta}^1\gamma_r\partial_j\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma_r\partial_j\theta^2\right] + \epsilon^{ij}\overline{\theta}^1\gamma^r\partial_i\theta^1\overline{\theta}^2\gamma_r\partial_j\theta^2 \tag{171}$$

los índices $i, j = 0, 1$ son índices curvos de la superficie de mundo, las coordenadas de la superficie de mundo son $\zeta^i = (\zeta^0, \zeta^1) = (\tau, \sigma)$, $r, s, p = 0, ..., 10$ son índices planos de Lorentz, las variables dinámicas son las coordenadas espaciotemporales $X^r(\sigma, \tau)$, los espinores de Majorana-Weyl en 10D $\theta^{A\alpha}(\sigma, \tau)$, con $A = 1, 2$ y $\alpha = 1, ...32$, la métrica auxiliar en la superficie de mundo γ^{ij}, y

$$\Pi^r = dX^r - i\overline{\theta}^A\gamma^r d\theta^A = \left(\partial_i X^r - i\overline{\theta}^A\gamma^r\partial_i\theta^A\right) d\zeta^i = \Pi_i^r d\zeta^i \tag{172}$$

La acción es invariante bajo reparametrizaciones de la superficie de mundo (o transformaciones generales de coordenadas de esta) y transformaciones globales de super-Poincaré

$$\delta\theta^A = \frac{1}{4}\Lambda_{rs}\gamma^{rs}\theta^A + \epsilon^A \tag{173}$$

$$\delta X^r = \Lambda^r{}_s X^s + a^r + \overline{\epsilon}^A\gamma^r\theta^A \tag{174}$$

$$\delta\gamma^{ij} = 0 \tag{175}$$

con parámetros (Λ_s^r, a^r, ϵ^A). La acción también es invariante bajo la simetría local fermiónica conocida como 'simetría kappa'

$$\delta_\kappa\theta^A = 2i\gamma.\Pi_i\kappa^{Ai} \quad , \quad \delta_\kappa X^r = i\overline{\theta}^A\gamma^r\delta_\kappa\theta^A \tag{176}$$

$$\delta_\kappa(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}) = -16\sqrt{-\gamma}\ [P_-^{ik}\overline{\kappa}^{1j}\partial_k\theta^1 P_+^{ik}\overline{\kappa}^{2j}\partial_k\theta^2] \tag{177}$$

donde los κ^{Ai} son variables de Grassman, bi-vectores de la superficie de mundo con un índice espinorial suprimido de Majorana-Weyl y satisfacen las condiciones de autodualidad y anti-autodualidad

$$P_+^{ij}\kappa_j^1 = 0 \quad , \quad P_-^{ij}\kappa_j^2 = 0 \tag{178}$$

con los proyectores

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}(\gamma^{ij} \pm \epsilon^{ij}/\sqrt{-\gamma}) \tag{179}$$

la simetría-κ permite elegir el gauge del cono de luz

$$\gamma^+\theta^A = 0 \quad , \quad X^+(\sigma,\tau) = x^+ + \frac{p^+}{\pi T}\tau \tag{180}$$

Las componentes de cono de luz de un vector A^r se definen como $A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^9)$. Debido a $(\gamma^+)^2 = 0$ la condición del cono de luz implica que la mitad de las componentes de θ^A son cero. Es destacable que la teoría descrita por la acción de las ecs.(90-92), la cual parece tener términos de interacción complicados, es en realidad una teoría libre en el gauge del cono de luz. El requerimiento de la simetría-κ determina los coeficientes relativos de L_1 y L_2.

En la ref.[48] se observó que el término $S_2 = \int d\tau d\sigma L_2$ puede interpretarse como la integral del la 3-forma de Wess-Zumino-Witten (como en la ec.(24)) para el grupo de Super-Poincaré. Se considera la forma de Maurer-Cartan $U = g^{-1}dg$ con $g = e^{i\hat{X}^a P_a + \theta^{A\alpha}Q_\alpha^A}$. Entonces esencialmente $U = [dX^a + i\overline{\theta}\gamma^a d\theta] + d\theta^{A\alpha}Q_\alpha^A$ y

$$S_2 = \int_{M^3} \mathrm{STr}\,[U^3] = \int_{M^3} \mathrm{STr}\,[(g^{-1}dg)^3] \tag{181}$$

donde M^3 es una variedad tridimensional con borde en la superficie de mundo de la cuerda. Las trazas de productos de generadores requeridas son $\mathrm{STr}\,(PPP)$, $\mathrm{STr}\,(PPQ)$, $\mathrm{STr}\,(QQP)$ y $\mathrm{STr}\,(QQQ)$. De estas, la única no nula es $\mathrm{STr}\,(P_a Q_\alpha Q_\beta) = \left(\gamma_a\ C^{-1}\right)_{\alpha\beta}$. Notar que los índices espinoriales del tensor simétrico invariante son en realidad índices en la representación adjunta del grupo desuper-Poincaré, aún cuando vistos desde el punto de vista del subgrupo de Lorentz son índices en la representación fundamental espinorial de aquel grupo.

Las configuraciones de la supercuerdapueden pensarse como una inmersión de su superficie de mundo en un superespacio plano en 10D con $N = 2$. Desde este punto de vista la generalización natural sería considerar inmersiones en superespacios curvos [9], lo que podría interpretarse como una cuerda propagandose en un background no trivial. Requerimientos de consistencia imponen la condición de que el background debe satisfacer las ecuaciones de la supergravedad estándar que corresponde al límite de bajas energías del modelo de supercuerdas considerado, y aquellos backgrounds incluirán en general campos adicionales, como campos de gauge y campos dados por p-formas (algunos de los cuales son llamasos 'campos de Ramond-Ramond' o 'campos-RR'). Esto puede interpretarse pensando que el background consistente para la cuerda esta formado por un condensado de cuerdas.

Es posible generalizar la acción de Green-Schwarz a objetos extendidos de mayor dimensionalidad, llamados 'super p-branas' [49], en backgrounds planos o curvos. Estos modelos son κ-simétricos, pero al contrario de lo que ocurre en el caso de las cuerdas esto no alcanza para permitir la elección de un gauge en el que la teoría sea libre. Esto hace que el problema de la cuantización de los modelos de p-brana sea muy difícil, por lo que no está resuelto hasta hoy.

6.1.2 Cuerdas y Branas Heteróticas

El acoplamiento de objetos extendidos bosónicos de diversas dimensiones a campos de gauge fue estudiado por Dixon, Duff y Sezgin (DDS)[50] siguiendo el modelo de la cuerda heterótica [51]. La acción de el modelo DDS para objetos extendidos con volumen de mundo de dimensión par d en un espaciotiempo de dimensión D es

$$S_{DDS} = S_d^K + S_d^{WZW} \tag{182}$$

donde el término cinético es

$$S_d^K = \int d^d\zeta \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ij} \left[\partial_i X^r \partial_j X^s g_{rs}(X^p) + J_i^a J_j^a\right] + \frac{1}{2}(d-2)\sqrt{-\gamma} \right\} \tag{183}$$

aca las coordenadas del volumen de mundo son ζ^i, $i,j,k = 0,...,d-1$, las coordenadas espaciotemporales son $X^r(\zeta)$, $r,s,p = 0,...,D-1$, la métrica del volumen de mundo es $\gamma^{ij}(\zeta)$, y la métrica del background espaciotemporal es $g_{rs}(X)$. Las J_i^a's se definen como $J_i^a = \partial_i X^r A_r^a - \partial_i Y^l K_l^a$ donde los $A_r^a(X)$ son campos de gauge para algún grupo de gauge G, las $Y^l(\zeta)$ son coordenadas en la variedad de grupo G y los $K_l^a(Y)$ son formas de Maurer-Cartan (MC) invariantes a la izquierda $K_l = K_l^a T^a = g^{-1}(Y)\frac{\partial}{\partial Y^l}g(Y)$. En el lenguaje de formas diferenciales $A = A_r^a T^a dx^r$ y $K = K_l^a T^a dy^l$, y sus pull-backs al volumen de mundo (los cuales denotaremos con el mismo símbolo, ya que será claro por el contexto cual de los dos estamos usando) $A = A_r^a T^a \partial_i X^r d\zeta^i$ y $K = K_l^a T^a \partial_i Y^l d\zeta^i$. Entonces $J = A - K$, análogo al J de la sección 2.1.2. con $A_1 = A$ y $A_0 = K$, K gauge puro. Las formas de MC satisfacen la ec. de MC $dK + K^2 = 0$.

El término de WZW es

$$S_d^{WZW} = \int [B_d + C_d - b_d] = \int \mathcal{B}_d \tag{184}$$

con

$$B_d = \frac{1}{d!} B_{r_1...r_d} \partial_{i_1} X^{r_1} ... \partial_{i_d} X^{r_d} d\zeta^{i_1} ... d\zeta^{i_d} \tag{185}$$

$$b_d = \frac{1}{d!} b_{r_1...r_d} \partial_{i_1} X^{r_1} ... \partial_{i_d} X^{r_d} d\zeta^{i_1} ... d\zeta^{i_d} \tag{186}$$

donde B_d es un campo de Ramond-Ramond (campo RR) y b_d es una forma de WZW que satisface

$$db_d = -\mathcal{Q}_{d+1}(K, 0) \tag{187}$$

localmente (recordar $d\mathcal{Q}_{d+1}(K, 0) = \mathrm{STr}\,(F^{\frac{d+2}{2}} = 0) = 0)$. La d-forma $C_d(A, K, F)$ se define como antes

$$C_d(A, K, F) = k_{01}\mathcal{Q}(A_t, F_t) \tag{188}$$

con A_t interpolando entre A y K como $A_t = tA + (1-t)K$.

La acción DDS ec.(103) es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas del background y (independientemente) del volumen de mundo por construcción. Si la métrica del background es plana $g_{rs}(X) = \eta_{rs}$ entonces la acción es invariante bajo transformaciones de Poincaré globales.

La acción DDS también es invariante gauge. Para ver que el término cinético es invariante notamos que $J_i^a J_j^a = \mathrm{STr}\,(J_i J_j)$, el cual es invariante porque como sabemos J transforma covariantemente. Para probar que el término de WZW es invariante gauge se necesitan las propiedades de transformación de b_d, C_d y B_d. Se tiene $\delta_v \mathcal{Q}_{d+1}(A, F) = -dQ_d^1(A, F, v)$, entonces módulo formas exactas

$$\delta_v b_d = Q_d^1(K, 0, v) \tag{189}$$

La fórmula de homotopía de Cartan con $\mathcal{P}(A_t, F_t) = \mathcal{Q}_{d+1}(A_t, F_t)$ y $A_t = tA + (1-t)K$ da

$$\mathcal{Q}_{d+1}(A, F) - \mathcal{Q}_{d+1}(K, 0) = dC_d(A, K, F) + k_{01}\,\mathrm{STr}\,(F^{\frac{d+2}{2}}) \tag{190}$$

entonces, considerando que $k_{01}\,\mathrm{STr}\,(F^{\frac{d+2}{2}})$ es invariante gauge se tiene, módulo formas exactas

$$\delta_v C_d(A, K, F) = -Q_d^1(A, F, v) + Q_d^1(K, 0, v) \tag{191}$$

Finalmente se postula la regla de transformación para el campo RR [4]

$$\delta_v B_d = Q_d^1(A, F, v) \tag{192}$$

que implica que el 'tensor de campo' del campo RR, denotado H_{d+1}, definido con una corrección de CS como

$$H_{d+1} = dB_d + \mathcal{Q}_{d+1}(A, F)$$

es invariante gauge. SE concluye que módulo formas exactas $\delta_v \mathcal{B}_d = 0$ y entonces el término de WZW en la acción ec.(105) es invariante gauge, por lo que toda la acción DDS es invariante gauge.

La acción DDS ha sido relevante en el estudio de dualidades entre objetos extendidos, ver p.ej. ref.[52] y referencias ahí.

[4] En teoría de cuerdas el campo RR es parte del espectro de modos cero y su regla de transformación se deduce de la expansión perturbativa.

6.1.3 Teoría de Cuerdas y Acciones de Chern-Simons

Varios trabajos [22, 33, 7, 21] se orientaron a interpretar las acciones de cuerdas en 1+1 dimensiones como teorías de CS en 2+1 dimensiones, buscando aprovechar las buenas propiedades de estas últimas, como ser teorías de gauge independientes de background y tener un buen comportamiento cuántico.

Moore and Seiberg [22] mostraro que una teoría de gauge de CS en una variedad de dimensión 2+1 con borde de dimensión 1+1 induce una teoría de campo conforme (CFT) en el borde. Todas las CFT Racionales pueden construirse de ese modo, y muchos aspectos complejos de estas se entienden facilmente a partir de la invariancia gauge y la covariancia general de la CS. Las supercuerdas pueden pensarse como CFTs en 1+1, por lo que Moore y Seiberg hicieron la conjetura natural de que la misma estrategia debería resultar para estas.

En su trabajo en gravedad de CS en 2+1 Witten [7] propuso que las teorías de cuerdas en una superficie de mundo de dimensión 1+1 podrían interpretarse como modelos de CS a través de un 'engrosamiento de la superficie de mundo'.

M.B. Green prosiguió esta línea de trabajo considerando una teoría de CS en 2+1 ('volumen de mundo') con una versión no degenerada del grupo de supertraslaciones en 10D ('espaciotiempo') como grupo de gauge, en una variedad con borde. Green sugirió que el modelo se relacionaba con las supercuerdas. Las desventajas de ese modelo son que el término cinético debe agregarse a mano y que la acción no es invariante gauge sin fijar el gauge en el borde.

6.2 Formas de Transgresión y Acciones de Branas

Nothing is more fruitful-all mathematicians know it- than those obscure analogies, those disturbing reflections of one theory on another, those furtive caresses, those inexplicable discords; nothing also gives more pleasure to the researcher
André Weil

Tomando como base los trabajos repasados arriba en refs.[34, 35] se contruyó una clase de modelos de objetos extendidos en interacción con los campos de gauge de las gravedades o supergravedades de Chern-Simons , en la que confluyen las propiedades mas atractivas de los modelos discutidos en las secciones anteriores. Podría decirse que estos modelos describen branas propagandose en un background descrito por una gravedad de CS, pero esto sería inexacto, ya que el background no es fijo y predeterminado, sino que es afectado por las branas, que actúan como fuente de los campos de gauge. Ya se mencionaron en la Introducción las ventajas de los modelos considerados acá.

La acción se define por

$$S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \int_{S^{2n+1}} k_{01} \, \mathrm{STr} \left(F^{n+1} \right) \tag{193}$$

donde S^{2N+1} es el borde de M^{2N+2}, $S^{2N+1} \equiv \partial M^{2N+2}$, y las subvariedades S^{2n+1} están inmersas en S^{2N+1}. En caso de que la propia S^{2N+1} tenga borde Ω^{2N}, entonces S^{2N+1} está estrictamente incluída en el borde de M^{2N+2}. Las subvariedades S^{2n+1} pueden tener bordes dados por subvariedades Ω^{2n}, de modo que $\partial S^{2n+1} = \Omega^{2n}$.

Las variables dinámicas son lo potenciales de gauge A^I_m, las coordenadas de inmersión de las subvariedades S^{2n+1}, $X^m_{(2n+1)}(\chi^i_{(2n+1)})$, $m = 0, \ ..., 2N+1$ donde las $\chi^i_{(2n+1)}$ con $i = 0, \ ..., \ 2n+1$, son coordenadas locales en S^{2n+1} y las coordenadas de inmersión de las subvariedades Ω^{2n}, $X^m_{(2n)}(\xi^i_{(2n+1)})$, $m = 0, \ ..., 2N+1$ donde las $\xi^i_{(2n)}$ con $i = 0, \ ..., \ 2n$, son coordenadas locales en Ω^{2n} (por supuesto en el borde Ω^{2n} de S^{2n+1} las X^m's de el mismo punto deben coincidir como funciones de las χ's, o las ξ's correspondientes). Note que de todas estas variedades se asume que pueden ser no compactas, especialmente en la 'dirección temporal'.

Veremos mas adelante que la consistencia de la teoría cuántica implica que los coeficientes α_n están cuantizados, analogamente a lo que pasaba en gravedad de CS [11]. Una elección consistente de los coeficientes es la que sale del polinomio $P(F) = h \ \mathrm{STr}\,[e^{iF/(2\pi)}]$, donde h es la constante de Planck.

La acción de la ec.(114) es de la forma

$$S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \int_{S^{2n+1}} \mathcal{T}_{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \int_{S^{2n+1}} \mathcal{L}_{2n+1} \tag{194}$$

Puede escribirse de mas explicitamente como

$$S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left\{ \int_{S^{2n+1}} [\mathcal{Q}_{2n+1}(F_1, A_1) - \mathcal{Q}_{2n+1}(F_0, A_0)] - \int_{\Omega^{2n}} C_{2n} \right\} \tag{195}$$

donde $C_{2n} = k_{01} \mathcal{Q}_{2n+1}(A_t, F_t)$ como en las ec.(25-26).

En ref.[34] se adicionó un 'término cinético' en el borde Ω^{2n} de las subvariedades S^{2n+1} dado por

$$S_K^{(2n)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{2n}} d^{2n}\xi_{_{(2n)}} \sqrt{-\gamma_{_{(2n)}}} \left[\gamma^{ij}_{_{(2n)}} \ \mathrm{STr}\ (J_i J_j) - (2n-2) \right] \tag{196}$$

donde se introdujo la métrica del volumen de mundo $\gamma_{_{(2n)}}$. Otra posibilidad para este término cinético es usar una expresión de la forma de Born-Infeld

$$\int_{\Omega^{2n}} d^{2n}\xi_{_{(2n)}} \, \mathrm{STr} \left[\sqrt{- \, \mathrm{sdet} \left\{ J_i J_j + (F_0)_{ij} + (F_1)_{ij} \right\}} \right] \tag{197}$$

o

$$\int_{\Omega^{2n}} d^{2n}\xi_{_{(2n)}} \, \mathrm{STr} \left[\sqrt{- \, \mathrm{sdet} \left\{ \ \mathrm{STr}\,(J_i J_j) + (F_0)_{ij} + (F_1)_{ij} \right\}} \right] \tag{198}$$

donde el superdeterminante se toma en los índices curvos i , j de los pull-backs en S^d mientras las supertrazas se toman en los índices de grupo. En lo que sigue consideraremos estos términos cinéticos como 'opcionales', y nos concentraremos en el modelo en que estos no se incluyen.

6.3 Invariancias de la Acción

La acción de la ec.(114) y los términos cinéticos opcionales son invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas por construcción. De la invariancia gauge de las formas de transgresión bajo transformaciones de gauge, si tanto A_0 como A_1 transforman con el mismo elemento del grupo se sigue que la acción dela ec.(114) es invariante gauge. La invariancia gauge del término cinético se deduce de que F y J son covariantes gauge, la métrica auxiliar en el volumen de γ es invariante gauge, y de la invariancia y la propiedad cíclica de la traza simétrica.

Si consideramos variaciones de gauge que involucren solo uno de nuestros dos campos de gauge, manteniendo el otro fijo, la variación de la transgresión es una derivada total que puede leerse de las ecuaciones de descenso ecs.(32-33) y es

$$\delta_v I^0_{2n+1}(A_1, A_0) = -dI^1_{2n}(v, A_1, A_0) \tag{199}$$

para variaciones involucrando solo A_1 (note que $\overline{A}_1 \mid_{\theta=0} = A_1$). La variación de la acción es una suma de términos de borde en los bordes de las branas. Para variaciones involucrando solo A_0 vale un resultado similar.

6.4 Ecuaciones del Movimiento

En el caso de una teoría CS sin branes o bordes las ecuaciones del movimiento $\frac{\delta S}{\delta A} = 0$ están dadas por ec.(65)[8, 10, 12]

$$\mathrm{STr}\,(T^I F^n) = 0$$

En el caso con bordes y branes necesitamos usar que

$$\delta_1 J = \delta A_1 \quad , \quad \delta_0 J = -\delta A_0$$

$$\delta_r F_t = D_t(\delta_r A_t) = d(\delta_r A_t) + [A_t, (\delta_r A_t)] \quad , \quad r = 0, 1$$

$$\delta_1 A_t = t\delta A_1 \quad , \quad \delta_0 A_t = (1-t)\delta A_0$$

Por lo tanto, para variaciones de A_1

$$\delta_1 \mathcal{L}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\,\mathrm{STr}\,(\delta A_1 F_t^n) + n(n+1)\int_0^1 dt\ t\,\mathrm{STr}\,(J D_t(\delta A_1) F_t^{n-1}) \tag{200}$$

pero

$$d\,[\,\mathrm{STr}\,(J\delta A_1 F_t^n)] = \mathrm{STr}\,(D_t J\ \delta A_1 F_t^{n-1}) - \mathrm{STr}\,(J D_t(\delta A_1) F_t^{n-1}) \tag{201}$$

donde usamos $d\,\mathrm{STr}\,(\quad) = \mathrm{STr}\,(D_t \quad)$ y la identidad de Bianchi $D_t F_t = 0$, entonces

$$\delta_1 \mathcal{L}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\,\mathrm{STr}\,(\delta A_1 F_t^n) + n(n+1)\int_0^1 dt\ t\,\mathrm{STr}\,(\delta A_1 D_t(J) F_t^{n-1}) + d\left[n(n+1)\int_0^1 dt\ t\,\mathrm{STr}\,(\delta A_1 J F_t^{n-1})\right] \tag{202}$$

El último término del segundo miembro es un término de borde. Bajo variaciones de A_0 tenemos

$$\delta_0 \mathcal{L}_{2n+1} = -(n+1)\int_0^1 dt\,\mathrm{STr}\,(\delta A_0 F_t^n) + n(n+1)\int_0^1 dt\ (1-t)\,\mathrm{STr}\,(\delta A_0 D_t(J) F_t^{n-1}) + d\left[n(n+1)\int_0^1 dt\ (1-t)\,\mathrm{STr}\,(\delta A_0 J F_t^{n-1})\right] \tag{203}$$

Si escribimos

$$\delta_r \mathcal{L}_{2n+1} = \mathrm{STr}\,(\delta A_r Q_{2n}^{(r)}) + d\left[\mathrm{STr}\,(\delta A_r R_{2n-1}^{(r)})\right] \tag{204}$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_{2n}^{(1)} &= (n+1)\int_0^1 dt F_t^n + n(n+1)\int_0^1 dt\ t D_t(J) F_t^{n-1} \\
Q_{2n}^{(0)} &= -(n+1)\int_0^1 dt F_t^n + n(n+1)\int_0^1 dt\ (1-t) D_t(J) F_t^{n-1} \\
R_{2n-1}^{(1)} &= n(n+1)\int_0^1 dt\ t J F_t^{n-1} \\
R_{2n-1}^{(0)} &= n(n+1)\int_0^1 dt\ (1-t) J F_t^{n-1}
\end{aligned} \tag{205}$$

Entonces podemos escribir

$$\delta_r S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left[\int_{S^{2n+1}} \mathrm{STr}\,(\delta A_r Q_{2n}^{(r)}) + \int_{\Omega^{2n}} \mathrm{STr}\,(\delta A_r R_{2n-1}^{(r)})\right] \tag{206}$$

o

$$\delta_r S = \int_{S^{2N+1}} d^{2N+1}x\ \delta(A_r)_m^I\ J^{(r)mI} \tag{207}$$

donde

$$J^{(r)mI}(x^m) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left[\int_{S^{2n+1}} d^{2n+1}\chi_{2n+1} \mathcal{J}^{(r)mI}_{(2n+1)} + \int_{\Omega^{2n}} d^{2n}\xi_{2n} \mathcal{J}^{(r)mI}_{(2n)} \right] \quad (208)$$

con

$$\mathcal{J}^{(r)mI}_{(2n+1)} = \delta^{2N+1}(X_{(2n+1)}(\chi_{2n+1}) - x^m)\,\mathrm{STr}\,\left(T^I(Q^{(r)}_{2n})_{m_2\ldots m_{2n+1}}\right) \times$$
$$\times \partial_{i_1} X^{[m}_{(2n+1)} \partial_{i_2} X^{m_2}_{(2n+1)} \ldots \partial_{i_{2n+1}} X^{m_{2n+1}]}_{(2n+1)} \epsilon^{i_1\ldots i_{2n+1}} \quad (209)$$

y

$$\mathcal{J}^{(r)mI}_{(2n)} = \delta^{2N+1}(X^m_{(2n)}(\xi_{2n}) - x^m)\,\mathrm{STr}\,\left(T^I(R^{(r)}_{2n-1})_{m_2\ldots m_{2n}}\right) \times$$
$$\times \partial_{i_1} X^{[m}_{(2n)} \partial_{i_2} X^{m_2}_{(2n)} \ldots \partial_{i_{2n}} X^{m_{2n}]}_{(2n)} \epsilon^{i_1\ldots i_{2n}} \quad (210)$$

Las ecuaciones del movimiento $\frac{\delta S}{\delta A_r} = 0$ son entonces

$$J^{(r)mI} = 0 \quad (211)$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse como las ecuaciones halladas antes en el caso sin bordes o branas, pero ahora con términos de fuente dados por corrientes asociadas a las branas, que actúan como fuentes de los campos de gauge y son afectadas por estos.

Respecto a las ecuaciones del movimiento correspondientes a la extremización de la acci”on bajo variaciones de las funciones que describen la inmersión de las branas X es conveniente escribir

$$S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left[\int_{S^{2n+1}} d^{2n+1}\chi_{2n+1}\ (\omega_{2n+1})_{m_1\ldots m_{2n+1}} \partial_{i_1} X^{[m_1}_{(2n+1)} \ldots \partial_{i_{2n+1}} X^{m_{2n+1}]}_{(2n+1)} \epsilon^{i_1\ldots i_{2n+1}} \right.$$
$$\left. + \int_{\Omega^{2n}} d^{2n}\xi_{2n}\ (\omega_{2n})_{m_1\ldots m_{2n}} \partial_{i_1} X^{[m_1}_{(2n)} \ldots \partial_{i_{2n}} X^{m_{2n}]}_{(2n)} \epsilon^{i_1\ldots i_{2n}} \right] (212)$$

donde separamos las contibuciones del interior ('bulk') y el borde de las branas a $\mathcal{L}_{2n+1}$ como en la ec.(116).

En la expresión previa la dependencia de S en las funciones X es a través de las ω's mientras que la dependencia de S en ∂X es a través de los factores que entran en la construcción de los pull-backs. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para $X^s_{(p)}$ dan entonces

$$\left[p \frac{\partial}{\partial X^r_{(p)}} (\omega_{(p)})_{sm_2\ldots m_p} - \frac{\partial}{\partial X^s_{(p)}} (\omega_{(p)})_{rm_2\ldots m_p} \right] \partial_{i_1} X^{[r}_{(p)} \partial_{i_2} X^{m_2}_{(p)} \ldots \partial_{i_p} X^{m_p]}_{(p)} \epsilon^{i_1\ldots i_p} = 0$$
$$(213)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el 'bulk' S^{2n+1} nos sobra un término de borde

$$\partial_{i_1}\left[(\omega_{(p)})_{sm_2\ldots m_p}\partial_{i_2}X^{[m_2}_{(p)}\ldots\partial_{i_p}X^{m_p}_{(p)}\delta X^{s]}_{(p)}\epsilon^{i_1\ldots i_p}\right] \tag{214}$$

Podemos requerir que el término de borde sea cero, en analogía con las cuerdas abiertas,

$$(\omega_{(p)})_{sm_2\ldots m_p}\partial_{i_2}X^{[m_2}_{(p)}\ldots\partial_{i_p}X^{m_p}_{(p)}\delta X^{s]}_{(p)}\epsilon^{i_1\ldots i_p} = 0 \tag{215}$$

la cual no debe tomarse como condición sobre que puntos pueden ser recorridos por los bordes de las branas, sobre las velocidades de estos puntos, o sobre las variaciones δX permitidas, sino solo sobre las derivadas espaciales de las funciones X en el borde (una condición de coordenadas). Alternativamente se puede agregar ese término como una contribución extra a las ecuaciones de Euler-Lagrange en el borde. Si agregamos los términos cinéticos de las ecs.(117-119) habrá un término extra en las corrientes localizadas en los bordes Ω^{2n} de las branas, y términos extra en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las ecuaciones del movimiento de las métricas auxiliares γ en los términos cinéticos de la ec.(117) son algebraicas.

6.5 Conexiones con la Teoría de Cuerdas y la Teoría M

6.5.1 Relación con la Acción de Green-Schwarz

En la ref.[34] consideramos el modelo de ec.(114) mas un término cinético del tipo dado antes para el grupo de la teoría M $OSp(32|1)$ [23, 20, 39] y relacionamos este modelo con las supercuerdas IIA y IIB. Como vimos este grupo tiene generadores P_a (traslaciones), Q_α (generadores de supersimetrías), M_{ab} (Lorentz) y $Z_{a_1\ldots a_5}$, $a = 0,\ldots 10$. Tomamos la traza simétrica como la traza estándar en la representación adjunta de G simetrizada. Se toma una acción de la clase considerada en la sección 6.1 correspondiente a una membrana con borde, con término cinético en el borde

$$S = \int_{\Omega_2} d\sigma^2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}STr[J_iJ_j] + \frac{1}{2}\int_{\Omega_3}\mathcal{T}_3(A_0, A_1) \tag{216}$$

para $OSp(32|1)$ [5] con $J = A_1 - A_0$ y γ una métrica auxiliar en la superficie de mundo correspondiente al borde de la membrana.

Se considera A_1 como gauge puro y $A_0 = 0$

$$A_1 = g^{-1}dg$$

[5] Otras posibilidades menos simples para hacer contacto con la teoría de cuerdas incluyen considerar un grupo diferente, como $OSp(64|1)$), términos de borde extra como los del tipo de Born-Infeld de sección 6.1, o una traza simétrica diferente, como alguna extensión apropiada de la carácterística de Euler.

con el elemento del grupo tomado de la forma

$$g = e^{(iX_1^a P_a + \theta_1^\alpha Q_\alpha)}$$

con $a = 0, ..., 9$. Se considera una 'semiespacio' en 11D con borde en un hiperplano de 10D, esto es una región en 11D con un borde con la topología de R^{10}. Identificamos los parámetros de gauge X^a, $a = 0, ..., 9$, con las coordenadas x^a, $a = 0, ..., 9$ $X^a \equiv x^a$. Los bordes en 10D se eligen en $x^{10} = 0$ y $x^{10} = 1$ respectivamente. Consideramos entonces una 2-brana con borde, con este borde contenido en el hiperplano mencionado en 10D. Las coordenadas del volumen de mundo de la brana son σ^0, σ^1 σ^2 y $x^a = X^a = X^a(\sigma^0, \sigma^1)$ para $a = 0, ..., 9$.

Se requiere que A_1 sea gauge puro $A_1 = g^{-1}dg$

$$g = e^{(iX_0^a P_a + \theta_0^\alpha Q_\alpha)}$$

con $a = 0, ..., 9$. En el límite de Inonu-Wigner (ver apéndice B) los conmutadores relevantes son

$$[P_a, P_b] = 0$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i(C\gamma^a)_{\alpha\beta}P_a$$

entonces, considerando que para una matriz M se cumple que

$$e^{-M}\delta e^M = \delta M - \frac{1}{2}[M, \delta M]$$

si $[[M, \delta M], M] = [[M, \delta M], \delta M] = 0$, entonces

$$A_1 = i(dX_1^a - i\overline{\theta}_1\gamma^a\theta_1)P_a + d\theta_1^\alpha Q_\alpha$$

Vemos que aparecen Los $\Pi^a = dX_1^a - i\overline{\theta}_1\gamma^a\theta_1$ de la sección 3.2.1. sobre el modelo de Green-Schwarz.

La acción para la 2-brana es

$$S_2 = \int_{\Omega^2} C_2 + \int_{S^3} WZW$$

como en las ecs.(24-26). Tenemos

$$\int_{\Omega^2} C_2 = \int_{\Omega_2} d\sigma^2\sqrt{-\gamma}STr[A_{0i}A_{0j}\gamma^{ij}] = \int_{\Omega_2} d\sigma^2\sqrt{-\gamma}\eta_{ab}\Pi_i^a\Pi_j^b\gamma^{ij}]$$

que es el término cinético de Green-Schwarz y las Π's son las de la ec.(103). Se requirieron las supertrazas simétricas STr (PP), STr (PQ) and STr (QQ). Para el término WZW las trazas relevantes son STr (PPP), STr (PPQ), STr (QQP) y STr (QQQ). Entre estas, las no nulas despues de la contracción de Inonu-Wigner $P_a \to RP_a$, $Q_\alpha \to \sqrt{R}Q_\alpha$ y $R \to \infty$ se normalizan como

$$\mathrm{STr}\,(P_aP_b) = \eta_{ab} \quad , \qquad \mathrm{STr}\,(P_aQ_\alpha Q_\beta) = \left(\gamma_a\ C^{-1}\right)_{\alpha\beta}$$

El término de WZW surge de que la transgresión se reduce al Chern-Simons para $A_0 = 0$, y de ahí al WZW para A_1 gauge puro. Para el término de WZW se tiene

$$WZW = -\frac{1}{3}\int STr[(g_1^{-1}dg)^3]$$

que con la forma del g dado y las trazas consideradas es exactamente el WZW de Green-Schwarz.

En el trabajo original de Green-Schwarz el coeficiente relativo se fijo por simetría κ. Sería interesante entender como esta simetría aparece en nuestro modelo. Una posibilidad es que sea lo que queda de la parte fermiónica de nuestra simetría de gauge. Mas concretamente, se podría pensar en repetir la construcción anterior para una métrica auxiliar no plana arbitraria en la superficie de mundo, entonces luego de una transformación fermiónica de gauge recuperar las condiciones de dualidad o antidualidad haciendo a transformación de esta métrica que correspondería a la simetría κ.

Se mostró entonces que la acción propuesta contiene las configuraciones de la acción de Green-Schwarz (en el gauge en que la métrica de la superficie de mundo es plana) como parte de su espacio de congiguraciones. La acción propuesta acá para configuraciones genéricas (no truncadas a formas especiales de los campos de gauge como en esta subsección) es sin embargo invariante gauge e independiente de background.

6.5.2 Relación con el Modelo DDS de Branas Heteróticas

Es posible relacionar el modelo DDS para el acoplamiento de campos de Yang-Mills a branas, repasado en la sección 3.2.2., a través de los paso siguientes:

(a) Considerar la acción de la ec.(114) mas un término cinético como el de la ec.(117), con grupo de gauge dado por el producto del grupo de Poincaré y el grupo de gauge 'interno' (con los generadores de uno conmutando con los del otro).

(b) Tomar el caso particular de un $A_0 = K$ gauge puro y un A_1 con componentes de Poincaré (los que multiplican los generadores de Poincaré) iguales a cero, y componentes en los generadors del grupo de gauge interno arbitrarias.

(c) Hacer una reducción dimensional doble (en el background y en el bulk de la brana) asumiendo que todos los campos son independientes de una coordenada del background, la cual se identifica con una coordenada en el bulk de la brana. El borde de la brana se asume contenido en las dimensiones no compactificadas.

(d) Si $K = \mathcal{G}^{-1}d\mathcal{G}$ con $\mathcal{G} = g_{spacetime}g_{internal}$ y $g_{spacetime} = exp[i\hat{X}^r P_r]$, $r \neq D-1$ ($D-1$ es la dimensión compactificada), identificar las coordenadas espaciotemporales X^r en las dimensiones no compactificadas con los parámetros de gauge $\hat{X}^r$ (una elección de coordenadas).

Mirando las ecs.(116-117) se ve que la acción DDS con la brana DDS siendo el borde de la brana de la que partimos se recupera luego del proceso descrito. La forma de WZW para K tiene solo componentes según el grupo de gauge interno (las trazas que podrían dar un WZW espaciotemporal para K son cero) y el campo-RR esta dado como un campo compuesto en términos de las formas de CS para A_1 dimensionalmente reducidas. Se usó $\mathrm{STr}\,[P_r P_s] \approx \eta_{rs}$, la que no es realmente una traza en una representación matricial del grupo de Poincaré, ya que este tiene representaciones de dimensión infinita, pero podemos eludir este problema bien tomando el grupo dS o AdS con un 'radio' (el parámetro en la contracción de Inonu-Wigner) muy grande y viendo la acción DDS como una aproximación, o bien simplemente definiendo el tensor invariante de ese modo.

6.5.3 D-branas y Teoría K

Algunos de los modelos de 'D-branas' tienen acciones con alguna similitud con la nuestra con un término cinético, por ejemplo los modelos de Douglas [66] y de Green, Hull y Townsend [67] (aunque en ese trabajo el término cinéticose agrega en el bulk). En esos trabajos sin embargo los grupos espaciotemporal e interno se mantienen separados, el background es fijo (al contrario que en nuestro modelo donde el background es dinámico e interactúa con las branas), y existen campos-RR para asegurar la invariancia gauge (como en el modelo DDS).

Varios trabajos relativamente recientes tratan de la relación de las D-branas con la teoría [68, 69]. La situación descrita en esos artículos puede resumirse en el enunciado de que "la teoría K debe preferirse a la cohomologiía" o equivalentemente "formulaciones en términos de campos de gauge deben preferirse a formulaciones en términos de p-formas, o campos-RR". En nuestro modelo podemos reproducir campos-RR, como se menciona en la subsección previa, como compuestos con las formas CS de uno de los potenciales de gauge (p.ej. A_1) el cual se acopla (con lo que usualmente se llama 'acoplamiento anómalo') al otro (A_0). La 'regla de transformación anómala' de ese campo-RR compuesto es entonces automática.

Notese que el mapa estándar entre las clases de teoría K de fibrados sobre una variedad diferenciable y las clases de cohomología sobre la variedad está dada por los caracteres de Chern, los cuales aparecen en la acción de ec.(137). También la duplicación de campos que aparece en nuestro modelo es una propiedad de teoría K.

Estas observaciones parecen sugerir que nuestra clase de modelos es mas fundamental que los modelos de D-branas mencionados, al tener en forma explícita propiedades sugeridas implícitamente en estos.

6.6 Propiedades Cuánticas

6.6.1 Acción Efectiva Cuántica

La teoría cuántica se define formalmente a través de la integral de caminos

$$Z = \sum_{topologies} \sum_{p} \int \mathcal{D}A \; \mathcal{D}X_{(p)} \; e^{iS/\hbar}$$

donde se entiende que se debe sumar sobre todas las configuraciones de los campos de gauge y sobre todas lasgeometrías y topologías de las branas y edel espacio base.

Está claro que la teoría incluye configuraciones con muchas branas, ya que la suma incluye cnfiguraciones con cualquier númerode partes no conectadas para branas de cualquier dimensionalidad posible. Esto tambén es cierto a nivel clásico, donde pueden considerarse soluciones con cualquier número de branas.

Como en teorías de gauge y gravedad de Chern-Simons la consistencia de la teoría cuántica lleva al requerimiento de que las constantes en la acción están cuantizadas. Podemos considerar branas sin bordes, con uno solo de los campos de gauge A_0 o A_1 no nulo. Entonces se puede usar un argumento similar al de la sección 3.1.4 para probar que las constantes están cuantizadas. Se puede considerar la brana recorriendo un camino cerrado en el espaciotiempo,y entonces contraer este camino a cero, de modo que la brana no se mueve. El camino es una subvariedad del espaciotiempo de dimensión p+1 para una p-brana (con p par), la cual es el borde de infinitas subvariedades de dimensión p+2. Cuando el camino se contrae a cero la variedad de dimensión p+2 se vuelve cerrada. La amplitud cuántica para ese camino contraído debe ser 1, ya que la brana no se mueve. Debe ser también $exp(iS/\hbar)$. Se sigue que $S = 2\pi m$ con m entero. Pero

$$S = k \int_{S^{p+1}} \mathcal{Q}_{p+1} = k \int_{\Omega^{p+2}} STr[F^{p/2+1}]$$

Entonces

$$k \int_{\Omega^{p+2}} STr[F^{p/2+1}] = 2\pi m\hbar$$

Si $\int_{\Omega^{p+2}} STr[F^{p/2+1}]$ es proporcional a un entero debido al teorema de índice (ver sección 2.1.6. p.ej. el númeo de Chern es $i^n/(2\pi)^n \int_{\Omega^{p+2}} STr[F^{p/2+1}] = l$) se sigue entonces que k debe estar cuantizado.

Un corolario interesante es que si $\int_{\Omega^{p+2}} STr[F^{p/2+1}]$ es no nulo hay un flujo no trivial a través de la subvariedad Ω^{p+2}, señalando la presencia de una d-p-4-brana solitónica 'magnética'(al contrario que las branas originales fundamentales 'eléctricas') rodeada por Ω^{p+2}. Esto implica que a nuestras branas fundamentales con volumen de mundo de dimensión impar corresponden branas solitónicas con volumenes de mundo de dimensión par. P.ej. hay una 5-brana solitónica asociada a nuestra 2-brana fundamental en 11D .

La integración de caminos dada arriba es claramente solo formal a este nivel. Sería deseable desarrollar los detalles técnicos como procedimientos para evitar redundancias al sumar sobre configuraciones de los campos de gauge y métodos de regularización. Sin embargo como en el caso de teorías de Chern-Simons podemos conjeturar que la acción clásica es ya la acción efectiva cuántica, basandonos en argumentos similares, relacionados con el teorema de Adler-Bardeen de no renormalización de las anomalías.

Como se mencionó en el caso de las teorías de CS, también escierto para nuestro modelo de branas que el formalismo matemático es estrechamente análogo al que se usa en el estudio de las anomalías. Se podría decir en cierto modo que la acción es en si misma una pura anomalía.

Otro aspecto de la relación entre las anomalías y nuestros modelos en el contexto de la discusión al final de la sección 3.1.4. y el hecho de que las anomalías 'tienen el mismo aspecto' en todas las escalas (no renormalización). Esto último implica que la estructura de anomalías de una teoría efectiva dada debe ser la misma que la de la teoría microscópica correspondiente, una propiedad conocida como 'condición de compatibilidad de anomalías de 't Hooft'[70]. El hecho de que la teoría efectiva 'recuerda' estas caracteristicas de la teoría microscópica debe dar indicios sobre la forma de esta última, si se conoce la primera, como sugirió Stelle [71] (quien llamó a esta propiedad 'atavismo'). Si el modelo de ec.(137) corresponde a la teoría M, debería haber una correspondencia entre este y sus propiedades de transformación y los términos anómalos y reglas de transformación anómalas del límite de bajas energías de esta teoría, que es la supergravedad estándar en 11D.

6.6.2 Relación con la Teoría M a Nivel Cuántico

Si nuestro modelo en once dimensiones con grupo $OSp(32|1)$ tiene como casos límite las cinco teorías consistentes de supercuerdas, entonces las consideraciones de consistencia y cancelación de anomalías de estas últimas deberían reflejarse en que la primera es la única de nuestra clase de modelos que esconsistente. Podemos hacer un argumento heurístico en el sentido de que una teoría completamente consistente de la naturaleza debería tener un desarrollo perturbativo 'suave' en torno a todo 'punto' de su espacio de fases, en el sentido de que cada orden sea finito, aún si el punto no es un 'vacío' de la teoría y en ese caso la serie completa no converge.

La versión cuántica de nuestro modelo ofrece otro modo de relacionar modelos de CS con supergravedad estándar. Las idea es que como tenemos configuraciones correspondientes a supercuerdas en el espacio plano, podemos sumar las contribuciones a la integral de caminos de estas configuraciones y tomar prestado el argumento de teoría de cuerdas acerca de que talcondensado de cuerdas corresponde a bajas energías a diferentes supergravedades estándar. Aunque uno no puede esperar que el resultado de esta suma parcial de lugar a un backround que sea un verdadero vacío (solución de las ecuaciones del movimiento de la acción efectiva cuántica) de la teoría completa.

Al hacer esta suma parcial podemos agregar una contribución que no sea gauge puro en la placa de sección 4.2.1. y reducirla dimensionalmente asumiendo que el potencial es independiente de las coordenadas a través de la placa. El resultado [34] es un término en la acción de cuerdas que se ve como el dilatón por el escalar de curvatura de la superficie de mundo,con el dilaton dado por la undécima componente del vielbein y la curvatura dada por el pull-back de la espaciotemporal. La integral de la curvatura en 2D es el número de Euler, por lo que podemos ordenar la suma parcial de estas configuraciones en la integral de caminos según el género de la superficie de mundo y la potencia correspondiente del dilatón, el cual se interpreta como la constante de acoplamiento. Como el valor del dilatón corresponde a la undécima componente del vielbein, podemos decir que la constante de acoplamiento en el desarrollo perturbativo de las cuerdas est"a directamente relacionado con el tamaño de la undécima dimensión, comose había encontrado en el estudio de las dualidades en la teoría M (ver [17]).

6.6.3 Vacío y Fenomenología

Si la acción es ya la acción efectiva cuántica, como se sugirió, el problema de hallar un 'vacío' se reduce a encontrar una solución de las ecuaciones del movimiento clásicas (sin necesidad de buscar correcciones cuánticas a esta). Hacer fenomenología requiere encontraruna solución realista, en el sentido de tener cuatro dimensiones espaciotemporales 'grandes' aproximadamente planas con signatura 3+1 (al menos en cierta etapa de la evolución cósmica). Las masas y constantes de acoplamiento de la física de partículas podrían leerse de los coeficientes de los términos de menor orden de una expansión perturbativa alrededor de este vacío (o background). Ver ref.[72] y referencias ahí por trabajos recientes en modelos cosmológicos para teorías con términos de mayor orden en la curvatura y como problemas de modelos mas estándar se resuelven en este contexto. Un punto importante es que la acción original no solo contiene constantes adimensionadas, las cuales además están cuantizadas, por lo que todas las constantes dimensionadas que aparezcan deben aparecer dinámicamente, asociadas a un vacío determinado, por una suerte de 'transmutación dimensional'. Por ejemplo el tamaño de una dimensión compactificada proporcionaría una constante dimensionada, la cual aparecería en las expresiones para masas y constantes de acoplamiento de pequeñas perturbaciones alrededor de ese background. La renormalización (o dependencia con la escala) de estas constantes podría leerse en la dependencia explícita de estas en la escala (o longitud de onda) de las perturbaciones.

La dependencia de las constantes en el vací0 que se considere es análoga a la dependencia de las frecuencias normales de las pequeñas oscilaciones de un sistema alrededor de un mínimo de un potencial con muchos mínimos en este mínimo.

Se debe subrayar que estamos usando dos nociones diferentes, pero compatibles, de cuantización. Por un lado tenemos la teoría cuántica completa, la cual da amplitudes entre dos configuraciones diferentes en términos de una integral de caminos entre configuraciones arbitrarias como una suma sobre todas las geometrías y topologías interpolando entre estas, la cual es análoga a la 'Teoría de Campos de Cuerdas', pero aún más difícil debido a las dimensiones mas altas de las branas. Por otro lado tenemos las pequeñas perturbaciones alrededor de un vacío, lo cual tiene sentido porque nosotros 'vivimos en este' y podemos ver solo pequeñas perturbaciones alrededor de este vacío. Debería haber una cierta amplitud (idealmente pequeña) de trancisión a otros vacíos o configuraciones lejanas a nuestro vacío, pero no podemos detectarlos porque no 'existimos' en estas 'ramas cuánticas'. Fenomenologicamente solo procesos de muy alta energía, como los dados en agujeros negros y cosmología requerirían un apartamiento de la aproximación de pequeñas perturbaciones alrededor de un background. Por supuesto el requerimiento de finitud debe valer para la teoría completa, y no solo un sector de esta.

Para modelos 'de juguete' como modelos de CS en 2+1 tiene sentido, y es posible, considerar la teoría completa como en [7], pero esto sería imposible para teorías mas complejas.

Otro problema interesante en el estudio de soluciones de nuestra clase de teorías tiene que ver con el trabajo de Aros et al. [73]. En este se consideraro soluciones tipo 'branas negras' a las ecuaciones de las supergravedades de Chern-Simons. Uno puede conjeturar que membranas fundamentales de CS como las que se consideran acá pueden proporcionar una teoría efectiva para perturbaciones de longitudes de onda largas de estas 'branas negras', de modo análogo a como las supermembranas son teorías efectivas para soluciones tipo branas negras ('solitónicas') de las supergravedades estándar [49].

Finalmente debe decirse que el significado de la aparición de dos campos de gauge cuando se usan formas de transgresión en vez de formas de CS es oscuro a nivel fenomenológico. Es tentador comparar la situación con la de la teoría de cuerdas heteróticas con grupo de gauge $E_8 \times E_8$, con su sector de 'materia normal' y su 'sector oculto'. Sin embargo la situación es bastante diferente, ya que los sectores de las cuerdas heteróticas interactúan gravitacionalmente, mientras que en nuestro modelo todas las interacciones vienen de términos de borde, de modo que silas branas no tienen bordes, entonces los dos sectores no interactúan en absoluto. El estudio de soluciones concretas de branas con bordes, o quizá de la teoría inducida en el borde cuando ambos campos son gauge puro, debería ayudar a esclarecer este punto.

7 Discusión y Conclusiones

Si el Señor me hubiera preguntado, le hubiera sugerido algo mucho mas simple. Comentario del Rey Alfonso X el Sabio, al conocer el sistema astronómico de Tolomeo

Como ya dijimos antes, la evolución de la teoría de campos y la física de partículas durante las últimas décadas nos ha enseñado que la invariancia gauge es el principio subyacente a las teorías que describen tres de las cuatro interacciones fundamentales. Este principio tiene un alcance que va mucho mas allá de su origen en la teoría clásica del campo electromagnético, y es esencial para la consistencia cuántica del modelo estándar.

Por otro lado, el desarrollo de la teoría cuántica de campos dio lugar a tres grandes sorpresas:

(i) Renormalización: la necesidad de renormalizar la teoría para obtener predicciones finitas y la renormalización de las constantes físicas, las cuales dependen de la escala (de longitud, tiempo o energía, equivalentes en unidades naturales),

(ii) Ruptura espontánea de simetría,

(ii) Anomalías: asociadas a la violación a nivel cuántico de leyes de conservación clásicas, las cuales han tenido valor predictivo en casos concretos tanto para anomalías quirales como de gauge. Su estructura matemática está profundamente relacionada con las clases características de fibrados (ver p. ej. ref.[28]).

Mientras que la ruptura espontánea de simetría probablemente no es fundamental y el campo de Higgs posiblemente solo un campo efectivo , como sucede en superconductividad, donde el campo de Higgs corresponde a los pares de Cooper, creo que los otros puntos son pistas importantes en la búsqueda de una eventual teoría unificada. Estas pistas se recogen en la construcción de los modelos discutidos en este trabajo, los cuales consisten en teorías de gauge independientes de background incluyendo la gravitación. Las anomalías aparecen en que la forma matemática de las teorías consideradas, la única consistente con la invariancia gauge y la independencia de background es tal que uno podría decir, irónicamente, que las teorías son una pura anomalía. Respecto a la renormalización, como consecuencia de la ausencia de contratérminos y la cuantización de las constantes se espera que estas teorías no reciban correcciones cuánticas, propiedad correspondiente al teorema de Adler-Bardeen para las anomalías.

Hemos visto como el pasar de formas de Chern-Simons a transgresiones, reemplazando acciones cuasi-invariantes gauge por acciones estrictamente invariantes, proporciona además (en virtud del principio de gauge) una prescripción general para los términos de borde y regularización de la acción que da las cargas conservadas y la entropía correctas.

Una importante cuestión, que debería analizarse en el futuro, tiene que ver con el significado físico y la importancia del segundo campo de gauge. En el caso de gravitación la prescripción de variedad cobordante para el segundo campo es la que permite apartarse lo menos posible, agregando un mínimo de estructura adicional, de las acciones de Chern-Simons puras. Uno podría sentirse tentado a detenerse ahí, y considerar solamente configuraciones de este tipo, considerando el segundo campo como no físico. Sin embargo esto no parece natural, ya que nada hay en el formalismo que marque un campo como físico y el otro como auxiliar. Considerar solo estas configuraciones parece análogo a disponer del formalismo del análisis vectorial pero limitarse a considerar campos según la dirección z, por ejemplo. Creo que la configuración de variedad cobordante debería verse elección especialmente conveniente, entre muchas posibles.

Dado que las ecuaciones del movimiento, en el caso de teorías de campos (sin objetos extendidos) son las mismas de Chern-Simons, una situación interesante sería estudiar un caso en que ambos campos interactúan, por ejemplo el caso en que ambos son gauge puro y viven en una variedad con borde, ya que en el borde se induce una acción correspondiente a dos acciones de WZW restadas y un término de interacción (que viene de C_{2n}). En el caso de objetos extendidos los bordes de las branas se acoplan a ambos campos.

Las acciones de branas construidas, además de ser invariantes bajo transformaciones de gauge e independientes de background tienen una forma sugestiva en el siguiente sentido: los niveles de estructura que se pueden dar a una variedad son en orden de precedencia topología, estructura diferencial y métrica. Uno de los principales logros de la Relatividad General fue hacer la métrica parte de la dinámica, en vez de ser un escenario fijo para los demás fenómenos físicos. Hacer lo mismo con la estructura diferencial, considerando los diferenciales dx^m objetos físicos que anticonmutan, como en la ref.[74], considerando funciones genéricas de estos objetos, que son polinomios truncados, como lagrangianas llevaría a acciones con objetos extendidos de diversas dimensiones, como las consideradas en este trabajo surgiendo de la suma formal de formas diferenciales involucrada en los polinomios característicos [6]. Requerir que el modelo sea invariante gauge restringe mucho las formas posibles de la acción, como hemos visto.

Entre los problemas interesantes a estudiar en el futuro están la búsqueda de otras conexiones con la teoría de supercuerdas, en particular como se traducen en el contexto de nuestros modelos los argumentos que en las supercuerdas llevan a un número muy pequeño de teorías consistentes ('traducir' la cancelación de anomalías parece prometedor); y la búsqueda de posibles conexiones con el efecto Hall cuántico (QHE) en dimensiones mas altas (que dos) [76] , dado

[6] Esta imagen se parece algo a la idea de Thorn sobre teoría de cuerdas conocida como 'string bits approach' y recuerda la frase de Witten sobre esta teoría "...to do justice to such a theory, one needs building blocks more graceful than big, floppy strings"[75].

que la teoría de campos efectiva de este fenómeno esta relacionada con la de Chern-Simons [77, 78], siendo en el caso de dimensiones más altas muy similar a los modelos discutidos aca, ya que consiste en branas de Chern-Simons en un background de Chern-Simons.

"Nunca perseguí la gloria
ni dejar en la memoria
de los hombres mi canción;
yo amo los mundos sutiles,
ingrávidos y gentiles
como pompas de jabón.
Me gusta verlos pintarse
de sol y grana, volar
bajo el cielo azul, temblar
súbitamente quebrarse."
-Antonio Machado[7]

Agradecimientos

Estoy agradecido a mi colaborador en uno de los artículos en que este trabajo se basa, Hitoshi Nishino, por muchas discusiones.
Estoy muy agradecido a Rodrigo Olea, Ricardo Troncoso y Jorge Zanelli, por muchas discusiones en las cuales aprendí un montón, y una muy disfrutable y fructífera colaboración. A Jorge debo agradecerle por su paciente y sabio desempeño como mi Orientador y por su permanente apoyo.
Estoy muy agradecido a mi Co-Orientador Rodolfo Gambini por su permanente apoyo.
Agradezco la cálida hospitalidad de los miembros del Centro de Estudios Científicos CECS de Valdivia, Chile, en mis varias visitas durante las cuales se concretó esta tesis.
Agradezco el apoyo económico del CONICYT-Uruguay y de la Universidad de la República durante el período de mis estudios de doctorado en el que estube en los Estados Unidos.
Agradezco el apoyo económico recibido de la Iniciativa Científica Milenio-Chile, del Proyecto FONDENCYT-Chile N^o 7010450 de R. Troncoso, y del International Center of Theoretical Physics de Trieste ICTP, apoyo que hizo posibles mis vistas a Valdivia.

[7] Siendo esta la última de varias citas incluidas en este trabajo, debo referir al lector al entretenido artículo por Peter Rodgers titulado 'Who said that', publicado en el número de junio del 2002 de la revista Physics World, el cual puede encontrarse en el sitio web www.physicsweb.org. El señor Rodgers tiene algunas duras palabras para el hábito de los físicos de abusar de las citas literarias.

8 Apéndices

8.1 Apéndice A. Complemento en fibrados y campos de gauge.

8.1.1 Propiedades generales

Las trazas de productos de formas diferenciales matriciales satisfacen la propiedad cíclica

$$tr[\Sigma_q \Lambda_p] = (-1)^{pq} tr[\Lambda_p \Sigma_q]$$

Una importante propiedad es

$$d\,\mathrm{STr}\,(\Omega) = \mathrm{STr}\,(D\ \Omega)$$

donde Ω es una forma cualquiera con índices en el grupo. De esta y de la identidad de Bianchi resulta

$$dP(F) = 0 \quad , \quad d\,\mathrm{STr}\left(F^{n+1}\right) = 0$$

de donde $P(F)$ y $\mathrm{STr}\left(F^{n+1}\right)$ son formas localmente exactas.

8.1.2 Transformationes de Gauge

Bajo transformaciones de gauge los potenciales cambian como

$$A_r^g = g^{-1}(A_r + d)g \quad , \quad r = 0, 1$$

donde $g(x) \equiv exp[v_I(x)T^I]$ es un elemento del grupo. Se sigue que $J \equiv A_1 - A_0$ transforma covariantemente si tanto A_1 como A_0 transforman con el mismo g

$$J^g = g^{-1}Jg$$

También

$$F^g = g^{-1}Fg$$

Para un polinomio invariante, por definición

$$P(F^g) = P(g^{-1}Fg) = P(F)$$

La variedad diferencial de base esta descrita en general por un conjunto de cartas locales de coordenadas U_i. Los campos de gauge en dos cartas locales con intersección no vacía están relacionados en la intersección de las cartas por una transformación de gauge

$$A_{U_j} = t_{ij}^{-1}(A_{U_i} + d)t_{ij}$$

La información sobre la topología del fibrado está contenida en las 'funciones de transición' t_{ij}.

Un campo de gauge se dice que es *gauge puro* si se puede hacer cero en una carta local cualquiera por una transformación de gauge (aún cuando esto puede no ser posible en general en todas las cartas locales simultáneamente). Un campo gauge puro es de la forma

$$A_{gauge\ puro} \equiv V = g^{-1}dg$$

La forma V se llama *forma de Maurer-Cartan (MC) invariante por la izquierda.* Es invariante por la izquierda en el sentido de que si reemplazamos $g \to g_0 g$, donde g_0 es un elemento del grupo de gauge independiente de x, entonces V no cambia. Las formas de MC satisfacen la *ecuación de Maurer-Cartan*

$$dV + V^2 = 0$$

Se sigue que $F_{gauge\ puro} = 0$. El recíproco también es verdadero, esto es: si $F = 0$ entonces A es gauge puro.

8.1.3 Operador y Fórmula de Homotopía de Cartan

Sea A_t la interpolación entre dos potenciales de gauge A_0 y A_1,

$$A_t = tA_1 + (1-t)A_0 \quad , \quad F_t = dA_t + A_t^2 \quad .$$

El *operador de Homotopía de Cartan* k_{01} actúa sobre polinomios $\mathcal{P}(F_t, A_t)$ y se define como

$$k_{01}\mathcal{P}(F_t, A_t) = \int_0^1 dt\ l_t \mathcal{P}(F_t, A_t) \quad ,$$

donde la acción del operador l_t en polinomios arbitrarios de A_t y F_t es definida a través de

$$l_t A_t = 0 \quad , \quad l_t F_t = A_1 - A_0 \equiv J \quad ,$$

y la convención de que l_t actúa como una antiderivación $l_t(\Lambda_p \Sigma_q) = (l_t \Lambda_p)\Sigma_q + (-1)^p \Lambda_p (l_t \Sigma_q)$, donde Λ_p y Σ_q son p y q-formas (funciones de A y de F) respectivamente.

Se puede verificar directamente la relación

$$\big(l_t d + d l_t\big)\mathcal{P}(F_t, A_t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(F_t, A_t)$$

la cual se puede integrar entre 0 y 1 en t para obtener la *fórmula de homotopía de Cartan*

$$\big(k_{01} d + d k_{01}\big)\mathcal{P}(F_t, A_t) = \mathcal{P}(F_1, A_1) - \mathcal{P}(F_0, A_0) \quad .$$

Para variaciones arbitrarias δA uno puede definir la antiderivación l (correspondiente a $dt\ l_t$) actuando como $lA = 0$ y $lF = \delta A$. Entonces $ld + dl = \delta$ en polinomios en A y F.

8.1.4 Formas de Transgresión y de Chern-Simons

La *forma de transgresión* $\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, F_1, A_0, F_0)$ se define como

$$\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0) \equiv k_{01}\,\mathrm{STr}\,\left(F_t^{n+1}\right) = (n+1)\int_0^1 dt\ \ \mathrm{STr}\ ((A_1 - A_0)F_t^n)$$

La *forma de Chern-Simons* $\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F)$ es la forma de Transgresión en el caso $A_1 = A$ y $A_0 = 0$.

$$\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F) \equiv \mathcal{T}_{2n+1}(A, F, 0, 0) = (n+1)\int_0^1 ds\ \ \mathrm{STr}\ (AF_s^n)$$

con $A_s = sA$ y $F_s = dA_s + A_s^2 = sdA + s^2A^2 = sF + s(s-1)A^2$.

De la fórmula de homotopía de Cartan $\mathcal{P}(F_t, A_t) =$ STr $\left(F_t^{n+1}\right)$ se sigue la *fórmula de transgresión*

$$\mathrm{STr}\ \left(F_1^{n+1}\right) - \ \mathrm{STr}\ \left(F_0^{n+1}\right) = d\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0)\quad .$$

la cual es válida globalmente. Por lo tanto las integrales $\int_{M^{2n+2}}$ STr $\left(F^{n+1}\right)$ en una variedad sin borde, conocidas como 'números de Chern' son invariantes topológicos en el sentido de que solo dependen de la topología del fibrado (esto es, de las funciones de transición) y no cambian bajo difeomorfismos.

Para las formas de Chern-Simons tenemos

$$\mathrm{STr}\ \left(F^{n+1}\right) = d\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F)$$

Esta ecuación vale solo localmente, ya que si tomamos A_0 cero en una carta local, no será cero en general en otras, debido a funciones de transición no triviales. Una consecuencia de esto es que en caso de campos gauge puro ($F = 0$) la forma de Chern-Simons es localmente exacta, y esta dada explicitamente por la 'forma de Wess-Zumino-Witten' (WZW)

$$\mathcal{Q}_{2n+1}(g^{-1}dg, 0) = (-1)^n\frac{(n+1)!n!}{(2n+1)!}\,\mathrm{STr}\ \left[(g^{-1}dg)^{2n+1}\right]$$

La forma de transgresión se puede escribir como la diferencia de dos formas de Chern-Simons mas un término de borde usando la fórmula de homotopía de Cartan aplicada a $\mathcal{P}(F_t, A_t) = \mathcal{Q}_{2n+1}(F_t, A_t)$, Resulta

$$\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, F_1, A_0, F_0) = \mathcal{Q}_{2n+1}(A_1, F_1) - \mathcal{Q}_{2n+1}(A_0, F_0) - d\left[k_{01}\,\mathcal{Q}_{2n+1}(A_t, F_t)\right]$$

donde se uso que $d\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F) =$ STr (F^{n+1}). El último término es un término de borde $C_{2n} = k_{01}\mathcal{Q}_{2n+1}(A_t, F_t)$ dado mas explicitamente por

$$C_{2n}(F_1, A_1; A_0, F_0) \equiv -n(n+1)\int_0^1 ds\ \int_0^1 dt\ s\ \ \mathrm{STr}\ \left(A_t J F_{st}^{n-1}\right)$$

con $F_{st} = sF_t + s(s-1)A_t^2$ y $A_t = tA_1 + (1-t)A_0$.

La invariancia de la forma de Transgresión bajo transformaciones de gauge involucrando ambos potenciales A_0 y A_1 se sigue de la covariancia de $J = A_1 - A_0$ y F_t bajo esas transformaciones, la definición de $\mathcal{T}_{2n+1}$ y la invariancia de la traza.

8.1.5 Teoremas de Indice

Finalmente repasaremos algunos resultados sobre Teoremas de Indice que usaremos mas adelante. Consideramos el operador

$$\not{D} = e_a^\mu \gamma^a \left(\partial_\mu + A_\mu\right)$$

definido en una variedad M^{2n} de dimensión par. En la expresión previa e_a^μ es el inverso del vielbein, a es un índice 'plano' en el espacio tangente y μ es un índice 'curvo' de la variedad. Las matrices gamma de Dirac γ^a satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$. Definimos $\gamma^{2n+1} = \eta\gamma^0 \ . \ . \ .\gamma^{2n-1}$, donde η es una constante numérica elegida de modo que $(\gamma^{2n+1})^2 = 1$. Entonces los autovalores de γ^{2n+1} son mas o menos uno, y sus autoestados se dicen espinores de quiralidad positiva o negativa respectivamente. Si definimos el 'hamiltoniano' $H = (i\not{D})^2$ entonces se puede mostrar que $\{i\not{D}, \gamma^{2n+1}\} = 0$ y $[H, \gamma^{2n+1}] = 0$. Se sigue que podemos diagonalizar simultáneamente H y γ^{2n+1}, o sea que podemos elegir una base de autoestados de that is H de quiralidad definida. Si tenemos un autoestado ψ de H con autovalor E, $H\psi = E\psi$, entonces $\phi = i\not{D}\psi$ es tambieén un autoestado de H con el mismo autovalor E, $H\phi = H(i\not{D}\psi) = i\not{D}(H\psi) = E\phi$. Por otro lado ϕ y ψ tienen quiralidades opuestas, porque $\gamma^{2n+1}\phi = \gamma^{2n+1}(i\not{D}\psi) = -i\not{D}\gamma^{2n+1}\psi$, entonces si $\gamma^{2n+1}\psi = \pm\psi$ obtenemos $\gamma^{2n+1}\phi = \mp\phi$. Se sigue que los autoestados de H con un autovalor dado existen en parejas de quiralidad opuesta. Sin embargo el razonamiento previo no vale si $\phi = i\not{D}\psi = 0$, entonces $H\psi = 0$ y $E = 0$, y los estados con autovalor cero (*modos cero*) no aparecen en parejas.

El *Indice* del operador de Dirac se define como la diferencia entre el número de modos cero linealmente independientes de quiralidad positiva menos el número de modos cero linealmente independientes de quiralidad negativa,

$$ind\ i\not{D} = n_+ - n_-$$

Para ver que el índice es un invariante topológico se observa que bajo deformaciones continuas de la variedad algunos modos cero pueden convertirse en modos con autovalor no nulo y viceversa, pero deben hacerlo en pares de quiralidad opuesta, de modo que la diferencia es constante.

El *teorema de indice de Atiyah-Singer* da el índice en términos de la integral de un polinomio invariante sobre la variedad. Un caso particular del teorema que utilizaremos es

$$ind\ i\not{D} = \int_{M^{2n}} [ch(F)]$$

donde el ıcarácter de Chern se define como la suma formal de formas diferenciales dada por

$$ch(F) = \mathrm{STr}\left(e^{i\frac{F}{2\pi}}\right)$$

y esta última integral se entiende que selecciona la forma del orden correcto en la suma formal que define el carácter de Chern.

8.1.6 Variación general de la transgresión

El contenido de esta subsección es la única parte de esta sección que es nuevo [31], hasta donde yo se.

La forma de transgresión es

$$\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < JF_t^n >$$

con $J = A_1 - A_0$. Además

$$A_t = tJ + A_0 = tA_1 + (1-t)A_0$$

y

$$F_t = dA_t + A_t^2 = F_0 + tD_0J + t^2J^2$$

con $F_0 = dA_0 + A_0^2$ y $D_0J = dJ + A_0J + JA_0$ Notese que la derivada de F_t con respecto al parámetro t satisface

$$\frac{d}{dt}F_t = D_tJ = dJ + A_tJ + JA_t = dJ + 2tJ^2 + A_0J + JA_0$$

Para la variación general de la forma de transgresión tenemos

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\{< F_t^n\delta J > + < nJF_t^{n-1}D_t[\delta A_t] >\}$$

pero

$$D_t[JF_t^{n-1}\delta A_t] = D_tJF_t^{n-1}\delta A_t - JF_t^{n-1}D_t[\delta A_t] = \frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1}\delta A_t - JF_t^{n-1}D_t[\delta A_t]$$

y usando $\delta A_t = t\delta J + \delta A_0$

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\{< [F_t^n + tn\frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1}]\delta J > + < n\frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1}\delta A_0 >\}$$

$$-n(n+1)\ d\ \int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

pero, dentro del bracket, $F_t^n + tn\frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1} = \frac{d}{dt}[tF_t^n]$ y $n\frac{d}{dt}F_tF_t^{n-1} = \frac{d}{dt}F_t^n$ entonces las dos primeras integrales en t pueden calcularse dando

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n{+}1) < F_1^n\delta J > +(n{+}1) < (F_1^n{-}F_0^n)\delta A_0 > -n(n{+}1)\, d \int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

y finalmente tenemos para variaciones genéricas de las transgresiones

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n{+}1) < F_1^n\delta A_1 > -(n{+}1) < F_0^n\delta A_0 > -n(n{+}1)\, d \int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

Bajo transformaciones de gauge involucrando solo A_1 tenemos $\delta A_1 = D_1\lambda$, $\delta A_t = tD_1\lambda$ y entonces

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = d[(n+1) < F_1^n\lambda > -n(n+1)\int_0^1 dt\ t\ \ < JF_t^{n-1}D_1\lambda >]$$

La expresión previa con $A_1 = A$ y $A_0 = 0$ da la variación de gauge de la forma de Chern-Simons.

Bajo transformaciones de gauge involucrando solo A_0 tenemos $\delta A_0 = D_0\lambda$, $\delta A_t = (1-t)D_0\lambda$ y entonces

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = d[-(n+1) < F_0^n\lambda > -n(n+1)\int_0^1 dt\ (1-t)\ \ < JF_t^{n-1}D_0\lambda >]$$

8.2 Apéndice B. Supergrupos

En este trabajo consideraremos teorías de gauge con grupos de gauge dados por extensiones supersimétricas de grupos espaciotemporales. En esta sección repasaré brevemente las propiedades básicas de los grupos espaciotemporales y sus extensiones supersimétricas. Hay muchas referencias muy buenas sobre supersimetría en general, una de ellas es ref.[38]. Mis principales referencias sobre extensiones supersimétricas de los grupos de Sitter y Conforme son[39, 13], mientras que trabajos útiles en este tema son [1, 40]. Una lista extensiva de referencias puede encontrarse en estos trabajos.

8.2.1 Generalidades

El *grupo ortogonal* $O(M,N)$ se define como el grupo de $U^n_{\ m}$ que dejan invariante la forma cuadrática

$$x^m \eta_{mn} x^n = \ constant$$

donde η_{mn} es una matriz diagonal de $(M+N)\times(M+N)$ con M entradas igual a $+1$ y N entradas igual a -1. El *grupo ortogonal especial* $SO(M,N)$ es el grupo de matrices de $O(M,N)$ con determinante igual a uno, $det[M]=1$. Considerando transformaciones infinitesimales $U^n_{\ m} = \delta^n_m + \omega^{rs}(M_{rs})^n_{\ m}$, con $\omega^{rs} = -\omega^{sr}$ real, $\omega^{rs} \ll 1$, entonces los generadores $(M_{rs})^n_{\ m}$ satisfacen el álgebra

$$[M_{rs}, M_{pq}] = +\eta_{rq} M_{sp} - \eta_{rp} M_{sq} + \eta_{sp} M_{rq} - \eta_{sq} M_{rp}$$

El *grupo simpléctico* $Sp(N)$ se definecomo el grupo de matrices que dejan invariante la forma cuadrática

$$\theta^\alpha C_{\alpha\beta} \theta^\beta = \ constant$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es una matriz antisimétrica de $N\times N$ y los parámetros θ^α son variables de Grassman que anticonmutan . El *grupo ortosimpléctico* $OSp(N \mid M)$ es el grupo de matrices que dejan invariante la forma cuadrática

$$x^m \delta_{mn} x^n + \theta^\alpha C_{\alpha\beta} \theta^\beta = \ constant$$

con $m,n = 1,\ .\ .\ .,\ N$ and $\alpha,\beta = 1,\ .\ .\ .,\ M$. Claramente tanto $O(N)$ como $Sp(M)$ son subgrupos de $OSp(N \mid M)$.

8.2.2 Los Grupos Espaciotemporales

Los grupos espaciotemporales en dimensión D son el *grupo de Lorentz* $SO(D-1,1)$, el *grupo de Poincaré* $ISO(D-1,1)$ (que consiste de transformaciones de Lorentz y traslaciones espaciotemporales), el *grupo de de Sitter* (dS) $SO(D,1)$ y el *grupo de anti-de Sitter Group* (AdS) $SO(D-1,2)$.

El grupo de Poincaré es el grupo de isometrías (transformaciones que dejan la métrica invariante) del espacio de Minkowski.

Los espacios de de Sitter se definen como el hiperboloides

$$-x_0^2 + x_1^2 + \ \ldots\ + x_{D-1}^2 + \epsilon \left(\frac{w}{R}\right)^2 = R^2$$

inmersos en un espacio plano de dimensión $D+1$ con métrica

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \ \ldots\ + dx_{D-1}^2 + \epsilon \frac{1}{R^2} dw^2$$

donde R es el radio de curvatura del hiperboloide. La métrica en el hiperboloide es la inducida por la inmmersión. El caso $\epsilon = 1$ corresponde al *espacio de de Sitter*, $\epsilon = -1$ corresponde al *espacio de anti-de Sitter* y $\epsilon = 0$ corresponde al espacio de Minkowski. Los grupos de de Sitter son los grupos de isometrias de los espacios de de Sitter correspondientes. Los espacios de Minkowski y de de Sitter son los espacios con mayor número de isometrías en una dimensión dada D (tienen $D(D+1)/2$ generadores), por lo que se denominan *espacios maximalmente simétricos*. En el límite $R \to \infty$ los espacios de de Sitter se reducen al espacio de Minkowski. En el mismo límite los grupos de de Sitter se reducen al grupo de Poincaré, a través de lo que se conoce como *contracción de Inonu-Wigner* . Esta contracción consiste en definir los momentos $\overline{P}_s$

$$\overline{P}_s = R^{-1}\ M_{sD}$$

y tomar el límite $R \to \infty$ en el álgebra de los grupos in the dS o AdS. Es fácil verificar que el álgebra se reduce a la del grupo de Poincaré.

8.2.3 Supersimetría

Supersimetría [38] es una extensión de las simetrías espaciotemporales que mezcla bosones y fermiones (materia e interacción) Hay teoremas de imposibilidad, como el teorema de Coleman-Mandula y el teorema de Sohnius-Haag-Lopuzsanski que afirman que las únicas extensiones no triviales de las simetrías espaciotemporales (que no sean producto directo o extensiones centrales) están dadas por *supergrupos* los cuales son grupos con algunos parámetros dados por variables de Grassmann, o lo que es lo mismo,con un álgebra de generadores consistente de conmutadores y anticonmutadores. Si denotamos por B y F los generadores bosónicos y fermiónicos respectivamente, tenemos un álgebra que se lee esquemáticamente como

$$[B, B] \approx B \quad , \quad [B, F] \approx F \quad , \quad \{F, F\} \approx B$$

Para agregar un conjunto de generadores fermiónicos a un álgebra bosónica se debe satisfacer las condiciones de consistencia dadas por la 'identidad de

Jacobi' (la cual vale automáticamente para cualquier representación matricial del álgebra, si esta existe)

$$[A,[B,C\}\} = [A,B\},C\} + (-1)^{bc}[A,C\},B\}$$

donde $(-1)^{bc} = -1$ si tanto B como C son fermiónicos, y $(-1)^{bc} = +1$ en cualquier otro caso.

En general la manera de obtener superidentidades matriciales a partir de las identidades válidas para matrices bosónicas usuales es considerar los generadores fermiónicos multiplicados porvariables de Grassmann, tratando la combinación como una matriz usual, y entonces factorizar y reordenar los parámetros de Grassmann correspondientes, lo que producirá signos relativos entre los diferentes términos. La generalización de la identidad de Jacobi dada arriba es un ejemplo de esto, y esta es la regla que usaremos para definir 'Supertrazas'. Esta regla debe aplicarse también a nuestra definición de *traza simétrica*, la que será de hecho antisimétrica en los índices fermiónicos.

Resulta que los generadores fermiónicos F tienen que ser espinores Q^i_α donde α es el índice espinorial espaciotemporal y i es un índice en la representación vectorial de algún grupo de simetrías internas.

El álgebra de Super-Poincaré se sabe que tiene, en adición al álgebra de Poincaré, las siguientes relaciones de conmutación (modulo constantes multiplicativas)

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \delta^{ij}\gamma^s_{\alpha\beta}\overline{P}_s \quad , \quad [M_{rs}, Q^i_\alpha] = (\gamma_{rs})^\beta_\alpha\, Q^i_\beta$$

donde γ^s son las matrices de Dirac de la dimensión correspondiente, y denotamos su producto antisimetrizado como haremos en lo que sigue por

$$\gamma_{[k]} \equiv \gamma^{[r_1} \ \ldots \ \gamma^{r_k]} \equiv \gamma^{r_1 \ldots r_k}$$

El grupo de de Sitter no tiene extensiones supersimétricas, debido a que no es posible agregarle generadores fermiónicos de modo consistente con la identidad de Jacobi.

Para el grupo de anti-de Sitter es conveniente[13, 1] considerar una representación concreta dada por

$$P_s \equiv M_{sD} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_s)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{rs} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_{rs})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta que, excepto para $D = 5 \ mod \ 4$ (no necesitaremos este caso, pero se discute en [13, 1]) se puede extender el álgebra a una superalgebra adicionando el espinor de pseudo-Majorana Q^k_α tal que $\overline{Q}^\alpha_k = C^{\alpha\beta}u_{kj}Q^j_\alpha$ donde $C^{\alpha\beta}$ es la matriz de conjugación de carga y u_{ij} es un Casimir cuadrático del grupo interno. Q_α^k esta dado explicitamente por

$$\left(Q_\gamma^k\right)^{\alpha i}_{\beta j} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha_\gamma \delta^k_j \\ -C_{\gamma\beta}u^{ki} & 0 \end{pmatrix}$$

Los generadores del grupo de simetría interna son

$$\left(R^{kl}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{R}^{kl})^i_j \end{pmatrix}$$

donde $(\mathcal{R}^{kl})^i_j$ son los generadores en la representación adjunta.

Para satisfacer la identidad de Jacobi tambien se necesita añadir nuevos generadores bosónicos a P_s y M_{rs}. Los nuevos generadores son de la forma

$$Z_{[k]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_{r_1 \dots r_k})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos definir $P_s \equiv (Z_{[1]})_s$ y $M_{rs} \equiv (Z_{[2]})_{rs}$. Los $Z_{[k]}$ requeridos son aquellos tales que $\left(C\gamma_{[k]}\right)^T = +C\gamma_{[k]}$ si $D = \ 2,\ 6,\ 7,\ 8\ mod\ 8$ o aquellos tales que $\left(C\gamma_{[k]}\right)^T = -C\gamma_{[k]}$ si $D = \ 2,\ 3,\ 4,\ 6\ mod\ 8$. $D = \ 2,\ 6\ mod\ 8$ aparece en ambas listas debido a que en esa dimensión hay dos elecciones no equivalentes de la matriz de conjugación de carga $C^T = \pm C$. Excepto en $D = 5\ mod\ 4$ las superalgebras obtenidas son $OSp(2^{[D/2]} \mid N)$ para d=2,3,4 mod 8 y $OSp(N \mid 2^{[D/2]})$ para d=6,7,8 mod 8, donde $[D/2]$ denota la parte entera de $D/2$.

Un importante ejemplo es el *supergrupo de la Teoría M* [41] $OSp(1 \mid 32)$, el cual es la extensión supersimétrica minimal del grupo AdS en $D = 11$, $SO(10,2)$. El grupo de la teoría M tiene generadores $P_s \equiv (Z_{[1]})_s$(translations), Q_α (espinores de Majorana generadores se supersimetrías), $M_{rs} \equiv (Z_{[2]})_{rs}$ (Lorentz) and $(Z_{[5]})_{r_1 \dots r_5}$, con $\alpha\beta = 1, \dots, 32$ y $r, s = 0, \dots, 10$. El álgebra es

$$[Z_{[i]}, Z_{[j]}] = 2y \sum_{k=1,2\ mod\ 4} \left\{ {i\ j \atop k} \right\} Z_{[k]}$$

$$[Q, Z_{[k]}] = (-1)^k y \gamma_{[k]} Q$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{k=1,2,5} \frac{1}{k!} \left(\gamma^{r_1 \dots r_k} C^{-1}\right)_{\alpha\beta} (Z_{[k]})_{r_1 \dots r_k}$$

donde y es un parámetro de normalización arbitrario, y debemos definir

$$(Z_{[D-k]})_{s_1 \dots s_{D-k}} = \frac{i}{k!} \epsilon^{r_k \dots r_1}{}_{s_1 \dots s_{D-k}} (Z_{[k]})_{r_1 \dots r_k}$$

Los coeficientes de Clebsch-Gordan son

$$\left\{ {i\ j \atop k} \right\} = \frac{i!\ j!}{s!\ t!\ u!}$$

donde $s=\frac{1}{2}(i+j-k)$, $t=\frac{1}{2}(i-j+k)$ y $u=\frac{1}{2}(-i+j+k)$. Los conmutadores de los generadores fermiónicos del supergrupo de la teoría M son explicitamente

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left(\gamma^r C^{-1}\right)_{\alpha\beta} P_r + \frac{1}{2}\left(\gamma^{rs} C^{-1}\right)_{\alpha\beta} M_{rs} + \frac{1}{5!}\left(\gamma^{r_1\ldots r_5} C^{-1}\right)_{\alpha\beta} (Z_{[5]})_{r_1\ldots r_5}$$

Podemos definir contracciones de las álgebras super-AdS, análogasa las contracciones de Inonu-Wigner para AdS. Sea

$$\overline{P}_s \equiv \frac{1}{2y\ R}(Z_{[1]})_s\ ,\ M_{rs} \equiv \frac{1}{2y}(Z_{[2]})_{rs}\ ,\ \overline{Q}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{R}} Q_\alpha\ ,\ \overline{Z_{[5]}} \equiv \frac{1}{R} Z_{[5]}$$

En el límite $R \to \infty$ recobramos el álgebra de super-Poincaré mas los generadores $\overline{Z_{[5]}}$ que son extensiones centrales con respecto a las supertraslaciones (lo que significa que conmutan con $\overline{P}_s$ y $\overline{Q}_\alpha$) y tienen los conmutadores con los generadores de Lorentz que corresponden a un tensor de cinco índices. A veces se llama álgebra de la teoría M a esta contracción, pero en este trabajo se reservará ese término para el álgebra de $OSp(1 \mid 32)$. Claramente los generadores $\overline{Z_{[5]}}$ no son necesarios para la clausura del álgebra de super-Poincaré.

8.2.4 Trazas Invariantes

Un tensor invariante es un objeto con índices en una o mas representaciones de un grupo, tal que todos sus componentes son constantes (números puros) y que bajo transformaciones arbitrarias en el grupo transforma en si mismo. Por ejemplo η_{rs} es un tensor invariante de $O(N,M)$ por definición (y por supuesto también de $SO(N,M)$), el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{r_1\ldots r_D}$ es un tensor invariante de $SO(N,M)$, $N+M=D$ y también lo son las matrices de Dirac para esa dimensión y signatura $\gamma^r_{\alpha\beta}$ (con índices en las representaciones fundamental y adjunta). Los tensores invariantes pueden usarse para producir invariantes, saturando los índices de objetos con índices en la representación correspondiente. Se puede obtener tensores invariantes tomando la traza de un producto de generadores del grupo. La traza simétrica se obtiene simetrizando

$$\mathrm{STr}\left(T^{I_1}\ldots T^{I_{n+1}}\right) = \sum_P Tr\big(T^{(I_1}\ldots T^{I_{n+1})}\big)$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones de índices. Llamamos en general 'traza invariante' al resultado de la contracción de todos los índices de un objeto dadocon un tensor invariante, y una 'traza simétrica invariante' si el tensor invariante es simétrico. Como se dijo antes estas trazas son antisimétricas en los índices fermiónicos. Las propiedades de simetría correctas pueden obtenerse considerando los generadores fermiónicos mulriplicados por parámetros de Grassmann, tomando las definiciones usuales para el caso bosónico, y entonces factorizando y reordenando los parámetros de Grassmann.

Los tensores invariantes con índices en la representación adjunta para los grupos $SO(D)$ con cualquier signatura (lo que incluye dS y AdS, y su contracción

Poincaré) son esencialmente η_{rs} y $\epsilon_{r_1...r_D}$ (el tensor de Levi-Civita), y productos tensoriales y contracciones de estos. Productos de η's son equivalentes a productos de trazas de productos de generadores $Tr\ [T^{r_1}...T^{r_{n_1}}]...Tr\ [T^{r_1}...T^{r_{n_k}}]$ con el rango del tensor invariante igual a $N = n_1 + ... + n_k$.

En este trabajo se usa también la notación

$$< T^{r_1}...T^{r_k} > \equiv g^{r_1...r_k}$$

para denotar una traza simétrica invariante. Los índices de grupo se suben y bajan con la 'métrica del grupo', que para $SO(D)$ es η_{rs}.

References

[1] J. Zanelli, Braz. Jour. Phys. 30(2000)251, hep-th/0010049 .

[2] A. Schwarz, Lett. Math. Phys. 2(1978)247

[3] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48(1983)975, Ann. Phys. NY 140(1984)372.

[4] Witten, Comm. Math. Phys. 121(1989)351

[5] P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D32**(1985)872

[6] A. Achucarro and P.K. Townsend, Phys. Lett. **B180**(1986)89.

[7] E. Witten, Nucl. Phys. **311B**(1988)46; Nucl. Phys. **323B**(1989)113.

[8] A.H. Chamseddine, Phys. Lett. **B233**(1989)291; Nucl. Phys. **346B**(1990)213.

[9] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vols. 1 & 2, (Cambridge Univ. Press, 1987).

[10] M. Bañados, R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. **D54**(1996)2605.

[11] J. Zanelli, Phys. Rev. **D51**(1995)490, hep-th/9406202.

[12] R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. **D58**(1998)101703, hep-th/9710180.

[13] R. Troncoso and J. Zanelli, Int. Jour. Theor. Phys. 38(1999)1181, hep-th/9807029.

[14] R. Troncoso and J. Zanelli, Class. Quan. Grav. 17(2000)4451, hep-th/9907109.

[15] M. Bañados, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 88(2000)17, hep-th/9911150

[16] M. Hassaine, R. Troncoso and J. Zanelli, *Eleven-dimensional supergravity as a gauge theory for the M-algebra*, hep-th/0306258.

[17] P.K. Townsend, Phys. Lett. **B350**(1995)184, hep-th/9501068

[18] C. Hull and P.K. Townsend, Nucl. Phys. **348B**(1995)109.

[19] E. Witten, Nucl. Phys. **443B**(1995)85.

[20] P.K. Townsend, *Four Lectures on M-Theory*, in *'Proceedings of ICTP Summer School on High Energy Physics and Cosmology'*, Trieste (June 1996), hep-th/9612121;

[21] I. Kogan, Phys. Lett. **B231**(1989)377

[22] G. Moore and N. Seiberg, Phys. Lett. **B220**(1989)422

[23] P. Horava, Phys. Rev. **D59**(1999)046004, hep-th/9712130.

[24] H. Nastase, *Towards a Chern-Simons M theory of* $OSp(1 \mid 32) \times OSp(1 \mid 32)$, hep-th/0306269.

[25] R. Stora, *Algebraic Structure of Chiral Anomalies*, in *'Recent Progress in Gauge Theories '*, H. Lehmann ed., NATO ASI Series, (Plenum, NY, 1984).

[26] B. Zumino, *Chiral Anomalies and Differential Geometry*, in *'Relativity, Groups and Topology II'*, B.S. De Witt and R. Stora eds., (North Holland, Amsterdam, 1984).

[27] J. Mañes, R. Stora and B. Zumino, Comm. Math. Phys. 102(1985)157

[28] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Ann. of Phys. **161**(1985)423.

[29] S. S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, 2nd Ed., (Springer, Berlin, 1979)

[30] M. Nakahara, *"Geometry, Topology and Physics"*, Adam Hilger, (1991)

[31] P. Mora, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli, *Covariant Conserved Charges and Black Hole Thermodynamics for Chern-Simons Gauge Theories via Transgression Forms*, hep-th/03xxxxx

[32] P. Mora, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli, *Boundary Terms for Chern-Simons AdS Gravity*, hep-th/03xxxxx

[33] M.B. Green, Phys. Lett. **B223**(1989)157

[34] P. Mora and H. Nishino, Phys. Lett. **B482**(2000)222, hep-th/0002077.

[35] P. Mora, Nucl. Phys. **594B**(2001)229, hep-th/0008180.

[36] P. Woit, *String Theory: An Evaluation*, physics/0102051

[37] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, (Oxford U.P., Oxford,1996)

[38] P. C. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2nd Ed., (World Scientific, Singapore, 1990),
Supergravity, Brane Dynamics and String Duality, hep-th/9811101

[39] J.W. Van Holten and A. Van Proeyen, Jour. Math. Phys. **15**(1982)3763.

[40] E. Bergshoeff and A. Van Proeyen, *The many faces of OSp(1,32)*, hep-th/0003261

[41] P.K. Townsend, *M-theory from its Superalgebra*, hep-th/9712004.

[42] S. Adler and W.A. Bardeen, Phys. Rev. 182(1969)1517

[43] O. Piguet and S. Sorella , Nucl. Phys. **381B**(1992)373,
Nucl. Phys. **395B**(1993)661.

[44] D. Gross, Nucl. Phys. **74B**(1999)426 Proc. Suppl., hep-th/9809060

[45] S. Weinberg, *What is Quantum Field Theory and What Did We Think it is*, hep-th/9702027

[46] S.J. Gates Jr., M. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Superspace: Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, (Reading: Benjamin/Cummings, 1983)

[47] M.B. Green and J.H. Schwarz, Phys. Lett. **B136**(1984)367,
Nucl. Phys. **243B**(1984)285

[48] M. Henneaux and L. Mezincescu, Phys. Lett. **B152**(1985)340.

[49] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, Ann. of Phys. 185(1988)330

[50] J.A. Dixon, M. Duff and E. Sezgin, Phys. Lett. **B279**(1992)265.

[51] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, Nucl. Phys. **256B**(1985)253

[52] M. Duff, J. Liu and R. Minasian, Nucl. Phys. **452B**(1995)261, hep-th/9506126

[53] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli,*Charges in 2+1 Dimensional Gravity and Supergravity*, presented at the *Strings'99 Conference*, Postdam, Germany, July 1999.

[54] A. Borowiec, M. Ferraris and M. Francaviglia, J. Phys. **A36**(2003)2589.

[55] G. Allemandi, M. Francaviglia, M. Raitieri, Class. Quant. Grav. 20(2003)483, *Charges and Energy in Chern-Simons Theory and Lovelock Gravity*, hep-th/0308019.

[56] J.C. Brown and M. Henneaux, J. Math. Phys. 27(1986)489,
Comm. Math. Phys. 104(1986)207.

[57] T. Regge and C. Teitelboim, Ann. Phys. (NY) 88(1974)286.

[58] G. Sardanashvily, *Gauge conservation laws in higher-dimensional Chern-Simons models* , hep-th/0303059,
Energy-momentum conservation in higher-dimensional Chern-Simons models, hep-th/0303148.

[59] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. 84(2000)1647,
Phys. Rev. **D62**(2000)044002.

[60] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. 69(1992)1849, Phys. Rev. **D49**(1994)975.

[61] J. Crisóstomo, R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. **D62**(2000)084013.

[62] G. Barnich and F. Brandt, Nucl. Phys. **B633**(2002)3, hep-th/0111246

[63] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**(1973)2333, Phys. Rev. **D9**(1974)3292.

[64] S.W. Hawking, Nature 248(1974)30, Comm. Math. Phys. 43(1975)199.

[65] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, Phys. Rev. **D15**(1977)2753.

[66] M.R. Douglas, *Branes within Branes*, hep-th/9512077.

[67] M.B. Green, C.M. Hull and P.K. Townsend, Phys. Lett. **B382**(1996)65, hep-th/9604119.

[68] R. Minasian and G. Moore, JHEP 9711(1997)002, hep-th/9710230

[69] E. Witten, JHEP 9812(1998)019, hep-th/9810188

[70] G. 't Hooft, *Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*, in *Recent Developments in Gauge Theory*, ed. G. 't Hooft et al., (Plenum, New York, 1980)

[71] K. Stelle, *The Unification of Quantum Gravity*, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) 88(2000)3

[72] R. Brandenberger, *A Status Review in Inflationary Cosmology*, hep-ph/0101119.

[73] R. Aros, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, *Supersymmetry of gravitational ground states*, hep-th/0204029

[74] E. Witten, Mod. Phys. Lett. A 5(1990)487

[75] E. Witten, *M theory and Quantum Mechanics*, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) 62A-C(1998)463

[76] S.C. Zhang and J. Hu, Science 294(2001)823, cond-mat/0110572.

[77] S.C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. 25(1992).

[78] B.A. Bernevig, C-H Chern, J-P Hu, N. Toumbas and S-C Zhang, *Effective field theory description of the higher dimensional quantum hall liquid*, cond-mat/0206164.