



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Análisis de Estabilidad de Estrategias y Optimización Exacta de Asignación de Recursos en Empresas de Servicios

Tesis de Maestría en Investigación de Operaciones

Daniel Viera Pereira

Programa de Posgrado en Investigación de Operaciones
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Abril de 2023

Análisis de Estabilidad de Estrategias y Optimización Exacta de Asignación de Recursos en Empresas de Servicios

Tesis de Maestría en Investigación de Operaciones

Daniel Viera Pereira

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Investigación de Operaciones, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Investigación de Operaciones.

Director de Tesis:

Dr.Ing. Franco Robledo Amoza

Director académico:

Dr.Ing. Claudio Risso Montaldo

Montevideo – Uruguay

Abril de 2023

Viera Pereira, Daniel

Análisis de Estabilidad de Estrategias y Optimización Exacta de Asignación de Recursos en Empresas de Servicios/Daniel Viera Pereira.-Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería 2022.

143p. 29,7cm.

Director de Tesis:

Franco Robledo Amoza

Director académico:

Claudio Risso Montaldo

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Investigación de Operaciones, 2022.

Referencias bibliográficas: p. 114

1. Integer Linear Programming, 2. Game Theory, 3. task assignment, 4. optimization, 5. CPLEX, 6. AMPL, 7. NP-Hardness, 8. resource allocation, 9. replicator dynamics, 10. evolutionary strategies. I. Robledo, Franco, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Investigación de Operaciones. III. Análisis de Estabilidad de Estrategias y Optimización Exacta de Asignación de Recursos en Empresas de Servicios

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Guillermo Durán

Dr. Pedro Piñeyro

Dr. Mario Vignolo

Montevideo - Uruguay
Abril de 2023

Agradecimientos

Quisiera agradecer al Director de Tesis Dr.Ing. Franco Robledo Amoza por el acompañamiento y apoyo constante a lo largo de todo el proceso que significó la realización de esta Maestría. Al Dr. Ing. Claudio Risso Montaldo por haber sido el Director Académico.

A los Sres. Miembros del Tribunal: Dr. Guillermo Durán, Dr.Ing. Pedro Piñeyro y Dr.Ing. Mario Vignolo quienes se tomaron el tiempo de analizar mi trabajo y realizar la evaluación correspondiente.

Al Dpto de Investigación Operativa por permitir el uso del servidor de cálculo “Dantzig”, especialmente al Dr. Ing. Antonio Mauttone, administrador de este.

Al amigo y colega Ing. Federico Blezio por su trabajo de revisión. A los amigos que me impulsaron y animaron a tomar este desafío.

A mi familia por el apoyo permanente y por la comprensión tan necesarias.

Resumen

En este trabajo estudiamos dos problemas que se presentan en empresas que prestan servicios, como por ejemplo soporte técnico. Por un lado, las empresas deben elegir entre dos estrategias desde el punto de vista comercial: brindar sus servicios en una modalidad de cobro de una tarifa fija mensual, o a demanda mediante un cobro por atención, cada una con sus pros y contras. Este problema es tratado en este trabajo mediante Teoría de Juegos Evolutivos. El segundo problema que buscan resolver las empresas es el de asignar de forma óptima sus recursos. Para ello deben decidir ante una diversidad de alternativas en las que deben considerar: la complejidad de los casos, las capacidades de sus técnicos, los costos correspondientes a los distintos niveles de sus técnicos y el cumplimiento de los tiempos de resolución establecidos por contrato. En este trabajo se propone una solución mediante Programación Lineal Entera al problema de asignación de tareas, el que denominamos TAWDP : Task Assignment With Deadlines Problem. Se demuestra que TAWDP es NP-Hard y se realiza una implementación en en AMPL-Cplex del modelo propuesto. Posteriormente se evalúan los tiempos de resolución a medida que el tamaño del problema crece. Los resultados obtenidos muestran que se obtienen soluciones de optimalidad para problemas grandes en tiempos que lo hacen aplicable a empresas nacionales e internacionales.

Palabras claves: Programación Lineal Entera, Teoría de Juegos, asignación de tareas, optimización, Cplex, AMPL, NP-Hardness, asignación de recursos, dinámica del replicador, estrategias evolutivas.

Abstract

In this work we study two problems that arise in service companies, e.g. technical support services. First, these companies must choose between two commercial strategies: charging a fixed monthly fee or bring their services on demand and then charge for each issue attended. Each strategy has pros and cons. This problem is treated in this work through Evolutionary Game Theory. The second problem that these companies need to solve is optimization of resource allocation. To achieve this goal, they must decide between a lot of alternatives where they must consider: the complexity of cases, the skills of technicians, costs different levels of technicians and compliance with the resolution times established by contract. In this work, a solution is proposed through Integer Linear Programming to the task assignment problem, which we call TAWDP: Task Assignment With Deadlines Problem. We show that TAWDP is NP-Hard and an implementation for the proposed model is made in AMPL-Cplex. Resolution times are evaluated as the size of the problem grows. Obtained results show that optimal solutions are obtained for large problems in times that makes the solution applicable to national and international companies.

Keywords: Integer Linear Programming, Game Theory, task assignment, optimization, Cplex, AMPL, NP-Hardness, resource allocation, replicator dynamics, evolutionary strategies.

1 Tabla de contenido

| | | |
|---|---|------------|
| 1. | CAPÍTULO 1 - INTRODUCCIÓN | 15 |
| 2 | CAPÍTULO 2 – TRABAJOS RELACIONADOS | 17 |
| 2.1 | TEORÍA DE JUEGOS | 17 |
| 2.2 | PROBLEMA GENERAL DE ASIGNACIÓN O GAP (GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM)..... | 22 |
| 3 | CAPÍTULO 3 – ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE LAS ESTRATEGIAS..... | 27 |
| 3.1 | BACKGROUND | 27 |
| 3.2 | MODELO DEL PROBLEMA | 30 |
| 3.2.1 | <i>Jugadores:</i> | 30 |
| 3.2.2 | <i>Estrategias:</i> | 30 |
| 3.2.3 | <i>Elementos de la Matriz de Pagos</i> | 31 |
| 3.3 | MATRIZ DE PAGOS: | 32 |
| 3.4 | DINÁMICA DEL REPLICADOR..... | 33 |
| 3.5 | PUNTOS DE EQUILIBRIO | 35 |
| 3.6 | CÁLCULO DE LA MATRIZ JACOBIANA | 36 |
| 3.7 | POLINOMIO CARACTERÍSTICO | 37 |
| 3.8 | ESTUDIO DE LOS VÉRTICES | 38 |
| 3.9 | ISOCLINAS | 40 |
| 3.10 | CAMBIOS EN LA TASA DE OCURRENCIA DE INCIDENTES | 44 |
| 3.11 | COMPROBACIÓN MEDIANTE RESOLUCIÓN NUMÉRICA..... | 49 |
| 3.12 | CAMBIOS EN LOS COSTOS DE LAS HORAS | 50 |
| 3.13 | CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO..... | 51 |
| 4 | CAPÍTULO 4 - RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TAREAS COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA | 53 |
| 4.1 | DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA TAWDP | 53 |
| 4.1.1 | <i>Ejemplo</i> | 54 |
| 4.1.2 | <i>Representación de la asignación a casos que requieren más de un slot de tiempo</i> . | 57 |
| 4.1.3 | <i>Representación de las relaciones entre casos, clientes, severidades y tiempos de resolución de cada caso</i> | 58 |
| 4.1.4 | <i>Representación de los costos y la ganancia</i> | 59 |
| 4.1.5 | <i>Representación del cumplimiento de los SLAs</i> | 60 |
| 4.1.6 | <i>Representación de otras restricciones : cantidad de recursos acotados, satisfacción de la demanda, no superposición de casos y de recursos</i> | 60 |
| 4.1.7 | <i>Positividad de la función objetivo</i> | 61 |
| 4.2 | MODELO MATEMÁTICO | 61 |
| 4.3 | COMPLEJIDAD | 64 |
| 4.3.1 | <i>Descripción del Problema General de Asignación (GAP)</i> | 64 |
| 4.3.2 | <i>Modelo matemático del Problema General de Asignación (GAP)</i> | 65 |
| 4.3.3 | <i>Teorema: El problema TAWDP es NP-Hard</i> | 65 |
| 4.4 | RESOLUCION EN AMPL-CPLEX | 68 |
| 4.4.1 | <i>Metodología para la generación de casos de prueba</i> | 68 |
| 4.4.2 | <i>Resultados Computacionales</i> | 70 |
| 4.5 | CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO..... | 108 |
| 5 | CAPÍTULO 5 - CONCLUSIONES DE LA TESIS Y TRABAJOS FUTUROS | 109 |
| 5.1 | CONCLUSIONES..... | 109 |
| 5.2 | TRABAJOS FUTUROS..... | 110 |
| 6 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 111 |
| ANEXO I – REPRESENTACIÓN DE RELACIONES LÓGICAS MEDIANTE VARIABLES BINARIAS | | |
| 6.1 | LA FUNCIÓN LÓGICA “IMPLICA” :..... | 114 |
| 6.2 | LA FUNCIÓN LÓGICA DE NEGACIÓN (\neg):..... | 114 |

| | | |
|--|--------------------------------|------------|
| 6.3 | LA FUNCIÓN LÓGICA AND: | 114 |
| 6.4 | LEYES DE DE MORGAN | 115 |
| 6.5 | DISYUNCIÓN E IMPLICACIÓN | 115 |
| 6.6 | CONJUNCIÓN E IMPLICACIÓN..... | 116 |
| 6.7 | IMPLICACIÓN Y CONJUNCIÓN | 116 |
| 6.8 | GENERALIZACIONES | 117 |
| ANEXO II – CÓDIGO AMPL DEL MODELO MATEMÁTICO | | 118 |
| ANEXO III – CÓDIGO AMPL UTILIZADO PARA GENERAR LOS VALORES ALEATORIOS DE PRUEBA | | 122 |
| ANEXO IV – MEDICIONES DE TIEMPO DE LAS PRUEBAS REALIZADAS..... | | 124 |

Tabla de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Direcciones de las trayectorias en función de los signos de las derivadas | 41 |
| Figura 2 - Direcciones posibles de las trayectorias para los puntos en los cuadrantes I,II,III y IV | 42 |
| Figura 3 - Mapa de Direcciones | 43 |
| Figura 4 - Trayectoria en la situación inicial..... | 48 |
| Figura 5 - Trayectoria para el mismo punto inicial luego de que el punto de equilibrio se modificara | 48 |
| Figura 6 - Resolución numérica de un caso de modificación del punto de equilibrio interior | 49 |
| Figura 7 - Ejemplo de asignación | 55 |
| Figura 8 - Ejemplo de una asignación que cumple el SLA | 57 |
| Figura 9 - Representación binaria de la asignación | 57 |
| Figura 10 - Histograma de los tiempos de resolución en Cplex | 73 |
| Figura 11 - Tiempos de Resolución en función de Recursos y Casos..... | 76 |
| Figura 12 - Tiempos de Resolución - Percentil 90..... | 77 |
| Figura 13 - Tiempos de Resolución. Clientes : 100 | 77 |
| Figura 14 - Tiempos de Resolución Clientes 500 | 78 |
| Figura 15 - Tiempos de Resolución Clientes: 900 | 78 |
| Figura 16 - Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 100 | 79 |
| Figura 17 - Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 500 | 79 |
| Figura 18 -Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 900..... | 80 |
| Figura 19 - Tiempos de resolución en función de la cardinalidad de R manteniendo constante K en 100 para distintos valores de D | 80 |
| Figura 20 – Tiempos de Resolución en Función de la cardinalidad de R manteniendo constante K en 500 para distintos valores de D | 81 |
| Figura 21 - Tiempos de Resolución en Función de la Cardinalidad de R manteniendo constante K en 900 para distintos valores de D | 81 |
| Figura 22 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 100 clientes..... | 82 |
| Figura 23 -Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 500 clientes..... | 82 |
| Figura 24 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 900 clientes..... | 83 |
| Figura 25 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 100 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra | 83 |
| Figura 26 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 500 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra | 84 |
| Figura 27 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 900 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra | 84 |

| | |
|--|-----|
| Figura 28 - Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 100 clientes | 86 |
| Figura 29 - Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 500 clientes | 87 |
| Figura 30 -Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 900 clientes | 87 |
| Figura 31 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 100 casos | 88 |
| Figura 32 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 500 casos | 89 |
| Figura 33 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 900 casos | 89 |
| Figura 34 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 100 casos tomando el percentil 90 de las muestras..... | 90 |
| Figura 35 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 500 casos tomando el percentil 90 de las muestras..... | 90 |
| Figura 36 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 900 casos tomando el percentil 90 de las muestras..... | 91 |
| Figura 37 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 100 recursos | 92 |
| Figura 38 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 500 recursos | 92 |
| Figura 39 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 900 recursos | 93 |
| Figura 40 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 100 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras..... | 93 |
| Figura 41 -Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 500 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras..... | 94 |
| Figura 42 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 900 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras..... | 94 |
| Figura 43 - Tiempos de resolución en función de recursos y casos considerando solamente las soluciones factibles | 96 |
| Figura 44 - Tiempos de resolución en función de recursos y casos considerando solamente las soluciones factibles tomando el percentil 90 de las muestras | 97 |
| Figura 45 - Tiempos de resolución considerando solamente los casos no factibles | 99 |
| Figura 46 - Función objetivo manteniendo clientes = 100 | 101 |
| Figura 47 - Función Objetivo manteniendo clientes = 500 | 101 |
| Figura 48 - Función Objetivo manteniendo clientes = 900 | 102 |
| Figura 49 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 100 | 103 |
| Figura 50 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 500 | 103 |
| Figura 51 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 900 | 104 |
| Figura 52- Función objetivo manteniendo cantidad de recursos = 100 | 105 |
| Figura 53 -Función objetivo manteniendo la cantidad de recursos = 500 | 105 |
| Figura 54 - Función objetivo manteniendo la cantidad de recursos = 900 | 106 |
| Figura 55 - Función objetivo manteniendo $K = 100$ para distintos valores de D .. | 107 |

Figura 56 – Función objetivo manteniendo la cantidad de clientes = 500 para distintos valores de la demanda (D)107

Figura 57 - Función objetivo manteniendo la cantidad de clientes = 900 para distintos valores de la demanda (D)107

1. Capítulo 1 - Introducción

Las empresas proveedoras de servicios, como por ejemplo las que se dedican al soporte informático o a servicios de asistencia mecánica automotriz, usualmente brindan sus servicios en dos modalidades: mediante un contrato que implica pago mensual de una cuota por parte del cliente o mediante una modalidad en la que simplemente se atienden los casos a demanda, con el correspondiente cobro por la atención.

Desde el punto de vista de la empresa, el servicio mensual es ventajoso pues permite una mejor planificación de los recursos. El hecho de contar con una cartera de clientes estable, conocida y con un ingreso previsible son algunas de las ventajas.

Por otro lado, algunos clientes prefieren no hacer pagos fijos. Perciben que, si tienen pocos incidentes al año, el costo fijo que se abona es un gasto que desean reducir.

Otros clientes prefieren contar con una especie de reserva de recursos por parte de la empresa de servicios, de manera de minimizar los riesgos y están dispuestos a realizar el pago de una cuota mensual. A cambio esperan obtener un compromiso de disponibilidad y de tiempos de respuesta. Este tipo de clientes (a diferencia de los primeros) entiende que una baja cantidad de incidentes es un beneficio, ya que cada incidente puede tener un costo alto en su negocio.

Los clientes eventualmente eligen una modalidad o la otra basados en factores como el costo de las horas y la percepción del riesgo.

Las empresas, como los clientes, van cambiando sus estrategias a lo largo del tiempo buscando maximizar sus beneficios y reducir sus costos.

Las empresas proveedoras de servicios buscan optimizar el uso de sus recursos. Sus recursos poseen distintas habilidades y deben ser asignados a los casos que se presentan.

Los casos a resolver presentan distintos niveles de complejidad, existiendo distintos recursos posibles para cada asignación en función de sus habilidades.

Los recursos tienen distinto costo. Las remuneraciones varían por ejemplo a causa de la experiencia o del nivel técnico.

Los clientes establecen distintos requerimientos de tiempos de resolución en función de la severidad de cada caso. Los tiempos de respuesta y severidades varían con cada cliente. A modo de ejemplo, un incidente en un sistema de pagos on line requiere un tiempo de resolución menor al de otras empresas, en las que se puede esperar algunas horas hasta recomponer su servicio.

En este trabajo estudiamos la relación entre empresas y clientes mediante Teoría de Juegos Evolutivos, analizando la estabilidad en el tiempo de las estrategias elegidas por empresas y clientes.

Al problema de asignación óptima de tareas respetando los deadlines lo denominaremos TAWDP : Task Assignment With Deadlines Problem. El mismo se resuelve como un problema de Programación Lineal Entera. En este trabajo se demuestra que TAWDP es NP-Hard, se realiza una implementación en AMPL-Cplex y se evalúan los tiempos de resolución a medida que el tamaño del problema crece.

El resto de este documento está organizado del siguiente modo: en el Capítulo 2 se presenta un resumen de trabajos relacionados. En el Capítulo 3 se modela la relación entre las empresas y los clientes mediante Teoría de Juegos Evolutivos. Se analiza la estabilidad en el tiempo de las dos estrategias: servicio a demanda y servicio mediante pago de una mensualidad. En el Capítulo 4 se aborda el problema de optimización de la asignación de tareas mediante Programación Lineal Entera. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis y trabajos futuros. En el Anexo I se describen las representaciones de relaciones lógicas mediante variables binarias utilizadas para la construcción del modelo matemático del Capítulo 4. El Anexo II contiene el código AMPL del modelo matemático desarrollado en el Capítulo 4. En el Anexo III se incluye el código AMPL utilizado para generar datos aleatorios para las pruebas del modelo. Finalmente, en el Anexo IV se presentan las mediciones de tiempo obtenidas en las pruebas del modelo.

2 Capítulo 2 – Trabajos Relacionados

En la Sección 2.1 de este capítulo se presentan los trabajos relacionados a Teoría de Juegos y en la Sección 2.2 se presentan trabajos sobre el problema de la asignación óptima de tareas y recursos.

2.1 Teoría de Juegos

Para la selección de trabajos de esta sección se consideraron los problemas que enfrentan las empresas al momento de optar por una estrategia. Para la toma de decisiones las empresas deben considerar factores como el valor del precio de venta de las horas, el comportamiento de los clientes, riesgos típicos del servicio, entre otros. Se seleccionaron trabajos donde la Teoría de Juegos se aplica a problemas de fijación de precios, situaciones que implican riesgos en las tomas de decisiones y relaciones entre proveedores y clientes. Se incluyeron también trabajos que se consideraron de interés, como los que vinculan Teoría de Juegos con problemas de optimización y con problemas de asignación de tareas y recursos. Se incluyeron además trabajos con aportes teóricos.

En [1] los autores proponen la utilización de Teoría de Juegos para analizar el problema de las garantías post venta que proporcionan los fabricantes de productos electrónicos, considerando factores como la incertidumbre sobre la demanda y las actitudes frente al riesgo de las firmas: aversión al riesgo o tomadores de riesgos. En este trabajo los autores modelan las funciones de utilidad para las empresas considerando demanda incierta, actitud frente al riesgo y diferentes opciones de estrategias de servicio de garantía y mantenimiento. Mediante el uso de la Teoría de Juegos se obtiene el precio de venta óptimo y el período de garantía para el fabricante, así como el precio de reparación o el precio de mantenimiento óptimos para terceros que brindan los servicios de reparaciones, maximizando las utilidades esperadas en ambos casos. Se presenta un ejemplo numérico en el que se ilustran los resultados.

En [2] los autores se enfocan en los juegos cuyas funciones de pago son distribuciones de probabilidades en vez de números reales y cuyos equilibrios están definidos sobre un conjunto de distribuciones. Este trabajo se enmarca en el contexto del análisis de riesgos en seguridad de la información, donde algunos casos de uso revelaron deficiencias de los modelos de juegos tradicionales. La clase de juegos resultante muestra una variedad de fenómenos que no se encuentran en los juegos clásicos, como juegos que tienen funciones de pago continuas, pero no tienen equilibrio, o juegos que son de suma cero pero para los cuales el juego ficticio no converge.

En [3] se presenta una introducción a la Teoría de Juegos y su aplicación en las cadenas de suministro. Los autores exploran las implicaciones de los modelos de Teoría de Juegos en la gestión de la cadena de suministro, incluyendo la fijación de precios, la coordinación de la cadena de suministro, y el diseño de contratos entre los distintos actores. Presentan un caso práctico de aplicación de la teoría de juegos en la cadena de suministro de una empresa de productos electrónicos, donde se analiza cómo la colaboración puede mejorar la eficiencia de la cadena.

En [4] se presenta un modelo de Teoría de Juegos para estudiar la dinámica competitiva entre el proveedor SaaS (Software as a Service) que cobra una tarifa variable por transacción y el proveedor de software tradicional. En este trabajo los autores presentan una caracterización de las condiciones de equilibrio bajo las cuales los dos coexisten en un mercado competitivo y aquellas bajo las cuales cada proveedor fallará y saldrá del mercado. Se realizan además recomendaciones de distintas estrategias para cada proveedor. Los autores presentan un análisis de los resultados considerando que los desarrollos tecnológicos futuros podrían cambiar los niveles relativos de los costos.

En [5] se aborda el problema de la competencia entre las empresas de generación de energía eléctrica. Mediante el empleo de Teoría de Juegos analiza la conveniencia para cada empresa de elegir el momento de realizar la parada de mantenimiento. La parada de mantenimiento por parte de una empresa (en un mercado oligopólico) tiene como consecuencias la disminución de la oferta de energía y su correspondiente incremento de precio, lo que puede eventualmente beneficiar a los competidores. El autor presenta un marco analítico que permite la evaluación conjunta de las estrategias de mantenimiento y generación. El concepto de equilibrio de Cournot-Nash se amplía para toma de decisiones inter temporales sobre mantenimiento y generación para múltiples empresas. Cada empresa maximiza sus ganancias poniendo estratégicamente su capacidad en mantenimiento y reteniendo la generación de la capacidad disponible, teniendo en cuenta las decisiones de las empresas rivales. El problema del equilibrio de Cournot-Nash se plantea como un problema de optimización de programación no lineal. La Teoría de Dualidad se emplea para obtener información sobre la ganancia marginal que una empresa puede obtener de un incremento en su disponibilidad en una configuración de mercado oligopólica. Se presentan ejemplos numéricos ilustrativos de las estrategias de mantenimiento y generación del equilibrio de Cournot-Nash. Los mismos se comparan y contrastan con las de un escenario de competencia perfecta.

En [6] los autores se basan en la Teoría de Juegos Evolutivos para evaluar las estrategias referentes a precios de la electricidad, orientado al creciente uso de vehículos eléctricos en China. El modelo propuesto contiene dos niveles de juegos. En el nivel superior los jugadores son las empresas de venta de energía (monopólicas y empresas menores). En el segundo nivel los jugadores son las empresas de venta de energía y los usuarios de vehículos eléctricos. Se construye una matriz de pagos en forma de ecuación no lineal para describir el proceso de evolución bajo diferentes estrategias. Después de la linealización de las ecuaciones no lineales, se deduce la Estrategia Evolutivamente Estable para el modelo. Se lleva a cabo un trabajo de análisis en función de las Estrategias Evolutivamente Estables. Los resultados numéricos se obtienen por simulación numérica. Como resultado se obtienen varias sugerencias de estrategias de fijación de precios en el mercado eléctrico de China.

En [7] se explora la utilización de varios métodos de Teoría de Juegos para optimizar estrategias de gestión de seguridad y gestión de riesgos. Los autores abarcan áreas como sistemas de vigilancia, redes interconectadas y redes de servicio de electricidad. Se presentan además casos de estudio exitosos en los que

los modelos fueron aplicados en áreas como computación en la nube, Internet of Things (IoT) y redes de servicios públicos de agua.

En [8] los autores se basan en Teoría de Juegos para la optimización de ganancias entre múltiples proveedores de nube y múltiples clientes. Consideran las relaciones entre múltiples clientes como un juego evolutivo y formulan las competencias entre múltiples proveedores como un juego no cooperativo. Eventualmente forman un modelo de juego híbrido en el que la estrategia de cada cliente y cada proveedor se ve afectada también por otros clientes o proveedores. Simulan el proceso de negociación entre los proveedores de nube y los clientes, controlando la asignación de oferta y demanda, intentando lograr un estado de oferta y demanda equilibrado, en el que se busca una situación en la que todos ganan. Los autores proponen los algoritmos proximal iterativo (IPA: Iterative Proximal Algorithm) e iterativo distribuido (DIA: Distributed Iterative Algorithm) para obtener las soluciones. Mediante simulación prueban que las estrategias propuestas llevan a la convergencia de los juegos.

En [9] se aborda el problema del manejo a destiempo de las quejas de los consumidores en comercio electrónico. Con base en Teoría del Juegos Evolutivos se presenta una plataforma de mediación de disputas de comercio electrónico. Se construye un modelo de juego evolutivo tripartito compuesto por: consumidor, plataforma de mediación, plataforma de comercio electrónico y se estudia el problema de qué estrategia eligen la plataforma de mediación y la plataforma de comercio electrónico para manejar las quejas de los consumidores. La simulación numérica y el análisis de simulación se llevan a cabo utilizando MATLAB y se brindan las sugerencias correspondientes.

En [10] los autores presentan un *survey* del uso combinado de Teoría de Juegos y los algoritmos de optimización. En el trabajo se presenta una categorización de las investigaciones que se han llevado a cabo en esta área. En algunos casos presentados, Teoría de Juegos se utiliza para mejorar el rendimiento de los algoritmos de optimización mientras que, en otros, los métodos de optimización ayudan a resolver problemas de Teoría de Juegos. Otro *survey* sobre Teoría de Juegos Evolutivos se puede encontrar en [11]. La mayoría de los trabajos discutidos se basa en publicaciones de investigadores que se han doctorado en los 10 años anteriores. En [12] se presenta una revisión de conceptos fundamentales, investigaciones emergentes y problemas abiertos relacionados con el análisis y control de juegos de matrices evolutivas, con especial énfasis en las aplicaciones en las redes sociales, económicas y biológicas.

El trabajo publicado en [13] tiene por objetivo un estudio exhaustivo sobre los problemas de asignación de recursos en entornos de Cloud Computing e Internet of Things, basado en enfoques de optimización evolutiva y Teoría de Juegos aplicados a diferentes ambientes computacionales. El objetivo crucial de los enfoques mencionados es mejorar la calidad de servicio (QoS) de acuerdo con la expectativa de los usuarios. El trabajo nombra como ventajas de los enfoques mencionados: el tiempo de respuesta promedio y la baja complejidad computacional.

En [14] el autor relaciona los problemas de Programación Lineal con Teoría de Juegos. En particular demuestra el teorema de Von Neumann sobre la existencia de equilibrios en estrategias mixtas para juegos finitos de suma cero. También

aborda casos de juegos cooperativos, conectándolos con problemas de Programación Lineal.

En [15] se presenta un enfoque basado Teoría de Juegos Evolutivos a un problema de asignación de tareas en un entorno de Cloud Manufacturing. Cloud Manufacturing es un paradigma que está cambiando la forma en que la industria manufacturera organiza su producción, el cual integra servicios avanzados de tecnologías de la información, tales como Internet of Things, Cloud Computing y tecnologías orientadas a servicios. En este paradigma se encapsulan los recursos de manufactura distribuidos y las respectivas capacidades como servicios. Estos deben cumplir con múltiples requerimientos de diversos usuarios. Los autores proponen un marco de asignación de servicios de fabricación orientado a múltiples usuarios. Desarrollan un modelo de juego evolutivo desde una perspectiva poblacional para observar la tendencia de asignaciones de diferentes servicios. Sostienen que la asignación de servicios mediante Teoría de Juegos Evolutivos puede ser más equitativa. Utilizan además Dinámica del Replicador para modelar el proceso de adaptación de las estrategias y se prueba que el modelo de juego evolutivo es capaz de converger al equilibrio. Se llevan a cabo experimentos numéricos para validar los hallazgos teóricos y la efectividad del algoritmo propuesto.

El trabajo presentado en [16] aborda el problema de asignación de patrulleros en la ciudad de San Francisco. Mediante Teoría de Juegos se busca una asignación eficiente de los recursos humanos (recursos limitados). Este estudio propone un marco de trabajo en dos pasos que incorpora dos modelos de teoría de juegos para la asignación de policías a los turnos. En el primer paso, las interacciones entre la criminalidad y la policía se modelan como un juego no cooperativo de suma cero, después del cual se utiliza un método de equilibrio de Nash de estrategia mixta para derivar el valor de riesgo de cada zona que se va a patrullar. En el segundo paso, los valores de riesgo se utilizan para calcular el valor de Shapley para las zonas, para tres niveles de amenaza diferentes. Se realiza una asignación de personal policial basada en el valor de Shapley buscando el mínimo costo de despliegue de personal. El valor de Shapley es un concepto de solución que implica distribuir de manera justa tanto las ganancias como los costos entre varios actores que trabajan en coalición. La eficacia del método se verifica utilizando datos abiertos de la Policía de San Francisco sobre incidentes del año 2016. Los resultados experimentales muestran que es aplicable a la realidad.

En [17] los autores desarrollan un modelo para analizar y optimizar la dinámica del envío de ambulancias en la ciudad de San Petersburgo. En este trabajo se analizan las interacciones entre las diferentes partes interesadas: hospitales, pacientes y autoridades sanitarias. En esta investigación se emplea un modelo de colas como modelo analítico para ver las interacciones esenciales entre hospitales y pacientes y luego extienden este modelo a un modelo híbrido utilizando Teoría de Juegos y simulación de eventos discretos en el caso de un escenario multihospitalario.

En [18] los autores desarrollaron un lenguaje de simulación orientado a la simulación de juegos evolutivos en poblaciones finitas, denominado ABED. Presentan como ventaja que muchos de los parámetros de ABED se pueden modificar mientras se está corriendo la simulación. Como limitaciones del lenguaje

se mencionan que ABED solamente permite juegos de dos jugadores que se enfrentan en forma aleatoria. Además, en ABED solo la distribución de estrategias evoluciona en el tiempo. Por lo tanto, ABED no puede simular la dinámica del juego coevolutivo, donde el patrón de enfrentamiento u otros aspectos de las interacciones se ajustan junto con las elecciones de estrategias de los agentes. Los agentes en ABED no tienen memoria. Sus decisiones solo dependen de la distribución poblacional de las estrategias en el momento de la revisión. En las pruebas realizadas sobre el lenguaje resultaron como puntos fuertes la facilidad de manejo mediante una interfaz gráfica y la capacidad de generar múltiples gráficos de salida, que ayudan a una mejor comprensión de los resultados.

En [19] se presentan elementos teóricos que permiten descomponer juegos asimétricos de dos poblaciones en dos juegos simétricos de una sola población. El principal hallazgo revela que si (x,y) es un equilibrio de Nash de un juego asimétrico bimatricial (A,B) entonces y es un equilibrio de Nash del juego simétrico correspondiente determinado por la matriz de pagos A , y x es un equilibrio de Nash del juego simétrico determinado por la matriz de pagos B . También el recíproco se cumple, las combinaciones de los equilibrios de Nash de los juegos simétricos forman los equilibrios de Nash del juego asimétrico. También en [20] se presenta un método para simetrizar juegos asimétricos de dos poblaciones de tamaño finito. Los autores muestran que cada perfil estratégico del juego asimétrico corresponde a una estrategia en el juego simétrico correspondiente y que cada equilibrio de Nash del juego asimétrico corresponde a un Equilibrio de Nash de la versión simétrica del juego. A partir del estudio de la Dinámica del Replicador del juego asimétrico llegan a la definición de la Dinámica del Replicador del juego simétrico correspondiente. Concluyen que la relación entre el Equilibrio de Nash, las Estrategias Evolutivamente Estables y los estados estacionarios del juego asimétrico se pueden estudiar analizando la dinámica del juego simétrico correspondiente.

En [21] se reconoce la necesidad de pasar de juegos individuales a juegos múltiples para modelar el comportamiento de ciertos fenómenos en la Biología. Los autores proponen además pasar de la utilización de juegos de dos jugadores a juegos de múltiples jugadores para el modelado de ciertos fenómenos de interés. Afirman que de ese modo se produce una dinámica más rica y aproximada a los entornos naturales. En este trabajo los autores proponen una ecuación de la Dinámica del Replicador para dinámicas de juegos múltiples, con múltiples jugadores y estrategias. Muestran que, si los juegos individuales involucrados tienen más de dos estrategias, entonces la dinámica combinada no se puede entender mirando solo los juegos individuales. La dinámica esperada de los juegos individuales ya no es válida y las trayectorias pueden tener un comportamiento limitante diferente. Los resultados destacan que estudiar un conjunto de interacciones definidas por un solo juego puede ser engañoso si no se tiene en cuenta el contexto más amplio de las interacciones.

Los trabajos relevados presentan casos de aplicación de Teoría de Juegos a problemas prestaciones de servicios donde las partes interesadas deben tomar decisiones buscando maximizar sus beneficios. Se presentan casos de optimización de asignaciones de tareas y/o de recursos con aplicación a tecnologías muy recientes como el uso de recursos en la nube, la recarga de vehículos eléctricos o

el paradigma de Cloud Manufacturing. Se encontraron herramientas de software que pueden ser de apoyo en el análisis como el caso de ABED. Los trabajos presentados en [19] y [20] presentan resultados teóricos que pueden ser de gran utilidad al momento de resolver casos complejos. Además, se investigaron casos en los que se consideran los riesgos en las tomas de decisiones y casos no determinísticos. Se observa en muchos de los trabajos el uso de técnicas de simulación numérica para estudiar los modelos planteados.

2.2 Problema General de Asignación o GAP (Generalized Assignment Problem)

El problema TAWDP puede ser visto como una extensión del problema general de asignación o GAP por su sigla en inglés (Generalized Assignment Problem). La definición del problema GAP se puede encontrar en [22]. En [23] se define el problema de asignación multidimensional (MAP: Multidimensional Assignment Problem) el cual es una extensión del problema GAP al que se le agregan dimensiones, como por ejemplo el tiempo. Este problema tiene similitud con TAWDP en el sentido que se asignan tareas y tiempo a los recursos.

El trabajo presentado en [24] presenta una excelente recopilación de las variantes del problema GAP en el artículo "Assignment Problems: A Golden Anniversary Survey". En [25] también se presentan una serie de variantes del problema de general de asignación y describen distintos métodos de resolución. En especial MGAP: Multilevel Generalized Assignment Problem tiene similitudes con el TAWDP. En MGAP los agentes pueden realizar tareas con distintos niveles de eficiencia, lo que implica distintos costos y distintos requerimientos de recursos. Los métodos de solución presentados se pueden resumir en algoritmos exactos y heurísticas. Dentro de los primeros se encuentran los métodos de Branch & Bound, Branch & Price y Lagrangian Relaxation of Semi Assignment Constraints. En los métodos basados en heurísticas se encuentran Greedy Heuristics y Meta Heuristics.

En [26] los autores proponen un enfoque basado en aprendizaje automatizado (Deep Unsupervised Learning) para resolver GAP mediante el entrenamiento de una red neuronal. El método es aplicado a un caso de asignación de usuarios a una red wireless. El caso presentado requiere resolver la asignación óptima en poco tiempo debido a que el conjunto de usuarios a asignar está variando rápidamente. Los resultados obtenidos son soluciones aproximadas a las soluciones óptimas, pero con menor tiempo de resolución.

En [27] se presenta un caso de asignación de tareas en el contexto de producción industrial. Se resuelve un problema de asignación en el que existen límites de tiempo para la ejecución de las tareas usando Programación Lineal. El problema propuesto considera tareas divisibles y tareas indivisibles. Se presentan resultados numéricos de casos reales. Los experimentos computacionales muestran que el enfoque propuesto permite generar planes de producción óptimos para problemas de gran tamaño encontrados en la práctica.

En [28] los autores presentan una variante del problema de la mochila en la que los distintos ítems van llegando en forma secuencial y la decisión al respecto de cada ítem debe ser tomada al momento de su arribo. El problema se conoce como el Problema de la Mochila en Línea (On Line Knapsack Problem). Los autores

analizan los casos del Problema de la Mochila en Línea y su extensión al GAP en línea. Proponen algoritmos aleatorios cuyo rendimiento supera el mejor algoritmo conocido hasta el momento de la publicación. El rendimiento de los algoritmos se mide comparando el valor de la solución óptima del algoritmo contra el valor de la solución óptima obtenido de un caso en el que se conocen los ítems a asignar de antemano, evaluados para valores de entrada en el peor caso. Esta medida se conoce como “competitive ratio”. Los autores extienden la solución al GAP, proponiendo un algoritmo aleatorio con un competitive ratio de $1/6,99$ superando al mejor valor conocido hasta el momento que era de $1/8,06$.

En [29] los autores presentan una variante del GAP en que los costos de los recursos pueden mejorarse por la obtención de descuentos por cantidad. Una mayor utilización de los recursos permite obtener menores costos por unidad del recurso. El problema se denomina GAPFJ: Generalized Assignment Problem with Flexible Jobs. Para su resolución se proponen heurísticas que aprovechan propiedades de la solución óptima obtenida mediante la relajación lineal del problema dual. Los resultados computacionales reportados son buenos, especialmente en casos en los que la cantidad de tareas es mayor con relación a la cantidad de recursos. Los tiempos de resolución reportados son menores a los obtenidos por Cplex.

En [30] los autores abordan un problema de decisión donde se busca resolver de manera simultánea el ordenamiento de las tareas en un proyecto y la asignación de personal a las mismas, teniendo en cuenta que una tarea solo puede ser realizada por empleados con ciertas habilidades y que la duración de cada tarea depende de la cantidad de empleados asignados. Se propone un modelo de Programación Lineal Entera para el problema. Utilizan linealización por tramos para representar la relación entre los tiempos de finalización de las tareas y la cantidad de recursos asignados. Se consideran además penalizaciones en grupos de trabajo grandes debido a problemas de falta de comunicación. En el caso de los grupos de trabajo chicos se consideran penalizaciones debido a la falta de especialización. Se comparan los resultados computacionales de dos implementaciones utilizando Gurobi y Cplex respectivamente. Gurobi obtuvo mejores tiempos de resolución. Debido a la complejidad del modelo, los tiempos de resolución para problemas de tamaño medio-alto resultaron extremadamente altos, justificando la necesidad de algoritmos aproximados como es el caso de GRASP.

En [31] se presenta una revisión de los avances de los enfoques basados en Programación Lineal Entera Mixta para la planificación de tareas en procesos químicos. Los autores se enfocan en la planificación a corto plazo de procesos modelados utilizando diagramas de red. Los modelos de tiempo discreto y continuo se presentan junto con sus fortalezas y limitaciones. Se discuten varios enfoques para mejorar la eficiencia computacional en problemas grandes de Programación Lineal Entera Mixta. Se proporcionan una serie de casos reales de aplicación de Programación Lineal Entera Mixta a problemas de planificación en la industria química con sus resultados.

En [32] se presenta un caso de aplicación del MGAP para la asignación de tareas a procesadores heterogéneos en aplicaciones de tiempo real, buscando minimizar el consumo de energía total. Los entornos de tiempo real imponen restricciones de tiempo severas a la ejecución de las tareas. Los resultados reportados son mejores

que los obtenidos mediante el uso de otros algoritmos considerados como el estado del arte al momento de la publicación.

En [33] los autores abordan el problema de asignación de recursos en un centro de servicios considerando: distintos niveles de habilidades del personal, fechas máximas de inicio y fin de tareas, penalizaciones por retrasos, niveles de criticidad de cada tarea, relaciones de precedencia y duraciones de tareas dependientes del trabajador que realiza la tarea. El problema denominado Skilled Workforce Project Scheduling Problem (SWPSP) es abordado mediante un algoritmo genético híbrido que combina búsquedas locales con técnicas de manejo genético de poblaciones. El objetivo principal es obtener rápidamente asignaciones que satisfagan las fechas máximas establecidas y las restricciones de horario de los trabajadores. Los objetivos secundarios se ocupan de los niveles de urgencia impuestos por los niveles de criticidad de las tareas, cargas de trabajo equilibradas entre los trabajadores y una asignación eficiente de especialistas a las tareas. El algoritmo fue probado sobre 720 instancias del problema generadas de manera aleatoria. Los tiempos reportados son considerados buenos.

En [34] se presenta un caso de asignación de tareas donde se asignan tareas a recursos computacionales en la nube. Las tareas a asignar deben finalizar antes de un determinado deadline y el objetivo que se busca es la utilización equilibrada de los recursos. La solución propuesta se basa en un algoritmo de scheduling (min-max) y en una heurística desarrollada por los autores.

En [35] los autores proponen un algoritmo de scheduling y una heurística (Heuristic of Ordering and Mapping for Constraint Aware Profit Maximization - HOMCAPM) para resolver el problema de asignación de tareas a recursos en la nube sujeto a tiempos de resolución estipulados, buscando maximizar la ganancia (Constraint Aware Profit Maximization -CAPM). El método propuesto permite relajar algunas restricciones, permitiendo que una tarea no se ejecute si no se puede cumplir con el deadline o la ejecución de tareas que eventualmente violen el deadline si éstas aportan una ganancia significativa. En el modelo del problema consideran además las penalizaciones por el no cumplimiento de los deadlines. La solución propuesta fue validada mediante simulación, con problemas de hasta 10.000 tareas. Los resultados reportados muestran tiempos de resolución por debajo de los 30 segundos para tamaños de 10.000 tareas. Los valores de ganancia obtenidos son mayores a otras heurísticas consideradas en el estado del arte.

En [36] se presenta un enfoque basado en el problema de bin packing al problema de asignación de tareas con deadlines y prioridades distintas en el contexto de Grid Computing. Grid computing es un conjunto de computadoras interconectadas que actúan como una gran supercomputadora virtual para la realización de grandes tareas. El algoritmo propuesto: Residual Capacity Maximization Scheduling (RCMS) integra ideas de bin packing con programación entera cuadrática. Los resultados reportados, evaluados mediante simulación, son superiores a los resultados de otros algoritmos existentes al momento, destacando como cualidades de RCMS que es un algoritmo distribuido y escalable.

En [37] se presenta una solución basada en Programación Lineal al problema de asignación de tareas entre distintos proveedores de la nube, donde se debe cumplir con requisitos de calidad de servicio y deadlines. La evaluación de los resultados computacionales en términos de minimización de los costos, factibilidad

y escalabilidad indica que el enfoque propuesto es manejable en el caso de una nube pública, pero se hace menos factible en el caso de nubes híbridas debido a las variaciones de los tiempos de resolución.

En [38] los autores exploran distintas soluciones basadas en Programación Lineal Entera al problema de scheduling de tareas en un procesador en un entorno de tiempo real. En este tipo de entornos el cumplimiento de las tareas cumpliendo las restricciones de tiempo es crucial. La asignación de las tareas en los casos descritos en el artículo se realiza de manera estática, conociendo de antemano las tareas y los requerimientos de tiempos. El método propuesto: rolling task MILP, en el que se ataca el problema de optimización tarea a tarea, reduce en 70% el tiempo necesario para obtener una solución óptima con relación a otras técnicas analizadas.

Como resumen podemos decir que existe una variedad de extensiones al problema de asignación. A partir del GAP se han estudiado una serie de variantes y se han propuesto distintas resoluciones basadas en Programación Lineal, Heurísticas, Algoritmos Genéticos, Relajación Lagrangeana, Algoritmos GRASP y Deep Learning. Debido a que el problema es NP-Hard muchos de los trabajos propuestos priorizan los tiempos de resolución frente a la exactitud. El problema TAWDP es aplicable también en otros contextos, donde el cumplimiento de deadlines es importante como el caso de asignación de recursos en sistemas de tiempo real o la asignación de recursos en la nube.

3 Capítulo 3 – Análisis de la Estabilidad de las Estrategias

En este capítulo se modela la relación entre las empresas y los clientes como un juego donde las empresas y los clientes son los jugadores. Se analiza la estabilidad a largo plazo de las estrategias referentes al pago de los servicios, para comprender cuáles son las estrategias que prevalecen en el tiempo y el impacto de posibles cambios en las tasas de ocurrencia de incidentes y de los cambios en los costos de las horas.

En la Sección 3.1 se incluye un breve *background* en el que se presentan conceptos que serán utilizados en el resto del capítulo. En la Sección 3.2 se presenta el modelo del juego para luego obtener la Dinámica del Replicador en la Sección 3.4. En la Sección 3.5 se encuentran los puntos de equilibrio y en las Secciones 3.8 y 3.9 se analiza la estabilidad de estos. Finalmente se analiza el impacto sobre los resultados de cambios en la tasa de ocurrencia de incidentes en la Sección 3.10 y de los cambios en el costo de las horas en la Sección 3.12. Las conclusiones del capítulo se presentan en la Sección 3.13.

3.1 Background

Teoría de Juegos Evolutivos

La interpretación estándar de la Teoría de Juegos No Cooperativos es que el juego analizado se juega exactamente una vez por jugadores completamente racionales que conocen todos los detalles del juego, incluidas las preferencias de los demás sobre los resultados. En cambio, la Teoría de Juegos Evolutivos imagina que el juego se juega una y otra vez por jugadores biológica o socialmente condicionados, que son seleccionados aleatoriamente de grandes poblaciones. Más específicamente, cada jugador está preprogramado para algún comportamiento - formalmente una estrategia en el juego - y se asume que algunos procesos de selección evolutiva operan a lo largo del tiempo sobre la distribución de comportamientos de la población [39].

Una estrategia $x=(x_1, \dots, x_k)$ representa el porcentaje de individuos que adoptan una de las k posibles estrategias, o el porcentaje de veces que un individuo típico usa cada posible estrategia. Por ejemplo, en el caso de la Biología cada estrategia puede asociarse con una mutación genética y la función de pagos puede asociarse con la cantidad de descendientes.

Equilibrio de Nash

Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias en el que ningún jugador, actuando solo, puede realizar un cambio que mejore su resultado [40].

Un Equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador (un perfil o combinación estratégica), que es la mejor respuesta que cada uno puede dar a las acciones de los otros. En un Equilibrio de Nash cada jugador maximiza su utilidad esperada, tomando las acciones de los otros como dadas. De esta forma en

un Equilibrio de Nash, ningún jugador se siente tentado a modificar en forma unilateral, su estrategia [41].

Estrategias Evolutivamente Estables

Un concepto clave en la Teoría de Juegos Evolutivos es el de una Estrategia Evolutivamente Estable. Tal estrategia es robusta a las presiones de selección evolutiva en un sentido exacto. Suponga que se seleccionan repetidamente individuos al azar de una gran población para jugar un juego simétrico de dos personas, y suponga que inicialmente todos los individuos están programados genéticamente o de otro modo para jugar una determinada estrategia (pura o mixta). Ahora inyecte una pequeña parte de la población que también están programadas para jugar alguna otra estrategia (pura o mixta). Se dice que la estrategia actual es evolutivamente estable si, para cada estrategia mutante, hay una barrera de invasión positiva, de modo que, si la proporción de la población que juegan la estrategia mutante cae por debajo de esta barrera, entonces la estrategia actual obtiene una utilidad mayor que la estrategia mutante [39].

Formalmente :

Sea $K = \{ 1, 2, \dots, k \}$ un conjunto de estrategias puras y su conjunto de estrategias mixtas asociadas $\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i \in K} x_i = 1 \}$.

El poliedro de perfiles de estrategias mixtas es $\theta = \Delta^2$ y la utilidad para la estrategia $x \in \Delta$ cuando se enfrenta a $y \in \Delta$ se escribe como $u(x, y) = x \cdot A \cdot y$, donde A es la matriz de pagos del jugador 1. El conjunto de mejores respuestas $x \in \Delta$ a cualquier estrategia $y \in \Delta$ se denota como $\beta^*(y) \subset \Delta$.

Supongamos que un pequeño grupo de mutantes aparezca en una población grande de individuos que están programados para jugar la misma estrategia original $x \in \Delta$ (mixta o pura). Supongamos que los mutantes están programados para jugar otra estrategia $y \in \Delta$ (mixta o pura). Sea ε la proporción de la población de mutantes (luego de la entrada de estos) con $\varepsilon \in (0, 1)$. Pares de individuos son elegidos al azar para jugar (dos estrategias distintas presentes), cada individuo es elegido con igual probabilidad. Cuando un individuo es elegido para jugar, la probabilidad que su oponente elija la estrategia mutante y es ε y la probabilidad que el oponente juegue la estrategia original x es $(1 - \varepsilon)$. La utilidad en un enfrentamiento en esta población bimórfica es la misma que en un enfrentamiento que juega una estrategia mixta: $\omega = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x \in \Delta$. La utilidad posterior a la entrada para la estrategia original es $u(x, \omega)$ y la de la estrategia mutante es $u(y, \omega)$. La intuición biológica sugiere que las fuerzas evolutivas eligen en contra la estrategia mutante si y solo si la utilidad post entrada es menor que la de la estrategia original:

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x]. \quad (3.1)$$

Una estrategia $x \in \Delta$ **se dice evolutivamente estable** si la desigualdad anterior se cumple para cualquier estrategia mutante $y \neq x$, dado que la proporción de la población de mutantes es lo suficientemente pequeña [39].

Dinámica del Replicador

En general, un proceso evolutivo combina dos elementos básicos: un mecanismo de mutación que proporciona variedad y un mecanismo de selección que favorece unas variedades sobre otras. Mientras que el criterio de estabilidad evolutiva destaca el papel de las mutaciones, la dinámica del replicador destaca el papel de la selección. En su formulación estándar, la dinámica del replicador se formula como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que no incluye ningún mecanismo de mutación en absoluto. En cambio, la robustez contra las mutaciones se maneja indirectamente mediante criterios de estabilidad dinámica. En la configuración de los criterios de estabilidad evolutiva, se imaginó que los individuos estaban programados para estrategias puras o mixtas. En contraste, la dinámica del replicador supone que los individuos solo pueden programarse para estrategias puras. Por lo tanto, en lugar de interpretar una estrategia mixta como una aleatorización particular, realizada por todos y cada uno de los individuos de la población, aquí se interpreta una estrategia mixta x como un estado de la población, donde cada componente x_i representa la proporción de la población de individuos que están programados para la estrategia pura i . Sin embargo, uno todavía imagina enfrentamientos aleatorios de pares en una gran población donde las utilidades representan la aptitud, medida como el número de descendientes y cada descendiente hereda la estrategia de su padre (las estrategias se reproducen). Si la reproducción tiene lugar continuamente en el tiempo, entonces esto da como resultado una cierta dinámica de población en tiempo continuo: la Dinámica de los Replicadores. Los replicadores son aquí estrategias puras; estos pueden copiarse sin error de padre a hijo, siendo los individuos de la población sus anfitriones. A medida que cambia el estado de la población, también lo hacen las utilidades de las estrategias puras y también su aptitud [39].

Notación:

$S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un conjunto finito de estrategias.

Estado de la población : $x = (x_1, \dots, x_k)$.

x_i representa la proporción de la población de individuos que están programados para la estrategia pura s_i .

$u(s_i, x)$ representa la utilidad que obtienen los individuos que juegan una estrategia s_i dado que el resto de la población juega una estrategia promedio x .

Desde el punto de vista de la Teoría de Juegos estamos interesados en conocer cómo la proporción de cada tipo de individuos cambia a lo largo del tiempo. La proporción de individuos que usa una estrategia s_i crece (decrece) si su utilidad es mayor (menor) que la utilidad promedio de la población. Este comportamiento se puede representar mediante la ecuación (3.2), la que define la Dinámica del Replicador.

$$\dot{x}_i = (u(s_i, x) - u(x, x)) \cdot x_i \quad [42] \quad (3.2)$$

Definición 1: Un punto fijo o estado estacionario de la dinámica del replicador es un estado que satisface $\dot{x}_i = 0 \forall i$. [42]

Un punto fijo describe una población que no evoluciona más. Ésta es la solución del sistema dinámico $x(t) = x^* \forall t$. [42]

Definición 2: Un punto fijo de un sistema dinámico se dice asintóticamente estable si cualquier pequeña desviación de su estado son eliminadas por la dinámica cuando $t \rightarrow \infty$. [42]

Teorema 1: Para cualquier juego por pares de dos estrategias, **una estrategia es una estrategia evolutivamente estable** si y solo si **el punto fijo correspondiente en la dinámica del replicador es asintóticamente estable**.

La demostración correspondiente puede verse en [39].

3.2 Modelo del Problema

En esta sección modelamos la relación entre empresas y clientes, con el objetivo de estudiar la estabilidad en el tiempo de las estrategias referentes al pago de los servicios. No es el objetivo de esta sección la optimización de la asignación de los recursos. Este aspecto será abordado en el Capítulo 4.

Modelamos el problema como un juego entre dos poblaciones: clientes y empresas. Los clientes pueden seleccionar entre dos estrategias: pagar una cuota fija mensual por los servicios o pagar a demanda, abonando cada vez que necesiten ser atendidos. Análogamente, las empresas pueden seleccionar dos estrategias: cobrar a cada cliente una cuota mensual, en las que se los atiende sin límite de cantidad de casos, o cobrar por cada atención en función de las horas requeridas para brindar el servicio. Consideramos que los jugadores eligen su estrategia en función de los siguientes elementos: costos, riesgos y en el caso de los clientes la satisfacción por incidentes resueltos (que es lo que el cliente busca como servicio).

3.2.1 Jugadores:

- Empresas proveedoras de servicios de asistencia técnica (respuesta a incidentes)
- Clientes que requieren servicios de asistencia técnica (respuesta a incidentes)

3.2.2 Estrategias:

Para ambos jugadores el conjunto de estrategias se puede describir como:

$S = \{ \text{servicio a costo fijo por mes, servicio a demanda por hora} \}$.

3.2.3 Elementos de la Matriz de Pagos

Para elaborar la Matriz de Pagos consideramos que los jugadores eligen su estrategia en función de los siguientes elementos: costo, riesgo y en el caso de los clientes la satisfacción por incidentes resueltos (que es lo que el cliente busca como servicio).

V_H : Valor monetario de la hora

H_U : Horas usadas

C_R : Costos de Reasignación de los recursos

C_D : Costo de disponibilidad

R : Riesgo de no cumplimiento

C_F : Costo Fijo mensual que paga el cliente

RR : Reducción del riesgo percibido por el cliente

R_{ND} : Riesgo de No Disponibilidad

S : Satisfacción del cliente. Se mide en unidades monetarias, es el valor agregado que percibe el cliente por lo que contrata.

Los valores de C_R , C_D y C_F se expresan en unidades monetarias.

Los valores de R , RR y R_{ND} se expresan en unidades monetarias.

Se define el **valor** de un riesgo como el producto de la probabilidad que ocurra un incidente y el costo del impacto causado por el mismo:

$$\text{Riesgo} = \text{Prob}(\text{ocurrencia de un evento}) \cdot C_I \quad (3.3)$$

Donde C_I es el costo (en unidades monetarias) asociado al impacto causado por la ocurrencia del evento.

Entonces :

El riesgo de no cumplimiento lo podemos definir como:

$$R = \text{Prob}(\text{No cumplimiento}) \cdot C_{NC} \quad (3.4)$$

Donde C_{NC} es el costo por no cumplimiento (por ejemplo multas, costos de imagen, costos asociados a la pérdida del cliente, etc)

La reducción de riesgo percibido por el cliente la podemos definir como:

$$RR = Prob(\text{ocurrencia de incidente}) \cdot \Delta I \quad (3.5)$$

Donde ΔI es la reducción en el impacto del incidente (en términos monetarios) que se obtiene por contar con un servicio de asistencia.

El riesgo de no disponibilidad es el producto de la probabilidad que todos los técnicos estén ocupados al momento del arribo de un nuevo caso y el impacto económico del mismo.

$$R_{ND} = Prob(\text{Todos los técnicos están ocupados}) \cdot C_{ND} \quad (3.6)$$

Donde C_{ND} es el costo económico asociado.

3.3 Matriz de Pagos:

| | | Clientes | |
|----------|-------------------------------|---|---|
| | | Servicio a costo fijo por mes | Servicio a demanda por hora |
| Empresas | Servicio a costo fijo por mes | $C_F - V_H \cdot H_U, V_H \cdot H_U - C_F + RR + S$ | $0, 0$ |
| | Servicio a demanda por hora | $0, 0$ | $V_H H_U - C_R - C_D - R, S - V_H \cdot H_U - R_{ND}$ |

Restricciones :

Asumimos que se cumplen las siguientes condiciones :

$$C_F - V_H \cdot H_U > 0 \quad (3.7)$$

$$V_H \cdot H_U - C_F + RR + S > 0 \quad (3.8)$$

$$V_H H_U - C_R - C_D - R > 0 \quad (3.9)$$

$$S - V_H \cdot H_U - R_{ND} > 0 \quad (3.10)$$

3.4 Dinámica del Replicador

Para simplificar las ecuaciones llevamos la matriz de pagos a la forma

| | | Clientes | |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| | | servicio a costo fijo por mes | servicio a demanda por hora |
| Empresas | servicio a costo fijo por mes | a_1, b_1 | $0, 0$ |
| | servicio a demanda por hora | $0, 0$ | a_2, b_2 |

Donde :

$$a_1 = C_F - V_H \cdot H_U \quad (3.11)$$

$$a_2 = V_H H_U - C_R - C_D - R \quad (3.12)$$

$$b_1 = V_H \cdot H_U - C_F + RR + S \quad (3.13)$$

$$b_2 = S - V_H \cdot H_U - R_{ND} \quad (3.14)$$

Sea $X = (x_1, x_2)$ donde x_1 es el estado de la población de las empresas y x_2 el estado de la población de los clientes:

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}) \quad (3.15)$$

x_{11} es la proporción de empresas que usan una estrategia de costo fijo mensual.

x_{12} es la proporción de empresas que usan una estrategia de servicios a demanda por hora.

$$x_2 = (x_{21}, x_{22}) \quad (3.16)$$

x_{21} es la proporción de clientes que usan una estrategia de costo fijo mensual.

x_{22} es la proporción de clientes que usan una estrategia de servicios a demanda por hora.

Sea $S = \{s_1, s_2\}$ el conjunto de estrategias de la población de las empresas.

Sea $T = \{t_1, t_2\}$ el conjunto de estrategias de la población de clientes.

Donde :

s_1 : Servicio a costo fijo por mes

s_2 : Servicio a demanda por hora

t_1 : Servicio a costo fijo por mes

t_2 : Servicio a demanda por hora

El valor esperado para una empresa de usar la estrategia s_1 es:

$$E_E(s_1) = x_{21}a_1 + 0 \cdot x_{22} \quad (3.17)$$

El valor esperado para una empresa de usar la estrategia s_2 es:

$$E_E(s_2) = x_{21} \cdot 0 + x_{22} a_2 \quad (3.18)$$

El valor esperado para un cliente de usar la estrategia t_1 es:

$$E_C(t_1) = x_{11} b_1 + 0 \cdot x_{12} \quad (3.19)$$

El valor esperado para un cliente de usar la estrategia t_2 es:

$$E_C(t_2) = x_{11} \cdot 0 + b_2 \cdot x_{12} \quad (3.20)$$

El Equilibrio de Nash supone:

$$E_E(s_1) = E_E(s_2) \quad (3.21)$$

$$E_C(t_1) = E_C(t_2) \quad (3.22)$$

El valor esperado de la estrategia mixta para las empresas es:

$$\bar{E}_E = x_{11} E_E(s_1) + x_{12} E_E(s_2) = x_{11}(x_{21} a_1) + x_{12}(x_{22} a_2) \quad (3.23)$$

El valor esperado de la estrategia mixta para los clientes es:

$$\bar{E}_C = x_{21} E_C(t_1) + x_{22} E_C(t_2) = x_{21} b_1 x_{11} + x_{22} b_2 x_{12} \quad (3.24)$$

La Dinámica del Replicador es:

$$\dot{x}_{11} = x_{11}(E_E(s_1) - \bar{E}_E) \quad (3.25)$$

$$\dot{x}_{12} = -\dot{x}_{11} \quad (3.26)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{21}(E_C(t_1) - \bar{E}_C) \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_{22} = -\dot{x}_{21} \quad (3.28)$$

Desarrollo:

$$\dot{x}_{11} = (a_1 x_{21} - (x_{11} x_{21} a_1 + x_{12} x_{22} a_2)) x_{11} \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_{11} = (a_1 x_{21} - x_{11} x_{21} a_1 - x_{12} x_{22} a_2) x_{11} \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_{11} = (a_1 x_{21} (1 - x_{11}) - x_{12} x_{22} a_2) x_{11} \quad (3.31)$$

$$\text{Como } (1 - x_{11}) = x_{12} \quad (3.32)$$

$$\dot{x}_{11} = (a_1 x_{21} x_{12} - x_{12} x_{22} a_2) x_{11} \quad (3.33)$$

Finalmente:

$$\dot{x}_{11} = (a_1 x_{21} - x_{22} a_2) x_{11} x_{12} \quad (3.34)$$

Desarrollando la segunda ecuación:

$$\dot{x}_{21} = (x_{11}b_1 - (x_{11}x_{21}b_1 + x_{12}x_{22}b_2))x_{21} \quad (3.35)$$

$$\dot{x}_{21} = (x_{11}b_1 - x_{11}x_{21}b_1 - x_{12}x_{22}b_2)x_{21} \quad (3.36)$$

Sacamos $x_{11}b_1$ como factor común:

$$\dot{x}_{21} = (x_{11}b_1(1 - x_{21}) - x_{12}x_{22}b_2)x_{21} \quad (3.37)$$

$$\dot{x}_{21} = (x_{11}b_1x_{22} - x_{12}x_{22}b_2)x_{21} \quad (3.38)$$

Se llega a :

$$\dot{x}_{21} = (x_{11}b_1 - x_{12}b_2)x_{22}x_{21} \quad (3.39)$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$\dot{x}_{11} = (a_1x_{21} - a_2x_{22})x_{11}x_{12} \quad (3.40)$$

$$\dot{x}_{21} = (b_1x_{11} - b_2x_{12})x_{21}x_{22} \quad (3.41)$$

Donde:

$$x_{22} = 1 - x_{21} \quad (3.42)$$

$$x_{12} = 1 - x_{11} \quad (3.43)$$

3.5 Puntos de Equilibrio

Resolviendo el sistema de ecuaciones que hace $\dot{x}_{11} = 0$ y $\dot{x}_{21} = 0$ tenemos los siguientes puntos de equilibrio:

$$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \left(\frac{b_2}{b_1+b_2}, \frac{a_2}{a_1+a_2}\right).$$

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos linealización. Para simplificar la notación del cálculo de la Matriz Jacobiana se realiza el siguiente cambio de variables:

$$x = x_{11} \quad (3.44)$$

$$y = x_{21} \quad (3.45)$$

Para simplificar la notación se reescribe el lado derecho de las ecuaciones como $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ de modo de luego poder calcular la matriz Jacobiana del siguiente modo:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Donde :

$$f_1 = (a_1x_{21} - a_2x_{22})x_{11}x_{12} \quad (3.47)$$

$$f_2 = (b_1x_{11} - b_2x_{12})x_{21}x_{22} \quad (3.48)$$

Se substituye x_{12} por $(1-x_{11})$ y x_{22} por $(1-x_{21})$

$$f_1 = (a_1x_{21} - a_2(1-x_{21}))x_{11}(1-x_{11}) \quad (3.49)$$

$$f_2 = (b_1x_{11} - b_2(1-x_{11}))x_{21}(1-x_{21}) \quad (3.50)$$

$$f_1 = (a_1y - a_2(1-y))x(1-x) \quad (3.51)$$

$$f_2 = (b_1x - b_2(1-x))y(1-y) \quad (3.52)$$

3.6 Cálculo de la Matriz Jacobiana

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (a_1y - a_2(1-y))(1-2x) \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1+a_2) \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1+b_2) \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = (b_1x - b_2(1-x))(1-2y) \quad (3.56)$$

Se evalúa el $\det(J - \lambda I)$ en el punto de equilibrio interior, siendo I la matriz identidad.

Previamente se encuentra el valor de la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio interior.

Punto de equilibrio:

$$x_{11} = x = \frac{b_2}{b_1+b_2} \quad (3.57)$$

$$x_{21} = y = \frac{a_2}{a_1+a_2} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= (a_1y - a_2(1-y))(1-2x) = \left(a_1 \frac{a_2}{a_1+a_2} - a_2 \left(1 - \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) \right) \left(1 - \frac{2b_2}{b_1+b_2} \right) = \\ &= a_2 \left(\frac{a_1}{a_1+a_2} - \left(1 - \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) \right) \left(1 - \frac{2b_2}{b_1+b_2} \right) = a_2 \left(\frac{a_1}{a_1+a_2} - 1 + \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) \left(1 - \frac{2b_2}{b_1+b_2} \right) \\ &= a_2 \left(\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{2b_2}{b_1+b_2} \right) = \end{aligned}$$

$$= a_2 (1 - 1) \left(1 - \frac{2b_2}{b_1 + b_2}\right) = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1 + a_2) = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) (a_1 + a_2) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1 + b_2) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) (b_1 + b_2) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= (b_1 x - b_2(1-x))(1-2y) = \left(b_1 \frac{b_2}{b_1 + b_2} - b_2 \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right)\right) \left(1 - 2 \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) = \\ &= b_2 \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} - \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right)\right) \left(1 - \frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right) = b_2 \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} - 1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) \left(1 - \frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right) = \\ &= b_2 \left(\frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2} - 1\right) \left(1 - \frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Por lo tanto, la matriz Jacobiana evaluada en el punto interior tiene la forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_2}{b_1 + b_2} \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) (a_1 + a_2) \\ \frac{a_2}{a_1 + a_2} \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) (b_1 + b_2) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

3.7 Polinomio Característico

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_2}{b_1 + b_2} \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) (a_1 + a_2) \\ \frac{a_2}{a_1 + a_2} \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) (b_1 + b_2) & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{b_2}{b_1 + b_2} \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) (a_1 + a_2) \\ \frac{a_2}{a_1 + a_2} \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) (b_1 + b_2) & -\lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (3.64)$$

Polinomio Característico:

$$\lambda^2 - \left[\frac{a_2}{(a_1 + a_2)} \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) (b_1 + b_2) \frac{b_2}{(b_1 + b_2)} \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right) (a_1 + a_2) \right] = 0 \quad (3.65)$$

Se simplifica cancelando $(a_1 + a_2)$ y $(b_1 + b_2)$ del numerador y del denominador:

$$\lambda^2 - \left[a_2 \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) b_2 \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right) \right] = 0 \quad (3.66)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{a_2 b_2 \left(1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) \left(1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right)} \quad (3.67)$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0 \quad (3.68)$$

En este caso tendremos un **punto de silla** en el punto de equilibrio interior.

3.8 Estudio de los vértices

Evalúo el $\det (J - \lambda I)$ en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (a_1 y - a_2(1-y))(1-2x) = -a_2 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1 + a_2) = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1 + b_2) = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = (b_1 x - b_2(1-x))(1-2y) = -b_2 \quad (3.72)$$

$$J = \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$\det (J - \lambda I) = (a_2 + \lambda)(b_2 + \lambda) \quad (3.74)$$

$$\lambda_1 = -a_2 \quad (3.75)$$

$$\lambda_2 = -b_2 \quad (3.76)$$

Por lo que $(0,0)$ es un **punto estable**.

Evalúo el $\det (J - \lambda I)$ en $(0,1)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (a_1 y - a_2(1-y))(1-2x) = a_1 \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1+a_2) = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1+b_2) = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = (b_1 x - b_2(1-x))(1-2y) = b_2 \quad (3.80)$$

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

$$\det (J - \lambda I) = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) \quad (3.82)$$

$$\lambda_1 = a_1 \quad (3.83)$$

$$\lambda_2 = b_2 \quad (3.84)$$

Por lo tanto (0,1) **NO** es un punto estable.

Evalúo el $\det (J - \lambda I)$ en (1,0)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (a_1 y - a_2(1-y))(1-2x) = a_2 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1+a_2) = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1+b_2) = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = (b_1 x - b_2(1-x))(1-2y) = b_1 \quad (3.88)$$

$$J = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

$$\det (J - \lambda I) = (a_2 - \lambda) (b_1 - \lambda) \quad (3.90)$$

$$\lambda_1 = a_2 \quad (3.91)$$

$$\lambda_2 = b_1 \quad (3.92)$$

Por lo tanto el punto (1,0) **no** es un punto estable.

Evalúo el $\det (J - \lambda I)$ en (1,1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (a_1 y - a_2(1-y))(1-2x) = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x(1-x)(a_1+a_2) = 0 \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y(1-y)(b_1+b_2) = 0 \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = (b_1x - b_2(1-x))(1-2y) = -b_1 \quad (3.96)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_1 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

$$\det (J - \lambda I) = \lambda(\lambda + b_1) \quad (3.98)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (3.99)$$

$$\lambda_2 = -b_1 \quad (3.100)$$

Por lo que (1,1) es un punto estable.

3.9 Isoclinas

Para comprender las trayectorias se estudian las isoclinas. Se analiza el signo de las derivadas de \dot{x} y de \dot{y} en los ejes y en las rectas donde las derivadas se anulan.

Eje (x,0)

En el eje $y = 0$ $\dot{y} = 0$ para el intervalo (0,1) por lo que $y(t)$ es constante. El signo de \dot{x} es $-a_2$. Como a_2 es mayor que cero, \dot{x} es negativo en el intervalo (0,1). Por esa razón el punto (0,0) es un atractor en el eje (x,0) y el punto (1,0) es un repulsor.

Eje (0,y)

$$0 < y < 1$$

Para $x=0$ tenemos $\dot{x} = 0$ en el intervalo (0,1) por lo que $x(t)$ es constante. El signo de \dot{y} es negativo en el intervalo. Por ese motivo el punto (0,0) es un atractor mientras que el punto (0,1) es un repulsor.

Eje (x,1)

En $y = 1$ el valor de $\dot{y} = 0$ por lo que $y(t)$ es constante en la recta $y=1$ en el intervalo (0,1). El signo de \dot{x} es positivo en el intervalo (0,1). Por lo tanto el punto (0,1) es un repulsor y el punto (1,1) es un atractor.

Eje (1,y)

En la recta $x=1$ el valor de $\dot{x} = 0$ en el intervalo $(0,1)$. Por esta razón x es constante en el intervalo. El signo de \dot{y} es positivo en el intervalo $(0,1)$. Por esta razón el punto $(1,1)$ es un atractor y el punto $(0,1)$ es un repulsor.

Recta $x = \frac{b_2}{b_1 + b_2}$, en el intervalo $(0,1) \times (0,1)$

En el intervalo $(0,1)$ de $\dot{y} = 0$ por lo que $y(t)$ es constante. Esto significa que para cualquier punto sobre esta recta, las trayectorias que pasan por ellos solamente crecerán en el sentido de las x a lo largo del tiempo. El signo de \dot{x} es positivo si $y > \frac{a_2}{a_1 + a_2}$, y es negativo si $y < \frac{a_2}{a_1 + a_2}$.

Recta $y = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$ en el intervalo $(0,1)$

En este caso $\dot{x} = 0$ en el intervalo por lo que las trayectorias que pasen por los puntos de la recta solamente se modificarán en el sentido de las y . El signo de \dot{y} es positivo si $x > \frac{b_2}{b_1 + b_2}$ y negativo en caso contrario.

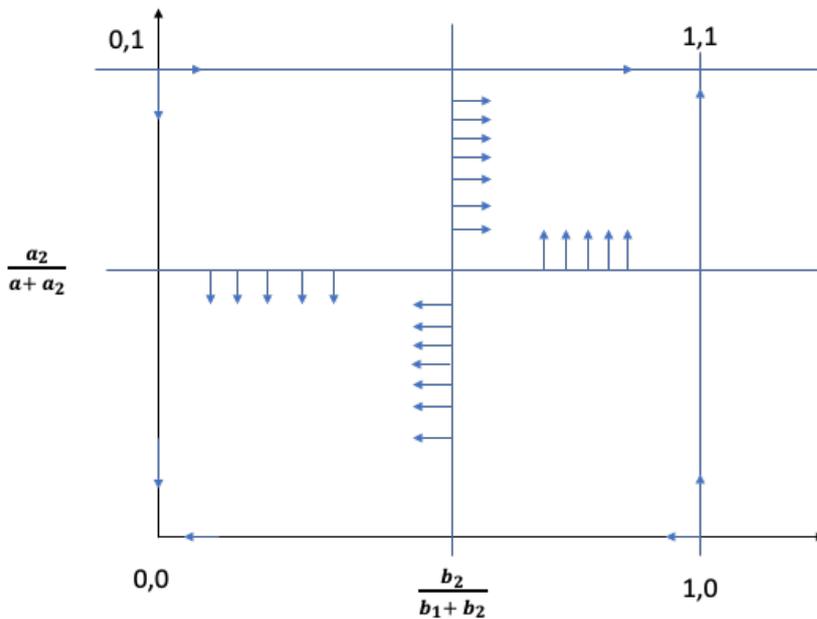


Figura 1 - Direcciones de las trayectorias en función de los signos de las derivadas

Las rectas $x = \frac{b_2}{b_1 + b_2}$ $y = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$ dividen el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$ en cuatro cuadrantes.

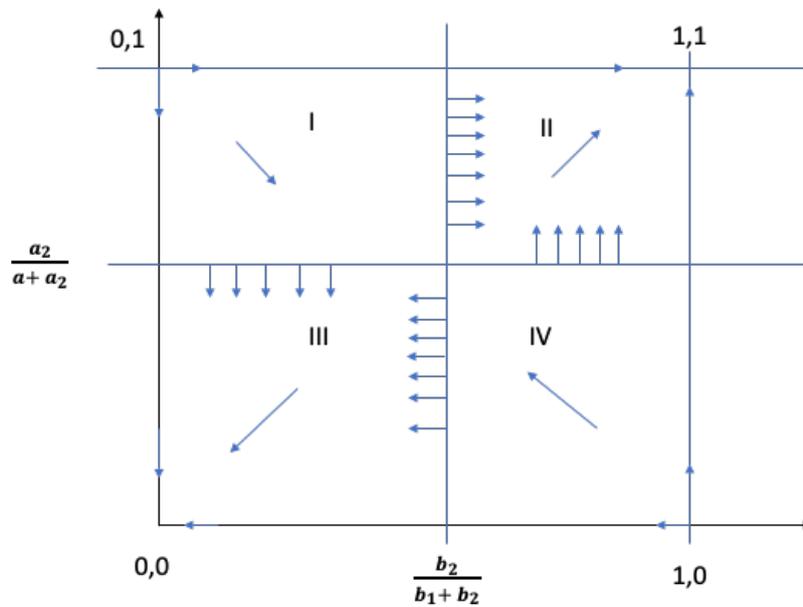


Figura 2 - Direcciones posibles de las trayectorias para los puntos en los cuadrantes I,II,III y IV

Análisis de las direcciones de las trayectorias que comienzan en cada uno de los cuadrantes:

Un punto que comience su trayectoria en el cuadrante I tenderá a alejarse de (0,1) y se acercará finalmente a alguno de los puntos (0,0) o (1,1).

Un punto que comience su trayectoria en el cuadrante II tenderá a acercarse al punto (1,1).

Un punto que comience su trayectoria en el cuadrante III tenderá a acercarse al punto (0,0).

Un punto que comience su trayectoria en el cuadrante IV tenderá a acercarse al punto (0,0) o al punto (1,1).

El mapa de direcciones resultante es el que se presenta en la Figura 3.

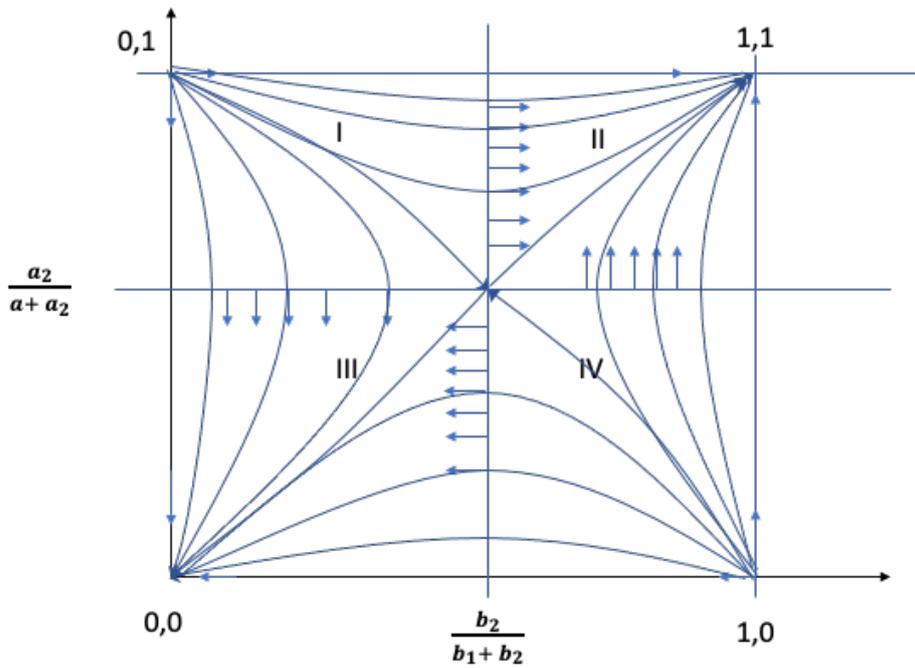


Figura 3 - Mapa de Direcciones

El mapa de direcciones nos permite comprender la trayectoria a lo largo del **tiempo** de cada punto (x,y) . Cada punto del Mapa de Direcciones representa en el eje de las x la proporción de la población de empresas que usan una estrategia de costo fijo mensual. En el eje y se representa la proporción de la población de clientes que juega una estrategia de costo fijo. Entonces, para cualquier estado inicial de las poblaciones se puede conocer cuál va a ser la evolución a medida que pasa el tiempo. Con base en este conocimiento las empresas podrían ajustar su planificación, adaptándose a los cambios en la proporción de clientes y empresas que usan cada estrategia a medida que avanza el tiempo, como lo describe el Mapa de Direcciones.

3.10 Cambios en la tasa de ocurrencia de incidentes

Un incremento en la tasa de incidentes tendrá efectos sobre los riesgos ya que los mismos están asociados a las probabilidades de ocurrencia de incidentes. Al aumentar la cantidad de incidentes también se espera que aumente la cantidad de horas necesarias. Para analizar el efecto del incremento en la tasa de incidentes expresaremos los valores de la matriz de pagos en función de la tasa de incidentes.

Consideramos que los incidentes se comportan como un Proceso de Poisson de parámetro λ , donde λ es la cantidad de incidentes que ocurren en un intervalo de tiempo elegido (por ejemplo, incidentes por hora).

Los tiempos de resolución de incidentes también lo modelaremos como un Proceso de Poisson de parámetro μ , donde μ es la cantidad de incidentes resueltos en un intervalo dado (por ejemplo, incidentes por hora resueltos). El tamaño del intervalo de tiempo es el mismo para λ y para μ .

Para expresar el comportamiento de la cantidad de horas al variar la tasa de incidentes usaremos el valor esperado de H_u . La cantidad de horas utilizadas es el producto de la cantidad de casos por la duración de cada caso. El valor esperado de la cantidad de casos es el valor esperado de la variable de Poisson: λ . El valor esperado del tiempo de resolución será: $1/\mu$. Entonces

$$E(H_u) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3.101)$$

El riesgo de no disponibilidad lo definimos como la probabilidad que en un intervalo de tiempo no tenga los técnicos suficientes multiplicado por el costo asociado C_{ND} .

Si K es la cantidad de técnicos y X la cantidad de casos en el intervalo y $F(x, \lambda)$ la función de distribución de probabilidades de una variable de Poisson x de parámetro λ , podemos expresar lo anterior como:

$$R_{ND} = P(X > K) \cdot C_{ND} = [1 - P(X \leq K)] \cdot C_{ND} = [1 - F(\kappa, \lambda)] \cdot C_{ND} \quad (3.102)$$

$$R_{ND} = \left[1 - \sum_{i=0}^{K} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right] \cdot C_{ND} \quad (3.103)$$

El riesgo de no cumplimiento fue definido como

$$R = Prob(\text{No cumplimiento}) \cdot C_{NC} \quad (3.104)$$

La probabilidad de no cumplimiento la podemos expresar como la probabilidad de no contar con recursos suficientes.

Análogamente al caso anterior podemos expresar R como

$$R = P(X > K) \cdot C_{NC} \quad (3.105)$$

$$R = \left[1 - \sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right] \cdot C_{NC} \quad (3.106)$$

La reducción del riesgo percibido por el cliente fue definida como:

$$RR = Prob(\text{ocurrencia de incidente}) \cdot \Delta I \quad (3.107)$$

Donde ΔI es la reducción en el impacto del incidente que se obtiene por contar con un servicio de asistencia.

Si definimos a C_I como el costo asociado al incidente y α como un factor de atenuación del impacto por el hecho de contar con un servicio de asistencia ($\alpha < 1$), podemos expresar ΔI como:

$$\Delta I = \alpha \cdot C_I \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \text{La } Prob(\text{ocurrencia de incidente}) &= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$Prob(\text{Ocurrencia de Incidente}) = 1 - e^{-\lambda} \quad (3.110)$$

Donde:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (3.111)$$

es la función de probabilidades de una variable de Poisson.

Entonces:

$$RR = (1 - e^{-\lambda}) \cdot \alpha \cdot C_I \quad (3.112)$$

Habiendo obtenido los valores de R_{ND} , RR , R y el valor esperado de H_U en función de λ , expresamos a_1 , b_1 , a_2 , b_2 en función de λ .

$$a_1(\lambda) = C_F - H_U \cdot V_H = C_F - E(H_U) \cdot V_H = C_F - \frac{\lambda}{\mu} \cdot V_H \quad (3.113)$$

$$a_1(\lambda) = C_F - \frac{\lambda}{\mu} V_H \quad (3.114)$$

$$a_2(\lambda) = V_H \cdot H_U - C_R - C_D - R \quad (3.115)$$

$$a_2(\lambda) = V_H \frac{\lambda}{\mu} - C_R - C_D - C_{NC} \left(1 - \sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right) \quad (3.116)$$

$$b_1(\lambda) = V_H \cdot H_U - C_F + RR + S \quad (3.117)$$

$$b_1(\lambda) = V_H \cdot \frac{\lambda}{\mu} - C_F + (1 - e^{-\lambda}) \cdot \alpha \cdot C_I + S \quad (3.118)$$

$$b_2(\lambda) = S - V_H \cdot H_U - R_{ND} \quad (3.119)$$

$$b_2(\lambda) = S - V_H \frac{\lambda}{\mu} - C_{ND} \left(1 - \sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}\right) \quad (3.120)$$

Cálculo de la derivada de las coordenadas del punto de equilibrio interior:

$\left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}, \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right)$ respecto a λ

$$a_1'(\lambda) = -\frac{V_H}{\mu} \quad (3.121)$$

$$a_2'(\lambda) = \frac{V_H}{\mu} - C_{NC} \left(\sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^{(i-\lambda)} (i-\lambda)}{i!} \right) \quad (3.122)$$

$$b_1'(\lambda) = \frac{V_H}{\mu} - \alpha C_I e^{-\lambda} \quad (3.123)$$

$$b_2'(\lambda) = C_{ND} \sum_{i=0}^K \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^{(i-1)} (i-\lambda)}{i!} \right] - \frac{V_H}{\mu} \quad (3.124)$$

Derivada de $\frac{b_2}{b_1 + b_2}$ respecto a λ :

$$\left(\frac{b_2}{b_1 + b_2} \right)' = \frac{b_2'(b_1 + b_2) - b_2(b_1 + b_2)'}{(b_1 + b_2)^2} \quad (3.125)$$

Desarrollando el numerador llegamos a :

$$b_2'(b_1 + b_2) - b_2(b_1 + b_2)' = b_2'b_1 + b_2'b_2 - b_2b_1' - b_2b_2' = 0 \quad (3.126)$$

$$b_2'b_1 - b_2b_1' = 0 \quad (3.127)$$

Para conocer los signos de la derivada buscamos el cero de la función. Substituyendo en el numerador los valores de b_1 , b_2 , b_1' y b_2' calculados previamente llegamos a la siguiente ecuación:

$$\left[C_{ND} \sum_{i=0}^K \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^{(i-1)} (i-\lambda)}{i!} \right] - \frac{V_H}{\mu} \right] \left[V_H \cdot \frac{\lambda}{\mu} - C_F + (1 - e^{-\lambda}) \cdot \alpha \cdot C_I + S \right] - \left[S - V_H \frac{\lambda}{\mu} - C_{ND} \left(1 - \sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right) \right] \left[\frac{V_H}{\mu} - \alpha C_I e^{-\lambda} \right] = 0 \quad (3.128)$$

Encontrar las raíces de esta ecuación en forma analítica no es posible.

Derivada de $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ respecto a λ :

$$\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)' = \frac{a_2'(a_1 + a_2) - a_2(a_1 + a_2)'}{(a_1 + a_2)^2} \quad (3.129)$$

Desarrollando el numerador llegamos a :

$$a_2'(a_1 + a_2) - a_2(a_1 + a_2)' = a_2'b_1 + a_2'a_2 - a_2a_1' - a_2a_2' = 0 \quad (3.130)$$

$$a_2'a_1 - a_2a_1' = 0 \quad (3.131)$$

Para conocer los signos de la derivada es necesario hallar el cero de la función. Substituyendo en el numerador los valores de a_1 , a_2 , a_1' y a_2' calculados previamente llegamos a la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{V_H}{\mu} - C_{NC} \left(\sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^{(i-\lambda)} (i-\lambda)}{i!}\right)\right] \left(C_f - \frac{\lambda}{\mu} V_H\right) - \left[V_H \frac{\lambda}{\mu} - C_R - C_D - C_{NC} \left(1 - \sum_{i=0}^K \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}\right)\right] \left(-\frac{V_H}{\mu}\right) = 0 \quad (3.132)$$

Encontrar las raíces de esta ecuación en forma analítica no es posible.

La modificación de los valores de los riesgos a causa de los cambios en la tasa de incidentes hará que los valores de los coeficientes de la matriz de pagos se modifiquen. Al modificarse a_1 , a_2 , b_1 y b_2 , las coordenadas del punto de equilibrio interior: $\left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}, \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)$ serán modificadas. El resultado será un corrimiento del punto de equilibrio interior hacia alguno de los cuadrantes.

Algunas trayectorias que en la situación inicial tendían hacia uno de los puntos de equilibrio estables, ahora se verán modificadas, convergiendo hacia el otro punto de equilibrio estable. Las magnitudes del cambio se pueden obtener mediante resolución numérica de las derivadas halladas en esta sección. En el siguiente ejemplo vemos un caso de una trayectoria que se ve alterada luego que el punto de equilibrio interior se modifica. La trayectoria que en el primer caso (Figura 4) se encontraba por debajo de la asíntota, en el segundo caso (Figura 5) se encuentra por encima de la asíntota, dirigiéndose al punto (1,1), a diferencia de la primera, que se dirigía a (0,0)

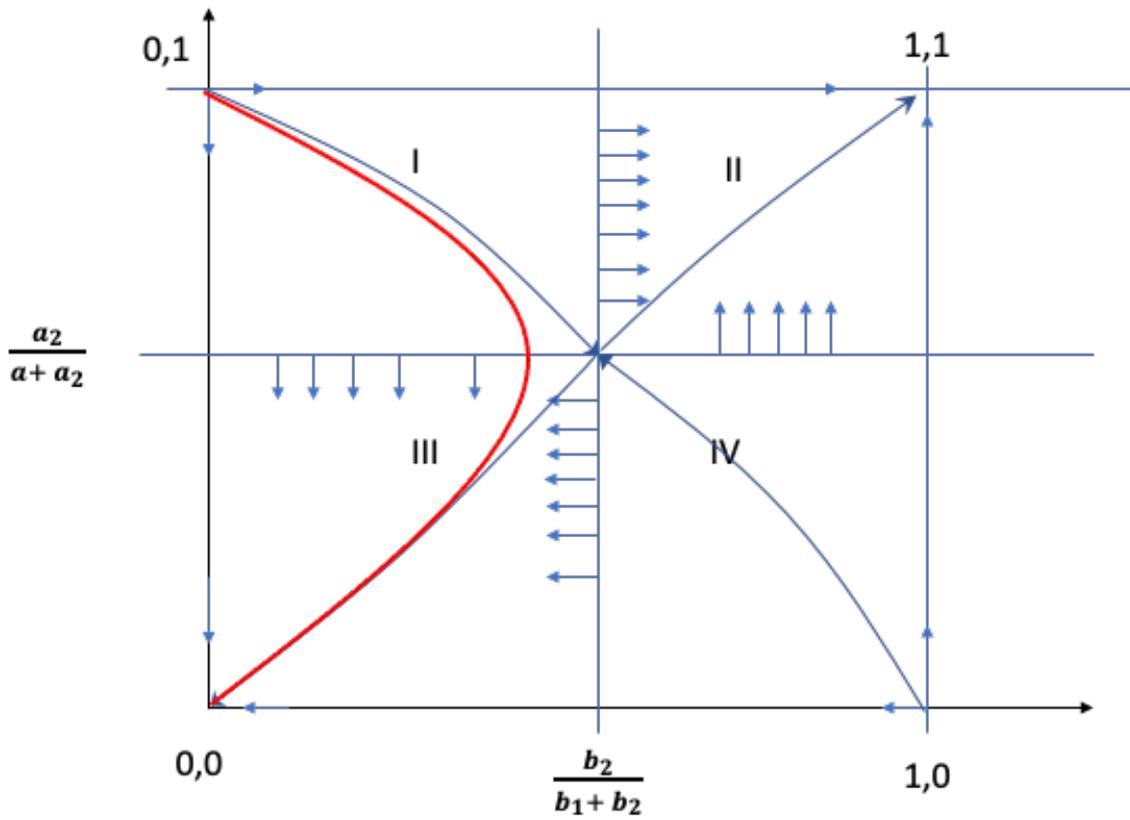


Figura 4 - Trayectoria en la situación inicial

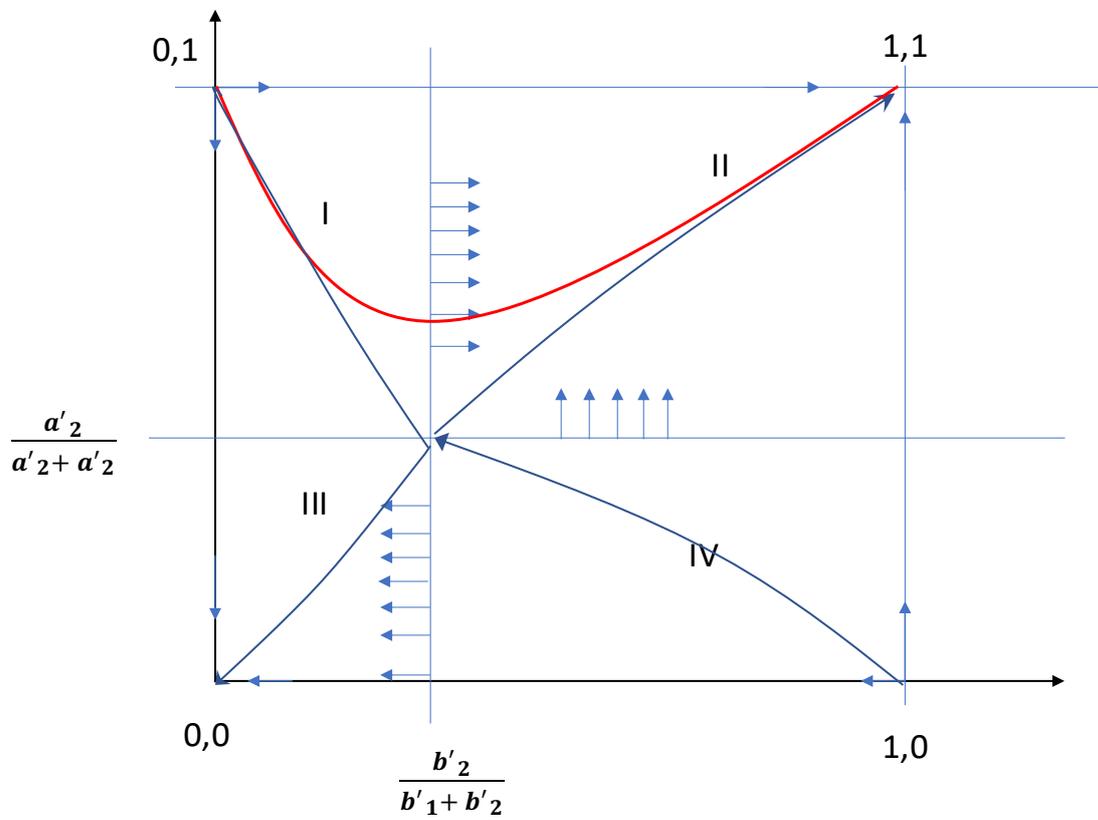


Figura 5 - Trayectoria para el mismo punto inicial luego de que el punto de equilibrio se modificara

Esta situación podría presentarse ante un aumento en los valores de retorno de a_1 y de a_2 y una caída en los valores de retorno de a_2, b_2 . Esta situación indicaría una mayor preferencia por el primer cuadrante de la matriz de pagos, en la que ambos jugadores prefieren las estrategias de servicio a costo fijo por mes.

3.11 Comprobación mediante resolución numérica

A efectos de verificar los resultados obtenidos analíticamente se realizaron pruebas de resolución numérica con distintos valores para a_1, b_1, a_2, b_2 .

Para la resolución numérica se utilizó el lenguaje Python y las librerías Scipy y Numpy. En particular se utilizó la función *odeint* para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo de una corrida variando el punto de equilibrio:

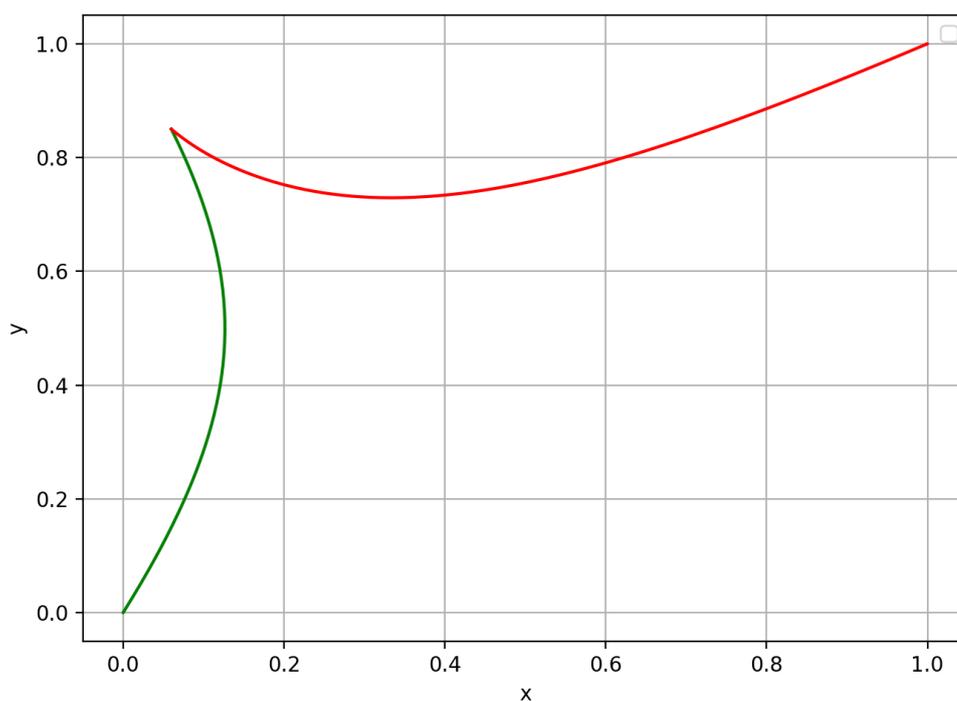


Figura 6 - Resolución numérica de un caso de modificación del punto de equilibrio interior

Punto inicial : (0.06, 0.85)

La línea roja corresponde a los siguientes valores :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1$$

En este caso el punto de equilibrio interior es: (0.5, 0.5)

La línea azul corresponde a los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 0.5 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= 0.5
\end{aligned}$$

En este caso el punto de equilibrio interior es: (0.333,0.333).

Comprobamos numéricamente que una trayectoria que en el primer caso convergía a (0,0) (línea azul) al cambiar el punto de equilibrio pasa a converger a (1,1) (línea roja).

3.12 Cambios en los costos de las horas

Un incremento en el costo de las horas estaría alterando los valores de los coeficientes de la matriz de pagos: a_1, a_2, b_1, b_2 y desplazando el punto de equilibrio interior: $\left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}, \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right)$. Algunas trayectorias que en la situación inicial tendían hacia uno de los puntos de equilibrio estables, ahora se verán modificadas, convergiendo hacia el otro punto de equilibrio estable.

Las magnitudes de los cambios en las coordenadas del punto de equilibrio en función del valor de las horas V_H los podemos obtener mediante las derivadas de las coordenadas del punto de equilibrio interior respecto de V_H

Cálculo de las derivadas de las coordenadas del punto de equilibrio interior respecto al valor de las horas V_H

$\frac{b_2}{b_1 + b_2}$ es la coordenada del punto de equilibrio interior correspondiente a x_{11} que representa la proporción de la población de empresas que optan por la estrategia de precio fijo. La derivada de $\frac{b_2}{b_1 + b_2}$ respecto al valor hora V_H nos proporciona información sobre el comportamiento de la proporción de empresas que utilizan la estrategia de precio fijo al variar el valor de la hora. Substituyendo b_1 y b_2 por los valores definidos en la Sección 3.3 llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{S - V_H \cdot H_U - R_{ND}}{V_H \cdot H_U - C_F + RR + S + S - V_H \cdot H_U - R_{ND}} = \frac{S - V_H \cdot H_U - R_{ND}}{RR + 2S - C_F - R_{ND}} \quad (3.133)$$

$$\left(\frac{b_2}{b_1 + b_2} \right)' = \frac{-H_U}{RR + 2S - C_F - R_{ND}} \quad (3.134)$$

Signo de la derivada

Si $RR + 2S - C_F - R_{ND} = 0$ no existe la derivada

Si $RR + 2S - C_F - R_{ND} < 0$ la derivada es positiva

Si $RR + 2S - C_F - R_{ND} > 0$ la derivada es negativa

El crecimiento o disminución de la proporción de empresas que prefiere una estrategia de costo fijo mensual en función del precio de las horas dependerá de: la cantidad de horas usadas y de la relación entre el valor del costo fijo mensual, el riesgo de no disponibilidad, la reducción del riesgo percibida por el cliente y el nivel de satisfacción percibida por los mismos.

$\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ es la coordenada del punto de equilibrio interior correspondiente a x_{21} y representa la proporción de clientes que usa la estrategia de precio fijo mensual. La derivada de $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ con respecto al valor de la hora V_H nos proporciona información sobre el comportamiento de la proporción de la población de clientes que utiliza la estrategia de costo fijo mensual.

Substituyendo a_1 y a_2 por los valores definidos en 3.3 Matriz de Pagos:

$$\frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{V_H H_U - C_R - C_D - R}{C_F - H_U V_H + V_H H_U - C_R - C_D - R} = \frac{H_U V_H - C_R - C_D - R}{C_F - C_R - C_D - R} \quad (3.135)$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \right)' = \frac{H_U}{C_F - C_R - C_D - R} \quad (3.136)$$

Signo de la derivada

Si $C_F - C_R - C_D - R = 0$ No existe la derivada

Si $C_F - C_R - C_D - R > 0$ la derivada es positiva

Si $C_F - C_R - C_D - R < 0$ la derivada es negativa

3.13 Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se analizó la realidad de las empresas prestadoras de servicios como un juego entre empresas y clientes. Se analizó la estabilidad de las estrategias a largo plazo para comprender cuáles son las estrategias que prevalecen en el tiempo y el impacto de posibles cambios en las tasas de ocurrencia de incidentes y cambios en los costos de las horas. Si bien en la descripción del problema aparecen una serie de parámetros que influyen en la toma de decisiones de cada jugador, los mismos pueden resumirse como sumandos en los coeficientes de la matriz de pagos. Las modificaciones que puedan sufrir los distintos sumandos al final terminarán alterando los valores de los coeficientes a_1 , a_2 , b_1 y b_2 y eventualmente corriendo el punto de equilibrio interior. Dicho punto de equilibrio interior **no es asintóticamente estable**. Del análisis surge que existen dos puntos asintóticamente estables : (0,0) y (1,1). Dichos puntos corresponden a las distribuciones de probabilidades $x_{11}=0, x_{21}=0$ (lo que es lo mismo que $x_{12}=1, x_{22}=1$) y a $x_{11}=1, x_{21}=1$ respectivamente. Esto significa que las estrategias que van a prosperar en el tiempo son:

$x_{12}=1, x_{22}=1$: Este caso corresponde al caso en que cada población juegue su segunda estrategia : **servicio a demanda por hora**.

$x_{11}=1, x_{21}=1$: Este caso corresponde al caso en que cada población juega su primera estrategia: **servicio a costo fijo por mes**.

Para cualquiera de las poblaciones en que una proporción juegue una estrategia y el restante juegue la otra, se convergerá en el tiempo a un estado en el que ambas poblaciones jueguen la misma estrategia, permaneciendo en este estado.

Alteraciones en los valores de los costos y riesgos pueden mover el punto de equilibrio interior. La consecuencia de este cambio será que algunas trayectorias que en el caso inicial convergían a uno de los dos puntos asintóticamente estables, pueden pasar a converger al otro punto. Los puntos asintóticamente estables no se modifican: (0,0), (1,1).

A partir de la Dinámica del Replicador utilizada para el estudio de la estabilidad de las estrategias, se obtuvo un sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de las poblaciones de empresas y de clientes a lo largo del tiempo. De la resolución de la Dinámica del Replicador se obtuvo el Mapa de Direcciones. El mapa de direcciones permite comprender la trayectoria a lo largo del **tiempo** de cada punto (x,y) , que representa un estado de las poblaciones: qué proporción de la población de empresas juega una estrategia de costo fijo y qué proporción de la población de clientes juega la estrategia de costo fijo. Para cualquier estado inicial de las poblaciones se puede conocer cuál va a ser la evolución a medida que pasa el tiempo. Con base en el estado inicial, la Dinámica del Replicador y el Mapa de Direcciones resultante, las empresas podrán tomar decisiones, adaptándose a los cambios en la proporción de clientes que usan cada estrategia a medida que avanza el tiempo y conocer cuál será la estrategia a la que convergen finalmente.

4 Capítulo 4 - Resolución del Problema De Asignación de Tareas Como Un Problema de Programación Lineal Entera

En este capítulo se optimiza la asignación de tareas mediante Programación Lineal Entera. El problema se modela como un problema de asignación en el que se asignan: tareas, recursos y tiempo. Se busca resolver de forma óptima qué recurso se ocupa de cada tarea en qué momento, respetando los tiempos máximos de resolución determinados por los acuerdos de niveles de servicio (SLA: Service Level Agreement). De aquí en más nos referiremos a este problema como el problema de asignación de tareas con tiempos límite: TAWDP (Task Assignment With Deadlines Problem).

En la Sección 4.1 se presenta la descripción del problema y en las siguientes subsecciones se presentan consideraciones que ayudan a comprender la elaboración del modelo matemático. En la Sección 4.2 se presenta formalmente el modelo matemático completo. En la Sección 4.3 se demuestra que el problema TAWDP es NP-Hard. En la Sección 4.4 se presenta la implementación del modelo en AMPL-Cplex y los resultados computacionales obtenidos. Finalmente, en la Sección 4.5 se presentan las conclusiones del capítulo.

4.1 Descripción del problema TAWDP

El problema TAWDP puede ser visto como una extensión del problema GAP. La definición del problema GAP se puede encontrar en [22]. En [23] se define el problema MAP el cual es una extensión del problema GAP al que se le agregan dimensiones, por ejemplo, el tiempo. El MAP tiene similitudes con TAWDP: se asignan tareas y tiempo a los recursos, los recursos pueden realizar tareas con distintos niveles de eficiencia, lo que implica distintos costos y distintos requerimientos de recursos.

En TAWDP la asignación de recursos se realiza en slots de tiempo de 1 hora. La demanda es conocida y corresponde a los casos que se reciben en cada hora. La asignación se realiza de hora en hora en función de los casos que se reciben y de los recursos disponibles. Los recursos que son asignados en un slot de tiempo y que permanecen ocupados en los slots siguientes, no se consideran como disponibles en las siguientes iteraciones hasta que culminen la tarea que le fue asignada.

Para cada recurso se conoce su costo, así como el valor de venta de cada hora de sus servicios. La ganancia obtenida por cada recurso se define como la diferencia entre el valor de venta de las horas asignadas y el costo del recurso.

Los tiempos de resolución de los distintos problemas por cada recurso son conocidos (basados en datos históricos de la empresa).

Cada caso que es reportado por un cliente tiene asociado un nivel de severidad. Cada cliente tiene un contrato en el que se especifica el nivel de servicio: SLA. En el SLA se definen los tiempos de respuesta máximos para cada nivel de severidad.

Cada caso es asignado a un solo recurso (no hay varios recursos trabajando en paralelo en un caso). Cada slot de tiempo de un recurso es ocupado por un solo

caso (un recurso no trabaja a la vez en más de un caso). Una vez que comienza a trabajar en un caso no se interrumpe hasta que finaliza con el mismo.

Se busca hallar la asignación óptima de recursos a los casos de modo de maximizar la ganancia obtenida respetando los tiempos máximos de resolución establecidos por los distintos SLAs.

4.1.1 Ejemplo

En esta subsección se presenta un ejemplo simplificado, a efectos de ilustrar aspectos del problema de asignación.

Los recursos se representan mediante un vector R donde cada r_i representa un recurso de la empresa.

$$R=(r1,r2,r3) \tag{4.1}$$

La cantidad de horas disponible de cada recurso se representa mediante un vector H donde cada h_r representa la cantidad de horas disponibles del recurso r . En este ejemplo serán 8 horas (jornada laboral completa) para cada recurso.

$$H=(8,8,8) \tag{4.2}$$

La demanda se puede representar mediante un vector de casos que llamaremos D donde cada d_i es el identificador de un caso que se recibe.

$$D=(d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7) \tag{4.3}$$

Para representar los tiempos de resolución de cada caso por cada uno de los recursos se emplea una matriz $T: R \times D$ en la que las filas corresponden a los recursos y las columnas a los casos.

Ejemplo de la matriz T :

| | $d1$ | $d2$ | $d3$ | $d4$ | $d5$ | $d6$ | $d7$ |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r1$ | 1 | ... | 2 | ... | ... | ... | .. |
| $r2$ | ... | 1 | ... | 3 | ... | ... | 1 |
| $r3$ | ... | ... | ... | ... | 1 | 3 | ... |

Tabla 1- Ejemplo de la matriz T : tiempos de resolución de los casos por los distintos recursos

Ejemplo de Tiempos de Respuesta Comprometidos (SLA)

| | Sev 1 | Sev 2 | Sev 3 | Sev 4 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Cliente 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Cliente 2 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Cliente 3 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Cliente 4 | 1 | 2 | 5 | 8 |
| Cliente 5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Cliente 6 | 1 | 2 | 3 | 6 |

Tabla 2- Ejemplo de los tiempos de respuesta según la severidad para cada cliente

Ejemplo de Demanda :

| Caso | Cliente | Severidad |
|-----------|---------|-----------|
| <i>d1</i> | 1 | 1 |
| <i>d2</i> | 2 | 1 |
| <i>d3</i> | 5 | 3 |
| <i>d4</i> | 4 | 3 |
| <i>d5</i> | 3 | 1 |
| <i>d6</i> | 4 | 3 |
| <i>d7</i> | 6 | 2 |

Tabla 3- Ejemplo de demanda

4.1.1.1 Ejemplo de asignación :

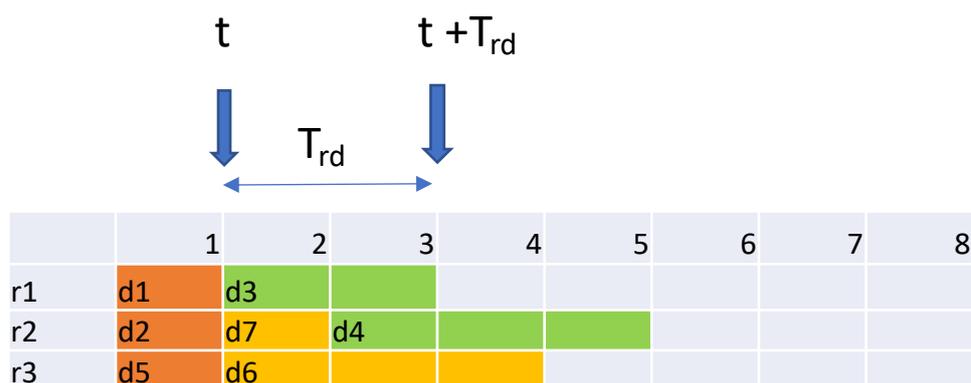


Figura 7 - Ejemplo de asignación

En la Figura 7 se muestra una asignación posible. Las columnas representan las horas del día laborable y las filas las asignaciones de cada recurso. La ocupación de los distintos bloques de tiempo se indica mediante colores y el identificador del caso asignado al recurso. Veremos que en esta asignación se cumple con todos los

SLAs a pesar de que algunos casos no se comienzan a atender en la hora más temprana. Los casos $d1$, $d2$, $d5$ requieren un tiempo de respuesta de 1 hora y son resueltos en la primer hora cumpliendo con el SLA. El caso $d7$ requiere un tiempo de respuesta de 2 horas, pero puede ser resuelto por el recurso $r2$ en solamente 1 hora. Se asigna al recurso $r2$ a partir de la hora 2 pero aun así cumple con el SLA. El caso $d3$ tiene tiempo máximo de respuesta de 3 horas y puede ser resuelto por el recurso $r1$ en 2 horas. Se puede asignar al recurso $r1$ a partir de la hora 2 y cumplir con el SLA. El caso $d6$ tiene un tiempo de respuesta de 4 horas y puede ser resuelto por el recurso $r3$ en 3 horas. Se asigna a partir de la hora 2 y aun así cumple con el SLA. El caso $d4$ tiene un tiempo máximo de respuesta de 5 horas y puede ser resuelto por el recurso $r2$ en 3 horas.

La asignación se puede representar entonces mediante variables binarias que representen la asignación de un recurso r a un caso d en el slot de tiempo t .

$$x_{rat} = \begin{cases} 1 & \text{si el recurso } r \text{ se asigna al caso } d \text{ a partir de la hora } t \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.4)$$

La variable x_{rdt} solamente indica que hay una asignación a un recurso que comienza a partir del slot t . Únicamente el primer slot se indica con 1.

Para aquellos casos cuya resolución requiera más de un slot de tiempo se consideraron dos representaciones posibles:

- que todos los slots de tiempo valgan 1
- que solamente el primer slot de tiempo valga 1 y los siguientes valgan cero

Se eligió la segunda opción, en la que x_{rdt} vale 0 en cada uno de los slots que están ocupados luego de la primera hora asignada a un caso. Esta opción simplifica la representación de la restricción de cumplimiento del SLA frente a la representación en la que se marcan todos los slots con 1.

El cumplimiento del SLA se puede representar mediante la condición de que el slot inicial (t) más la duración de la tarea (T_{rd}) sea menor al tiempo máximo de resolución para el caso (SLA).

$$t + T_{rd} \leq \text{Tiempo Maximo definido por el SLA} \quad (4.5)$$

En esta representación también se hace más sencillo representar la restricción de que cada caso tenga un solo técnico asignado. En la representación elegida debe tenerse presente que un slot marcado en cero que está dentro del intervalo de tiempo de una tarea asignada no debe confundirse con un slot de tiempo sin asignar.

Continuando con el ejemplo de asignación presentado en la Figura 7:

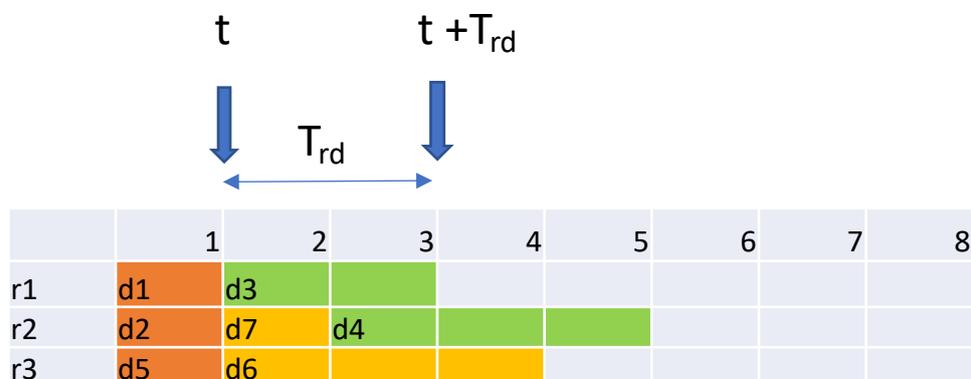


Figura 8 - Ejemplo de una asignación que cumple el SLA

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| r2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| r3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura 9 - Representación binaria de la asignación

Las asignaciones de los casos $d3$, $d4$ y $d6$ ocupan más de 1 slot de tiempo cada uno. En el caso del recurso $r1$ la hora 3 no debe ser considerada como no asignada a pesar de que está indicada con cero. En el caso del recurso $r2$ la asignación no se debe considerar las horas 4 y 5 que están marcadas con cero como disponibles. Análogamente para el recurso $r3$ en las horas 3 y 4.

4.1.2 Representación de la asignación a casos que requieren más de un slot de tiempo

Para representar esta condición utilizaremos las equivalencias entre las funciones lógicas y sus respectivas representaciones con variables binarias descritas en el Anexo I – Representación de Relaciones Lógicas Mediante Variables Binarias.

Cuando un caso puede ocupar más de un slot de tiempo la representación elegida especifica que todos los slots entre t y $t + T_{rd}$ deben ser marcados con cero si el slot t es asignado y no deben ser asignados a ningún otro caso.

Esta condición se puede expresar como :

$$\text{si } x_{rat} = 1 \text{ entonces } x_{rdz} = 0 \quad \forall z \in [t + 1, t + T_{rd}] \quad (4.6)$$

La relación anterior se puede expresar mediante la función lógica “implica” (\rightarrow):

$$x_{rdt} \rightarrow \neg(x_{rdz}) \forall z \in [t + 1, t + T_{rd}] \quad (4.7)$$

La que se puede expresar como :

$$x_{rdt} \rightarrow \neg(x_{rd(t+1)}) \text{ AND } \dots \dots \text{ AND } \neg(x_{rd(t+T_{rd})}) \quad (4.8)$$

Usando las generalizaciones de la Tabla 14- Equivalencias entre funciones lógicas y sus representaciones con funciones binarias (**Anexo I Representación de Relaciones Lógicas Mediante Variables Binarias**) podemos representar la función lógica como:

$$(T_{rd} - 1)x_{rdt} \leq (1 - x_{rd(t+1)}) + \dots + (1 - x_{rd(t+T_{rd})}) \quad (4.9)$$

Que es lo mismo que :

$$(T_{rd} - 1)x_{rdt} \leq \sum_{z=t+1}^{z=t+T_{rd}-1} (1 - x_{rdz}) \forall r \in R \forall d \in D \forall t \in [1..h_r] \quad (4.10)$$

4.1.3 Representación de las relaciones entre casos, clientes, severidades y tiempos de resolución de cada caso

Las relaciones entre los casos (demanda), clientes y severidades condicionan los tiempos máximos de resolución para cada caso.

Para representar las listas de clientes, lista de casos, lista de severidades posibles, el mapeo de casos a clientes y el mapeo de casos con sus severidades, se utilizarán vectores.

Para representar el tiempo máximo de resolución establecido con cada cliente según el nivel de severidad (SLA) se utilizará una matriz donde para cada par (cliente, nivel de severidad) se indica el tiempo máximo de resolución acordado en el contrato. Como el tiempo necesario para resolver un problema depende de cada recurso, se representa esta relación mediante una matriz en la que para cada par (recurso, problema) se obtiene el tiempo de resolución del problema específico por el recurso seleccionado. A continuación se detallan las representaciones elegidas:

Los clientes se representan mediante un vector K donde el elemento k_j representa al j -ésimo cliente.

$$K=(k_1, \dots, k_M) \quad (4.11)$$

$M \in \mathbb{N}$ máxima cantidad de clientes

k_j representa al j -ésimo cliente

$j \in [1..M]$

Los distintos niveles de severidad posibles se representan mediante un vector S donde cada elemento representa un nivel de severidad.

$$S=(s_1, \dots s_z) \quad (4.12)$$

$z \in \mathbb{N}$: máximo nivel de severidad

$s_m \in \mathbb{N}$

$m \in [1..z]$

El SLA es el acuerdo de nivel de servicio, donde se especifica para cada severidad el tiempo de respuesta según el contrato de cada cliente (cada cliente puede acordar distintos tiempos de respuesta según la severidad). Se representa mediante la matriz:

$$A : K \times S \quad (4.13)$$

A_{ks} : tiempo máximo de respuesta para un caso del cliente k y severidad s

$k \in K$

$s \in S$

La relación entre clientes y casos se representa mediante un vector U donde cada elemento u_p representa el cliente del caso d_p (proveniente de la demanda).

$$U=(u_1, \dots u_E) \quad (4.14)$$

$u_p \in K$

$p \in [1..E]$

La relación entre los casos y sus severidades se representan mediante un vector W donde cada elemento w_q representa la severidad del caso d_q de la demanda.

$$W=(w_1, \dots, w_E) \quad (4.15)$$

$w_q \in S$

$q \in [1..E]$

Los tiempos de resolución de cada caso dependen del recurso asignado.

Se representan como una matriz $T: R \times D$ donde:

T_{rd} representa el tiempo de resolución por parte de un recurso r del problema d .

$d \in D$

$r \in R$

4.1.4 Representación de los costos y la ganancia

Los valores de venta de cada hora de un recurso se representan mediante un vector V en el que v_r es el valor de venta de una hora del recurso r .

El costo de cada recurso se representa mediante un vector C en el que cada c_r representa el costo del recurso r .

La función objetivo entonces se puede expresar como la suma de los valores de venta de las horas asignadas menos la suma de costos de los recursos.

$$\max \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \quad (4.16)$$

4.1.5 Representación del cumplimiento de los SLAs

Una de las restricciones más importantes es la de cumplimiento del SLA. Informalmente se puede enunciar como : todos los casos de la demanda deben resolverse en un tiempo menor al SLA comprometido con el cliente respectivo.

El tiempo total de resolución del caso se cuenta como el tiempo t desde que se comienza a atender más el tiempo de resolución por parte del recurso asignado : T_{rd} .

$$x_{rdt} \cdot (t + T_{rd}) \leq A_{u_d w_d} \quad \forall d \in D \forall r \in R \forall t \in [1..h_r] \quad (4.17)$$

Donde la matriz A representa los tiempos máximos de respuesta según el cliente y nivel de severidad :

A_{ks} : tiempo máximo de respuesta para un caso del cliente k y severidad s
 $k \in K$
 $s \in S$

Los clientes y severidades de cada caso se obtienen de los vectores U y W descriptos previamente.

En este caso u_d representa el cliente del caso d (proveniente de la demanda) y w_d representa la severidad del caso d (de la demanda).

4.1.6 Representación de otras restricciones : cantidad de recursos acotados, satisfacción de la demanda, no superposición de casos y de recursos

Otra restricción importante que debe respetarse es la de recursos acotados. La cantidad de horas a asignar para cada recurso no puede superar la cantidad de horas disponibles del recurso.

Las misma se representa del siguiente modo:

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} T_{rd} \leq h_r \quad \forall r \in R \quad (4.18)$$

Satisfacción de la demanda : todos los casos deben tener un recurso asignado y un slot de tiempo inicial.

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} = 1 \quad \forall d \in D \quad (4.19)$$

Cada caso se asigna a un solo recurso y un solo slot inicial.

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} \leq 1 \quad \forall d \in D \quad (4.20)$$

En cada asignación (recurso, slot) puede haber a lo sumo 1 caso.

$$\sum_{d \in D} x_{rdt} \leq 1 \quad \forall r \in R, \forall t \in [1..h_r] \quad (4.21)$$

4.1.7 Positividad de la función objetivo

La ganancia debe ser positiva, ya que no esperamos asignaciones que nos causen pérdidas.

$$\left(\sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \right) \geq 0 \quad (4.22)$$

4.2 Modelo Matemático

En esta sección se presenta el modelo formal desarrollado en la Sección 4.1.

Parámetros del Modelo :

Recursos:

$$R = (r_1, \dots, r_N) \quad (4.23)$$

r_i representa a un recurso disponible (técnico)

$N \in \mathbb{N}$: cantidad de recursos

Costo de cada recurso:

$$C = (c_1, \dots, c_N) \quad (4.24)$$

c_i representa el costo del recurso i

$i \in [1..N]$

Valor de venta de cada recurso:

$$V = (v_1, \dots, v_N) \quad (4.25)$$

v_i : valor cobrado al cliente por cada unidad de tiempo del recurso asignado

$i \in [1..N]$

Disponibilidad de los recursos:

$$H = (h_1, \dots, h_N) \quad (4.26)$$

h_i representa la cantidad de horas disponibles del recurso i
 $i \in [1..N]$

Clientes:

$$K=(k_1, \dots, k_M) \quad (4.27)$$

k_j representa al j -ésimo cliente

$M \in \mathbb{N}$ máxima cantidad de clientes

k_j representa al j -ésimo cliente

$j \in [1..M]$

Niveles de Severidad:

$$S=(s_1, \dots, s_z) \quad (4.28)$$

s_i representa un nivel de severidad

$z \in \mathbb{N}$: máximo nivel de severidad

$s_m \in \mathbb{N}$

$m \in [1..z]$

SLA:

$$A : K \times S \quad (4.29)$$

A_{ks} : tiempo máximo de respuesta para un caso del cliente k y severidad s .

$k \in K$

$s \in S$

Demanda:

$$D = (d_1, \dots, d_E) \quad (4.30)$$

Cada d_c representa el identificador para cada caso que debe ser atendido.

$E \in \mathbb{N}$: máxima cantidad de casos

$c \in [1..E]$

Clientes de cada caso proveniente de la demanda:

$$U=(u_1, \dots, u_E) \quad (4.31)$$

u_p representa el cliente del caso d_p (proveniente de la demanda):

$u_p \in K$

$p \in [1..E]$

Severidad de cada caso:

$$W=(w_1, \dots, w_E) \quad (4.32)$$

w_q representa la severidad del caso d_q de la demanda

$w_q \in S$

$q \in [1..E]$

Tiempos de resolución:

$$T: R \times D \quad (4.33)$$

T_{rd} representa el tiempo de resolución por parte de un recurso r del problema d .

$d \in D$

$r \in R$

Variables de decisión:

$$x_{rdt} = \begin{cases} 1 & \text{si el recurso } r \text{ se asigna al caso } d \text{ comenzando a la hora } t \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.34)$$

$r \in R$

$d \in D$

$t \in [1..h_r] \forall r \in R$

Función Objetivo:

$$\max \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \quad (4.35)$$

s.a.

$$x_{rdt}(t + T_{rd}) \leq A_{udw_d} \quad \forall d \in D \forall r \in R \forall t \in [1..h_r] \quad (4.36)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} \leq 1 \quad \forall d \in D \quad (4.37)$$

$$\sum_{d \in D} x_{rdt} \leq 1 \quad \forall r \in R, \forall t \in [1..h_r] \quad (4.38)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} T_{rd} \leq h_r \quad \forall r \in R \quad (4.39)$$

$$x_{rdt}(T_{rd} - 1) \leq \sum_{z=t+1}^{z=t+T_{rd}-1} (1 - x_{rdz}) \quad \forall r \in R \forall d \in D \forall t \in [1..h_r] \quad (4.40)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} = 1 \quad \forall d \in D \quad (4.41)$$

$$\left(\sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \right) \geq 0 \quad (4.42)$$

$$x_{rdt} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \forall d \in D \forall t \in [1..h_r] \quad (4.43)$$

La función objetivo maximiza la ganancia. La ganancia es la diferencia entre el valor de venta de los recursos asignados y los costos de los recursos (asignados y no asignados). La variable x_{rdt} vale 1 solamente para el slot inicial. Para contabilizar adecuadamente la ganancia obtenida por las horas ocupadas se multiplica x_{rdt} por la duración de la tarea: T_{rdt} .

La restricción (4.36) indica que el tiempo de resolución de cada caso debe ser menor al tiempo especificado por el SLA para el cliente y la severidad del caso proveniente de la demanda. El tiempo empieza a correr desde la hora cero. El tiempo total de resolución del caso se cuenta como el tiempo t desde que se comienza a atender más el tiempo de resolución por parte del recurso asignado T_{rd} .

La restricción (4.37) significa que cada caso se asigna a un solo recurso y un solo slot inicial.

La restricción (4.38) significa que en cada asignación (recurso, slot) puede haber a lo sumo 1 caso.

La restricción (4.39) indica que la cantidad de horas a asignar para cada recurso no puede superar la cantidad de horas disponibles del recurso.

Como un caso puede ocupar más de un slot, todos los slots entre t y $t + T_{rd}$ deben estar ocupados si el slot t es asignado. Esto se expresa con la restricción (4.40). Todos los slots entre el primero y el fin de la tarea están ocupados si el primero se asigna a la tarea. Se elige que esos slots sean marcados con cero y que no se puedan marcar con 1 si son parte de una tarea que comenzó en un slot anterior.

La restricción (4.41) se refiere a la satisfacción de la demanda. Todos los casos deben tener un recurso asignado y un slot de tiempo inicial.

Finalmente, la restricción (4.42) significa que la ganancia debe ser mayor o igual que cero y (4.43) indica el dominio de las variables.

4.3 Complejidad

El problema TAWDP es NP-Hard. Para demostrar que el problema TAWDP es NP-Hard, demostraremos que el Problema General de Asignación (Generalized Assignment Problem o GAP en inglés) es un caso particular del problema TAWDP. Como el problema GAP es NP-Hard [25], entonces TAWDP es NP-Hard.

4.3.1 Descripción del Problema General de Asignación (GAP)

El problema de GAP busca optimizar la asignación de tareas a agentes. Existen varios agentes y varias tareas. Los agentes pueden ser, por ejemplo: máquinas que procesan tareas en una fábrica, personas que ejecutan tareas o procesadores que ejecutan procesos en una computadora. Se puede asignar cualquier agente para realizar cualquier tarea, lo que genera algunos costos y ganancias que pueden variar según la asignación de la tarea del agente. Cada agente o recurso tiene un presupuesto o un límite en su disponibilidad. La suma de los costos de las tareas que le son asignadas no puede superar este presupuesto o límite. Se requiere encontrar una asignación en la que todos los agentes no excedan su presupuesto y se maximice la ganancia total de la asignación.

4.3.2 Modelo matemático del Problema General de Asignación (GAP)

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \quad (4.44)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} \leq t_i \quad i = 1, \dots, m; \quad (4.45)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n; \quad (4.46)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n; \quad (4.47)$$

Donde :

x_{ij} vale 1 si el agente i se asigna a la tarea j , cero en caso contrario

p_{ij} es la ganancia que se obtiene si se asigna el agente i a la tarea j

w_{ij} es el costo de asignar el agente i a la tarea j

t_i es el presupuesto o límite del recurso i que no debe ser superado

4.3.3 Teorema: El problema TAWDP es NP-Hard

Teorema 3: El problema TAWDP es NP-Hard.

Demostración:

Para demostrar que el problema TAWDP es NP-Hard, demostraremos que el Problema General de Asignación [22](GAP) es un caso particular del problema TAWDP. Como el problema GAP es NP-Hard [25], entonces TAWDP es NP-Hard Tomaremos un caso particular de TAWDP en el que :

$$c_r = 0 \quad \forall r \in D \quad (4.48)$$

$$T_{rd} = 1 \quad \forall r \in R \quad (4.49)$$

$$h_r = 1 \quad \forall r \in R \quad (4.50)$$

$$v_r = 1 \quad \forall r \in R \quad (4.51)$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$v_r T_{rd} = p_{rd} \quad (4.52)$$

La función objetivo queda así :

$$\max \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^1 x_{rdt} p_{rd} - 0 \quad (4.53)$$

Lo que es lo mismo que:

$$\max \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} x_{rd} p_{rd} \quad (4.54)$$

De este modo llegamos a la función objetivo del GAP

Con respecto a las restricciones:

Si definimos la matriz A de modo que

$$A_{u_d w_d} = \infty \forall d \in D \quad (4.55)$$

La restricción (4.36) se cumple siempre:

$$x_{rdt}(t + T_{rd}) \leq A_{u_d w_d} \forall d \in D \forall r \in R \forall t \in [1..h_r] \quad (4.56)$$

La restricción (4.37) es:

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} \leq 1 \forall d \in D \quad (4.57)$$

Substituyendo en (4.37) a h_r y t por su valor : 1 queda:

$$\sum_{r \in R} x_{rd1} \leq 1 \forall d \in D \quad (4.58)$$

Tomando en cuenta la restricción (4.41), instanciando $h_r = 1$:

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} = 1 \forall d \in D \quad (4.59)$$

$$\sum_{r \in R} x_{rd1} = 1 \forall d \in D \quad (4.60)$$

Se llega a que la restricción (4.37) se cumple por cumplirse (4.41).

La restricción (4.38) es la siguiente:

$$\sum_{d \in D} x_{rdt} \leq 1 \forall r \in R, \forall t \in [1..h_r] \quad (4.61)$$

Substituyendo t y h_r por 1:

$$\sum_{d \in D} x_{rd1} \leq 1 \forall r \in R \quad (4.62)$$

Tomando en cuenta la restricción (4.39) e instanciando $h_r=1$ y $T_{rd}=1$

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} T_{rd} \leq h_r \forall r \in R \quad (4.63)$$

$$\sum_{d \in D} x_{rd1} \leq 1 \forall r \in R \quad (4.64)$$

llegamos a que (4.38) instanciada en $h_r=1$ y $T_{rd}=1$ se cumple por cumplirse (4.39).

La restricción (4.39) expresa que la cantidad de horas a asignar para cada recurso no puede superar la cantidad de horas disponibles del recurso.

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} T_{rd} \leq h_r \quad \forall r \in R \quad (4.65)$$

Quedaría :

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^1 x_{rdt} T_{rd} \leq h_r \quad \forall r \in R \quad (4.66)$$

O sea :

$$\sum_{d \in D} x_{rd1} T_{rd} \leq 1 \quad \forall r \in R \quad (4.67)$$

Entonces se cumple para cualquier t_i con $t_i \in Z^+$

$$\sum_{d \in D} x_{rd1} T_{rd} \leq 1 \leq t_i \quad \forall r \in R \quad (4.68)$$

En el problema de asignación generalizado (GAP) tenemos :

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} \leq t_i \quad (4.69)$$

Entonces la restricción (4.39) instanciada es la misma que la restricción de capacidad del GAP.

La restricción (4.40) expresa que en caso de que la duración de una tarea T_{rd} sea mayor que 1, el slot inicial se marca con 1 y los siguientes slots (entre $t+1$ y $t+T_{rd}-1$) se marcan con cero.

$$x_{rdt}(T_{rd} - 1) \leq \sum_{z=t+1}^{z=t+T_{rd}-1} (1 - x_{rdz}) \quad \forall r \in R \quad \forall d \in D \quad \forall t \in [1..h_r] \quad (4.70)$$

En esta instancia del problema la restricción (4.40) es vacía. Nunca se asigna más allá de la hora 1 ya que $T_{rd} = 1 \quad \forall r \in R, \forall d \in D$ y $h_r = 1 \quad \forall r \in R$.

Solamente se asigna la primera hora y nunca se asignan las horas siguientes.

Los slots mayores a 1 valen siempre cero.

La restricción (4.41) es la siguiente (satisfacción de la demanda):

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} = 1 \quad \forall d \in D \quad (4.71)$$

Substituyendo h_r por 1 quedaría :

$$\sum_{r \in R} \sum_{t=1}^1 x_{rdt} = 1 \quad \forall d \in D \quad (4.72)$$

Que es lo mismo que:

$$\sum_{r \in R} x_{rd1} = 1 \quad \forall d \in D \quad (4.73)$$

Esta restricción coincide con la restricción del GAP :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.74)$$

La restricción(4.42) :

$$\left(\sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \right) \geq 0 \quad (4.75)$$

Se cumple pues:

$$\left(\sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{h_r} x_{rdt} v_r T_{rd} - \sum_{r \in R} c_r \right) = \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^1 x_{rdt} v_r \cdot 1 - 0 \geq 0 \quad (4.76)$$

Hemos demostrado que es posible transformar el problema TAWDP en el problema de asignación generalizado: GAP. Como el problema GAP es NP-Hard entonces el problema TAWDP es NP-Hard.

4.4 Resolución en AMPL-Cplex

El modelo descrito en la Sección 4.2 se implementó en AMPL-Cplex y se evaluaron los tiempos de resolución. Considerando que el tamaño del problema depende de: la cantidad de casos, la cantidad de clientes y la cantidad de recursos, se generaron una serie de instancias del problema con diferentes cantidades de recursos, clientes y casos.

El código AMPL utilizado para implementar el modelo se encuentra en el Anexo II – Código AMPL del Modelo Matemático.

El código AMPL utilizado para generar los datos de prueba se encuentra en el Anexo III – Código AMPL utilizado para generar los valores aleatorios de prueba.

Los resultados numéricos se encuentran en el Anexo IV – Mediciones de tiempo de las pruebas realizadas.

4.4.1 Metodología para la generación de casos de prueba

El tamaño del problema depende fuertemente de las cardinalidades de los conjuntos: R (recursos), D (casos) y K (clientes). La matriz T utilizada para describir los tiempos de resolución de cada caso por cada uno de los recursos tiene tamaño: $|R| \times |D|$. Incrementos en las cantidades de recursos y de casos tienen un fuerte impacto en el tamaño de la matriz T y por lo tanto en el tamaño del problema.

Una vez elegidas las cantidades de recursos, clientes y casos (como forma de elegir el tamaño del problema), se generan en forma aleatoria las correspondencias de casos con los clientes (demanda y severidades) y los tiempos de resolución de los distintos casos por parte de los recursos (matriz T). Los valores de costos y ganancia correspondientes a cada recurso también se generan en forma aleatoria con una distribución uniforme. Para las pruebas realizadas se fijó la disponibilidad de cada recurso en 8 horas (jornada laboral completa) y se fijaron 4 niveles de severidad para los casos con tiempos de respuesta según se detalla en la Tabla 4:

| Severidad | Tiempo de respuesta (horas) |
|-----------|-----------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 6 |

Tabla 4 - Tiempos de respuesta para los casos de prueba

Las severidades de cada caso también se generan de manera aleatoria siguiendo una distribución uniforme.

Inicialmente se midieron tiempos para distintos tamaños del problema, considerando en las primeras pruebas cantidades iguales de recursos, casos y clientes. Utilizando iguales cantidades de recursos y de casos tendríamos más posibilidades de encontrar soluciones factibles en cada prueba que en situaciones en las que no existe un balance razonable (por ejemplo, muchos más casos que recursos). La idea de estas pruebas iniciales fue hacer un sondeo de los tiempos de resolución para distintas escalas. Los tamaños iniciales fueron elegidos tratando de representar realidades de empresas de tamaños pequeño, mediano y grande para la realidad de nuestro medio. Las pruebas iniciales se realizaron con cantidades de recursos de 10, 50 y 100. Habiendo obtenido tiempos buenos (del orden algunos segundos para el tamaño de 100 casos x 100 recursos x 100 clientes) se decidió ir incrementando gradualmente el tamaño del problema y analizar los tiempos de respuesta, buscando el punto donde Cplex no fuera capaz de encontrar una solución exacta y finalizara por expiración del tiempo, devolviendo una solución aproximada. Finalmente, se optó por medir los tiempos para las para las siguientes combinaciones de valores:

Clientes : entre 100 y 900 clientes con intervalos de 100

Casos : entre 100 y 900 casos con intervalos de 100

Recursos : entre 100 y 900 recursos con intervalos de 100

Se generaron 729 casos cubriendo las distintas combinaciones de tamaños en $|R| \times |D| \times |K|$

Como medida de tiempo se tomaron los tiempos de resolución del solver, sin considerar el tiempo utilizado por la fase de presolve de AMPL.

Seudocódigo :

```
MaxTamañoProblema:= 1000 # Cota superior para cantClientes
                        # cantRecursos y cantCasos
Intervalo := 100        # Intervalo entre las muestras

For cantClientes in 0..MaxTamañoProblema step Intervalo
{
  For cantRecursos in 0..MaxTamañoProblema step Intervalo
  {
    For cantCasos in 0..MaxTamañoProblema step Intervalo
    {
      generarParametros(cantClientes,cantRecursos, cantCasos)
      solve
      leerTiempoDelSolver
      guardarResultadosEnArchivo
    }
  }
}
```

4.4.2 Resultados Computacionales

Las pruebas se ejecutaron sobre un servidor con las siguientes características :

Arquitectura: x86_64
CPU(s): 16
Thread(s) por core: 2
Core(s) per socket: 8
Modelo de Procesador: Intel(R) Core(TM) i9-9900K CPU @ 3.60GHz
CPU MHz: 3.600.000
Memoria RAM : 64 G

Versión de Cplex : AMPL/CPLEX 20.1.0.0

Para el análisis de las series de datos se utilizó la herramienta Jupyter Notebooks [43] y las librerías de Python: Pandas y Matplotlib [44].

Problemas encontrados en la ejecución de las pruebas:

Inicialmente se corrieron las series de pruebas utilizando el lenguaje AMPL para generar instancias del problema con las distintas cantidades de clientes, casos y recursos. Para problemas de tamaños próximos a los 1000 clientes x 1000 casos x 1000 recursos se encontraron interrupciones en las corridas con errores del tipo : `can't open /tmp/at651049.sol`.

Investigando el error se encontró que la causa es que Cplex se interrumpe antes de finalizar, no genera el archivo con la solución (archivo .sol) y por lo tanto AMPL no logra leerlo. Analizando la memoria disponible en el servidor (física y swap) durante las corridas se puede atribuir el problema a falta de recursos por parte del proceso Cplex para ciertas instancias del problema. Cada vez que se cortaba la corrida de una de las instancias, se cortaba la serie (abortaba la ejecución del FOR).

Como alternativa se optó por realizar las mismas pruebas implementadas en Python, empleando la librería *amplpy* [45]. Python tiene la ventaja de contar con un manejador de excepciones. A diferencia de la implementación en AMPL, en la implementación realizada en Python se instancia el objeto AMPL en cada iteración y se destruye al final de cada corrida, liberando recursos. En AMPL se cargaba el modelo una vez y se iban generando y leyendo distintas instancias del archivo de parámetros. Con la implementación hecha en Python se logró un menor uso de recursos y poder completar todos los ciclos hasta 900 clientes x 900 casos x 900 recursos de manera exitosa. Para tamaños mayores a 1000 casos, recursos y clientes las pruebas se vieron interrumpidas por falta de recursos del servidor, usualmente memoria. A efectos de poder completar una grilla de muestras recorriendo todos los rangos de valores de clientes, casos y recursos, se optó por tomar el valor 900 como tamaño máximo, valor suficientemente grande y representativo de las realidades que intentamos modelar. En todos los casos que Cplex completó su ejecución se llegó a un resultado exacto o devolvió la respuesta que la solución no era factible. No se encontraron casos en los que CPLEX no logre una solución exacta y devuelva una solución aproximada por expiración de tiempo.

4.4.2.1 Estadísticas

El tiempo mínimo de resolución fue de 0,18 segundos y el tiempo máximo de resolución fue de 3571 segs. El 90% de los tiempos estuvo por debajo de los 77,60 segundos. El 10% de las muestras varía entre 77,60 segundos y 3571 segundos.

| | Cardinalidad K | Cardinalidad R | Cardinalidad D | Cantidad de Restricciones | Cantidad de Variables | Tiempo (segs) |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------|-----------------------|---------------|
| Cantidad de Muestras | 729 | 729 | 729 | 7.290000e+02 | 7.290000e+02 | 729 |
| Promedio | 500 | 500 | 500. | 3.130073e+06 | 2.000000e+06 | 115.03 |
| Desviación Estándar | 258.37 | 258.37 | 258.37 | 2.433183e+06 | 1.555988e+06 | 453.38 |
| Minimo | 100 | 100 | 100 | 1.257380e+05 | 8.000000e+04 | 0.18 |
| Percentil 30% | 300 | 300 | 300. | 1.254462e+06 | 8.000000e+05 | 3.32 |
| Percentil 50% | 500 | 500 | 500 | 2.503907e+06 | 1.600000e+06 | 9.58 |
| Percentil 60% | 600 | 600 | 600 | 3.129770e+06 | 2.000000e+06 | 14.87 |
| Percentil 80% | 800 | 800 | 800 | 5.255810e+06 | 3.360000e+06 | 37.07 |
| Percentil 90% | 900 | 900 | 900 | 6.759334e+06 | 4.320000e+06 | 77.60 |
| Máximo | 900 | 900 | 900 | 1.013560e+07 | 6.480000e+06 | 3571.48 |

Tabla 5 - Estadísticas de las pruebas realizadas

4.4.2.2 Tiempos de Resolución

En las siguientes subsecciones se muestran la evolución de los tiempos de resolución en función de las variables: cantidad de recursos, cantidad de casos y cantidad de clientes.

Se presentan los tiempos en función de las siguientes combinaciones:

- Recursos x Casos,
- Recursos x Clientes
- Casos x Clientes.

Al tener que representar el tiempo en función de 3 variables, lo que veremos son varias lecturas de la tercera variable que se ven apiladas en cada punto. Por ejemplo, en la gráfica de la Figura 11, para cada par (recurso, caso) tendremos varios puntos que corresponden a valores distintos del tiempo para cantidades de clientes distintas en cada par (recurso, caso).

Posteriormente se presentan las gráficas correspondientes a las capas en que una de las tres variables (la que no es parte de los ejes de la gráfica) se mantiene constante. Por ejemplo, tiempo de resolución en función de recursos y casos manteniendo la cantidad de clientes constante.

Se presentan además un corte en que las 3 variables son iguales.

Finalmente se hace una separación entre las muestras que tuvieron soluciones factibles y las que no tuvieron soluciones factibles. El objetivo en esos casos es comprobar si el tiempo de resolución es menor debido a que la condición de no factibilidad es detectada en fases tempranas.

4.4.2.3 Histograma de los Tiempos de Resolución

En la Figura 10 se puede observar que la gran mayoría de los tiempos se sitúan por debajo de los 500 segundos.

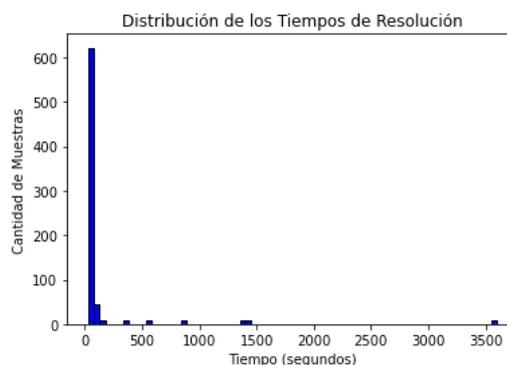


Figura 10 - Histograma de los tiempos de resolución en Cplex

4.4.2.4 Mayores Tiempos de Resolución

En la Tabla 6 se presentan los 50 tiempos más altos.

Se puede observar la fuerte correlación con la cantidad de casos (cardinalidad D) y luego con la cantidad de recursos (Cardinalidad R).

| Cardinalidad K | Cardinalidad R | Cardinalidad D | Tiempo (segundos) |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|
| 600 | 400 | 900 | 3571,48 |
| 900 | 400 | 900 | 3568,11 |
| 700 | 400 | 900 | 3567,91 |
| 500 | 400 | 900 | 3566,91 |
| 400 | 400 | 900 | 3565,97 |
| 200 | 400 | 900 | 3565,88 |
| 300 | 400 | 900 | 3564,85 |
| 800 | 400 | 900 | 3562,14 |
| 100 | 400 | 900 | 3557,84 |
| 500 | 300 | 800 | 1406,53 |
| 300 | 300 | 800 | 1405,52 |
| 400 | 300 | 800 | 1404,79 |
| 100 | 300 | 800 | 1403,50 |
| 800 | 300 | 800 | 1402,51 |
| 600 | 300 | 800 | 1400,78 |
| 200 | 300 | 800 | 1399,30 |
| 900 | 300 | 800 | 1396,25 |
| 700 | 300 | 800 | 1393,74 |
| 800 | 300 | 700 | 1368,21 |
| 700 | 300 | 700 | 1365,35 |
| 400 | 300 | 700 | 1365,22 |
| 200 | 300 | 700 | 1364,33 |
| 300 | 300 | 700 | 1361,40 |
| 600 | 300 | 700 | 1360,94 |
| 500 | 300 | 700 | 1360,05 |
| 100 | 300 | 700 | 1359,93 |
| 900 | 300 | 700 | 1358,47 |
| 200 | 200 | 700 | 838,19 |
| 400 | 200 | 700 | 838,05 |
| 800 | 200 | 700 | 837,14 |
| 900 | 200 | 700 | 836,75 |

| | | | |
|-----|-----|-----|--------|
| 500 | 200 | 700 | 836,69 |
| 100 | 200 | 700 | 836,60 |
| 600 | 200 | 700 | 836,05 |
| 300 | 200 | 700 | 835,91 |
| 700 | 200 | 700 | 835,49 |
| 500 | 200 | 500 | 541,06 |
| 800 | 200 | 500 | 539,39 |
| 200 | 200 | 500 | 539,27 |
| 400 | 200 | 500 | 538,22 |
| 100 | 200 | 500 | 538,16 |
| 600 | 200 | 500 | 537,97 |
| 900 | 200 | 500 | 537,14 |
| 300 | 200 | 500 | 536,83 |
| 700 | 200 | 500 | 536,32 |
| 200 | 300 | 900 | 338,83 |
| 400 | 300 | 900 | 338,61 |
| 600 | 300 | 900 | 338,30 |

Tabla 6 - Listado de los tiempos de resolución más altos

4.4.2.5 Correlación del Tiempo con Clientes (K) , Casos (D) y Recursos (R)

Vemos que, si bien los valores de correlación no indican una correlación fuerte, la correlación más alta del tiempo es respecto a los valores de Cardinalidad D (Casos) seguido (en valor absoluto) de los valores de Cardinalidad R (Recursos).

| | |
|----------------|-----------|
| Cardinalidad K | 0,000004 |
| Cardinalidad R | -0,127442 |
| Cardinalidad D | 0,282531 |

Tabla 7 - Correlación de los tiempos de resolución y los tamaños de los datos del problema

4.4.2.6 Tiempos de resolución en Función de Recursos y de Casos

Para cada punto de la grilla recursos x casos existen varios puntos que corresponden a las mediciones hechas con distintas cantidades de clientes para una misma combinación de recursos y casos.

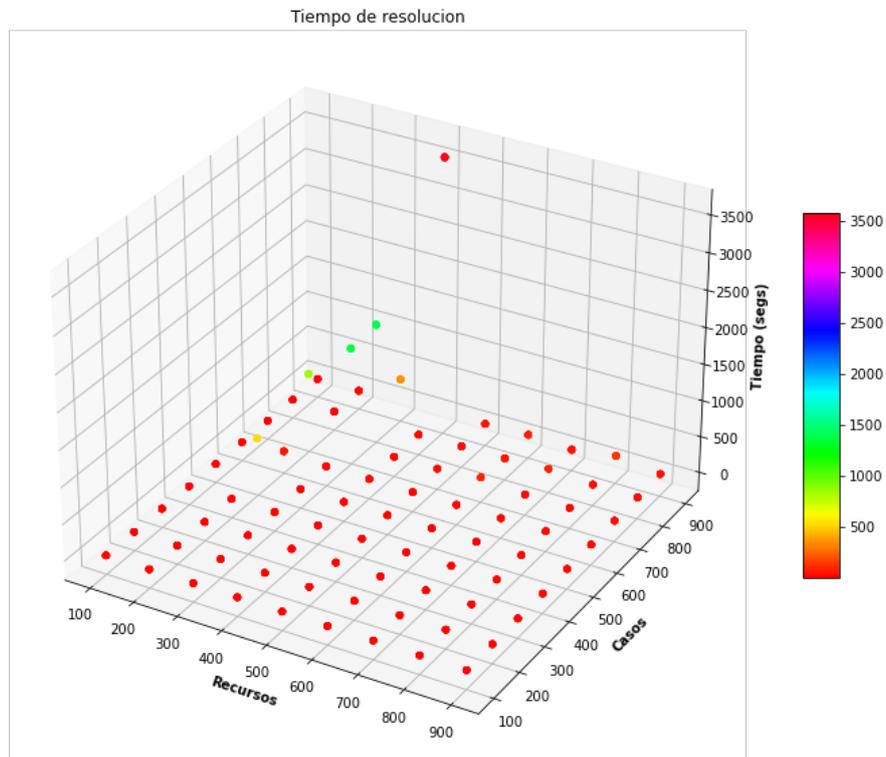


Figura 11 - Tiempos de Resolución en función de Recursos y Casos

Debido a las diferencias de escala los valores de tiempos más bajos se ven como si fueran todos iguales sobre el plano Recursos x Casos. Para ilustrar de mejor forma las variaciones de tiempos elegimos realizar una gráfica sobre el percentil 90 de los tiempos.

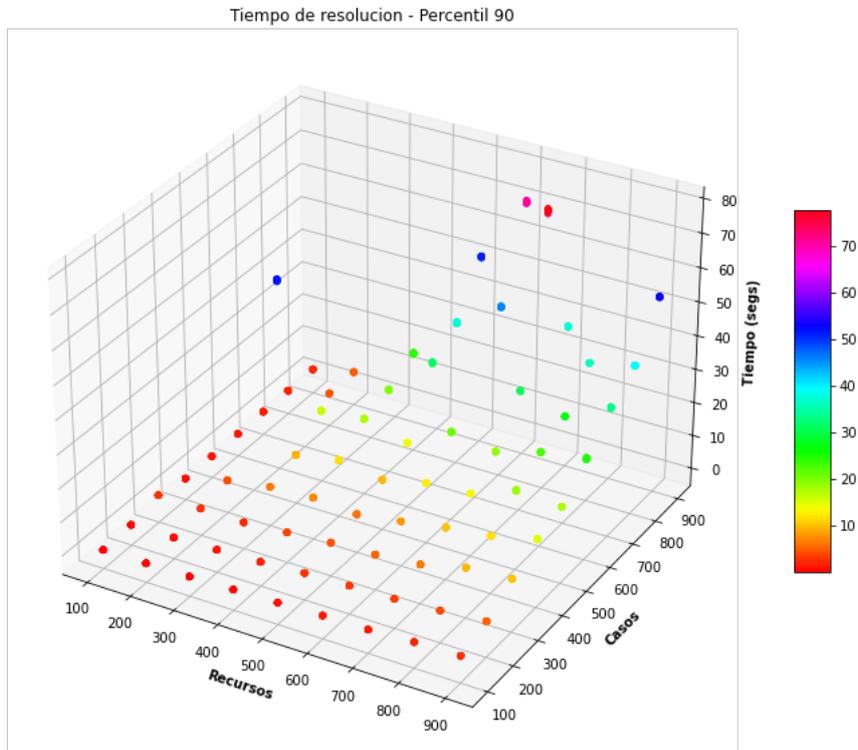


Figura 12 - Tiempos de Resolución - Percentil 90

En las Figuras: 13, 14 y 15 se presentan los tiempos de resolución en función de las cantidades de recursos y cantidad de casos tomando la cantidad de clientes fija. Se presentan las muestras para las cantidades de clientes: 100, 500 y 900.

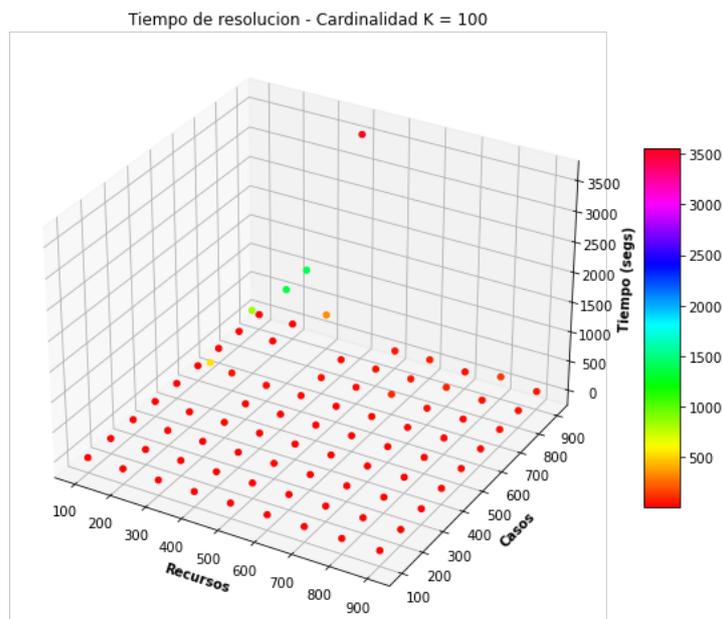


Figura 13 - Tiempos de Resolución. Clientes : 100

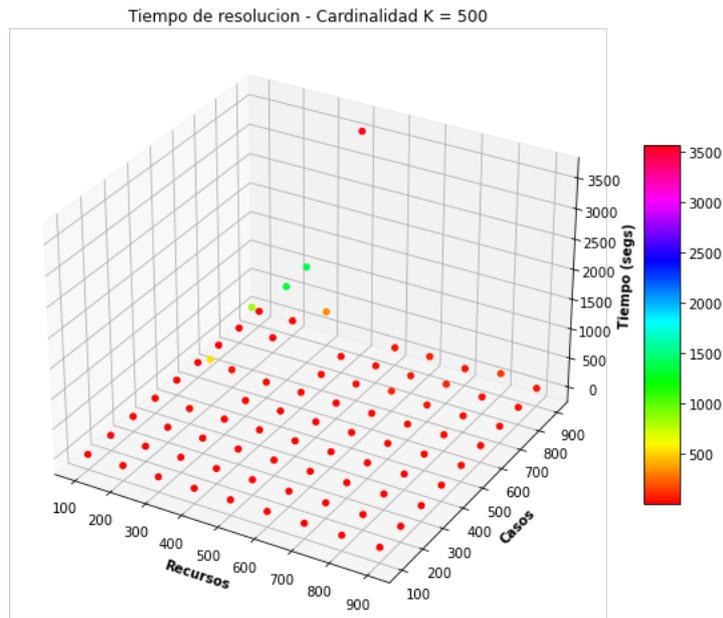


Figura 14 - Tiempos de Resolución Clientes 500

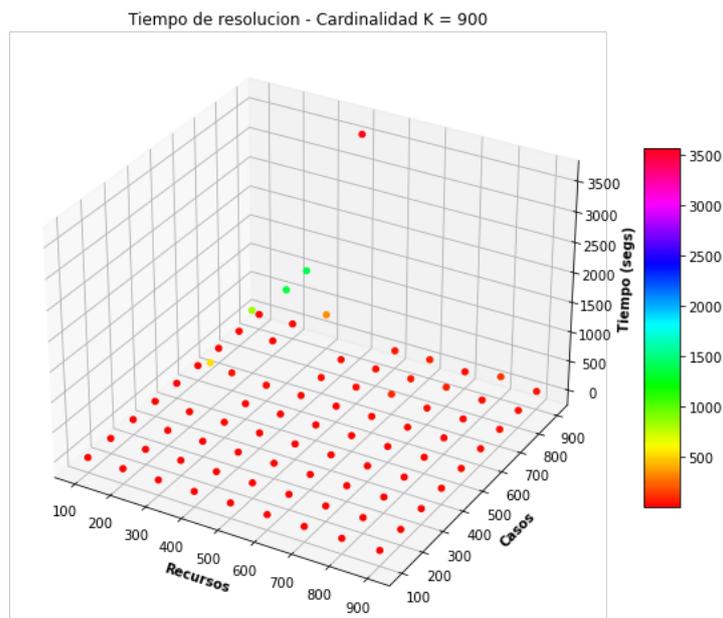


Figura 15 - Tiempos de Resolución Clientes: 900

Del mismo modo que en el caso anterior la escala de los valores hace que no se aprecie el crecimiento para los valores más bajos. Para ilustrar mejor la evolución de los tiempos de resolución generamos las mismas gráficas considerando las muestras de tiempo dentro del percentil 90.

4.4.2.7 Tiempos de Resolución en Función de la Cantidad de Recursos y de Casos – Percentil 90

Al variar la cardinalidad de K vemos que los valores de los tiempos de resolución no se modifican substancialmente.

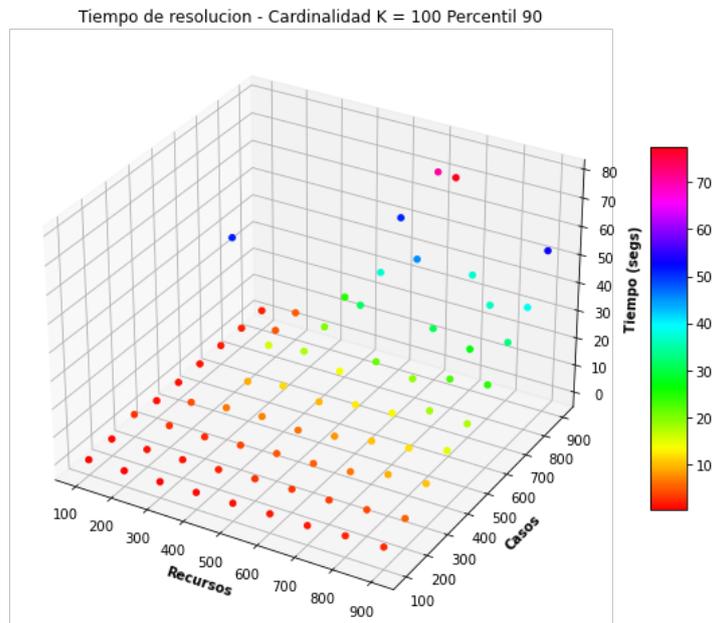


Figura 16 - Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 100

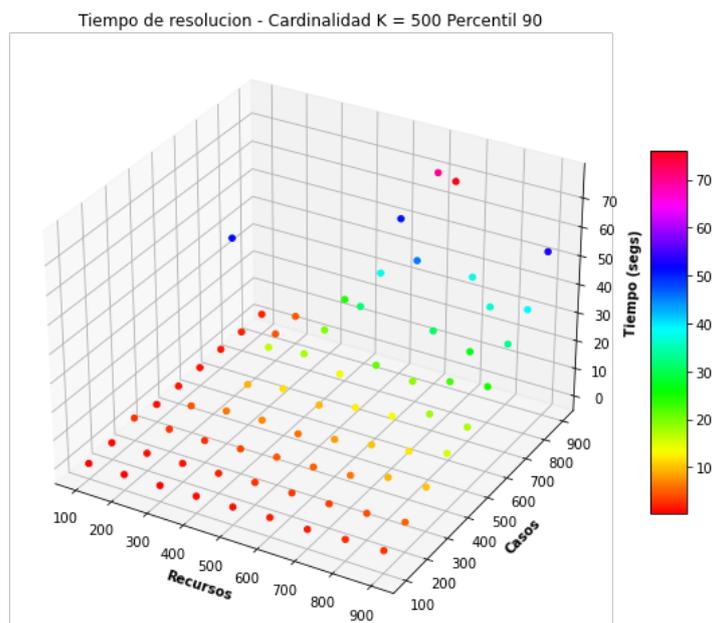


Figura 17 - Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 500

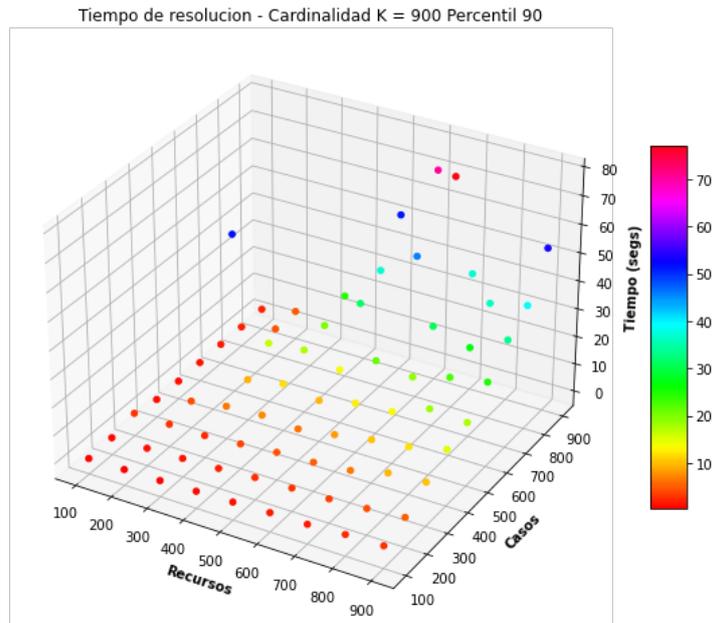


Figura 18 -Tiempos de Resolución - Percentil 90, clientes : 900

4.4.2.8 Tiempos de resolución en función de la cantidad de recursos manteniendo constante la cantidad de clientes para distintos valores de la demanda

En esta sección se presentan los valores de los tiempos de resolución manteniendo el valor de la cantidad de clientes constante y graficando el tiempo de resolución en función de la cantidad de recursos para varios valores de D (cantidad de casos).

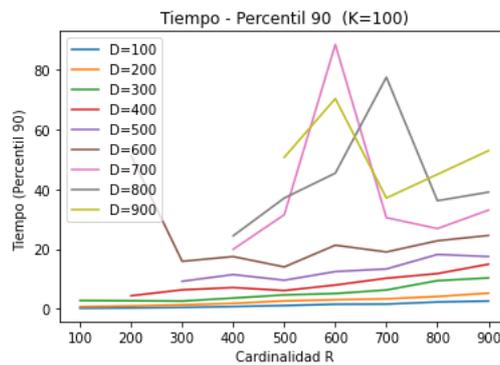


Figura 19 - Tiempos de resolución en función de la cardinalidad de R manteniendo constante K en 100 para distintos valores de D

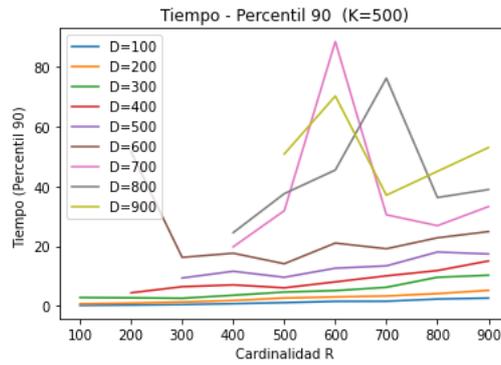


Figura 20 – Tiempos de Resolución en Función de la cardinalidad de R manteniendo constante K en 500 para distintos valores de D

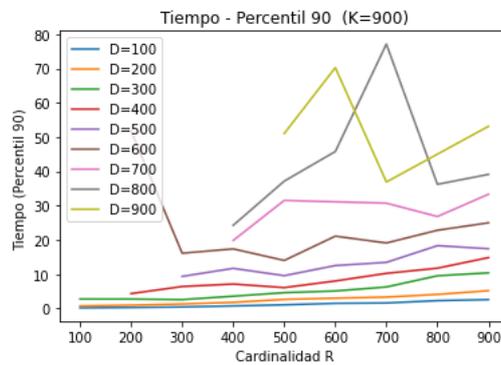


Figura 21 - Tiempos de Resolución en Función de la Cardinalidad de R manteniendo constante K en 900 para distintos valores de D

Los tiempos de resolución para los valores más bajos de la cardinalidad de D (cantidad de casos) muestran un crecimiento uniforme. A partir de los valores de cardinalidad de D mayores a 500 se observan las variaciones más importantes. Por otro lado vemos que el valor de K (cantidad de clientes) no tienen mayor efecto sobre los tiempos (las tres gráficas se ven similares).

Los mayores incrementos se observan para valores altos de Cardinalidad R (cantidad de recursos) y Cardinalidad D (cantidad de casos).

4.4.2.9 Superficies de Nivel

Las Figuras 22, 23 y 24 representan los tiempos de resolución en función de las cantidades de recursos y de casos, manteniendo constante la cantidad de clientes. Se presentan los resultados para las cantidades de clientes: 100, 500, 900.

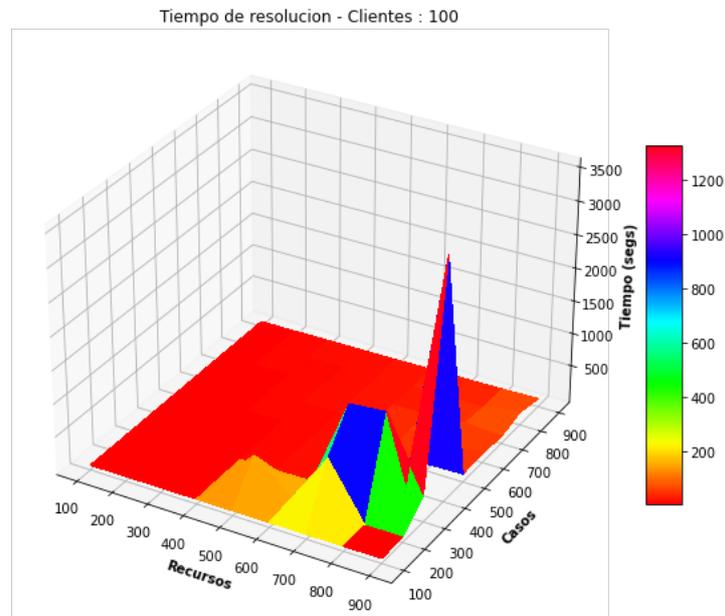


Figura 22 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 100 clientes

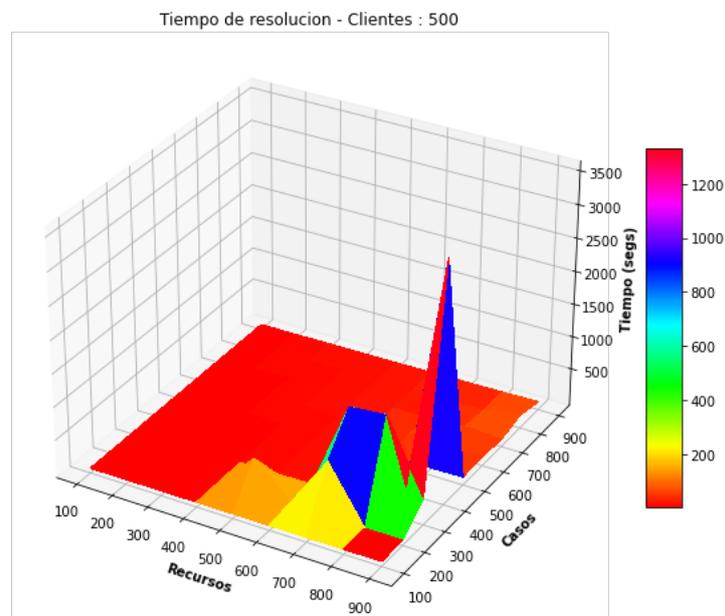


Figura 23 -Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 500 clientes

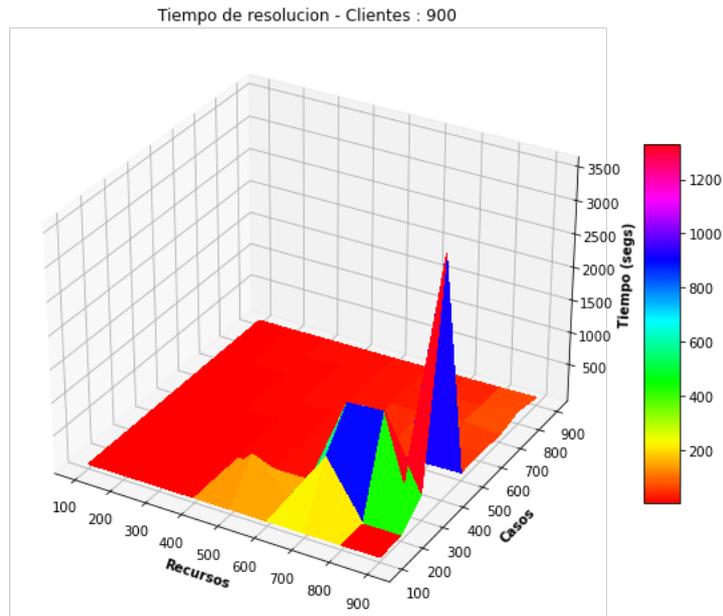


Figura 24 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 900 clientes

De manera similar a lo visto en los casos anteriores, la escala de los valores hace poco visible el crecimiento en los valores menores. A continuación se presentan las gráficas considerando el percentil 90 de los valores de los tiempos.

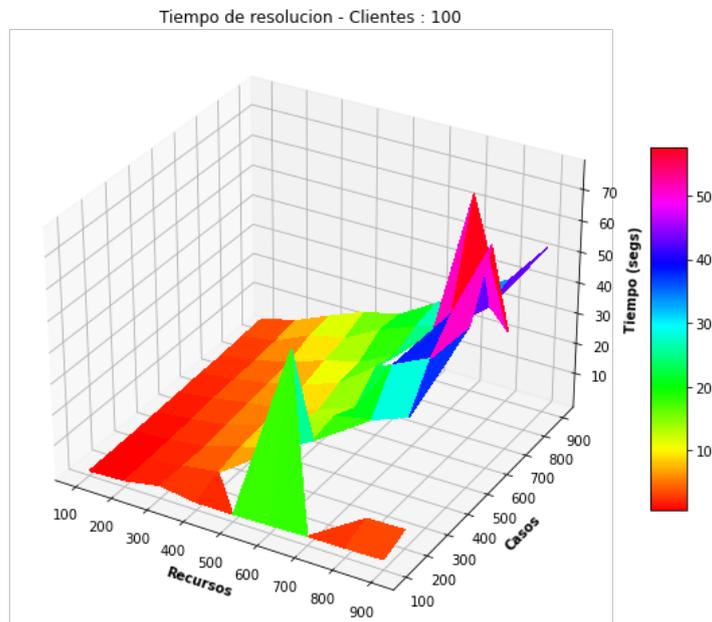


Figura 25 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 100 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra

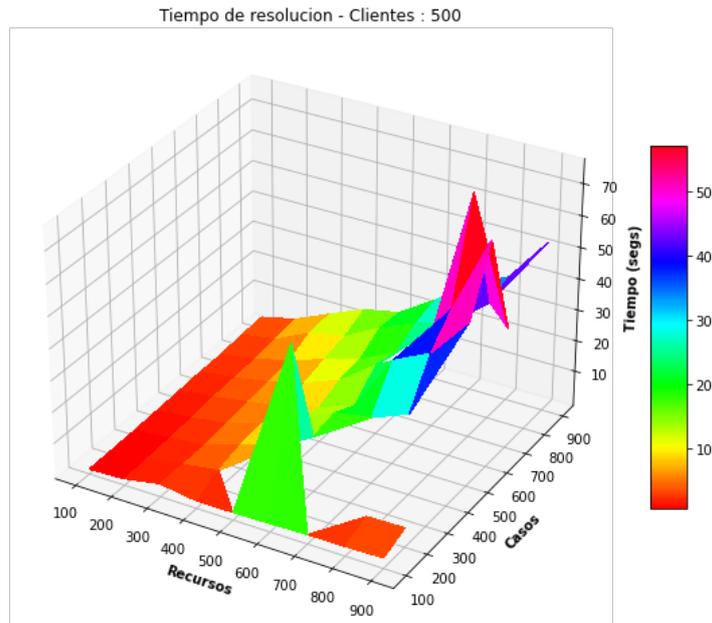


Figura 26 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 500 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra

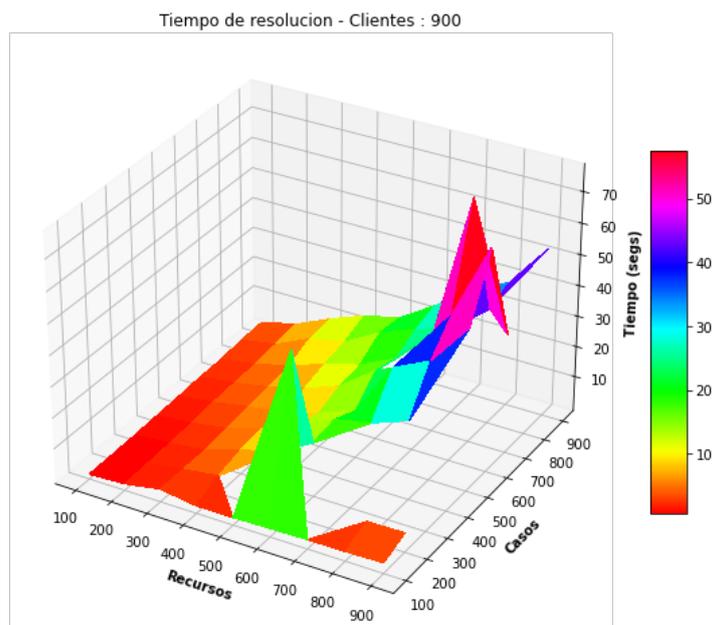


Figura 27 - Superficie de Nivel representando el tiempo en función de los recursos y casos para 900 clientes considerando el percentil 90 sobre los tiempos de la muestra

El crecimiento más significativo se produce sobre los bordes de los ejes de recursos y casos, próximos a los valores más altos de cada eje. Se observa que las gráficas generadas para distintos valores de la cardinalidad de K son muy similares a pesar de la diferencia en la cantidad de clientes en cada caso. Esa similitud la podemos observar también en la gráfica de puntos donde se pueden observar apilados los tiempos para cada par (recursos, casos).

La diferencia de tiempos entre una cantidad baja de clientes y una cantidad alta de clientes para una misma combinación de recursos y casos es muy pequeña en proporción a las diferencias de tiempos causadas por incrementos en cantidad de

casos y cantidad de recursos. En la subsección 4.4.2.10 se presenta el análisis numérico de lo expresado anteriormente.

4.4.2.10 Análisis de la variación de tiempo de resolución para las distintas cantidades de clientes

Para cada una de las combinaciones (casos, recursos) se calculó la diferencia entre el mayor y el menor tiempo de las distintas cantidades de clientes. En la Tabla 8 se muestran los resultados obtenidos:

| | |
|---|-----------|
| Promedio de las diferencias (segundos) | 0.809125 |
| Desviación Estándar | 2.356874 |
| Diferencia Mínima (segundos) | 0.011688 |
| Percentil 50 (segundos) | 0.149943 |
| Percentil 90 (segundos) | 1.520079 |
| Máxima Diferencia (segundos) | 13.644884 |

Tabla 8 - Diferencias de tiempos para los distintas cantidades de clientes sobre toda la muestra

El 90% de las diferencias entre el mayor y el menor tiempo sobre una combinación de (recursos, clientes) estuvo por debajo de 1,52 segundos.

4.4.2.11 Cortes de los resultados tomando solamente muestras en que $R = D = K$

En las Figuras 28, 29 y 30 se muestran la evolución de los tiempos de resolución para los casos en que la cantidad de recursos es igual a la cantidad de casos, manteniendo fija la cantidad de clientes. Se presentan tres ejemplos: 100, 500 y 900 clientes respectivamente. Se puede observar el crecimiento similar a una función exponencial y que la cantidad de clientes no tiene mayor influencia en los tiempos. Las curvas para los tres valores distintos de clientes son similares.

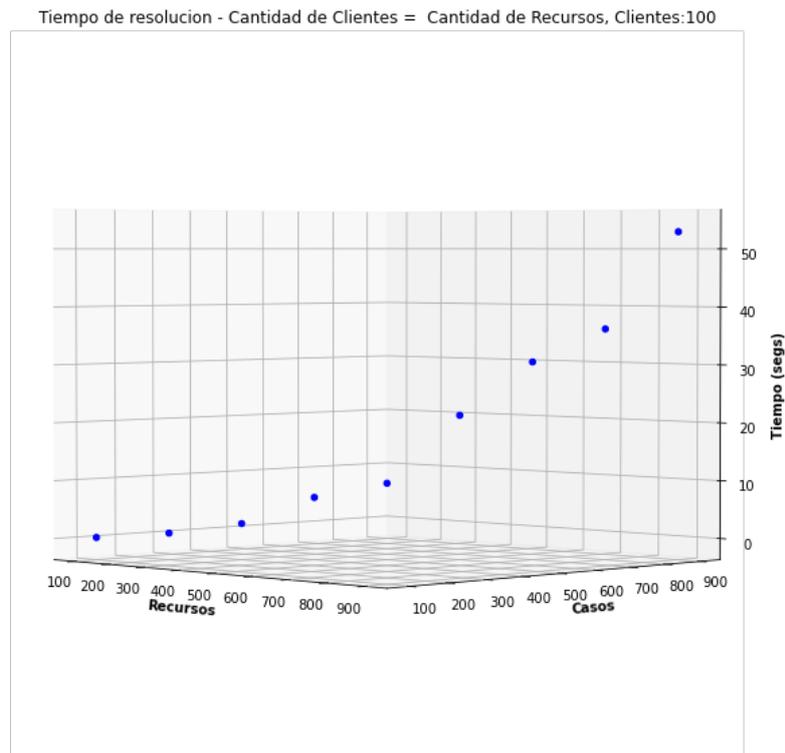


Figura 28 - Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 100 clientes

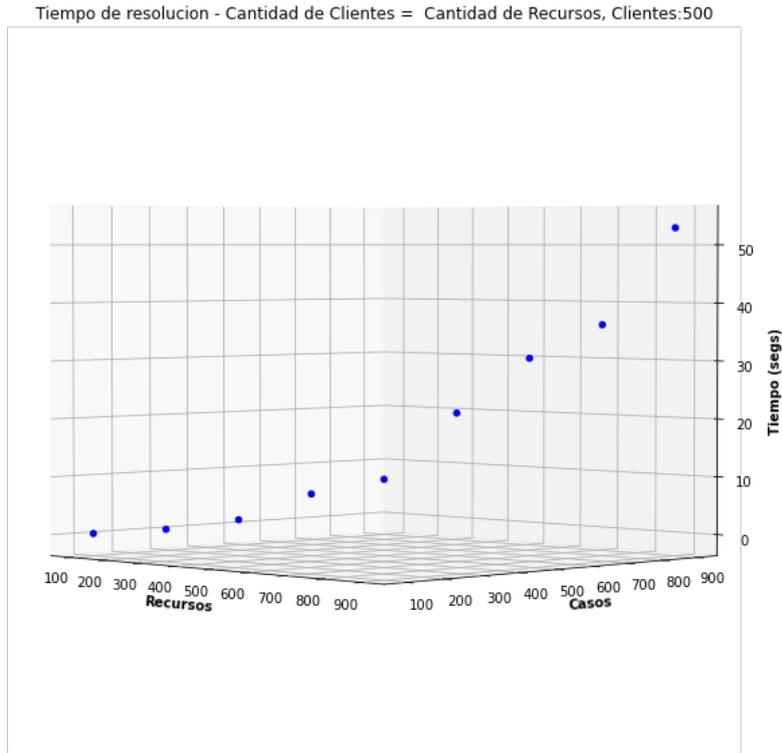


Figura 29 - Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 500 clientes

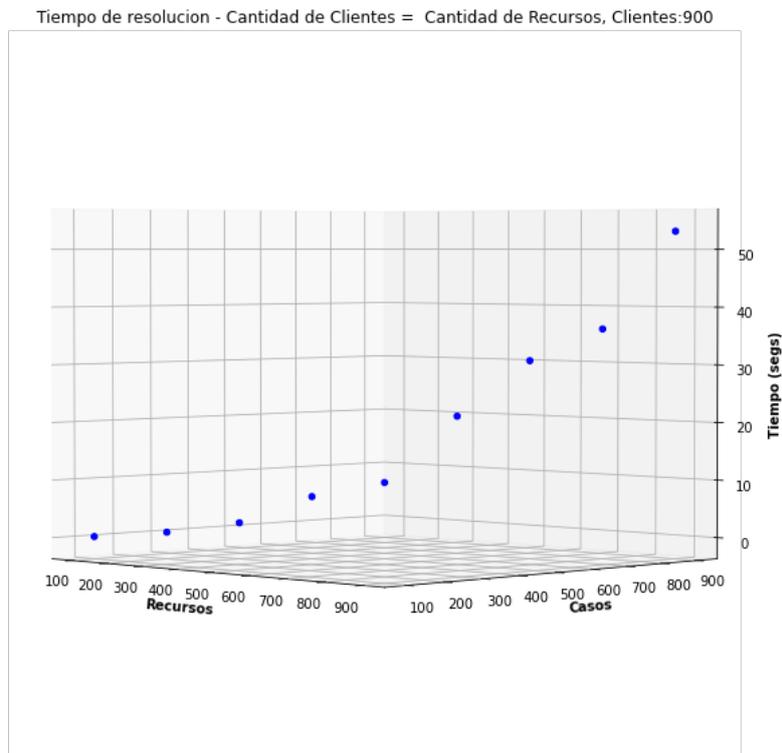


Figura 30 - Tiempos de resolución tomando igual cantidad de clientes, recursos y casos para 900 clientes

4.4.2.12 Tiempos de Resolución en Función de Recursos y Clientes

En esta sección se presentan los tiempos de resolución en función de recursos y clientes, manteniendo fija la cantidad de casos.

Se puede observar que a medida que la cantidad de casos crece los valores de los tiempos de resolución en las distintas gráficas crecen considerablemente (con un máximo de 2,5 segundos en el caso de 100 casos hasta un máximo de 3500 segundos en la gráfica donde la cardinalidad es de 900).

Los valores de los tiempos de resolución varían muy poco a lo largo del eje de la cantidad de clientes y las diferencias de tiempos no son visibles por razones de escala).

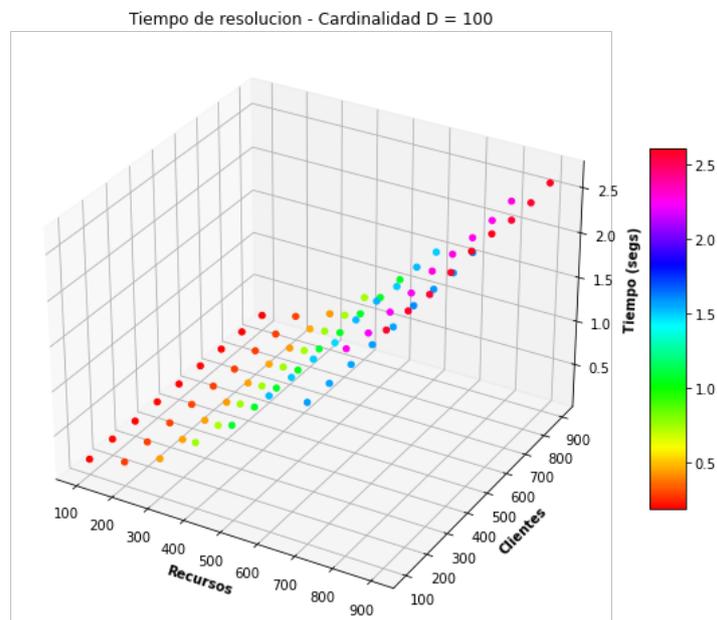


Figura 31 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 100 casos

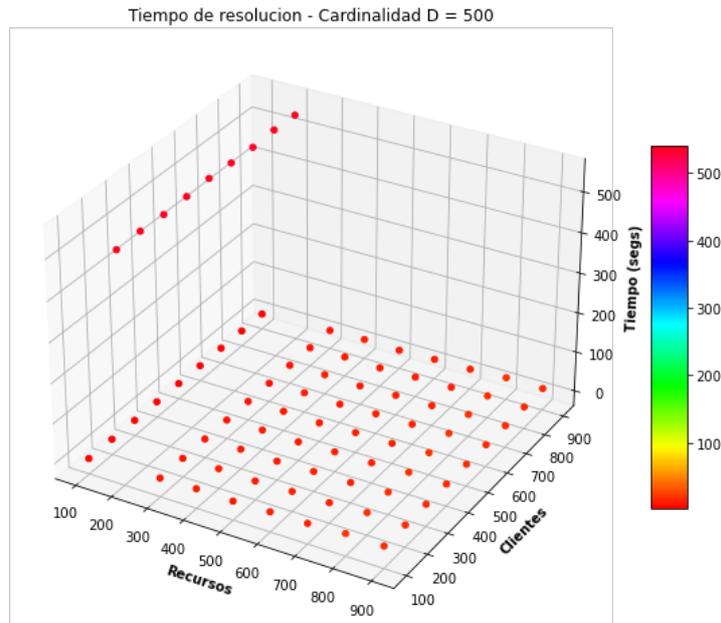


Figura 32 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 500 casos

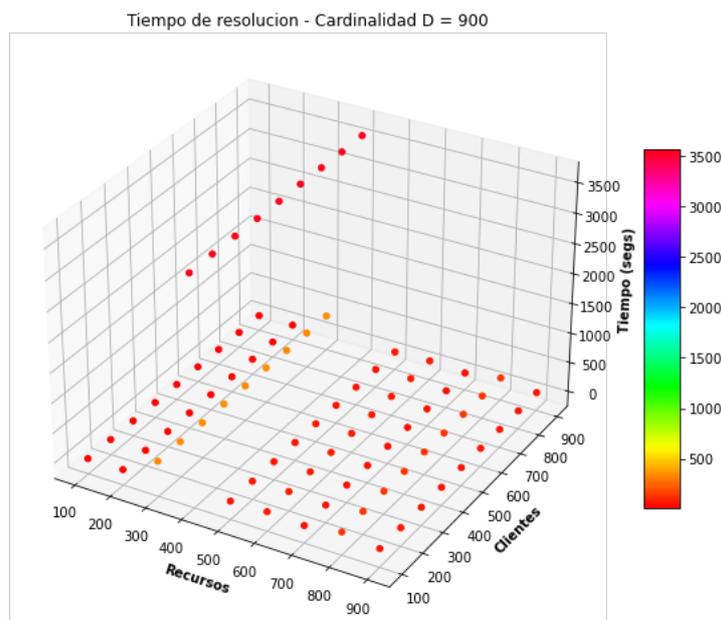


Figura 33 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 900 casos

4.4.2.13 *Tiempos de Resolución en Función de Recursos y Clientes – Percentil 90*

La idea de tomar el percentil 90 sobre los valores de los tiempos es poder visualizar mejor el crecimiento de la mayoría de las muestras sin que las diferencias de escala oculten el crecimiento de los valores menores. En la Sección 4.4.2.12 muchos de los valores quedaron sobre el piso de la gráfica, lo que podría llevar a una interpretación de que esos valores son iguales o que no presentan variaciones

importantes. Esas diferencias se hacen más notorias para los valores más altos de la cardinalidad de D (cantidad de casos).

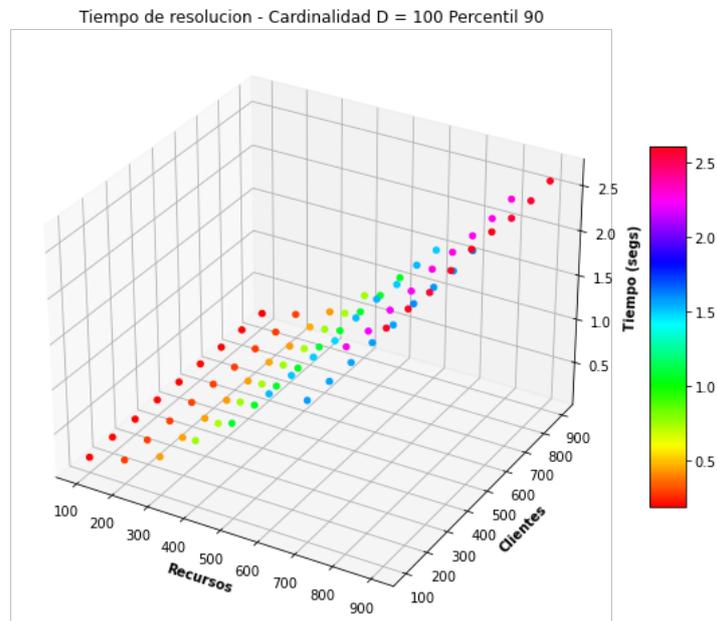


Figura 34 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 100 casos tomando el percentil 90 de las muestras

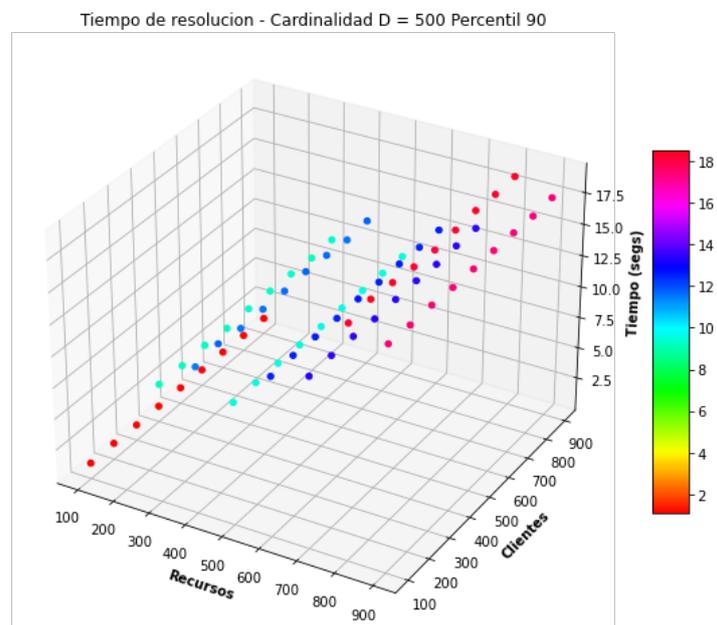


Figura 35 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 500 casos tomando el percentil 90 de las muestras

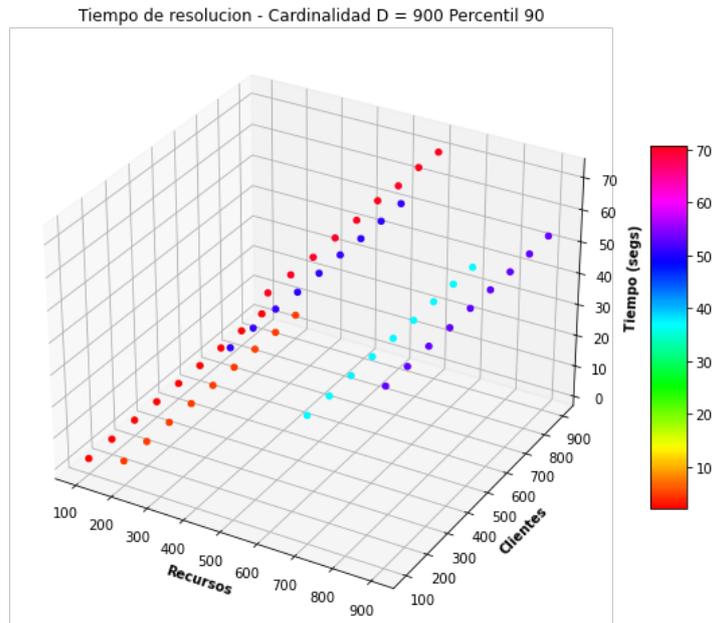


Figura 36 - Tiempos de resolución en función de recursos y clientes para 900 casos tomando el percentil 90 de las muestras

4.4.2.14 *Tiempos de Resolución en Función de Casos y Clientes*

En esta sección se presenta la evolución de los tiempos de resolución en función de las cantidades de casos y de clientes, manteniendo fija la cantidad de recursos (cardinalidad de R).

Se observa que la cantidad de clientes tiene un efecto imperceptible sobre los tiempos de resolución, mientras que el incremento en la cantidad de recursos tiene un impacto importante. En la primera gráfica (Cardinalidad de R = 100) vemos tiempos máximos de aproximadamente 2,5 segundos mientras que en la gráfica correspondiente a Cardinalidad de R = 900 los tiempos máximos se sitúan alrededor de los 50 segundos.

El crecimiento de los tiempos visto desde el eje de la cantidad de casos se aproxima a una exponencial en las gráficas donde Cardinalidad de R se hace más alta (Figura 38 y Figura 39).

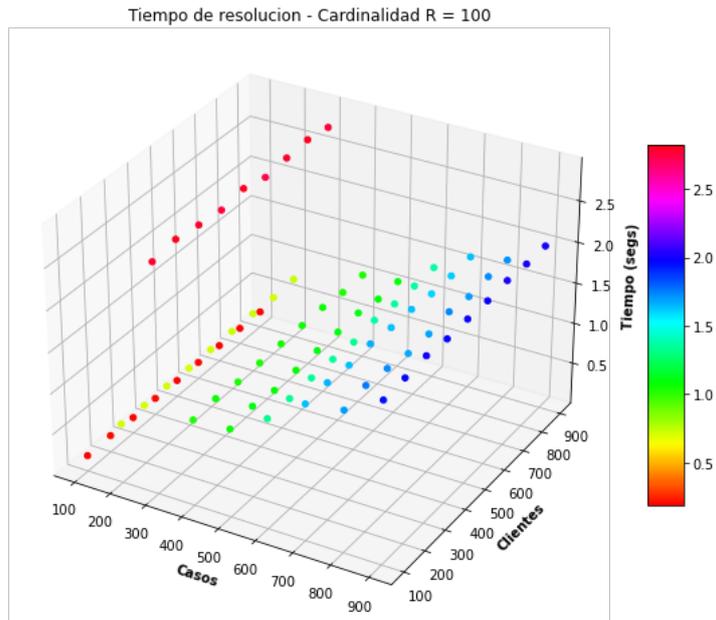


Figura 37 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 100 recursos

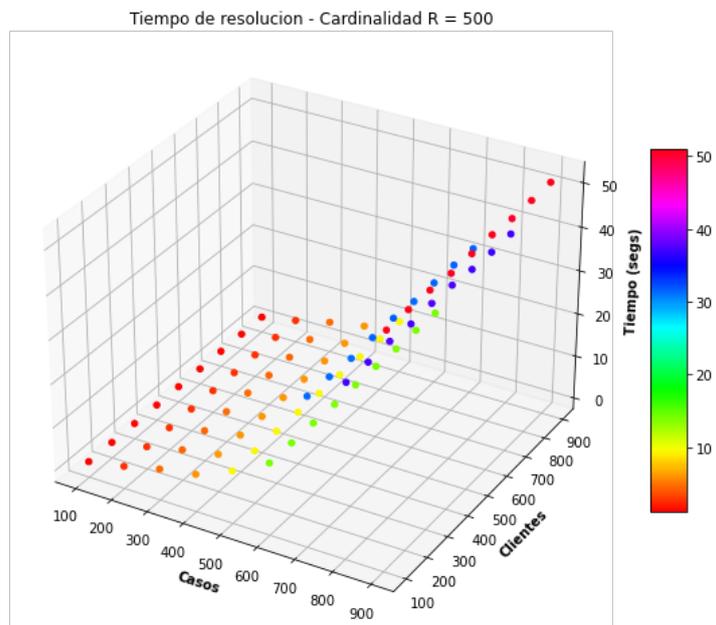


Figura 38 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 500 recursos

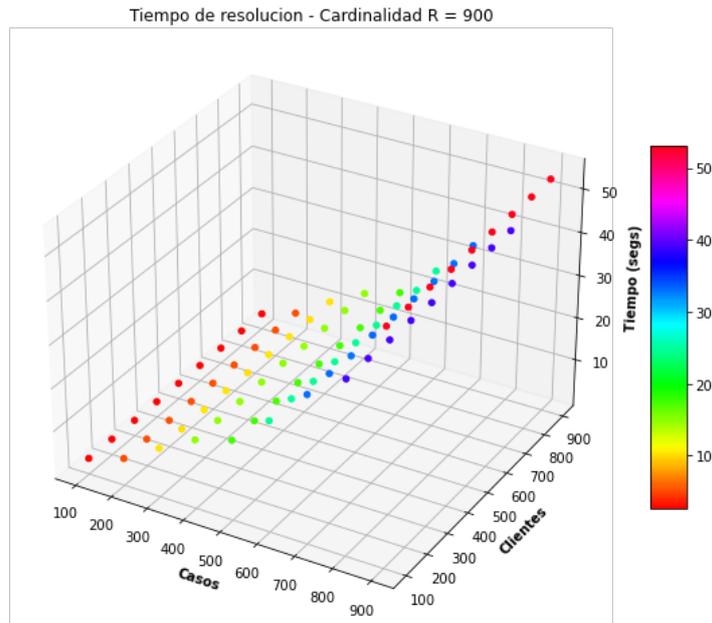


Figura 39 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 900 recursos

4.4.2.15 Tiempos de Resolución en Función de Casos y Clientes – Percentil 90

En esta sección se presenta la evolución de los tiempos de resolución en función de las cantidades de casos y de clientes, manteniendo fija la cantidad de recursos (cardinalidad de R) y considerando solamente el percentil 90 de los valores de los tiempos de resolución. La idea de tomar el percentil 90 sobre los valores de los tiempos es poder visualizar el crecimiento de la mayoría de las muestras sin que las diferencias de escala oculten el crecimiento de los valores menores.

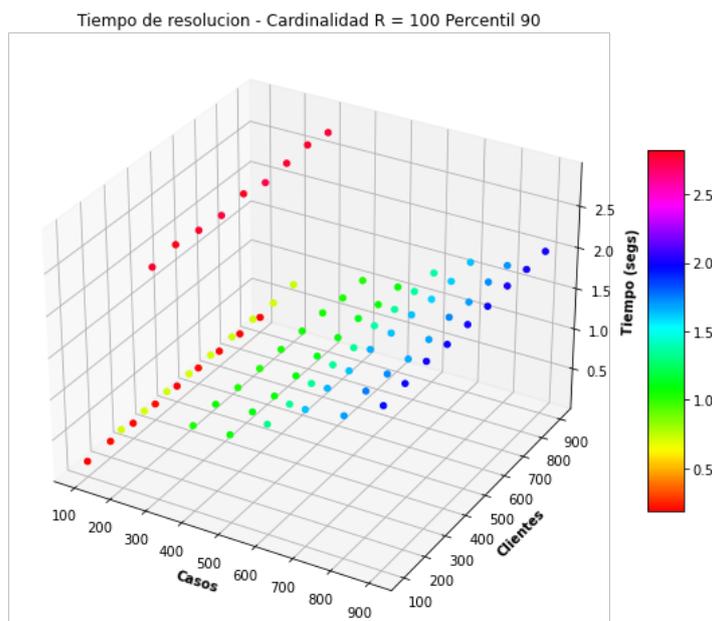


Figura 40 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 100 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras

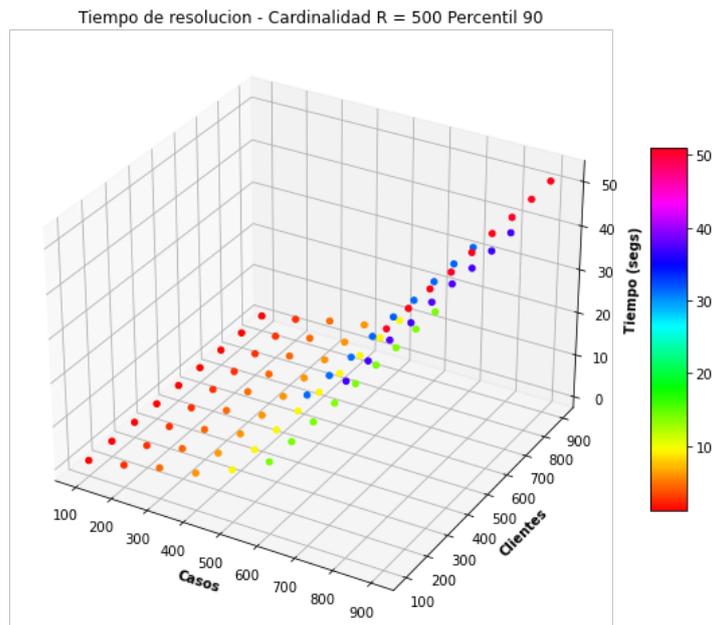


Figura 41 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 500 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras

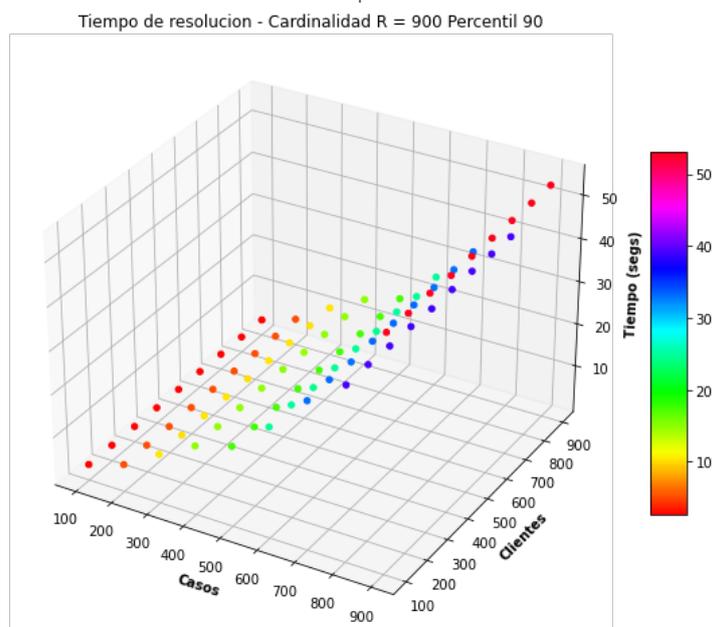


Figura 42 - Tiempos de resolución en función de casos y clientes para 900 recursos considerando solamente el percentil 90 de las muestras

4.4.2.16 Tiempos de resolución separando casos factibles de casos que no tienen solución factible

4.4.2.16.1 Tiempos de resolución solamente de las combinaciones en las que la solución es factible

En este apartado analizamos los tiempos de resolución considerando solamente las pruebas que tuvieron una solución factible. El objetivo es entender la influencia en los tiempos de resolución en los casos que no tienen solución factible.

4.4.2.16.2 Estadísticas

En proporción al total de las muestras (729) la proporción de casos que tuvieron solución factible fue del 90 %.

Comparando los tiempos máximos, promedio y el percentil 90 de ambas muestras no se observan diferencias significativas.

| | Cardinalidad K | Cardinalidad R | Cardinalidad D | Cantidad de Restricciones | Cantidad de Variables | Tiempo (segs) |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------|-----------------------|---------------|
| Cantidad | 657 | 657 | 657 | 6.570000e+02 | 6.570000e+02 | 657 |
| Promedio | 500 | 541.09 | 478.08 | 3.347882e+06 | 2.139178e+06 | 127.39 |
| Desviación Estándar | 258.39 | 238.23 | 256.75 | 2.459555e+06 | 1.572950e+06 | 475.99 |
| Mínimo | 100 | 100 | 100 | 1.257380e+05 | 8.000000e+04 | 0.18 |
| Percentil 30% | 300 | 400 | 300 | 1.503982e+06 | 9.600000e+05 | 4.40 |
| Percentil 50% | 500 | 500 | 500 | 3.003066e+06 | 1.920000e+06 | 11.78 |
| Percentil 60% | 600 | 600 | 600 | 3.504177e+06 | 2.240000e+06 | 17.49 |
| Percentil 80% | 800 | 800 | 700 | 5.630143e+06 | 3.600000e+06 | 39.08 |
| Percentil 90% | 900. | 900 | 800 | 7.008004e+06 | 4.480000e+06 | 88.76 |
| Máximo | 900 | 900 | 900 | 1.013560e+07 | 6.480000e+06 | 3571.48 |

Tabla 9 - Estadísticas para los casos en que se obtuvieron soluciones factibles

| | Muestra completa | Solo soluciones factibles |
|--------------------------|------------------|---------------------------|
| Tiempo máximo (segundos) | 3571,48 | 3571,48 |
| Promedio (segundos) | 115,03 | 127,39 |
| Percentil 90 (segundos) | 77,6 | 88,76 |

Tabla 10 – Comparación de los valores de tiempos de resolución entre todas las muestras y el conjunto de muestras con solución factible.

4.4.2.16.3 Corte en dos dimensiones R y D (solamente casos factibles)

En la Figura 43 podemos observar los tiempos de resolución considerando solamente los casos factibles en función de las cantidades de recursos y de casos. Las muestras correspondientes a distintos valores de clientes están apiladas sobre cada par (recursos, casos). Vemos que para algunas combinaciones de recursos bajos y cantidad de casos alta los valores de los tiempos de resolución sobresalen por sobre la mayoría de las muestras. Este comportamiento es esperado ya que refleja una situación en la que se tiene una mayor demanda para recursos escasos.

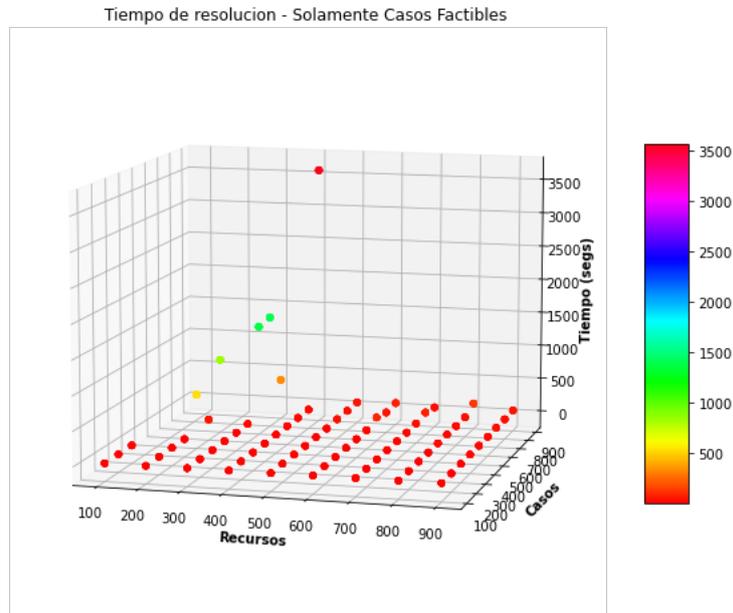


Figura 43 - Tiempos de resolución en función de recursos y casos considerando solamente las soluciones factibles

Para poder visualizar el crecimiento de los tiempos sin los efectos de las diferencias de escala vistos en la Figura 43, se presentan en la Figura 44 los tiempos de resolución en función de casos y recursos considerando solamente el percentil de resolución.

90 de los tiempos. Para cada par (recursos, casos) existen apilados distintos valores de tiempos correspondientes a distintas cantidades de clientes.

Se observa además la ausencia de valores sobre los bordes indicando las zonas en que no se encuentran soluciones factibles. Estas serán tratadas en la sección 4.4.2.17.

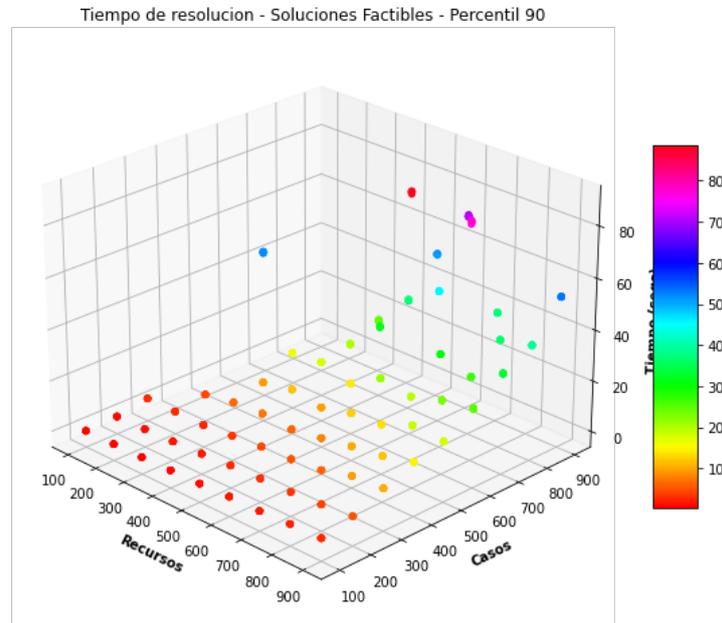


Figura 44 - Tiempos de resolución en función de recursos y casos considerando solamente las soluciones factibles tomando el percentil 90 de las muestras

4.4.2.17 Tiempos de resolución de situaciones en que no hay solución factible

4.4.2.17.1 Estadísticas

| | Cardinalidad K | Cardinalidad R | Cardinalidad D | Cantidad de Restricciones | Cantidad de Variables | Tiempo (segundos) |
|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------------------|--------------------------|----------------------|
| Cantidad | 72 | 72 | 72 | 7.200000e+01 | 7.200000e+01 | 72 |
| Promedio | 500 | 125 | 700 | 1.142567e+06 | 7.300000e+05 | 2.28 |
| Desviación Estándar | 260.01 | 43.60 | 174.42 | 6.056070e+05 | 3.872765e+05 | 1.45 |
| Minimo | 100 | 100 | 400 | 5.014240e+05 | 3.200000e+05 | 1.03 |
| Percentil 30% | 300 | 100 | 600 | 7.517610e+05 | 4.800000e+05 | 1.35 |
| Percentil 50% | 500 | 100 | 750 | 9.392900e+05 | 6.000000e+05 | 1.67 |
| Percentil 60% | 600 | 100 | 800 | 1.001769e+06 | 6.400000e+05 | 1.73 |
| Percentil 80% | 800 | 200 | 900 | 2.002908e+06 | 1.280000e+06 | 4.62 |
| Percentil 90% | 890 | 200 | 900 | 2.252683e+06 | 1.440000e+06 | 4.82 |
| Máximo | 900 | 200 | 900 | 2.252683e+06 | 1.440000e+06 | 4.98 |

Tabla 11 - estadísticas para los casos en que no se obtuvieron soluciones factibles

La proporción de casos en que no se obtuvieron soluciones factibles fue de 10 % sobre el total de las muestras.

En la Tabla 12 podemos ver una comparación de los tiempos máximo, promedio y percentil 90.

| | Muestra completa | Solo soluciones factibles | No Factibles |
|--------------------------------|---------------------|------------------------------|-----------------|
| Tiempo máximo (segundos) | 3571,48 | 3571,48 | 4,98 |
| Promedio (segundos) | 115,03 | 127,39 | 2,28 |
| Percentil 90 (segundos) | 77,6 | 88,76 | 4,82 |

Tabla 12 - Comparación de los tiempos entre instancias con soluciones factibles e instancias sin solución factible

Los tiempos de resolución en los casos en que no hay solución factible son considerablemente más bajos. Es probable que se deba a que la condición de no factibilidad sea detectada en una fase temprana del proceso de resolución por el solver.

4.4.2.17.2 Tiempos de resolución para casos no factibles en función de las cantidades de recursos y de casos

En la Figura 45 se puede observar que las soluciones no factibles se presentan sobre los bordes. Estos problemas son aquellos en los que la cantidad de recursos y de casos no están balanceadas. En instancias en que se presentan muchos casos y se cuenta con pocos recursos es más probable que la solución no sea factible. En instancias en que se presentan pocos casos y se cuentan con muchos recursos la solución no es factible pues los costos fijos de los recursos no asignados hacen que la ganancia total sea negativa. En estos casos la solución no es factible pues una de las restricciones es que la ganancia debe ser mayor que cero.

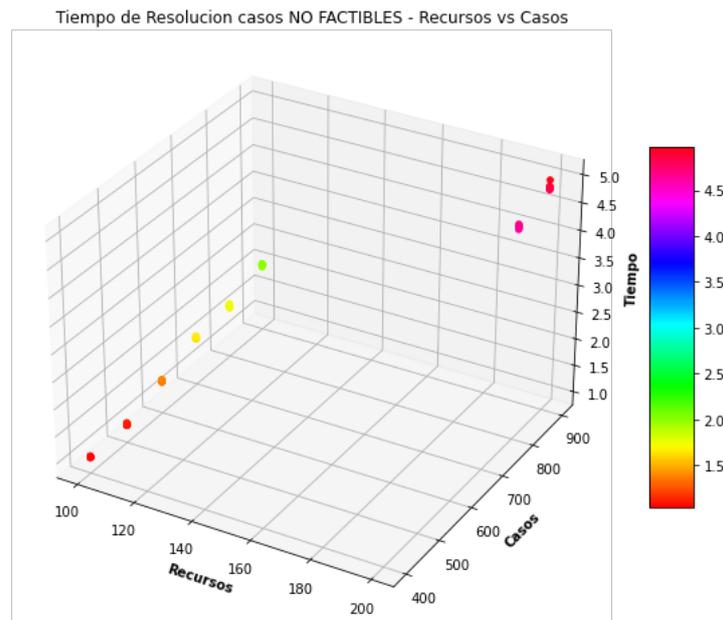


Figura 45 - Tiempos de resolución considerando solamente los casos no factibles

4.4.2.18 Función Objetivo

En las siguientes subsecciones se muestran la evolución de los valores de la función objetivo. Se presenta una descripción estadística seguida de los valores de la función objetivo en función de las variables: cantidad de recursos, cantidad de casos y cantidad de clientes. Se presentan los resultados en función de las siguientes combinaciones:

- Recursos x Casos
- Recursos x Clientes
- Casos x Clientes.

4.4.2.19 Estadísticas

En estas estadísticas se consideran solamente los casos para los cuales se halló una solución factible.

| | Ganancia |
|-----------------------------|-----------------|
| Cantidad de Muestras | 657 |
| Promedio | 96881 |
| Desviación Estándar | 56310 |
| Minimo | 434 |
| Percentil 30% | 58825 |
| Percentil 50% | 90344 |
| Percentil 60% | 111736 |
| Percentil 80% | 154897 |
| Percentil 90% | 177006 |
| Máximo | 206756 |

Tabla 13 - Estadísticas de la Función Objetivo

4.4.2.20 Función Objetivo en Función de Recursos y Casos

En esta sección se presenta la evolución de la función objetivo en función de las cantidades de recursos y de casos manteniendo fija la cantidad de clientes. Se presentan los resultados para 100, 500 y 900 clientes.

Se observa que la variación en la cantidad de clientes tiene un efecto imperceptible sobre los valores. La función objetivo responde mayormente al crecimiento en cantidad de recursos y cantidad de casos.

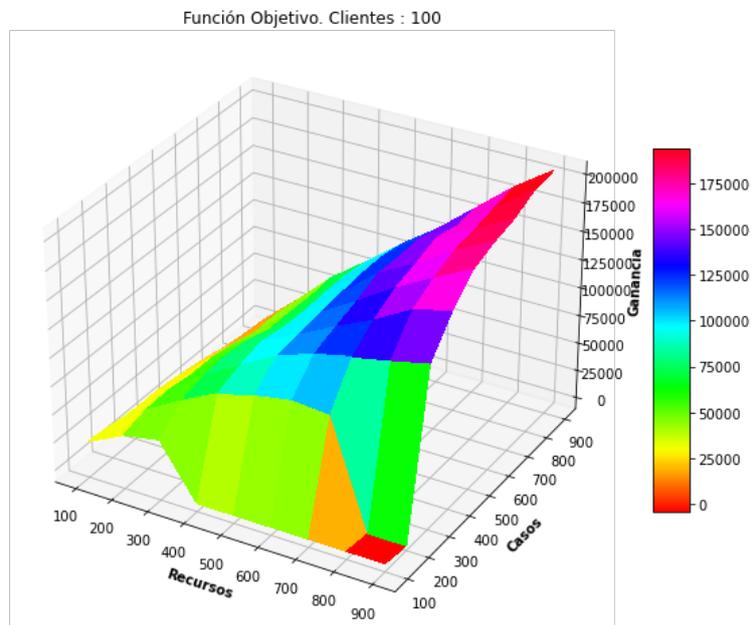


Figura 46 - Función objetivo manteniendo clientes = 100

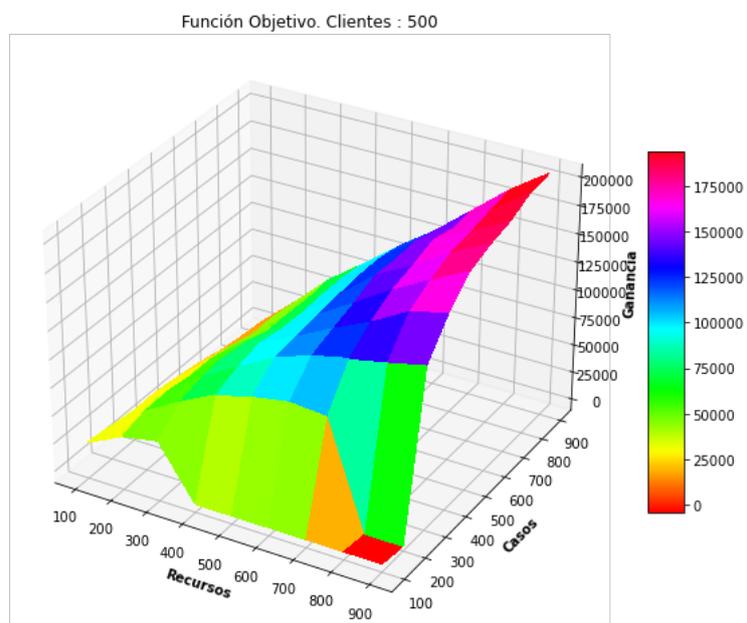


Figura 47 - Función Objetivo manteniendo clientes = 500

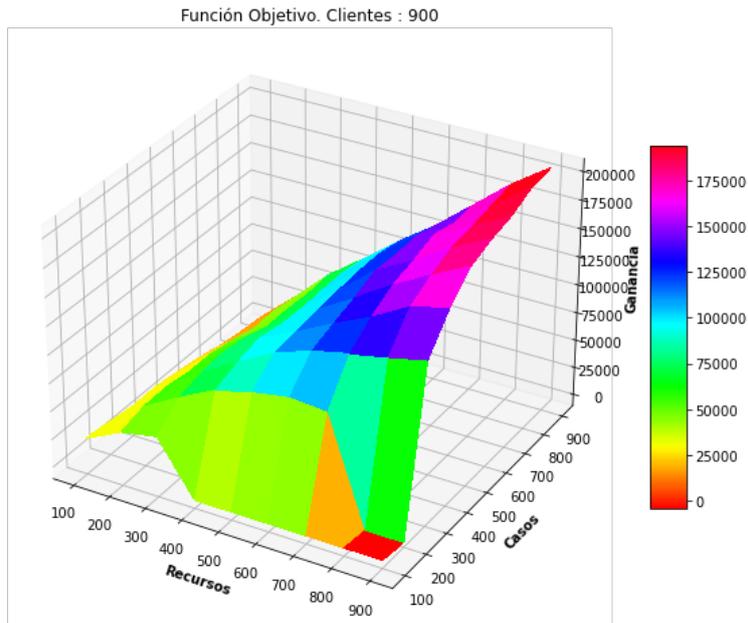


Figura 48 - Función Objetivo manteniendo clientes = 900

4.4.2.21 Función Objetivo en Función de Recursos y Clientes

En esta sección se presenta la evolución de la función objetivo en función de las cantidades de recursos y de clientes, manteniendo fija la cantidad de casos (cardinalidad D). Se presentan los resultados para 100, 500 y 900 casos.

Se observa que los valores de la función objetivo tienen una variación imperceptible a lo largo del eje de clientes.

Con respecto a la cantidad de recursos, en las distintas gráficas se observa un incremento en el valor de la función objetivo al mismo tiempo que se puede observar un comportamiento no lineal con relación a la cantidad de recursos en la Figura 50 y Figura 51 que tiende a estabilizarse para los valores más altos de la cantidad de recursos.

Los cambios en las cantidades de casos muestran un importante incremento en los valores de la función objetivo, pasando de un máximo de aprox. 20.000 en las muestras con cardinalidad $D=100$, a un máximo de aproximadamente 200.000 en las muestras con cardinalidad $D=900$.

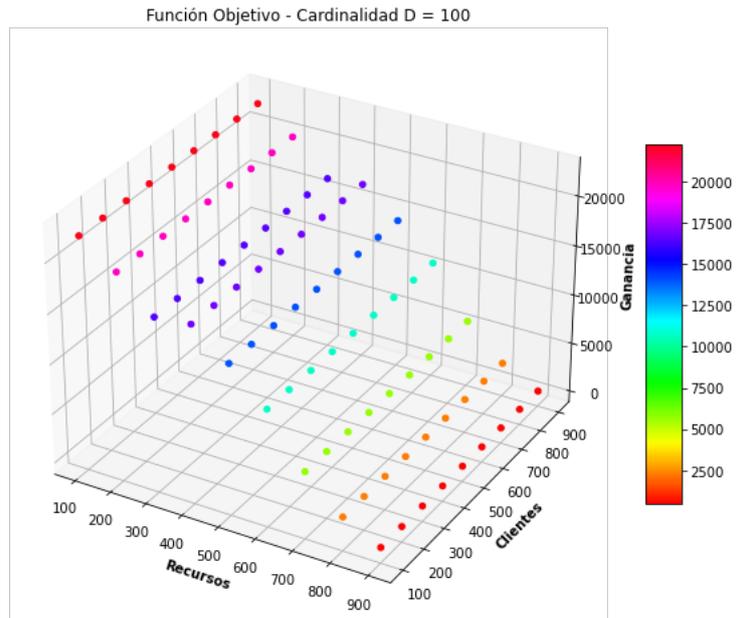


Figura 49 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 100

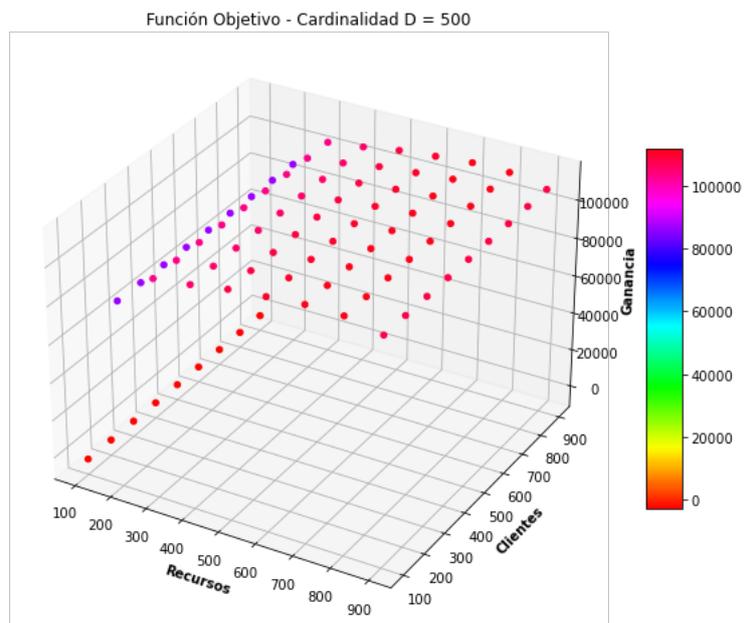


Figura 50 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 500

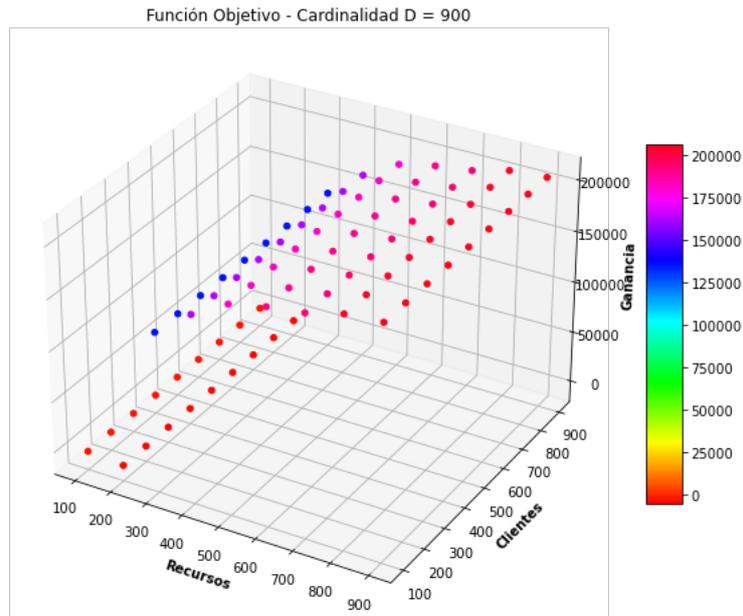


Figura 51 - Función Objetivo manteniendo cantidad de casos = 900

4.4.2.2 Función objetivo en Función de Casos y Clientes

En esta sección se presenta la evolución de la función objetivo en función de las cantidades de casos y de clientes manteniendo fija la cantidad de recursos (cardinalidad R). Se presentan los resultados para 100, 500 y 900 recursos.

Se puede observar que la cantidad de clientes no tiene mayor impacto en los valores de la función objetivo. A medida que tomamos valores de cantidades de recursos mayores, el incremento en la función objetivo pasa de un máximo de aprox. 40.000 en las muestras con cardinalidad R=100 a máximos aproximados a 200.000 para cardinalidad R=900.

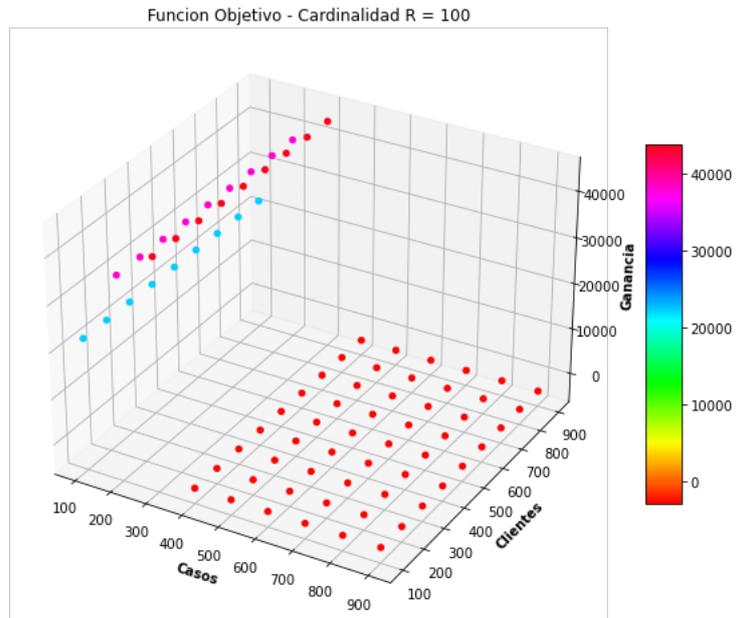


Figura 52- Función objetivo manteniendo cantidad de recursos = 100

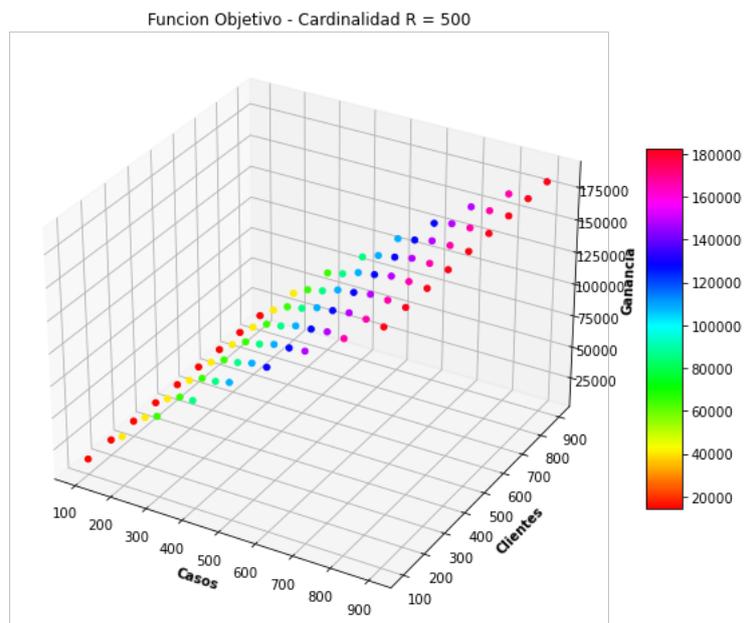


Figura 53 -Función objetivo manteniendo la cantidad de recursos = 500

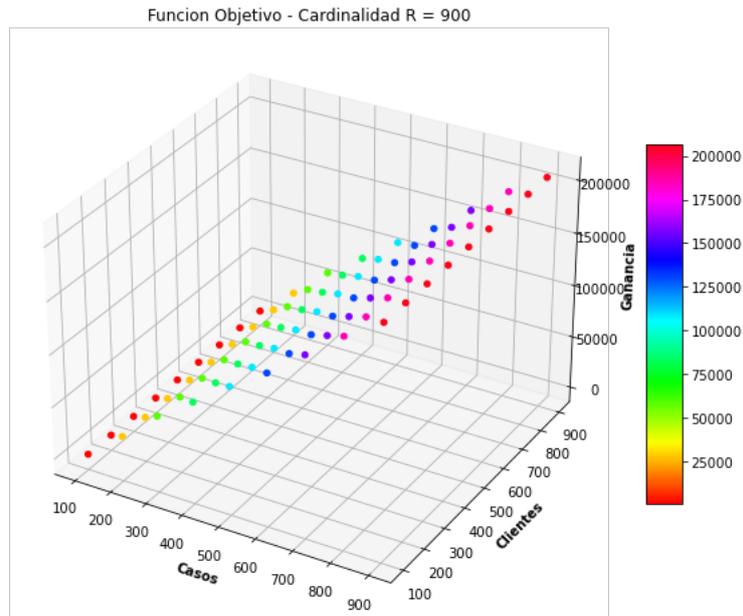


Figura 54 - Función objetivo manteniendo la cantidad de recursos = 900

4.4.2.23 Verificación numérica de la variación de la función objetivo con relación a la cantidad de clientes

En el análisis de la función objetivo en función de clientes y casos, como en el análisis de la función objetivo en función de clientes y recursos se observa que la función objetivo es aparentemente constante a medida que los valores se incrementan en el eje de los clientes. Para verificar ese resultado en forma numérica calculamos la correlación de la Cardinalidad K con la función objetivo : Correlación de la variable Cardinalidad K (cantidad de clientes) y la función objetivo: $-1.97e-16$. Un valor de correlación tan bajo confirma lo que observamos gráficamente.

4.4.2.24 Función objetivo manteniendo la cantidad de clientes constante para distintos valores de la demanda

En esta sección se presentan los valores de la función objetivo manteniendo el valor de la cantidad de clientes constante y graficando la función objetivo en función de la cantidad de recursos para varios valores de la cantidad de casos.

Podemos notar que en algunas combinaciones de recursos, casos y clientes el comportamiento de la función objetivo puede llegar a ser decreciente. Estas situaciones corresponden en que la cantidad de recursos es alta y la demanda es baja y se puede explicar por la prevalencia de los costos fijos de los recursos sin asignar en la función objetivo. Las pendientes de las gráficas se empiezan a incrementar a medida que la demanda (cardinalidad D) es más alta.

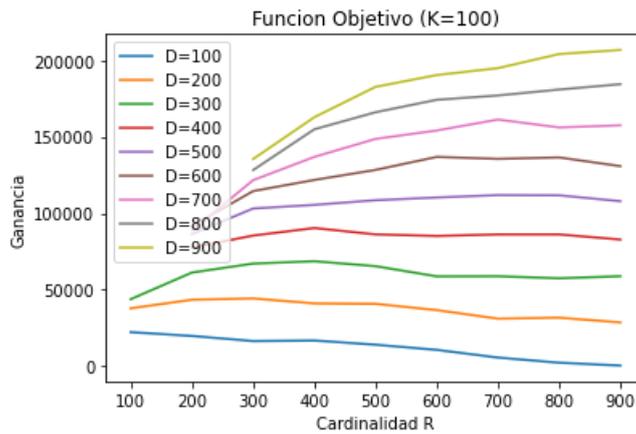


Figura 55 - Función objetivo manteniendo K = 100 para distintos valores de D

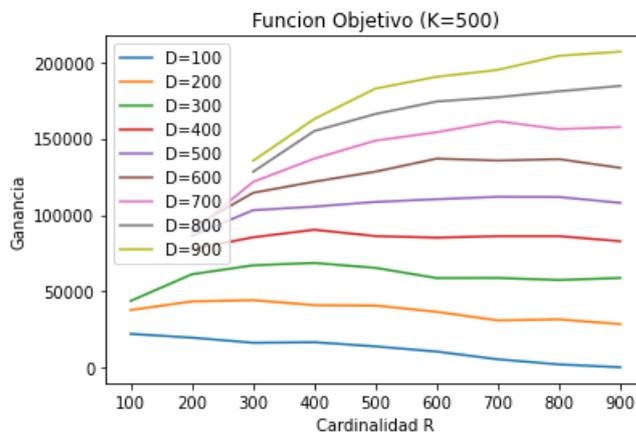


Figura 56 – Función objetivo manteniendo la cantidad de clientes = 500 para distintos valores de la demanda (D)

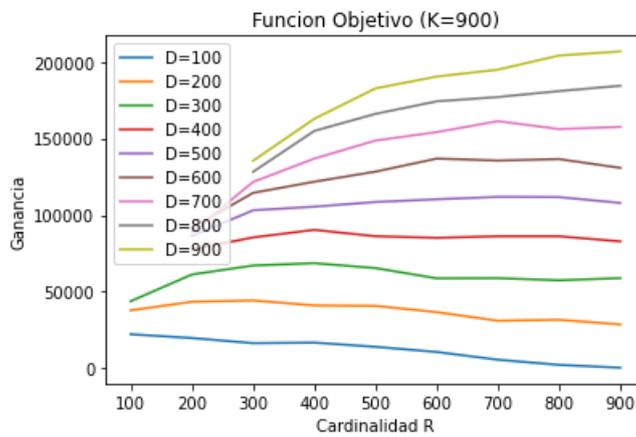


Figura 57 - Función objetivo manteniendo la cantidad de clientes = 900 para distintos valores de la demanda (D)

4.5 Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se resolvió el problema de optimización de la asignación de recursos TAWDP mediante Programación Lineal Entera. Se realizó una implementación del modelo en AMPL-Cplex y se realizaron mediciones de tiempos para una variedad de tamaños de problemas, cubriendo un amplio espectro sobre las tres dimensiones: cantidad de recursos, cantidad de casos y cantidad de clientes.

Se resolvieron casos de tamaño grande para lo que es la realidad de nuestro país e incluso a nivel de países más grandes (900 clientes, 900 casos y 900 recursos). En todos los casos se obtuvieron soluciones exactas.

El promedio de los tiempos de resolución fue de 115,03 segundos mientras que el 90% de las muestras se resolvió en tiempos menores a 77 segundos. Los tiempos de resolución obtenidos hacen que el modelo sea aplicable a casos reales.

Las limitaciones encontradas para resolver problemas de mayor tamaño fueron a causa del consumo de recursos del servidor, principalmente memoria. Eventualmente se podrían manejar problemas mayores en servidores con más recursos.

Los dos factores con mayor influencia sobre los tiempos de resolución fueron: la cantidad de casos y cantidad de recursos. La cantidad de clientes tiene un efecto menor en los tiempos con respecto a los incrementos en cantidades de recursos y de casos. Este comportamiento lo podemos vincular al hecho de que el tamaño del problema depende fuertemente de la matriz $T: R \times D$ en la que se establecen los tiempos de resolución de cada caso por cada uno de los recursos.

Los valores obtenidos para la función objetivo reflejan el comportamiento que se percibe en la realidad: se hace decreciente cuando la demanda es menor que la cantidad de recursos y se incrementa sustancialmente cuando la demanda es mayor y se logra una ocupación mayor de los recursos. Un comportamiento similar se observó en el caso de la obtención de soluciones factibles. Aquellas combinaciones en las que existen muchos recursos sin asignar significan mayores costos que ingresos, haciendo que la ganancia sea negativa y por lo tanto no sea una solución factible.

5 Capítulo 5 - Conclusiones de la Tesis y Trabajos Futuros

5.1 Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron dos problemas que se presentan en empresas que brindan servicios.

Mediante Teoría de Juegos Evolutivos se estudió la estabilidad en el tiempo de las estrategias que suelen aplicar este tipo de empresas para el cobro por sus servicios.

Por otro lado, mediante Programación Lineal Entera se resolvió el problema de optimización de la asignación de los recursos: TAWDP.

En el estudio realizado sobre la estabilidad en el tiempo de las estrategias para el cobro de los servicios, el resultado obtenido indica que las soluciones asintóticamente estables son aquellas en las que ambas poblaciones (clientes y empresas) juegan la misma estrategia. Si inicialmente una parte de la población de clientes eligiera la estrategia de costo fijo mensual y otra parte optara por la estrategia de pago a demanda, y análogamente, si una parte de la población de empresas jugara la estrategia de cobro mensual y otra parte eligiera la estrategia de cobro a demanda, a largo plazo ambas poblaciones irán convergiendo a una situación en la que empresas y clientes juegan la misma estrategia (para la totalidad de cada una de las poblaciones). Los costos de las horas y la tasa de ocurrencia de los incidentes afectan directamente los valores de los riesgos y por lo tanto los valores de la matriz de pagos. La consecuencia final de las alteraciones en los costos de las horas o de la tasa de ocurrencia de los incidentes será un corrimiento del punto de equilibrio interior, el cual no es un punto asintóticamente estable. Entonces algunas trayectorias que en el caso inicial convergían a uno de los dos puntos asintóticamente estables, pasarán a converger al segundo punto asintóticamente estable. Los puntos asintóticamente estables no se modifican.

A partir de la Dinámica del Replicador utilizada para el estudio de la estabilidad de las estrategias, se obtuvo un sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de las poblaciones de empresas y de clientes a lo largo del tiempo. De la resolución de la Dinámica del Replicador se obtuvo el Mapa de Direcciones. El mapa de direcciones permite comprender la trayectoria a lo largo del **tiempo** de cada punto. Cada punto representa un estado de las poblaciones: qué proporción de la población de empresas juega una estrategia de costo fijo y qué proporción de la población de clientes juega la estrategia de costo fijo. Con base en el estado inicial de las poblaciones, la Dinámica del Replicador y el Mapa de Direcciones resultante, las empresas podrán tomar decisiones, adaptándose a los cambios en la proporción de clientes que usan cada estrategia a medida que avanza el tiempo y conocer cuál será la estrategia a la que convergen finalmente.

En el caso del problema de optimización de la asignación de recursos, se demostró que el problema TAWDP es NP-Hard. Se resolvió el problema mediante Programación Lineal Entera y se implementó el modelo en AMPL-Cplex. Se corrieron pruebas para problemas relativamente grandes para la realidad local e incluso para la realidad de empresas de porte global llegando a tamaños de 900

clientes, 900 casos y 900 recursos. Se obtuvieron soluciones exactas en tiempos que lo hacen aplicable a las empresas de nuestro medio e incluso a empresas de porte global. El promedio de los tiempos de resolución fue de 115,03 segundos mientras que el 90% de las muestras se resolvió en tiempos menores a 77 segundos. Los dos factores con mayor influencia sobre los tiempos de resolución fueron: la cantidad de casos y cantidad de recursos. La cantidad de clientes tiene un efecto menor en los tiempos con respecto a los incrementos en cantidades de recursos y de casos. Este comportamiento lo podemos vincular al hecho de que el tamaño del problema depende fuertemente de la matriz $T: R \times D$ en la que se establecen los tiempos de resolución de cada caso por cada uno de los recursos.

5.2 Trabajos Futuros

En el trabajo realizado el problema de asignación de recursos se modeló asumiendo un escenario en el que se conoce la demanda exacta al momento de realizar las asignaciones. En una extensión de este problema se podrían considerar escenarios donde exista cierto nivel de incertidumbre, por ejemplo respecto a la demanda, considerando procesos estocásticos.

Extensiones o variantes del TAWDP pueden ser modeladas para casos ad hoc de empresas puntuales en diferentes rubros. En este trabajo el foco estuvo en contemplar una extensión del GAP agregando restricciones enfocadas en los contratos de servicio entre empresas proveedoras con un espectro diverso de recursos limitados con cotos diferentes según el tipo de contrato, servicio, y SLAs. Hasta lo mejor de nuestro conocimiento no encontramos en la literatura un modelo con el enfoque del TAWDP. El TAWDP fue resuelto mediante un enfoque exacto, dando buenos resultados (soluciones óptimas globales) para instancias grandes del problema. Otros enfoques (dada la NP-Hardness del TAWDP) podrían ser diseñar algoritmos aproximados basados en metaheurísticas tales como Iterated Local Search, GRASP, GRASP+Path Relinking, VNS, VND, entre otras, contemplando además enfoques de hibridación.

Otro punto que se podría considerar es aplicar Algoritmos Evolutivos para el diseño de "poblaciones" de soluciones de buena calidad (óptimos locales según ciertos criterios) y tener así diferentes opciones de solución a aplicar por las empresas. En [46] se introducen algoritmos de aproximación para otras variantes del problema GAP y se menciona además una cota de aproximación de radio de performance garantida para el GAP. Como trabajo futuro se podría analizar el diseño de un algoritmo de aproximación para el TAWDP.

6 Referencias bibliográficas

- [1] A. Ullah, M. Ayat, Y. He, W. Huang y W. Jiang, «Game-Theoretic Models for Warranty and Post-Warranty Maintenance With Risk-Averse Service Providers,» *International Journal of Industrial Engineering*, vol. 28, pp. 541-562, 2021.
- [2] S. Rass, S. König y S. Schauer, «Games Over Probability Distributions Revisited: New Equilibrium Models and Refinements,» *Games*, vol. 13, n° 6, p. 80, 2022.
- [3] G. P. Cachon y S. Netessine, «Game Theory in Supply Chain Analysis,» de *Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the e-Business Era*, pp. 13-65.
- [4] D. Ma y S. Abraham, «Analyzing Software as a Service with Per-Transaction Charges,» *Information Systems Research*, vol. 26, n° 2, pp. 360-378, Junio 2015.
- [5] D. Chattopadhyay, «A Game Theoretic Model for Strategic Maintenance and Dispatch Decisions,» *IEEE Transactions On Power Systems*, pp. 2014-2021, Diciembre 2004.
- [6] D. Liang, G. Yang, N. Yang, H. Zhang y R. Jia, «A discrete two-level model for charge pricing of electric vehicles based on evolution game theory,» *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 23, n° 1-2, pp. 386-400, 2017.
- [7] S. Rass y S. Schauer, *Game Theory for Security and Risk Management From Theory to Practice*, Klagenfurt: Birkhäuser, Cham, 2018, p. 418.
- [8] G. Liu, Z. Xiao, A. T. C. Chronopoulos y Z. Tang, «A Many-to-Many Demand and Response Hybrid Game Method for Cloud Environments,» *IEEE Transactions on Cloud Computing*, vol. 10, n° 1, pp. 158 - 171, Marzo 2022.
- [9] S. Bai, Z. Liu y Y. LV, «Evolutionary Game Analysis of Consumer Complaint Handling in E-Commerce,» *Discrete Dynamics in Nature and Society*, p. 3792080, 2022.
- [10] M. K. Sohrabi y H. Azgomi, «A Survey on the Combined Use of Optimization Methods and Game Theory,» *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 27, n° 1, pp. 59-80, 2020.
- [11] J. Newton, «Evolutionary Game Theory: A Renaissance,» *Games*, pp. 1-67, 2018.
- [12] J. Riehl, P. Ramazi y M. Cao, «A survey on the analysis and control of evolutionary matrix games,» *Annual Reviews in Control*, pp. 87-106, 2018.
- [13] S. Shamshirband , J. Hassannataj Joloudari, S. Khanjani Shirkharkolaie , S. Mojriari, F. Rahmani, S. Mostafavi y Z. Mansor, «Game theory and evolutionary optimization approaches applied to resource allocation problems in computing environments: A survey,» *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 18, n° 6, pp. 9190-9232, 2021.
- [14] R. Lucchetti, «Convexity and Well-Posed Problems,» de *Linear programming and game theory*, New York, NY: Springer, 2006.
- [15] T. Wang, Y. Yuan, J. Liu y I. B. Adeleke, «An Evolutionary Game Approach for Manufacturing Service Allocation Management in Cloud Manufacturing,» *Computers & Industrial Engineering*, vol. 133, pp. 231-240, Julio 2019.
- [16] C.-K. Wu, Y.-M. Chen, D. Wu y C.-L. Chi, «A Game Theory Approach for Assessment of Risk and Deployment of Police Patrols in Response to Criminal Activity in San Francisco,» *Risk Analysis*, vol. 40, pp. 534-549, Marzo 2020.
- [17] X. Fu, A. Presbitero, S. V. Kovalchuk y V. V. Krzhizhanovskaya, «Coupling Game Theory and Discrete-Event Simulation for Model-Based Ambulance Dispatching,» *Procedia Computer Science*, vol. 136, pp. 398-407, 2018.

- [18] L. R. Izquierdo, S. S. Izquierdo y W. H. Sandholm, «An introduction to ABED: Agent-based simulation of evolutionary game dynamics,» *Games and Economic Behavior*, vol. 118, pp. 434-462, Noviembre 2019.
- [19] K. Tuyls, J. Pérolat, M. Lanctot, G. Ostrovski, R. Savani, J. Z. Leibo, T. Ord, T. Graepel y S. Legg, «Symmetric Decomposition of Asymmetric Games,» *Scientific Reports*, vol. 8, n° 1, p. 1015, 2018.
- [20] E. Accinelli y E. J. S. Carrera, «Evolutionarily Stable Strategies and Replicator Dynamics in Asymmetric Two-Population Games,» de *Dynamics, Games and Science I: DYNA 2008, in Honor of Maurício Peixoto and David Rand, University of Minho, Braga, Portugal, September 8-12, 2008*, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [21] V. R. Venkateswaran y C. S. Gokhale, «Evolutionary Dynamics of Complex Multiple Games,» *Proceedings of the Royal Society B*, 2019.
- [22] G. Ross y R. M. Soland, «A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem,» *Mathematical Programming*, n° 8, pp. 91-103, 1975.
- [23] W. P. Pierskalla, "Letter to the Editor—The Multidimensional Assignment Problem," *Operations Research*, vol. 16, no. 2, pp. 422-431, 1968.
- [24] D. W. Pentico, «Assignment problems: A golden anniversary survey,» *European Journal of Operational Research*, n° 176, p. 774–793, 2007.
- [25] O. E. Kundakcioglu, «Generalized Assignment Problem,» de *Encyclopedia of Optimization*, Gainesville, Florida, 2009.
- [26] A. Kaushik, M. Alizadeh, O. Waqar y H. Tabassum, «Deep Unsupervised Learning for Generalized Assignment Problems: A Case-Study of User-Association in Wireless Networks,» de *IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops)*, Montreal, Canadá, 2021.
- [27] T. Sawik, «Integer Programming Approach to Production Scheduling for Make-To-Order Manufacturing,» *Mathematical and Computer Modelling*, n° 41, pp. 99-118, 2005.
- [28] S. Albers, A. Khan y L. Ladewig, «Improved Online Algorithms for Knapsack and GAP in the Random Order Model,» *Algorithmica*, n° 83, pp. 1750-1785, 2021.
- [29] C. Rainwater, J. Geunes y H. E. Romeijn, «Discrete Applied Mathematics,» *Discrete Applied Mathematics*, n° 157, p. 49–67, 2009.
- [30] V. Fernandez Viagas y J. Framinan, «Integrated Project Scheduling and Staff Assignment with Controllable Processing Times,» *The Scientific World Journal*, vol. 2014, n° <http://dx.doi.org/10.1155/2014/924120>, 2014.
- [31] C. A. Floudas y X. Lin, «Mixed Integer Linear Programming in Process Scheduling: Modeling, Algorithms, and Applications,» *Annals of Operations Research*, n° 139, p. 131–162, 2005.
- [32] E. Valentin, R. Freitas y R. Barreto, «Applying MGAP Modeling to the Hard Real-Time Task Allocation on Multiple Heterogeneous Processors Problem,» *Procedia Computer Science*, p. 1135–1146, 2016.
- [33] V. Valls, A. Perez y S. Quintanilla, «Skilled workforce scheduling in Service Centres,» *European Journal of Operational Research*, n° 193, p. 791–804, 2009.
- [34] R. Kalita y H. Patnaik, «A Novel Heuristic Resolving Deadline-Oriented Task Scheduling In Cloud,» de *IEEE International Conference on Advanced Communication Control and Computing Technologies (ICACCCT)*, Ramanathapuram, India, 2014.
- [35] C. K. Swain, B. Gupta y A. Sahu, «Constraint aware profit maximization scheduling of tasks in heterogeneous datacenters,» *Computing*, n° 102, p. 2229–2255, 2020.

- [36] C. Liu y S. Baskiyar, «Scheduling Mixed Tasks with Deadlines in Grids Using Bin Packing,» de *14th IEEE International Conference on Parallel and Distributed Systems*, Melbourne, Australia, 2008.
- [37] R. V. d. Bossche, K. Vanmechelen y J. Broeckhove, «Cost-Optimal Scheduling in Hybrid IaaS Clouds for Deadline Constrained Workloads,» de *IEEE 3rd International Conference on Cloud Computing*, Miami, Estados Unidos, 2010.
- [38] A. Guasque, H. Tohidí, P. Balbastre, J. M. Aceituno, J. Simó y A. Crespo, «Integer Programming Techniques for Static Scheduling of Hard Real-Time Systems,» *IEEE Access*, 2020.
- [39] J. W. Weibull, *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, Massachusetts, 1997.
- [40] S. Schecter y H. Gintis, *Game Theory in Action*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2016.
- [41] E. A. Gamba, W. O. López y J. E. S. Pérez, *Cuaderno de Trabajo No 22. Notas Docentes*, San Luis de Potosí, 2016.
- [42] E. Acinelli, «Evolutionary Game Theory and Application (Notas del curso de Teoría de Juegos Evolutivos),» Montevideo, 2020.
- [43] Jupyter Project, «Jupyter Project Documentation,» 2 Junio 2022. [En línea]. Available: <https://docs.jupyter.org/en/latest/>. [Último acceso: Junio 2022].
- [44] Pandas, «Pandas Documentation,» 18 Junio 2022. [En línea]. Available: <https://pandas.pydata.org/docs/>. [Último acceso: Junio 2022].
- [45] AMPL Optimization Inc., «AMPL Python API,» 18 Junio 2022. [En línea]. Available: <https://amplpy.readthedocs.io/en/latest/>. [Último acceso: Junio 2022].
- [46] L. Fleischer, M. X. Goemans, V. S. Mirrokni y M. Sviridenko, «Tight Approximation Algorithms for Maximum Separable Assignment Problems,» *Mathematics of Operations Research*, pp. 416-431, 2011.
- [47] The SciPy Community, «Documentación de la función `scipy.integrate.odeint`,» 4 Mayo 2021. [En línea]. Available: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>.

Anexo I – Representación de Relaciones Lógicas Mediante Variables Binarias

En este anexo se describe la forma de representación de funciones lógicas mediante variables binarias necesarias en la descripción del modelo matemático. Se comienza por la representación de las funciones lógicas básicas y Leyes de De Morgan para luego llegar a las representaciones de relaciones de implicación y conjunción.

6.1 La función lógica “implica” :

| x | y | $x \rightarrow y$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Esta relación la podemos expresar con variables binarias del siguiente modo :

$$x \leq y$$

6.2 La función lógica de negación (\neg):

| x | $\neg x$ |
|---|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Esta relación se puede expresar con variables binarias como :

$$y = (1 - x)$$

6.3 La función lógica AND:

| x | y | X AND Y |
|---|---|---------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Podemos expresar mediante variables binarias como

$$x + y > 1$$

6.4 Leyes de De Morgan

$$\neg(x \text{ AND } y) \equiv (\neg x) \text{ or } (\neg y)$$

$$\neg(x \text{ OR } y) \equiv (\neg x) \text{ AND } (\neg y)$$

6.5 Disyunción e Implicación

La función lógica

$$x \text{ OR } y \rightarrow z$$

Se puede representar mediante la expresión

$$x + y \leq 2z$$

Demostración

$$x \text{ or } y \rightarrow z$$

Significa que

$$x \rightarrow z$$

$$y \rightarrow z$$

Las funciones lógicas anteriores se pueden representar como

$$x \leq z$$

$$y \leq z$$

Aplicando las representaciones de *or* y de la implicación, tenemos:

$$x + y \leq 2z$$

6.6 Conjunción e implicación

La función lógica

$$x \text{ AND } y \rightarrow z$$

Se puede expresar mediante la expresión

$$x + y \leq 1 + z$$

Demostración :

Aplicando las Leyes de De Morgan

$$\begin{aligned} x \text{ AND } y \rightarrow z &\equiv \neg z \rightarrow \neg(x \text{ AND } y) \equiv \\ &\equiv \neg z \rightarrow (\neg x) \text{ or } (\neg y) \end{aligned}$$

Lo que se puede expresar con variables binarias como :

$$(1 - z) \leq (1 - x) + (1 - y)$$

Reordenando los términos :

$$(1 - z) \leq (2 - x - y)$$

Finalmente

$$x + y \leq 1 + z$$

6.7 Implicación y Conjunción

$$x \Rightarrow y \text{ AND } z$$

Se puede expresar mediante la expresión

$$(1 - y) + (1 - z) \leq (1 - x)$$

6.8 Generalizaciones

| | |
|--|--|
| $\neg x$ | $1-x$ |
| $x \rightarrow y$ | $x \leq y$ |
| $x_1 \text{ or } x_2 \text{ or } \dots \text{ or } x_n \rightarrow y$ | $x_1 + x_2 \dots + x_n \leq ny$ |
| $x \rightarrow y_1 \text{ or } y_2 \text{ or } \dots \text{ or } y_n$ | $x \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n$ |
| $x_1 \text{ and } x_2 \text{ and } \dots \text{ and } x_n \rightarrow y$ | $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq (n+1) + y$ |
| $x \rightarrow y_1 \text{ and } y_2 \dots \text{ and } y_n$ | $nx \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n$ |

Tabla 14- Equivalencias entre funciones lógicas y sus representaciones con funciones binarias

Anexo II – Código AMPL del Modelo Matemático

```
reset ;

# Recursos

set R ;

# Costos de los recursos

param C { i in R } ;

# Valor de venta de los recursos (valor de la unidad de tiempo)

param V { i in R } ;

# Disponibilidad de los recursos (horas disponibles de cada recurso)

param H { i in R } ;

# Clientes

set K ;

# Niveles de severidad posibles

set S ;

# SLA : tiempo máximo de respuesta para el cliente k ante un problema de severidad s

param A { k in K, s in S } ;

# Demanda

set D ;

# Cliente de cada caso

param U { p in D } ;

# Severidad de cada caso

param W { q in D } ;
```

```

# Tiempo de resolución por parte del recurso r de un
problema d

param T { r in R, d in D } ;

# -----
# Variables de decisión
# -----

#
# Vale 1 si el recurso r se asigna al caso d a partir del
slot de tiempo t
#     0 en caso contrario
#

var x { r in R, d in D, t in 1..H[r] } binary ;

# -----
# Funcion objetivo
# -----

maximize Ganancia : sum { d in D } (
                                sum { r in R } (
                                    sum {t in 1..H[r] }
x[r,d,t]*V[r]*T[r,d]
                                )
                                ) - sum { r in
R } C[r] ;

# -----
# Restricciones
# -----

#
# Ganancia positiva
#

subject to ganancia_positiva : sum { d in D } (
                                sum { r in R } (
                                    sum {t in 1..H[r] }
x[r,d,t]*V[r]*T[r,d]
                                )
                                ) - sum { r in
R } C[r] >= 0 ;

```

```

# Cumplimiento de los SLAs

subject to cumplimiento_sla { r in R, d in D, t in 1..H[r] }
:
    x[r,d,t]*(t-1+T[r,d]) <= A[U[d],W[d]] ;

#
# En cada asignacion (recurso, slot ) puede haber a lo
# sumo 1 caso
#

subject to un_solo_caso_por_slot { r in R, t in 1..H[r] }
:
    sum { d in D } x[r,d,t] <= 1 ;

#
# Recursos acotados
#

subject to recursos_acotados { r in R } :
    sum { d in D, t in 1..H[r] } x[r,d,t]*
T[r,d] <= H[r] ;

#
# Ocupacion de los slots de tiempo
# Los slots siguientes a t estan ocupados de acuerdo a la
# duracion T[r,d]
#

subject to ocupacion_slots_asignados { r in R , d in D, t
in 1..(H[r]-T[r,d]) } :

    x[r,d,t] * (T[r,d] - 1 ) <= sum { z in t+1..t+T[r,d]-
1} (1-x[r,d,z]) ;

#
# Satisfacer la demanda : todos los casos deben tener 1
recurso asignado
#

```

```
subject to satisfaccion_demanda { d in D } :  
          sum{ r in R , t in 1..H[r] } x[r,d,t] =  
1 ;
```

Anexo III – Código AMPL utilizado para generar los valores aleatorios de prueba

```
#
# Niveles de Severidad
#

set S := 1 2 3 4 ;

#
# Demanda
#

let D := {} ;

for { i in 1..cantCasos } { let D := D union { "d" & i }
} ;

#
# Recursos
#

let R := {} ;

for { i in 1..cantRecursos } { let R := R union { "r" & i
} };

#
# Clientes
#

let K := {} ;

for { i in 1..cantClientes } { let K := K union { i } } ;

#
# Costos
#

let { r in R } C[r] := round(Uniform(10,50)) ;

#
```

```

# Valor de venta de la unidad de tiempo de cada recurso
#

let { r in R } V[r] := round(Uniform(70,100)) ;

#
# Disponibilidad
#

let { r in R } H[r] := 8 ;

#
# Tiempos de Respuesta segun severidad
#

let { k in K} A[k,1] := 1 ;
let { k in K} A[k,2] := 2 ;
let { k in K} A[k,3] := 3 ;
let { k in K} A[k,4] := 6 ;

#
# Clientes de cada caso
#

let { d in D } U[d] := round(Uniform(1, card(K))) ;

#
# Severidad de cada caso
#

let { d in D } W[d] := round(Uniform(1,4)) ;

#
# Tiempos de resolucion de cada caso segun el recurso
#

let {r in R, d in D } T[r,d] := round(Uniform(1,6)) ;

```

Anexo IV – Mediciones de tiempo de las pruebas realizadas

| K | R | D | Factibilidad | Ganancia | Cantidad de Restricciones | Cantidad de Variables | Tiempo(segs) |
|-----|-----|-----|--------------|----------|---------------------------|-----------------------|--------------|
| 100 | 100 | 100 | solved | 22.263 | 1,26E+05 | 8,00E+04 | 0,183659 |
| 100 | 100 | 200 | solved | 37.838 | 2,51E+05 | 1,60E+05 | 0,71487 |
| 100 | 100 | 300 | solved | 43.820 | 3,76E+05 | 2,40E+05 | 2,774967 |
| 100 | 100 | 400 | infeasible | -3.031 | 5,01E+05 | 3,20E+05 | 1,037356 |
| 100 | 100 | 500 | infeasible | -3.031 | 6,27E+05 | 4,00E+05 | 1,064682 |
| 100 | 100 | 600 | infeasible | -3.031 | 7,52E+05 | 4,80E+05 | 1,326381 |
| 100 | 100 | 700 | infeasible | -3.031 | 8,77E+05 | 5,60E+05 | 1,636774 |
| 100 | 100 | 800 | infeasible | -3.031 | 1,00E+06 | 6,40E+05 | 1,699681 |
| 100 | 100 | 900 | infeasible | -3.031 | 1,13E+06 | 7,20E+05 | 1,951329 |
| 100 | 200 | 100 | solved | 19.780 | 2,51E+05 | 1,60E+05 | 0,280634 |
| 100 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,936369 |
| 100 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,689975 |
| 100 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,367564 |
| 100 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 538,16833 |
| 100 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,255777 |
| 100 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 836,607173 |
| 100 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,605276 |
| 100 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,818701 |
| 100 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,446779 |
| 100 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,277982 |
| 100 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,58752 |
| 100 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,341602 |
| 100 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,210358 |
| 100 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 15,902141 |
| 100 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1359,933788 |
| 100 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1403,501611 |
| 100 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 336,172336 |
| 100 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,756882 |
| 100 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,811524 |
| 100 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,585319 |
| 100 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,111769 |
| 100 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,457991 |
| 100 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,487582 |
| 100 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,934924 |
| 100 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,454583 |
| 100 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3557,840525 |
| 100 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,075427 |
| 100 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,635525 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|------------|
| 100 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,640552 |
| 100 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,100891 |
| 100 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,558053 |
| 100 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,007123 |
| 100 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,514915 |
| 100 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,089197 |
| 100 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,740044 |
| 100 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,521582 |
| 100 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,02517 |
| 100 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,106126 |
| 100 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 7,953009 |
| 100 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,459364 |
| 100 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,302014 |
| 100 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,567268 |
| 100 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,436907 |
| 100 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,424676 |
| 100 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,574607 |
| 100 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,328768 |
| 100 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,286696 |
| 100 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,225829 |
| 100 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,337589 |
| 100 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,026707 |
| 100 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,516932 |
| 100 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 77,590242 |
| 100 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,104976 |
| 100 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,265586 |
| 100 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,110977 |
| 100 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,422989 |
| 100 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,782338 |
| 100 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,192857 |
| 100 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,781789 |
| 100 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,864331 |
| 100 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,198345 |
| 100 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 128,239112 |
| 100 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,578707 |
| 100 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,229893 |
| 100 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,32965 |
| 100 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,927799 |
| 100 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,497017 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|-------------|
| 100 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,5649 |
| 100 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,042818 |
| 100 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,070361 |
| 100 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,957337 |
| 200 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,19449 |
| 200 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,708793 |
| 200 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,824021 |
| 200 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,060987 |
| 200 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,10434 |
| 200 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,331147 |
| 200 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,653656 |
| 200 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,75439 |
| 200 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 1,97597 |
| 200 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,288488 |
| 200 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,90878 |
| 200 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,688524 |
| 200 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,398582 |
| 200 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 539,274352 |
| 200 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,789467 |
| 200 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 838,198973 |
| 200 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,641059 |
| 200 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,816675 |
| 200 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,444251 |
| 200 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,296837 |
| 200 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,577437 |
| 200 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,344223 |
| 200 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,181073 |
| 200 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 15,887031 |
| 200 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1364,337137 |
| 200 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1399,306714 |
| 200 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 338,839801 |
| 200 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,731501 |
| 200 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,804045 |
| 200 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,579753 |
| 200 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,049541 |
| 200 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,764829 |
| 200 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,418829 |
| 200 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,56922 |
| 200 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,112984 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 200 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3565,882939 |
| 200 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,060325 |
| 200 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,658355 |
| 200 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,552623 |
| 200 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,147544 |
| 200 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,58381 |
| 200 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,031034 |
| 200 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,473242 |
| 200 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,171091 |
| 200 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,905979 |
| 200 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,510438 |
| 200 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 2,990813 |
| 200 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,084616 |
| 200 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 8,045575 |
| 200 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,572278 |
| 200 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,033771 |
| 200 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,340059 |
| 200 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,614728 |
| 200 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,173683 |
| 200 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,56723 |
| 200 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,332071 |
| 200 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,275598 |
| 200 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,230544 |
| 200 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,424454 |
| 200 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,120572 |
| 200 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,648324 |
| 200 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 76,848649 |
| 200 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 36,9646 |
| 200 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,225937 |
| 200 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,049623 |
| 200 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,486493 |
| 200 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,733188 |
| 200 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,523676 |
| 200 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 23,040432 |
| 200 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,809948 |
| 200 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,189985 |
| 200 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 127,133879 |
| 200 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,575447 |
| 200 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,232079 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|-------------|
| 200 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,244069 |
| 200 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,881509 |
| 200 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,43332 |
| 200 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 25,061691 |
| 200 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,322799 |
| 200 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,181056 |
| 200 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,835594 |
| 300 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,185055 |
| 300 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,717838 |
| 300 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,784412 |
| 300 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,033657 |
| 300 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,063622 |
| 300 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,348456 |
| 300 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,63183 |
| 300 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,725899 |
| 300 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 2,005709 |
| 300 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,290142 |
| 300 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,942536 |
| 300 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,735411 |
| 300 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,360094 |
| 300 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 536,83767 |
| 300 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,837217 |
| 300 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 835,919606 |
| 300 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,658013 |
| 300 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,842608 |
| 300 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,445789 |
| 300 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,298849 |
| 300 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,568706 |
| 300 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,34895 |
| 300 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,308595 |
| 300 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 15,950051 |
| 300 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1361,401321 |
| 300 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1405,520548 |
| 300 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 336,751974 |
| 300 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,755936 |
| 300 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,817753 |
| 300 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,55248 |
| 300 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,126663 |
| 300 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,501532 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 300 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,370493 |
| 300 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,515857 |
| 300 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,607134 |
| 300 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3564,859461 |
| 300 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,059053 |
| 300 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,650694 |
| 300 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,543912 |
| 300 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,096659 |
| 300 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,609017 |
| 300 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,071441 |
| 300 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,241703 |
| 300 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,472568 |
| 300 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,963771 |
| 300 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,50084 |
| 300 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 2,996424 |
| 300 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,088867 |
| 300 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 8,018897 |
| 300 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,532743 |
| 300 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,074339 |
| 300 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,721758 |
| 300 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,423215 |
| 300 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 69,877881 |
| 300 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,562622 |
| 300 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,326623 |
| 300 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,286186 |
| 300 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,241008 |
| 300 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,415424 |
| 300 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,127827 |
| 300 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,51946 |
| 300 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 77,08978 |
| 300 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,224037 |
| 300 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,245132 |
| 300 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,059714 |
| 300 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,466083 |
| 300 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,787957 |
| 300 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,338638 |
| 300 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,786775 |
| 300 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,707795 |
| 300 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,100279 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|-------------|
| 300 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 127,995841 |
| 300 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,546788 |
| 300 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,152703 |
| 300 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,292953 |
| 300 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,811261 |
| 300 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,469931 |
| 300 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,602956 |
| 300 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 32,945433 |
| 300 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,002591 |
| 300 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 53,015111 |
| 400 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,194565 |
| 400 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,708568 |
| 400 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,753163 |
| 400 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,037553 |
| 400 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,079977 |
| 400 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,345493 |
| 400 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,660369 |
| 400 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,675973 |
| 400 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 1,97868 |
| 400 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,289179 |
| 400 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,913066 |
| 400 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,711209 |
| 400 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,314019 |
| 400 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 538,221315 |
| 400 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,666118 |
| 400 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 838,059449 |
| 400 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,586979 |
| 400 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,863627 |
| 400 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,437566 |
| 400 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,312589 |
| 400 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,568747 |
| 400 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,314132 |
| 400 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,203588 |
| 400 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 15,935949 |
| 400 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1365,228854 |
| 400 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1404,791323 |
| 400 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 338,617099 |
| 400 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,74788 |
| 400 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,801733 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 400 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,56805 |
| 400 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,057284 |
| 400 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,56366 |
| 400 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,322891 |
| 400 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,491744 |
| 400 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,149626 |
| 400 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3565,975534 |
| 400 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,04913 |
| 400 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,653338 |
| 400 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,577026 |
| 400 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 5,997601 |
| 400 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,578596 |
| 400 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 13,940377 |
| 400 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,635434 |
| 400 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,087758 |
| 400 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,523472 |
| 400 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,475037 |
| 400 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,004292 |
| 400 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,099903 |
| 400 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 7,945301 |
| 400 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,515764 |
| 400 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 20,966561 |
| 400 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,985485 |
| 400 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,695713 |
| 400 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,213664 |
| 400 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,572518 |
| 400 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,312519 |
| 400 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,239915 |
| 400 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,233411 |
| 400 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,309453 |
| 400 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,215905 |
| 400 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,688424 |
| 400 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 76,878282 |
| 400 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,167345 |
| 400 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,249083 |
| 400 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,091942 |
| 400 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,477996 |
| 400 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,856227 |
| 400 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,121598 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|-------------|
| 400 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,825783 |
| 400 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,848723 |
| 400 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,138381 |
| 400 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 128,653958 |
| 400 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,581101 |
| 400 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,208277 |
| 400 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,35471 |
| 400 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,949727 |
| 400 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,373675 |
| 400 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,759601 |
| 400 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,342506 |
| 400 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,086442 |
| 400 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,797343 |
| 500 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,192456 |
| 500 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,716589 |
| 500 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,805161 |
| 500 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,047414 |
| 500 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,094313 |
| 500 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,328576 |
| 500 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,633642 |
| 500 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,685077 |
| 500 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 1,99044 |
| 500 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,288903 |
| 500 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,920899 |
| 500 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,711488 |
| 500 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,385083 |
| 500 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 541,063527 |
| 500 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,472651 |
| 500 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 836,699268 |
| 500 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,618163 |
| 500 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,819586 |
| 500 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,448296 |
| 500 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,298169 |
| 500 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,566564 |
| 500 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,416936 |
| 500 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,331143 |
| 500 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 16,2299 |
| 500 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1360,059273 |
| 500 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1406,53602 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 500 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 335,834999 |
| 500 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,755073 |
| 500 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,802241 |
| 500 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,554195 |
| 500 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,031989 |
| 500 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,578697 |
| 500 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,610241 |
| 500 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,766461 |
| 500 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,498495 |
| 500 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3566,913674 |
| 500 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,080328 |
| 500 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,643077 |
| 500 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,622134 |
| 500 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,041349 |
| 500 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,56979 |
| 500 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,092477 |
| 500 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,832783 |
| 500 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,532758 |
| 500 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,783113 |
| 500 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,523984 |
| 500 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,008089 |
| 500 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,111835 |
| 500 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 8,034382 |
| 500 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,601566 |
| 500 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,009143 |
| 500 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,403084 |
| 500 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,432393 |
| 500 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,177476 |
| 500 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,563672 |
| 500 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,307325 |
| 500 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,211263 |
| 500 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,051806 |
| 500 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,387566 |
| 500 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,108399 |
| 500 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,468421 |
| 500 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 76,146069 |
| 500 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,027323 |
| 500 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,287757 |
| 500 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,113881 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|------------|
| 500 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,575647 |
| 500 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,817481 |
| 500 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,016801 |
| 500 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,772603 |
| 500 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,824614 |
| 500 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,24635 |
| 500 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 128,4458 |
| 500 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,612116 |
| 500 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,188011 |
| 500 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,251676 |
| 500 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 15,032198 |
| 500 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,370667 |
| 500 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,848693 |
| 500 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,198492 |
| 500 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 38,898953 |
| 500 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,95675 |
| 600 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,196629 |
| 600 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,723647 |
| 600 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,739232 |
| 600 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,052527 |
| 600 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,09917 |
| 600 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,373688 |
| 600 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,633089 |
| 600 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,730917 |
| 600 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 1,988392 |
| 600 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,278837 |
| 600 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,908196 |
| 600 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,706346 |
| 600 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,325037 |
| 600 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 537,973353 |
| 600 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,5346 |
| 600 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 836,052427 |
| 600 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,645852 |
| 600 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,857873 |
| 600 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,458197 |
| 600 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,324641 |
| 600 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,561957 |
| 600 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,395332 |
| 600 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,336866 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 600 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 16,038213 |
| 600 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1360,944698 |
| 600 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1400,788302 |
| 600 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 338,307163 |
| 600 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,736001 |
| 600 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,783771 |
| 600 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,606718 |
| 600 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,162256 |
| 600 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,718979 |
| 600 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,462267 |
| 600 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,696805 |
| 600 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,523334 |
| 600 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3571,485409 |
| 600 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,060437 |
| 600 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,628948 |
| 600 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,488621 |
| 600 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,058875 |
| 600 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,617591 |
| 600 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,104538 |
| 600 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,470079 |
| 600 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,509601 |
| 600 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,975566 |
| 600 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,532102 |
| 600 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,02313 |
| 600 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,103495 |
| 600 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 8,026402 |
| 600 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,511306 |
| 600 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,115377 |
| 600 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,410214 |
| 600 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,440704 |
| 600 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,803323 |
| 600 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,597755 |
| 600 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,361863 |
| 600 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,267969 |
| 600 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,295173 |
| 600 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,435223 |
| 600 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,063344 |
| 600 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,632061 |
| 600 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 76,967371 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|------------|
| 600 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 36,948574 |
| 600 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,275977 |
| 600 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,095411 |
| 600 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,486295 |
| 600 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,721048 |
| 600 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,172699 |
| 600 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,843361 |
| 600 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,86462 |
| 600 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,209049 |
| 600 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 127,750464 |
| 600 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,6055 |
| 600 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,224007 |
| 600 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,269387 |
| 600 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,76305 |
| 600 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,389214 |
| 600 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,658488 |
| 600 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,208497 |
| 600 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,10139 |
| 600 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,958539 |
| 700 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,187918 |
| 700 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,727266 |
| 700 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,772994 |
| 700 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,059896 |
| 700 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,117028 |
| 700 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,355099 |
| 700 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,604805 |
| 700 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,696461 |
| 700 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 2,014584 |
| 700 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,287992 |
| 700 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,893143 |
| 700 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,697396 |
| 700 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,394351 |
| 700 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 536,326326 |
| 700 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,127342 |
| 700 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 835,491087 |
| 700 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,638689 |
| 700 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,977293 |
| 700 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,439767 |
| 700 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,322846 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|---------|---------|-------------|
| 700 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,558041 |
| 700 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,387571 |
| 700 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,324658 |
| 700 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 16,006408 |
| 700 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1365,353522 |
| 700 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1393,748516 |
| 700 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 335,649005 |
| 700 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,755825 |
| 700 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,806322 |
| 700 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,590489 |
| 700 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,051079 |
| 700 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,641119 |
| 700 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,461635 |
| 700 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,558468 |
| 700 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,296396 |
| 700 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3567,914179 |
| 700 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,073053 |
| 700 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,647833 |
| 700 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,534612 |
| 700 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,125366 |
| 700 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,598304 |
| 700 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 13,906217 |
| 700 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,637702 |
| 700 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,024504 |
| 700 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,641056 |
| 700 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,498723 |
| 700 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,009141 |
| 700 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,077013 |
| 700 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 7,982296 |
| 700 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,554035 |
| 700 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,120923 |
| 700 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 87,597038 |
| 700 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,459108 |
| 700 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,113417 |
| 700 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,581283 |
| 700 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,323258 |
| 700 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,27579 |
| 700 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,16558 |
| 700 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,332299 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|------------|
| 700 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,075288 |
| 700 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,568476 |
| 700 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 77,679758 |
| 700 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,105214 |
| 700 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,263902 |
| 700 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,064993 |
| 700 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,55361 |
| 700 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,863423 |
| 700 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,325669 |
| 700 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,716702 |
| 700 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,679174 |
| 700 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,097337 |
| 700 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 128,391639 |
| 700 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,563123 |
| 700 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,201843 |
| 700 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,294685 |
| 700 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,809894 |
| 700 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,382378 |
| 700 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 25,00677 |
| 700 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,108125 |
| 700 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,198434 |
| 700 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,938893 |
| 800 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,190114 |
| 800 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,71572 |
| 800 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,799257 |
| 800 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,030562 |
| 800 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,072089 |
| 800 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,360822 |
| 800 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,609886 |
| 800 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,724273 |
| 800 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 2,000039 |
| 800 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,281557 |
| 800 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,926295 |
| 800 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,724223 |
| 800 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,405065 |
| 800 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 539,392803 |
| 800 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,695825 |
| 800 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 837,141267 |
| 800 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,611497 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|---------|---------|-------------|
| 800 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,804242 |
| 800 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,459981 |
| 800 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,312248 |
| 800 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,569959 |
| 800 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,363609 |
| 800 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,24231 |
| 800 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 16,236039 |
| 800 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1368,211605 |
| 800 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1402,515399 |
| 800 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 336,283971 |
| 800 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,738374 |
| 800 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,80699 |
| 800 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,579799 |
| 800 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,134254 |
| 800 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,512817 |
| 800 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,357225 |
| 800 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,526387 |
| 800 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,01186 |
| 800 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3562,146214 |
| 800 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,060609 |
| 800 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,674646 |
| 800 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,630043 |
| 800 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,118307 |
| 800 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,599306 |
| 800 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,095443 |
| 800 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,683122 |
| 800 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 36,945649 |
| 800 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 50,793435 |
| 800 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,52152 |
| 800 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 3,008418 |
| 800 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,091352 |
| 800 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 7,981962 |
| 800 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,501506 |
| 800 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,232719 |
| 800 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 89,337756 |
| 800 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,514095 |
| 800 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,609953 |
| 800 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,568769 |
| 800 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,377646 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|----------|---------|------------|
| 800 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,2992 |
| 800 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,149703 |
| 800 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,412638 |
| 800 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,08183 |
| 800 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,667551 |
| 800 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 77,14228 |
| 800 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 37,058447 |
| 800 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,263676 |
| 800 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,099043 |
| 800 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,570649 |
| 800 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,717909 |
| 800 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,246738 |
| 800 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,648254 |
| 800 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,78654 |
| 800 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,179097 |
| 800 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 127,954866 |
| 800 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,564822 |
| 800 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,200284 |
| 800 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,245835 |
| 800 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,873735 |
| 800 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,330533 |
| 800 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,487627 |
| 800 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,145697 |
| 800 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,127962 |
| 800 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 52,959752 |
| 900 | 100 | 100 | solved | 22263 | 125738 | 80000 | 0,185667 |
| 900 | 100 | 200 | solved | 37838 | 250690 | 160000 | 0,735674 |
| 900 | 100 | 300 | solved | 43820 | 375896 | 240000 | 2,756507 |
| 900 | 100 | 400 | infeasible | -3031 | 501424 | 320000 | 1,036165 |
| 900 | 100 | 500 | infeasible | -3031 | 626538 | 400000 | 1,077135 |
| 900 | 100 | 600 | infeasible | -3031 | 751761 | 480000 | 1,377199 |
| 900 | 100 | 700 | infeasible | -3031 | 876811 | 560000 | 1,632638 |
| 900 | 100 | 800 | infeasible | -3031 | 1001769 | 640000 | 1,714073 |
| 900 | 100 | 900 | infeasible | -3031 | 1126642 | 720000 | 2,007695 |
| 900 | 200 | 100 | solved | 19780 | 251490 | 160000 | 0,290525 |
| 900 | 200 | 200 | solved | 43459 | 502110 | 320000 | 0,940095 |
| 900 | 200 | 300 | solved | 61228 | 752338 | 480000 | 2,745793 |
| 900 | 200 | 400 | solved | 77598 | 1002352 | 640000 | 4,345086 |
| 900 | 200 | 500 | solved | 86364 | 1252062 | 800000 | 537,145347 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|------------|--------|---------|---------|-------------|
| 900 | 200 | 600 | solved | 91624 | 1502520 | 960000 | 51,761877 |
| 900 | 200 | 700 | solved | 88837 | 1752792 | 1120000 | 836,753568 |
| 900 | 200 | 800 | infeasible | -5991 | 2002908 | 1280000 | 4,680612 |
| 900 | 200 | 900 | infeasible | -5991 | 2252683 | 1440000 | 4,858919 |
| 900 | 300 | 100 | solved | 16448 | 377496 | 240000 | 0,438018 |
| 900 | 300 | 200 | solved | 44292 | 753138 | 480000 | 1,315613 |
| 900 | 300 | 300 | solved | 67096 | 1127891 | 720000 | 2,586716 |
| 900 | 300 | 400 | solved | 85410 | 1503182 | 960000 | 6,410166 |
| 900 | 300 | 500 | solved | 103114 | 1878683 | 1200000 | 9,359399 |
| 900 | 300 | 600 | solved | 114491 | 2253256 | 1440000 | 16,121119 |
| 900 | 300 | 700 | solved | 121638 | 2628023 | 1680000 | 1358,479507 |
| 900 | 300 | 800 | solved | 128224 | 3003066 | 1920000 | 1396,251226 |
| 900 | 300 | 900 | solved | 135439 | 3378637 | 2160000 | 337,572729 |
| 900 | 400 | 100 | solved | 16806 | 503824 | 320000 | 0,746333 |
| 900 | 400 | 200 | solved | 41066 | 1003952 | 640000 | 1,795523 |
| 900 | 400 | 300 | solved | 68619 | 1503982 | 960000 | 3,583759 |
| 900 | 400 | 400 | solved | 90344 | 2004384 | 1280000 | 7,128971 |
| 900 | 400 | 500 | solved | 105479 | 2503907 | 1600000 | 11,704442 |
| 900 | 400 | 600 | solved | 121772 | 3003763 | 1920000 | 17,387506 |
| 900 | 400 | 700 | solved | 136848 | 3504177 | 2240000 | 19,852319 |
| 900 | 400 | 800 | solved | 154897 | 4004199 | 2560000 | 24,270094 |
| 900 | 400 | 900 | solved | 162790 | 4504155 | 2880000 | 3568,117164 |
| 900 | 500 | 100 | solved | 14062 | 629738 | 400000 | 1,068935 |
| 900 | 500 | 200 | solved | 40767 | 1254462 | 800000 | 2,647581 |
| 900 | 500 | 300 | solved | 65413 | 1880283 | 1200000 | 4,615812 |
| 900 | 500 | 400 | solved | 86181 | 2504707 | 1600000 | 6,089428 |
| 900 | 500 | 500 | solved | 108516 | 3129770 | 2000000 | 9,576819 |
| 900 | 500 | 600 | solved | 128326 | 3755029 | 2400000 | 14,013582 |
| 900 | 500 | 700 | solved | 148610 | 4379816 | 2800000 | 31,528441 |
| 900 | 500 | 800 | solved | 166026 | 5005061 | 3200000 | 37,160314 |
| 900 | 500 | 900 | solved | 182633 | 5630143 | 3600000 | 51,052649 |
| 900 | 600 | 100 | solved | 10683 | 755761 | 480000 | 1,498881 |
| 900 | 600 | 200 | solved | 36681 | 1505720 | 960000 | 2,998909 |
| 900 | 600 | 300 | solved | 58738 | 2255656 | 1440000 | 5,102958 |
| 900 | 600 | 400 | solved | 85158 | 3005363 | 1920000 | 8,027065 |
| 900 | 600 | 500 | solved | 110303 | 3755829 | 2400000 | 12,527216 |
| 900 | 600 | 600 | solved | 136842 | 4505705 | 2880000 | 21,096748 |
| 900 | 600 | 700 | solved | 154101 | 5255810 | 3360000 | 88,832479 |
| 900 | 600 | 800 | solved | 174176 | 6005933 | 3840000 | 45,79029 |

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|--------|--------|----------|---------|------------|
| 900 | 600 | 900 | solved | 190351 | 6756934 | 4320000 | 70,272256 |
| 900 | 700 | 100 | solved | 5640 | 881611 | 560000 | 1,603839 |
| 900 | 700 | 200 | solved | 31068 | 1756792 | 1120000 | 3,328446 |
| 900 | 700 | 300 | solved | 58825 | 2631223 | 1680000 | 6,276731 |
| 900 | 700 | 400 | solved | 86154 | 3506577 | 2240000 | 10,247795 |
| 900 | 700 | 500 | solved | 111873 | 4381416 | 2800000 | 13,449473 |
| 900 | 700 | 600 | solved | 135557 | 5256610 | 3360000 | 19,107163 |
| 900 | 700 | 700 | solved | 161258 | 6131603 | 3920000 | 30,723091 |
| 900 | 700 | 800 | solved | 177006 | 7008004 | 4480000 | 77,143964 |
| 900 | 700 | 900 | solved | 194866 | 7883540 | 5040000 | 36,903651 |
| 900 | 800 | 100 | solved | 2284 | 1007369 | 640000 | 2,290108 |
| 900 | 800 | 200 | solved | 31717 | 2007708 | 1280000 | 4,107307 |
| 900 | 800 | 300 | solved | 57455 | 3007066 | 1920000 | 9,541549 |
| 900 | 800 | 400 | solved | 86156 | 4007399 | 2560000 | 11,75569 |
| 900 | 800 | 500 | solved | 111736 | 5007461 | 3200000 | 18,328304 |
| 900 | 800 | 600 | solved | 136496 | 6007533 | 3840000 | 22,822217 |
| 900 | 800 | 700 | solved | 156111 | 7008804 | 4480000 | 26,829446 |
| 900 | 800 | 800 | solved | 180879 | 8009201 | 5120000 | 36,218911 |
| 900 | 800 | 900 | solved | 204091 | 9009458 | 5760000 | 128,075426 |
| 900 | 900 | 100 | solved | 434 | 1133042 | 720000 | 2,596619 |
| 900 | 900 | 200 | solved | 28634 | 2258283 | 1440000 | 5,194615 |
| 900 | 900 | 300 | solved | 58839 | 3383437 | 2160000 | 10,396184 |
| 900 | 900 | 400 | solved | 82828 | 4508155 | 2880000 | 14,843404 |
| 900 | 900 | 500 | solved | 107898 | 5633343 | 3600000 | 17,428406 |
| 900 | 900 | 600 | solved | 130796 | 6759334 | 4320000 | 24,993726 |
| 900 | 900 | 700 | solved | 157495 | 7885140 | 5040000 | 33,322101 |
| 900 | 900 | 800 | solved | 184374 | 9010258 | 5760000 | 39,119944 |
| 900 | 900 | 900 | solved | 206756 | 10135599 | 6480000 | 53,142726 |