

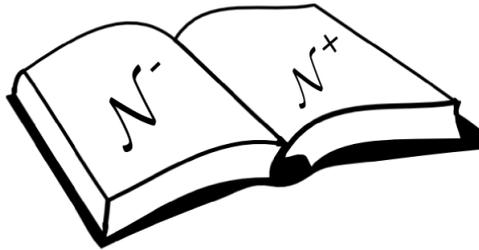
Tesis de Maestría en Física



CUANTIZACIÓN DE DATOS INICIALES DE CAMPO ESCALAR
LIBRE SOBRE HIPERSUPERFICIES NULAS

RODRIGO EYHERALDE

ORIENTADOR:
DR. MICHAEL REISENBERGER



Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

CUANTIZACIÓN DE DATOS INICIALES DE CAMPO ESCALAR
LIBRE SOBRE HIPERSUPERFICIES NULAS

ESTUDIANTE: RODRIGO EYHERALDE

ORIENTADOR: DR. MICHAEL REISENBERGER

TRIBUNAL:

DR. RODOLFO GAMBINI

DR. ALEJANDRO ROMANELLI

DR. GUSTAVO GUERBEROFF

DR. PABLO MORA

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Junio 2013

RESUMEN

En este trabajo proponemos una teoría cuántica que describe al campo libre de Klein-Gordon en términos de datos nulos (datos iniciales sobre hipersuperficies nulas), asumiendo que la geometría espacio-temporal es dada. Como hipersuperficie de datos nulos se consideran las dos ramas generadas por las geodésicas nulas que emergen de una superficie bidimensional en direcciones futuras y normales a la superficie. Se construye dicha teoría usando las herramientas de teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo, mostrándose que se trata de una extensión natural y rigurosa de la cuantización estándar. Esto se realiza tanto en el espacio de Minkowski como en espacio tiempo-curvo y se demuestran en ambos casos las propiedades cuasi-libre y Hadamard. Para probar esta última propiedad en el caso de espacio-tiempo curvo se agrega una hipótesis sobre el comportamiento de la teoría cerca de la superficie espacial. Un aspecto sorprendente de nuestra cuantización es que no todos los modos de datos iniciales son cuantizables. Todos los promedios espacio-temporales del campo escalar están representados por operadores, pero hay modos de datos iniciales que no lo están. Estos modos excluidos son los conocidos *modos cero*.

ABSTRACT

In this work we propose a quantum theory describing the free Klein-Gordon field in terms of null data (initial data on null hypersurfaces), assuming a fixed spacetime geometry. The null hypersurface we consider consists of the two branches generated by the null geodesics emanating normally and to the future from a two dimensional space-like surface. This theory, which is a natural and rigorous extension of the standard quantization, is constructed using the tools of quantum field theory in curved space-time. We build the theory both in Minkowski and curved spacetime and we prove the quasi-free and Hadamard properties. To prove the latter in curved spacetime, an additional hypothesis about the behavior of the field near the space-like surface is used. A remarkable aspect of our theory is that not every initial data mode is quantizable. All the smeared field modes are represented by quantum operators but there are initial data modes that are not. These excluded modes are the well known *zero modes*.

AGRADECIMIENTOS

Este documento es una síntesis de un proceso de aprendizaje y como tal refleja parte del trabajo y un poco del esfuerzo puesto en él. Pero es muy injusto en un aspecto: no refleja la diversidad de personas que fueron parte del proceso. Sin dudas son más que un tutor y un estudiante. Dedico este espacio a remediar esa carencia.

En primer lugar a mi familia, en especial a Lucía, agradezco el apoyo, la paciencia y las llamadas de atención para no perder por completo los puntos de referencia. En este caso, la recompensa es el fin del camino.

A todos mis compañeros de estudio en la licenciatura y la maestría les agradezco el tiempo invertido en disfrutar, entender, no entender y sufrir con la física. Lucía, Federico, Pablo y Marcela: ustedes tienen la culpa, gracias. También agradezco las charlas sobre física que mantuve con muchos compañeros. Entre ellos los ya mencionados y también Saeed, Juan Manuel, Luis Pedro, César, Juan Andrés, Nicolás R., etc. A todos mis docentes les agradezco el tiempo invertido en mi formación. Muchas de sus contribuciones están escondidas en los rincones de esta tesis. También agradezco mucho el apoyo constante de mis compañeros de oficina: Sofía, Nicolás y los Meteo.

A la Comisión Académica de Posgrado agradezco la financiación de parte de este trabajo y al Instituto de Física de Facultad de Ciencias (IFFC) el semestre libre para escribir el manuscrito.

En cuanto al documento en sí, agradezco al Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas, al plan Ceibal, al IFFC y a Cecilia por facilitarme el soporte físico para la escritura (computadoras). También agradezco a la Biblioteca de Facultad de Ciencias, a la librería Génesis y el axive.org por ayudarme a acceder a innumerables publicaciones y libros de texto. A André Miede agradezco y felicito por la plantilla de Latex *Classicthesis* y por su pasaje a *Lyx* a Nicholas Mariette e Ivo Pletikosić. A Lucía D., Lucía F., Juan Manuel, Javier P. y Javier O. agradezco enormemente las correcciones y comentarios sobre el documento.

Habiendo aclarado el panorama de contribuciones a la tesis, agradezco finalmente a Michael. El empeño quijotesco en introducirme en ideas para las cuales mi cerebro no estaba preparado, es admirable. Así mismo le agradezco la llamada desde el aeropuerto, los fines de semana y el no haber dudado nunca (o al menos no transmitirme las dudas) de que este barco llegaría a buen puerto, a pesar de lo largo del viaje.

Si alguna contribución a este trabajo no hubiere sido mencionada, considérese un olvido y perdónese.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
I	CIMIENTO DE LA TESIS	5
2	LA FORMA SIMPLÉCTICA	7
2.1	Introducción	7
2.2	Espacio y variedad Simpléctica	7
2.3	La forma simpléctica en la Mecánica Hamiltoniana	8
2.4	La forma simpléctica en la Mecánica Lagrangiana	10
2.5	Los corchetes de Poisson y la forma simpléctica.	15
2.6	Resumen	17
3	CUANTIZACIÓN SIMPLÉCTICA	19
3.1	Generalidades	19
3.2	Problema de la equivalencia de las cuantizaciones	21
3.3	El oscilador armónico	26
3.4	Resumen	32
4	TEORÍA ALGEBRAICA DE CAMPOS	33
4.1	La construcción del álgebra de Weyl	33
4.2	Estados algebraicos	34
4.3	Construcción GNS	35
4.4	Estados físicos	36
4.5	Resumen	41
5	ANÁLISIS MICROLOCAL EN TEORÍA DE CAMPOS	43
5.1	Introducción	43
5.2	Definiciones	44
5.3	Ejemplos	45
5.4	Operaciones con distribuciones y el WF	48
5.5	WF para soluciones de ecuaciones diferenciales	52
5.6	Condición Espectral Microlocal	55
5.7	Resultado de Radzikowski	56
5.8	Resumen	57
II	TRATAMIENTO DEL PROBLEMA	59
6	PROBLEMA CLÁSICO E INGREDIENTES PARA LA CUANTIZACIÓN	61
6.1	Geometría del problema	61
6.2	Hiperbolicidad Global	62
6.3	Problema clásico	64
6.4	Cuantización	68
6.5	Resumen	72
7	PROPUESTA DE CUANTIZACIÓN	73
7.1	Introducción	73
7.2	Cuantización en espacio-tiempo plano	73

7.3	Cuantización en espacio-tiempo curvo	83
7.4	Estudio de la condición μSC	86
7.5	Resumen	95
8	CONCLUSIONES	97
III APÉNDICES		101
A	DISTRIBUCIONES	103
A.1	Definiciones básicas.	103
A.2	Operaciones	105
A.3	Transformada de Fourier	108
B	ESPACIOS DE HILBERT Y ÁLGEBRAS DE OPERADORES	111
B.1	Espacios de Hilbert	111
B.2	Álgebras de Operadores	115
C	FUNCIONES DE CORRELACIÓN	119
C.1	Teoría de Campos	119
C.2	La función de Pauli-Jordan y el propagador de K-G en espacio-tiempo plano.	120
C.3	Formulación algebraica	121
C.4	Aplicación al caso cuasi-libre	121
D	CÁLCULOS	127
D.1	El mapa K_N como mapa lineal de datos de prueba a $L^2(h)$	127
D.2	Ortogonalidad de las soluciones de onda plana	128
D.3	Condición Hadamard en espacio-tiempo plano	130
D.4	Relación entre forma simpléctica en N y \mathcal{N}	132
D.5	La distribución \mathbb{E} y su WF	132
D.6	Simplificación del estudio del WF (Λ)	133
D.7	La distribución λ_N	136
D.8	Cálculo del WF de λ_N	138
BIBLIOGRAFÍA		141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Relación entre construcción Fock y GNS a partir de un estado cuasi-libre	39
Figura 2	Hipersuperficie nula en la que se define la cuantización de datos iniciales	62
Figura 3	Diferencia entre soluciones suaves genéricas y soluciones de tipo Ef	69
Figura 4	Conexión entre la cuantizaciones en espacio-tiempo curvo y plano.	84
Figura 5	Restricción del estudio de $WF(\Lambda)$ que involucra un sólo punto de \mathcal{N}	94
Figura 6	Teorema de Propagación de singularidades y Condición Espectral Microlocal.	95

ACRÓNIMOS

aQFT	Teoría Cuántica de Campos Algebraica
CCR	Relaciones de Conmutación Canónicas
CS-QFT	Teoría Cuántica de Campos en Espacio-Tiempo Curvo
K-G	Klein Gordon
TF	transformada de Fourier
μ SC	Condición Espectral Microlocal
WF	Wave Front Set

NOMENCLATURA

GEOMETRÍA DEL ESPACIO-TIEMPO

N	Hipersuperficie de datos nulos en espacio-tiempo plano
N^+, N^-	Ramas nulas de N
S^0	$N^+ \cap N^-$
$\mathcal{D}^+[N]$	Dominio de dependencia futuro de N
M	Interior de $\mathcal{D}^+[N]$
V	Espacio-tiempo plano (espacio de Minkowski)

\mathcal{N}	Hipersuperficie de datos nulos en espacio-tiempo curvo
$\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^-$	Ramas nulas de \mathcal{N}
S^0	$\mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-$
$\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$	Dominio de dependencia futuro de \mathcal{N}
M	Interior de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$
V	Espacio-tiempo curvo

TEORÍA CLÁSICA

\mathcal{S}	Soluciones suaves y de soporte compacto en secciones espaciales para K-G
\mathcal{S}_N	Datos iniciales suaves en N
$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$	Datos iniciales suaves en \mathcal{N}
\mathcal{M}	Espacio de Fase
$\Omega(\cdot, \cdot)$	Forma simpléctica
$\Omega(y, \cdot)$	Función lineal asociada a y definida por Ω
Ω_{Σ}	Forma simpléctica sobre la hipersuperficie Σ
g	Producto interno (real) en el espacio de soluciones
\mathcal{T}	Funciones de prueba suaves y de soporte compacto en M
Af	Función de Green avanzada para K-G con fuente f
Rf	Función de Green retardada para K-G con fuente f
Ef	$Af - Rf$, solución de K-G sin fuentes

TEORÍA CUÁNTICA

\mathcal{H}	Espacio de Hilbert de una partícula
\mathcal{F}	Espacio de Hilbert de un sistema cuántico
$\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$	Espacio de Fock simétrico
$ \phi\rangle$	Estado cuántico ϕ en notación de Dirac
$\langle\psi $	1-forma ψ en notación de Dirac
$\langle\psi, \phi\rangle_{\mathcal{F}}$	Producto interno en el espacio \mathcal{F}
K	Proyector de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$
$K_{\mathbb{N}}$	Proyector de $\mathcal{S}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{H}$
$K_{\mathbb{N}}$	Proyector de $\mathcal{S}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{H}$

\mathcal{A}	Álgebra de Weyl
$\pi(\mathcal{A})$	Representación de \mathcal{A}
$\pi_{\omega}(\mathcal{A})$	Representación de \mathcal{A} en la construcción GNS de ω
\hat{A}	Operador que representa al observable A
\hat{A}^*	Adjunto del operador \hat{A}

FUNCIONES Y DISTRIBUCIONES

$C^{\infty}(X)$	Funciones suaves en X
$C_0^{\infty}(X)$	Funciones suaves y de soporte compacto en X
$\mathcal{D}'(X)$	Distribuciones sobre funciones de prueba en $C_0^{\infty}(X)$
$\mathcal{E}'(X)$	Distribuciones de soporte compacto en X
\bar{f}	Conjugado complejo de la función f
\tilde{f}	Transformada de Fourier de f
f^*	Pullback por f
$\delta(x)$ o $\delta(f)$	Delta de Dirac como función generalizada y como funcional lineal
$\theta(x)$ o $\theta(f)$	Escalón de Heaviside como función y como funcional lineal
$\lambda(\phi_1, \phi_2)$	Función de correlación de dos puntos (promediada) sobre \mathcal{S}
$\Lambda(f, g)$	Función de correlación de dos puntos como distribución en V
Δ	Función de Pauli-Jordan
Δ^+	Función de correlación de dos puntos en espacio-tiempo plano

INTRODUCCIÓN

Esta tesis se enmarca en el área de Teoría Cuántica de Campos en Espacio-Tiempo Curvo (CS-QFT), la cual trata a los campos como entidades cuánticas a excepción del campo gravitatorio. En este enfoque la gravedad permanece como un campo clásico e interactúa con el resto de los campos por medio de relaciones semi-clásicas. Dado que los campos cuánticos descritos de esta manera existen sobre una geometría curva, el proceso usual de cuantización en el espacio de Minkowski debe ser alterado, pues este se apoya en la simetría global que posee este espacio-tiempo (simetría de Poincaré).

Es evidente por su carácter semi-clásico que CS-QFT no aspira a ser una teoría fundamental. Aún así, sus predicciones han sido siempre una referencia principal para las teorías fundamentales sobre la gravedad. Por ejemplo, sus grandes logros de los 70's, como son la *radiación de Agujeros Negros* y el *efecto Unruh*, siguen marcando el camino para los candidatos a teoría cuántica de la gravedad.

En la década de los 90's CS-QFT logró completar una formulación rigurosa de la teoría de campos libres en espacio-tiempo curvo por medio de un enfoque que centra el proceso de cuantización en un álgebra de observables más que en un conjunto de observables sobre un espacio de Hilbert. Se trata del enfoque conocido como Teoría Cuántica de Campos Algebraica (aQFT). En este punto restaba por resolver el problema de la elección del vacío de la teoría. Su resolución, mediante la condición Hadamard (Kay and Wald [25]) y gracias a los teoremas de Verch [37] y de Radzikowski [30], condujo a un gran desarrollo de esta área de la teoría de campos. Entre los logros de este período se destaca la teoría perturbativa de campos con interacción en espacio-tiempo curvo (Hollands and Wald [21]).

En este trabajo hacemos uso de algunos de estos desarrollos para encontrar una teoría cuántica que describa el problema de *datos iniciales* del campo de Klein Gordon (K-G) libre sobre una hipersuperficie \mathcal{N} , formada por dos ramas nulas. Cada rama es trazada por las dos familias de geodésicas nulas que emergen de una superficie bidimensional espacial en las direcciones futuras y normales a la misma. En particular, proponemos una cuantización tipo Fock de los datos iniciales sobre esta hipersuperficie y demostramos que bajo ciertas circunstancias cumple la propiedad *Hadamard*. Esta es una generalización local del axioma de positividad de la energía en espacio de Minkowski y parece ser una condición necesaria para tener una teoría cuántica con "buenas" propiedades (en varios sentidos que discutiremos en el capítulo cuatro). Además de la propiedad Hadamard mostramos que

nuestra teoría es una extensión natural de la cuantización estándar del campo de $K-G$.

Un aspecto sorprendente de nuestra cuantización es que no todos los modos de datos iniciales son cuantizables. Todos los promedios espacio-temporales del campo escalar están representados por operadores, pero hay modos de datos iniciales que no lo están. Estos modos excluidos son los conocidos *modos cero* (modos problemáticos en la cuantización de datos sobre hipersuperficies nulas). De esta manera nuestro formalismo resuelve el problema de modos cero para \mathcal{N} automáticamente.

MOTIVACIÓN

La elección de la hipersuperficie \mathcal{N} en particular proviene del interés por verificar rigurosamente la forma introducida por Bousso [7] para una conjetura sobre la relación entre área y entropía en relatividad general. En dicho trabajo, Bousso conjetura que el área A de una superficie bidimensional espacial B impone un límite a la entropía calculada sobre ciertas hipersuperficies nulas que son extensiones de B en direcciones nulas. Concretamente la conjetura es que la entropía es menor o igual que $A/4$.

Como fue sugerido por Reisenberger [32], el estudio de un modelo cuántico de datos iniciales para gravedad en nuestra hipersuperficie se presenta como un ambiente ideal para verificar esta conjetura. La cuantización del campo de $K-G$ libre en \mathcal{N} representa un primer paso en este sentido. De hecho, del mismo trabajo también se desprende que la cuantización de este problema guarda similitudes con la cuantización del campo gravitatorio en la misma geometría.

Por otro lado, la cuantización del campo de $K-G$ libre en este tipo de hipersuperficies presenta un interés en sí mismo como variante del enfoque de *Light-Front Quantization*. Este formalismo ha sido usado para el estudio de Cromodinámica Cuántica (Heinzl [20]) en espacio-tiempo plano pues implica ciertas simplificaciones en su análisis. Como contrapartida, tiene algunos inconvenientes importantes. En particular, presenta un problema de modos cero análogo al que hemos estudiado en nuestro trabajo y las soluciones al mismo ([36],[40]) parecen ir en una línea similar a la de nuestra investigación.

ESQUEMA DEL TRABAJO

Para comenzar a explicar la construcción de la teoría cuántica, en el próximo capítulo introduciremos una herramienta fundamental: la *forma simpléctica*. Esta es la pieza clave en una construcción de la mecánica clásica que nos permite describir los sistemas físicos sin hacer referencia a ninguna elección particular de coordenadas canónicas, lo cual es muy beneficioso para tratar problemas en espacio-tiempos

arbitrarios. Dicho capítulo y el siguiente tienen como principal fuente el libro de Wald [39] y en ellos requerimos del lector el manejo del lenguaje usual de las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica de finitos e infinitos grados de libertad, presente en libros de texto como José and Saletan [24]. La formulación es completada discutiendo los corchetes de Poisson, como preparación para el siguiente capítulo.

En el tercer capítulo discutimos el proceso de cuantización en el lenguaje de mecánica simpléctica siguiendo también el tratamiento del libro de Wald [39]. El lector seguramente estará familiarizado con la presentación usual de la cuantización canónica, como la del oscilador armónico en el capítulo XII de Messiah [27] o el campo escalar en el capítulo XXI de Messiah [28] o el capítulo 2 de Birrell and Davies [4]. En ese caso podrá advertir que el énfasis de nuestro enfoque está en evitar la elección de sistemas de coordenadas privilegiados, manteniendo la simetría entre espacio y tiempo explícitamente en toda la construcción, como se explica en Ashtekar et al. [2]. Un punto clave del capítulo es la discusión de la no unicidad en la definición de la teoría cuántica sobre un espacio de Hilbert. Este es un problema común a todas las teorías cuánticas de sistemas con infinitos grados de libertad. Sin embargo en casos particulares (como las teorías de campos en el espacio de Minkowski) se resuelve al tener criterios extra para elegir ciertos espacios de estados por sobre otros. Al final del capítulo presentamos estas ideas aplicadas al ejemplo del oscilador armónico, buscando conectar nuestra construcción con los enfoques usuales de la cuantización de dicho problema.

En el cuarto capítulo discutimos la [aQFT](#), una formulación de teorías cuánticas que se independiza del espacio de Hilbert y cuyo foco está en el álgebra que forman un conjunto mínimo de observables. La discusión incluye las nociones del álgebra de observables, de estado algebraico y su relación con las teorías cuánticas sobre espacios de Hilbert mediante una construcción conocida como GNS (Gelfand–Naimark–Segal). Así mismo, tratamos algunos puntos específicos de importancia para esta tesis, como son los conceptos de estados algebraicos *cuasi-libres* y *Hadamard*. También analizamos la posibilidad de extender el álgebra para describir observables importantes en [CS-QFT](#) como los asociados al tensor de stress-energía. Este capítulo tiene una dosis importante de conceptos y lenguaje propios del estudio de estructuras algebraicas, por lo cual agregamos el apéndice [B.2](#) dedicado a introducir las definiciones e ideas indispensables para entenderlo.

En el quinto capítulo completamos un panorama de nociones generales introduciendo el análisis microlocal aplicado a Teoría de Campos. El capítulo gira en torno a la idea de *Wave Front Set*. Este es un concepto asociado al estudio de divergencias que se vuelve sumamente relevante pues, gracias al resultado de Radzikowski que presenta-

mos en la sección 5.7 y del teorema de Verch que discutimos al final del capítulo cuatro, vincula una noción de *energía positiva* - similar a la *condición espectral* de la teoría axiomática de campos en espacio-tiempo plano (Haag [18], Bogolubov et al. [6]) - con la de equivalencia de las teorías cuánticas. Todo este capítulo se nutre de la matemática desarrollada en el apéndice A.

Los capítulos seis y siete se enfocan en nuestro problema, comenzando en el capítulo seis con una descripción de sus aspectos geométricos; en particular discutiendo los puntos relevantes para el estudio del problema clásico de datos iniciales para la ecuación de K-G. Un tratamiento más general sobre geometría en espacio tiempo-curvo se encuentra en [38] o [19]. El resultado central del capítulo es la propuesta de datos iniciales de prueba. Esta elección es fundamental pues es la que determina cuales son los observables que se incluyen en la cuantización y cuáles se excluyen de la misma. Como último punto de este capítulo se discuten los ya citados *modos cero* y se concluye que son ellos los que quedan excluidos de nuestra cuantización.

La construcción detallada de la teoría cuántica, tanto en espacio-tiempo plano como en espacio-tiempo curvo se realiza en el capítulo siete con el apoyo de los apéndices C y D. El apéndice D funciona como depósito de todos los cálculos complicados para descomprimir el cuerpo de la tesis. Como primer punto, se realiza la cuantización de *datos iniciales nulos* en el caso de espacio-tiempo plano. Se demuestra que la misma es una extensión natural de la cuantización usual del campo de K-G y se muestra que presenta las propiedades cuasi-libre y Hadamard. En segundo lugar se define la cuantización en espacio-tiempo curvo, la cual hace uso de la construcción en espacio-tiempo plano. También se demuestra que, bajo ciertas hipótesis adicionales, posee la propiedad Hadamard. Esta demostración consiste en probar la condición Condición Espectral Microlocal (μSC), que es equivalente a la condición Hadamard. La prueba insume buena parte del capítulo y se apoya fuertemente en las herramientas de análisis microlocal discutidas en el capítulo cinco.

Las conclusiones y los apéndices ya mencionados completan el cuerpo de la tesis.

Parte I

CIMIENTO DE LA TESIS

LA FORMA SIMPLÉCTICA

2.1 INTRODUCCIÓN

Existe una formulación muy general de la mecánica, a veces denominada “mecánica simpléctica”, cuya filosofía es independizar la mecánica de las coordenadas canónicas elegidas para describir el sistema. En esta formulación el espacio de fase \mathcal{M} es visto como una *variedad simpléctica* (ver definición en 2.2). Esta formulación y su elemento clave, la *forma simpléctica*, son usualmente omitidos en el estudio de la mecánica analítica elemental. El motivo es que en muchos problemas de física contamos con una forma evidente de elegir un conjunto de coordenadas canónicas, pero este no es el caso que nos compete. El precio a pagar será la introducción de algunas herramientas de geometría diferencial.

Dada la importancia de esta estructura matemática, comenzamos el capítulo dando una definición general de estructuras simplécticas sobre espacios vectoriales y sobre variedades. Luego introduciremos la forma simpléctica dentro de sistemas mecánicos simples y finalmente discutiremos una construcción en base a la formulación Lagrangiana de la mecánica que es explícitamente covariante, es decir evita el uso de coordenadas privilegiadas en el espacio de fase. Por este motivo a esta construcción se la conoce como *espacio de fase covariante*.

2.2 ESPACIO Y VARIEDAD SIMPLÉCTICA

ESPACIO SIMPLÉCTICO: Un espacio simpléctico (V, Ω) es un espacio vectorial V con una forma simpléctica $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, un mapa bilineal que es antisimétrico y no degenerado, en el sentido de que $\Omega(v, w) = 0 \forall w \in V$ sólo si $v = 0$. Notar que la antisimetría y la no degeneración implican que si V es un espacio de dimensión finita, entonces esta dimensión es par.

VARIEDAD SIMPLÉCTICA: Una variedad simpléctica (\mathcal{M}, Ω) es una variedad diferenciable \mathcal{M} equipada con una forma simpléctica $\Omega_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ en cada punto p , siendo Ω diferenciable en \mathcal{M} y cerrada, es decir $d\Omega = 0$.

Notar que un espacio vectorial simpléctico es un caso particular de variedad simpléctica, ya que el espacio tangente en cada punto puede identificarse con el propio espacio vectorial.

2.3 LA FORMA SIMPLÉCTICA EN LA MECÁNICA HAMILTONIANA

Como sabemos de la formulación Hamiltoniana, dado un Hamiltoniano $H(q, p, t)$ de un sistema con n grados de libertad, las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.1)$$

Podemos reescribir estas ecuaciones en términos de coordenadas canónicas $y = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ como $\dot{y}^k = \Omega^{kl} \frac{\partial H}{\partial y^l}$ donde

$$\Omega^{kl} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad k, l = 1, \dots, 2n \quad (2.3.2)$$

y $I_{n \times n}$ es la matriz identidad $n \times n$.

La estructura simpléctica aparece cuando promovemos y a un punto de una variedad \mathcal{M} y vemos las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{y}^a = \Omega^{ab} \nabla_b H, \quad (2.3.3)$$

donde hemos pasado a una notación de índices abstractos. El *inverso* de Ω^{ab} , que escribiremos como Ω_{ab} , es la forma simpléctica sobre \mathcal{M} . Nótese que su expresión en coordenadas canónicas (ecuación 2.3.2) muestra que es una forma cerrada pues sus coeficientes en dicha base son constantes.

Al campo $X^a = \Omega^{ab} \nabla_b H$ se lo denomina *campo hamiltoniano* y sus curvas integrales son las trayectorias físicas dinámicamente permitidas en el espacio de fase, con lo cual es claro que la mecánica queda determinada por el par (\mathcal{M}, Ω) y el Hamiltoniano H .

La forma simpléctica aporta una caracterización muy sencilla de las coordenadas canónicas. Por definición, las coordenadas son canónicas si las ecuaciones de movimiento 2.3.3 adquieren la forma 2.3.1 para cualquier Hamiltoniano H y este es el caso sí y sólo si Ω en esas coordenadas tiene la forma 2.3.2. Así, podemos caracterizar las coordenadas canónicas como aquellas en las que Ω tiene la forma 2.3.2.

Ahora que tenemos una formulación abstracta que engloba a cualquier sistema con n grados de libertad construido en base a variables canónicas, podemos preguntarnos si la construcción funciona en sentido opuesto. O sea, ¿será cierto que toda variedad simpléctica da lugar a una formulación canónica de la mecánica? La respuesta es que, al menos localmente, esta construcción es posible como consecuencia del *Teorema de Darboux*. Este teorema asegura que existe un entorno de cada punto de una variedad simpléctica (\mathcal{M}, Ω) de dimensión $2n$ cubierto por una parametrización local (y_1, \dots, y_{2n}) en la cual $\Omega = \sum_{i=1}^n dy_{i+n} \wedge dy_i$. Identificando $q = (y_1, \dots, y_n)$ y $p = (y_{n+1}, \dots, y_{2n})$ se recupera la mecánica hamiltoniana en términos de variables canónicas.

2.3.1 Identificación entre \mathcal{M} y el espacio de soluciones

En un sistema mecánico las soluciones quedan determinadas unívocamente por la condición inicial $y(t_0)$ y por lo tanto siempre se puede identificar \mathcal{M} con el espacio de soluciones \mathcal{S} mediante la relación

$$y(t) \in \mathcal{S} \leftrightarrow y(t_0) \in \mathcal{M}.$$

Esto nos permite definir una forma simpléctica sobre soluciones que es independiente del tiempo t_0 , aunque no lo parece a primera vista. Como hemos marcado, las transformaciones canónicas no afectan a la forma simpléctica. Luego, dado que la evolución en el tiempo es una transformación de este tipo, la elección del tiempo inicial t_0 resulta irrelevante para la definición de la forma simpléctica sobre \mathcal{S} . Más adelante trataremos este mismo aspecto desde el punto de vista Lagrangiano.

2.3.2 Sistemas dinámicos lineales

En nuestro trabajo tratamos con un *sistema dinámico lineal*. Esto quiere decir que el sistema cumple el principio de superposición (las combinaciones lineales de soluciones son soluciones) y por lo tanto \mathcal{S} es un espacio vectorial. Luego, la identificación entre \mathcal{S} y \mathcal{M} discutida previamente le confiere al espacio de fase esta misma estructura. También supondremos que existen coordenadas canónicas lineales y globales en \mathcal{M} . Estas coordenadas se pueden obtener, por ejemplo, identificando \mathcal{M} con el espacio tangente en un punto (digamos $\mathcal{M} \sim T_0\mathcal{M}$), lo cual es posible debido a que \mathcal{M} es un espacio vectorial. Luego, cualquier conjunto de coordenadas canónicas en $T_0\mathcal{M}$ lo es también en todo \mathcal{M} .

Una consecuencia que queremos remarcar de la estructura de espacio vectorial es que (\mathcal{M}, Ω) se vuelve un espacio vectorial simpléctico como definimos en la sección 2.2. Por lo tanto Ω es un mapa bilineal y antisimétrico $\Omega : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. De esta manera, si el sistema tiene n grados de libertad y expresamos los puntos del espacio de fase en una base $y = (q^1 \dots q^n, p_1 \dots p_n)$, podemos escribir

$$\Omega(y_1, y_2) = \sum_{j=1}^n p_{1j}q_2^j - p_{2j}q_1^j \quad (2.3.4)$$

A partir de este resultado podemos definir $\Omega(y, \cdot) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (y fijo) como una función lineal de las coordenadas, cuya acción sobre un punto y' está dado por $\Omega(y, y')$. La no degeneración de Ω nos permite, a su vez, reescribir cualquier función de las coordenadas canónicas en términos de las funciones $\Omega(y, \cdot)$. La ventaja de esta nueva formulación es que dichas funciones son independientes del sistema de coordenadas y se pueden definir sin dificultad en un sistema con infinitos grados de libertad.

2.4 LA FORMA SIMPLÉCTICA EN LA MECÁNICA LAGRANGIANA

Antes de entrar de lleno en la formulación covariante a la que nos referimos en la introducción, estudiemos un caso más simple para entender la idea de este enfoque.

2.4.1 Ejemplo 0: sistema con 1 grado de libertad

Consideremos la formulación Lagrangiana de un problema con 1 grado de libertad.

En primer lugar tenemos la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

donde (t_i, t_f) es el intervalo de tiempo de interés, q la coordenada que describe el grado de libertad del sistema y $L(q, \dot{q}, t)$ el Lagrangiano. Las ecuaciones de movimiento provienen de exigir que la acción sea estacionaria bajo variaciones $\delta q(t)$ de la función $q(t)$ que se anulan en los extremos t_i y t_f .

Una variación de la acción δS se define como una derivada funcional, es decir

$$\delta S = \frac{d}{d\lambda} \int_{t_i}^{t_f} L(q + \lambda \delta q, \dot{q} + \lambda \delta \dot{q}, t) dt$$

y se debe igualar dicha variación a cero para encontrar las soluciones.

Se abre una nueva perspectiva si le damos a este cálculo un contenido geométrico. Podemos pensar en el espacio F de funciones $q : [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, que incluye al espacio de soluciones \mathcal{S} , como una variedad y en él las variaciones δ resultan vectores tangentes. En esta imagen $\delta S = \mathbf{d}S(\delta)$ donde \mathbf{d} es la derivada exterior en F actuando sobre la acción, es decir que δS es una derivada en la dirección δ . En lo que sigue utilizaremos este enfoque geométrico como motivación, aunque no daremos definiciones exactas pues estos conceptos se dan en el contexto de variedades de dimensión infinita. Véase Abraham et al. [1] para una presentación detallada del correspondiente marco matemático.

Volviendo al cálculo, si hacemos una variación cualquiera, resulta que

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right\} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_i}^{t_f}.$$

Para que la variación se anule cuando $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ debe cumplirse

$$G(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \text{ (ecuaciones de movimiento).}$$

Nótese que si se cumple esta ecuación de movimiento la variación de la acción se reduce a

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q|_{t_f} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q|_{t_i}.$$

En la formulación geométrica, el término de borde $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q|_t$ es el valor de la 1-forma $\Theta_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \mathbf{d}q|_t$ evaluada en el vector δ .

En base a variaciones de Θ podemos definir una nueva cantidad Ω bilineal y antisimétrica dada por

$$\Omega_t(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \Theta_t(\delta_2) - \delta_2 \Theta_t(\delta_1) - \Theta_t([\delta_1, \delta_2]),$$

es decir,

$$\Omega_t(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta_2 q|_t - \delta_2 \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta_1 q|_t.$$

Geométricamente Ω_t representa una 2-forma definida como $\Omega_t = \mathbf{d}\Theta_t$. Ahora, si recordamos que el pasaje a la formulación Hamiltoniana se hace identificando $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ entonces la expresión anterior se reduce a

$$\Omega_t(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 p(t) \delta_2 q(t) - \delta_2 p(t) \delta_1 q(t). \quad (2.4.1)$$

Este objeto es una forma simpléctica en el espacio de soluciones \mathcal{S} (visto como una subvariedad de F) con variaciones que son tangentes a \mathcal{S} . De hecho es la misma forma simpléctica que se definió en la sección anterior.¹ Aunque Ω_t es, en principio, una forma sobre F , de hecho sólo involucra la variación de q y p a tiempo t . Desde ese punto de vista $\Omega_t(\delta_1, \delta_2)$ es el valor de la 2-forma $dp(t) \wedge dq(t)$ en \mathcal{M} evaluada sobre los vectores $(\delta_1 q(t), \delta_1 p(t))$ y $(\delta_2 q(t), \delta_2 p(t))$ tangentes a \mathcal{M} .

Ya fue discutido en la sección anterior que la forma simpléctica se mantiene invariante con la evolución temporal del sistema si esta satisface las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto, los Ω_t definen una única forma simpléctica sobre soluciones. Este hecho clave puede ser verificado en el formalismo Lagrangiano sin recurrir a coordenadas canónicas, como mostramos a continuación.

Queremos probar que, en una solución,

$$\Omega_{t_2}(\delta_1, \delta_2) - \Omega_{t_1}(\delta_1, \delta_2) = 0$$

para cualquier t_1 y t_2 siendo δ_1 y δ_2 variaciones tangentes a \mathcal{S} . Para ello calculamos

$$\begin{aligned} & \Omega_{t_2}(\delta_1, \delta_2) - \Omega_{t_1}(\delta_1, \delta_2) = \\ & = \delta_1 [\Theta_{t_2} - \Theta_{t_1}](\delta_2) - \delta_2 [\Theta_{t_2} - \Theta_{t_1}](\delta_1) - [\Theta_{t_2} - \Theta_{t_1}](\delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

¹ Aquí suponemos que \mathcal{S} tiene una estructura diferenciable tal que las coordenadas q y $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ son buenas coordenadas sobre \mathcal{S} .

Usando que $[\delta_1, \delta_2]$ es una variación, en una solución vale la igualdad

$$[\delta_1, \delta_2] S = (\Theta_{t_2} - \Theta_{t_1})([\delta_1, \delta_2]), \text{ pues } G = 0.$$

Si además las variaciones son tangentes a \mathcal{S} , es decir que preservan la condición $G = 0$ y por lo tanto son soluciones de la ecuación linealizada $\delta G(q, \dot{q}, t) = 0$, también se cumple

$$\delta_1 [\Theta_{t_1} - \Theta_{t_2}] (\delta_2) = \delta_1 \delta_2 S$$

$$\delta_2 [\Theta_{t_1} - \Theta_{t_2}] (\delta_1) = \delta_2 \delta_1 S.$$

Finalmente

$$\Omega_{t_1}(\delta_1, \delta_2) - \Omega_{t_2}(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \delta_2 S - \delta_2 \delta_1 S - [\delta_1, \delta_2] S = 0.$$

En particular, si el sistema es lineal, el espacio de soluciones $\mathcal{S} \sim \mathcal{M}$ es un espacio vectorial y por lo tanto todas las soluciones pueden pensarse también como variaciones que resuelven la ecuación de movimiento linealizada. Con esto, la fórmula 2.4.1 para Ω restringida a \mathcal{S} es exactamente igual a la definida por 2.3.4.

2.4.2 Campo escalar

Nuestro objetivo es estudiar el caso del campo de K-G, pero antes es útil discutir en general teorías de campos escalares en el espacio-tiempo. No ahondaremos aquí en los detalles de los efectos de una geometría espacio-temporal curva, algunos de los cuales se tratan en las primeras secciones del capítulo seis.

Comenzamos introduciendo la acción

$$S = \int_Q \mathcal{L}(\phi, \nabla \phi, x) \epsilon_{\dots}$$

con ϕ un campo escalar y Q un dominio compacto (con borde ∂Q) que admite una superficie de datos iniciales para ϕ (*superficie de Cauchy* del interior de Q) compacta cuya definición se presenta en la sección 6.2. Además, ϵ_{\dots} es una forma de volumen (los cuatro puntos indican que se trata de una 4-forma) y ∇ es una derivada covariante tal que $\nabla \epsilon = 0$.²

Variando la acción e integrando por partes se puede escribir

$$\delta S = \int_Q \mathcal{G}(\phi, \nabla \phi, x) \delta \phi \epsilon_{\dots} + \int_{\partial Q} \mathcal{B}^a(\phi, \nabla \phi, x, \delta \phi) \epsilon_{a\dots}$$

con $\mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \phi} \right)$ y $\mathcal{B}^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \phi} \delta \phi$. Luego, la aplicación del principio variacional, es decir $\delta S = 0$, cuando $\delta \phi|_{\partial Q} = 0$ requiere

² Si existe un sistema de coordenadas x^μ que cubra todo Q , entonces puede elegirse que $\epsilon_{\dots} = d^4 x$ y ∇_a la derivada parcial ∂_μ .

$$\mathcal{G}(\phi, \partial_\mu \phi, x) = 0 \text{ (ecuación de campo)}$$

pues el término de borde $\int_{\partial Q} \mathcal{B}^a(\phi, \partial_\mu \phi, x, \delta\phi) \epsilon_{a\dots}$ se anula por ser lineal en $\delta\phi$.

Al igual que en el ejemplo anterior definimos

$$\Theta_\Sigma(\delta) = \int_\Sigma \mathcal{B}^a(\phi, \partial_\mu \phi, x, \delta\phi) \epsilon_{a\dots},$$

donde la integral se calcula en una superficie orientada Σ , y también definimos

$$\Omega_\Sigma(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \Theta_\Sigma(\delta_2) - \delta_2 \Theta_\Sigma(\delta_1) - \Theta_\Sigma([\delta_1, \delta_2]). \quad (2.4.2)$$

Nos interesa pensar en el espacio de fase \mathcal{M} como el espacio de datos iniciales. Para eso fijamos una superficie Σ de Cauchy del interior de Q (así como fijamos t_0 en el caso unidimensional). Fijada la superficie Σ , Ω_Σ es una 2-forma sobre \mathcal{M} por los mismos motivos que lo era en el caso unidimensional. Al igual que entonces debemos discutir la no degeneración y la independencia del tiempo (en este caso de la superficie Σ). En cuanto al primer punto, adelantamos que para el campo de \mathbb{K} -G no existe degeneración posible aunque esto será parte de la discusión del capítulo seis. Pero existen sistemas cuya forma simpléctica es degenerada. Estos son los sistemas con *libertad gauge*. En esos casos, la eliminación de la degeneración se debe realizar "a mano" y a ese proceso se lo denomina *fijación de gauge*. En cuanto a la dependencia de Σ podemos realizar un cálculo análogo al del caso unidimensional. Pensemos en el borde de Q como $\partial Q = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ donde Σ^\pm son dos hipersuperficies con un borde común al que llamaremos $\partial\Sigma$. Es claro que

$$\Theta_{\partial Q}(\delta) = \Theta_{\Sigma^+}(\delta) + \Theta_{\Sigma^-}(\delta)$$

y por lo tanto

$$\Omega_{\Sigma^+}(\delta_1, \delta_2) + \Omega_{\Sigma^-}(\delta_1, \delta_2) = \Omega_{\partial Q}(\delta_1, \delta_2).$$

Por definición esta cantidad se calcula como

$$\Omega_{\partial Q}(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \Theta_{\partial Q}(\delta_2) - \delta_2 \Theta_{\partial Q}(\delta_1) - \Theta_{\partial Q}([\delta_1, \delta_2]).$$

Para variaciones δ_1, δ_2 que satisfacen la ecuación de campo linealizada (sobre soluciones) se cumple $\delta S = \Theta_{\partial Q}(\delta)$ y $\delta_i \Theta_{\partial Q}(\delta_j) = \delta_i \delta_j S$. Por lo tanto

$$\Omega_{\partial Q}(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \delta_2 S - \delta_2 \delta_1 S - [\delta_1, \delta_2] S = 0$$

Esto demuestra que $\Omega_{\Sigma^+} = -\Omega_{\Sigma^-}$. Ahora, si cambiamos la orientación de una de las hiper-superficies para que la orientación que inducen en el borde $\partial\Sigma$ coincida, entonces la forma simpléctica es igual en ambas. El mismo argumento se puede dar para cualquier

hipersuperficie en el interior de Q que tenga el mismo borde $\partial\Sigma$ y concluimos que la forma simpléctica sólo depende del borde (orientado) de las hipersuperficies sobre las que se calcula. Esto establece la independencia de la elección de superficie de Cauchy, ya que todas las superficies de Cauchy del interior de Q comparten el mismo borde (ver proposición B.12 de Reisenberger [31]).

Para darle el nombre de forma simpléctica al objeto obtenido falta mostrar que es una 2-forma cerrada. Esta condición es equivalente (ver sección 7.4.A de Abraham et al. [1]) a la relación algebraica

$$\sum_{(i,j,k)=Cic(1,2,3)} \delta_i \Omega(\delta_j, \delta_k) - \Omega([\delta_i, \delta_j], \delta_k) = 0$$

para toda las variaciones $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y siendo Cic el conjunto de las permutaciones cíclicas. El cumplimiento de esta ecuación es una consecuencia inmediata de la definición 2.4.2 y es la expresión algebraica del hecho $\Omega = d\Theta \Rightarrow d\Omega = 0$.

2.4.3 Campo de Klein-Gordon

Enfoquemos nuestra atención ahora en el caso de interés, es decir el campo de K-G.

Partimos de su acción

$$S_{K-G} = -\frac{1}{2} \int_Q \{g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2\} \epsilon_{\dots}$$

donde ϵ_{\dots} es la 4-forma de volumen y ∇_a la derivada covariante definidas por la métrica.

Tomando variaciones de la acción e integrando por partes resulta

$$\delta S_{K-G} = \int_Q \{g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - m^2 \phi\} \delta \phi \epsilon_{\dots} - \int_Q \nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi \delta \phi) \epsilon_{\dots} .$$

El primer término contiene la ecuación de K-G cuando se iguala a cero

$$\mathcal{G}(\phi, \nabla_a \phi, x) = \nabla_a \nabla^a \phi - m^2 \phi = 0$$

y el segundo puede reducirse a un término de borde usando el teorema de Stokes³

$$-\int_Q \nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi \delta \phi) \epsilon_{\dots} = -\int_{\partial Q} g^{ab} \nabla_a \phi \delta \phi \epsilon_{b\dots}$$

donde el integrando sobre ∂Q es una 3-forma porque un índice de ϵ_{\dots} ha sido contraído. Luego se define

$$\Theta_{\Sigma}(\delta) = -\int_{\Sigma} g^{ab} \nabla_a \phi \delta \phi \epsilon_{b\dots} .$$

³ Por demostración y notación ver el apéndice B de Wald [38]

Entonces, la forma simpléctica es

$$\begin{aligned}\Omega(\delta_1, \delta_2) &= \delta_1 \Theta_\Sigma(\delta_2) - \delta_2 \Theta_\Sigma(\delta_1) - \Theta_\Sigma([\delta_1, \delta_2]) = \\ &= - \int_\Sigma g^{ab} [\delta_2 \phi \nabla_a(\delta_1 \phi) - \delta_1 \phi \nabla_a(\delta_2 \phi)] \epsilon_{b\dots}.\end{aligned}$$

Dado que el campo de \mathbb{K} -G cumple el principio de superposición, soluciones ϕ_1 y ϕ_2 se pueden considerar como variaciones $\delta_1 \phi$ y $\delta_2 \phi$. De esta manera, la forma simpléctica sobre variaciones define la forma simpléctica sobre soluciones dada por

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) = \int_\Sigma g^{ab} [\phi_1 \nabla_a \phi_2 - \phi_2 \nabla_a \phi_1] \epsilon_{b\dots} \quad (2.4.3)$$

2.5 LOS CORCHETES DE POISSON Y LA FORMA SIMPLÉCTICA.

En esta sección introducimos la relación entre la forma simpléctica y los corchetes de Poisson. Estos son la pieza fundamental de la cuantización canónica, como veremos inmediatamente.

2.5.1 N grados de libertad

En un sistema con N grados de libertad es estándar definir los corchetes de Poisson de dos funciones $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}$$

donde $(q, p) = (q^1 \dots q^N, p_1 \dots p_N)$ son coordenadas canónicas. En base a esta definición, es trivial ver que los corchetes fundamentales $\{q^i, q^j\}$, $\{q^i, p_j\}$ y $\{p_i, p_j\}$ resultan

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (2.5.1)$$

En términos de la matriz Ω de 2.3.2 y de las coordenadas $y = (y_1, \dots, y_{2N}) = (q, p)$

$$\{f, g\} = \Omega^{kl} \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial g}{\partial y_l}.$$

O sea que se trata de la expresión en coordenadas de la relación

$$\{f, g\} = \Omega^{ab} \nabla_a f \nabla_b g$$

donde Ω^{ab} es la inversa de la forma simpléctica y ∇ es cualquier derivada covariante en \mathcal{M} . Desde este punto de vista el corchete de Poisson es inherente a la estructura simpléctica de (\mathcal{M}, Ω) .

En el problema clásico, estos corchetes dotan a los observables sobre \mathcal{M} de una estructura de *Álgebra de Lie*, con el corchete de Poisson jugando el papel de corchete de Lie, ya que cumple las siguientes propiedades:

- es antisimétrico y bilineal (por construcción)
- cumple la identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \text{ (como consecuencia de que } \Omega \text{ es cerrada)}$$

Estas propiedades son de suma importancia para la cuantización porque en ella los corchetes de Poisson se reemplazan con conmutadores que son antisimétricos, bilineales y cumplen la identidad de Jacobi.

De forma esquemática, el proceso de cuantización se reduce a buscar una correspondencia entre observables clásicos (funciones reales C^∞ en \mathcal{M}) con operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert. A los observables clásicos f se asocian operadores \widehat{f} que cumplen

$$\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{fg} + \frac{i\hbar}{2}\widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2).$$

Esta relación no fija del todo la cuantización, debido al término de orden \hbar^2 . Para lograrlo, se impone la condición

$$[\widehat{f}, \widehat{g}] = i\hbar\widehat{\{f, g\}}$$

-sin término de orden \hbar^2 - a un subconjunto de observables básicos. (En general esta condición no se puede imponer sobre todos los observables.) Este conjunto de observables básicos debe ser suficiente para parametrizar todo el espacio de fase. Luego el resto de los observables cuantizados serán funciones de estos. Para sistemas lineales, por ejemplo, una elección natural de observables básicos son las funciones lineales en el espacio de fase.

En el capítulo siguiente ahondaremos en el proceso de cuantización y la importancia de la forma simpléctica en el mismo. Pero primero necesitamos extender las ideas descritas en esta sección a sistemas de infinitos grados de libertad.

2.5.2 Grados de libertad infinitos

En el caso de sistemas con infinitos grados de libertad se presenta una dificultad obvia en la generalización del corchete de Poisson. La definición dada en la subsección anterior incluye una suma sobre los grados de libertad, eligiendo un sistema de coordenadas en el espacio \mathcal{M} . Para resolver este problema volvamos a la observación de la sección 2.3.2. Allí encontramos que en un espacio de fase con estructura de espacio vectorial, los objetos $\Omega(y, \cdot)$ son funciones lineales de las coordenadas. Es más, de la fórmula

$$\Omega(y, \check{y}) = \sum_j p_j \check{q}^j - \check{p}_j q^j$$

con $y = (q^1 \dots q^N, p_1 \dots p_N)$ e $\check{y} = (\check{q}^1 \dots \check{q}^N, \check{p}_1 \dots \check{p}_N)$ queda claro que cualquier combinación lineal de coordenadas canónicas \check{y} se puede obtener como $\Omega(y, \cdot)$ para algún y , ajustando los coeficientes. Es decir que los $\Omega(y, \cdot)$ pueden ser considerados como coordenadas lineales y sus corchetes contienen la misma información que los corchetes fundamentales.

El cálculo de estos corchetes arroja

$$\begin{aligned} \{\Omega(y, \cdot), \Omega(z, \cdot)\}(\check{y}) &= \left\{ \sum_j (p_j \check{q}^j - \check{p}_j q^j), \sum_k (r_k \check{q}^k - \check{p}_k s^k) \right\} = \\ &= -\sum_j (p_j s^j - r_j q^j) = -\Omega(y, z) \end{aligned}$$

donde y, \check{y} y $z = (s, r)$ son puntos del espacio de fase. De esta manera, para cualquier sistema dinámico lineal (\mathcal{M}, Ω) podemos definir unos nuevos corchetes fundamentales que se obtienen como

$$\{\Omega(\psi_1, \cdot), \Omega(\psi_2, \cdot)\} = -\Omega(\psi_1, \psi_2) \quad (2.5.2)$$

dados dos elementos ψ_1 y ψ_2 de $\mathcal{S} \sim \mathcal{M}$. Esta expresión tiene como ventaja que es independiente de las coordenadas canónicas y también que es una expresión generalizable a sistemas con infinitos grados de libertad.

Antes de pasar al siguiente capítulo queremos adelantar algunos resultados del principio del capítulo seis que aclaran el significado de los observables $\Omega(\psi, \cdot)$. Ya mencionamos que, en el caso de sistemas con grados de libertad finitos, estos observables son combinaciones lineales de observables de posición y momento. En el caso de infinitos grados de libertad, específicamente en el caso del campo de **K-G**, veremos que $\Omega(\psi, \cdot)$ (para cierta clase de ψ) es igual a un promedio del campo ϕ en una región M del espacio-tiempo. En el capítulo seis mostraremos que si f es una función suave y de soporte compacto en M , entonces $\Omega(\psi, \phi) = \int_M f \phi \epsilon \dots$ para un ψ determinado por f . Estos promedios en el espacio-tiempo ocupan un lugar central en teoría de campos.

2.6 RESUMEN

Hemos introducido una formulación de la mecánica independiente de las coordenadas canónicas, que explota el hecho de que el espacio de fase es una variedad simpléctica (\mathcal{M}, Ω) . Además hemos introducido un método covariante para determinar la forma simpléctica a partir de la formulación Lagrangiana. Por último, en el caso de sistemas lineales (como el campo **K-G**) y haciendo uso de la identificación entre el espacio de soluciones (\mathcal{S}) y el espacio de fase (\mathcal{M}) , podemos

reemplazar las coordenadas canónicas q, p como “observables fundamentales” por los objetos $\Omega(\psi, \cdot)$ con $\psi \in \mathcal{S}$. Ello nos conduce a elegir los corchetes $\{\Omega(\psi_1, \cdot), \Omega(\psi_2, \cdot)\} = -\Omega(\psi_1, \psi_2)$ y no $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ para el proceso de cuantización canónica. La importancia de este cambio es que nos proporciona un “algoritmo de cuantización” independiente de las coordenadas canónicas y que vale para sistemas de infinitos grados de libertad.

CUANTIZACIÓN SIMPLÉCTICA

En este capítulo discutiremos las ideas fundamentales sobre el proceso de cuantización canónica, pero lo haremos introduciendo una versión de la cuantización que se apoya en las propiedades de la forma simpléctica que vimos al final del capítulo anterior. Por esta razón la denominaremos *cuantización simpléctica*. En particular nos detendremos a discutir el problema de la no unicidad en la construcción de una teoría cuántica sobre un espacio de Hilbert.

Algunas definiciones y nociones básicas sobre espacios de Hilbert son tratadas en el apéndice [B.1](#).

3.1 GENERALIDADES

En una teoría clásica los estados de un sistema se representan como puntos de un espacio de fase \mathcal{M} y los observables como funciones de dicho espacio a \mathbb{R} , mientras que la evolución temporal está definida mediante el flujo Hamiltoniano dado por las ecuaciones de Hamilton [2.3.1](#). Esta imagen cambia radicalmente en la teoría cuántica. En ella los estados son representados por elementos de un espacio de Hilbert \mathcal{F} , los observables (reales) son operadores autoadjuntos en dicho espacio y la evolución temporal está dada por una familia de transformaciones unitarias en \mathcal{F} generadas por el operador Hamiltoniano.

Como vimos en [2.5.1](#), para sistemas lineales el pasaje entre ambas construcciones se puede dar transfiriendo el álgebra de Poisson de la teoría clásica a un álgebra de conmutadores mediante la fórmula:

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}}$$

donde f, g son observables clásicos *lineales* y \hat{f}, \hat{g} son operadores cuánticos. En base a esta álgebra se construye luego la del resto de los observables clásicos.

Por ejemplo, si vemos a las coordenadas q, p como observables físicos, entonces el álgebra de operadores cuánticos \hat{q}, \hat{p} correspondiente a las relaciones [2.5.1](#) será:

$$\begin{aligned} [\hat{q}^i, \hat{q}^j] &= i\hbar \widehat{\{q^i, q^j\}} = 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \widehat{\{p_i, p_j\}} = 0 \\ [\hat{q}^i, \hat{p}_j] &= i\hbar \widehat{\{q^i, p_j\}} = i\hbar \delta_j^i \widehat{Id} \end{aligned}$$

donde \widehat{Id} es el operador identidad en \mathcal{F} . Usualmente a estos conmutadores que definen el álgebra de observables se los denomina Relaciones de Conmutación Canónicas (CCR).

Para un sistema lineal se pueden re-expresar las CCR en términos de operadores asociados a $\Omega(y, \cdot)$. Utilizando el corchete 2.5.2, la relación que se obtiene es:

$$\left[\widehat{\Omega(y_1, \cdot)}, \widehat{\Omega(y_2, \cdot)} \right] = -i\hbar \Omega(y_1, y_2) \widehat{Id} \quad (3.1.1)$$

donde y_1 e y_2 son puntos del espacio de fase y $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$ es el operador autoadjunto asociado a la función lineal $\Omega(y, \cdot)$. (Nótese que el punto en el operador $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$ no implica una dependencia funcional, sino que es un nombre que hace referencia a $\Omega(y, \cdot)$ así como \widehat{f} hace referencia a la función f .) Estas relaciones capturan la misma álgebra definida por las CCR, pero de manera independiente de las coordenadas canónicas.

Un problema que presenta esta construcción es que los operadores que representan esta álgebra no son, en general, operadores acotados y por lo tanto su acción no está definida sobre todo el espacio de Hilbert. Una forma de resolver este problema es utilizar otro conjunto de operadores que a su vez representan un álgebra diferente. Estos son los llamados *operadores de Weyl*, que son una versión “exponenciada” de los operadores $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$, es decir los operadores $\widehat{W(y)} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \widehat{\Omega(y, \cdot)}\right)$. Estos operadores tampoco están, en principio, definidos en todo el espacio de Hilbert, pero pueden ser extendidos de manera única.

De la relación 3.1.1, el álgebra de estos operadores está dada por:

- $\widehat{W(y_1)} \widehat{W(y_2)} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Omega(y_1, y_2) / 2\right) \widehat{W(y_1 + y_2)}$
- $\widehat{W(y)}^* = \widehat{W(-y)}$ siendo $\widehat{W(y)}^*$ el adjunto de $\widehat{W(y)}$

Estas son la denominadas *relaciones de Weyl* y junto con el espacio de Hilbert \mathcal{F} definen un sistema cuántico $(\mathcal{F}, \widehat{W(y)})$ a partir de un espacio simpléctico (\mathcal{M}, Ω) . Al álgebra formada por las combinaciones lineales finitas de operadores de Weyl se la denomina *álgebra de Weyl*.

Vale aclarar que las construcciones en base a las CCR y en base al álgebra de Weyl no son necesariamente equivalentes, pues no todos los operadores que satisfacen el álgebra de Weyl se pueden escribir como exponenciales de operadores $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$. Para lograr la equivalencia es necesario tener algunas hipótesis extra. Por ejemplo, si exigimos que los operadores de Weyl sean fuertemente continuos¹ entonces todo operador $\widehat{W(y)}$ tiene su correspondiente $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$ y viceversa.

También es conveniente marcar que, en teoría de campos, la descripción de la teoría cuántica no se completa con ninguna de estas

¹ Ver definiciones de la topología fuerte en el apéndice B.2.

construcciones, pues no todos los observables de interés son descritos en términos de las relaciones CCR ni el álgebra de Weyl. Estas construcciones son más bien un punto de partida para formular una teoría cuántica completa.

3.2 PROBLEMA DE LA EQUIVALENCIA DE LAS CUANTIZACIONES

3.2.1 Sistemas con N grados de libertad

Por lo dicho hasta el momento no queda claro si existe una o muchas formas de elegir un conjunto de operadores sobre un espacio de Hilbert que cumplan las relaciones de Weyl, pero resulta que para sistemas con grados de libertad finitos todas las construcciones de este tipo son equivalentes. Ese es el contenido del *teorema de Stone-von Neumann*, pero antes de plantearlo formalmente necesitamos algunas definiciones:

Definición 3.1. Un conjunto de operadores sobre un espacio \mathcal{F} que cumplen las relaciones que definen un álgebra se denomina *representación del álgebra*.

Definición 3.2. Un par $(\mathcal{F}, \widehat{W}(y))$ se denomina *representación irreducible* de las relaciones de Weyl si no existe un subespacio no trivial de \mathcal{F} invariante bajo la acción de todos los $\widehat{W}(y)$.

Definición 3.3. Dos pares $(\mathcal{F}, \widehat{W}(y))$ y $(\mathcal{F}', \widehat{W}'(y))$ se dicen *unitariamente equivalentes* si existe un mapa unitario $U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ que satisface $U^{-1}\widehat{W}(y)U = \widehat{W}'(y)$ para todo y .

Observación: Cuando dos construcciones cumplen esta definición todas las predicciones sobre un estado $|\phi\rangle \in \mathcal{F}$ de una teoría son equivalentes a las predicciones sobre el estado $U|\phi\rangle$ de la otra. Esto se debe a que $\langle\phi|\widehat{W}'(y)|\phi\rangle = \langle U\phi|\widehat{W}(y)|U\phi\rangle$. Por lo tanto se trata de la misma teoría con los estados “re-etiquetados”.²

Ahora podemos establecer el enunciado del teorema con precisión.

Teorema 3.1. (*de Stone-von Neumann*)

Todas las representaciones irreducibles de las relaciones de Weyl de sistemas con $N < \infty$ grados de libertad son unitariamente equivalentes.

La demostración de este teorema (ver teoremas 7.4 y 7.5 por Simon en [34]) utiliza como pieza fundamental que el sistema tiene grados

² Aquí usamos notación de Dirac, en la cual los vectores del espacio de Hilbert (*ket*) son representados con $|\phi\rangle$ y las 1-formas (*bra*) por $\langle\psi|$. De modo que el producto escalar es la acción de un *bra* sobre un *ket* $\langle\psi|\phi\rangle$

de libertad finitos. Se requiere un considerable esfuerzo extra para establecer algún tipo de teorema de unicidad en el caso de infinitos grados de libertad. Esto lo desarrollamos en el capítulo cuatro con la discusión del teorema de Verch (sección 4.4.4)

3.2.2 Generalidades sobre el problema de grados de libertad infinitos

En teoría de campos, la dificultad antes mencionada puede ser superada en algunas situaciones, donde la existencia de simetrías en el espacio tiempo pueden favorecer alguna elección particular del par $(\mathcal{F}, \widehat{W}(y))$. Este es el caso de los espacio-tiempos estacionarios, y especialmente uno de sus casos particulares, el espacio-tiempo plano (espacio de Minkowski). No nos detendremos a estudiarlos, pero el lector interesado puede encontrar un tratamiento detallado en el capítulo cuatro de [39].

En un espacio-tiempo arbitrario no hay una cuantización obviamente preferida, pero podemos dar una caracterización de la libertad que tenemos para elegir la cuantización dentro de las llamadas *cuantizaciones Fock*. La próxima sección incluye un enfoque a este problema que es clave en el desarrollo de esta tesis.

3.2.3 Construcción de una cuantización Fock

El tratamiento que seguimos en esta sección y la demostración del teorema que lo sustenta se dan en el apéndice A de Kay and Wald [25]. Aquí nos limitaremos a presentar la construcción general y también a discutir una versión restringida que se desarrolla en la sección 3.2 de Wald [39]. Este último es un punto importante, pues dentro de este caso particular se desarrolla nuestro trabajo.

La afirmación que hacemos es que la libertad para elegir la teoría cuántica (tipo Fock) de un sistema lineal queda sintetizada en la elección de un producto interno g en el espacio de soluciones. La proposición que lo sustenta es la siguiente.³

Proposición 3.1. *Sobre el producto g y el proyector K*

Dado un producto interno g en un espacio vectorial (real) simpléctico (\mathcal{S}, Ω) que cumpla

$$g(\psi_1, \psi_1) g(\psi_2, \psi_2) \geq \Omega(\psi_1, \psi_2)^2 \quad (3.2.1)$$

entonces g define un mapa lineal $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$, con \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo que cumple:

³ Esta es la proposición 3.1 de Kay and Wald [25] que es discutida en el cuerpo de ese trabajo y demostrada en el apéndice A del mismo.

- $K\mathcal{S} + iK\mathcal{S}$ es denso en \mathcal{H}
- $g(\psi_1, \psi_2) = 2\text{Re} \langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}}$
- $\Omega(\psi_1, \psi_2) = -2\text{Im} \langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}}$
- El par (\mathcal{H}, K) es único a menos de una transformación unitaria

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ el producto interno en \mathcal{H} .

Nota: El signo en el tercer punto ha sido cambiado con respecto a [25] para adecuarse a nuestra definición de la forma simpléctica y de todos los objetos asociados a ella. Así mismo el producto interno μ en esa referencia corresponde a $g/2$ en nuestra notación.

Luego de tener el espacio de Hilbert \mathcal{H} , llamado *espacio de una partícula*, la teoría cuántica se completa introduciendo el espacio de Fock. Esta construcción será presentada luego de discutir el caso en el cual 3.2.1 se satura.

3.2.4 Estructura compleja en \mathcal{S}

Cuando la inecuación 3.2.1 se satura, es decir cuando se cumple

$$g(\psi_1, \psi_1) = \sup_{\psi_2 \neq 0} \left\{ \frac{|\Omega(\psi_1, \psi_2)|^2}{g(\psi_2, \psi_2)} \right\}, \quad (3.2.2)$$

la construcción del proyector K presentado en la sección anterior se simplifica considerablemente. En ese caso podemos seguir el siguiente esquema:

1. Completamos el espacio de soluciones con la norma $\|\psi\| = g(\psi, \psi)^{1/2}$ para obtener un espacio de Hilbert *real* \mathcal{S}_g
2. La relación 3.2.2 implica que la forma simpléctica es un mapa lineal $\Omega : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ acotado y por lo tanto tiene dos propiedades clave:
 - puede ser extendido a $\Omega : \mathcal{S}_g \times \mathcal{S}_g \rightarrow \mathbb{R}$ por continuidad
 - vía el Lema de Reisz existe un operador lineal y acotado $J : \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$ que cumple $\Omega(\psi_1, \psi_2) = g(\psi_1, J\psi_2)$
3. El mapa J definido a partir de Ω cumple las propiedades:
 - $J^* = -J$ por la antisimetría de Ω
 - $J^*J = Id$ por la igualdad 3.2.2 y la desigualdad de Schwartz.
 - $J^2 = -Id$ por las dos propiedades anteriores

4. Se define un nuevo espacio $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$ llamado *complexificación* de \mathcal{S}_g . Este contiene las sumas con coeficientes complejos de elementos de \mathcal{S}_g . A este espacio se extiende naturalmente la acción de Ω , g y J . El espacio $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$ con el producto escalar $g(\bar{\psi}_1, \psi_2)$ es un espacio de Hilbert complejo. El operador iJ es autoadjunto en este espacio de Hilbert (por las propiedades de J) y tiene dos espacios propios con valores propios ± 1 . Estos espacios son ortogonales y además son espacios de Hilbert conjugados. Podemos identificarlos como \mathcal{H} y $\bar{\mathcal{H}}$. Para que \mathcal{H} coincida con el de la proposición 3.1 elegimos que \mathcal{H} sea el subespacio asociado al valor propio -1 .

Toda esta construcción no hace mención al mapa K , pero visto que cualquier elemento $\psi \in \mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$ puede escribirse como $\psi = \psi_+ + \psi_-$ con $\psi_+ \in \mathcal{H}$ y $\psi_- \in \bar{\mathcal{H}}$ entonces el mapa puede definirse como la restricción a \mathcal{S} del proyector $K\psi = \frac{1}{2}(Id - iJ)\psi = \psi_+$. Es decir, se puede ver a K como el mapa $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ que toma un vector ψ y realiza el siguiente camino:

$$\psi \in \mathcal{S} \rightarrow \psi \in \mathcal{S}_g \rightarrow \psi \in \mathcal{S}_g^{\mathbb{C}} \rightarrow \psi_+ \in \mathcal{H}.$$

Dado que \mathcal{S}_g es \mathcal{S} completado entonces es claro que $\mathcal{S} + i\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$ y por lo tanto $K\mathcal{S} + iK\mathcal{S}$ es denso en \mathcal{H} .

Por último, la proposición 3.1 también relaciona el producto interno en \mathcal{H} con g y Ω , relaciones que también podemos verificar en esta construcción. Para empezar notamos que el producto interno en \mathcal{H} es la restricción del producto interno en $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$, con lo cual se verifica que

$$\langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = g(\overline{K\psi_1}, K\psi_2).$$

Además, dado que los subespacios \mathcal{H} y $\bar{\mathcal{H}}$ son subespacios propios de iJ con valor propio -1 y $+1$ respectivamente, se cumple

$$g(K\psi_1, K\psi_2) = \langle \overline{K\psi_1}, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que toda solución real se puede escribir como $\psi = K\psi + \overline{K\psi}$, para soluciones reales se cumple

$$\begin{aligned} g(\psi_1, \psi_2) - i\Omega(\psi_1, \psi_2) &= g(\psi_1, \psi_2) - ig(\psi_1, J\psi_2) = \\ &= g(\psi_1, K\psi_2 + \overline{K\psi_2}) + g(\psi_1, K\psi_2 - \overline{K\psi_2}) = \\ &= 2g(\psi_1, K\psi_2) = 2g(K\psi_1, K\psi_2) + 2g(\overline{K\psi_1}, K\psi_2) = \\ &= 0 + 2\langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Es decir que

$$Re \langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}g(\psi_1, \psi_2) \quad (3.2.3)$$

$$Im \langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\Omega(\psi_1, \psi_2), \quad (3.2.4)$$

coincidiendo con el contenido de la proposición.

3.2.5 Construcción del espacio de Fock

El espacio de Hilbert \mathcal{H} definido anteriormente es el llamado *espacio de Hilbert de una partícula* y no es el espacio de Hilbert del sistema. La cuantización Fock utiliza otro espacio de Hilbert, el *espacio de Fock simétrico*⁴ (ver descripción en el apéndice B.1) que se construye a partir de \mathcal{H} de la forma

$$\mathcal{F}_s = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n}{s} \mathcal{H} \right] = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \left(\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H} \right) \oplus \dots$$

En pocas palabras, este espacio es la suma infinita de los productos de espacios de n partículas simetrizados y tomamos como convención que \mathbb{C} es el espacio de cero partículas.

Como notación para representar un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{F}_s$ utilizamos $|\Psi\rangle = (\psi_0, \psi^a, \psi^{a_1 a_2}, \dots)$ donde $\psi_0 \in \mathbb{C}$, $\psi^a \in \mathcal{H}$, $\psi^{a_1 a_2} = \psi^{(a_1 a_2)} \in \mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$, etc. y para el producto interno en \mathcal{H} usamos $\bar{\psi}_a \phi^a = \langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}}$.

El producto interno en \mathcal{F}_s es la extensión natural del producto interno en \mathcal{H} y se define como

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\psi}_{a_1 \dots a_n} \phi^{a_1 \dots a_n}.$$

El espacio de Fock incluye sólo los elementos que cumplen la condición $\langle \Psi, \Phi \rangle < \infty$. De esta manera el producto escalar en \mathcal{F}_s consta de una suma infinita, pero de valor finito, de los productos escalares en los espacios de n partículas.

3.2.6 Operadores fundamentales en el espacio de Fock

Como describimos en el apéndice B.1, en el espacio de Fock se puede definir un operador de creación $\hat{a}^*(\xi)$ y uno de aniquilación $\hat{a}(\bar{\xi})$ asociados a cada elemento $\xi^a \in \mathcal{H}$. Con el dominio definido adecuadamente (ver apéndice) estos operadores cumplen las siguientes propiedades para cualquier par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

- $\hat{a}(\bar{\xi}) |\Psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\Psi\rangle = (\psi_0, 0, \dots)$. (Al estado $|\Psi\rangle$ normalizado que cumple esta condición lo llamamos *vacío del espacio de Fock* y lo representamos como $|0\rangle$.)
- $\hat{a}^*(\xi)$ es el adjunto de $\hat{a}(\bar{\xi})$
- $[\hat{a}(\bar{\xi}), \hat{a}(\bar{\eta})] = [\hat{a}^*(\xi), \hat{a}^*(\eta)] = 0$

⁴ La elección del espacio de Fock simétrico se debe a que hemos partido de las CCR. En caso de realizarse una cuantización partiendo de relaciones de anti-conmutación (como se hace para campos fermiónicos), se debe utilizar el espacio de Fock antisimétrico $\mathcal{F}_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n}{a} \mathcal{H} \right]$, donde el producto \otimes_a es antisimetrizado.

$$\blacksquare [\widehat{a}(\bar{\xi}), \widehat{a}^*(\eta)] = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}} \widehat{Id}$$

Luego, con estos operadores podemos construir los operadores auto-adjuntos $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$ mediante

$$\widehat{\Omega}(\psi, \cdot) = i\sqrt{\hbar}\widehat{a}(\overline{K\psi}) - i\sqrt{\hbar}\widehat{a}^*(K\psi). \quad (3.2.5)$$

cuyo dominio es la intersección de los dominios de $\widehat{a}(\overline{K\psi})$ y $\widehat{a}^*(K\psi)$. Esta combinación particular de operadores de creación y aniquilación cumple

$$[\widehat{\Omega}(\psi_1, \cdot), \widehat{\Omega}(\psi_2, \cdot)] = 2i\hbar \text{Im} \langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} \widehat{Id}$$

y por la proposición 3.1 esto equivale a

$$[\widehat{\Omega}(\psi_1, \cdot), \widehat{\Omega}(\psi_2, \cdot)] = -i\hbar \Omega(\psi_1, \psi_2) \widehat{Id}.$$

O sea que estos operadores cumplen el álgebra CCR que describimos anteriormente.

EN RESUMEN: La métrica g nos permite construir un espacio de Fock y operadores en este espacio que corresponden a los observables $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$. La identificación de los elementos ψ del espacio de soluciones \mathcal{S} con los operadores $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$ se logra mediante un proyector⁵ K determinado por g . Este nos permite pasar de soluciones a elementos del espacio de Hilbert de una partícula, los que luego se utilizan para construir los operadores según la fórmula 3.2.5.

Así mismo, a partir del proyector K y el producto escalar en el espacio de Hilbert de una partícula, se puede recuperar la métrica g por medio de la expresión 3.2.3. Esto demuestra que la libertad en la elección de una cuantización tipo Fock está parametrizada por la métrica g .

3.3 EL OSCILADOR ARMÓNICO

3.3.1 Introducción

En esta sección discutiremos un ejemplo clave para entender este programa de cuantización: un oscilador armónico con frecuencia ω . Este es un ejemplo sencillo, en el cual el contenido geométrico de la ecuación 3.2.2 se hace evidente y que además nos permite interpretar la cuantización en el lenguaje de mecánica cuántica elemental.

La cuantización se inicia con el espacio de soluciones (reales) del oscilador (\mathcal{S}). Los elementos de este espacio son las funciones que cumplen la ecuación

⁵ Estrictamente hablando, K no es un proyector de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ pues \mathcal{H} no es un subconjunto de \mathcal{S} . Más precisamente es la restricción a \mathcal{S} de un proyector de $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$ en \mathcal{H} .

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \text{ con } q(0) = q_0 \text{ y } m \frac{dq}{dt}(0) = p_0$$

es decir, las funciones de la forma

$$q(t) = \frac{1}{2} \left(q_0 + i \frac{p_0}{m\omega} \right) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \left(q_0 - i \frac{p_0}{m\omega} \right) e^{+i\omega t}$$

Evidentemente se puede definir una equivalencia entre este espacio de funciones y el espacio de $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ mediante la relación

$$(q_0, p_0) \in \mathcal{M} \longleftrightarrow q(t) \in \mathcal{S} \text{ con } q_0, p_0 \text{ condiciones iniciales de } q(t).$$

El segundo punto es elegir un producto interno g en \mathcal{S} que cumpla la igualdad 3.2.2. En la siguiente subsección estudiamos el significado de esa elección antes de seguir con la cuantización.

3.3.2 Interpretación geométrica de 3.2.2.

Veremos que la ecuación 3.2.2 es equivalente a decir que existen bases del espacio de fase que son canónicas con respecto a Ω (en las que Ω adquiere la forma canónica) y ortonormales con respecto a g . Esta es una interpretación que se puede generalizar, pero la virtud del ejemplo del oscilador es que los cálculos para demostrarla son muy sencillos.

Antes de comenzar notemos que siempre podemos aplicar la ecuación 3.2.2 a los vectores unitarios con respecto a g y obtener

$$1 = \sup_v \Omega(u, v)^2 \quad (3.3.1)$$

con $u, v \in \mathcal{M}$, $g(u, u) = 1 = g(v, v)$. Esta es una versión simplificada, pero con el mismo contenido que la ecuación 3.2.2.

Probaremos primero que la igualdad implica que existen bases canónicas y ortogonales a la vez.

Debido a que estamos en \mathbb{R}^2 la antisimetría de Ω obliga a que en cualquier base la matriz que la representa sea de la forma

$$\Omega_{ab} = \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, toda base es canónica a menos de una constante de normalización. Si ahora consideramos una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de g , entonces dos vectores unitarios u, v cualquiera se pueden escribir como

$$u = \cos(\theta_u) e_1 + \text{sen}(\theta_u) e_2$$

$$v = \cos(\theta_v) e_1 + \text{sen}(\theta_v) e_2$$

para algunos θ_u, θ_v . Luego, la forma simpléctica evaluada en estos vectores resulta

$$\begin{aligned}\Omega(u, v) &= \cos(\theta_u) \operatorname{sen}(\theta_v) \Omega(e_1, e_2) + \\ &+ \operatorname{sen}(\theta_u) \cos(\theta_v) \Omega(e_2, e_1) = \beta \operatorname{sen}(\theta_u - \theta_v).\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la ecuación 3.3.1,

$$1 = \sup_v \Omega(u, v)^2 = \sup_v \beta^2 \operatorname{sen}^2(\theta_u - \theta_v).$$

De esta ecuación se desprende que $\beta^2 = 1$. En el caso $\beta = 1$, la base $\{e_1, e_2\}$ es canónica y en el caso $\beta = -1$ la base $\{e_2, e_1\}$ es canónica.

En sentido opuesto, supongamos que tenemos una base canónica $\{e_Q, e_P\}$ dada. Con ella se puede definir una métrica dada por $g(x, y) = Q_x Q_y + P_x P_y$ donde en Q_x, P_x son las componentes de x en esa base. Por construcción, la base $\{e_Q, e_P\}$ es ortonormal con respecto a g . Como también es canónica entonces $\Omega(x, y) = P_x Q_y - P_y Q_x$.

Por otro lado, si u, v son vectores unitarios según g entonces existen θ_u, θ_v tales que

$$u = \cos(\theta_u) e_Q + \operatorname{sen}(\theta_u) e_P$$

$$v = \cos(\theta_v) e_Q + \operatorname{sen}(\theta_v) e_P.$$

Finalmente, evaluando Ω en esos vectores, obtenemos que $\Omega(u, v) = \operatorname{sen}(\theta_u - \theta_v)$ y es claro que se cumple la igualdad $\sup_v \Omega(u, v)^2 = 1$.

3.3.3 Construcción del proyector K

Como discutimos anteriormente, a partir de g y Ω se define una estructura compleja J mediante

$$g(x, Jy) = \Omega(x, y).$$

En término de coordenadas $g_{ab} x^a J_c^b y^c = \Omega_{ac} x^a y^c$ para todo x, y o también $J_c^b = g^{ab} \Omega_{bc}$ donde g^{ab} es el inverso de g_{ab} . En una base $\{e_Q, e_P\}$ ortogonal y canónica (que existe porque se cumple la igualdad 3.3.1) se puede escribir J explícitamente como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ya que } \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que los valores propios de J son $\pm i$ y que cada uno tiene un subespacio unidimensional asociado si aceptamos coeficientes complejos, es decir en $S_g^{\mathbb{C}} \sim \mathbb{C}^2$. Estos dos subespacios son:

1. el espacio de Hilbert \mathcal{H} , que es el espacio asociado con el valor propio $+i$, generado por el vector normalizado $\epsilon^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_Q - ie_P)$.
2. el espacio conjugado $\overline{\mathcal{H}}$, que corresponde al autovalor $-i$, generado por el vector normalizado $\epsilon^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_Q + ie_P)$.

A partir de J se puede definir un proyector K al subespacio \mathcal{H} , cuya matriz en la base $\{e_Q, e_P\}$ es

$$K = \frac{1}{2} (Id - iJ) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & +i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

De la expresión es claro que $Ke^- = \epsilon^-$ y $Ke^+ = 0$ por lo cual K es un proyector de $S_g^{\mathbb{C}} \sim \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \sim \mathcal{H}$. Notar que, siendo $S \sim \mathbb{R}$ de dimensión finita, S_g (la compleción de S) coincide con S .

3.3.4 El producto interno

El producto interno en $S_g^{\mathbb{C}}$ está definido por g (extendida linealmente a $S_g^{\mathbb{C}}$) mediante $\langle x, y \rangle = g(\bar{x}, y)$. Expresado en términos de la base $\{e_Q, e_P\}$ resulta $\langle x, y \rangle = \bar{Q}_x Q_y + \bar{P}_x P_y$. También podemos expresarlo en términos de la base $\{\epsilon^-, \epsilon^+\}$. Llamando $z_x = \langle \epsilon^-, x \rangle$ y $w_x = \langle \epsilon^+, x \rangle$ obtenemos $\langle x, y \rangle = \bar{z}_x z_y + \bar{w}_x w_y$. Notar que si nos restringimos a vectores de \mathcal{H} la expresión se reduce a $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \bar{z}_x z_y$, obteniendo el producto escalar habitual en \mathbb{C} (que es nuestro espacio de Hilbert).

Como ya vimos en la presentación general, el producto escalar en \mathcal{H} cumple la propiedad

$$\langle Kx, Ky \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} [g(x, y) - i\Omega(x, y)]$$

para $x, y \in \mathcal{S}$ (reales). Esto puede verificarse directamente con la expresión para el producto en la base $\{e_Q, e_P\}$

$$\begin{aligned} g(x, y) - i\Omega(x, y) &= Q_x Q_y + P_x P_y - i(P_x Q_y - Q_x P_y) = \\ &= (Q_x - iP_x)(Q_y + iP_y) = 2\bar{z}_x z_y = 2\langle Kx, Ky \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

3.3.5 El espacio de Fock

En base al espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \{z\epsilon^- \mid z \in \mathbb{C}\} \sim \mathbb{C}$ con el producto interno $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \bar{z}_x z_y$ se construye el espacio de Fock simétrico

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{H}^{\otimes 3} \oplus \dots$$

Los elementos de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ son todos proporcionales a $\epsilon^- \otimes \dots \otimes \epsilon^-$ y entonces el espacio $\mathcal{H}^{\otimes n}$ es unidimensional, con producto escalar $\langle s, t \rangle = \langle z_{ns}\epsilon^- \otimes \dots \otimes \epsilon^-, z_{nt}\epsilon^- \otimes \dots \otimes \epsilon^- \rangle = \bar{z}_{ns} z_{nt}$. Luego, los vectores del espacio de Fock pueden ser escritos como $|\Psi\rangle = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ con z_i números complejos con el producto interno entre dos elementos dado por

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_{n1} z_{n2}.$$

El requisito de que los vectores en $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ tengan norma acotada se traduce en la condición

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty.$$

Una base natural de $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ es $\{|n\rangle\}_{n=0,1,\dots}$ donde $|n\rangle = \left(\overleftarrow{0, 0, \dots, 1, 0, \dots} \right)$.

3.3.6 Operadores del espacio de Fock

Sobre $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ se pueden definir operadores de aniquilación

$$\hat{a}(\bar{z})(z_0, z_1, z_2, \dots) = (\bar{z}z_1, \sqrt{2}\bar{z}z_2, \sqrt{3}\bar{z}z_3, \dots)$$

y también de creación

$$\hat{a}^*(z)(z_0, z_1, z_2, \dots) = (0, zz_0, \sqrt{2}zz_1, \sqrt{3}zz_2, \dots)$$

que dependen de la elección de un elemento z de \mathcal{H} . Los dominios de estos operadores consisten de los vectores que cumplen las propiedades

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}(\bar{z})\Psi, \hat{a}(\bar{z})\Psi \rangle &= |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |z_n|^2 < \infty \\ \langle \hat{a}^*(z)\Psi, \hat{a}^*(z)\Psi \rangle &= |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |z_n|^2 < \infty, \end{aligned}$$

las cuales coinciden a la luz de la condición $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$. Es evidente que las combinaciones finitas de elementos de la base $\{|n\rangle\}_{n=0,1,\dots}$ cumplen estas propiedades, pero también lo hacen combinaciones infinitas como por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |n\rangle$.

Los operadores de bajada y subida que se definen en la cuantización usual del oscilador se corresponden con los operadores $a \equiv \hat{a}(1)$ y $a^* \equiv \hat{a}^*(1)$ de nuestro formalismo. Evaluando estos operadores sobre la base ortonormal $\{|n\rangle\}_{n=0,1,\dots}$ de $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ se obtiene que

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \left(\overleftarrow{0, 0, \dots, \sqrt{n}, 0, \dots} \right) = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^*|n\rangle &\equiv \left(\overleftarrow{0, 0, \dots, \sqrt{n+1}, 0, \dots} \right) = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

Es claro que $a^*a|n\rangle = n|n\rangle$, lo cual implica que los vectores $|n\rangle$ son autoestados de número. Además $[a, a^*]|n\rangle = |n\rangle$, con lo cual $[a, a^*] = \hat{1}d$ y también $[\hat{a}(\bar{z}_1), \hat{a}^*(z_2)] = \langle z_1, z_2 \rangle \hat{1}d$.

3.3.7 Operadores $\Omega(y, \cdot)$

A partir de los operadores $\hat{a}(\bar{z})$ y $\hat{a}^*(z)$ se pueden construir los operadores

$$\widehat{\Omega(y, \cdot)} = i\sqrt{\hbar}\hat{a}(\bar{z}_y) - i\sqrt{\hbar}\hat{a}^*(z_y)$$

En base a las relaciones de conmutación de $\hat{a}(\bar{z})$ y $\hat{a}^*(z)$ este operador cumple la relación esperada

$$\left[\widehat{\Omega(x, \cdot)}, \widehat{\Omega(y, \cdot)} \right] = -i\hbar\Omega(x, y)\hat{I}d.$$

Más allá de la definición, es interesante entender qué representa $\widehat{\Omega(y, \cdot)}$ en el lenguaje de la cuántica elemental. Para ello comencemos estudiando los observables clásicos $\Omega(y, \cdot)$. Ya vimos que en una base $\{e_Q, e_P\}$, la forma simpléctica sobre dos vectores x, y se escribe como $\Omega(y, x) = P_y Q_x - Q_y P_x$. Por lo tanto, el observable $\Omega(y, \cdot)$ cumple $\Omega(y, \cdot) = P_y Q(\cdot) - Q_y P(\cdot)$, donde $Q(\cdot)$ y $P(\cdot)$ son las funciones en el espacio de fase que seleccionan las componentes según e_Q y e_P respectivamente. En particular $\Omega(e_P, \cdot) = Q(\cdot)$ y $\Omega(e_Q, \cdot) = -P(\cdot)$. Pasando a los operadores que los representan en la teoría cuántica se obtiene que $\hat{Q} = \widehat{\Omega(e_P, \cdot)}$ y $\hat{P} = -\widehat{\Omega(e_Q, \cdot)}$.

Ahora podemos hacer la conexión con nuestra formulación de la teoría cuántica, expresando los vectores e_Q y e_P en términos de ϵ^- y ϵ^+ y los operadores $\widehat{\Omega(e_P, \cdot)}$ y $\widehat{\Omega(e_Q, \cdot)}$ en términos de operadores de creación y aniquilación.

Recordando que $\bar{z}_y = \langle \epsilon^+, y \rangle$ y $z_y = \langle \epsilon^-, y \rangle$ entonces

$$\widehat{\Omega(y, \cdot)} = i\sqrt{\hbar} [\hat{a}(\bar{z}_y) - \hat{a}^*(z_y)] = i\sqrt{\hbar} [\hat{a}(\langle \epsilon^+, y \rangle) - \hat{a}^*(\langle \epsilon^-, y \rangle)].$$

Luego

$$\hat{Q} + i\hat{P} = \widehat{\Omega(e_P - ie_Q, \cdot)} = -i\sqrt{2}\Omega(\epsilon^+, \cdot) = \sqrt{2\hbar}\hat{a}(1) = \sqrt{2\hbar}a.$$

Así resulta $a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q} + i\hat{P})$ y análogamente $a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q} - i\hat{P})$, que son las conocidas relaciones entre los operadores de bajada y subida y los de posición y momento. Es más, la relación de conmutación de \hat{Q} y \hat{P} se obtiene inmediatamente de la relación para a y a^* , arrojando la CCR: $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{I}d.$

Desde otro punto de vista podemos expresar los observables $\Omega(y, \cdot)$ en la base $\{\epsilon^-, \epsilon^+\}$ de la siguiente manera. Ya vimos que

$$\Omega(y, x) = g(y, Jx) = i\bar{z}_y z_x - i\bar{w}_y w_x,$$

por lo cual

$$\Omega(y, \cdot) = i\bar{z}_y z(\cdot) - i\bar{w}_y w(\cdot).$$

Trasladando esta igualdad a la teoría cuántica tenemos una forma directa de conectar los operadores de creación y aniquilación con observables clásicos, es decir $a = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{z}$ y $a^* = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{\bar{z}}$.

3.3.8 El Hamiltoniano y la métrica g

Hasta ahora en la cuantización no ha aparecido ni la masa ni la frecuencia del oscilador, pues las mismas no afectan el cálculo de la forma simpléctica. Tampoco hemos relacionado nuestra cuantización con el Hamiltoniano y es allí donde aparecerán esas cantidades.

En primer lugar, partiendo del Hamiltoniano escrito en términos de variables de posición q y momento p que cumplen $p = m \frac{dq}{dt}$ y dado por $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$, existe una elección de coordenadas canónicas, y por tanto una métrica g , que lo simplifican. Si definimos nuevas variables canónicas $Q = \sqrt{m\omega}q$ y $P = \frac{p}{\sqrt{m\omega}}$, entonces en ellas el Hamiltoniano resulta

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 = \frac{\omega}{2} (Q^2 + P^2)$$

y por lo tanto

$$g(y, y) = Q_y^2 + P_y^2 = \frac{2}{\omega} H(y).$$

Es decir, que el Hamiltoniano es $\frac{\omega}{2}$ por la métrica asociada a estas coordenadas.

Construyendo el espacio de Fock a partir de g obtenemos que $\frac{1}{2}(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2) = \hbar \left(a^*a + \frac{\hat{d}}{2} \right)$ y por lo tanto, el operador Hamiltoniano es $\hat{H} = \hbar\omega \left(a^*a + \frac{\hat{d}}{2} \right)$. De esta manera, la métrica g seleccionada por el Hamiltoniano nos da una cuantización Fock cuyo vacío coincide con el estado base del operador Hamiltoniano. Todas las construcciones Fock en base a otras métricas son equivalentes a la nuestra (este es un problema con grados de libertad finitos), pero el vacío que se obtiene en ellas no coincide con el estado fundamental del Hamiltoniano. Estos son los llamados *squeezed vacuum*.

3.4 RESUMEN

Hemos descrito la construcción de una cuantización de sistemas lineales en base a los observables fundamentales $\Omega(\psi, \cdot)$ sobre un espacio de Fock. También hemos introducido el álgebra de Weyl, que será el punto de partida de la cuantización algebraica que discutiremos en el siguiente capítulo. Esta nos proporcionará, a su vez, una perspectiva más amplia de las cuantizaciones Fock.

La cuantización presentada en el capítulo no es, en general, única (ni siquiera a menos de transformaciones unitarias). Sin embargo, hemos mostrado que la libertad en la cuantización reside en la elección de un producto escalar g en el espacio de soluciones que cumpla la igualdad 3.2.2.

Como ejemplo elemental de la cuantización presentada hemos discutido a fondo el caso del oscilador armónico.

En este capítulo discutiremos el enfoque algebraico en teoría de campos. Este enfoque pone en la base de la construcción al álgebra de un conjunto mínimo de observables. Sobre esta álgebra los estados son incorporados como mapas lineales del álgebra a \mathbb{C} y la acción de uno de estos mapas sobre un observable representa la evaluación del valor esperado del observable en el estado correspondiente. Esta teoría también permite describir observables que no están en el álgebra mínima, pero ello requiere ciertas restricciones sobre los estados. Esto da origen de la distinción entre estados “físicos” y “no físicos”. Comenzaremos el capítulo construyendo un álgebra de observables, que luego promoveremos a estructura fundamental. Con el álgebra ya definida discutiremos los estados *cuasi-libres* y su vínculo con la cuantización Fock del capítulo anterior. Finalmente trataremos los estados *Hadamard* y su rol como “estados físicos”. En todo el capítulo usaremos unidades con $\hbar = 1$.

4.1 LA CONSTRUCCIÓN DEL ÁLGEBRA DE WEYL

Al final de la sección 3.1 presentamos un conjunto de operadores $\widehat{W}(\psi) = \exp(i\widehat{\Omega}(\psi, \cdot))$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ construidos a partir del espacio de soluciones (\mathcal{S}, Ω) . También notamos que, como consecuencia de las CCR, cumplen las siguientes relaciones:

- $\widehat{W}(\psi)^* = \widehat{W}(-\psi)$
- $\widehat{W}(\psi_1)\widehat{W}(\psi_2) = \exp\left(\frac{i}{2}\Omega(\psi_1, \psi_2)\right)\widehat{W}(\psi_1 + \psi_2)$

Los $\widehat{W}(\psi)$ pertenecen al conjunto de los operadores lineales y acotados $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ que llamaremos $\mathcal{L}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$. Dicho conjunto tiene una estructura de C^* -álgebra con la norma uniforme (ver apéndice B.2). Luego, el conjunto de operadores que se pueden escribir como combinaciones lineales finitas de operadores de Weyl $\widehat{W}(\psi)$ forman una sub- C^* -álgebra (tomando la clausura en la norma uniforme). Esa es la llamada *Álgebra de Weyl* y en adelante la designaremos simplemente como \mathcal{A} .

La construcción que acabamos de presentar parte de una cuantización Fock del sistema. Por lo tanto sería esperable que, para sistemas con infinitos grados de libertad, el álgebra resultante dependiera de la elección de una de las infinitas construcciones Fock no-equivalentes. Por suerte para el enfoque algebraico este no es el caso. Ha sido probado que la C^* -álgebra resultante (incluida su norma) no depende en

absoluto de la representación en base a la cual está construida (ver Slawny[33] o alternativamente el teorema 2.2.2 de Haag [18] y el corolario 2.2.6 de Bratteli and Robinson [8]). Esto nos permite promover el álgebra de Weyl al lugar de objeto fundamental y ver a las construcciones Fock como representaciones de esta álgebra sobre espacios de Hilbert.

Vale la pena acotar que si bien esta construcción tiene la deseable propiedad de permitirnos trabajar con operadores acotados, existen autores que trabajan con el álgebra de operadores no acotados $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$. Esto lo hace, por ejemplo Radzikowski [30], uno de los autores de referencia en esta tesis.

4.2 ESTADOS ALGEBRAICOS

En el enfoque algebraico los estados $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ son definidos como mapas lineales en el álgebra \mathcal{A} , donde $\omega(A)$ con $A \in \mathcal{A}$ se interpreta como el valor esperado de A en el estado ω . Pero no cualquier mapa lineal será un estado. Las condiciones extra que se piden son:

1. Condición de positividad:

$$\omega(A^*A) \geq 0 \text{ para todo } A \in \mathcal{A}$$

2. Condición de Normalización:

$$\omega(Id) = 1$$

Estas condiciones incorporan, en un lenguaje algebraico, propiedades de los estados físicos que conocemos en mecánica cuántica. Para discutir las brevemente, imaginemos dos escenarios. En primer lugar, que los estados algebraicos representen *estados puros*, es decir, vectores en el espacio de Hilbert. En ese caso la primera condición dice que

$$0 \leq \omega(A^*A) \longleftrightarrow \langle \omega | \hat{A}^* \hat{A} | \omega \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \hat{A}\omega, \hat{A}\omega \rangle_{\mathcal{F}} = \|\hat{A}\omega\|_{\mathcal{F}}^2 \geq 0$$

y la segunda condición dice que

$$1 = \omega(Id) \longleftrightarrow \langle \omega | \hat{Id} | \omega \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \omega, \omega \rangle_{\mathcal{F}} = \|\omega\|_{\mathcal{F}}^2 = 1$$

donde hemos distinguido como \hat{A} a los operadores en el espacio de Hilbert que representan a los elementos A del álgebra abstracta. En este caso vemos que las nociones algebraicas de positividad y normalización coinciden con las nociones homónimas en espacios de Hilbert.

El razonamiento anterior se puede aplicar también si el estado algebraico representara un *estado mixto* en el espacio de Hilbert. En dicha situación el estado mixto se representa por una matriz densidad

$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, siendo $\{|\psi_i\rangle\}$ una base ortonormal y p_i los pesos relativos de cada estado en la mezcla. A su vez, el valor esperado de un observable \hat{A} se calcula como $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{A})$ y por lo tanto, la condición de positividad implica

$$\omega(A^*A) = \text{Tr}(\rho \hat{A}^* \hat{A}) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A}^* \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \|\hat{A} |\psi_i\rangle\|^2 \geq 0$$

y la condición de normalización equivale a $\omega(\text{Id}) = \sum_i p_i = 1$. Es claro que la interpretación de ambas condiciones es la misma que para estados puros. De hecho, un estado puro $|\psi\rangle$ se puede ver como un caso particular de matriz densidad con $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$. Con un cálculo similar se pueden verificar las mismas propiedades para matrices densidad con espectro continuo.

4.3 CONSTRUCCIÓN GNS

Sabemos que hay un estado algebraico para cada vector o matriz densidad en el espacio de Hilbert, pero surge naturalmente la pregunta ¿existe una matriz densidad en el espacio de Hilbert para cualquier estado algebraico que cumpla las condiciones de positividad y normalización?

La respuesta para una representación dada del álgebra en un espacio de Hilbert es no. Pero dado un estado algebraico ω siempre se puede encontrar un espacio de Hilbert y una representación del álgebra de Weyl en la cual ω sí corresponde a un vector de dicho espacio. Esta representación se puede obtener por medio de una construcción conocida como GNS (Gelfand-Naimark-Segal). En ella se construye explícitamente un espacio de Hilbert a partir de un estado ω y de la propia álgebra \mathcal{A} . El primer paso es transformar el mapa $(A, B) = \omega(A^*B)$ con $A, B \in \mathcal{A}$ en un producto interno, y a los elementos del álgebra en un espacio de Hilbert con este producto interno. La construcción lleva al siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en el capítulo “Topics in Functional Analysis” de [34].

Teorema 4.1. (de GNS)

Dada una C^* -álgebra \mathcal{A} con elemento identidad y un estado $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, existe una única terna $(\mathcal{F}_\omega, \pi_\omega, |\Psi\rangle)$ (a menos de una transformación unitaria), con \mathcal{F}_ω un espacio de Hilbert, $\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}_\omega)$ una representación del álgebra y $|\Psi\rangle$ un *vector cíclico*, tales que

$$\omega(A) = \langle \Psi | \pi_\omega(A) | \Psi \rangle.$$

Hay dos conceptos matemáticos en este teorema que conviene aclarar. Por un lado recordemos que una representación lleva los elementos del álgebra a operadores sobre un espacio de Hilbert que realizan dicha álgebra. Por ejemplo, el álgebra de Weyl es representada por las

combinaciones lineales de operadores de Weyl \widehat{W} . En segundo lugar, cuando decimos *vector cíclico* nos referimos a un vector para el cual el conjunto $\{\pi_\omega(A)|\Psi\rangle \mid \forall A \in \mathcal{A}\}$ es un subespacio denso de \mathcal{F}_ω .

Con este teorema tenemos una forma de traducir estados en el álgebra a estados en un espacio de Hilbert, utilizando como “diccionario” la representación del álgebra $\pi_\omega(\mathcal{A})$. Ahora bien, no todo estado algebraico tendrá una representación en la construcción GNS de un estado algebraico dado. En aQFT se utiliza el nombre *folium* de ω para referirse al conjunto de matrices densidad asociadas a la construcción GNS del estado ω .

Otra noción algebraica relevante es la distinción entre estados *algebraicos puros* y *mixtos*. Un estado es puro si no puede escribirse como una combinación lineal de otros dos estados algebraicos y de lo contrario es mixto. Vale aclarar que las nociones de estado algebraico puro y mixto no coinciden con las nociones en el sentido de espacios de Hilbert. Por ejemplo, en la construcción GNS a partir de un estado ω , ese estado siempre es representado por un vector $|\Psi\rangle$ (estado puro en \mathcal{F}) sin importar si ω es un estado algebraico puro o mixto. La razón para distinguir entre estados algebraicos puros y mixtos es que los estados algebraicos *mixtos* generan representaciones GNS *reducibles* y esto sí implica una conexión entre ambas nociones de estados mixtos. El carácter reducible de una representación implica que el espacio de Hilbert \mathcal{F} se divide en un conjunto de subespacios \mathcal{F}_i que son invariantes bajo la acción de los operadores en $\pi_\omega(\mathcal{A})$. Entonces el vector cíclico $|\Psi\rangle$ que representa al estado algebraico es una suma $|\Psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle$ de vectores $|\psi_i\rangle$ no nulos que pertenecen respectivamente a los subespacios \mathcal{F}_i . Por lo tanto, en este estado, el valor esperado de un observable $\widehat{A} \in \pi_\omega(\mathcal{A})$ se calcula como $\langle \Psi | \widehat{A} | \Psi \rangle = \text{Tr}(\rho \widehat{A})$ con $\rho = \sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Es decir que un estado *algebraico mixto* se comporta como un estado mixto (en el sentido de espacios de Hilbert) a la hora de calcular valores esperados de observables del álgebra.

4.4 ESTADOS FÍSICOS

La estructura algebraica que reseñamos hasta aquí incorpora en un mismo formalismo todas las construcciones tipo Fock de sistemas lineales (y muchas no Fock) y pone en pie de igualdad a todos los estados algebraicos. Pero el precio que se paga es que sólo un subconjunto de observables están incorporados en ella (los que están comprendidos en la clausura de combinaciones lineales de operadores de Weyl). Si ahora queremos extender el conjunto de observables a uno que incluya, por ejemplo, al tensor stress-energía (ver sección 4.4.3) entonces surge un problema grave. A nivel del álgebra es posible pensar este tipo de observable como límites (en alguna topología en que el álgebra no está cerrada) de observables que están en el

álgebra, pero eso no implica que la acción de los estados (que son funcionales sobre el álgebra) esté bien definida como un límite. Esquemáticamente se puede expresar así: dados $A_i \in \mathcal{A}$ y un estado $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $A_i \rightarrow A$ no implica que $\omega(A_i)$ tenga un valor límite que nos permita definir $\omega(A)$. La solución inmediata a este problema es delimitar el conjunto de observables relevantes y luego restringir el conjunto de estados algebraicos a aquellos cuya acción esté bien definida como límite. Dicho de otra forma, sólo algunos estados algebraicos serán considerados “físicos”. Estos son los estados en los cuales el valor esperado de todos los observables relevantes está bien definido.

Siguiendo esta línea de acción se han propuesto en la literatura diversas nociones de estados “físicos”. En este trabajo nos concentraremos en el tipo de estados llamados *Hadamard*, que es la noción de estado físico más aceptada.

Otro conjunto de estados algebraicos importante (y no disjunto con los estados Hadamard) es el de los *cuasi-libres*. Este tipo de estado es el más utilizado para describir la teoría libre pues su construcción GNS arroja una construcción Fock como la que presentamos en el capítulo tres. De hecho, la elección de un estado cuasi-libre se puede identificar claramente con la elección de un producto interno g , que es el centro de la cuantización Fock como vimos en ese capítulo. Antes de pasar a la discusión de los estados Hadamard, nos detendremos a discutir más en detalle este conjunto.

4.4.1 Estados cuasi-libres

Definimos un estado cuasi-libre como un estado que cumple

$$\omega_g(\widehat{W(\psi)}) = \exp\left(-\frac{g(\psi, \psi)}{4}\right)$$

para todo operador de Weyl, siendo g cualquier producto interno en el espacio de soluciones \mathcal{S} que cumpla la condición 3.2.1

$$g(\psi_1, \psi_1) g(\psi_2, \psi_2) \geq \Omega(\psi_1, \psi_2)^2.$$

El estado ω_g es puro si y sólo si la desigualdad se satura para cualquier $\psi_2 \neq 0$, como se demuestra en Kay and Wald [25].

Con esta definición ω_g satisface claramente la condición de normalización ya que $\omega_g(Id) = \omega_g(\widehat{W(0)}) = \exp(0) = 1$. La positividad de ω_g también es clara para los generadores $\widehat{W(\psi)}$ del álgebra, pero la condición 3.2.1 sobre el producto interno es necesaria y suficiente para asegurar la positividad sobre todos los elementos del álgebra.

La interpretación física de los estados cuasi-libres está íntimamente ligada con las *funciones de correlación*, que por otra parte será un

concepto clave en los siguientes capítulos. Por esta razón, en el apéndice C, incorporamos algunas ideas básicas para entender la noción de función de correlación en el enfoque algebraico.

Como se demuestra en dicho apéndice, para estados cuasi-libres todas las funciones de correlación están definidas. Dentro de ellas, las funciones de n puntos con n impar son cero, la función de correlación de dos puntos es

$$\lambda(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2} [g(\psi_1, \psi_2) - i\Omega(\psi_1, \psi_2)]$$

y las funciones de mayor orden son sumas de productos de funciones de dos puntos. Esto coincide con las propiedades de las funciones de correlación en la cuantización Fock estándar del campo libre en espacio-tiempo plano y es una primera prueba de la conexión que discutiremos en la próxima subsección.

4.4.2 Conexión con la construcción Fock

Como vimos en la subsección anterior, un producto interno que cumple la inecuación 3.2.1 identifica a un estado cuasi-libre. También sabemos de la sección 3.2.3 que el mismo producto interno define una cuantización Fock. Como el lector ya habrá advertido, estos hechos no son una coincidencia. Resulta que la representación del álgebra obtenida por la construcción GNS en base al estado ω_g es la cuantización Fock construida en base al producto interno g , con ω_g representado por el vacío Fock. Esta conexión entre ambas construcciones nos permite reinterpretar la libertad para elegir una cuantización Fock como *la libertad de elegir un estado cuasi-libre como vacío*.

Verifiquemos la relación explícitamente. En la cuantización Fock todos los operadores de Weyl están representados por operadores de la forma

$$\pi_\omega(W(\psi)) = e^{i\widehat{\Omega(\psi, \cdot)}} = e^{\hat{a}^*(K\psi) - \hat{a}(\overline{K\psi})}.$$

Usando la relación de conmutación $[\hat{a}(\overline{K\psi}), \hat{a}^*(K\psi)] = \langle K\psi, K\psi \rangle_{\mathcal{H}} \widehat{Id}$ y la identidad $e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$, que se cumple para cualquier par de operadores A, B cuyo conmutador sea proporcional a la identidad, entonces los operadores de Weyl se pueden escribir como

$$\pi_\omega(W(\psi)) = e^{-\frac{1}{2}\langle K\psi, K\psi \rangle_{\mathcal{H}}} e^{\hat{a}^*(K\psi)} e^{\hat{a}(\overline{K\psi})}.$$

Si ahora calculamos su valor esperado en el vacío, obtenemos

$$\langle 0 | \pi_\omega(W(\psi)) | 0 \rangle_{\mathcal{F}_s} = e^{-\frac{1}{2}\langle K\psi, K\psi \rangle_{\mathcal{H}}} \langle 0 | e^{\hat{a}^*(K\psi)} e^{\hat{a}(\overline{K\psi})} | 0 \rangle_{\mathcal{F}_s} = e^{-\frac{1}{2}\langle K\psi, K\psi \rangle_{\mathcal{H}}}$$

donde hemos usado que $\hat{a}(\overline{K\psi}) | 0 \rangle = 0$ y que $\hat{a}^*(K\psi)$ es el adjunto de $\hat{a}(\overline{K\psi})$. Finalmente, en términos del producto interno g definido por $g(\psi_1, \psi_2) = 2\text{Re}(\langle K\psi_1, K\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}})$ resulta

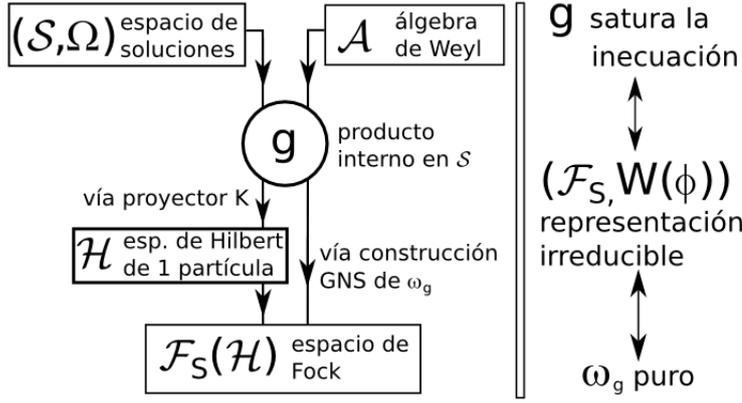


Figura 1: Esquema de la relación entre las construcciones Fock y algebraica a partir de un producto interno que cumple la inecuación 3.2.1

$$\langle 0 | \pi_\omega (W(\psi)) | 0 \rangle_{\mathcal{F}_S} = e^{-\frac{1}{4}g(\psi, \psi)}.$$

De modo que el vacío $|0\rangle$ del espacio de Fock representa al estado cuasi-libre ω_g construido a partir de g . Luego, como la representación obtenida por la construcción GNS es la única en la cual el estado es un vector cíclico, y $|0\rangle$ es cíclico en el espacio de Fock, entonces debe coincidir con la construcción Fock en base a g .

En el capítulo tres hemos discutido especialmente la cuantización Fock construida a partir de una métrica g que cumple la ecuación 3.2.2, lo cual arroja una representación irreducible del álgebra de Weyl. Sin embargo, como lo demuestra la proposición 3.1, también se puede realizar una construcción Fock a partir de una métrica que cumpla la inecuación 3.2.1, pero en ese caso la representación es reducible y eso se corresponde, como ya marcamos, con que el estado cuasi-libre definido por g sea un estado algebraico mixto. Para fijar estas ideas presentamos el esquema 1 como forma gráfica de sintetizar lo dicho en estos últimos párrafos.

4.4.3 Estados Hadamard

Como vimos en la sección anterior, la restricción a vacíos cuasi-libres resulta ser muy conveniente. Sin embargo no asegura que los objetos del tipo¹ $\langle 0 | \phi(x)\phi(x) | 0 \rangle$ puedan definirse adecuadamente. Estos objetos son fundamentales en el cálculo de, por ejemplo, el valor esperado del tensor stress-energía, el cual juega un papel fundamental en las teorías semi-clásicas² cuyos resultados siguen siendo la re-

¹ Ver primera sección del apéndice C para una discusión detallada.

² En el enfoque semi-clásico se estudia la interacción entre un campo gravitatorio clásico g_{ab} y campos de materia cuánticos. Estos campos de materia actúan como fuentes gravitatorias a través del valor esperado del tensor stress-energía $\langle \widehat{T}_{ab} \rangle$ de acuerdo a la ecuación $G_{ab} = 8\pi \langle \widehat{T}_{ab} \rangle$, donde G_{ab} es el tensor de Einstein.

ferencia principal para las teorías cuánticas de la gravedad. Además, este es un punto clave para llevar adelante un desarrollo perturbativo de la teoría de campos equivalente al que se realiza en espacio-tiempo plano (ver Hollands and Wald [21]).

La solución planteada en la mayor parte de la literatura es restringir los estados posibles a aquellos para los cuales la parte divergente de $\lim_{y \rightarrow x} \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$ tenga una forma fijada por la llamada *condición Hadamard*.

La forma definitiva de esta condición está explicada en detalle en la sección 3.3 de [25], pero a grandes rasgos consiste en exigir que la función de dos puntos tenga la forma

$$H(x, y) = \frac{U(x, y)}{(2\pi)^2 \sigma} + V(x, y) \text{Ln}(\sigma) + W(x, y)$$

siendo σ la distancia geodésica cuadrática entre x e y ,

$$V(x, y) = \sum_i v_i(x, y) \sigma^i \quad , \quad W(x, y) = \sum_i w_i(x, y) \sigma^i$$

donde U , v_i y w_i son funciones suaves que se obtienen imponiendo la ecuación de campo en ambas variables.

Esta forma funcional reproduce la estructura de la función de dos puntos en espacio-tiempo plano (ver apéndice D.3), pero los detalles sobre la misma no son cruciales en esta tesis, pues en 1996 Radzikowski [30] demostró que es equivalente a otra condición que es más intuitiva desde el punto de vista físico y está muy relacionada con uno de los *axiomas de Wightman* de la *Teoría Cuántica de Campos Axiomática*. Se trata de la llamada *condición espectral* (ver la sección II.1 de Haag [18]), la cual exige que la energía sea positiva (o al menos acotada por abajo), pero no es aplicable al caso de espacio-tiempo curvo. La nueva condición introducida por Radzikowski funciona como un equivalente de la condición espectral en espacio-tiempo curvo. A ello debe su nombre de *condición espectral microlocal* (μSC). En el capítulo siguiente daremos una descripción de la misma y por lo tanto deberemos repasar conceptos del análisis microlocal (ver Hörmander [23]).

4.4.4 Teorema de Verch

Uno de los resultados principales que muestran la importancia de los estados de Hadamard y que ha sido uno de los focos de esta tesis fue obtenido por Verch [37]. Como discutimos en el capítulo tres, el teorema de Stone von-Neumann no funciona en teoría de campos porque los grados de libertad son infinitos. Ahora bien, si uno aísla los modos de momento muy alto y muy bajo de un campo, lo que resta son un número finito de modos. La condición Hadamard limita fuertemente los modos de momento alto, quedando sólo los modos de baja frecuencia como testigos de la no equivalencia de las representaciones. Estos modos se manifiestan en escalas espaciales muy

grandes y por lo tanto es esperable que exista algún tipo de equivalencia si uno estudia estados Hadamard en regiones acotadas del espacio-tiempo. En ese sentido Verch probó que dados dos estados, ω_1 y ω_2 , cuasi-libres y Hadamard, y la restricción $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ del álgebra de Weyl a una región \mathcal{O} del espacio-tiempo abierta y de clausura compacta, se cumple que:

cualquier matriz densidad en la construcción GNS en base a ω_1 coincide con alguna matriz densidad en la construcción GNS en base a ω_2 cuando se las restringe al álgebra $\mathcal{A}_\mathcal{O}$. De esta manera, localmente los folia de ambas construcciones coinciden.

Notar que esta coincidencia de los valores esperados, se extiende a observables definidos como límites de elementos de $\mathcal{A}_\mathcal{O}$, por ejemplo el tensor de stress-energía.

En particular, el resultado de Verch implica que las representaciones GNS del álgebra $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ son *cuasi-equivalentes* (ver definición en Dixmier [13]). Esta relación entre las representaciones es más débil que la equivalencia unitaria, pero ambas coinciden cuando las representaciones son irreducibles (ver proposición 5.3.3 de Dixmier [13]).

4.5 RESUMEN

En este capítulo presentamos un enfoque algebraico sobre el proceso de cuantización, que se centra en un álgebra mínima de observables. Su principal ventaja es que logra incorporar en un mismo marco teórico todas las representaciones del álgebra de Weyl. Sobre esta álgebra se definen estados como funcionales lineales que asignan a cada elemento del álgebra su valor esperado en dicho estado. Dado un estado se puede definir un espacio de Hilbert y una representación del álgebra sobre ese espacio mediante una construcción conocida como *construcción de GNS*. En particular las construcciones GNS en base a estados *cuasi-libres* coinciden con las cuantizaciones Fock del capítulo anterior.

La necesidad de incorporar en la teoría observables que no pertenecen al álgebra nos motiva a restringirnos a estados *Hadamard*. Con esta restricción las teorías resultantes tienen dos características importantes:

- permiten una descripción semi-clásica de la interacción de campos de materia con la gravedad y además habilitan un desarrollo perturbativo de teorías de campos con interacción sobre espacio-tiempo curvo (Hollands and Wald [21]).
- por el Teorema de Verch la cuantización es única (localmente). Todas las cuantizaciones en base a estados Hadamard y cuasi-libres son *cuasi-equivalentes* cuando se restringen a observables en una región acotada.

5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo debe su existencia a un resultado obtenido por Radzikowski [30] que permite entender la condición Hadamard en términos de la transformada de Fourier (TF) de las funciones de correlación. Específicamente, Radzikowski probó la equivalencia de esta condición con la *Condición Espectral Microlocal* (μSC). Es más, para estados cuasi-libres, fue probado por Strohmaier et al. [35] que la condición μSC es equivalente a una condición sobre la TF de $\widehat{\phi}(f)|0\rangle$, es decir, los *quanta* del campo de K-G. En la expresión anterior $\phi(f)$ es el observable *campo promediado* que mencionamos en la sección 2.5 y que discutiremos en detalle en el siguiente capítulo.

La importancia del resultado de [35] es que esta versión de la condición μSC es una formulación local de la condición de *positividad de la energía* y esto le da un sentido físico mucho más concreto a la condición Hadamard. La discusión detallada de este punto se da al final del capítulo, luego de introducir las herramientas matemáticas necesarias.

Como mencionamos anteriormente, el énfasis en este capítulo está en estudiar la divergencia de ciertas distribuciones (las funciones de correlación) en el espacio-tiempo. El resultado clave que vincula divergencia y TF es que las funciones suaves tienen una transformada que cae rápidamente en el límite de momento grande, de lo cual se desprende que las divergencias están relacionadas con el decaimiento “lento” de la TF en dicho límite. En el caso de espacio tiempo-plano se puede utilizar el análisis de Fourier para trabajar con las nociones de momento y frecuencia. Esto no sucede en un espacio-tiempo curvo general, pues no existe una noción natural de onda plana y por tanto de transformada de Fourier. El análisis micro-local es una herramienta matemática que nos permite sortear este problema. Con él podemos definir una noción local de transformada de Fourier que brinda información sobre las divergencias de distribuciones en torno a un punto del espacio tiempo.

Un tratamiento profundo de los métodos de análisis microlocal se encuentra en el libro de Hörmander [23], una referencia ineludible en el área. Aquí nos limitaremos a enunciar los resultados fundamentales que utilizamos en este trabajo.

En cuanto a la aplicación de los resultados de dicho texto a nuestro problema es conveniente hacer algunas puntualizaciones. En primer

lugar, dado que modelamos al espacio-tiempo como variedad y que nos interesa estudiar distribuciones en un entorno de un punto, siempre podremos identificar una región pequeña del espacio-tiempo con un abierto de \mathbb{R}^n (vía una parametrización local). De este modo los resultados obtenidos para \mathbb{R}^n son fácilmente exportables a variedades. En segundo lugar, las distribuciones están definidas como mapas a \mathbb{C} , pero se puede sustituir \mathbb{C} por otros espacios normados como \mathbb{R} o espacios de Hilbert.

5.2 DEFINICIONES

Antes de comenzar invitamos al lector no familiarizado con el lenguaje de teoría de distribuciones a repasar el apéndice A, el cual concentra algunos conceptos imprescindibles para esta sección de la tesis.

Comenzamos presentando varias definiciones clave para el desarrollo del capítulo. En particular introducimos la noción central de *Wave Front Set*.

Definición 5.1. (Entorno cónico)

Un entorno cónico Γ de un vector $k \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto $\Gamma = \{\alpha k' \mid k' \in V, \alpha > 0\}$ con V un entorno de k .

NOTACIÓN: Dado un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ llamaremos $X \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ al conjunto $\{(x, k) \in X \times \mathbb{R}^n \mid k \neq 0\}$.

Definición 5.2. (Dirección regular)

Dado un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, un espacio vectorial B con norma y una distribución $u \in \mathcal{D}'(X, B)$ que toma valores en B , decimos que un par $(x, k) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ define una *dirección regular en x* si existe una función $f \in C_0^\infty(X)$, con $f(x) \neq 0$, y un entorno cónico Γ de k tal que:

$$\blacksquare \forall N \sup_{k' \in \Gamma} \left(1 + |k'|^N\right) \left\| \widetilde{f}u(k') \right\|_B < \infty$$

siendo $\widetilde{f}u(k')$ la **TF** del producto¹ $f u$. B puede ser, por ejemplo, \mathbb{R} , \mathbb{C} o un espacio de Hilbert.

La regularidad postulada significa que $\widetilde{f}u(k')$ es acotado y cae más rápidamente que cualquier potencia $|k'|$ cuando $k' \rightarrow \infty$ en Γ , es decir en la dirección de k y direcciones vecinas.

Definición 5.3. (Punto regular)

A los puntos x que sólo poseen direcciones regulares se los llama *puntos regulares*

¹ Para la transformada de Fourier usamos la notación $\tilde{f}(k) = \int f(x)e^{-ik \cdot x} d^n x$ y para la anti-transformada la notación es $f(x) = \int \tilde{f}(k)e^{ik \cdot x} d^n k$ con $d^n k = \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$.

Definición 5.4. (*Soporte singular*)

Al complemento del conjunto de puntos regulares se lo denomina *soporte singular de la distribución*.

Por ejemplo, si el soporte singular de una distribución es vacío, entonces la distribución es una función C^∞ .

Definición 5.5. (*Wave Front Set*)

Al conjunto de pares $(x, k) \in (X \times \mathbb{R}^n) \setminus 0$ tal que k no es una dirección regular en x , se lo denomina Wave Front Set (**WF**).

El **WF** describe no sólo los puntos donde una distribución es singular, sino también las direcciones de la **TF** que determinan dicha singularidad. En palabras podemos decir que el **WF** es el conjunto de los puntos y las direcciones en las cuales la **TF** no cae más rápido que cualquier potencia del argumento k , cuando este se hace grande.

5.3 EJEMPLOS

La aplicación a algunos ejemplos puede ser de utilidad para entender el concepto. En todos los ejemplos $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ será una función de prueba (suave y de soporte compacto) y las distribuciones serán del tipo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Ejemplo 5.1. El **WF** de una función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es vacío.

Discutiremos el ejemplo en \mathbb{R} por simplicidad, pero esta demostración se extiende a \mathbb{R}^n . Para calcular el **WF** de g debemos multiplicarla por una función $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en torno al punto de interés y luego estudiar la transformada de Fourier de $f = hg$. Dado que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ entonces la transformada de Fourier de sus derivadas de cualquier orden están bien definidas. Explícitamente

$$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}}(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x) e^{-ikx} dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx = ik \widetilde{f}(k)$$

y luego $\widetilde{\frac{\partial^m f}{\partial x^m}}(k) = (-ik)^m \widetilde{f}(k)$. Por otro lado $|\widetilde{f}(k)|$ está acotada por la aproximación

$$|\widetilde{f}(k)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq L_0 \max |f(x)| = C_0$$

donde L_0 es la longitud de cualquier intervalo que contenga el soporte f . Lo mismo sucede con todas sus derivadas. Por lo tanto, uniendo ambos resultados, para cualquier m y cualquier k se cumple

$$(1 + |k|^m) |\widetilde{f}(k)| = |\widetilde{f}(k)| + \left| \widetilde{\frac{\partial^m f}{\partial x^m}}(k) \right| \leq C_0 + C_m < \infty.$$

De aquí se puede concluir que todas las direcciones son regulares en el soporte de h y dado que esta función puede elegirse arbitrariamente $WF(g) = \emptyset$.

Ejemplo 5.2. El WF de la distribución δ de Dirac en \mathbb{R} , definida por $\delta(f) = f(0)$.

Aplicando la definición de producto de distribuciones por funciones suaves y de TF de distribuciones

$$(\widetilde{f\delta})(k) = f\delta(e^{-ik\cdot}) = \delta(fe^{-ik\cdot}) = f(0)e^{-ik\cdot 0} = f(0).$$

Para cualquier punto x diferente de 0 podemos elegir una función f tal que $f(x) \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces $WF(\delta)$ no contiene puntos diferentes de 0. Si $x = 0$, la definición requiere que $f(0) \neq 0$ y por tanto la TF no decae con k en ninguna dirección. Esto implica que $WF(\delta) = \{(0, k) \mid k \neq 0\}$.

Ejemplo 5.3. La distribución “ $T(x) = 1/(x - i0)$ ”, o más exactamente la distribución definida por $T(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{f(s)}{s - i\epsilon} ds$, con $f \in C_0^\infty$.

Calculando \widetilde{fT} se obtiene

$$\widetilde{fT}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{f(s)e^{-iks}}{s - i\epsilon} ds.$$

En primer lugar veamos que la transformada de Fourier de T es $2\pi i\theta_-$ siendo $\theta_-(x) = \theta(-x)$ y θ el escalón de Heaviside. Para ello utilizamos que $\frac{1}{s - i\epsilon} = i \int_{-\infty}^0 e^{iks} e^{\epsilon k} dk$ y entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(g) &= T(\widetilde{g}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{g}(s)}{s - i\epsilon} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(s) i \int_{-\infty}^0 e^{iks} e^{\epsilon k} dk ds = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon k} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(s) e^{iks} ds dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon k} 2\pi g(k) dk = \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^0 g(k) dk = 2\pi i\theta_-(g). \end{aligned}$$

Luego aplicando propiedades elementales de la transformada de Fourier

$$\widetilde{fT}(k) = \frac{1}{2\pi} (\widetilde{f} * \widetilde{T})(k) = i (\widetilde{f} * \theta_-)(k) = i \int_{-\infty}^0 \widetilde{f}(k - k') dk' =$$

(cambio de variable $u = k - k'$)

$$= -i \int_{+\infty}^k \widetilde{f}(u) du = i \int_k^{+\infty} \widetilde{f}(u) du.$$

Si $k > 0$ entonces en el límite $k \rightarrow +\infty$ la integral cae más rápido que cualquier potencia de k porque \tilde{f} lo hace. Por lo tanto los pares $(0, k < 0)$ son regulares. En cambio si $k < 0$ entonces cuando $k \rightarrow -\infty$ la integral tiende a $i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u) du = 2\pi i f(0)$. O sea que los pares $(0, k < 0)$ están en el WF de T . En cualquier otro punto distinto de 0 podemos elegir f de forma tal que $f(0) = 0$ y como conclusión $WF(T) = \{(0, k) | k > 0\}$.

Ejemplo 5.4. La distribución escalón θ definida por $\theta(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) dx$.

El cálculo de la TF es inmediato

$$\tilde{f\theta}(k) = \theta(fe^{-ik\cdot}) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)e^{-ikx} dx.$$

Si la función f tiene soporte sólo en $x < 0$, la TF es cero. Por tanto los puntos $x < 0$ no pertenecen al WF. Por otro lado, si el soporte de f está en $x > 0$, entonces $\tilde{f\theta}(k) = \tilde{f}(k)$ y esta es una función que cae más rápido que cualquier potencia de k ya que f es suave. De esta manera sólo el punto $x = 0$ está en el soporte singular. Luego podemos usar que la derivada de la función escalón es la δ de Dirac y el resultado que veremos en la siguiente subsección según el cual $WF(u') \subset WF(u)$ siendo u una distribución y u' su derivada. Esto implica que $WF(\theta) = \{(0, k) | k \neq 0\}$ pues $WF(\delta) = \{(0, k) | k \neq 0\}$ y no hay otros pares que puedan estar en $WF(\theta)$.

En este caso es fácil calcular de forma explícita cómo es el comportamiento de la TF de la función escalón, visto como el límite en $\epsilon \rightarrow 0^+$ del escalón regularizado $\theta_\epsilon(x) = \theta(x)e^{-\epsilon x}$. Primero se obtiene la transformada de $\tilde{\theta}_\epsilon(k) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-i(k-i\epsilon)x} dx = \frac{-i}{k-i\epsilon}$ y luego $\tilde{\theta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i}{k-i\epsilon}$. De aquí se desprende que $\tilde{\theta} = -iT(k)$ y que transformada de Fourier del escalón cae como $1/k$ en los límites $k \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo 5.5. Por último tomemos el caso de la delta 1-D en un espacio 2-D, es decir la distribución $\delta(x)$ donde x es una de las coordenadas en \mathbb{R}^2 , cuya acción sobre una función de prueba es $\delta(f) = \int f(0, y) dy$.

Si tomamos una función suave $f(x, y)$ y calculamos $\tilde{f\delta}$ se obtiene

$$\tilde{f\delta}(k_x, k_y) = \int f(0, y) e^{-ik_x \cdot 0} e^{-ik_y y} dy = \tilde{f}_0(k_y)$$

donde $f_0(y) = f(0, y)$. Para cualquier punto fuera del eje y se puede elegir una función C_0^∞ cuyo soporte incluya al punto pero no al eje y , con lo cual $\tilde{f}_0(k_y) = 0$. Luego en los puntos del eje, si hacemos el límite $\tilde{f\delta}(\lambda k_x, \lambda k_y)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, está cae más rápido que cualquier potencia de $|\lambda k|$ porque f es suave, excepto si tomamos $k_y = 0$, en cuyo caso la transformada no cae. De este modo $WF(\delta(x)) = \{(x, y, k_x, k_y) | y = 0, k_y = 0\}$

5.4 OPERACIONES CON DISTRIBUCIONES Y EL WF

Además de las operaciones definidas en el apéndice A existen otras operaciones sobre distribuciones que pueden definirse si se cumplen ciertas condiciones sobre el WF, como la multiplicación y la restricción de distribuciones a sub-variedades. También va a ser importante para nuestros fines saber cómo impactan algunas operaciones sobre el WF del resultado. Comencemos repasando esto último en las operaciones definidas en el apéndice, siendo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

PRODUCTO POR UNA FUNCIÓN SUAVE: Se desprende del lema 8.1.1 de Hörmander [23] que

$$WF(fu) \subset WF(u).$$

CONVOLUCIÓN CON UNA FUNCIÓN SUAVE: La convolución con una función suave y de soporte compacto arroja una función C^∞ y por lo tanto

$$WF(f * u) = \emptyset$$

Esto es consecuencia del comentario al final del apéndice A. Si u es de soporte compacto, la transformada de Fourier de $f * u$ se obtiene como $\widetilde{f * u}(k) = \widetilde{f}(k)\widetilde{u}(k)$. Dado que \widetilde{f} cae más rápido que cualquier potencia de k cuando $k \rightarrow \infty$ y que \widetilde{u} está acotado por alguna potencia de k entonces el producto cae más rápido que cualquier potencia de k y $WF(f * u) = \emptyset$. Si u no es de soporte compacto, siempre puede ser sustituida por otra distribución de soporte compacto que coincida con u en un conjunto acotado sin cambiar el resultado de $WF(f * u)$ (pues f es de soporte compacto).

DERIVADA: Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier vistas en el ejemplo 1 de la sección anterior se puede probar que $WF(\partial_i u) \subset WF(u)$ o de forma más general,

$$WF(P(u)) \subset WF(u)$$

siendo P un operador diferencial con coeficientes suaves.

PRODUCTO TENSORIAL DE DISTRIBUCIONES: Dado que la transformada de Fourier del producto tensorial es el producto de las transformadas entonces

$$\begin{aligned} WF(u \otimes v) \subset [WF(u) \times WF(v)] \cup [(supp(u) \times \{0\}) \times WF(v)] \cup \\ \cup [WF(u) \times (supp(v) \times \{0\})] \end{aligned}$$

SATURACIÓN DE UNA ENTRADA (TEOREMA DE KERNEL): En el apéndice A discutimos que, dada una distribución $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$, existe un único mapa $\mathcal{K} : C_0^\infty(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ tal que $\mathcal{K}f(g) = K(f, g)$ siendo f y g funciones de prueba. El WF de $\mathcal{K}f$ cumple

$$WF(\mathcal{K}f) \subset \{(x, k) \mid (x, y, k, 0) \in WF(K), y \in \text{supp}(f)\}.$$

5.4.1 Operaciones determinadas por el WF

Como primer paso definiremos una operación clave, el *pullback* de una distribución por un mapa suave entre dos espacios. En el caso de una función suave $g : Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el pullback a X por un mapa suave $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ se define simplemente como la composición, es decir $f^*g = g \circ f$. La generalización a distribuciones requiere de la introducción de varias nociones relacionadas con el WF. Esta es una ampliación necesaria pues esta operación nos permite extender, por ejemplo, la noción de WF a distribuciones sobre variedades.

Definiciones previas:

Sean $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos y $f : X \rightarrow Y$ un mapa C^∞ .

- El conjunto de los normales al mapa f es

$$N_f = \left\{ (f(x), \eta) \in Y \times \mathbb{R}^m \mid (f'(x))^t \eta = 0 \right\}$$

donde la coordenada i de $(f'(x))^t \eta$ es $\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \eta_j$.

- Si Γ es un subconjunto cónico de $Y \times \mathbb{R}^m$, es decir un conjunto invariante bajo el mapa $(y, \eta) \rightarrow (y, \lambda \eta)$ para todo $\lambda > 0$, entonces el pullback de Γ por f es

$$f^*\Gamma = \left\{ \left(x, (f'(x))^t \eta \right) \in X \times \mathbb{R}^n \mid (f(x), \eta) \in \Gamma \right\}.$$

- Dado un conjunto cónico cerrado Γ en $X \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ se define

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(X), WF(u) \subset \Gamma \right\}$$

es decir, el conjunto de distribuciones cuyo WF está dentro de Γ .

- Una sucesión u_j en $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$ converge a u si y sólo si
 1. $u_j(g) \rightarrow u(g)$ para toda función de prueba g
 2. $\sup_{k \in V} (1 + |k|)^N \left| \widetilde{h}u_j(k) - \widetilde{h}u(k) \right| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ para toda función h de prueba y cono cerrado $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}[h] \times V$ es disjunto de Γ .

Esto define la topología de $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$.

PULLBACK POR UN MAPA SUAVE (TEOREMA 8.2.4 DE HÖRMAN-
DER [23]):

Dada una distribución $u \in \mathcal{D}'(Y)$ y un mapa suave $f : X \rightarrow Y$ que cumplen $N_f \cap WF(u) = \emptyset$ entonces se puede definir el pullback $f^*(u) \in \mathcal{D}'(X)$ de manera única si exigimos que:

- la operación se debe reducir a $f^*(u) = u \circ f$ cuando $u \in C^\infty$
- f^* debe mapear $\mathcal{D}'_\Gamma(Y) \rightarrow \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}(X)$ de forma continua y lineal para todo Γ cónico, cerrado y disjunto de N_f .

El pullback definido de esta manera cumple $WF(f^*u) \subset f^*WF(u)$.

Un caso particular importante es el de $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ y f un difeomorfismo. En ese caso dada una distribución $u \in \mathcal{D}'(Y)$ la existencia del pullback está asegurada, ya que $N_f = \emptyset$, y se cumple que $WF(f^*u) = f^*WF(u)$. Esto permite definir sin ambigüedad el WF de distribuciones sobre variedades, ya que podemos definir $WF(u)$ con $u \in \mathcal{D}'(M)$ como

$$WF(u) = \varphi^*WF(\varphi^{-1*}(u)),$$

siendo $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta local. De esta manera se obtiene una definición independiente del sistema de coordenadas.

NOTA: El WF en una variedad M es un subconjunto del fibrado cotangente T^*M .² Así cuando hablamos de los vectores k del WF en un punto de M , nos referimos a 1-formas.

RESTRICCIÓN A SUB-VARIEDADES:

Con el resultado anterior, dada una variedad M , una distribución $u \in \mathcal{D}'(M)$ y una subvariedad X entonces, si el fibrado co-normal³ $N^*(X)$ es disjunto con el $WF(u)$, se define la restricción de $u|_X$ mediante el pullback del mapa de inclusión $X \rightarrow M$.

PRODUCTO DE DOS DISTRIBUCIONES:

Para dos distribuciones $u, v \in \mathcal{D}'(M)$ se puede utilizar el mapa diagonal $\mathcal{D} : X \rightarrow X \times X$ dado por $\mathcal{D}(x) = (x, x)$ y definir el producto como

$$uv = \mathcal{D}^*[u \otimes v]$$

² El fibrado co-tangente T^*M en una variedad M está formado por los elementos de la forma (x, k) con $x \in M$ y $k \in T_x^*M$, es decir puntos y 1-formas (co-vectores) en el punto. A su vez es una variedad con la topología y la estructura diferenciable heredadas de M (ver, por ejemplo, sección 2.9 de Hawking and Ellis [19]). Típicamente el espacio de fase es modelado como este tipo de fibrado, pues el momento se define más naturalmente como un co-vector que como un vector en espacios con geometría curva.

³ Siendo X una subvariedad de M , el fibrado co-normal $N^*(X)$ es la subvariedad de T^*M formado por pares (x, k) tales que $k(v) = 0$ para cualquier vector tangente v en x .

El fibrado co-normal de $\mathcal{D}(M)$ en $M \times M$ es

$$N^* = \{(x, \eta), (x, -\eta) \mid \eta \in T_x^*M\}.$$

Entonces, por el resultado sobre el pullback y sobre el WF de $u \otimes v$, la definición del producto funciona a menos que haya un $(x, \eta) \in WF(u)$ tal que $(x, -\eta) \in WF(v)$. Por el mismo resultado

$$\begin{aligned} WF(uv) &\subset \mathcal{D}^*WF(u \otimes v) \subset \\ &\subset \{(x, \eta + \xi) \mid (x, \eta) \in WF(u) \text{ o } \eta = 0, (x, \xi) \in WF(v) \text{ o } \xi = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema del Kernel sobre distribuciones:

Como vimos en el teorema del Kernel, una distribución $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ define un mapa $\mathcal{K} : C_0^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ mediante $\mathcal{K}f(g) = K(f, g)$. En algunos caso se puede extender \mathcal{K} al espacio de distribuciones de soporte compacto $\mathcal{E}'(Y)$.

■ Notación:

Dado $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ se definen

$$WF'(K) = \{(x, y, k_x, k_y) \mid (x, y, k_x, -k_y) \in WF(K)\}$$

$$WF(K)_X = \{(x, k_x) \mid (x, y, k_x, 0) \in WF(K), y \in Y\}$$

$$WF'(K)_X = \{(x, k_x) \mid (x, y, -k_x, 0) \in WF(K), y \in Y\}$$

$$WF(K)_Y = \{(x, k_x) \mid (x, y, 0, k_y) \in WF(K), x \in Y\}$$

$$WF'(K)_Y = \{(x, k_x) \mid (x, y, 0, -k_y) \in WF(K), x \in Y\}$$

ENUNCIADO DEL TEOREMA (TEOREMA 8.2.13 DE [23]):

Existe una única extensión continua del mapa \mathcal{K} a distribuciones $u \in \mathcal{E}'(X)$ con $WF(u)$ disjunto de $WF'(K)_Y$. El mapa \mathcal{K} se dice continuo si su restricción a $\mathcal{E}'(C) \cap \mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ es continua para cualquier $C \subset Y$ compacto y Γ conjunto cónico cerrado disjunto de $WF'(K)_Y$. Si u es una distribución en el dominio de \mathcal{K} entonces

$$WF(\mathcal{K}u) \subset WF(K)_X \cup WF'(K) \circ WF(u)$$

donde la composición $WF'(K) \circ WF(u)$ consiste de los elementos $(x, y, k_x, k_y) \in WF'(K)$ tales que $(y, k_y) \in WF(u)$.

NOTA: En el capítulo siete usaremos este teorema en el caso especialmente sencillo en el cual $WF'(K)_Y = \emptyset$. Con esta simplificación es obvio que se cumple el requisito $WF(u) \cap WF'(K)_Y = \emptyset$ y que Γ es disjunto de $WF'(K)_Y$ para cualquier Γ . Este último hecho implica que \mathcal{K} es continuo en la topología débil sobre $\mathcal{E}'(Y)$. (Una sucesión u_j converge a una distribución u en la topología débil si $u_j(g)$ converge a $u(g)$ para cualquier función de prueba g .)

5.5 WF PARA SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Las propiedades del WF lo hacen especialmente útil para estudiar las distribuciones que surgen como soluciones de ecuaciones diferenciales. La siguiente proposición explica porqué.

Definición 5.6. (*símbolo principal*)

Si $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es un operador diferencial de orden m [que se puede escribir como $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (iD)^\alpha$ con D la derivación y $a_\alpha(x) \neq 0$] definimos el *símbolo principal* como $p_m = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) k^\alpha$, siendo α un multi-índice.⁴

Proposición 5.1. (*porposición 8.3.1 de [23]*):

Sea $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ un operador diferencial y u una distribución que satisface $P(u) = 0$ entonces

$$WF(u) \subset Char(P)$$

donde el conjunto característico $Char(P)$ es el conjunto de pares $(x, k) \in T^*M \setminus 0$ para los cuales el símbolo principal se anula.

Esta propiedad es extremadamente útil, pues no es necesario estudiar detalladamente las soluciones de las ecuaciones diferenciales para describir sus singularidades. Basta con hacer una simple investigación sobre los ceros de la función p_m para acotarlas fuertemente.

Otro resultado importante es que las singularidades en puntos diferentes del espacio-tiempo están conectadas en el sentido especificado en el teorema 23.2.9 de Hörmander [22]. Allí se prueba que el WF es una unión de trayectorias, en posición y momento, de partículas con Hamiltoniano p_m . Inmediatamente presentamos una versión de este teorema reducido a ecuaciones lineales de segundo orden, como la ecuación de K-G. En este caso el símbolo principal toma la forma $p_2 = h^{ab}(x)k_a k_b$.

Teorema 5.1. (*de propagación de singularidades*):

Sea P un operador diferencial de segundo orden con coeficientes C^∞ sobre una variedad M globalmente hiperbólica según la métrica h^{ab} definida por el símbolo principal. Entonces si $Pu = f$ se cumple que $WF(u) \setminus WF(f)$ es un subconjunto de $Char(P)$ invariante bajo el flujo del campo hamiltoniano definido por el símbolo principal.

Para aclarar el contenido de la proposición y teorema anteriores, es conveniente discutirlos directamente en algunos ejemplos, que son elegidos especialmente por su importancia en este trabajo.

⁴ Un multi-índice α es un conjunto de enteros positivos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, con la notación $k^\alpha = k^{\alpha_1} \dots k^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$.

Ejemplo 5.6. WF de soluciones de la ecuación de K-G:

Supongamos que queremos estudiar la ecuación de Klein-Gordon en una porción (M, g) del espacio-tiempo. En este caso, el operador diferencial es $P = \square_g - m^2$, cuyo símbolo principal es

$$p_2(x, k) = g^{ab}(x) k_a k_b.$$

El mismo se anula en cualquier punto x , pero sólo para direcciones con $k^2 = 0$, y por lo tanto, dada una solución u de la ecuación K-G en un espacio-tiempo cualquiera, $WF(u) \subset \{(x, k) \mid k^2 = 0, k \neq 0\} \equiv \mathcal{V}$ como lo marca la proposición 5.1.

En este caso, podemos utilizar el teorema de propagación de singularidades para acotar aún más los posibles WF de las soluciones. El Hamiltoniano definido por el símbolo principal es $H = g^{ab} k_a k_b$ y éste se corresponde al Lagrangiano $L = \frac{1}{4} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$, siendo $k_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^b$ y donde $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$ con λ parámetro de las trayectorias $x^a(\lambda)$. Esto se comprueba inmediatamente calculando $k_a \dot{x}^a - L = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^b \dot{x}^a - \frac{1}{4} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = \frac{1}{4} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = k_a k^a = H$. Las trayectorias correspondientes a este sistema se puede determinar en la formulación Lagrangiana,

por medio de la acción $I = \int_0^1 L(x, \dot{x}) d\lambda = \int_0^1 g_{ab}(x(\lambda)) \dot{x}^a \dot{x}^b d\lambda$.

La ecuación de Lagrange resultante se puede escribir en la forma $\ddot{x}^c = -\Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b$, donde Γ_{ab}^c son los símbolos de Christoffel y λ es un parámetro afín de las soluciones. Esta es la ecuación para las geodésicas, con vectores tangentes \dot{x}^a .

De esta manera los momentos conjugados $k_a = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^b$ son cotangentes a las geodésicas y transportados paralelamente por ellas. En particular, los co-vectores (nulos) en el WF son transportados paralelamente por geodésicas nulas. Como conclusión tenemos que el WF de cualquier solución debe ser la unión de conjuntos de la forma $\{(x, k) \mid x = \gamma(\lambda), k = \dot{\gamma}(\lambda)\}$ con γ una geodésica nula con parámetro afín λ .

Ejemplo 5.7. WF de las bi-soluciones de K-G:

Consideremos las bi-soluciones $F \in \mathcal{D}'(M \times M)$ tales que el operador P de K-G cumple

$$(P \otimes Id) F = (Id \otimes P) F = 0.$$

El operador $P \otimes Id$ tiene como símbolo principal

$$p(x, k, x', k') = g^{ab}(x) k_a k_b$$

y por tanto el conjunto característico es $Char(P \otimes Id) = (\mathcal{V}_0 \times T^*M) \setminus 0$ donde $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \cup 0$. Ídem para el operador $Id \otimes P$ para el cual $Char(Id \otimes P) = (T^*M \times \mathcal{V}_0) \setminus 0$. Por lo tanto, el WF de una bi-solución de K-G cumple

$$WF(F) \subset (\mathcal{V}_0 \times T^*M) \cap (T^*M \times \mathcal{V}_0) \subset \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$$

Debido a que el símbolo principal es el mismo que en el ejemplo anterior, la aplicación del teorema de propagación de singularidades es inmediata y arroja que $WF(F)$ debe ser la unión de conjuntos de la forma

$\{(x, y, k_x, k_y) \mid x = \gamma_x(\lambda_x), k_x = \dot{\gamma}_x(\lambda_x), y = \gamma_y(\lambda_y), k_y = \dot{\gamma}_y(\lambda_y)\}$ con λ_x, λ_y parámetros afines.

Ejemplo 5.8. La función de correlación de dos puntos $\Delta^+(x, y)$ de la ecuación de **K-G** en espacio-tiempo plano.

Como discutimos en el apéndice **C.2**, esta función es la parte de frecuencia positiva de una bi-solución de **K-G** (la función de Pauli-Jordan Δ) y por lo tanto su WF debe estar contenido en $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$. Pero podemos estudiarlo en más detalle dado que conocemos explícitamente esta función.

Utilizando la expresión que presentamos en el apéndice citado

$$\Delta^+(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x-y)}$$

y considerando dos funciones de prueba en torno a puntos \bar{x}, \bar{y} fijos que llamaremos $f_{\bar{x}}(x)$ y $g_{\bar{y}}(y)$, podemos calcular la **TF**

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{\bar{x}} \cdot g_{\bar{y}} \cdot \Delta^+}(k_x, k_y) &= \\ \int \frac{d^4x d^4y d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) f_{\bar{x}}(x) g_{\bar{y}}(y) e^{-ik_x \cdot x} e^{-ik_y \cdot y} e^{ik \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \widetilde{f_{\bar{x}}}(k_x - k) \widetilde{g_{\bar{y}}}(k_y + k) \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0). \end{aligned}$$

Usando también que $\widetilde{f_{\bar{x}}}(\lambda k)$ y $\widetilde{g_{\bar{y}}}(\lambda k)$ caen más rápido a cero que cualquier potencia de $|\lambda k|$ en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ (pues $f_{\bar{x}}$ y $g_{\bar{y}}$ son suaves) podemos concluir que $\widetilde{f_{\bar{x}} \cdot g_{\bar{y}} \cdot \Delta^+}(\lambda k_x, \lambda k_y)$ cae rápidamente con $\lambda \rightarrow \infty$ excepto que $k_x = -k_y$, pues en cualquier otro caso, la integral está acotada por cotas de la forma $C_N / (1 + |\lambda|^N)$ para todo N . Ahora, debido al término $\delta(k^2 + m^2) \theta(k^0)$, el momento k debe estar en una dirección nula y hacia el futuro, pues en cualquier otra dirección hay un entorno cónico en el cual la transformada es cero cuando $k \rightarrow \infty$. Esto implica

$$WF(\Delta^+) \subset \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-, \text{ donde } \mathcal{V}_{\pm} = \{(x, k) \mid k^2 = 0, \pm k^0 > 0\}$$

Para acotar aún más el **WF** de Δ^+ se puede utilizar el conocido **WF** de la función Δ , el cual fue determinado por Duistermaat and Hörmander [14] y está dado por

$$WF(\Delta) = \{(x, k_x, y, -k_y) \mid (x, k_x) \sim (y, k_y), k_x^2 = 0\}.$$

Aquí la equivalencia $(x, k_x) \sim (y, k_y)$ significa que $x = y$ y $k_x = k_y$ o que existe una geodésica que une x con y , con k_x tangente a la misma en x y k_y su transporte paralelo a y . Por tratarse de espacio-tiempo plano la geodésica es una recta (nula) y el transporte paralelo arroja el mismo co-vector ($k_x = k_y$). El siguiente cálculo figura, por ejemplo, en Fewster [15].

Como primer paso se considera la relación entre Δ y Δ^+ (es decir $-i\Delta = \Delta^+ + \Delta^-$), concluyéndose que

$$\begin{aligned} WF(\Delta) &\subset WF(\Delta^+) \cup WF(\Delta^-) \text{ (pues } -i\Delta = \Delta^+ + \Delta^-) \\ &\subset WF(\Delta^-) \cup WF(\Delta) \text{ (pues } \Delta^+ = -i\Delta - \Delta^-). \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\Delta^+(x) = -\Delta^-(-x)$, se cumple

$$(x, k) \in WF(\Delta^+) \Leftrightarrow (x, -k) \in WF(\Delta^-).$$

Por lo tanto, $WF(\Delta^+) \subset \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-$ implica $WF(\Delta^-) \subset \mathcal{V}_- \times \mathcal{V}_+$ y como consecuencia de esta última inclusión resulta

$$(\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-) \cap WF(\Delta^-) = \emptyset.$$

Combinando esto con las conclusiones sobre $WF(\Delta)$ se obtiene

$$WF(\Delta) \cap (\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-) \subset WF(\Delta^+) \subset WF(\Delta) \cap (\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-).$$

Es decir que $WF(\Delta^+) = WF(\Delta) \cap (\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-)$. Esto demuestra que

$$WF(\Delta^+) = \{(x, k_x, y, -k_y) \mid (x, k_x) \sim (y, k_y), k_x^2 = 0, k_x \in \mathcal{C}^+\}$$

siendo \mathcal{C}^+ el cono de luz futuro (que no incluye al co-vector cero).

5.6 CONDICIÓN ESPECTRAL MICROLOCAL

La condición μ SC no es otra cosa que una generalización del resultado del último ejemplo en la sección anterior a las funciones de correlación en espacio-tiempo curvo. Específicamente esta condición se aplica a la distribución Λ , definida en el apéndice C mediante la ecuación C.1.2, ya que esa distribución es el equivalente de Δ^+ en la teoría sobre espacio-tiempo curvo.

CONDICIÓN ESPECTRAL MICROLOCAL PARA LA FUNCIÓN DE DOS PUNTOS: Un estado cumple la condición espectral microlocal si la función de correlación de dos puntos Λ evaluada en ese estado cumple

$$WF(\Lambda) = \{(x, k_x, y, -k_y) \mid (x, k_x) \sim (y, k_y), k_x \in \mathcal{C}^+\} \quad (5.6.1)$$

donde \mathcal{C}^+ es el cono de luz futuro y la equivalencia $(x, k_x) \sim (y, k_y)$ significa que $x = y$ y $k_x = k_y$ o que hay una geodésica nula $\gamma(s)$

que une x con y siendo k_x cotangente a la geodésica en x y k_y su transporte paralelo a y .

La condición μSC puede enunciarse de forma más simple, como se presenta en la sección 6 de Strohmaier et al. [35]. Allí se demuestra que la condición sobre la función de correlación de dos puntos puede reducirse a otra sobre los operadores de campo $\widehat{\phi}(f)$ actuando sobre el estado $|\omega\rangle$. Si definimos $\psi(f) = \widehat{\phi}(f)|\omega\rangle$ entonces la condición espectral microlocal es equivalente a

$$WF(\psi) \subset \mathcal{V}^-$$

Esta condición obliga a que el espectro (microlocal) de cualquier excitación del campo deba tener su principal contribución dentro del cono de luz pasado. Debiendo todas las otras direcciones ser suprimidas en el límite de “momento grande”. Así presentada esta condición es un análogo local de la condición espectral de la teoría cuántica de campos axiomática en espacio-tiempo plano, la cual dice que el espectro del operador momento P^0 , es decir la energía, debe ser positiva. Por el principio de equivalencia de relatividad general se espera que esta condición siga valiendo en espacio-tiempo curvo para frecuencias altas, como exige μSC .

Para no generar confusión vale aclarar porqué la positividad de la energía y la negatividad de la frecuencia son términos equivalentes. Supongamos que consideramos la acción del campo $\widehat{\phi}(x)$ sobre el vacío $|0\rangle$ en el espacio-tiempo plano y nos enfocamos en la evolución temporal. En la imagen de Heisenberg el operador campo cumple la relación $\widehat{\phi}(x) = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}\widehat{\phi}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$. Por lo tanto $\widehat{\phi}(x)|0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}\widehat{\phi}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}\widehat{\phi}(0)|0\rangle$ pues $H|0\rangle = 0$. Esta última expresión nos muestra que la parte de frecuencia negativa ($\omega = -\frac{H}{\hbar} < 0$) en el desarrollo de $\widehat{\phi}(x)|0\rangle$ se corresponde con modos de energía positiva ($H > 0$).

5.7 RESULTADO DE RADZIKOWSKI

En principio, la condición μSC simplemente reproduce una característica de las funciones de correlación de la teoría en espacio plano, pero Radzikowski probó en [30] que si la función de correlación evaluada en dos estados cuasi-libres ω_1 y ω_2 cumple esta condición, entonces los términos divergentes en ambos casos coinciden y además los estados son Hadamard. Esto permite definir sin ambigüedad objetos del tipo $\langle\omega_1|\phi(x)\phi(x)|\omega_1\rangle$ como un límite de $\langle\omega_1|\phi(x)\phi(y)|\omega_1\rangle$ cuando $y \rightarrow x$, ya que la parte divergente puede extraerse de forma independiente del estado ω_1 antes de hacer el límite.

Otra consecuencia es que la condición Hadamard puede ser reemplazada en el teorema de Verch por la μSC , obteniéndose la siguiente versión de dicho teorema:

todas las representaciones GNS construidas a partir de estados cuasi-libres que cumplen μ SC son localmente cuasi-equivalentes.

5.8 RESUMEN

En este capítulo presentamos una herramienta matemática para el análisis de distribuciones (el Wave Front Set) que está muy conectada con la condición Hadamard del capítulo anterior a través del resultado de Radzikowski. Este resultado demuestra que si la función de correlación de dos puntos del campo de $K-G$ cumple la condición espectral microlocal para un estado cuasi-libre, entonces el mismo es Hadamard. También se mostró que dicha condición es una generalización a espacio-tiempo curvo de la condición de positividad de la energía, vía el principio de equivalencia.

Parte II

TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

PROBLEMA CLÁSICO E INGREDIENTES PARA LA CUANTIZACIÓN

Como planteamos en la introducción, nuestro objetivo es realizar una cuantización de datos nulos (datos sobre una hipersuperficie nula \mathcal{N}) para un campo gobernado por la ecuación de Klein-Gordon libre

$$P\phi \equiv [\square_g - m^2] \phi = 0$$

dentro del dominio de dependencia futuro de \mathcal{N} . En esta ecuación y de aquí en adelante usaremos $\hbar = c = 1$.

Comenzaremos este capítulo describiendo aspectos geométricos, luego estudiaremos el problema desde el punto de vista clásico y finalmente repasaremos los ingredientes necesarios para la cuantización. Aquí no trataremos las propiedades particulares de nuestra cuantización, con una excepción. Al final del capítulo discutiremos cuales son los modos del campo que se incluyen y cuales se excluyen de la cuantización, dado que este es un aspecto que conviene estudiar a nivel clásico. El resto de las propiedades de la teoría cuántica serán discutidas en el capítulo siguiente.

6.1 GEOMETRÍA DEL PROBLEMA

A continuación introducimos algunos elementos esenciales sobre la geometría de nuestro problema. Para un tratamiento más extenso y detallado de estos conceptos invitamos al lector a consultar Wald [38] y para un análisis concreto de nuestra geometría, el Apéndice A de Reisenberger [31].

El problema se define en una porción del espacio-tiempo V que supondremos es una variedad Hausdorff¹, paracompacta², orientada temporalmente³ y que posee una métrica Lorentziana g^{ab} de signatura $(-, +, +, +)$. En dicha región están definidas (ver figura 2) una superficie espacial S^0 (bidimensional) y dos hipersuperficies generadas por las geodésicas nulas futuras que parten de S^0 en direcciones

-
- 1 Un espacio topológico tiene la propiedad Hausdorff si, para cualquier par de puntos x, y del espacio, existen dos entornos abiertos V_x, V_y tales que $x \in V_x, y \in V_y, V_x \cap V_y = \emptyset$
 - 2 Un espacio topológico es paracompacto si todo cubrimiento por abiertos admite un refinamiento en el cual todo punto del espacio posee un entorno incluido en un conjunto finito de abiertos del cubrimiento.
 - 3 Se identifica de forma continua a través de todo el espacio tiempo cual es el cono de luz futuro y cual es el cono de luz pasado en cada punto.

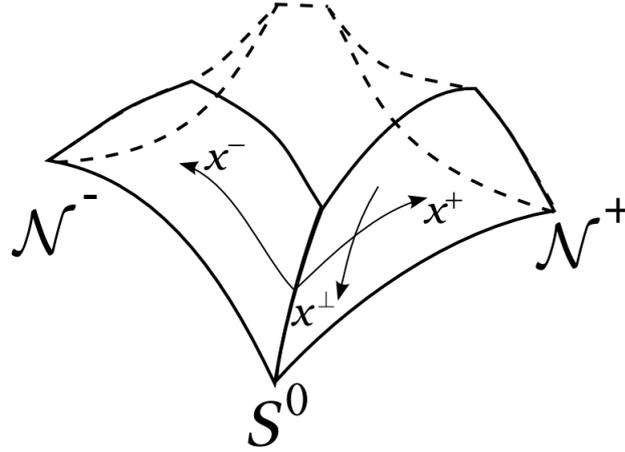


Figura 2: Esquema 3D de las hipersuperficies nulas \mathcal{N}^+ y \mathcal{N}^- , la superficie espacial S^0 , las coordenadas sobre las mismas y $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$ (limitado por \mathcal{N} y las líneas punteadas).

normales, pero que son cortadas antes de interceptarse. Al par de hipersuperficies las denominamos \mathcal{N}^+ , \mathcal{N}^- y a su unión \mathcal{N} . Sobre ellas definimos coordenadas nulas x^+ y x^- respectivamente, que parametrizan las direcciones de los generadores nulos y dos direcciones espaciales x^\perp que parametrizan la superficie espacial S^0 y que se mantienen constantes a lo largo de los generadores. Además supondremos que la hipersuperficie \mathcal{N} es un conjunto acronal.⁴ Si esta última propiedad no se cumple en un determinado espacio-tiempo, siempre se puede encajar \mathcal{N} en otro espacio-tiempo en el cual sí se cumple. (Proposición B.6 en Reisenberger [31]).

Esta hipersuperficie será nuestra superficie de datos iniciales y el sistema será estudiado en su dominio de dependencia futuro $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$, es decir el conjunto de puntos en V tal que toda curva causal (curva no espacial), inextensible, que pase por un punto de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$ interseca a \mathcal{N} en el pasado.

NOTACIÓN: Llamaremos M al interior de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$.

6.2 HIPERBOLICIDAD GLOBAL

Un concepto fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales en espacio tiempo curvo es el de *superficie de Cauchy*.

Definición 6.1. (*superficie de Cauchy*)

Para un abierto $A \subset V$, una superficie C es de Cauchy si es un subconjunto acronal de su clausura \overline{A} (ninguna curva tipo tiempo en

⁴ Un conjunto es acronal si ningún par de puntos del conjunto está conectado por curvas tipo tiempo.

\bar{A} la cruza dos veces) y toda curva causal e inextensible en A cruza o tiene un punto terminal en C .

Con esta definición la hipersuperficie \mathcal{N} resulta ser una superficie de Cauchy de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$ (proposición B.11 en Reisenberger [31]). Cuando un espacio tiempo (o porción de espacio-tiempo) posee una superficie de Cauchy se lo denomina *globalmente hiperbólico*. Esta es una noción importante en el desarrollo de CS-QFT pues estos espacio-tiempos permiten ser foliados por superficies de Cauchy, lo cual habilita definir una noción de evolución mediante el parámetro que etiqueta las sucesivas hipersuperficies. (ver teorema 8.3.13 en Wald [38])

En este tipo de espacio-tiempos, la ecuación de K-G (al igual que otras ecuaciones lineales) tiene algunas propiedades importantes, como se prueba en el capítulo tres de Bär et al. [3]. Entre estas propiedades destacamos dos que sirven a nuestros propósitos.

Siendo P el operador de Klein-Gordon y definiendo $\mathcal{T} \equiv C_0^\infty(M)$ (conjunto de funciones de prueba suaves y de soporte compacto en el interior de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$) se cumple:

1. La ecuación con fuentes $P\phi = f$ (con $f \in \mathcal{T}$) tiene soluciones avanzada (Af) y retardada (Rf) únicas. Estas son las funciones que cumplen:

$$P(Af) = P(Rf) = f,$$

$$Rf = 0 \text{ fuera del futuro causal del soporte de } f,$$

$$Af = 0 \text{ fuera del pasado causal del soporte de } f.$$

2. El problema de Cauchy esta bien planteado sobre una superficie de Cauchy *espacial* Σ para cualquier par de datos iniciales ϕ_0, π_0 suaves. Esto quiere decir que, dados P el operador de Klein-Gordon, $f \in \mathcal{T}$, $\phi_0, \pi_0 \in C_0^\infty(\Sigma)$ y n normal a la superficie, entonces el problema

$$\begin{cases} P\phi = f \\ \phi|_\Sigma = \phi_0 \\ n^a \partial_a \phi|_\Sigma = \pi_0 \end{cases}$$

tiene solución única y depende continuamente de los datos iniciales en un sentido explicado en [3]. En particular, el problema de Cauchy de la ecuación libre ($f = 0$) está bien planteado.

NOTACIÓN: En adelante, al conjunto de soluciones del problema de Cauchy recién definido (para la ecuación de K-G sin fuentes), lo denominaremos \mathcal{S} . Este conjunto no debe ser pensado como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación de K-G. Es simplemente un conjunto conveniente para definir el problema cuántico, como veremos en la siguiente sección.

6.3 PROBLEMA CLÁSICO

6.3.1 En el interior de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$

Las propiedades discutidas en la sección anterior nos permiten definir un mapa lineal entre las funciones de prueba (\mathcal{T}) y las soluciones de K-G en \mathcal{S} mediante

$$Ef = Af - Rf$$

Es fácil probar que este mapa $E : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ es sobreyectivo (Lema 3.2.1 de [39]) y que su núcleo, es decir los f tales que $Ef = 0$, son las funciones que cumplen $f = P(g)$ para algún $g \in \mathcal{T}$.

Ahora bien, estas propiedades no son sólo curiosidades sobre el problema clásico, sino que nos permiten entender el contenido físico de los observables $\Omega(\psi, \cdot)$. Estos observables son campos promediados sobre funciones de prueba, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\Omega(Ef, \phi) = \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]} f \phi dv \equiv \phi(f)$$

siendo ϕ una solución de K-G y $f \in \mathcal{T}$ cualquiera.

La afirmación anterior puede probarse partiendo de la expresión 2.4.3 si elegimos $\Sigma = \mathcal{N}$, $\psi_1 = Ef$ y $\psi_2 = \phi$. En ese caso

$$\Omega(Ef, \phi) = \int_{\mathcal{N}} g^{ab} [Ef \nabla_a \phi - \phi \nabla_a Ef] \epsilon_{b\dots} \quad (6.3.1)$$

y dado que estamos integrando en una hipersuperficie que no está en el futuro causal del soporte de f entonces también se cumple que

$$\begin{aligned} \Omega(Ef, \phi) &= \int_{\mathcal{N}} g^{ab} [Af \nabla_a \phi - \phi \nabla_a Af] \epsilon_{b\dots} = \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}^+[\mathcal{N}]} g^{ab} [Af \nabla_a \phi - \phi \nabla_a Af] \epsilon_{b\dots} \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos cambiado la orientación de \mathcal{N} , que era hacia el futuro, por una orientación hacia el pasado para que $\partial \mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$ tenga orientación saliente. Ahora, utilizando el teorema de Stokes (fórmula B.2.23 de Wald [38])

$$\Omega(Ef, \phi) = \int_{\partial \mathcal{D}^+[\mathcal{N}]} \nabla_b [(\nabla^a Af) (\nabla_a \phi) + Af (\nabla^a \nabla_a \phi)] \epsilon_{\dots}$$

$$\Omega(Ef, \phi) = - \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]} [(\nabla^a Af) (\nabla_a \phi) + Af (\nabla^a \nabla_a \phi)] \epsilon_{\dots} +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]} [(\nabla^a \phi) (\nabla_a Af) + \phi (\nabla^a \nabla_a Af)] \epsilon_{\dots} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{M}]} [\phi (\nabla^a \nabla_a A f) - A f (\nabla^a \nabla_a \phi)] \epsilon_{\dots} = \\
&= \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{M}]} [\phi \{f + m^2 A f\} - A f \{m^2 \phi\}] \epsilon_{\dots} = \\
&= \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{M}]} \phi f \epsilon_{\dots}
\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación.

En conclusión, $\Omega(Ef, \cdot) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función lineal que mapea soluciones ϕ a su promedio espacio-temporal $\phi(f)$. Esta es justamente la propiedad a nivel clásico que nos permitirá relacionar los operadores de campo $\widehat{\phi(f)}$ con los operadores fundamentales, mediante la relación $\widehat{\Omega(Ef, \cdot)} = \widehat{\phi(f)}$.

Nótese que la propiedad que identifica las distribución $\phi(f)$ como solución de la ecuación de **K-G** es que $\phi(Pf) = 0$ para cualquier f pues

$$\phi(Pf) = \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{M}]} (Pf) \phi \epsilon_{\dots} = \int_{\mathcal{D}^+[\mathcal{M}]} (P\phi) f \epsilon_{\dots} = 0,$$

donde hemos integrado por partes en el último paso y hemos usado que f tiene soporte compacto en M .

6.3.2 En superficies de Cauchy

A diferencia de lo planteado en la subsección anterior, cuando hablamos de cuantización de datos iniciales, estamos pensando en partir de un problema clásico propuesto en término de distribuciones sobre una superficie de Cauchy donde se definen datos iniciales. Por razones que explicaremos inmediatamente se distinguen los casos de superficies de Cauchy *espaciales* (ningún par de puntos está conectado por geodésicas nulas) y *nulas*, como \mathcal{N} .

Hipersuperficie Espacial

A la luz del resultado de la sección 6.2 es fácil definir este problema cuando se trata de una superficie de Cauchy espacial. En ese caso suceden dos cosas:

1. La superficie Σ posee una normal n^a que es un vector tipo tiempo.
2. El problema de Cauchy sobre Σ está bien definido.

La primera de estas propiedades nos permite escribir la forma simpléctica (fórmula 6.3.1) sobre Σ como

$$\Omega(\psi, \phi) = \int_{\Sigma} n^a [\phi \partial_a \psi - \psi \partial_a \phi] ds$$

donde ds es la forma de volumen inducida en Σ .

Utilizando la segunda propiedad, si identificamos los datos iniciales para ψ como $\psi|_{\Sigma} = -\beta$ y $n^a \partial_a \psi|_{\Sigma} = \alpha$, podemos escribir

$$\Omega(e(\alpha, \beta), \phi) = \int_{\Sigma} \alpha \phi + \beta \partial_n \phi ds$$

donde el mapa $e(\alpha, \beta)$ es un mapa biyectivo que asocia las funciones de prueba $\alpha, \beta \in C_0^{\infty}(\Sigma)$ con una solución en \mathcal{S} y cuya existencia está asegurada porque el problema de Cauchy está bien definido.

NOTACIÓN: en adelante denominaremos *solución de prueba* a aquella cuyos datos iniciales son funciones de prueba y a estos datos los denominaremos *datos de prueba*. Por ejemplo, en el párrafo anterior, ψ era la solución de prueba asociada a los datos de prueba α y β .

Problema de las hipersuperficies nulas

Desde el punto de vista clásico las hipersuperficies nulas presentan ventajas y desventajas con respecto al tratamiento del problema de datos iniciales. Algunas de esas ventajas han impulsado el desarrollo de un programa de cuantización en espacio-tiempo plano conocido como *Light Front Quantization* (a veces *Light Cone* o *Infinite Momentum Frame Quantization*); una idea que ya había sido sugerida por Dirac en 1949 [12] y que consiste en buscar una cuantización de campos en el espacio de Minkowski con datos iniciales sobre un hiperplano nulo.

En este enfoque se comienza eligiendo un sistema de coordenadas nulas, por ejemplo:

$$x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x^{\perp} = (x^2, x^3)$$

donde (x^0, x^1, x^2, x^3) son coordenadas inerciales ortonormales; se supone que la hipersuperficie nula está definida por $x^- = 0$ y se toma la coordenada x^+ como un análogo a una “coordenada tiempo” para seguir de cerca el esquema usual de cuantización canónica. Resultados como los de [11],[10],[41] y [42] han dado lugar a un área de la física de partículas que aplica estos métodos a cromodinámica cuántica [20]. Por ejemplo, una ventaja de este método es que el vacío del espacio de Fock no se ve alterado al incorporar los términos de interacción y se dice que es un vacío *trivial* (Burkardt [9]).

Este programa de cuantización también presenta importantes problemas. Varios de ellos están relacionados con que no es fácil caracterizar el espacio de soluciones mediante datos iniciales en un hiperplano nulo. Esto afecta a la definición de operadores distribucionales sobre la hipersuperficie pues sólo un subconjunto de funciones de prueba define “buenos operadores cuánticos” en el espacio-tiempo (Ullrich [36]). Este problema permea a todo el programa de Light Front Quantization y está asociado al conocido problema de los modos cero, Yamawaki [40]. La “solución” usual para este problema es

el pasaje a un esquema discreto de cuantización (Maskawa and Yamawaki [26]), aunque hay propuestas más recientes (Ullrich [36]) en la línea de restringir los datos nulos que se pretende cuantizar.

Datos iniciales en \mathcal{N}

En nuestro trabajo no contamos con un hiperplano nulo, sino con la hipersuperficie \mathcal{N} antes descrita. Sin embargo, compartimos el problema planteado en la sub-sección anterior referente a la dificultad para elegir los datos iniciales y las funciones de prueba que nos permitan escribir los operadores fundamentales como distribuciones sobre \mathcal{N} .

Para aclarar el punto consideremos el caso de la hipersuperficie \mathcal{N} en espacio-tiempo plano, definida por

$$\mathcal{N}^+ = \{x \mid x^- = 0, \bar{x}^+ \geq x^+ \geq 0\}$$

$$\mathcal{N}^- = \{x \mid x^+ = 0, \bar{x}^- \geq x^- \geq 0\}$$

$$S^0 = \{x \mid x^- = x^+ = 0, |x^\perp| \leq d\}$$

con d, \bar{x}^+, \bar{x}^- constantes positivas. La forma simpléctica calculada sobre \mathcal{N} resulta

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \sum_{j=\pm} \int_{S^0} d^2 x^\perp \int_0^{\bar{x}^j} dx^j (-\psi \partial_j \phi + \phi \partial_j \psi)$$

donde la suma es sobre \mathcal{N}^+ y \mathcal{N}^- . Integrando por partes, la forma simpléctica se puede reescribir como

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \sum_{j=\pm} \left[\int_{S^0} d^2 x^\perp \int_0^{\bar{x}^j} dx^j (2\partial_j \psi) \phi + \int_{S^0} d^2 x^\perp \psi \phi \Big|_{x^j=\bar{x}^j} + \int_{S^0} d^2 x^\perp \psi \phi \Big|_{x^j=0} \right].$$

Ahora supongamos que queremos identificar una distribución de la forma $\int_{\mathcal{N}^+} \alpha \phi ds$ con algún $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi)$, siendo $\alpha \in C_0^\infty(\mathcal{N}^+)$ y ψ, ϕ suaves. Esto implica que $2\partial_j \psi|_{\mathcal{N}^+} = \alpha$, $\partial_j \psi|_{\mathcal{N}^-} = 0$, $\psi|_{S^0} = 0$ y $\psi|_{\bar{x}^j} = 0$, pero estamos suponiendo que ψ es una función suave y por lo tanto

$$0 = \psi(0, \bar{x}^+, x^\perp) - \psi(0, 0, x^\perp) = \int_0^{\bar{x}^+} dx^+ \partial_j \psi = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^+} dx^+ \alpha.$$

Es decir, sólo las funciones de prueba que cumplen $\int_0^{\bar{x}^+} dx^+ \alpha = 0$ se pueden describir de esa manera. Esto indica que no cualquier dato inicial promediado $\phi(\alpha)$ definido sobre funciones de prueba arbitrarias en \mathcal{N} será tenido en cuenta para la cuantización. Como veremos

más adelante nuestro método de cuantización sólo considera observables de la forma $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \cdot)$, lo cual implica a primera vista una restricción importante de los datos. Afortunadamente, nuestro conjunto de datos iniciales de prueba contiene todas las soluciones del tipo Ef y son estas soluciones las que representan al campo promediado $\phi(f)$ en M vía la relación $\Omega(Ef, \cdot) = \phi(f)$. Inmediatamente pasamos a definir dicho conjunto.

6.3.3 Propuesta de datos iniciales de prueba:

Definición 6.2. (datos iniciales de prueba)

Como conjunto de datos iniciales de prueba, al que llamaremos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, elegimos a los datos suaves y de soporte compacto en \mathcal{N} . Este es el conjunto definido por las siguientes condiciones:

- $\psi|_{\mathcal{N}^+}$ es suave en \mathcal{N}^+ y se anula en un entorno de $\partial\mathcal{N}$
- $\psi|_{\mathcal{N}^-}$ es suave en \mathcal{N}^- y se anula en un entorno de $\partial\mathcal{N}$

donde una función es suave en una variedad con borde (como \mathcal{N}^{\pm}) si tiene una extensión suave a una variedad sin borde que contiene a la variedad con borde (ver definición detallada en sección 8.2 Abraham et al. [1]). Es importante notar que esta propiedad implica que $\psi|_{S^0} \in C_0^{\infty}(S^0)$ y que

$$\psi|_{S^0} = \lim_{x^+ \rightarrow 0} \phi|_{\mathcal{N}^+} = \lim_{x^- \rightarrow 0} \phi|_{\mathcal{N}^-} \quad (\phi \text{ es continuo en } S^0).$$

La elección de datos de prueba está motivada por dos razones. Por un lado, cada dato inicial de este tipo nos permite construir una solución ϕ suave en M (ver discusión al final de 5.4 en Friedlander [16]). Por otro lado $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ incluye todos los datos iniciales para las soluciones de la forma Ef con $f \in \mathcal{T}$. A su vez, por el lema 3.2.1 de [39], esto equivale a incluir todas las soluciones en \mathcal{S} .

6.4 CUANTIZACIÓN

Como discutimos brevemente en la sección anterior, no podemos cuantizar todos los modos de datos iniciales. De todas maneras nuestro objetivo es definir el álgebra de Weyl en M y ésta se construye a partir de los operadores de campo $\widehat{\phi}(f)$. Por lo tanto, si la cuantización de datos iniciales incluye a todos los operadores $\widehat{\Omega}(Ef, \cdot)$, tendremos todos los ingredientes que necesitamos dada la identificación $\widehat{\Omega}(Ef, \cdot) = \widehat{\phi}(f)$. Los datos iniciales de prueba definidos en la subsección 6.3.3 cumplen con este requisito y en ese sentido los consideramos un conjunto suficiente. De todas maneras es importante destacar que los datos iniciales en $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ incluyen también otras soluciones, como se muestra de forma esquemática en la figura 3.

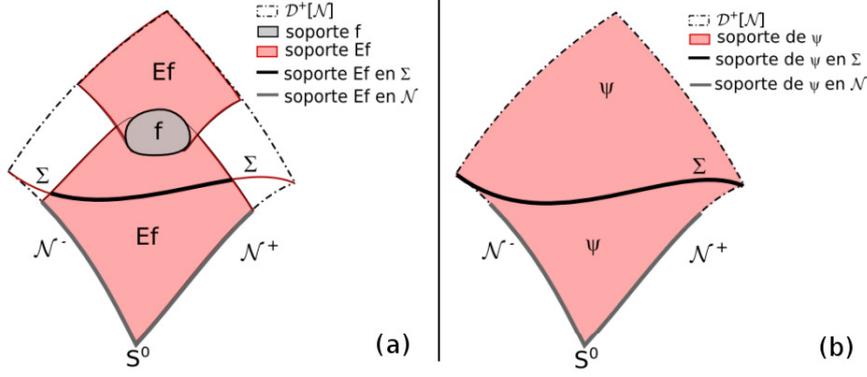


Figura 3: Esquema 2D de la diferencia entre soluciones suaves $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ y soluciones del tipo $Ef \in \mathcal{S}$. (a) Soluciones tipo Ef . Tienen soporte compacto en Σ y en el interior de \mathcal{N} . (b) Soluciones ψ generadas por datos suaves y de soporte compacto en \mathcal{N} . No tienen (en general) soporte compacto en Σ , ni siquiera si tienen soporte compacto en \mathcal{N} .

6.4.1 Cuantización en M

Ya discutimos que nuestra cuantización incluye todos los operadores de campo $\widehat{\phi}(f)$ con f de soporte compacto en M vía la relación $\widehat{\Omega}(Ef, \cdot) = \widehat{\phi}(f)$.

Este nuevo conjunto de operadores hereda la construcción de la teoría cuántica de la sección 3.2. Es decir, la relación de conmutación se traduce inmediatamente como

$$\left[\widehat{\phi}(f), \widehat{\phi}(g) \right] = \left[\widehat{\Omega}(Ef, \cdot), \widehat{\Omega}(Eg, \cdot) \right] = -i\Omega(Ef, Eg) \widehat{Id} = -i \int f Eg \epsilon \widehat{Id} \quad (6.4.1)$$

y la conexión con los operadores de creación y aniquilación del espacio de Hilbert $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ se obtiene mediante la fórmula (ecuación 3.2.5)

$$\widehat{\phi}(f) = \widehat{\Omega}(Ef, \cdot) = i\widehat{a} \left(\overline{K(Ef)} \right) - i\widehat{a}^* (K(Ef))$$

El campo cuántico $\widehat{\phi}$ es una solución distribucional de la ecuación de K-G ya que cumple

$$\widehat{\phi}(Pf) = \widehat{\Omega}(E(Pf), \cdot) = 0$$

donde P es el operador de K-G definido al principio del capítulo.

Finalmente, dado que estos operadores describen el campo de K-G real también se cumple

$$\widehat{\phi}(f)^* = \widehat{\phi}(f)$$

siendo f una función de prueba *real*.

Nota: Es usual encontrar en la literatura, y aparece en algunas partes de esta tesis, la notación $\widehat{\phi}(x)$ para el operador campo. Esta notación puede llevar a pensar que podemos definir el campo como una función en cada punto, pero es sólo una notación. En estos términos, la relación de conmutación 6.4.1 en el espacio de Minkowski puede expresarse en la forma más convencional

$$\left[\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(y) \right] = -i\Delta(x-y)\widehat{1d}$$

siendo Δ la función de Pauli-Jordan que describimos en el apéndice C.2. Para mostrarlo, notemos que $\left[\widehat{\phi}(f), \widehat{\phi}(g) \right]$ es una bi-distribución que depende de dos funciones de prueba f, g y por lo tanto se puede escribir como

$$\left[\widehat{\phi}(f), \widehat{\phi}(g) \right] = \int f(x)g(y) \left[\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(y) \right] d^4x d^4y.$$

A su vez

$$\begin{aligned} \Omega(E(f), E(g)) &= \int f E g d^4x = \\ &= \int f (A g - R g) d^4x = \int f(x) g(y) \Delta(x-y) d^4y d^4x \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\Delta = \Delta^a - \Delta^r$ siendo Δ^a y Δ^r las funciones de Green avanzada y retardada de la ecuación de K-G respectivamente. De la igualdad 6.4.1 para cualquier par de funciones f, g se desprende el resultado.

6.4.2 Cuantización en \mathcal{N}

Como comentamos anteriormente, los observables de tipo $\phi(f)$ son un subconjunto de todos los observables que admitimos, pero cabe preguntarse qué hemos dejado afuera de la cuantización y qué otros modos, a demás de los $\phi(f)$, entran en la cuantización de datos iniciales.

De forma genérica podemos decir que los modos que incluimos son aquellos que se pueden escribir como

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \sum_{j=\pm} \int_{\mathcal{N}^j} \alpha^j \phi ds^j + \int_{S^0} \alpha^0 \phi ds^0$$

donde hemos reescrito los datos de prueba ψ como $\alpha^j = 2\partial_j \psi|_{\mathcal{N}^j}$ y $\alpha^0 = 2\psi|_{S^0}$. Esta fórmula surge de integrar por partes la ecuación 6.3.1, con ds^+ , ds^- y ds^0 las formas de volumen inducidas sobre las superficies \mathcal{N}^+ , \mathcal{N}^- y S^0 respectivamente.

Con las condiciones sobre los datos de prueba establecidas en 6.3.3, las funciones α cumplen

$$\int_0^{\bar{x}^j} \alpha^j dx^j = -\alpha^0, \alpha^j \text{ suave en } \mathcal{N}^j \text{ y se anulan un entorno de } \partial\mathcal{N}^j.$$

Además, α^0 es suave en S^0 y se anula en un entorno de ∂S^0 .

Ya mencionamos que los *modos cero* son un problema importante en *Light Front Quantization*. A continuación mostramos que estos son justamente los modos que quedan excluidos de nuestra cuantización.

Primero, definimos *modo cero* como el generado por un dato inicial que vale $\phi = \phi_0 = cte.$ en una rama (\mathcal{N}^+ por ejemplo) y $\phi = 0$ en la otra rama. Ahora, supongamos que $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = 0 \forall \psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Como ya vimos para el caso de espacio-tiempo plano, cualquier función suave que sea cero en una rama, cero en S^0 y cumpla $\int_{\mathcal{N}^j} \alpha^j ds^j = 0$ genera un dato inicial de prueba ψ . Esto implica que los modos que anulan la forma simpléctica para todo dato de prueba deben ser constantes en cada rama. Luego, aplicando esto al cálculo directo de la forma simpléctica se obtiene

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \sum_{j=\pm} \int_{\mathcal{N}^j} \alpha^j \phi ds^j + \int_{S^0} \alpha^0 \phi ds^0 = \sum_{j=\pm} \phi^j \int_{\mathcal{N}^j} \alpha^j ds^j + \int_{S^0} \alpha^0 \phi^0 ds^0$$

donde hemos usado la notación ϕ^{\pm} y ϕ^0 para designar al modo de datos iniciales en las ramas \mathcal{N}^{\pm} y en S^0 respectivamente. Entonces, usando la relación entre α^j y α^0 , se obtiene

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \int_{S^0} \alpha^0 [\phi^0 - \phi^+ - \phi^-] ds^0$$

Ahora, exigir que la forma simpléctica sea cero para cualquier dato de prueba, implica que $\phi^0 - \phi^+ - \phi^- = 0$ y así ϕ^0 también debe ser constante (por la propia relación con ϕ^+ y ϕ^-). La igualdad $\phi^0 = \phi^+ + \phi^-$ representa una combinación de modos cero en cada rama.

En particular, los modos cero cumplen $\phi(f) = \Omega_{\mathcal{N}}(Ef, \phi) = 0$ y esto significa que no son registrados por los operadores de campo en M , o dicho de otra manera, son modos que no se propagan hacia el interior de $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$.

Nótese que los modos cero no presentan el mismo comportamiento que los modos $\phi = cte$ en todo \mathcal{N} . Estos sí son registrados en el interior, ya que no cumplen la condición $\phi^+ + \phi^- = \phi^0$, salvo en el caso trivial $\phi = 0$.

Finalmente, si exigimos que ϕ sea un modo suave, entonces los modos cero quedan automáticamente descartados y ϕ queda definido de manera única por los promedios $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi)$ con $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Ahora bien, al cuantizar tenemos que considerar campos ϕ distribucionales y estos no se agotan en los que tiene la forma $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi)$, por lo cual nuestra descripción del campo sobre \mathcal{N} es, en rigor, incompleta. De todas maneras, alcanza para describir el campo en M y eso es suficiente para nuestros propósitos.

Para los datos iniciales recién descritos podemos definir la teoría cuántica empezando por los operadores fundamentales que daremos en llamar $\widehat{\Omega}(\psi|_{\mathcal{N}}, \cdot)$. Como primer punto tenemos las relaciones de conmutación

$$\left[\widehat{\Omega}(\psi_1|_{\mathcal{N}}, \cdot), \widehat{\Omega}(\psi_2|_{\mathcal{N}}, \cdot) \right] = i\hbar \Omega_{\mathcal{N}}(\psi_1, \psi_2) \widehat{Id}$$

Por otro lado, dado que queremos cuantizar un campo escalar real, serán autoadjuntos:

$$\widehat{\Omega}(\psi|_{\mathcal{N}}, \cdot)^* = \widehat{\Omega}(\psi|_{\mathcal{N}}, \cdot)$$

El punto faltante es elegir una construcción Fock que nos asegure la condición Hadamard. Esto será desarrollado en el capítulo siguiente, comenzando por proponer un proyector K en la hipótesis del teorema de la sección 3.2.3.

6.5 RESUMEN

En este primer capítulo tratando nuestro problema de datos iniciales, hemos introducido la geometría sobre la cual se desarrolla (la hipersuperficie \mathcal{N} y su dominio de dependencia futuro $D^+(\mathcal{N})$) y también hemos definido el espacio de datos iniciales de prueba $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Este es un conjunto de datos de prueba que incluye todas las soluciones de la forma Ef , con f una función de soporte compacto en $M = \text{int}D^+(\mathcal{N})$. Este es un punto clave pues la identificación $\widehat{\phi}(f) = \widehat{\Omega}(Ef, \cdot)$ nos dice que nuestra cuantización incluye todos los operadores campo promediado en M . Por último hemos mostrado que los modos cero quedan excluidos de la cuantización y que, de hecho, son modos de datos iniciales que no se propagan hacia M .

PROPUESTA DE CUANTIZACIÓN

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo propondremos una cuantización Fock para datos iniciales del campo de K-G en la hipersuperficie nula \mathcal{N} en espacio tiempo curvo y lo llevaremos acabo en dos pasos. Primero propondremos una cuantización de datos iniciales sobre una hipersuperficie N compuesta de dos semi-hiperplanos nulos, similar a \mathcal{N} , pero en el espacio de Minkowski. Esta cuantización será una extensión natural de la cuantización estándar del campo de K-G. Por este motivo introduciremos brevemente dicha cuantización estándar en el lenguaje del capítulo tres. Como segundo paso, utilizando la cuantización de datos iniciales en N , definiremos una cuantización de datos iniciales en \mathcal{N} (en espacio-tiempo curvo), lo cual completará la construcción.

Para terminar el capítulo mostraremos que la teoría resultante en $\mathcal{D}^+[\mathcal{N}]$ cumple la condición Hadamard (o equivalentemente la condición μSC) en ciertas circunstancias. La importancia de esta corroboración radica en que la condición Hadamard parece ser necesaria para que la cuantización sea aceptable como modelo físico. (Véase la discusión de este punto en la secciones 5.6 y 5.7.) Luego el teorema de Verch nos asegura que nuestra cuantización es equivalente (más precisamente cuasi-equivalente) a cualquier otra cuantización Fock que también satisfaga la condición Hadamard.

7.2 CUANTIZACIÓN EN ESPACIO-TIEMPO PLANO

7.2.1 Notación

Coordenadas:

En esta sección utilizaremos coordenadas usuales de cuantización en el frente de luz, es decir, $x = (x^+, x^-, x^\perp)$ con $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}}$ y siendo (x^0, x^1, x^\perp) las coordenadas Lorentzianas en espacio-tiempo plano. En estas coordenadas el producto escalar en el espacio-tiempo resulta

$$x \cdot y = x_a y^a = x_+ y^+ + x_- y^- + x_\perp y^\perp = -x^- y^+ - x^+ y^- + x^\perp \cdot y^\perp$$

dado que usamos la signatura $(-+++)$ para la métrica.

Superficies:

Para no confundir las superficies en espacio-tiempo plano y espacio-tiempo curvo, en ambos casos usaremos los mismos nombres pero

con fuentes diferentes para la letra. De esta manera definimos una superficie de datos iniciales N en el espacio de Minkowski con

$$N^+ = \{x \mid x^- = 0, x^+ \geq 0\}$$

$$N^- = \{x \mid x^+ = 0, x^- \geq 0\}$$

$$S^0 = \{x \mid x^- = x^+ = 0\}$$

En N , las coordenadas x^+ y x^- no tienen cota superior y tampoco x^2 y x^3 están acotadas. (Esto hace que tanto N^+ como N^- y S^0 no sean compactos.) Esta elección nos permite simplificar la notación y las fórmulas. De todas maneras los observables $\phi(f)$ sólo dependen de datos en una porción compacta de N , determinada por la intersección de N con el pasado causal del soporte de f .

En adelante también utilizaremos las notaciones M para designar al interior de $\mathcal{D}^+[N]$ y $\mathcal{T}(M)$ para designar a las funciones de prueba con soporte compacto en M .

Frecuencia positiva:

Para la TF utilizamos la convención

$$\tilde{f}(k) = \int f(x) e^{-ik \cdot x} d^4x$$

$$f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ik \cdot x} d^4\tilde{k}$$

donde $d^4\tilde{k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. Diremos que un modo es de *frecuencia positiva* si $k^0 = -k_0 > 0$.

7.2.2 Modos de Fourier

Consideremos las ondas planas que son solución de la ecuación de **K-G**. Es decir, las funciones de la forma $\psi_k = e^{ik \cdot x}$ con $k \cdot k + m^2 = 0$. Es claro que estas ondas definen de forma única modos de Fourier sobre la hipersuperficie N mediante su restricción:

$$\psi_k|_{N^+} = e^{i[k_+ x^+ + k_\perp x^\perp]}$$

$$\psi_k|_{N^-} = e^{i[k_- x^- + k_\perp x^\perp]}.$$

Por otro lado, dado que $k^\pm = \frac{k^0 \pm k^1}{\sqrt{2}}$ y que $|k^1| < |k^0|$, los modos de frecuencia positiva tiene $k^+, k^- > 0$ y los de frecuencia negativa, $k^+, k^- < 0$. Llevando esto a las restricciones a N se obtiene que $\psi_k|_{N^+}$ es de *frecuencia positiva* si $k_+ = -k^- < 0$ y $\psi_k|_{N^-}$ es de frecuencia positiva si $k_- = -k^+ < 0$. Por ser un campo masivo quedan excluidos los modos con $k_+ = 0$ o $k_- = 0$.

7.2.3 Cascarón de masa positivo (h) y $L^2(h)$

Llamamos *cascarón de masa* al conjunto de co-vectores k que cumplen $k^2 + m^2 = 0$, es decir los k correspondientes a las soluciones de la ecuación de **K-G** en el espacio de momento. Por tratarse de un campo con masa no nula, el cascarón se divide en dos conjuntos disconexos: el *cascarón de masa positivo* $h = \{k \mid k^2 + m^2 = 0, k^0 > 0\}$ y el negativo, con $k^0 < 0$.

Sobre el cascarón de masa positivo, definimos el conjunto de funciones de cuadrado integrable $L^2(h)$ con el producto interno

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{L^2(h)} \bar{g}_1 g_2 d\mu$$

siendo μ la medida $\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k} + m^2}}$ en h . Este producto puede expresarse de forma explícitamente covariante como

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \bar{g}_1(k) g_2(k) d^4k.$$

También es inmediato observar que, vía el mapa

$$g \rightarrow \zeta(\vec{k}) = \frac{g(k)}{\left[(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k} + m^2} \right]^{1/2}},$$

el espacio $L^2(h)$ es isomorfo a $L^2(\mathbb{R}^3)$ que es un conocido espacio de Hilbert.

7.2.4 Cuantización estándar

Antes de presentar nuestra cuantización de datos iniciales, introducimos brevemente la cuantización estándar del campo de **K-G** en el espacio de Minkowski V . Esta construcción sirve como motivación, pero también es interesante como aplicación del lenguaje utilizado en el capítulo tres.

Al igual que en el capítulo seis llamamos \mathcal{S} al espacio de soluciones de la forma $\phi = Ef$ con f función de prueba en el espacio-tiempo. Dado que $Ef = \int \Delta(x - y) f(y) d^4y$, para estas soluciones la transformada de Fourier es

$$\tilde{\phi} = 2\pi i \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k^0) \tilde{f},$$

ya que $2\pi i \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k^0)$ es la transformada de Fourier de Δ (ver apéndice **C.2**). Notar que $\tilde{\phi}$ determina a \tilde{f} de manera única sobre el cascarón de masa y viceversa.

Para obtener el proyector K , en la formulación usual se toma la parte de frecuencia positiva de Δ con respecto a x^0 , es decir $i\Delta^+$. En el espacio de momento eso significa

$$\tilde{K}\tilde{\phi} = 2\pi i \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \tilde{f}.$$

Afirmamos que esta elección es equivalente, en el formalismo del capítulo tres, a usar el producto interno

$$g(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \tilde{f}_1(-k) \tilde{f}_2(k) d^4k$$

definido sobre el espacio de soluciones complejas $\mathcal{S}_g^{\mathbb{C}}$. Para probar esta afirmación, primero nótese que g es bilineal y simétrica y que si ϕ_1, ϕ_2 son soluciones reales se cumplen $\tilde{f}_{1,2}(-k) = \overline{\tilde{f}_{1,2}(k)}$, lo cual implica

$$\begin{aligned} g(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) [\theta(k^0) + \theta(-k^0)] \tilde{f}_1(-k) \tilde{f}_2(k) d^4k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) [\tilde{f}_1(-k) \tilde{f}_2(k) + \tilde{f}_1(k) \tilde{f}_2(-k)] d^4k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) [\overline{\tilde{f}_1(k)} \tilde{f}_2(k) + \tilde{f}_1(k) \overline{\tilde{f}_2(k)}] d^4k. \end{aligned}$$

También sabemos (ver sección 6.3.1) que

$$\begin{aligned} \Omega(\phi_1, \phi_2) &= \int f_1 \phi_2 d^4x = \int \int f_1(x) f_2(y) \Delta(x-y) d^4x d^4y = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k^0) \tilde{f}_1(-k) \tilde{f}_2(k) d^4k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, mediante la igualdad $\Omega(\phi_1, \phi_2) = g(\phi_1, J\phi_2)$, se define una estructura compleja J que cumple

$$\widetilde{J\phi} = i\varepsilon(k^0) \tilde{\phi} = -2\pi\delta(k^2 + m^2) \tilde{f}.$$

De esta expresión se desprende inmediatamente que las autofunciones de J son las soluciones de frecuencia positiva, para las cuales $\widetilde{J\phi} = i\tilde{\phi}$, y las de frecuencia negativa con $\widetilde{J\phi} = -i\tilde{\phi}$. Luego, al elegir el subespacio propio de J con valor propio i como espacio de Hilbert de una partícula (\mathcal{H}), entonces el proyector a este subespacio cumple

$$\begin{aligned} \widetilde{K\phi} &= \frac{1}{2} (\widetilde{\phi - iJ\phi}) = \frac{1}{2} 2\pi i \delta(k^2 + m^2) \tilde{f} [\varepsilon(k^0) + 1] = \\ &= \theta(k^0) 2\pi i \delta(k^2 + m^2) \tilde{f}, \end{aligned}$$

coincidiendo con el proyector propuesto al principio, como queríamos probar.

En ese espacio de Hilbert, el producto interno resulta

$$\begin{aligned} \langle K\phi_1, K\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}} &= g(\overline{K\phi_1}, K\phi_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \overline{\tilde{f}_1(k)} \tilde{f}_2(k) d^4k. \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Esta expresión muestra que el espacio de Hilbert de una partícula es unitariamente equivalente a $L^2(h)$. Es decir, que si etiquetamos a los estados por las funciones \tilde{f} entonces el espacio de Hilbert coincide con $L^2(h)$.

A partir de aquí, siguiendo exactamente los pasos del capítulo tres, se construye el espacio de Fock asociado a \mathcal{H} y se define el operador campo

$$\widehat{\phi}(f) = \Omega(\widehat{Ef}, \cdot) = i\widehat{a}\left(\overline{K(Ef)}\right) - i\widehat{a}^*(K(Ef))$$

con las propiedades conocidas, incluyendo las relaciones de conmutación

$$\left[\widehat{\phi}(f), \widehat{\phi}(g)\right] = -i\Omega(Ef, Eg) \widehat{Id}.$$

En los libros de texto, el campo $\widehat{\phi}(f) = -i\widehat{a}\left(\overline{K(Ef)}\right) + i\widehat{a}^*(K(Ef))$ se expresa usualmente en término de los operadores de creación y aniquilación $a_k = \widehat{a}\left(\overline{K\psi_k}\right) = \widehat{a}\left(e^{-ik\cdot x}\right)$. Resulta esclarecedor seguir ese camino en nuestra construcción. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(f) &= i\widehat{a}\left(\overline{K(Ef)}\right) - i\widehat{a}^*(K(Ef)) = \\ &= i\widehat{a}\left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int \overline{K(Ef)} e^{-ik\cdot x} d^4k\right) - i\widehat{a}^*\left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int K(Ef) e^{ik\cdot x} d^4k\right) \end{aligned}$$

Ahora, se puede escribir

$$\widehat{\phi}(f) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \theta(k^0) \delta(k^2 + m^2) (\tilde{f} a_k + \tilde{f} a_k^*) = \int f(x) \widehat{\phi}(x) d^4x$$

donde el operador campo distribucional $\widehat{\phi}(x)$ se escribe como

$$\widehat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \theta(k^0) \delta(k^2 + m^2) (\psi_k a_k + \bar{\psi}_k a_k^*).$$

Por supuesto, esta manipulación es formal, pues los operadores \widehat{a}_k no actúan en el espacio de Fock¹. De todas maneras, es un ejercicio interesante para conectar nuestra construcción con las presentaciones usuales de los libros de texto.

7.2.5 Cuantización de datos iniciales en \mathbb{N}

Definición 7.1. Llamaremos $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ al conjunto de datos iniciales suaves y de soporte compacto y también al conjunto de soluciones que estos generan, en analogía con la definición dada en 6.3.3.

¹ Existe un marco matemático donde los operadores a_k están bien definidos. Dicho marco se da en el contexto de los *espacios de Hilbert equipados* (ver referencia a los *rigged Hilbert Spaces* en Bogoliubov and Shirkov [5])

Definición 7.2. Seguiremos usando la notación \mathcal{S} para designar a las soluciones de \mathbb{K} -G que se pueden escribir como Ef con $f \in \mathcal{T}(M)$ (función de prueba en M).

Definición 7.3. Sobre los datos iniciales \mathcal{S}_N definimos la forma bilineal $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i\Omega_N(\bar{\phi}_1, \phi_2)$, con Ω_N la forma simpléctica sobre N .

Con estos ingredientes planteamos la siguiente proposición.

Proposición 7.1. (sobre el proyector K_N)

El proyector K_N definido por

$$K_N\phi(k) = \langle \psi_k, \phi \rangle$$

con ψ_k una solución de onda plana de la ecuación de \mathbb{K} -G con frecuencia positiva, es un mapa lineal $K_N : \mathcal{S}_N \rightarrow L^2(h)$.

Demostración. Es claro que se trata de un mapa lineal, por la linealidad de Ω_N . Para probar que mapea datos iniciales a $L^2(h)$ necesitamos probar que los elementos de $K_N(\mathcal{S}_N)$ son de cuadrado integrable. Para eso debemos estudiar el comportamiento de $K_N\phi(k)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Este cálculo está desarrollado en el apéndice D.1 donde demostramos que efectivamente se trata de funciones de cuadrado integrable en h . \square

A partir del proyector K_N fijamos nuestra cuantización definiendo los operadores fundamentales en el espacio de Fock $\mathcal{F}_S(L^2(h))$ según la construcción del capítulo tres, es decir

$$\widehat{\Omega_N(\phi, \cdot)} = i\widehat{a}(\overline{K_N\phi}) - i\widehat{a}^*(K_N\phi) \text{ con } \phi \in \mathcal{S}_N.$$

Estos operadores poseen relaciones de conmutación (debido a la definición de \widehat{a} y \widehat{a}^*) dadas por

$$\left[\widehat{\Omega_N(\phi_1, \cdot)}, \widehat{\Omega_N(\phi_2, \cdot)} \right] = i2Im \langle K_N\phi_1, K_N\phi_2 \rangle_{L^2(h)} \widehat{Id}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle K_N\phi_1, K_N\phi_2 \rangle_{L^2(h)} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \Omega_N(\psi_k, \phi_1) \Omega_N(\bar{\psi}_k, \phi_2) d^4k. \end{aligned}$$

En particular, para soluciones en el espacio \mathcal{S} (de la forma Ef), es fácil demostrar que $2Im \langle K_N\phi_1, K_N\phi_2 \rangle = -\Omega_N(\phi_1, \phi_2)$. Comenzamos calculando

$$K_N Ef = \langle \psi_k, Ef \rangle = -i\Omega_N(\bar{\psi}_k, Ef) =$$

Ahora, como probamos en el capítulo seis, $\Omega_N(Ef, \phi) = \int f \phi d^4x$, si el soporte de f está en M , por lo cual

$$(K_N Ef)(k) = i \int f \bar{\psi}_k d^4x = i \int f(x) e^{-ik \cdot x} d^4x = i \tilde{f}(k).$$

Esto nos da la igualdad $\tilde{f}(k) = -\Omega_N(\bar{\psi}_k, Ef)$ y entonces podemos escribir

$$\langle K_N Ef_1, K_N Ef_2 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \Omega_N(\psi_k, Ef_1) \tilde{f}_2(k) d^4k.$$

Por lo tanto

$$i2Im \langle K_N \phi_1, K_N \phi_2 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \left[\Omega_N(\psi_k, Ef_1) \tilde{f}_2(k) - \Omega_N(\bar{\psi}_k, Ef_1) \tilde{f}_2(k) \right] d^4k.$$

Finalmente, debido a que \tilde{f} cae rápidamente con $k \rightarrow \infty$ en h y que el integrando en $\Omega_N(\psi_k, Ef_1)$ tiene soporte compacto, se puede invertir el orden de las integrales (teorema de Fubini [17]). Así llegamos a

$$i2Im \langle K_N \phi_1, K_N \phi_2 \rangle = -\Omega_N \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \left[\tilde{f}_2(k) \psi_k - \psi_{-k} \tilde{f}_2(-k) \right] d^4k, Ef_1 \right).$$

Ahora,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \left[\tilde{f}_2(k) \psi_k - \psi_{-k} \tilde{f}_2(-k) \right] d^4k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k^0) \tilde{f}_2(k) e^{ik \cdot x}$$

y por lo visto al principio de la subsección

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k^0) \tilde{f}_2(k) e^{ik \cdot x} = -i \int \widetilde{E} f_2 e^{ik \cdot x} = -i E f_2.$$

Por lo tanto, se cumple

$$i2Im \langle K_N \phi_1, K_N \phi_2 \rangle = i \Omega_N(Ef_2, Ef_1) = -i \Omega_N(Ef_1, Ef_2)$$

y esto implica que las relaciones de conmutación se reducen a

$$\left[\widehat{\Omega_N(Ef_1, \cdot)}, \widehat{\Omega_N(Ef_2, \cdot)} \right] = -i \Omega_N(K_N Ef_1, K_N Ef_2) \widehat{Id}.$$

Así, los operadores $\widehat{\Omega_N(Ef, \cdot)}$ satisfacen las CCR.

Desde la perspectiva algebraica, esta es la cuantización Fock que se obtiene de la construcción GNS a partir del estado algebraico ω_N definido por

$$\omega_N(W(\phi)) = e^{-\frac{1}{4} g_N(\phi, \phi)}$$

siendo $W(\phi)$ el elemento del álgebra de Weyl asociado al dato inicial ϕ y g_N es el producto interno

$$g_N(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) K_N \phi_1(-k) K_N \phi_2(k) d^4k.$$

Modos cuantizados:

Antes de seguir discutiendo algunas propiedades de la cuantización, como la condición Hadamard, es importante entender cuales son los modos de datos iniciales que están representados por los operadores $\widehat{\Omega_N(\psi, \cdot)}$. Este es un punto central pues esperamos que nuestra cuantización incluya suficientes operadores para reproducir la cuantización estándar en M, pero que a la vez excluya operadores para los cuales no tenemos una descripción adecuada en el marco de una construcción Fock.

Para comenzar, supongamos que queremos encontrar el operador cuántico que representa al observable clásico campo inicial promediado sobre N:

$$\phi(\alpha) \equiv \int_N \alpha \phi d\mu_N \equiv \int d^2x^\perp \left\{ \int_0^\infty \alpha^+ \phi dx^+ + \int_0^\infty \alpha^- \phi dx^- + \alpha^0 \phi|_{S^0} \right\}.$$

En nuestra cuantización tenemos un operador para los elementos de la forma $\phi(\alpha) = \Omega_N(\psi, \phi)$ con ψ datos de prueba en \mathcal{S}_N correspondiente a α . Como vimos en el capítulo seis, los datos ψ existen si y sólo si se cumplen las relaciones $\int_0^\infty \alpha^+ dx^+ = \int_0^\infty \alpha^- dx^- = -\alpha^0$. Para estos operadores la expresión en términos de operadores de creación y aniquilación es

$$\widehat{\Omega_N(\psi, \cdot)} = i\hat{a}(\overline{K_N\psi}) - i\hat{a}^*(K_N\psi).$$

Calculando $K_N\psi$ explícitamente se obtiene

$$K_N\psi(k) = -i\Omega_N(\overline{\psi}_k, \psi) = i\Omega_N(\psi, \overline{\psi}_k) = i \int_N \alpha \overline{\psi}_k d\mu_N.$$

Esto nos dice que el proyector K_N da una transformada de Fourier en N de la función de prueba α . Usando la notación $\int_N \alpha \overline{\psi}_k d\mu_N = \check{\alpha}(k)$ tenemos

$$\widehat{\phi(\alpha)} = \widehat{\Omega_N(\psi, \cdot)} = \hat{a}(\check{\alpha}) + \hat{a}^*(\check{\alpha})$$

Al igual que hicimos para la cuantización estándar, es esclarecedor expresar formalmente el campo en término de operadores $a_k = \hat{a}(\overline{K_N\psi}_k)$ y $a_k^* = \hat{a}^*(K_N\psi_k)$. El cálculo de $K_N\psi_k(p) = \langle \psi_p, \psi_k \rangle$ se realiza en el apéndice D.2, donde se obtiene que las ondas planas son ortogonales, es decir

$$\langle \psi_p, \psi_k \rangle = (2\pi)^3 2p^+ \delta(k_+ - p_+) \delta^2(p_\perp - p_\perp) \equiv (2\pi)^3 \delta_\mu^3(k - p).$$

De esta manera se cumple

$$a_k = \hat{a}\left((2\pi)^3 \delta_\mu^3(k - p)\right) \quad \text{y} \quad a_k^*(p) = \hat{a}^*\left((2\pi)^3 \delta^3(k - p)\right).$$

Nótese que si η es una función suave sobre el cascarón h entonces

$$\int_h \eta(p) (2\pi)^3 \delta_\mu^3(k-p) d\mu(p) = \eta(k)$$

y por lo tanto valen las igualdades

$$\widehat{a}(\bar{\eta}) = \int_h \bar{\eta} a_k d\mu \quad y \quad \widehat{a}^*(\eta) = \int_h \eta a_k^* d\mu.$$

Finalmente podemos escribir

$$\widehat{\phi}(\alpha) = \int_h \bar{\alpha} a_k + \alpha a_k^* d\mu$$

o también

$$\widehat{\phi}(\alpha) = \int_N \alpha \widehat{\phi}(x) d\mu_N \quad \text{con} \quad \widehat{\phi}(x) = \int_h (\psi_k a_k + \bar{\psi}_k a_k^*) d\mu_N.$$

Como ya mencionamos, estas son expresiones formales, pues los operadores a_k y a_k^* no actúan en el espacio de Fock. De todas maneras muestran claramente a los operadores $\widehat{\Omega}_N(\psi, \cdot)$ como el campo promediado sobre funciones de prueba α que cumplen la relación $\int_0^\infty \alpha^\pm dx^\pm = -\alpha^0$. Cabe preguntarse entonces porqué no podemos generalizar la cuantización para incluir cualquier función α mediante la fórmula $\widehat{\phi}(\alpha) = \int_N \alpha \widehat{\phi}(x) d\mu_N$. La respuesta es que el operador campo promediado con una función de prueba que no cumple la relación discutida no es un operador en el espacio de Fock. Como ya discutimos (y demostramos en el apéndice D.1), el proyector K_N lleva elementos de \mathcal{S}_N a $L^2(h)$. De esa manera, la norma del vector $\widehat{\Omega}_N(\psi, \cdot) |0\rangle$ cumple

$$\left\| \widehat{\Omega}_N(\psi, \cdot) |0\rangle \right\|^2 = \langle 0 | \widehat{a}(\overline{K_N \psi}) \widehat{a}^*(K_N \psi) |0\rangle = \langle K_N \psi, K_N \psi \rangle_{L^2(h)} < \infty.$$

Pero si el dato de prueba cumple $\int_0^\infty \alpha^\pm dx^\pm \neq -\alpha^0$, la misma demostración del apéndice D.1 muestra que las funciones que se obtienen no son de cuadrado integrable. Por lo tanto, el operador campo actuando sobre el vacío no produce elementos en el espacio de Fock. El hecho de que el vacío no pertenezca al dominio de $\widehat{\Omega}_N(\psi, \cdot)$ es una característica de por sí indeseable, pero hay otras “malas propiedades” de estos operadores que los muestran como inadecuados para describir al campo. Por ejemplo, si definimos los operadores de Weyl $W(\alpha)$ a partir de operadores de campo $\widehat{\phi}(\alpha)$ tales que $\int_0^\infty \alpha^\pm dx^\pm \neq -\alpha^0$, entonces se obtiene el siguiente resultado para $\langle 0 | W(\alpha) |0\rangle$.

Definiendo $W(\alpha) = e^{i\widehat{\phi}(\alpha)}$ y escribiendo esta expresión en término de operadores de creación y aniquilación resulta

$$\langle 0|W(\alpha)|0\rangle = \langle 0|e^{i\hat{a}(\tilde{\alpha})+i\hat{a}^*(\tilde{\alpha})}|0\rangle.$$

Usando ahora que el conmutador de \hat{a} con \hat{a}^* es proporcional a la identidad (al igual que procedimos en la sección 4.4.2) resulta

$$\langle 0|W(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}\rangle_{L^2(h)}} \langle 0|e^{i\hat{a}^*(\tilde{\alpha})}e^{i\hat{a}(\tilde{\alpha})}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}\rangle_{L^2(h)}}.$$

Esto muestra que los datos de prueba que no son de cuadrado integrable en $L^2(h)$ cumplen $\langle 0|W(\alpha)|0\rangle = 0$ pues $\langle\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}\rangle_{L^2(h)} = +\infty$, lo cual implica a su vez que $\widehat{\phi(\alpha)}$ no es un operador autoadjunto. Una forma de probar esta última afirmación es mostrando que una familia uniparamétrica de operadores de Weyl $W(\lambda\psi)$ (con parámetro λ) no es continua en el parámetro, como debería suceder si $\widehat{\phi(\alpha)}$ fuera autoadjunto. Es evidente que

$$\langle 0|W(\lambda\psi)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\langle K_N\psi, K_N\psi\rangle_{L^2(h)}} = 0$$

excepto si $\lambda = 0$. En ese caso $\langle 0|W(0)|0\rangle = 1$, dejando clara la discontinuidad.

En definitiva, vemos que nuestra cuantización es rigurosa en el sentido de que incorpora al operador campo promediado sobre datos de prueba en \mathbb{N} , pero sólo en los casos en que es un operador bien definido.

7.2.6 Condición Hadamard

Ya mostramos que nuestra cuantización coincide con la cuantización estándar del campo de K-G en M y por lo tanto la condición de Hadamard, que está inspirada en el caso plano, también se debe cumplir. Efectivamente es así. En este caso podemos calcular la función de correlación de dos puntos explícitamente y confirmar que su parte divergente es de la forma Hadamard.

Como discutimos en el apéndice A, para una construcción Fock con vacío cuasi-libre se puede definir la función de dos puntos promediada en el espacio tiempo como $\Lambda(f, g) = \lambda(Ef, Eg)$. Esta distribución puede calcularse a partir del producto interno en el espacio de Hilbert \mathcal{H} gracias a la relación $\lambda(\phi_1, \phi_2) = \langle K\phi_1, K\phi_2\rangle_{\mathcal{H}}$ discutida en el mismo apéndice. En nuestro caso tenemos

$$\langle K_N\phi_1, K_N\phi_2\rangle_{\mathcal{H}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \Omega_N(\phi_1, \psi_k) \Omega_N(\phi_2, \bar{\psi}_k)$$

y entonces, si consideramos dos funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{T}$ que cumplen $\phi_1 = Ef_1$ y $\phi_2 = Ef_2$ podemos transformar la expresión anterior en

$$\Lambda(f, g) \equiv \lambda(Ef, Eg) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^4x \int d^4y f_1(x) f_2(y) \Delta_\epsilon^+(x-y)$$

Aquí hemos introducido la función suave Δ_ϵ^+ , cuyo límite en $\epsilon \rightarrow 0$ es el propagador Δ^+ (ver apéndice C.2). Concretamente identificamos

$$\Delta^+(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x-y-i\epsilon)}$$

donde ϵ es un cuadrivector temporal y se entiende que el límite en ϵ debe ser tomado luego de integrar. En el apéndice D.3 realizamos el cálculo de la parte divergente de esta distribución discutiendo en detalle el ϵ y obtenemos el mismo resultado que aparece en la literatura para la forma Hadamard (sección 3.3 de Kay and Wald [25]), es decir:

$$\Delta^+(x-y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sigma + \eta^2 + 2iT\eta} + \frac{m^2}{16\pi^2} \text{Ln}(\sigma + \eta^2 + 2iT\eta) + W(x,y)$$

con $\eta = \sqrt{\epsilon^2} > 0$, $\sigma = (x-y)^2$, $T = x^0 - y^0$ y $W(x,y)$ una función suave.

7.3 CUANTIZACIÓN EN ESPACIO-TIEMPO CURVO

Para la cuantización en espacio tiempo curvo, adoptaremos la estrategia de utilizar coordenadas sobre las hipersuperficies nulas que nos permitan mapear el problema a su equivalente en espacio-tiempo plano. De este modo podremos utilizar de forma íntegra la cuantización que describimos en la sección anterior y luego obtener nuestra teoría con el mapa inverso.

La discusión de la preservación de la condición Hadamard en el proceso de traducción se dará en la siguiente sección.

7.3.1 Elección del sistema de coordenadas

En primer lugar definimos un difeomorfismo suave del interior de \mathcal{N} al interior de N . Esto, a su vez, define coordenadas $\alpha = (\alpha^+, \alpha^-, \alpha^2, \alpha^3)$ sobre \mathcal{N} de manera tal que sus valores en un punto $p \in \mathcal{N}$ son los valores de (x^+, x^-, x^2, x^3) en $\alpha(p) \in N$ (ver figura 4). Elegimos α de forma tal que $\alpha^2, \alpha^3 = cte$ a lo largo de los generadores de \mathcal{N} , $\alpha^- = 0$ en \mathcal{N}^+ y $\alpha^+ = 0$ en \mathcal{N}^- , donde hemos conservado las definiciones del capítulo anterior para estas hipersuperficies.

NOTACIÓN:

Llamaremos ρ a la densidad de área en coordenadas α^1, α^2 en las secciones espaciales de \mathcal{N} caracterizadas por $\alpha^+, \alpha^- = cte$.

Por otro lado debemos distinguir la forma simpléctica en espacio-tiempo curvo de su equivalente en espacio-tiempo plano. Para ello utilizamos los subíndices \mathcal{N} y N respectivamente en los correspondientes Ω .

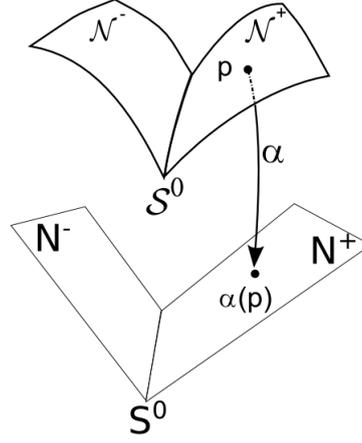


Figura 4: Esquema del difeomorfismo α que conecta la cuantización en espacio-tiempo curvo con la cuantización en espacio-tiempo plano.

En analogía con nuestra notación para espacio-tiempo plano usaremos la notación $M = \text{int}[\mathcal{D}^+(\mathcal{N})]$ y $\mathcal{T}(M)$ para el espacio de funciones de prueba en M .

7.3.2 Propuesta de cuantización

Empezamos por una proposición.

Proposición 7.2. (*mapa entre espacios de soluciones*)

Dado el conjunto de datos iniciales suaves $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ definido en 6.3.3 y su equivalente $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ en espacio tiempo plano, el mapa $\varphi : \mathcal{S}_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ definido por $\varphi(\phi) = \sqrt{\rho}\phi \circ \alpha^{-1}$ es una mapa lineal, 1 a 1 y sobreyectivo.

Demostración. α^{-1} es suave en N^+ y N^- y por lo tanto su composición con la función suave $\sqrt{\rho}\phi$ también es suave. La continuidad de α implica que mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos y por tanto, el hecho de que ϕ tiene soporte compacto en el interior de \mathcal{N} garantiza que $\varphi(\phi)$ lo tiene en el interior de \mathcal{N} . La linealidad es evidente y por último el mapa inverso $\varphi^{-1}(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi \circ \alpha$ está bien definido, lo cual asegura que la relación sea 1 a 1. \square

Vale aclarar que la importancia del factor $\sqrt{\rho}$ radica en que gracias a él se cumple la igualdad

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\phi_1, \phi_2) = \Omega_{\mathcal{N}}(\varphi(\phi_1), \varphi(\phi_2)) \quad (7.3.1)$$

como se prueba en el apéndice D.4.

7.3.2.1 Construcción de la teoría:

El mapa φ nos permite construir la teoría para datos $\phi \in \mathcal{S}_N$ utilizando $\varphi(\phi) \in \mathcal{S}_N$ como datos iniciales en la construcción de la sección 7.2. El resultado es la cuantización Fock correspondiente a la métrica

$$g_N(\phi_1, \phi_2) \equiv g_N(\varphi(\phi_1), \varphi(\phi_2)).$$

Esta métrica, junto con la forma simpléctica (7.3.1) definen el proyector $K_N : \mathcal{S}_N \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$K_N = K_N \circ \varphi.$$

Explícitamente

$$K_N \phi(k) = -i\Omega_N(\bar{\psi}_k, \sqrt{\rho}\phi \circ \alpha^{-1})$$

donde ψ_k son los modos de frecuencia positiva definidos para el espacio-tiempo plano. Con estos elementos, podemos definir los operadores

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_N(\phi, \cdot) &= i\widehat{a}(\overline{K_N\phi}) - i\widehat{a}^*(K_N\phi) = \\ &= i\widehat{a}(\overline{K_N\varphi(\phi)}) - i\widehat{a}^*(K_N\varphi(\phi)) = \Omega_N(\varphi(\phi), \cdot). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que el conmutador de estos operadores cumple las relaciones esperadas

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\Omega}_N(\phi_1, \cdot), \widehat{\Omega}_N(\phi_2, \cdot) \right] &= \left[\Omega_N(\varphi(\phi_1), \cdot), \Omega_N(\varphi(\phi_2), \cdot) \right] = \\ &= -i\Omega_N(\varphi(\phi_1), \varphi(\phi_2)) \widehat{Id} = -i\Omega_N(\phi_1, \phi_2) \widehat{Id} \end{aligned}$$

lo cual completa la teoría cuántica de datos iniciales.

Vale aclarar que las funciones clásicas $\Omega_N(\phi, \cdot)$ y $\Omega_N(\varphi(\phi), \cdot)$ son distintas, pues de hecho actúan en espacio diferentes. Sin embargo, los operadores que las representan en las respectivas cuantizaciones de datos en \mathcal{N} y N son iguales. Este es el único sentido de la igualdad $\widehat{\Omega}_N(\phi, \cdot) = \Omega_N(\varphi(\phi), \cdot)$ ya que los puntos en esta ecuación no representan dependencias funcionales de los operadores.

Al igual que hicimos en espacio-tiempo plano, en base a esta cuantización de datos iniciales en \mathcal{N} , podemos construir una cuantización del campo en M . Para ellos basta con definir

$$\widehat{\phi}(f) = \widehat{\Omega}_N(Ef, \cdot) = \Omega_N(\varphi(Ef), \cdot)$$

y así obtener un conjunto de operadores de campo con las mismas propiedades que discutimos en la sección 6.4.1.

Finalmente, desde el punto de vista algebraico, esta cuantización corresponde a la representación del álgebra de Weyl obtenida a partir de la construcción GNS para el estado cuasi-libre ω_N definido por

$$\omega_N[W(\phi)] = \omega_N[W(\varphi(\phi))] = e^{-\frac{1}{4}g_N(\varphi(\phi), \varphi(\phi))} = e^{-\frac{1}{4}g_N(\phi, \phi)}.$$

7.4 ESTUDIO DE LA CONDICIÓN μSC

Como hemos visto en la sección anterior, muchas propiedades se transfieren directamente de la teoría en espacio-tiempo plano al espacio-tiempo curvo, pero en el caso de la condición Hadamard esto no es evidente. La función de correlación de dos puntos no se mantiene al aplicar el mapa φ y por lo tanto es necesario demostrar que su parte divergente es de la forma Hadamard.

En espacio-tiempo plano la comprobación de esta condición se puede realizar explícitamente, como vimos en la subsección 7.2.6. Sin embargo, en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico arbitrario resulta difícil hacer el cálculo explícito de la parte divergente de la función de dos puntos. Por este motivo elegimos comprobar la condición μSC , que es equivalente a la condición Hadamard por el teorema de Radzikowski.

La condición μSC exige que los *quanta* de momento grande creados por el operador campo sean de energía positiva. En espacio tiempo plano esto es asegurado por K_N , que proyecta a modos de energía positiva, ya que sólo se consideran ondas planas ψ_k de frecuencia positiva en la expresión $K_N\phi(k) = -i\Omega_N(\bar{\psi}_k, \phi)$. En el caso curvo, en virtud de la relación 7.3.1, la acción de K_N está dada por una expresión parecida:

$$K_N\phi(k) = -i\Omega_N\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\bar{\psi}_k \circ \alpha, \phi\right).$$

Pero a diferencia del caso plano, las funciones $\frac{1}{\sqrt{\rho}}\bar{\psi}_k \circ \alpha$ no son datos iniciales para ondas planas de frecuencia positiva sino deformaciones suaves de las mismas. No obstante, es esperable que la proyección sobre estas funciones aún asegure la positividad de la energía de los quanta en el límite de momento grande. A continuación veremos que esta expectativa se cumple en gran medida. Haciendo uso de varias herramientas de análisis microlocal discutidas en el capítulo 5 hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 7.3. *(sobre cumplimiento de la condición μSC)*

La función de dos puntos para la cuantización presentada en la sección 7.3 satisface la condición espectral microlocal en todo el interior del dominio de dependencia de \mathcal{N} , si la satisface en un entorno de S^0 .

En la subsección siguiente desarrollamos los diferentes pasos que llevan a la demostración de esta proposición. Antes de ir a ella presentamos un resultado que se desprende inmediatamente de la misma.

Corolario 7.1. *(caso particular)*

Consideremos un espacio-tiempo globalmente hiperbólico tal que la métrica coincide con la del espacio de Minkowski al pasado de

una hipersuperficie espacial Σ y se continúa de forma suave hacia el futuro de Σ . Si la superficie S^0 se encuentra en el pasado de Σ y en esa región \mathcal{N} coincide con N , entonces la cuantización presentada en 7.3 cumple μSC .

Demostración. Al pasado de Σ la métrica coincide con la del espacio de Minkowski y el mapa φ es la identidad. Esto implica que, para puntos en el pasado de Σ , el cálculo de la función de dos puntos coincide con el cálculo hecho en el caso de espacio tiempo plano. Por lo tanto, en esos puntos se cumple la condición μSC y eso nos coloca en las hipótesis de la proposición anterior. \square

En este corolario hemos supuesto que la hipersuperficie \mathcal{N} no es compacta, contrario a la definición que adoptamos en nuestro trabajo. De todas maneras esto no tiene ningún efecto sobre las conclusiones, pues la hipótesis necesaria para demostrar μSC es que los datos iniciales deben tener soporte compacto en \mathcal{N} y esto no requiere de la compacidad de la propia hipersuperficie.

7.4.1 Estrategia de demostración

A grandes rasgos la idea es escribir la función de correlación de forma que la dependencia de los datos iniciales sobre la hipersuperficie \mathcal{N} sea explícita. De esa forma se podrá determinar cómo la acción del proyector $K_{\mathcal{N}}$ impacta sobre la función de correlación en M , restringiendo el WF a las direcciones de la forma $\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-$ (ver definición al final de esta subsección).

La demostración consta de varios pasos, a cada uno de los cuales dedicamos una o más subsecciones:

- escribir la función de correlación de dos puntos en término de integrales sobre \mathcal{N}
- argumentar que, de todos los posibles (x, y, k_x, k_y) en el WF, alcanza con estudiar los de la forma $(y, y, k_y, -k_y)$
- llevar la prueba sobre la condición μSC a un cálculo sobre el WF de una distribución en el espacio-tiempo plano, que llamaremos $\lambda_{\mathcal{N}}$.
- reunir los resultados incorporando la hipótesis sobre el cumplimiento de μSC en un entorno de S^0

Para descomprimir la demostración muchos cálculos son presentados en el apéndice D.

NOTACIÓN: En el resto del capítulo usaremos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\pm &= \{(x, k) \mid k^2 = 0, \pm k^0 > 0\} \\ \mathcal{V}_0 &= \{(x, k) \mid k^2 = 0\} \\ \bar{\mathcal{V}}_\pm &= \{(x, k) \mid k^2 = 0, \pm k^0 \geq 0\} \\ I^- &= \{(x, x, k_x, -k_x) \mid (x, k_x) \in \mathcal{V}_-\}\end{aligned}$$

7.4.2 Forma explícita para la función de dos puntos

De la construcción de la teoría cuántica vista en la sección anterior sabemos que los operadores de campo se obtienen como

$$\widehat{\phi}(f) = \Omega_{\mathcal{N}}(\widehat{Ef}, \cdot) = i\widehat{a}(\overline{K_{\mathcal{N}}Ef}) - i\widehat{a}^*(K_{\mathcal{N}}Ef)$$

donde f es una función de prueba con soporte en M . Por lo tanto, la función de correlación $\Lambda(f, g) = \langle 0 \mid \widehat{\phi}(f) \widehat{\phi}(g) \mid 0 \rangle$ se calcula como

$$\begin{aligned}\Lambda(f, g) &= \langle 0 \mid \widehat{\phi}(f) \widehat{\phi}(g) \mid 0 \rangle = \\ &= \langle 0 \mid \widehat{a}(\overline{K_{\mathcal{N}}Ef}) \widehat{a}^*(K_{\mathcal{N}}Eg) \mid 0 \rangle = \langle K_{\mathcal{N}}Ef, K_{\mathcal{N}}Eg \rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Nótese que esta última expresión muestra explícitamente que la función de dos puntos queda expresada en términos de objetos en \mathcal{N} .

Para el cálculo del WF debemos extender esta expresión para funciones complejas, pues el análisis del WF requiere que consideremos funciones de prueba de la forma $f_{\bar{x}}e^{ik \cdot x}$. Es decir, una función localizadora $f_{\bar{x}}$ con soporte en torno a \bar{x} multiplicada por una onda plana. Al extenderla linealmente a funciones f, g complejas obtenemos

$$\Lambda(f, g) = \langle K_{\mathcal{N}}E(\bar{f}), K_{\mathcal{N}}Eg \rangle_{\mathcal{H}}$$

por la sesquilinealidad del producto interno.

En la siguiente subsección, para simplificar el estudio de su WF, utilizamos que la función de dos puntos coincide con el producto interno de ciertos elementos de \mathcal{H} .

7.4.3 Simplificación del estudio del WF (Λ)

Queremos probar que, para acotar los elementos $(x, y, k_x, k_y) \in WF(\Lambda)$, es suficiente estudiar los que tiene la forma $(x, x, k_x, -k_x)$. Para ello observamos primero que, por ser un producto interno, $\Lambda(f, g)$ cumple

$$\begin{aligned}|\Lambda(f, g)| &= \left| \langle K_{\mathcal{N}}E(\bar{f}), K_{\mathcal{N}}Eg \rangle_{\mathcal{H}} \right| \leq \\ &\leq \langle K_{\mathcal{N}}E\bar{f}, K_{\mathcal{N}}E\bar{f} \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \langle K_{\mathcal{N}}Eg, K_{\mathcal{N}}Eg \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} = \Lambda(f, \bar{f})^{1/2} \Lambda(\bar{g}, g)^{1/2}\end{aligned}$$

en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

A partir de esta desigualdad, en el apéndice D.6, probamos que

$$WF(\Lambda) \subset \{(x, y, k_x, k_y) \mid (x, x, k_x, -k_x) \in WF(\Lambda) \text{ o } k_x = 0, \\ , (y, y, -k_y, k_y) \in WF(\Lambda) \text{ o } k_y = 0\}.$$

Además, debido a que Λ es una bi-solución de K-G, sabemos que $WF(\Lambda) \subset \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$. Esto muestra que basta probar que $WF(\Lambda)$ no contiene elementos de la forma $(x, x, k_x, -k_x)$ con k_x en el cono de luz pasado, para que se cumpla la inclusión $WF(\Lambda) \subset \bar{\mathcal{V}}_+ \times \bar{\mathcal{V}}_-$. Por otro lado, haciendo uso de un argumento muy similar al empleado en el ejemplo 5.8, en el apéndice D.6 probamos que la condición $WF(\Lambda) \subset \bar{\mathcal{V}}_+ \times \bar{\mathcal{V}}_-$ implica μSC .

Como conclusión, vemos que alcanza con probar que $WF(\Lambda) \cap I^- = \emptyset$ para demostrar la propiedad μSC .

7.4.4 La función de dos puntos como composición de distribuciones

En esta sección encontraremos una inclusión para $WF(\Lambda) \cap I^-$, el elemento central de la prueba.

Utilizando la notación $\sqrt{\rho}Ef \circ \alpha^{-1} = \mathbb{E}f$, en nuestra cuantización se cumple que

$$\Lambda(f, g) = \left\langle K_{\mathcal{N}}E\left(\bar{f}\right), K_{\mathcal{N}}Eg \right\rangle_{\mathcal{H}} = \\ = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \Omega_{\mathcal{N}}(\psi_k, \mathbb{E}f) \Omega_{\mathcal{N}}(\bar{\psi}_k, \mathbb{E}g).$$

Esta expresión puede ser interpretada en términos de las siguientes distribuciones:

1. $\Delta^+ \in \mathcal{D}'(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$, cuyo kernel (ver apéndice C.2) está dado por

$$\Delta^+(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x_1 - x_2)} = \\ = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \psi_k(x_1) \bar{\psi}_k(x_2)$$

2. $\mathbb{E} \in \mathcal{D}'(\mathcal{U} \times \mathcal{M})$ siendo \mathcal{U} un entorno de \mathcal{N} . Esta es la bi-distribución que se obtiene a partir del mapa $\mathbb{E} : \mathcal{T}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ como consecuencia del teorema del kernel.
3. La forma simpléctica $\Omega_{\mathcal{N}}$ vista como una bi-distribución en $\mathcal{D}'(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$. Si se desarrolla la expresión para la forma simpléctica en \mathcal{N} se obtiene

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi, \phi) = \sum_{j=\pm N^j} \int (\phi \partial_j \psi - \psi \partial_j \phi) dx^j d^2x^\perp =$$

$$= \int_{V \times V} \phi(x_1) \psi(x_2) \Omega_N(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2$$

con kernel

$$\Omega_N(x_1, x_2) = \delta^4(x_1 - x_2) \left[\delta(x_2^-) \theta(x_2^+) \partial_{x_2^+} + \delta(x_2^+) \theta(x_2^-) \partial_{x_2^-} - (x_1 \leftrightarrow x_2) \right].$$

La primera es una distribución conocida que, como se discute en el apéndice D.7, puede obtenerse como el límite de la función C^∞

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x_1 - x_2 - i\epsilon)}.$$

En cuanto a la segunda distribución, en el apéndice D.5 probamos que está bien definida en $U \times M$, siendo U un entorno de N y también probamos que su WF (relacionado con el WF de E) cumple

$$WF(\mathbb{E}) = \{(x, y, k_x, -k_y) \in T^*U \setminus 0 \times T^*M \setminus 0 \mid (x, k_x) \approx (y, k_y)\}.$$

Aquí la equivalencia $(x, k_x) \approx (y, k_y)$ significa:

- el punto $y \in M$ está conectado por una geodésica nula al punto x de coordenadas $x = \alpha(x)$
- k_y es co-tangente a la geodésica en y
- k_x es la expresión en coordenadas del co-vector k_x que es el transporte paralelo de k_y a x .

Por último, Ω_N ha sido escrita como producto de conocidas distribuciones y es una distribución bien definida como mostramos en el apéndice D.7. A esta bi-distribución le corresponde (vía el teorema del kernel) un mapa $\Omega : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{D}'(V)$ que cumple $\Omega\psi(\phi) = \Omega_N(\psi, \phi)$.

En base a estas distribuciones, la función de dos puntos

$$\Lambda(f, g) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) \Omega_N(\psi_k, \mathbb{E}f) \Omega_N(\bar{\psi}_k, \mathbb{E}g)$$

puede escribirse (formalmente) como²

$$\Lambda(f, g) = \int_{V^4} \Delta^+(x_1 - x_2) \Omega_N(x_1, x_3) \Omega_N(x_2, x_4) \mathbb{E}f(x_3) \mathbb{E}g(x_4) d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4$$

y a su vez

$$\mathbb{E}f(x_3) = \int_M \mathbb{E}(x_3, y) f(y) d^4y, \quad \mathbb{E}g(x_4) = \int_M \mathbb{E}(x_4, y) g(y) d^4y.$$

² La expresión para Λ en término de integrales múltiples es formal pues no está demostrado que las integrales conmutan. De todas maneras, esta expresión formal sirve para entender la interpretación de Λ en términos de $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$ y λ_N .

Introduciendo ahora el producto tensorial $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \in \mathcal{D}'(U \times U \times M \times M)$ también se puede escribir

$$\mathbb{E}f(x_3)\mathbb{E}g(x_4) = \int_{M \times M} [\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}](x_3, x_4, y_1, y_2) f(y_1)g(y_2) d^4y_1 d^4y_2.$$

Finalmente, definimos la distribución $\lambda_N \in \mathcal{D}'(V \times V)$ dada por

$$\lambda_N = \Omega^{x_1} \Omega^{x_2} \Delta^+(x_1 - x_2)$$

donde los supra-índices x_1 y x_2 indican en qué variable actúan los mapas Ω . En términos de esta nueva distribución

$$\Lambda(f, g) = \int_{V \times V} \lambda_N(x_3, x_4) \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}(x_3, x_4, f, g) d^4x_3 d^4x_4 = \lambda_N(\mathbb{E}f, \mathbb{E}g).$$

De forma alternativa pensaremos en la distribución Λ como

$$\Lambda(f, g) = [\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T](f \otimes g, \lambda_N)$$

donde \mathbb{E}^T es el traspuesto de \mathbb{E} , es decir $\mathbb{E}^T(y, x) = \mathbb{E}(x, y)$.

Esta última expresión supone que λ_N es una distribución bien definida y que tiene sentido saturar dos de las entradas de $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$ con ella. En el apéndice D.7 demostramos que λ_N es una distribución y en la próxima subsección tratamos el tema de la composición con $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$. Para esto último utilizaremos el teorema del kernel sobre distribuciones presentado en la sección 5.4.

7.4.5 Reducción de la demostración al cálculo de $WF(\lambda_N)$

El objetivo de esta sub-sección es expresar Λ como una composición de $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$ y λ_N , lo cual nos permitirá a su vez, encontrar una inclusión para $WF(\Lambda)$ en términos de $WF(\lambda_N)$.

Como primer punto debemos justificar que la expresión

$$\Lambda(f, g) = [\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T](f \otimes g, \lambda_N)$$

tiene sentido, ya que estamos poniendo la distribución λ_N en la entrada de otra distribución. Para que esto sea legítimo, el teorema del kernel (ver sección 5.4) exige que $WF'(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{U \times U} \cap WF(\lambda_N) = \emptyset$. Como veremos inmediatamente esta condición se cumple porque $WF'(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{U \times U} = \emptyset$. Luego, la misma asegura la existencia de una distribución $[\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T] \lambda_N = [\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T](\cdot, \lambda_N)$ que, por definición, coincide con Λ . Además, el teorema del kernel nos dice que el **WF** cumple la inclusión

$$WF(\Lambda) \subset WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{M \times M} \cup WF'(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T) \circ WF(\lambda_N).$$

El WF de $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$:

En primer lugar, el WF del producto tensorial $\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T$ cumple (ver sección 5.4)

$$\begin{aligned} WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T) &\subset \{WF(\mathbb{E}^T) \times WF(\mathbb{E}^T)\} \cup \\ &\cup \{WF(\mathbb{E}^T) \times (\text{supp}(\mathbb{E}^T) \times 0)\} \cup \{(\text{supp}(\mathbb{E}^T) \times 0) \times WF(\mathbb{E}^T)\}. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Luego, $WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{M \times M}$ cumple

$$\begin{aligned} WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{M \times M} &\subset \{WF(\mathbb{E}^T)_M \times WF(\mathbb{E}^T)_M\} \cup \\ &\cup \{WF(\mathbb{E}^T)_M \times (\text{supp}(\mathbb{E}^T) \times 0)\} \cup \\ &\cup \{(\text{supp}(\mathbb{E}^T) \times 0) \times WF(\mathbb{E}^T)_M\}. \end{aligned}$$

Como vemos, todos los términos incluyen $WF(\mathbb{E}^T)_M$, el cual podemos calcular explícitamente.

Sabemos que

$$WF(\mathbb{E}) = \{(x, y, k_x, -k_y) \in T^*U \setminus 0 \times T^*M \setminus 0 \mid (x, k_x) \approx (y, k_y)\}$$

con lo cual

$$WF(\mathbb{E}^T) = \{(y, x, -k_y, k_x) \in T^*M \setminus 0 \times T^*U \setminus 0 \mid (x, k_x) \approx (y, k_y)\}.$$

Este WF no admite elementos con momento cero en ninguna de sus entradas y por tanto $WF(\mathbb{E}^T)_M = \{(y, x, -k_y, 0) \in WF(\mathbb{E}^T)\} = \emptyset$. Esto prueba que la distribución $[\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T] \lambda_N$ está bien definida.

Como dijimos anteriormente, el teorema del kernel nos asegura la siguiente inclusión para $WF(\Lambda)$:

$$WF(\Lambda) \subset WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{M \times M} \cup WF'(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T) \circ WF(\lambda_N).$$

Por idénticas razones a las presentadas en la prueba de existencia, se cumple $WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T)_{M \times M} = \emptyset$ y por lo tanto la inclusión se reduce a

$$WF(\Lambda) \subset WF'(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T) \circ WF(\lambda_N)$$

o explícitamente

$$\begin{aligned} WF(\Lambda) &\subset \\ &\{(y_1, y_2, k_{y_1}, k_{y_2}) \mid (y_1, y_2, x_1, x_2, k_{y_1}, k_{y_2}, -k_{x_1}, -k_{x_2}) \in WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T), \\ &\quad (x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_N)\}. \end{aligned}$$

Si ahora hacemos la intersección con I^- obtenemos

$$\begin{aligned} WF(\Lambda) \cap I^- &\subset \\ &\{(y, y, k_y, -k_y) \mid (y, y, x_1, x_2, k_y, -k_y, -k_{x_1}, -k_{x_2}) \in WF(\mathbb{E}^T \otimes \mathbb{E}^T), \end{aligned}$$

$$, (y, k_y) \in \mathcal{V}_-, (x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_N)\}.$$

Esto limita fuertemente a los posibles elementos de $WF(\Lambda) \cap I^-$ pues en la inclusión 7.4.1 sólo el término $WF(\mathbb{E}^T) \times WF(\mathbb{E}^T)$ tiene elementos de esta forma, ya que $k_y \neq 0$ en \mathcal{V}_- . Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} & WF(\Lambda) \cap I^- \subset \\ & \{(y, y, k_y, -k_y) \mid (y, k_y) \in \mathcal{V}_-, (y, x_1, k_y, -k_{x_1}) \in WF(\mathbb{E}^T), \\ & (y, x_2, -k_y, -k_{x_2}) \in WF(\mathbb{E}^T), (x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_N)\} \end{aligned}$$

o sea

$$WF(\Lambda) \cap I^- \subset \{(y, y, k_y, -k_y) \mid (y, k_y) \in \mathcal{V}_-,$$

$$(x_1, k_{x_1}) \approx (y, k_y) \approx (x_2, -k_{x_2}), (x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_N)\}.$$

Ya discutimos que λ_N tiene soporte sobre N y Λ sobre M (que es disjunto con \mathcal{N}). Por lo tanto, la doble equivalencia dice que tanto x_1 como x_2 son las coordenadas de puntos de \mathcal{N} que están sobre una geodésica nula que pasa por y tangente a k_y . Dado que hemos supuesto que \mathcal{N} está encajado acronalmente en el espacio-tiempo, se aplican los resultados del apéndice B de Reisenberger [31] (especialmente la proposición B.7). Según este resultado, para que dos puntos de \mathcal{N} estén sobre la misma geodésica nula sólo existen dos opciones (ver figura 5): que la geodésica sea un generador o que los puntos coincidan. La primera opción debe descartarse. En ese caso la geodésica pertenecería a \mathcal{N} y por lo tanto no podría conectar con puntos de M . La opción restante es $x_1 = x_2 \equiv x$ y $k_{x_1} = -k_{x_2} \equiv k_x$. Esto simplifica aún más la inclusión, llevándola a

$$\begin{aligned} & WF(\Lambda) \cap I^- \subset \\ & \{(y, y, k_y, -k_y) \mid (y, k_y) \in \mathcal{V}_-, (x, k_x) \approx (y, k_y), (x, x, k_x, -k_x) \in WF(\lambda_N)\}. \end{aligned}$$

Como último paso antes de probar que $WF(\Lambda) \cap I^- = \emptyset$ debemos estudiar $WF(\lambda_N)$. En particular, aquellos elementos de la forma $(x, x, k_x, -k_x)$.

7.4.6 Estudio del $WF(\lambda_N)$

De la expresión explícita para λ_N vemos que su soporte se reduce a la hipersuperficie N , por lo tanto su WF sólo puede contener puntos en dicha hipersuperficie. Ahora bien, al final de la subsección anterior establecimos que los elementos de $WF(\lambda_N)$ que contribuyen a $WF(\Lambda) \cap I^-$ son de la forma $(x, x, k_x, -k_x)$. A continuación llevaremos a cabo el cálculo de $WF(\lambda_N) \cap I$ con $I = \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in N \setminus S^0\}$, el cual nos permite demostrar μSC para pares (y, k_y) tales que la geodésica nula por y tangente a k_y interseca \mathcal{N} en puntos del interior de \mathcal{N}^+ o \mathcal{N}^- . En el caso restante, es decir, cuando la geodésica interseca

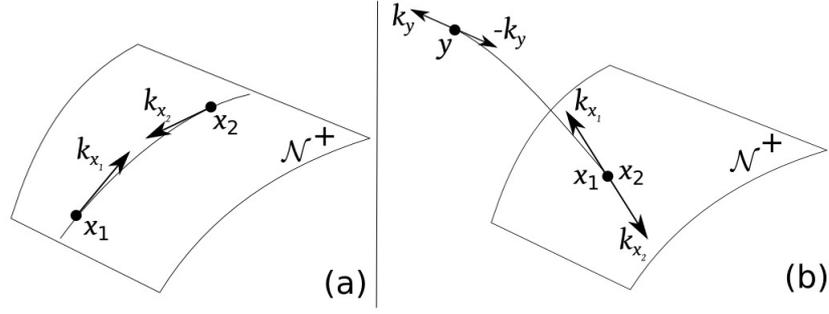


Figura 5: Esquema que muestra porqué se descartan pares de puntos $x_1 \neq x_2$ de \mathcal{N} al estudiar $WF(\Lambda) \cap I^-$. (a) Condición para $(x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_{\mathcal{N}})$ incompatible con $y \in M$. (b) Condición para $(x_1, x_2, k_{x_1}, k_{x_2}) \in WF(\lambda_{\mathcal{N}})$ compatible con $y \in M$.

a \mathcal{N} en S^0 , el desarrollo que presentaremos a continuación no funciona. Este caso será tratado en la siguiente subsección, incorporando una hipótesis extra.

El cálculo de $WF(\lambda_{\mathcal{N}}) \cap I$ se realiza en el apéndice D.8, obteniéndose el resultado

$$WF(\lambda_{\mathcal{N}}) \cap I \subset \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in \mathcal{N}^+ \setminus S^0, (k_x)_+ \leq 0\} \cup \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in \mathcal{N}^- \setminus S^0, (k_x)_- \leq 0\}.$$

Combinando este resultado con la exigencia $(x, k_x) \approx (y, k_y)$, vemos que $(k_x)_+ \neq 0$ en \mathcal{N}^+ y $(k_x)_- \neq 0$ en \mathcal{N}^- . Esto se debe a que en el caso $(k_x)_+ = 0$ en \mathcal{N}^+ , el vector nulo k_x (de coordenadas k_x) debería ser tangente a \mathcal{N}^+ y por tanto a un generador de \mathcal{N}^+ . A su vez k_x es tangente a una geodésica que conecta un punto x en \mathcal{N}^+ con $y \in M$, pero esto es imposible ya que esta geodésica coincidiría con un generador de \mathcal{N}^+ , que es disjunto de M . Finalmente, $(k_x)_+ < 0$ en \mathcal{N}^+ y $(k_x)_- < 0$ en \mathcal{N}^- es incompatible con la condición $k_y \in \mathcal{V}_-$ en conjunto con $(x, k_x) \approx (y, k_y)$. La razón es que el co-vector k_x (de coordenadas k_x) es el transporte paralelo por una geodésica nula de un co-vector $k_y \in \mathcal{V}_-$ y entonces no puede pasar de ser un co-vector apuntando hacia el pasado a uno que apunta hacia el futuro. Esto muestra que $WF(\Lambda) \cap I^-$ sólo puede contener elementos de la forma $(y, y, k_y, -k_y)$ correspondientes a geodésicas que pasan por S^0 . Trataremos esta posibilidad en la siguiente subsección.

7.4.7 Hipótesis sobre $WF(\Lambda)$ cerca de S^0

Como ya mencionamos, si la geodésica que une y con \mathcal{N} , lo hace en un punto de S^0 , el cálculo presentado en la subsección anterior no funciona. Sin embargo, si tomamos como hipótesis que la condición espectral microlocal se cumple en un entorno pequeño de S^0 podemos utilizar la aplicación del teorema de propagación de singularida-

des del ejemplo 5.7. Como se vio entonces el WF de una bi-solución de K-G, como Λ , consiste de una unión de conjuntos de la forma

$$\{(x, y, k_x, k_y) \mid x = \gamma_x(\lambda_x), k_x = \dot{\gamma}_x(\lambda_x), y = \gamma_y(\lambda_y), k_y = \dot{\gamma}_y(\lambda_y)\}$$

con λ_x, λ_y parámetros afines de las geodésicas nulas γ_x y γ_y . Por lo tanto, si $(y, y, k_y, -k_y) \in WF(\Lambda)$ también lo está $(y_1, y_2, k_{y_1}, k_{y_2})$ si $(y, k_y) \sim (y_1, k_{y_1})$ y $(y, -k_y) \sim (y_2, k_{y_2})$. Ahora, para puntos y_1, y_2 cercanos a S^0 sobre la geodésica nula que une y con S^0 , se cumple μSC por hipótesis y eso implica que $(y_1, y_2, k_{y_1}, k_{y_2}) \in WF(\Lambda)$ sólo si $(y_1, y_2, k_{y_1}, k_{y_2}) \in \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-$. Finalmente concluimos que $(y, y, k_y, -k_y) \in WF(\Lambda)$ sólo si $(y, y, k_y, -k_y) \in \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-$ (ver figura 6), lo cual prueba la inclusión esperada para los elementos del $WF(\Lambda)$ en este caso. Así concluye la prueba de que $WF(\Lambda) \cap I^- = \emptyset$ y por lo tanto se cumple μSC en M . \square

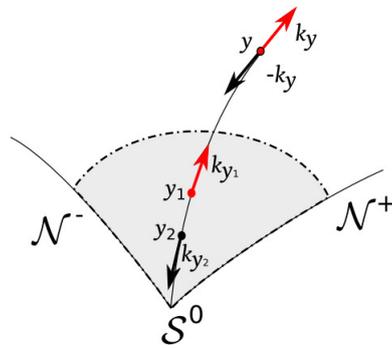


Figura 6: Esquema que muestra cómo el WF de la función de dos puntos cerca de la superficie S^0 (zona punteada del esquema) determina el WF de puntos lejos de ese entorno (aquí el punto y).

7.5 RESUMEN

Hemos propuesto una cuantización de datos iniciales para el campo de K-G en espacio tiempo plano (sobre la hipersuperficie N) y hemos mostrado que un subconjunto de los operadores fundamentales, los de la forma $\Omega_N(\widehat{K_N E f}, \cdot)$, reproducen la cuantización usual del campo de K-G en M (el interior del dominio de dependencia de N). También hemos probado que el conjunto de operadores fundamentales incluidos en la cuantización, es decir $\Omega_N(\widehat{K_N \phi}, \cdot)$ con $\phi \in \mathcal{S}_N$, representan a todos los operadores de campo promediados sobre N que pueden incluirse en esta cuantización Fock. También hemos mostrado explícitamente que se cumplen las condiciones *cuasi-libre* y *Hadamard*. Luego hemos utilizado esta cuantización para construir una cuantización de datos iniciales de un problema análogo en espacio-tiempo curvo. La relación con la teoría en espacio-tiempo curvo nos

ha permitido probar que la cuantización hereda muchas de las propiedades, incluida la propiedad cuasi-libre. Como último punto del capítulo, hemos estudiado la función de correlación de dos puntos (Λ) , para demostrar que cumple la condición μSC , la cual es equivalente a la condición Hadamard. Agregando una hipótesis adicional sobre el comportamiento de Λ cerca de la superficie S^0 hemos demostrado que se cumple μSC . Teniendo las propiedades *cuasi-libre* y *Hadamard*, el teorema de Verch asegura que nuestra cuantización es cuasi-equivalente a cualquier otra cuantización que también posea estas propiedades.

CONCLUSIONES

GENERALES

En este trabajo hemos estudiado el problema de la cuantización de datos iniciales para el campo de Klein-Gordon sobre la hipersuperficie \mathcal{N} formada por dos ramas nulas (\mathcal{N}^+ y \mathcal{N}^-). Para el análisis de este problema nos hemos enfocado en los observables $\Omega(\psi, \cdot)$ con ψ un dato de prueba sobre \mathcal{N} y Ω la forma simpléctica. En base a estos observables hemos propuesto una cuantización Fock de los datos iniciales y la hemos interpretado, desde el punto de vista de la teoría algebraica de campos, como una construcción GNS en base a un estado cuasi-libre. También hemos estudiado la propiedad Hadamard y logrado demostrar que la misma se cumple bajo ciertas hipótesis. Esto le confiere a nuestra cuantización propiedades suficientes para poder definir el valor esperado del tensor stress-energía del campo escalar y también para incorporar (de forma perturbativa) interacciones del campo escalar. Además muestra que la cuantización es única en el sentido de que cualquier otra cuantización con vacío cuasi-libre y Hadamard presenta los mismos valores esperados de observables contruidos a partir del campo.

La cuantización sobre la geometría que hemos elegido no ha sido estudiada en la literatura, aunque algunas líneas similares se desarrollan en el trabajo de Moretti [29]. Allí se estudia la cuantización del campo de K-G sobre una superficie nula, pero no aparece un “doble” similar al que presenta nuestra geometría en la superficie $S^0 = \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-$.

TEORÍA EN ESPACIO-TIEMPO PLANO

Como paso previo a la propuesta de cuantización en espacio tiempo-curvo hemos desarrollado una cuantización en espacio tiempo plano, con datos sobre una hipersuperficie no acotada N . Para esta cuantización hemos encontrado varios resultados que fortalecen nuestro modelo.

En primer lugar vale aclarar que nuestra cuantización sólo incluye promedios sobre N de datos iniciales ϕ del campo que se pueden expresar de la forma $\Omega(\psi, \phi)$, donde ψ es un dato de prueba en un cierto conjunto. Limitar la cuantización a estos promedios simplécticos en vez de incluir cualquier promedio de datos iniciales puede parecer arbitrario, pero hemos demostrado que esta cuantización no puede ser extendida para incluir los promedios de datos iniciales ex-

cludidos. Además mostramos que dicha exclusión no impacta sobre la capacidad de nuestra teoría para describir el campo en M . La razón es que todos los operadores de campo promediado $\widehat{\phi}(f)$ de la cuantización usual del campo de $K-G$ en M pueden ser escritos en la forma $\widehat{\Omega}(Ef, \cdot)$ (aquí Ef es la resta de las soluciones avanzada y retardada de la ecuación de $K-G$ con fuente f) y estos operadores están incluidos en nuestra cuantización. También discutimos que los promedios simplécticos son insensibles a los llamados *modos cero*, que son datos iniciales para ondas de choque que se propagan por la superficie N , pero sin llegar al interior M de su dominio de dependencia. Esta no cuantización de los modos cero va en la misma línea de la propuesta de Ullrich [36] para el tratamiento del problema análogo en el área de *Light Front Quantization*, donde se estudia la cuantización de datos iniciales sobre un sólo hiperplano nulo (en espacio-tiempo plano).

Finalmente hemos mostrado que se cumple la propiedad Hadamard para la función de correlación de dos puntos. Esta es una consecuencia directa de que nuestra cuantización coincide con la cuantización usual del campo escalar en M .

TEORÍA EN ESPACIO-TIEMPO CURVO

Para construir la cuantización en espacio-tiempo curvo hemos introducido un mapa α que lleva datos iniciales en la hipersuperficie \mathcal{N} a datos iniciales en la hipersuperficie N . Con este mapa hemos podido utilizar la misma estructura de espacio de Fock y de operadores fundamentales $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$ de la cuantización en espacio de Minkowski. De esta manera hemos demostrado que la teoría en espacio-tiempo curvo hereda varias de las propiedades de la teoría en espacio-tiempo plano. Entre ellas, las relaciones de conmutación para los operadores fundamentales y el hecho de ser una construcción GNS en base a un estado cuasi-libre. La dificultad mayor se ha presentado para demostrar la propiedad Hadamard. Para lograrlo hemos incluido una hipótesis extra: que la condición Hadamard se cumple en un entorno de $S^0 = \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-$ (la intersección entre las dos ramas de \mathcal{N}). Agregando esta hipótesis hemos demostrado la llamada Condición Espectral Microlocal. Esta es una condición equivalente a la condición Hadamard, pero es más transparente en cuanto a su contenido: probar esta condición significa probar que se cumple (localmente) la condición de positividad de la energía.

PERSPECTIVAS

El aspecto más importante de este modelo que aún queda por investigar es la hipótesis extra para la prueba de la condición Hadamard.

Una posible línea de acción en este sentido sería buscar una condición sobre el mapa α que asegure el cumplimiento de la condición μSC en un entorno de S^0 . Sabemos que esta estrategia funciona en un caso en particular, pues en el espacio de Minkowski un mapa α que se reduzca a la identidad en un entorno de S^0 cumple esta condición. Esta perspectiva nos alienta a pensar que la estrategia puede funcionar en general. Un primer paso en esta dirección sería estudiar estas condiciones en espacio-tiempos con alto grado de simetría, como De-Sitter o anti De-Sitter.

Más allá de este problema, nuestro modelo puede ser extendido para describir otros campos libres. Por ejemplo, podríamos intentar describir el campo gravitatorio linealizado, lo cual nos acercaría a una cuantización de datos iniciales nulos para la gravedad, conectando así con el trabajo de Reisenberger [32], que dio origen a esta tesis.

Parte III

APÉNDICES

Uno de los aspectos importantes de la formalización de la Teoría Cuántica de Campos es dar cuenta de la naturaleza distribucional de los operadores de campo $\hat{\phi}(x)$.

Definir un operador que actúa en el espacio de Hilbert en cada punto del espacio-tiempo parece la idea más natural e inmediata para cuantizar un campo $\phi(x)$, pero trae consigo importantes problemas matemáticos y también problemas conceptuales asociados a la posibilidad de realizar una medición de tales observables “puntuales”.

Estos problemas se resuelven definiendo a los operadores fundamentales como distribuciones, es decir como operadores cuya acción queda definida cuando se “promedia” sobre funciones suaves del espacio-tiempo. A estas se las denomina *funciones de prueba*, pues la acción del operador queda determinada cuando se define sobre todas ellas.

En términos más estrictos, los campos cuánticos se definen como mapas de un cierto espacio de funciones de prueba \mathcal{T} a operadores en un espacio de Hilbert que son continuos en un cierto sentido. Por razones de simplicidad en este apéndice discutiremos las propiedades de distribuciones que son mapas de las funciones de prueba de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} . Esto no representara una simplificación excesiva ya que la sustitución de \mathbb{C} por otros espacios normados no presenta ninguna dificultad importante.

Para el lector interesado en ampliar estas ideas, todo este apéndice esta desarrollado en los primeros capítulos de Hörmander [23].

A.1 DEFINICIONES BÁSICAS.

Las distribuciones son una extensión de la idea de función que permite definir operaciones como la derivación, convolución y TF para funciones discontinuas como la función escalón de Heaviside o incluso algunas que no tienen un valor definido en un punto como la delta de Dirac. La observación clave para este desarrollo es que la integración es una operación mucho más robusta que la derivación ya que puede definirse para una clase mucho más amplia de funciones. Por ejemplo, para la función discontinua de Heaviside ($H(x > 0) = 1, H(x < 0) = 0$) no se puede definir la derivada usual en el punto $x = 0$, pero si se puede definir la integración de dicha función multiplicada por una función suave f de la forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)H(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Esta integral toma valores reales si el soporte de f (clausura de los puntos donde $f \neq 0$) es acotado y nos permite definir una funcional lineal $H(f) = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ que asocia un real a cada función suave y de soporte compacto.

Definición A.1. Llamamos $C_0^\infty(X)$ al conjunto de funciones C^∞ con soporte en $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definición A.2. Decimos que u es una distribución sobre un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ si es una funcional lineal $u : C_0^\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}$ y cumple que dado cualquier compacto $K \subset X$ existen constantes k, C para los cuales:

$$|u(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha f| \text{ con } f \in C_0^\infty(K)$$

donde α representa un multi-índice, es decir un conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, ∂^α representa $\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$. La cota implica que $u(f)$ es continuo en su argumento para una cierta topología sobre $C_0^\infty(X)$.

NOTACIÓN: Al conjunto de las distribuciones reales en X se lo denomina $\mathcal{D}'(X, \mathbb{C})$ aunque en el resto del apéndice utilizaremos la notación $\mathcal{D}'(X)$ en su lugar pues trataremos siempre con distribuciones $u : C_0^\infty \rightarrow \mathbb{C}$. El mismo tratamiento puede darse para distribuciones sobre otros espacios vectoriales topológicos, por ejemplo en el cuerpo de la tesis consideraremos distribuciones cuyos valores son operadores en espacios de Hilbert. El nombre $\mathcal{D}'(X)$ para identificar al conjunto de distribuciones se debe a que el espacio de funciones de prueba correspondiente $C_0^\infty(X)$ a menudo es denominado $\mathcal{D}(X)$.

De la definición de distribución se desprende que cualquier función g integrable en compactos de X tiene una distribución asociada $g \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C})$ definida por

$$g(f) = \int_X g f dx, \text{ con } f \in C_0^\infty(X). \quad (\text{A.1.1})$$

Esta identificación nos proporciona un punto de partida para extender nociones de los espacios de funciones a las distribuciones, como veremos inmediatamente.

Definición A.3. La restricción de $u \in \mathcal{D}'(X)$ al conjunto abierto $Y \subset X$ es la distribución $u_Y : C_0^\infty(Y) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $u_Y(f) = u(f)$ con $f \in C_0^\infty(Y) \subset C_0^\infty(X)$.

Definición A.4. El soporte de $u \in \mathcal{D}'(X)$ es el conjunto $\text{supp}(u) \subset X$ de puntos que NO poseen un entorno V_x para el cual $u_{V_x} = 0$.

Definición A.5. Con las definiciones anteriores podemos definir el soporte singular de $u \in \mathcal{D}'(X)$, abreviado $\text{singsupp}(u)$, como el conjunto de puntos que NO poseen un entorno abierto V_x en el cual $(u - \varphi)_{V_x} = 0$ para alguna función $\varphi \in C^\infty$.

Esta última definición abarca entonces a todos los puntos de X en los cuales la distribución no se comporta como una función suave y donde la identificación A.1.1 pasa a ser únicamente formal.

Dentro del conjunto de distribuciones, hay un subespacio de distribuciones con soporte compacto en X al que llamaremos $\mathcal{E}'(X)$. Para ellas se puede extender el espacio de funciones de prueba al conjunto de funciones C^∞ .

A.2 OPERACIONES

Extendiendo la idea de las operaciones en espacios de funciones y haciendo uso de A.1.1 podemos definir operaciones sobre las distribuciones. En todos los casos partimos de las propiedades de funciones $g \in C^\infty(X)$ vistas como un subespacio de distribuciones actuando sobre funciones de prueba $f \in C_0^\infty(X)$ y luego extendemos las operaciones a distribuciones genéricas $u \in \mathcal{D}'(X)$, con $X \subset \mathbb{R}^n$.

PRODUCTO POR FUNCIONES SUAVES:

De manera obvia se extiende el producto de funciones hg con $h \in C^\infty$ ya que para todo $f \in C_0^\infty(X)$

$$\int_X [gh] f d^n x = \int_X [hf] d^n x \text{ donde } hf \in C_0^\infty(X).$$

Por lo tanto la extensión natural es

$$hu(f) = u(hf)$$

DERIVACIÓN:

Integrando por partes se obtiene

$$\int_X \partial_i g f d^n x = - \int_X g \partial_i f d^n x$$

ya que $f \in C_0^\infty(X)$ es cero en el borde de X .

En base a esto se extiende la noción de derivación para $u \in \mathcal{D}'(X)$ mediante

$$\partial_i u(f) = -u(\partial_i f) \text{ para todo } f \in C_0^\infty(X).$$

El ejemplo típico de derivación es el de la conocida relación entre la función escalón de Heaviside $\theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ y la distribución delta de Dirac definida como $\delta(f) = f(0)$. Según la definición

$$\frac{d\theta}{dx}(f) = -\theta\left(\frac{df}{dx}\right) = -\int_0^\infty \frac{df}{dx} dx = -[f(\infty) - f(0)] = f(0)$$

con lo cual $\frac{d\theta}{dx} = \delta$.

CONVOLUCIÓN DE UNA FUNCIÓN Y UNA DISTRIBUCIÓN:

La convolución de funciones se define con

$$[g * f](y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(y-x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)f(x)d^n x = [f * g](y)$$

suponiendo que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es inmediato definir

$$[u * f](y) = u(f_y) \text{ con } f_y(x) = f(y-x)$$

Se puede probar (teorema 4.1.2 de Hörmander [23]) que esta operación cumple la propiedad

$$(u * f) * h = u * (f * h) \quad (\text{A.2.1})$$

si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $f, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

CONVOLUCIÓN DE DISTRIBUCIONES:

Dadas dos distribuciones $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ no existe una única forma de definir su convolución. Pero si se exige que una de ellas tenga soporte compacto y que se cumpla A.2.1, es decir

$$(u_1 * u_2) * f = u_1 * (u_2 * f) \text{ para toda } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

entonces existe una única distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que se ajusta a la definición $u = (u_1 * u_2)$.

Un aspecto importante sobre la convolución de distribuciones es el de la relación de su soporte con el de las distribuciones convolucionadas. Con respecto a esto se cumple que:

- $\text{supp}(u_1 * u_2) \subset \text{supp}(u_1) + \text{supp}(u_2)$
- $\text{singsupp}(u_1 * u_2) \subset \text{singsupp}(u_1) + \text{singsupp}(u_2)$

donde + indica la suma de los elementos de los conjuntos como vectores de \mathbb{R}^n .

PRODUCTO TENSORIAL:

A partir de dos funciones $g_1 \in C^\infty(X_1)$ y $g_2 \in C^\infty(X_2)$, con $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $X_2 \subset \mathbb{R}^m$, se puede definir el producto tensorial $g_1 \otimes g_2 \in C^\infty(X_1 \times X_2)$ mediante

$$[g_1 \otimes g_2](x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$$

Para extender esta noción a distribuciones entonces se puede integrar dicho producto con la función $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$ obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} [g_1 \otimes g_2](x_1, x_2) [f_1 \otimes f_2](x_1, x_2) d^n x_1 d^m x_2 &= \\ &= \int_{X_1} g_1 f_1 d^n x_1 \int_{X_2} g_2 f_2 d^m x_2 \end{aligned}$$

Esto lleva a la definición:

$$[u_1 \otimes u_2](f_1 \otimes f_2) = u_1(f_1) u_2(f_2)$$

para distribuciones $u_1 \in \mathcal{D}'(X_1)$ y $u_2 \in \mathcal{D}'(X_2)$.

Teorema A.1. (del Kernel de Schwartz)

Recíprocamente a la definición anterior se puede partir de una distribución $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ y obtener una distribución naturalmente asociada a K en X_1 o X_2 . La idea parte de observar que, a partir de una función continua $K(x_1, x_2) \in C(X_1 \times X_2)$, se obtiene un mapa $\mathcal{K} : C_0^\infty(X_2) \rightarrow C(X_1)$ dado por

$$\mathcal{K}f_2(x_1) = \int_{X_2} K(x_1, x_2) f_2(x_2) d^m x_2 \quad \text{para todo } f_2 \in C_0^\infty(X_2), x_1 \in X_1.$$

Luego, vistos como distribuciones,

$$\mathcal{K}f_2(f_1) = \int_{X_1} \mathcal{K}f_2(x_1) f_1(x_1) d^n x_1 = K(f_1 \otimes f_2).$$

El teorema del kernel de Schwartz extiende la relación entre K y \mathcal{K} a distribuciones. El mismo dice que para cada $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ existe un único mapa $\mathcal{K} : C_0^\infty(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ lineal y continuo que cumple

$$\mathcal{K}f_2(f_1) = K(f_1 \otimes f_2) \quad \text{para todo } f_1 \in C_0^\infty(X_1) \text{ y } f_2 \in C_0^\infty(X_2).$$

y también que se cumple el recíproco. Para cada mapa $\mathcal{K} : C_0^\infty(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ lineal y continuo la relación anterior define una distribución $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$.

COMPOSICIÓN CON FUNCIONES SUAVES:

Dada una función $F : X_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X_2 \subset \mathbb{R}^m$ que sea C^∞ y con diferencial sobreyectivo existe un único mapa lineal

$F^* : \mathcal{D}'(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ tal que, restringido a funciones continuas, F^* se reduce a la composición de u con F :

$$F^*u = u \circ F.$$

Decimos que F^*u es el *pullback* de u por F y es una noción muy importante, pues es la que se utiliza para extender la definición de distribución a variedades diferenciables. En la sección 5.4 presentamos una generalización de este resultado que no exige que el mapa sea sobreyectivo.

A.3 TRANSFORMADA DE FOURIER

Una de las virtudes más importantes de la teoría de distribuciones es el marco sólido que aporta para definir la TF, ya que para muchas funciones no existe una noción correcta de su TF como mapa entre espacios de funciones. En cambio, todas las distribuciones temperadas (las cuales definimos a continuación) tienen TF bien definida.

Para una función integrable $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define su TF

$$\tilde{f}(k) = \int e^{-i\langle x, k \rangle} f(x) d^n x$$

donde $\langle x, k \rangle$ es el producto interno en \mathbb{R}^n

Para el caso de que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene una fórmula de inversión dada por

$$f(x) = \int e^{i\langle x, k \rangle} \tilde{f}(k) d^n k$$

donde $d^n k = \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$

Distribuciones temperadas

Para extender esta noción a distribuciones, primero hay que definir un nuevo espacio de funciones de prueba $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que consiste en funciones $f \in C^\infty$ para las cuales

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta f| < \infty \text{ para cualquier par de multi-índices } \alpha, \beta.$$

Estas funciones de prueba son integrables y el conjunto \mathcal{S} es mapeado a si mismo por la TF. Además, para estas funciones, la TF tiene las propiedades conocidas:

$$\int \tilde{f} g d^n x = \int f \tilde{g} d^n x \quad (\text{A.3.1})$$

$$\int f \tilde{g} d^n x = \int \tilde{f} \widetilde{\tilde{g}} d\tilde{x}$$

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \tilde{g}$$

$$\widetilde{f g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \tilde{f} * \tilde{g}$$

Definición A.6. A los mapas lineales continuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se los denomina distribuciones *temperadas*. El conjunto de estas distribuciones, al que se denomina $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e incluye, por ejemplo al conjunto $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de distribuciones con soporte compacto. Sobre dicho espacio se puede definir la TF utilizando la propiedad A.3.1, con lo cual

$$\tilde{u}(f) = u(\tilde{f}) \text{ con } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ y } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Teorema A.2. (7.1.14 de [23])

Para distribuciones de soporte compacto $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ la TF es la función C^∞

$$\tilde{u}(k) = u\left(e^{-i\langle \cdot, k \rangle}\right)$$

donde el punto representa la variable sobre la que actúa u .

Nótese que, de la definición de distribución, se desprende que $\tilde{u}(k)$ es una función suave que no crece más rápido que una cierta potencia de k cuando $k \rightarrow \infty$.

ESPACIOS DE HILBERT Y ÁLGEBRAS DE OPERADORES

En este apéndice introducimos el lenguaje mínimo de los dos escenarios matemáticos donde se desarrollan las Teorías Cuánticas en esta tesis. Por un lado la construcción de un espacio de estados (espacio de Fock) con la estructura de espacio de Hilbert y un conjunto de operadores sobre dicho espacio. Por otro la formulación algebraica que describe un álgebra de operadores e incorpora a los estados como funciones lineales sobre dicha álgebra.

B.1 ESPACIOS DE HILBERT

Definición B.1. Un espacio de Hilbert (\mathcal{H}) es un espacio vectorial complejo con producto interno que es un espacio de Banach con respecto a la norma inducida por el producto interno.

Dentro de esta definición aparecen varias nociones que vale la pena repasar brevemente:

- Dado un espacio vectorial V complejo, un producto interno es un mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ lineal en la segunda variable y que cumple $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle \forall v_1, v_2 \in V$ (y por tanto antilineal en la primera variable) y que $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$ para todo $v_1 \neq 0$.
- Todo producto interno induce una norma en V definida como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
- Una sucesión $\{v_i\}$ en V se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $\|v_n - v_m\| < \varepsilon \forall n, m > N$.
- Un espacio con una norma en el cual toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de V se dice completo en dicha norma y se llama *espacio de Banach*.

Si bien no todo espacio con producto interno es completo en la norma inducida, siempre se puede construir un espacio de Hilbert por un proceso conocido como *completar el espacio*. Este proceso tiene tres pasos:

1. Se define una distancia entre sucesiones de Cauchy $\{v_n\}$ y $\{w_n\}$ de la forma

$$\|\{v_n\} - \{w_n\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - w_n\|$$

2. Dado que pueden haber muchas sucesiones diferentes a distancia cero se transforma la operación anterior considerando las clases de equivalencia de distancia cero de sucesiones de Cauchy en vez de las sucesiones en sí.
3. Cada punto del nuevo espacio (de Hilbert) se identifica con una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy del paso 2. El producto interno se define como $\langle \{v_n\}, \{w_n\} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, w_n \rangle$ donde v_n y w_n son representantes cualquiera de su clase de equivalencia.

Por este procedimiento obtenemos un espacio vectorial que contiene al espacio original V como subconjunto denso y a todos los límites de sucesiones de Cauchy.

B.1.1 Algunas construcciones a partir de un espacio de Hilbert

Hay varios espacios útiles que se construyen a partir de un espacio de Hilbert y que intervienen en la formulación de teorías cuánticas. Los principales son:

EL ESPACIO COMPLEJO CONJUGADO $\overline{\mathcal{H}}$: A partir de la operación producto por escalar $\times : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se define una nueva operación $\bar{\times} : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mediante $c \bar{\times} v = \bar{c} \times v$ con $c \in \mathbb{C}, v \in \mathcal{H}$ y entonces el mismo conjunto de elementos con la nueva operación producto es un nuevo espacio vectorial $\overline{\mathcal{H}}$.

Dado que el nuevo espacio tiene los mismos elementos que \mathcal{H} existe una correspondencia natural entre cualquier $v \in \mathcal{H}$ y el mismo elemento en $\overline{\mathcal{H}}$, que llamaremos \bar{v} para especificar que se trata de otro espacio vectorial.

Con esta identificación, en $\overline{\mathcal{H}}$ se define inmediatamente un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{\mathcal{H}}}$ mediante $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}}$

EL ESPACIO DUAL \mathcal{H}^* : El espacio dual es el conjunto de todos los mapas lineales y acotados¹ de \mathcal{H} en \mathbb{C} . Se trata de un espacio vectorial y en el caso específico de los espacios de Hilbert (por el lema de Reisz) existe la siguiente equivalencia:

Dado un elemento $v^* \in \mathcal{H}^*$ existe un único $v \in \mathcal{H}$ tal que $v^*(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$. De este modo \mathcal{H} y \mathcal{H}^* resultan isomorfos.

OPERADOR ADJUNTO: También se desprende del lema de Reisz que todo mapa acotado $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ entre espacios de Hilbert tiene un adjunto $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ que cumple $\langle w, Av \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle A^*w, v \rangle_{\mathcal{H}_1}$ para cualquier $v \in \mathcal{H}_1, w \in \mathcal{H}_2$.

¹ Un mapa entre espacio normados $f : V \rightarrow W$ se dice acotado si $\forall v \in V \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(v)\|_W \leq c \|v\|_V$

SUMA DIRECTA: A partir del producto cartesiano $\times_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$ de una colección de espacios de Hilbert comenzamos definiendo el espacio $V \subset \times_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$ formado por elementos $v = (v_1, v_2, \dots)$ con sólo una cantidad finita de v_{α} diferentes de cero.

Se define la suma directa $\oplus_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$ como el espacio V completado en la norma inducida por el producto interno $\langle v, w \rangle_V = \sum_{\alpha} \langle v_{\alpha}, w_{\alpha} \rangle_{\mathcal{H}_{\alpha}}$.

PRODUCTO TENSORIAL: Dados dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 se puede definir el espacio W de todos los mapas lineales $A : \overline{\mathcal{H}_1} \rightarrow \mathcal{H}_2$ cuyo rango es un subespacio de dimensión finita de \mathcal{H}_2 . Luego W es un espacio vectorial con un producto interno definido por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^*B)$.

El producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es el espacio V completado en la norma inducida por este producto interno. Usando el lema de Reisz también puede verse como el conjunto de los mapas bilineales $\alpha : \overline{\mathcal{H}_1} \times \overline{\mathcal{H}_2} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

$\sum_{i,j} |\alpha(e_i^1, e_j^2)|^2 < \infty$ donde $\{e_i^1\}$ es una base ortonormal de $\overline{\mathcal{H}_1}$ y $\{e_i^2\}$ es una base ortonormal de $\overline{\mathcal{H}_2}$.

La definición se extiende naturalmente al producto de un número finito de espacios de Hilbert como el conjunto de los mapas $\alpha : \overline{\mathcal{H}_1} \times \dots \times \overline{\mathcal{H}_n} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen $\sum_{i_1, \dots, i_n} |\alpha(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_n}^n)|^2 < \infty$

ESPACIO DE FOCK: Un espacio de Fock es un espacio de Hilbert construido a partir de otro espacio de Hilbert \mathcal{H} mediante $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\otimes} \mathcal{H}$, definiendo $\binom{0}{\otimes} \mathcal{H} = \mathbb{C}$.

En física es usual definir dos tipos especiales de espacios de Fock, utilizados para describir campos de bosones o fermiones. Estos son:

- Espacio de Fock simétrico $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\otimes_s} \mathcal{H}$ donde el producto tensorial simétrico $\binom{n}{\otimes_s}$ sólo admite mapas α simétricos en las n variables.
- Espacio de Fock antisimétrico $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\otimes_a} \mathcal{H}$ donde el producto tensorial antisimétrico $\binom{n}{\otimes_a}$ sólo admite mapas α antisimétricos en las n variables.

NOTACIÓN DE ÍNDICES ABSTRACTOS: Es usual utilizar una notación simplificada, con índices abstractos para los elementos de los diferentes espacios asociados a los espacios de Hilbert. Partimos de la notación v^a para los elementos de \mathcal{H} y entonces llamamos:

- v_a al correspondiente elemento en \mathcal{H}^* por el lema de Reisz

- \bar{v}_a al correspondiente elemento en $\overline{\mathcal{H}}$ por la correspondencia natural entre ellos
- \bar{v}^a al elemento de $\overline{\mathcal{H}}^*$

Esta notación permite escribir fácilmente a los elementos del producto tensorial $\otimes^n \mathcal{H}$ como $v^{a_1 \dots a_n}$, a los de $\otimes_s^n \mathcal{H}$ como $v^{(a_1 \dots a_n)}$ y a los de $\otimes_a^n \mathcal{H}$ como $v^{[a_1 \dots a_n]}$ donde $()$ y $[]$ representan la simetrización y antisimetrización de índices respectivamente.

También da una forma muy cómoda de escribir el producto interno como $\langle v, w \rangle = \bar{v}_a w^a$, muy similar a la notación de Einstein.²

OPERADORES DE CREACIÓN Y ANIQUILACIÓN EN $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$: Existe un conjunto de operadores lineales sobre espacios de Fock, que son muy útiles en la construcción de Teorías cuánticas, conocidos como operadores de creación y aniquilación.

Para cada elemento $\zeta^a \in \mathcal{H}$ se definen la acción de dichos operadores de aniquilación y creación respectivamente sobre un elemento $|\Psi\rangle = (\psi_0, \psi^a, \psi^{a_1 a_2}, \dots) \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ mediante:

$$\hat{a}(\bar{\zeta}) |\Psi\rangle = (\bar{\zeta}_a \psi^a, \sqrt{2} \bar{\zeta}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \bar{\zeta}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots)$$

$$\hat{a}^*(\zeta) |\Psi\rangle = (0, \psi_0 \zeta^a, \sqrt{2} \zeta^{(a} \psi^{a_1)}, \sqrt{3} \zeta^{(a} \psi^{a_1 a_2)}, \dots)$$

y asumimos que sus dominios se restringen a los subespacios de $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ en los cuales las imágenes $\hat{a}(\bar{\zeta}) |\Psi\rangle$ y $\hat{a}(\zeta)^* |\Psi\rangle$ de cualquier vector $|\Psi\rangle$ tienen norma finita. Con esta restricción las propiedades importantes de estos operadores son:

- $\hat{a}(\bar{\zeta}) |\Psi\rangle = 0 \forall \zeta \in \mathcal{H} \iff |\Psi\rangle = (\psi_0, 0, \dots)$.

El estado normalizado $|0\rangle = (1, 0, 0, \dots)$ se llama el *vacío* del espacio de Fock y el hecho de ser aniquilado por todos los operadores de aniquilación, lo identifica (módulo una fase).

- $\hat{a}^*(\zeta)$ es el adjunto de $\hat{a}(\bar{\zeta})$

Corroboremos que se cumple la propiedad

$$\langle \Psi_2, \hat{a}(\bar{\zeta}) \Psi_1 \rangle_{\mathcal{F}_s} = \langle \hat{a}^*(\zeta) \Psi_2, \Psi_1 \rangle_{\mathcal{F}_s}:$$

Comenzamos calculando $\langle \Psi_2, \hat{a}(\bar{\zeta}) \Psi_1 \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \left\langle (\psi_{20}, \psi_2^a, \psi_2^{a_1 a_2}, \dots), (\bar{\zeta}_a \psi_1^a, \sqrt{2} \bar{\zeta}_a \psi_1^{a a_1}, \sqrt{3} \bar{\zeta}_a \psi_1^{a a_1 a_2}, \dots) \right\rangle = \\ &= \bar{\psi}_{20} \bar{\zeta}_a \psi_1^a + \sqrt{2} \bar{\psi}_{2a_1} \bar{\zeta}_a \psi_1^{a a_1} + \sqrt{3} \bar{\psi}_{2a_1 a_2} \bar{\zeta}_a \psi_1^{a a_1 a_2} + \dots \end{aligned}$$

² Los *índice abstractos* son índices que marcan las entradas de un tensor, visto como un mapa multilineal. Cuando un índice se repite esto significa que las correspondientes entradas del tensor están contraídas, lo cual se asemeja a la convención de la suma de Einstein para índices comunes. A diferencia de los índices comunes los abstractos no toman valores ni se suman, son simplemente marcadores de entradas.

$$\begin{aligned}
 & \text{Por otro lado } \langle \widehat{a}^* (\bar{\xi}) \Psi_2, \Psi_1 \rangle = \\
 & = \left\langle \left(0, \psi_{20} \bar{\xi}^a, \sqrt{2} \bar{\xi}^a \psi_2^{a_1}, \sqrt{3} \bar{\xi}^a \psi_2^{a_1 a_2}, \dots \right), \left(\psi_{10}, \psi_1^a, \psi_1^{a_1 a_2}, \dots \right) \right\rangle = \\
 & = 0 + \bar{\psi}_{20} \bar{\xi}^a \psi_1^a + \sqrt{2} \bar{\xi}^a \bar{\psi}_{2a_1} \psi_1^{a a_1} + \dots
 \end{aligned}$$

Finalmente los sumandos coinciden término a término.

- Los operadores de creación y aniquilación cumplen las siguientes relaciones de conmutación:
 - $[\widehat{a} (\bar{\xi}), \widehat{a} (\bar{\eta})] = 0$
 - $[\widehat{a}^* (\xi), \widehat{a}^* (\eta)] = 0$
 - $[\widehat{a} (\bar{\xi}), \widehat{a}^* (\eta)] = \langle \bar{\xi}, \eta \rangle \widehat{Id}$

En todas las relaciones, la simetrización juega un papel importante. Veamos la primera relación (la segunda es similar):

$$\begin{aligned}
 & \widehat{a} (\bar{\xi}) \widehat{a} (\bar{\eta}) |\Psi\rangle - \widehat{a} (\bar{\eta}) \widehat{a} (\bar{\xi}) |\Psi\rangle = \\
 & = \widehat{a} (\bar{\xi}) \left(\bar{\eta}_a \psi^a, \sqrt{2} \bar{\eta}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \bar{\eta}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots \right) - \\
 & - \widehat{a} (\bar{\eta}) \left(\bar{\xi}_a \psi^a, \sqrt{2} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots \right) = \\
 & = \left(\sqrt{2} \bar{\xi}_{a_1} \bar{\eta}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \cdot 2 \bar{\xi}_{a_1} \bar{\eta}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots \right) - \left(\sqrt{2} \bar{\eta}_{a_1} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \cdot 2 \bar{\eta}_{a_1} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots \right) = \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Por otro lado la tercera relación

$$\begin{aligned}
 & \widehat{a} (\bar{\xi}) \widehat{a}^* (\eta) |\Psi\rangle - \widehat{a}^* (\eta) \widehat{a} (\bar{\xi}) |\Psi\rangle = \\
 & = \widehat{a} (\bar{\xi}) \left(0, \psi_0 \eta^a, \sqrt{2} \eta^a \psi^{a_1}, \sqrt{3} \eta^a \psi^{a_1 a_2}, \dots \right) - \\
 & - \widehat{a}^* (\eta) \left(\bar{\xi}_a \psi^a, \sqrt{2} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1}, \sqrt{3} \bar{\xi}_a \psi^{a a_1 a_2}, \dots \right) = \\
 & = \left(\psi_0 \bar{\xi}_a \eta^a, 2 \bar{\xi}_a \eta^a \psi^{a_1}, 3 \bar{\xi}_a \eta^a \psi^{a_1 a_2}, \dots \right) - \left(0, \bar{\xi}_a \psi^a \eta^{a_1}, 2 \bar{\xi}_a \psi^a \eta^{a_1 a_2}, \dots \right) = \\
 & = \bar{\xi}_a \eta^a (\psi_0, \psi^{a_1}, \psi^{a_1 a_2}, \dots)
 \end{aligned}$$

B.2 ÁLGEBRAS DE OPERADORES

Esta parte del apéndice está basado en la sección III.2.1 de Haag [18].

Definición B.2. Un álgebra sobre un espacio de Hilbert \mathcal{F} es un subconjunto \mathcal{A} de operadores acotados sobre \mathcal{F} que cumple:

- $c_1 A + c_2 B \in \mathcal{A}$
- $AB \in \mathcal{A}$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y $A, B \in \mathcal{A}$

Si un álgebra incluye los adjuntos de todos sus elementos entonces se denomina *-álgebra.

TOPOLOGÍAS: Una noción importante que se puede definir en un álgebra es la de topología, es decir un forma de determinar entornos. En las álgebras de operadores hay varias topologías útiles.

La más evidente es la *topología uniforme*, la cual se obtiene introduciendo la norma uniforme $\|A\|_{\mathcal{A}} = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{\|Av\|_{\mathcal{F}}}{\|v\|_{\mathcal{F}}}$ y definiendo el entorno de $A \in \mathcal{A}$ con radio ε como el conjunto de los operadores $B \in \mathcal{A}$ que cumplen $\|A - B\| < \varepsilon$.

PROPIEDADES: Los operadores acotados en un *-álgebra \mathcal{A} con la norma uniforme cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \|cA\| &= |c| \|A\| \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \cdot \|B\| \\ \|A^*A\| &= \|A\|^2 \end{aligned}$$

para todo $c \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{A}$

Las primeras tres propiedades son obvias, pero vale la pena demostrar la última.

En primer lugar $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$ y $\|AA^*\| \leq \|A\| \|A^*\|$ usando que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Entonces es inmediato que $\|A^*A\| \|AA^*\| \leq \|A^*\|^2 \|A\|^2$. Por otro lado

$$\|A\|^2 = \sup_{|\phi\rangle \in \mathcal{F}} \frac{\|A|\phi\rangle\|_{\mathcal{F}}^2}{\|\phi\|_{\mathcal{F}}^2} = \sup_{|\phi\rangle \in \mathcal{F}} \frac{|\langle \phi | A^*A | \phi \rangle|}{\|\phi\|_{\mathcal{F}}^2} \leq \sup_{|\phi\rangle \in \mathcal{F}} \frac{\|\phi\|_{\mathcal{F}} \|A^*A|\phi\rangle\|_{\mathcal{F}}}{\|\phi\|_{\mathcal{F}}^2} \leq \|A^*A\|$$

y de la misma manera $\|A^*\|^2 \leq \|AA^*\|$. Por estos dos resultados se cumple

$\|A^*\|^2 \|A\|^2 \leq \|A^*A\| \|AA^*\|$ y entonces se debe cumplir $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\| \|A^*\|$. De las desigualdades para $\|A^*\|$ y $\|A\|$ se llega finalmente a que $\|A^*\|^2 = \|A\|^2 = \|A^*A\|$

EJEMPLO IMPORTANTE: Las combinaciones lineales finitas de operadores que cumplen las relaciones de Weyl que presentamos en la sección 4.1 son un *-álgebra dada por:

$$\begin{aligned} \blacksquare \widehat{W(\psi)}^* &= \widehat{W(-\psi)} \\ \blacksquare \widehat{W(\psi_1)} \widehat{W(\psi_2)} &= \exp\left(i \frac{\Omega(\psi_1, \psi_2)}{2}\right) \widehat{W(\psi_1 + \psi_2)} \end{aligned}$$

siendo ψ_1, ψ_2 soluciones de $\mathbb{K}\text{-G}$ y Ω la forma simpléctica.

En primer lugar es evidente que la identidad en esta álgebra es $\widehat{W(0)}$ ya que $\widehat{W(\psi)} \widehat{W(0)} = \widehat{W(0)} \widehat{W(\psi)} = \widehat{W(\psi)}$ y también que se trata de operadores unitarios pues:

$$\begin{aligned} \widehat{W(\psi)} \widehat{W(\psi)}^* &= \widehat{W(\psi)} \widehat{W(-\psi)} = \exp\left(i \frac{\Omega(\psi, -\psi)}{2}\right) \widehat{W(0)} = \widehat{Id} \text{ e} \\ \text{igualmente } \widehat{W(\psi)}^* \widehat{W(\psi)} &= \widehat{Id}. \end{aligned}$$

Por lo tanto su modulo en la norma uniforme resulta

$$\|\widehat{W(\psi)}\|_{\mathcal{A}} = \sup_{v \in \mathcal{F}} \frac{\|\widehat{W(\psi)v}\|_{\mathcal{F}}}{\|v\|_{\mathcal{F}}} = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{\langle v, v \rangle_{\mathcal{F}}^{1/2}}{\|v\|_{\mathcal{F}}} = 1$$

Con este resultado el álgebra de Weyl es un *-álgebra de operadores acotados.

Definición B.3. Un *-álgebra que es cerrada con la topología uniforme se denomina *C*-álgebra*.

Por ejemplo la clausura del álgebra definida por las relaciones de Weyl con la topología uniforme es la C*-álgebra que llamamos *Álgebra de Weyl*.

Además de la topología uniforme existen otras topologías que también son de utilidad. Por ejemplo la *topología fuerte de operadores*, que es la topología generada por los todos los conjuntos de la forma $\|Av - Bv\| < \varepsilon$ por algún $v \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$.

ISOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS:

Definiremos tres tipos de isomorfismos entre *-álgebras \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 .

1. *Isomorfismo algebraico*: se requiere que el mapa conserve la estructura algebraica (suma, producto por escalares, producto y adjunto)
2. *Isomorfismo completo*: isomorfismo algebraico que también conserva la topología
3. *Equivalencia unitaria*: requiere que exista un mapa unitario $V : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ tal que $\mathcal{A}_2 = V\mathcal{A}_1V^{-1}$

ÁLGEBRAS ABSTRACTAS: Si bien los espacios de Hilbert son una base firme sobre la cual construir *-álgebras, el enfoque algebraico de teoría de campos requiere independizarse de los mismos. Esto es posible gracias a que todas las estructuras introducidas hasta ahora requieren de un conjunto de operaciones formales (combinación lineal, producto y adjunto) y de normas o semi-normas que pueden ser impuestas directamente en el álgebra. Esto es lo que se denomina *álgebra abstracta*.

Por ejemplo, \mathcal{A} es una C*-álgebra abstracta si es una *-álgebra completa en la topología asociada a una norma $\|\cdot\|$ con las propiedades:

$$\begin{aligned} \|cA\| &= |c| \|A\| \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \cdot \|B\| \\ \|A^*A\| &= \|A\|^2 \end{aligned}$$

para todo $c \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{A}$

Introducimos finalmente una noción importante y a la vez muy inmediata que relaciona álgebras abstractas y concretas.

REPRESENTACIÓN: Una representación π de un álgebra abstracta \mathcal{A} en un espacio de Hilbert \mathcal{F} es un homeomorfismo³ del álgebra al conjunto de operadores acotados en \mathcal{F} que reproduce la estructura algebraica de \mathcal{A} en \mathcal{F} . Es decir:

$$\pi(A + B) = \pi(A) + \pi(B)$$

$$\pi(\alpha A) = \alpha \pi(A)$$

$$\pi(AB) = \pi(A) \pi(B)$$

$$\pi(A^*) = \pi(A)^*$$

para cualquier $A, B \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

Una manera de generar representaciones de un álgebra es la llamada *construcción GNS*. Por su importancia en este trabajo la presentamos en la sección 4.3 junto con otro concepto fundamental en el enfoque algebraico de teoría de campos como es la noción de *estado algebraico*.

³ Un homeomorfismo entre espacios topológicos es una biyección, continua, con inversa continua. Para este tipo de mapas, la topología se transporta de un espacio al otro.

FUNCIONES DE CORRELACIÓN

En este apéndice discutiremos la noción de función de correlación en Teoría Cuántica de Campos y cómo dicha noción se incorpora en la formulación algebraica; específicamente discutiremos el caso de los estados cuasi-libres.

C.1 TEORÍA DE CAMPOS

Estos objetos son típicos del análisis perturbativo de teorías de campos con interacciones y su representación gráfica es la base de los famosos diagramas de Feynman. Dado un campo ϕ en el espacio-tiempo, el ejemplo más simple en que podemos pensar es en una función de correlación de dos puntos que consiste en calcular $\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle$, es decir, el valor esperado del producto de operadores de campo en dos puntos x, y del espacio-tiempo en el vacío de la teoría $|0\rangle$. Otros ejemplos son el valor esperado del conmutador $\langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle$ y $\langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle$ donde T ordena causalmente a los puntos x e y . Esta última función de correlación aparece en la serie de Dyson del desarrollo perturbativo. En definitiva, las funciones de correlación son una herramienta central para vincular la Teoría de Campos con la Física de Partículas.

En este punto es importante señalar, como ya mencionamos en el apéndice A, que los operadores de campo $\hat{\phi}(x)$ no son funciones definidas en cada punto x del espacio tiempo, sino distribuciones sobre funciones de prueba f suaves y de soporte compacto en el espacio-tiempo. Utilizamos la notación $\widehat{\phi}(f)$ para designar a esas distribuciones que definen operadores en el espacio de Hilbert. Formalmente podemos escribir $\widehat{\phi}(f)$ como una integral $\int \hat{\phi}(x) \cdot f(x) \epsilon$, con ϵ una 4-forma de volumen.

Como se discute en la sección 6.3, para K-G el conjunto de los operadores de campo coincide con el de los operadores fundamentales $\widehat{\Omega}(\psi, \cdot)$, siendo $\psi = Ef$ una solución de prueba que corresponde a la función de prueba f . Esto a su vez implica que los operadores $\widehat{W}(\psi) = \exp(i\widehat{\phi}(f))$ son operadores de Weyl.

En el lenguaje distribucional, se define la *función de correlación de n puntos* como

$$\Lambda(f_1, \dots, f_n) = \langle 0 | \widehat{\phi}(f_1) \dots \widehat{\phi}(f_n) | 0 \rangle$$

que podemos pensar como un promedio de $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$ sobre funciones de prueba $f_1 \dots f_n$. Teniendo en cuenta además la relación

de los operadores de campo con los operadores fundamentales, la definición anterior es equivalente a

$$\lambda(\psi_1, \dots, \psi_n) = \langle 0 | \widehat{\Omega}(\psi_1, \cdot) \dots \widehat{\Omega}(\psi_n, \cdot) | 0 \rangle \quad (\text{C.1.1})$$

cuando $\psi_i = Ef_i$ o más esquemáticamente

$$\Lambda(f_1, \dots, f_n) = \lambda(Ef_1, \dots, Ef_n) \quad (\text{C.1.2})$$

C.2 LA FUNCIÓN DE PAULI-JORDAN Y EL PROPAGADOR DE K-G EN ESPACIO-TIEMPO PLANO.

Un ejemplo de función de correlación, de particular importancia en este trabajo, es la función de correlación de dos puntos para el campo de K-G en espacio tiempo plano $\langle 0 | \widehat{\phi}(x)\widehat{\phi}(y) | 0 \rangle = \Delta^+(x-y)$.

Al final de la sub-sección 6.4.1 notamos que el conmutador cumple $\langle 0 | [\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(y)] | 0 \rangle = -i\Delta(x-y)$ donde Δ es la función de Pauli-Jordan, que se obtiene como la resta de las funciones de Green avanzada y retardada de la ecuación de K-G. Por lo tanto el propagador cumple $-i\Delta(x-y) = \Delta^+(x-y) - \Delta^+(y-x)$. Esta igualdad también suele escribirse como $-i\Delta(x-y) = \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y)$ definiendo $\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x)$. Inmediatamente veremos que el origen de la notación $+$, $-$ es que Δ^+ y Δ^- son las partes de frecuencia positiva y negativa de la función $-i\Delta$ respectivamente, si hacemos un desarrollo de Fourier con x^0 como variable tiempo.

La ecuación de K-G con fuentes $\square^2\phi - m^2\phi = f$ en espacio de Minkowski tiene solución avanzada

$$Af(x) = \int \Delta^a(x, y) f(y) d^4y,$$

siendo Δ^a la función de Green avanzada, es decir la solución a

$$\square_x^2 \Delta^a(x, y) - m^2 \Delta^a(x, y) = \delta(x - y)$$

que es cero fuera del pasado causal de f . Esta función se puede calcular en el espacio de momento, obteniéndose

$$\Delta^a(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2 - i2\epsilon k_0} d^4k.$$

Análogamente se define la solución retardada Rf , que se escribe en términos de la función de Green retardada como

$$Rf(x) = \int \Delta^r(x, y) f(y) d^4y$$

con $\Delta^r(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2 + i2\epsilon k_0} d^4k$. Luego

$$\Delta(x) = \Delta^a(x) - \Delta^r(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \epsilon(k^0) e^{ik \cdot x} d^4k,$$

siendo ϵ un co-vector tipo tiempo ($\epsilon^2 < 0$). Finalmente, la parte de frecuencia positiva de $-i\Delta$ (con respecto a x^0) resulta

$$\Delta^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot x} d^4k.$$

Es claro que Δ^- es la parte de frecuencia negativa.

Alternativamente, se define Δ^+ como el límite de la función suave $\Delta_\epsilon^+(x)$ dado por

$$\Delta^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\epsilon^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x - i\epsilon)} d^4k,$$

siendo ϵ un vector tipo tiempo que apunta hacia el futuro. En la sección 7.2.6 calculamos explícitamente las divergencias de Δ^+ investigando el comportamiento de Δ_ϵ^+ cuando $\epsilon \rightarrow 0$

c.2.0.1 La distribución $E(f, g)$

En el cuerpo de la tesis, especialmente en los capítulos seis y siete, hacemos uso de las propiedades de la distribución $E(f, g) = \Omega(Ef, Eg) = \int f Eg \epsilon$, con f, g funciones de prueba en el espacio-tiempo y ϵ una forma de volumen. Dado que $Ef = Af - Rf$, el núcleo de esa distribución (al que podemos llamar $E(x, y)$) coincide con $\Delta(x - y)$ en el espacio tiempo plano. Dicho de otra forma, la distribución E es la generalización de Δ a espacio tiempo curvo.

C.3 FORMULACIÓN ALGEBRAICA

Las nociones de funciones de correlación se pueden incorporar fácilmente al enfoque algebraico. Pero dado que el álgebra que utilizamos en nuestro trabajo es el álgebra de Weyl, debemos dar una definición alternativa (pero equivalente) de la ecuación C.1.1 para las funciones de correlación en término de elementos del álgebra. Así definimos

$$\lambda(\psi_1, \dots, \psi_n) = i^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \omega \left(\widehat{W(s_1 \psi_1)} \dots \widehat{W(s_n \psi_n)} \right)_{s_1 \dots s_n = 0} \quad (\text{C.3.1})$$

donde ω es un estado algebraico y $\widehat{W(s_i \psi_i)}$ son operadores de Weyl. La diferencia con la definición en término de operadores $\Omega(\psi_i, \cdot)$ es que esta nueva expresión asume que la derivada está definida para el estado ω . Si este no es el caso, entonces la función de correlación no está definida para el estado correspondiente en el álgebra de Weyl.

C.4 APLICACIÓN AL CASO CUASI-LIBRE

En el caso de estados cuasi-libres, los cuales cumplen

$$\omega(\widehat{W(\psi)}) = \exp\left(-\frac{g(\psi, \psi)}{4}\right)$$

se pueden calcular las funciones de correlación de todo orden aplicando C.3.1.

En primer lugar la aplicación al caso $n = 1$ arroja

$$\lambda(\psi) = -i \frac{\partial}{\partial s} \omega(\widehat{W(s\psi)})_{s=0} = -i \frac{\partial}{\partial s} \exp\left(-\frac{g(s\psi, s\psi)}{4}\right)_{s=0} = 0$$

con lo cual los estados cuasi-libres según nuestra definición poseen función de correlación de 1 punto (valor esperado del campo) nula.

Luego, la función de correlación de dos puntos se calcula como

$$\begin{aligned} \lambda(\psi_1, \psi_2) &= -\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \omega(\widehat{W(s_1\psi_1)W(s_2\psi_2)}) = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} [\omega(W(s_1\psi_1 + s_2\psi_2)) \exp\left(\frac{i}{2}\Omega(s_1\psi_1, s_2\psi_2)\right)]_{s_1, s_2=0} = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} [\exp\left(-\frac{1}{2}g(s_1\psi_1 + s_2\psi_2, s_1\psi_1 + s_2\psi_2)\right) \\ &\quad \exp\left(i\frac{s_1 s_2}{2}\Omega(\psi_1, \psi_2)\right)]_{s_1, s_2=0} = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{s_1^2}{2}g(\psi_1, \psi_1) + s_1 s_2 \{g(\psi_1, \psi_2) - i\Omega(\psi_1, \psi_2)\} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{s_2^2}{2}g(\psi_2, \psi_2)\right]\right)\right\}_{s_1, s_2=0} = \\ &= \frac{1}{2} [g(\psi_1, \psi_2) - i\Omega(\psi_1, \psi_2)] \end{aligned}$$

Nota: es interesante ver que, a la luz de la construcción de la sección 3.2.3, la función de dos puntos se conecta con el producto escalar en el espacio de Hilbert de una partícula de forma inmediata, es decir

$$\Lambda(f, g) = \langle KEf, KEg \rangle_{\mathcal{H}}$$

Para $n \geq 2$ y par, las funciones de correlación son sumas de productos de las de dos puntos, mientras que en el caso impar son cero. Para demostrar esta afirmación comencemos probando que el producto $\widehat{W(\psi_1)} \dots \widehat{W(\psi_m)}$ es

$$\widehat{W(\psi_1)} \dots \widehat{W(\psi_m)} = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{j < k=1}^m \Omega(\psi_j, \psi_k)\right) \widehat{W\left(\sum_{j=1}^m \psi_j\right)}$$

PRUEBA POR INDUCCIÓN:

Por definición

$$\widehat{W(\psi_1)}\widehat{W(\psi_2)} = \exp\left(\frac{i}{2}\Omega(\psi_1, \psi_2)\right) \widehat{W(\psi_1 + \psi_2)},$$

por lo cual la igualdad se cumple para $m = 2$. Supongamos ahora que se cumple para $m = n$ y probemos que se cumple para $m = n + 1$.

$$\begin{aligned} \widehat{W(\psi_1)}\dots\widehat{W(\psi_n)}\widehat{W(\psi_{n+1})} &= \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^n \Omega(\psi_j, \psi_k)\right) \widehat{W\left(\sum_{j=1}^n \psi_j\right)}\widehat{W(\psi_{n+1})} = \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^n \Omega(\psi_j, \psi_k)\right) \exp\left(\frac{i}{2}\Omega(\psi_1 + \dots + \psi_n, \psi_{n+1})\right) \widehat{W\left(\sum_{j=1}^{n+1} \psi_j\right)} = \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^{n+1} \Omega(\psi_j, \psi_k)\right) \widehat{W\left(\sum_{j=1}^{n+1} \psi_j\right)} \square \end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior para las funciones de correlación de n puntos obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(\psi_1, \dots, \psi_n) &= (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^n \Omega(s_j \psi_j, s_k \psi_k)\right) \omega\left(W\left(\sum_{j=1}^n s_j \psi_j\right)\right)_{s_1 \dots s_n=0} = \\ &= (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^n \Omega(s_j \psi_j, s_k \psi_k)\right) \exp\left(-\frac{1}{4}g\left(\sum_{j=1}^n s_j \psi_j, \sum_{k=1}^n s_k \psi_k\right)\right)_{s_1 \dots s_n=0} = \\ &= (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j<k=1}^n \Omega(s_j \psi_j, s_k \psi_k)\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^n g(s_j \psi_j, s_k \psi_k)\right)_{s_1 \dots s_n=0} = \\ &= (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^n s_j s_k \left\{g(\psi_j, \psi_k) - 2i\Omega(\psi_j, \psi_k)\theta_{k-j}\right\}\right)_{s_1 \dots s_n=0} = \end{aligned}$$

$$\text{donde } \theta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k > j \\ 0, & k \leq j \end{cases}.$$

Utilizando la relación $1 = \theta_{k-j} + \theta_{j-k} + \delta_{jk}$ y la simetría entre j y k en el producto $g(\psi_j, \psi_k)$, la expresión anterior se puede reescribir como

$$(-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n s_j s_k \left\{[g(\psi_j, \psi_k) - i\Omega(\psi_j, \psi_k)]\theta_{j-k} + \frac{\delta_{jk}}{2}g(\psi_j, \psi_k)\right\}\right]_{s_1 \dots s_n=0}$$

En términos de la función de dos puntos resulta:

$$(-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \exp \left[- \sum_{j,k=1}^n s_j s_k \left\{ \lambda(\psi_j, \psi_k) \theta_{k-j} + \frac{\delta_{jk}}{4} g(\psi_j, \psi_k) \right\} \right]_{s_1 \dots s_n = 0}$$

En resumen, la función de n puntos se puede escribir como

$$\lambda(\psi_1, \dots, \psi_n) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} \prod_{j,k=1}^n \exp(-s_j s_k g_{jk})$$

donde $g_{jk} = \lambda(\psi_j, \psi_k) \theta_{k-j} + \frac{\delta_{jk}}{4} g(\psi_j, \psi_k)$.

Dado que se trata de una derivada n -ésima de un producto de n^2 términos, al desarrollarla se obtiene una suma de n^3 sumandos, cada uno de los cuales es el producto de n^2 términos con $\exp(-s_j s_k g_{jk})$ derivado un número variable de veces.

Ahora bien, tomando en cuenta que la derivada n -ésima sólo incluye derivar con respecto a cada s_j una sola vez, la mayoría de los n^3 sumandos son cero. Si un factor $\exp(-s_j s_k g_{jk})$ es derivado 3 o más veces se anula porque sólo depende de 2 variables y si es derivado 1 vez se anula al evaluar la derivada en $s_1 \dots s_n = 0$. Esto hace que sólo sobrevivan los sumandos en donde cada $\exp(-s_j s_k g_{jk})$ es derivado dos o cero veces. Este argumento también demuestra que todas las funciones de correlación con n impar se anulan pues no existe forma de obtener sumandos donde cada factor se derive dos o cero veces únicamente.

Ahora sólo consideremos términos con n par.

En esos casos la derivada de un término resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_l \partial s_m} \exp(-s_j s_k g_{jk})_{s_1 \dots s_n = 0} &= -(\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) g_{jk} = \\ &= -(\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \left[\lambda(\psi_j, \psi_k) \theta_{k-j} + \frac{\delta_{jk}}{2} g(\psi_j, \psi_k) \right] \end{aligned}$$

Dado que $l \neq m$ los posibles valores de esos términos son:

- $-\lambda(\psi_l, \psi_m) \theta_{m-l}$ si $l = j$ y $m = k$
- $-\lambda(\psi_m, \psi_l) \theta_{l-m}$ si $l = k$ y $m = j$
- 0 en cualquier otro caso

Finalmente en cada sumando se pueden derivar $n/2$ de estos términos y el resto se evalúan en $s_1 \dots s_n = 0$, contribuyendo con un 1.

Por lo tanto la función de n puntos resulta:

$$\begin{aligned} (-i)^n \sum_{\{a_i\} \in \pi(n)} \left[(-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{l=1}^{n/2} \left\{ \lambda(\psi_{a_{2l-1}}, \psi_{a_{2l}}) \theta_{a_{2l} - a_{2l-1}} \right\} \right] = \\ = \sum_{\{a_i\} \in \pi(n)} \left[\prod_{l=1}^{n/2} \left\{ \lambda(\psi_{a_{2l-1}}, \psi_{a_{2l}}) \theta_{a_{2l} - a_{2l-1}} \right\} \right] \end{aligned}$$

donde $\{a_i\}$ es una permutación de índices a_1, \dots, a_n del conjunto de permutaciones $\pi(n)$.

Este resultado muestra explícitamente que las funciones de n puntos son sumas de productos de funciones de correlación de dos puntos.

CÁLCULOS

Para descomprimir el cuerpo de la tesis, dejamos algunos cálculos detallados como apéndice.

D.1 EL MAPA K_N COMO MAPA LINEAL DE DATOS DE PRUEBA A $L^2(h)$

Queremos probar que $K_N \phi = \langle \psi_k, \phi \rangle$ (como función de k) es un elemento de $L^2(h)$ si $\phi \in \mathcal{S}_N$, siendo $\psi_k = e^{ik \cdot x}$ un modo de Fourier y $\langle \psi_k, \phi \rangle = -i\Omega_N(\bar{\psi}_k, \phi)$. Es decir, queremos demostrar que $K_N \phi$ es de cuadrado integrable en h .

Comenzamos calculando

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \phi \rangle &= -i\Omega_N(\bar{\psi}_k, \phi) = -i\Omega_N(\psi_{-k}, \phi) = \\ &= -i \sum_{j=\pm} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x^\perp \int_{\mathbb{R}^+} dx^j (\phi \partial_j \psi_{-k} - \psi_{-k} \partial_j \phi). \end{aligned}$$

Integrando por partes resulta

$$\langle \psi_k, \phi \rangle = 2i \int_{\mathbb{R}^2} d^2x^\perp \left[\psi_{-k} \phi|_{x^+=x^-=0} + \sum_{j=\pm} \int_{\mathbb{R}^+} dx^j \psi_{-k} \partial_j \phi \right]$$

Ahora, definiendo una **TF** sólo en las direcciones \perp como

$$\check{f}(x^\pm, k_\perp) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x^\perp e^{-ik_\perp x^\perp} f(x^\pm, x^\perp)$$

entonces

$$\langle \psi_k, \phi \rangle = 2i \sum_{j=\pm} \left[\int_{\mathbb{R}^+} dx^j e^{-ik_j x^j} \partial_j \check{f}(x^j, k_\perp) + \frac{1}{2} \check{f}(0, k_\perp) \right].$$

Debido a que estamos integrando en \mathbb{R}^+ los primeros sumandos son equivalentes a la composición con un escalón en x^\pm . Por lo tanto los primeros dos términos son la **TF** tridimensional del producto de $\partial_\pm \phi$ con el escalón $\theta(x^\pm)$, que está bien definido pues $\partial_\pm \phi$ es una función suave y de soporte compacto en \mathbb{N}^\pm . Resulta entonces

$$\langle \psi_k, \phi \rangle = 2i \left[\widetilde{\theta \partial_+ \phi}(k_+, k_\perp) + \widetilde{\theta \partial_- \phi}(k_-, k_\perp) + \check{f}|_{S^0}(k_\perp) \right].$$

Para estudiar su comportamiento en el límite de $k \rightarrow \infty$ utilizaremos las nociones de **WF** del capítulo 5. Tomemos como ejemplo el caso $k_- \rightarrow \infty$. En primer lugar observemos que todos los sumando son **TF** de funciones de soporte compacto, y por lo tanto son funciones analíticas. Luego notemos que en el caso $k_+ = 0$ se cumple

$$\widetilde{\theta\partial_+\phi}|_{k_+=0} = \int_0^{+\infty} \partial_+\check{\phi} e^{-ik_+x^+} dx^+|_{k_+=0} = -\check{\phi}|_{S^0}.$$

Por lo tanto $\widetilde{\theta\partial_+\phi}|_{k_+=0} + \check{\phi}|_{S^0} = 0$. Tratándose además de una función analítica

$$\widetilde{\theta\partial_+\phi}(k_+, k_\perp) + \check{\phi}(0, k_\perp) = k_+ f_+(k_+, k_\perp)$$

con f_+ una función analítica. Utilizando ahora que $k^2 + m^2 = 0$ se agrega la condición $k_+ = \frac{(k_\perp)^2 + m^2}{2k_-}$ y entonces tenemos que

$$\widetilde{\theta\partial_+\phi}(k_+, k_\perp) + \check{\phi}(0, k_\perp) = \frac{(k_\perp)^2 + m^2}{2k_-} f_+(k_+, k_\perp).$$

Cuando $k_- \rightarrow \infty$ este término cae a cero al menos tan rápido como $\frac{1}{k_-}$, mientras que el término

$$\widetilde{\theta\partial_-\phi}(k_-, k_\perp) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\theta} * \widetilde{\partial_-\phi}(k_-, k_\perp) = \frac{1}{2\pi} \frac{-i}{k_- - i0} * \widetilde{\partial_-\phi}(k_-, k_\perp) \rightarrow 0$$

al menos tan rápido como $\frac{1}{k_-}$. Así la suma cae al menos tan rápido como $\frac{1}{k_-}$. El mismo razonamiento funciona cuando $k_+ \rightarrow \infty$.

De todo esto se concluye que $\langle \psi_k, \phi \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{k}$ sólo en las direcciones de los ejes de k_+ o k_- y más rápido que cualquier potencia de k en todas las otras direcciones. Por lo tanto el cuadrado de $\langle \psi_k, \phi \rangle$ es integrable en h .

D.2 ORTOGONALIDAD DE LAS SOLUCIONES DE ONDA PLANA

Dada la forma bilineal $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i\Omega_N(\bar{\phi}_1, \phi_2)$ en el contexto de la sección 7.2, los modos ψ_k cumplen

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = (2\pi)^3 2k^+ \delta(k_+ - k'_+) \delta^2(k_\perp - k'_\perp)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle &= -i\Omega(\bar{\psi}_{k'}, \psi_k) = -i\Omega(\psi_{-k'}, \psi_k) \\ &= -i \sum_{j=\pm N^j} \int (\psi_{k'} \partial_j \psi_{-k} - \psi_{-k} \partial_j \psi_{k'}) dx^j dx^\perp \end{aligned}$$

Usando que $\partial_\pm \psi_k = ik_\pm e^{ik \cdot x}$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle &= - \sum_{j=\pm} (k'_j + k_j) \int_0^{+\infty} dx^j \int_{\mathbb{R}^2} dx^\perp e^{i[(k'_j - k_j)x^j + (k'_\perp - k_\perp)x^\perp]} = \\ &= - \sum_{j=\pm} (k'_j + k_j) (2\pi)^2 \delta(k'_\perp - k_\perp) \int_0^{+\infty} e^{i(k'_j - k_j)x^j} dx^j = \end{aligned}$$

(regularizando las integrales con $\epsilon_+, \epsilon_- \rightarrow 0^+$)

$$= - \sum_{j=\pm} (k'_j + k_j) (2\pi)^2 \delta^2(k'_\perp - k_\perp) \frac{i}{k'_j - k_j + i\epsilon_j}$$

Las divergencias de ambos sumandos están relacionadas, de manera que debemos trabajar un poco para entenderlas. En primer lugar, el factor $\delta^2(k'_\perp - k_\perp)$ nos permite escribir

$$k_+ k_- = \frac{(k_\perp)^2 + m^2}{2} = \frac{(k'_\perp)^2 + m^2}{2} = k'_+ k'_-,$$

de modo que el término $\frac{(k'_- + k_-)}{k'_- - k_- + i\epsilon_-}$ se puede reescribir como

$$\frac{(k'_- + k_-)}{k'_- - k_- + i\epsilon_-} = - \frac{(k'_+ + k_+)}{k'_+ - k_+ - i\epsilon_- \{k_+ / k'_-\}}.$$

Resumiendo hasta ahora:

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = - (k'_+ + k_+) (2\pi)^2 \delta^2(k'_\perp - k_\perp) \left[\frac{i}{k'_+ - k_+ + i\epsilon_+} - \frac{i}{k'_+ - k_+ - i\epsilon_- \{k_+ / k'_-\}} \right]$$

Si estudiamos el término $g(k)_\epsilon = \frac{i}{k+i\epsilon_+} - \frac{i}{k-i\epsilon_-(k_+/k'_-)}$ en el plano de k complejo, éste tiene dos polos y existen dos situaciones diferentes. Si el signo de $\{k_+ / k'_-\}$ es positivo, entonces hay un polo en cada lado del eje real ($k = -i\epsilon_+$ y $k = i\epsilon_- \{k_+ / k'_-\}$). Este caso corresponde al producto de ondas planas en el mismo cascarón de masa (positivo o negativo). Por otro lado, si el signo es negativo, ambos polos están en el mismo semiplano con respecto al eje real.

En el límite $\epsilon_\pm \rightarrow 0$ se cumple que g_ϵ define una distribución δ . Para demostrarlo se parte de una función de prueba real $f(k)$ y su descomposición en una suma de funciones analíticas $f_+(z)$ y $f_-(z)$, tales que $f_+(z)$ decae en el semiplano complejo con parte imaginaria positiva y $f_-(z)$ en el otro semiplano. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) g_\epsilon(k) dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(k) g_\epsilon(k) dk + \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(k) g_\epsilon(k) dk = \\ &= \int_{\mathcal{C}^+} f_+(z) g_\epsilon(z) dz + \int_{\mathcal{C}^-} f_-(z) g_\epsilon(z) dz \end{aligned}$$

donde \mathcal{C}^+ es un camino cerrado en el semiplano positivo que incluye a la recta real y \mathcal{C}^- es un camino cerrado en el semiplano negativo que incluye a la recta real.

Si ambas ondas planas están en el mismo cascarón de masa, entonces el teorema de residuos implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) g_\epsilon(k) dk = 2\pi i (-i) f_+(i\epsilon_- \{k_+ / k'_-\}) - 2\pi i i f_-(-i\epsilon_+) \rightarrow 2\pi f(0).$$

En cambio si están en cascarones de masa diferentes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) g_\epsilon(k) dk = -2\pi i (-i) f_-(i\epsilon_- \{k_+ / k'_-\}) - 2\pi i i f_-(-i\epsilon_+) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto en el límite $\epsilon_-, \epsilon_+ \rightarrow 0$ sucede lo siguiente:

- si ambas ondas planas están en el mismo cascarón de masa $g(k'_+ - k_+)_\epsilon \rightarrow 2\pi \delta(k'_+ - k_+)$ y podemos escribir

$$\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = - (2\pi)^3 (k'_+ + k_+) \delta(k'_+ - k_+) \delta^2(k'_\perp - k_\perp)$$

$$= (2\pi)^3 2k^+ \delta(k'_+ - k_+) \delta^2(k'_\perp - k_\perp)$$

- si ambas ondas están en cascarones diferentes $g(k)_\epsilon \rightarrow 0$, pero esta posibilidad también está contemplada en la igualdad anterior ya que modos de diferente cascarón no pueden tener $k_+ = k'_+$, por lo cual vale la misma igualdad en ambos casos.

D.3 CONDICIÓN HADAMARD EN ESPACIO-TIEMPO PLANO

En el apéndice C.2 hemos definido la distribución Δ^+ como el límite de la función suave Δ_ϵ^+ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, es decir

$$\Delta^+(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x-y-i\epsilon)}$$

siendo ϵ un cuadvivector temporal.

Podemos desarrollar la función Δ_ϵ^+ para obtener explícitamente las partes divergentes de Δ^+ . Para empezar podemos escribir Δ_ϵ^+ en una base en la cual la componente temporal apunte en la dirección de ϵ . De esta manera, podemos usar $\epsilon = (\epsilon^0, \vec{0})$ sin pérdida de generalidad. Así resulta

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^0 d^3\vec{k} \delta\left(- (k^0)^2 + |\vec{k}|^2 + m^2\right) \theta(k^0) e^{-ik^0(x^0 - i\epsilon^0)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

e integrando en k^0

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k} e^{-iE_k(\epsilon^0 + ix^0)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

donde $E_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. Pasando ahora a coordenadas esféricas en el espacio de momento

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{k^2 \sin(\theta)}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - i\epsilon^0)} e^{ikr \cos(\theta)}$$

con $k = |\vec{k}|$ y $r = |\vec{x}|$. Las integrales en los ángulos son elementales y arrojan

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk \frac{k^2}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - i\epsilon^0)} 2\pi \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}.$$

Cambiando k por $-k$ en el segundo término

$$\Delta_\epsilon^+(x) = \frac{-i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k}{E_k} e^{-iE_k(x^0 - i\epsilon^0)} e^{ikr}$$

o también

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{E_k} e^{-iE_k(x^0 - i\epsilon^0)} e^{ikr}.$$

Luego, aplicando el cambio de variable $E_k = m \operatorname{ch}(\eta)$ y $k = m \operatorname{sh}(\eta)$ se pasa a

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{-1}{8\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-im \operatorname{ch}(\eta)(x^0 - i\epsilon^0)} e^{im r \operatorname{sh}(\eta)}.$$

Para interpretar esta función (compleja) podemos escribir las coordenadas espaciales de la forma

$x - i\epsilon^0 = \sqrt{(x - i\epsilon^0)^2 - r^2} \operatorname{ch}(\tilde{\theta})$ y $r = \sqrt{(x - i\epsilon^0)^2 - r^2} \operatorname{sh}(\tilde{\theta})$ donde $\tilde{\theta}$ es algún complejo y así escribir

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{-1}{8\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-im \sqrt{(x - i\epsilon^0)^2 - r^2} \operatorname{ch}(\eta - \tilde{\theta})}.$$

Dado que el integrando cae con $\eta \rightarrow \infty$ por el factor $e^{-m \operatorname{ch}(\eta)\epsilon^0}$ entonces podemos hacer la integral sobre la variable $\eta - \tilde{\theta}$ en el eje real, ya que la integral sobre el eje corrido $\operatorname{Im}(\tilde{\theta})$ arroja el mismo resultado. Finalmente

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{-1}{8\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-iz \operatorname{ch}(\eta)} = \frac{-1}{8\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-i\pi H_0^{(2)}(z) \right),$$

con $z = m \sqrt{(x^0 - i\epsilon)^2 - r^2}$ y siendo $H_0^{(2)}$ la segunda función de Hankel con $\nu = 0$. Dado que esta función cumple la igualdad

$$\frac{d}{dz} H_0^{(2)} = -H_1^{(2)}$$

entonces

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{m^2 i}{8\pi z} H_1^{(2)}(z).$$

Ahora, $H_1^{(2)}(z) = J_1(z) - iN_1(z)$ siendo

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$N_1(z) = -\frac{2}{z\pi} + \frac{2}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2}\right) J_1(z) + \mathcal{R}(z),$$

con $\mathcal{R}(z)$ un término que es regular en z . Por lo tanto Δ_{ϵ}^{+} resulta

$$\Delta_{\epsilon}^{+}(x) = \frac{m^2}{8\pi^2 z} \left[z \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{2}{z} \right] + \mathcal{R}(z) = \frac{m^2}{8\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{m^2}{4\pi} \frac{1}{z^2} + \mathcal{R}(z).$$

Finalmente, puede escribirse

$$\Delta^{+}(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 + \eta^2 + 2ix^0\eta} + \frac{m^2}{16\pi^2} \operatorname{Ln}(x^2 + \eta^2 + 2ix^0\eta) + W(x).$$

Esta es la expresión para la forma Hadamard manejada en la sección 4.6 de Wald [39], entre otras referencias.

D.4 RELACIÓN ENTRE FORMA SIMPLÉCTICA EN \mathbb{N} Y \mathcal{N}

En este apartado probaremos la ecuación 7.3.1, es decir

$$\Omega_{\mathcal{N}}(\psi_1, \psi_2) = \Omega_{\mathbb{N}}(\sqrt{\rho}\psi_1 \circ \alpha^{-1}, \sqrt{\rho}\psi_2 \circ \alpha^{-1})$$

donde la notación es exactamente la de la sección correspondiente. Es decir v y ρ_0 son funciones en \mathbb{N} , ψ_1, ψ_2 son funciones en \mathcal{N} y $\psi_{1,2} \circ \alpha^{-1}$ son funciones en \mathbb{N} .

PRUEBA: En la prueba utilizaremos la notación $\psi^{\mathbb{N}}$ para referirnos a $\psi \circ \alpha^{-1}$, que en definitiva es la misma función expresada en las coordenadas $(\alpha^+, \alpha^-, \alpha^\pm)$.

Usando la expresión explícita de la forma simpléctica en \mathbb{N}

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{N}}(\sqrt{\rho}\psi_1 \circ \alpha^{-1}, \sqrt{\rho}\psi_2 \circ \alpha^{-1}) &= \\ &= \sum_{j=\pm} \int_{\mathbb{N}^j} \left[\sqrt{\rho}\psi_2^{\mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} (\sqrt{\rho}\psi_1^{\mathbb{N}}) - (1 \leftrightarrow 2) \right] d^2\alpha^\pm d\alpha^j = \\ &= \sum_{j=\pm} \int_{\mathbb{N}^j} \left[\rho\psi_2^{\mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \psi_1^{\mathbb{N}} + \sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} (\sqrt{\rho}) \psi_2^{\mathbb{N}} \psi_1^{\mathbb{N}} - (1 \leftrightarrow 2) \right] d^2\alpha^\pm d\alpha^j. \end{aligned}$$

El segundo término se cancela con su correspondiente de la parte $(1 \leftrightarrow 2)$ y entonces

$$\Omega_{\mathbb{N}} = \sum_{j=\pm} \int_{\mathbb{N}^j} \left[\psi_2^{\mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \psi_1^{\mathbb{N}} - (1 \leftrightarrow 2) \right] \rho d^2\alpha^\pm d\alpha^j.$$

La expresión anterior es exactamente la forma simpléctica $\Omega_{\mathcal{N}}(\psi_1, \psi_2)$ expresada en las coordenadas α . \square

D.5 LA DISTRIBUCIÓN \mathbb{E} Y SU WF*Definiciones*

Al igual que en el cuerpo de la tesis, utilizamos la notación V para el espacio-tiempo y M para el interior del dominio de dependencia de \mathcal{N} .

En la sección 7.4 hemos definido $\mathbb{E}f = \sqrt{\rho}Ef \circ \alpha^{-1}$, con α coordenadas sobre \mathcal{N} y donde $Ef : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$ es la diferencia entre las soluciones avanzada y retardada de K-G en M con fuente f y en virtud del teorema del kernel E también puede interpretarse como una distribución $E \in \mathcal{D}'(M \times M)$.

Por motivos formales tomaremos como punto de partida la distribución $E \in \mathcal{D}'(V \times V)$ sobre todo el espacio-tiempo. El WF de esta distribución es conocido (Duistermaat and Hörmander [14]):

$$WF(E) = \{(y, x, -k_y, k_x) \in T^*V \setminus 0 \times T^*V \setminus 0 \mid (x, k_x) \sim (y, k_y)\}$$

donde la equivalencia $(x, k_x) \sim (y, k_y)$ significa que $x = y$ y $k_x = k_y$ o que hay una geodésica nula $\gamma(s)$ que une x con y siendo k_x tangente a la geodésica en x y k_y su transporte paralelo a y .

Extensión del mapa α y $WF(\mathbb{E})$

Consideremos una extensión de las coordenadas α a un entorno espacio-temporal U de \mathcal{N} y llamemos a ese mapa con el mismo nombre α . (Ver introducción del apéndice B y proposición B.1 de Reisenberger [31] para una posible construcción de estas coordenadas.)

Extendiendo la definición de $\mathbb{E}f$ a $U = \alpha(U)$ mediante la igualdad $\mathbb{E}f = \sqrt{\rho}Ef \circ \alpha^{-1}$, entonces \mathbb{E} y E están relacionados por un mapa suave e invertible que consiste en multiplicar por la función suave $\sqrt{\rho}$ y tomar coordenadas en la primera entrada (vía el mapa α). Por el teorema 8.2.4 de Hörmander [23] que presentamos en el capítulo cinco, \mathbb{E} es una distribución bien definida en $M \times M$ y su WF es

$$WF(\mathbb{E}) = \{ (x, y, k_x, -k_y) \in T^*U \setminus 0 \times T^*V \setminus 0 \mid (x, k_x) \approx (y, k_y) \}$$

donde la equivalencia $(x, k_x) \approx (y, k_y)$ significa que:

- el punto $y \in M$ está conectado por una geodésica nula al punto x de coordenadas $x = \alpha(x)$
- k_y es tangente a la geodésica en y
- k_x es la expresión en coordenadas del vector k_x que es el transporte paralelo de k_y a x .

D.6 SIMPLIFICACIÓN DEL ESTUDIO DEL $WF(\Lambda)$

Partimos de la distribución $\Lambda(f, g) = \langle K_{\mathcal{N}}E(\bar{f}), K_{\mathcal{N}}Eg \rangle_{\mathcal{H}}$, donde $K_{\mathcal{N}}$ es el proyector de la cuantización en espacio-tiempo curvo y queremos encontrar una inclusión para su WF . Encontrar una inclusión equivale a determinar un subconjunto de las direcciones regulares (y luego el complemento incluye al WF). Recordemos que un conjunto abierto de vectores (k_x, k_y) representan direcciones regulares en (x, y) si existen dos funciones de prueba f_0 y g_0 con soporte alrededor de x y y respectivamente tales que

$$|\Lambda(f_0 e^{-i\lambda k_x}, g_0 e^{-i\lambda k_y})| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

más rápido que cualquier potencia de λ para todos los (k_x, k_y) en el conjunto.

La distribución Λ puede escribirse como el producto interno en un espacio de Hilbert y por lo tanto se cumple la desigualdad de Schwartz. Esto lleva a la inecuación

$$\begin{aligned}
|\Lambda(f, g)| &= \left| \left\langle K_{\mathcal{N}} E \bar{f}, K_{\mathcal{N}} E g \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \leq \\
&\leq \left\langle K_{\mathcal{N}} E \bar{f}, K_{\mathcal{N}} E \bar{f} \right\rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} \left\langle K_{\mathcal{N}} E g, K_{\mathcal{N}} E g \right\rangle_{\mathcal{H}}^{1/2} = \\
&= \left[\Lambda(f, \bar{f}) \Lambda(\bar{g}, g) \right]^{1/2} \tag{D.6.1}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la expresión $\Lambda(f, \bar{f}) \Lambda(\bar{g}, g)$ dadas dos funciones fijas $f(x) = f_1(x)e^{-i\lambda k_x x}$ y $g(y) = f_2(y)e^{-i\lambda k_y y}$. Entonces las distribuciones $\Lambda(f, \bar{f})$ y $\Lambda(\bar{g}, g)$ están evaluadas en funciones de soporte compacto y por lo tanto pueden ser tratadas como distribuciones de soporte compacto sin alterar el resultado del cálculo. Si ese es el caso, podemos utilizar las siguientes propiedades de estas distribuciones. Si $u \in \mathcal{E}'$ entonces

1. sea $\Sigma(u)$ el conjunto de direcciones no regulares. Entonces $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(u)$ (lema 8.1.1 de Hörmander [23])
2. el crecimiento de su transformada de Fourier $\tilde{u}(k)$ está acotado por algún polinomio de $|k|$ cuando $k \rightarrow \infty$. (Ver nota al final de apéndice A.3.1)

Utilizaremos estas propiedades para probar la siguiente proposición.

Proposición D.1. (simplificación del estudio del WF)

Si $(x, x, -k_x, k_x) \notin WF(\Lambda)$ y $k_x \neq 0$ entonces $(x, y, -k_x, k_y) \notin WF(\Lambda)$ para todo (y, k_y) .

Demostración. Por hipótesis, existen $f_1, f_2 \in C_0^\infty$ tales que $f_1(x), f_2(x) \neq 0$ y existe un entorno cónico de k_x tal que

$$\Lambda\left(f_1 e^{-i\lambda(-k')\cdot}, f_2 e^{-i\lambda k'\cdot}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

más rápido que cualquier potencia de λ para cualquier k' en dicho entorno. Luego, por la primera propiedad, definiendo $f_0 = f_1 f_2$ se debe cumplir

$$\Lambda\left(f_0 e^{-i\lambda(-k')\cdot}, f_0 e^{-i\lambda k'\cdot}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Por otro lado, por la segunda propiedad, si consideramos cualquier función de prueba $g(y) = g_0(y)e^{-i\lambda k_y y}$ con g_0 de soporte compacto entonces

$$\Lambda(g_0 e^{-i\lambda k_y \cdot}, g_0 e^{i\lambda k_y \cdot}) < C(1 + |\lambda|^N)$$

para algún N y C . Finalmente,

$$\Lambda\left(f_0 e^{-i\lambda(-k')\cdot}, f_0 e^{-i\lambda k'\cdot}\right) \Lambda\left(g_0 e^{-i\lambda k_y \cdot}, g_0 e^{i\lambda k_y \cdot}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

más rápido que cualquier potencia de λ . Por la desigualdad D.6.1 este producto impone una cota para $\Lambda(f_0 e^{-i\lambda k_x}, g_0 e^{-i\lambda k_y})$, lo cual demuestra la proposición. \square

El mismo argumento usado en la demostración anterior prueba que si $(y, y, -k_y, k_y) \notin WF(\Lambda)$ entonces $(x, y, -k_x, k_y) \notin WF(\Lambda)$ para todo (x, k_x) . Ambos argumentos llevan a acotar el $WF(\Lambda)$ por la inclusión

$$WF(\Lambda) \subset \{(x, y, k_x, k_y) \mid (x, x, k_x, -k_x) \in WF(\Lambda), (y, y, -k_y, k_y) \in WF(\Lambda)\}.$$

D.6.1 Condición suficiente para μSC

El objetivo del estudio de $WF(\Lambda)$ es probar que Λ cumple la condición μSC . Dedicamos el resto de la sección a obtener una condición suficiente para el cumplimiento de μSC . Antes de seguir conviene introducir la notación:

$$\mathcal{V}_{\pm} = \{(x, k) \mid k^2 = 0, \pm k^0 > 0\}$$

$$\overline{\mathcal{V}}_{\pm} = \{(x, k) \mid k^2 = 0, \pm k^0 \geq 0\}$$

$$\mathcal{V}_0 = \{(x, k) \mid k^2 = 0\}$$

La inclusión demostrada anteriormente y el hecho de que $WF(\Lambda) \subset \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$ por ser bi-solución de K-G (ver capítulo cinco) simplifican la verificación de la condición buscada. Pues, basta con probar que $(x, x, -k, k) \notin WF(\Lambda)$ cuando k es un vector no cero en el cono de luz futuro, para demostrar que $WF(\Lambda) \subset (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)$. La próxima proposición muestra que, a su vez, esto implica μSC .

Proposición D.2. (condición suficiente para μSC)

Un requisito suficiente para que Λ cumpla la condición μSC es que se cumpla la inclusión

$$WF(\Lambda) \subset (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-).$$

Demostración. Si $WF(\Lambda) \subset (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)$ entonces $WF(\Lambda^T) \subset (\overline{\mathcal{V}}_- \times \overline{\mathcal{V}}_+)$, donde $\Lambda^T(f, g) = \Lambda(g, f)$. También sabemos que $\Lambda - \Lambda^T = -iE$. De esta igualdad se desprende que

$$WF(E) \subset WF(\Lambda) \cup WF(\Lambda^T) \text{ (por } -iE = \Lambda - \Lambda^T)$$

$$\subset WF(E) \cup WF(\Lambda^T) \text{ (por } \Lambda = -iE + \Lambda^T)$$

Ahora, tomando la intersección con $(\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)$ se cumple

$$\begin{aligned} WF(E) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-) &\subset WF(\Lambda) \cup [WF(\Lambda^T) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)] \\ &\subset [WF(E) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)] \cup [WF(\Lambda^T) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)] \end{aligned}$$

Veamos en detalle los términos que involucran a Λ^T . Sabemos que $WF(\Lambda^T) \subset (\overline{\mathcal{V}}_- \times \overline{\mathcal{V}}_+)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} WF(\Lambda^T) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-) &\subset (\overline{\mathcal{V}}_- \times \overline{\mathcal{V}}_+) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-) = \\ &= (M \times \{0\}) \times (M \times \{0\}). \end{aligned}$$

Este conjunto sólo posee elementos de la forma $(x, y, 0, 0)$ pero, por definición, ningún WF posee direcciones con todas sus componentes de momento cero. De esta forma se concluye que

$$WF(\Lambda^T) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-) = \emptyset.$$

Esto lleva a

$$WF(E) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-) \subset WF(\Lambda) \subset WF(E) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-)$$

y por lo tanto

$$WF(\Lambda) = WF(E) \cap (\overline{\mathcal{V}}_+ \times \overline{\mathcal{V}}_-).$$

Finalmente, dado que $WF(E)$ no posee elementos con momento cero en ninguna de sus entradas, se cumple

$$WF(\Lambda) = WF(E) \cap (\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-)$$

que es el contenido exacto de la condición μSC . □

D.7 LA DISTRIBUCIÓN λ_N

Queremos demostrar que $\lambda_N = \Omega^{x_1} \Omega^{x_2} \Delta^+(x_1 - x_2)$ es una distribución, donde $\Delta^+(x_1 - x_2)$ es el kernel de la distribución Δ^+ y Ω es el mapa correspondiente a la distribución Ω_N por el teorema del kernel, es decir $\Omega\phi(\psi) = \Omega_N(\phi, \psi)$. Como vimos en la sección 7.4.4, la función de dos puntos se relaciona con λ_N según la fórmula

$$\Lambda(f_1, f_2) = \lambda_N(\mathbb{E}f_1, \mathbb{E}f_2).$$

Nuestro objetivo es encontrar $WF(\Lambda)$ en M y para ello debemos considerar funciones f_1 y f_2 con soporte compacto en torno a un par de puntos de M . Luego, dado que cualquier par de puntos en M está contenido en el interior de un conjunto compacto, entonces para encontrar $WF(\Lambda)$ alcanza con estudiar su restricción a abiertos B de clausura compacta en M . Por lo tanto, sin introducir arbitrariedades, en adelante supondremos que las funciones de prueba f tienen soporte compacto en un B de este tipo.

Ahora, debido a que $\mathbb{E}f_{1,2} = \sqrt{\rho} E f_{1,2} \circ \alpha^{-1}$ y que los soportes de f_1 y f_2 están incluidos en B , la intersección de los soportes de

$\mathbb{E}f_1$ y $\mathbb{E}f_2$ con N está incluida en la imagen por α de la intersección del pasado causal de B con \mathcal{N} . Esto nos permite introducir una función localizadora $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ que valga uno en la intersección de N con la unión de los soportes de $\mathbb{E}f_1$ y $\mathbb{E}f_2$ y cero fuera de algún entorno de esa intersección, sin afectar al cálculo de Λ . Así, podemos permitir definir la distribución de soporte compacto $\lambda_{N,h}(\mathbb{E}f_1, \mathbb{E}f_2) = \lambda_N(h\mathbb{E}f_1, h\mathbb{E}f_2) = \Lambda(f_1, f_2)$. Esta propiedad de compacidad del soporte nos será de utilidad.

Inmediatamente comprobaremos que

$$\lambda_{N,h} = \Omega^{x_1} \Omega^{x_2} h(x_1) h(x_2) \Delta^+(x_1 - x_2)$$

es una distribución bien definida. Una forma de pensar a esa distribución es como el límite en $\epsilon \rightarrow \infty$ de la distribución

$$\lambda_{N,h\epsilon} = h\Omega^{x_1} h\Omega^{x_2} \Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2)$$

siendo

$$\Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) e^{ik \cdot (x_1 - x_2 - i\epsilon)}.$$

Esta última función, que introdujimos en el apéndice C.2 y calculamos explícitamente en el apéndice D.3, es una función suave debido al término real decreciente $e^{k \cdot \epsilon} = e^{-k^0 \epsilon^0} e^{\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}}$ en el integrando y entonces la acción del mapa $h\Omega^{x_1} h\Omega^{x_2}$ sobre $\Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2)$ está bien definida. Es más, la presencia de la función h , nos permite introducir una nueva función l que valgan 1 en el soporte de h y sea de soporte compacto, con lo cual $l(x_1)l(x_2)\Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2)$ es un función C_0^∞ . (Esto nos permitirá usar el teorema 2.1.8 de Hörmander [23] al final del cálculo). Luego

$$\lambda_{N,h\epsilon} = h\Omega^{x_1} h\Omega^{x_2} \Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2) = h\Omega^{x_1} h\Omega^{x_2} l(x_1)l(x_2)\Delta_\epsilon^+(x_1 - x_2).$$

Para ver que Ω es un mapa bien definido, basta demostrar que Ω_N define una distribución. El cálculo explícito arroja

$$\begin{aligned} \Omega_N(\psi, \phi) &= \sum_{j=\pm N^j} \int (\phi \partial_j \psi - \psi \partial_j \phi) dx^j d^2 x^\perp = \\ &= \int_{V \times V} \phi(x_1) \psi(x_2) \Omega_N(x_1, x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 \end{aligned}$$

con kernel

$$\begin{aligned} \Omega_N(x_1, x_2) &= \\ \partial_{x_1^+} [\delta^4(x_1 - x_2) \delta(x_1^-) \theta(x_1^+)] &+ \partial_{x_1^-} [\delta^4(x_1 - x_2) \delta(x_1^+) \theta(x_1^-)] - \\ &- (x_1 \leftrightarrow x_2). \end{aligned}$$

Estudiando este kernel podemos ver que se trata de una distribución. En primer lugar, los productos del tipo $\delta(x_1^-)\theta(x_1^+)$ están bien definidos como productos tensoriales $\delta \otimes \theta$, pues las distribuciones actúan en variables diferentes. El inconveniente podría presentarse en el producto de $\mathbf{1} \otimes \delta(x_1^-)\theta(x_1^+)$ con la bi-distribución $\delta^4(x_1 - x_2)$, donde $\mathbf{1}$ representa la función de x_2 y x_1^\perp que es idénticamente 1. Para ver que este producto está bien definido, veamos que se cumple la condición presentada en la sección 5.4, es decir $WF'(\delta^4(x_1 - x_2)) \cap WF(\mathbf{1} \otimes \delta(x_1^-)\theta(x_1^+)) = \emptyset$.

En la sección 5.3 calculamos el $WF(\delta(x))$. Luego $\delta^4(x - y)$ se obtiene como el pullback de δ^4 por el mapa $(x, y) \rightarrow x - y$. Según el teorema de pullback (ver sección 5.4) se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} WF(\delta^4(x_1 - x_2)) &= \{(x_1, x_2, k_x, -k_x) \mid (x_1 - x_2, k_x) \in WF(\delta^4)\} = \\ &= \{(x_1, x_1, k_x, -k_x) \mid k_x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Luego

$$WF'(\delta^4(x_1 - x_2)) = \{(x_1, x_1, k_x, k_x) \mid k_x \neq 0\}.$$

Por otra parte, debido a la propiedad del WF de un producto tensorial y a que $WF(\mathbf{1}) = \emptyset$, se cumple

$$WF(\mathbf{1} \otimes \delta(x_1^-)\theta(x_1^+)) \subset \{(x_1, x_2, k_{x_1}, 0) \mid x_1^- = 0, k_{x_1}^\perp = 0\}.$$

Queda claro entonces que

$$WF'(\delta^4(x_1 - x_2)) \cap WF(\mathbf{1} \otimes \delta(x_1^-)\theta(x_1^+)) = \emptyset$$

y de forma análoga se prueba la misma propiedad para los términos con $+$ y $-$ intercambiados y para los términos con x_1 y x_2 intercambiados. Por último, la derivada de una distribución es una distribución, con lo cual Ω_N lo es. Esto demuestra que $\lambda_{N, h\epsilon}$ es una distribución.

Ahora, el teorema 2.1.8 de Hörmander [23] asegura que el límite débil de una sucesión de distribuciones es una distribución y entonces $\lambda_{N, h} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{N, h\epsilon}$ es una distribución bien definida. Para el cálculo de WF podemos identificar $\lambda_N = \lambda_{N, h}$ sin pérdida de generalidad.

D.8 CÁLCULO DEL WF DE λ_N

Sólo debemos encontrar una inclusión para $WF(\lambda_N) \cap I$ con $I = \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in N \setminus S^0\}$. Por lo tanto podemos restringirnos a estudiar λ_N cuando el soporte de las funciones de prueba en ambas entradas están en un entorno U^+ de puntos de N^+ tal que $U^+ \cap S^0 = \emptyset$ o en un entorno U^- con idénticas características respecto de N^- . Supongamos entonces que se trata de U^+ . Escrito en términos de Ω_N la distribución λ_N resulta

$$\lambda_N(y_1, y_2) = \int_{U^+ \times U^+} \Omega_N(x_1, y_1) \Omega_N(x_2, y_2) \Delta^+(x_1 - x_2) d^4x_1 d^4x_2.$$

Ya que ambos puntos y_1 e y_2 no alcanzan N^- ni S^0 entonces

$$\Omega_N(x_1, y_1) = \partial_{x_1^+} [\delta^4(x_1 - y_1) \delta(x_1^-)] - (x_1 \leftrightarrow y_1)$$

$$\Omega_N(x_1, y_1) = 2\partial_{x_1^+} [\delta^4(x_1 - y_1) \delta(x_1^-)]$$

y

$$\Omega_N(x_2, y_2) = 2\partial_{x_2^+} [\delta^4(x_2 - y_2) \delta(x_2^-)].$$

Así, la distribución λ_N resulta

$$\lambda_N(y_1, y_2) = 4\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \frac{\partial^2 \Delta^+(y_1 - y_2)}{\partial y_1^+ \partial y_2^+}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_N(y_1, y_2) &= 4\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) (k_+)^2 \theta(k^0) e^{ik_+(y_1^+ - y_2^+) + k_\perp(y_1^\perp - y_2^\perp)} = \\ &= 4\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|k_+|} \delta\left(k_- - \frac{(k_\perp)^2 + m^2}{2k_+}\right) (k_+)^2 \theta(k^0) e^{ik_+(y_1^+ - y_2^+) + k_\perp(y_1^\perp - y_2^\perp)} = \\ &= 4\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|k_+|} (k_+)^2 \theta(-k_+) e^{ik_+(y_1^+ - y_2^+) + k_\perp(y_1^\perp - y_2^\perp)} = \\ &= -2\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \delta^2(y_1^\perp - y_2^\perp) \int_{-\infty}^0 \frac{dk_+}{2\pi} k_+ e^{ik_+(y_1^+ - y_2^+)}. \end{aligned}$$

Esta expresión representa a la distribución que se obtiene como límite débil de

$$\lambda_{N\epsilon}(y_1, y_2) = -2\delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \delta^2(y_1^\perp - y_2^\perp) \int_{-\infty}^0 \frac{dk_+}{2\pi} k_+ e^{ik_+(y_1^+ - y_2^+ - i\epsilon)}.$$

Recordemos que ϵ es un cuádrivector temporal dirigido hacia el futuro y por tanto el componente ϵ^+ es positivo. Entonces

$$\lambda_N(y_1, y_2) = \frac{-1}{\pi} \delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2(y_1^\perp - y_2^\perp)}{(y_1^+ - y_2^+ - i\epsilon)^2}.$$

A su vez esta distribución se puede reescribir como

$$\lambda_N(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(y_1^-) \delta(y_2^-) \delta^2(y_1^\perp - y_2^\perp) \partial_{y_1^+} \frac{1}{(y_1^+ - y_2^+ - i\epsilon)},$$

quedando escrita en términos de distribuciones cuyos WF fueron estudiados en la sección 5.3. En $U^- \times U^-$ el cálculo de λ_N es análogo y arroja

$$\lambda_N(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(y_1^+) \delta(y_2^+) \delta^2(y_1^\perp - y_2^\perp) \partial_{y_1^-} \frac{1}{(y_1^- - y_2^- - i\epsilon)}.$$

Usando los WF de δ y $\frac{1}{x-i0}$ calculados en la sección 5.3 y usando que $WF(\partial_i u) \subset WF(u)$ para cualquier distribución u , entonces la expresión para λ_N lleva inmediatamente a deducir que $WF(\lambda_N) \cap I$ cumple la inclusión

$$WF(\lambda_N) \cap I \subset \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in \mathbb{N}^+ \setminus S^0, (k_x)_+ \leq 0\} \cup \\ \{(x, x, k_x, -k_x) \mid x \in \mathbb{N}^- \setminus S^0, (k_x)_- \leq 0\}.$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. Abraham, J.E.A. Marsden, and T.S.A. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Applied Mathematical Sciences Series. Springer-Verlag, 1988. (Citado en páginas 10, 14 y 68.)
- [2] Abhay Ashtekar, Luca Bombelli, and Oscar Reula. The covariant phase space of asymptotically flat gravitational fields. 1990. (Citado en página 3.)
- [3] C. Bär, N. Ginoux, and F. Pfäffle. *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. Esi Lectures in Mathematics and Physics. Amer Mathematical Society, 2007. (Citado en página 63.)
- [4] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984. (Citado en página 3.)
- [5] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov. *Introduction to the theory of quantized fields*. Wiley-Interscience publication. John Wiley, 1980. (Citado en página 77.)
- [6] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, and Todorov I.T. *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*. W.A. Benjamin, Inc., 1975. (Citado en página 4.)
- [7] Raphael Bousso. A Covariant entropy conjecture. *JHEP*, 9907:004, 1999. (Citado en página 2.)
- [8] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C*- and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Springer. (Citado en página 34.)
- [9] Matthias Burkardt. Light front quantization. *Adv.Nucl.Phys.*, 23:1–74, 1996. (Citado en página 66.)
- [10] Shau-Jin Chang and Tung-Mow Yan. Quantum field theories in the infinite momentum frame. 2. Scattering matrices of scalar and Dirac fields. *Phys.Rev.*, D7:1147–1161, 1973. (Citado en página 66.)
- [11] Shau-Jin Chang, Robert G. Root, and Tung-Mow Yan. Quantum field theories in the infinite momentum frame. 1. Quantization of scalar and Dirac fields. *Phys.Rev.*, D7:1133–1148, 1973. (Citado en página 66.)
- [12] Paul A.M. Dirac. Forms of Relativistic Dynamics. *Rev.Mod.Phys.*, 21:392–399, 1949. (Citado en página 66.)

- [13] J. Dixmier. *C*-algebras*. North-Holland mathematical library. North-Holland, 1982. (Citado en página 41.)
- [14] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators. ii. *Acta mathematica*, 128(1):183–269, 1972. (Citado en páginas 54 y 132.)
- [15] Christopher J. Fewster. Lectures on quantum field theory in curved spacetime, 2008. (Citado en página 55.)
- [16] F.G. Friedlander. *The Wave Equation on a Curved Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975. (Citado en página 68.)
- [17] Guido Fubini. Sugli integrali multipli. *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 16: 608–614, 1907. (Citado en página 79.)
- [18] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Texts and Monographs in Physics Series. Springer Verlag, 1996. (Citado en páginas 4, 34, 40 y 115.)
- [19] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975. (Citado en páginas 4 y 50.)
- [20] Thomas Heinzl. Light cone quantization: Foundations and applications. *Lect.Notes Phys.*, 572:55–142, 2001. (Citado en páginas 2 y 66.)
- [21] Stefan Hollands and Robert M. Wald. Local Wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved spacetime. *Commun.Math.Phys.*, 223:289–326, 2001. (Citado en páginas 1, 40 y 41.)
- [22] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators*. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1985. (Citado en página 52.)
- [23] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators: Distribution theory and Fourier analysis*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, 1990. (Citado en páginas 40, 43, 48, 50, 51, 52, 103, 106, 109, 133, 134, 137 y 138.)
- [24] J.V. José and E.J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998. (Citado en página 3.)
- [25] Bernard S. Kay and Robert M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on space-times with a bifurcate killing horizon. *Phys.Rept.*, 207:49–136, 1991. (Citado en páginas 1, 22, 23, 37, 40 y 83.)

- [26] Toshihide Maskawa and Koichi Yamawaki. The Problem of $P_+ = 0$ Mode in the Null Plane Field Theory and Dirac's Method of Quantization. *Prog.Theor.Phys.*, 56:270, 1976. (Citado en página 67.)
- [27] A. Messiah. *Quantum Mechanics. Volume I*. North-Holland Publishing Company, 1961. (Citado en página 3.)
- [28] A. Messiah. *Quantum mechanics*. Number v. 2 in Quantum Mechanics. North-Holland Pub. Co., 1968. (Citado en página 3.)
- [29] V. Moretti. Quantum ground states holographically induced by asymptotic flatness: Invariance under spacetime symmetries, energy positivity and Hadamard property. *Commun.Math.Phys.*, 279:31–75, 2008. (Citado en página 97.)
- [30] M.J. Radzikowski. Micro-local approach to the hadamard condition in quantum field theory on curved space-time. *Commun.Math.Phys.*, 179:529–553, 1996. (Citado en páginas 1, 34, 40, 43 y 56.)
- [31] Michael P. Reisenberger. The symplectic 2-form and poisson bracket of null canonical gravity. 2007. (Citado en páginas 14, 61, 62, 63, 93 y 133.)
- [32] Michael P. Reisenberger. The poisson bracket on free null initial data for gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 101:211101, 2008. (Citado en páginas 2 y 99.)
- [33] J. Slawny. On factor representations and the c^* -algebra of canonical commutation relations. *Commun.Math.Phys.*, 24:151–170, 1972. (Citado en página 34.)
- [34] R.F. Streater and London Mathematical Society. *Mathematics of contemporary physics*. London Mathematical Society Symposia Series. Academic Press, 1972. (Citado en páginas 21 y 35.)
- [35] Alexander Strohmaier, Rainer Verch, and Manfred Wollenberg. Microlocal analysis of quantum fields on curved spacetimes: Analytic wavefront sets and reeh-schlieder theorems. *J.Math.Phys.*, 43:5514–5530, 2002. (Citado en páginas 43 y 56.)
- [36] P. Ullrich. On the restriction of quantum fields to a lightlike surface. *J.Math.Phys.*, 45:3109–3145, 2004. (Citado en páginas 2, 66, 67 y 98.)
- [37] Rainer Verch. Local definiteness, primarity and quasiequivalence of quasifree hadamard quantum states in curved space-time. *Commun.Math.Phys.*, 160:507–536, 1994. (Citado en páginas 1 y 40.)

- [38] R.M. Wald. *General Relativity*. Physics/Astrophysics. University of Chicago Press, 1984. (Citado en páginas 4, 14, 61, 63 y 64.)
- [39] Robert M. Wald. Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics. 1995. (Citado en páginas 3, 22, 64, 68 y 131.)
- [40] Koichi Yamawaki. Zero mode problem on the light front. 1998. (Citado en páginas 2 y 66.)
- [41] Tung-Mow Yan. Quantum field theories in the infinite momentum frame 3. Quantization of coupled spin one fields. *Phys.Rev.*, D7:1760–1779, 1973. (Citado en página 66.)
- [42] Tung-Mow Yan. Quantum field theories in the infinite momentum frame. 4. Scattering matrix of vector and Dirac fields and perturbation theory. *Phys.Rev.*, D7:1780–1800, 1973. (Citado en página 66.)

