
TESIS DE MAESTRIA EN FISICA

*Dinámica de estructuras
piezocomposites complejas.*

*Aplicación a transductores de
ultrasonido*

Autor: Ing. Nicolás Pérez

Director de Tesis: Dr. Carlos Negreira

INDICE DE CONTENIDO

1 INTRODUCCION

- 1.1 Motivación del trabajo
- 1.2 Objetivos
- 1.3 Guía de la Tesis

2 FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD EN MEDIOS PIEZOELECTRICOS

- 2.1 Definiciones
- 2.2 Relación entre esfuerzo y deformación. Ley de Hooke.
- 2.3 Energía elástica
- 2.4 Ondas elásticas en sólidos.
- 2.5 Flujo de energía elástica
- 2.6 Modelo unidimensional del efecto piezoeléctrico
- 2.7 Ecuaciones constitutivas
- 2.8 Ondas elásticas en un medio piezoeléctrico
- 2.9 Estudio unidimensional del acoplamiento piezoeléctrico

3 MODELADO DE TRANSDUCTORES PIEZOELECTRICOS

- 3.1 Modelo de línea de transmisión para sólidos isotópicos
- 3.2 Modelo de Mason
- 3.3 Aplicación al calculo de la impedancia eléctrica
- 3.4 Modelo de Smith para piezocomposites
- 3.5 Modelo de Lamberti
- 3.6 Modelo de Auld para modos laterales
- 3.7 Elementos finitos

4 TECNICAS EXPERIMENTALES

- 4.1 Caracterización eléctrica
- 4.2 Espectroscopia acústica

5 ANALISIS DE LA VIBRACIÓN EN ESTRUCTURAS COMPLEJAS

- 5.1 Piezocomposite 1-3.
- 5.2 Periodicidad en estructura 2-2
- 5.3 Ruptura de la periodicidad en piezocomposite 1-3
- 5.4 Monoelemento de PZT capa gruesa.
- 5.5 Array 2-2 con geometría de cantor.

6 CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

GLOSARIO DE TERMINOS

BIBLIOGRAFIA

APENDICE A1	NOTACION TENSORIAL Y MATRICIAL
APÉNDICE A2	USO DEL SOFTWARE ANSYS
APÉNDICE A3	USO DEL SOFTWARE DE INTERFACE ANSYS-MATLAB
APÉNDICE A4	USO DEL HP4194A
APÉNDICE A5	CONSTANTES DE MATERIALES Y SU REPRESENTACION EN ANSYS
APÉNDICE A6	MODELOS BIDIMENSIONALES EN ANSYS

1

¹ Los apéndices A2, A3 y A4 se encuentran en el documento anexo.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Motivación del trabajo

Existen en la actualidad muchos campos de aplicación del ultrasonido, éstos van desde ensayos no destructivos hasta aplicaciones medicas como la ecografía y la caracterización de tejidos. La gran gama de aplicaciones ha motivado mucho esfuerzo de investigación tanto básica como aplicada.

Buscando mejorar el desempeño de los transductores se desarrollaron nuevas arquitecturas que optimizan la emisión y recepción del ultrasonido, se mejoraron las técnicas de tratamiento de señales y formación de imágenes y surgieron en los últimos años nuevos materiales.

Un ejemplo de nuevo material son los piezocomposites que mostraron un desempeño muy superior al los materiales tradicionales como las cerámicas piezoeléctricas puras o los polímeros piezoeléctricos.

El desarrollo implica además de la tecnología aplicada, la construcción de modelos teóricos que permitan comprender la física básica de estos materiales y predecir su respuesta para ser utilizados como transductores piezoeléctricos.

El problema no es simple, un material piezoeléctrico presenta anisotropía en su comportamiento, el tensor elástico que vincula la deformación con el esfuerzo es de rango cuatro y tiene al menos cinco constantes independientes, además el esfuerzo depende del campo eléctrico aplicado a través del tensor piezoeléctrico de rango tres que contiene al menos tres constantes independientes y por ultimo el campo eléctrico se relaciona con el desplazamiento por un tensor de permitividad de rango dos. El conocimiento de estas características es esencial para modelar las ecuaciones dinámicas de respuesta del transductor. Las ecuaciones dinámicas no tienen en general solución analítica para una geometría arbitraria, aquí debe utilizarse nuevamente la intuición física. Se ensayan soluciones a geometrías simples y se construyen modelos aproximados para las situaciones mas complejas que deben evaluarse cuidadosamente cuando se comparan con la experiencia.

Nuestro laboratorio comenzó en la década pasada el proceso de formar un grupo de investigación en esta área. Se montó un laboratorio capaz de fabricar cerámicas piezoeléctricas, elemento primario para la fabricación de transductores de ultrasonido. En este momento se dispone del equipo necesario y el personal calificado para fabricar las cerámicas. Esto nos brinda la posibilidad de investigar diferentes configuraciones tanto en la composición del material como en la geometría para el desarrollo de los transductores. Además se monto un laboratorio de caracterización que permite estudiar el comportamiento de las muestras para ser utilizadas como transductores y para el estudio de propiedades básicas de los materiales.

Desde mi ingreso al laboratorio he participado en diferentes trabajos que apuntan al mejoramiento de los transductores piezoeléctricos, principalmente buscando optimizarlos para aplicaciones ecografías [62] [67] [28] [29]. En el desarrollo de los mismos quedó clara la necesidad de contar con modelos para la vibración de la superficie en caso de geometrías complejas, principalmente en compuestos de polímero y cerámica, así como de técnicas experimentales que permitieran validarlos.

Transductores piezoeléctricos

Un transductor de ultrasonido es un material capaz de vibrar cuando es excitado eléctricamente, esta vibración produce un campo de desplazamientos en su superficie que se propaga por el medio en contacto con el transductor, este es el modo de emisión. De igual forma una onda de presión incidente en la superficie del transductor produce la deformación de la misma generando una señal eléctrica, modo de recepción.

Las cerámicas piezoeléctricas son uno de los materiales mas utilizados con este fin; el efecto piezoeléctrico acopla las propiedades mecánicas con las eléctricas. Un campo eléctrico aplicado produce una deformación y viceversa. [4] [18] [44]

Conociendo el campo de desplazamientos en la superficie del transductor puede utilizarse la integral de Rayleigh-Kirchoff para propagar el campo y calcular la presión en un punto arbitrario de la misma [85].

Una imagen ecográfica se forma concentrado el ultrasonido en un punto, si existe un cambio en las propiedades del medio en ese punto se produce un eco, esta señal será mas intensa cuanto mayor sea el cambio en las propiedades del medio. Cambiando el punto de focalización se puede formar un mapeo del medio bajo estudio que se presenta como una imagen.

La resolución en la formación de este tipo de imágenes acústicas esta limitada por la capacidad de focalizar el ultrasonido en un punto del espacio, que como ya se menciono depende de cómo fue generado en la superficie. [49] [8] [82]

Esto motiva la necesidad de modelar y medir vibración de la superficie de un transductor.

Los modos de vibración dependen de la geometría, las propiedades elásticas y las propiedades piezoeléctricas del transductor. Por ejemplo en un disco cuyo diámetro sea mucho mayor que el espesor y que posee propiedades piezoeléctricas en la dirección del eje tiene dos modos de vibración, los modos espesor y los modos radiales. [27]

La transferencia de energía entre el medio y el transductor depende de la velocidad de propagación del ultrasonido en cada medio y la densidad, el estudio es análogo a la propagación entre dos medios ópticos con diferentes índices de refracción. [4] [18].

Transductores piezocomposites

Buscando mejorar el desempeño de los transductores de ultrasonido se construyen nuevos materiales llamados piezocomposites. Un piezocomposite consiste en un material compuesto de cerámica piezoeléctrica y polímero, hay tres factores que clasifican estos materiales [78] [79] [80] [81] [82]

- Conectividad, la conectividad da idea de la distribución espacial de cada fase. En los sistemas bifásicos se utilizan dos números para representarla, el primero corresponde a la cerámica y el segundo al polímero y dicen en cuantas direcciones un elemento de volumen está conectado con su misma fase.
- Tipos de material, hay diferentes composiciones de cerámica y polímero
- Fracción de volumen, se llama al porcentaje de cerámica en el compuesto.

¿Que factores nos dicen si un dispositivo es útil con transductor de ultrasonido?

- Constante dieléctrica, en las aplicaciones es deseable tener una constante dieléctrica alta, esto hace que la impedancia eléctrica del transductor, que fuera de la resonancia es esencialmente un capacitor, sea alta y la corriente menor. La cerámica piezoeléctrica presenta una constante dieléctrica del orden de $1000 \epsilon_0$ mientras que en los polímeros es menor que $10 \epsilon_0$. En un piezocomposite la constante dieléctrica efectiva varía en forma lineal con la fracción de volumen, esto permite ajustar la constante dieléctrica dentro del rango permitido
- Impedancia acústica, la impedancia acústica caracteriza la propagación de ondas en un medio, es el producto de la velocidad de propagación por la densidad del mismo. La relación de impedancias acústicas determina el porcentaje de energía que transmite una onda en una interfase, esto es análogo a lo que ocurre en las líneas de transmisión eléctrica o con el índice de refracción en óptica. El medio al que se transmite la energía tiene generalmente las propiedades del agua, con una impedancia acústica de 1,5 Mrayl. Por otra parte las cerámicas piezoeléctricas tienen una impedancia típica de 30 Mrayl, lo que produce un desacople muy grande. Como los polímeros tienen una impedancia del orden de 5 Mrayl, ajustando la fracción de volumen puede bajarse la impedancia del transductor mejorando la eficiencia del mismo.
- Factor de conversión electromecánica, contra la intuición primaria el factor de acoplamiento de un piezocomposite es mayor que el de la cerámica pura. La razón de este comportamiento es que cada elemento de volumen esta lateralmente fijo en la cerámica pura, y para deformarse en la dirección longitudinal debe también hacerlo lateralmente. Como el polímetro es mucho mas blando que la cerámica, en el piezocompuesto este efecto se ve muy disminuido por lo que se logran mayores deformaciones longitudinales y con ello un mayor factor de acoplamiento.

En el desarrollo de transductores prácticos se busca mejorar estos factores los piezocomposites se presenta como la mejor alternativa cuando se pesan todos.

Desde el punto de vista de los modos de vibración los piezocomposites atenúan los modos radiales, o en geometrías rectangulares los modos que resuenan en el plano normal a la dirección de polarización. [26] [27]

En primera aproximación los modelos utilizados para piezocomposites consideran que los transductores se comportan como un pistón homogéneo, despreciando las vibraciones locales en la superficie. Pero existen modos de vibración introducidos por la periodicidad de la red que dan lugar a frecuencias espúreas que son perjudiciales cuando se pretende mejorar la calidad de las imágenes acústicas. [49] [6] [22].

Los fenómenos físicos involucrados en la propagación de ondas en este tipo de estructuras pueden tratarse en primera aproximación con técnicas similares a las utilizadas en física de estado sólido para medios periódicos. Se observa la aparición de bandas prohibidas de frecuencia donde se cumple la condición de difracción de Bragg. Esto muestra la complejidad del problema que se quiere tratar [2] [3] [4]

Muchos autores han abordado el problema de las vibraciones en la superficie de los transductores piezoeléctricos, podemos decir que existen tres estrategias para atacar el problema:

- Calculo de soluciones analíticas de la ecuación de onda, con las condiciones de borde correctas solo puede encararse para geometrías muy simples. La solución queda limitada a casos casi triviales o que desprecian características relevantes del problema. Es muy difícil considerar sistemas no homogéneos. [3] [4] [49] [22] [14]
El uso de modelos físicos aproximados es una técnica muy usual en el diseño de transductores, permite modelar las características principales eléctricas y mecánicas bajo ciertas hipótesis simplificadoras. Estas hipótesis en general no consideran la vibración de la superficie, pero existen desarrollos que intentan reducir el problema complejo de un transductor real a la suma de problemas simples con un modelo físico aproximado. [50] [51] [52] [54] [9] [30] [32] [33] [84] [81]
- Método de los elementos finitos, este método divide el problema en pequeños pedazos, llamados elementos, de los cuales tenemos las ecuaciones dinámicas que debe cumplir y las ecuaciones constitutivas que caracterizan al material. Los elementos se vinculan de forma que la solución al problema resuelve todos los elementos simultáneamente. Dividiendo el problema en elementos mas pequeños se aproxima mejor la solución real del problema, es un método computacional del tipo fuerza bruta. Si se quieren ver mas detalles hay que invertir mas esfuerzo de calculo. La formulación de las ecuaciones es integral y se basa en el principio de los trabajos virtuales. Esta técnica ha ganado gran aceptación en la actualidad y se presenta como la alternativa viable para el problema de vibraciones en estructuras complejas.
La alternativa de desarrollar un software completo de elementos finitos que permita estudiar la vibración de la superficie en un piezoeléctrico esta fuera de los objetivos del presente trabajo, por esa razón opte por utilizar software comercial en las aplicaciones de este método. [1] [40] [38] [61] [63] [87] [69] [70] [71]
- Método de diferencias finitas. Discretiza el dominio de solución y resuelve las ecuaciones diferenciales como ecuaciones en diferencias. Es muy utilizado en el estudio de propagación de ondas en medios homogéneos o con variaciones suaves. Existen trabajos que lo aplican a problemas de vibración de estructuras pero muy simplificados. [14] [74].

1.2 Objetivos

Los objetivos perseguidos en el trabajo de tesis pueden agruparse en tres bloques, comenzando por analizar los principios físicos básicos del problema

- Resumir los principios físicos involucrados en el estudio de vibraciones en materiales piezoeléctricos.
- Estudiar los modelos físicos utilizados en el estudio de transductores piezoeléctricos, profundizando en algunos casos que pueden dar lugar a estudio de vibraciones en la superficie.
- Estudiar el método de elementos finitos en particular la formulación física de las ecuaciones para el caso piezoeléctrico, prestando particular atención a la interpretación física de los resultados numéricos obtenidos por este método.

Como segundo objetivo se busca estudiar vibraciones en la superficie en estructuras piezocomposites complejas, este objetivo apunta a insertar el trabajo de tesis como un eslabón mas en la línea de investigación del laboratorio

- Aplicación a un piezocomposite 1-3. En particular se estudia la periodicidad y el efecto de su ruptura los modos laterales asociados a la misma.
- Aplicación a pizocomposites de conectividad 2-2. En particular se estudian los modos laterales y el efecto de romper la periodicidad en dichas estructuras.
- Aplicación al modelado de transductores de película gruesa.
- Aplicación a piezocomposites con conectividad 2-2 y estructura fractal. En particular se estudia una geometría de cantor.

Por ultimo debe montarse en el laboratorio la parte practica que permita realizar los objetivos, lo que además de ser parte del trabajo de tesis deja en el laboratorio implementadas y documentadas las herramientas para estudiar vibraciones de superficie

- Implementar un sistema que permita relevar la vibración de la superficie de un transductor piezoeléctrico. En particular se busca una alternativa original al método de interferometría óptica.
- Implementar el software de interfase necesario para manejar los instrumentos y el equipo de medida.
- Documentar la aplicación de un software comercial de elementos finitos para modelar la vibración en piezoeléctricos.
- Implementar el software de interfase necesario entre el programa de elementos finitos y el programa de calculo numérico MATLAB utilizado habitualmente en nuestro laboratorio.

1.3 Guía de la tesis

La tesis comienza con un capítulo de fundamentos teóricos en el que se busca presentar el estudio y modelado de los transductores piezoeléctricos comenzando desde los principios básicos y mantener una secuencia hasta los casos particulares de aplicación práctica.

Primero se repasa la teoría de la elasticidad poniendo énfasis en la propagación de ondas elásticas y el flujo de energía asociado a las mismas.

Luego se presenta el efecto piezoeléctrico, describiendo un modelo físico simple y presentando las ecuaciones constitutivas tensoriales que resultan de él. Se estudia también la propagación de ondas en estos medios y los parámetros de interés para la caracterización de los mismos como transductores de ultrasonido.

En el tercer capítulo se describen los modelos de transductores, comenzando por los más simples de modo pistón hasta llegar a situaciones complejas en estructuras compuestas. Se discute el alcance de las hipótesis utilizadas y la aparición de fenómenos como las bandas prohibidas.

Por último se resume el método de elementos finitos para la aplicación a estructuras piezoeléctricas lineales.

Como cuarto capítulo se resumen las técnicas experimentales utilizadas. Estas son la espectroscopia acústica y la caracterización eléctrica de los transductores. Todo el capítulo se hace en base a un ejemplo concreto de un disco homogéneo y se comparan los resultados de las medidas con las simulaciones y los modelos teóricos.

El quinto capítulo se muestra como atacar el estudio de vibraciones en estructuras complejas. Cuando es posible los resultados de las mediciones se comparan con los datos obtenidos de las simulaciones. Aquí se introducen consideraciones prácticas para aplicar el método de elementos finitos en los casos estudiados.

Por último se presentan las conclusiones y el desarrollo futuro.

Cabe destacar que como anexo a la tesis existen tres apéndices que describen el uso del software comercial ANSYS para su uso en la simulación de transductores piezoeléctricos, el software de interfase ANSYS – Matlab y el software de interfase HP4194A - Matlab.

CAPITULO 2

FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD EN MEDIOS PIEZOELECTRICOS

En este capítulo se presentan los fundamentos físicos para comprender la propagación de ondas en sólidos piezoeléctricos. El enfoque intenta ser ordenado y riguroso pero sin extenderse demasiado en demostraciones que se encuentran en las referencias generales

[18] [4] [58][44] [16]

En todo el capítulo se utiliza la notación tensorial habitual en física, sin embargo para los capítulos siguientes es conveniente utilizar la notación matricial de ingeniería.

En el apéndice **A1** se presentan los detalles de notación.

El desarrollo comienza con las definiciones habituales de la teoría de elasticidad, luego se presentan las ecuaciones constitutivas del sólido y los argumentos termodinámicos y de simetría que permiten simplificarlas. Prosigue con el estudio de la propagación de ondas en sólidos y las diferentes polarizaciones posibles, presentando después las ecuaciones constitutivas de los materiales piezoeléctricos.

Finalmente se estudia la propagación en este tipo de materiales y las características relevantes de la solución para ser aplicadas al estudio de transductores.

2.1 Definiciones

Consideramos un sólido sin deformar, la posición de cada punto queda determinada por el vector posición

$$\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Definición, vector *desplazamiento*. Se define el vector desplazamiento como la diferencia de los vectores posición antes y después de deformarse cuyas coordenadas son

$$\{u\} = \{x'\} - \{x\}$$

$$u_i = x'_i - x_i$$

Si se obtiene el vector $\{u(x)\}$ correspondiente a todos los puntos del sólido se conoce completamente la deformación del mismo.

Definición, *distancia*. Se define la distancia dl entre dos puntos como la norma euclídea de la diferencia entre los vectores posición

$$dl = \sqrt{dx_i^2}$$

Llamamos $\{dx\} = \{x_1\} - \{x_2\}$ al vector que separa estos puntos antes de deformarse y al $\{dx'\} = \{x'_1\} - \{x'_2\}$ correspondiente deformado.

Calcularemos la diferencia entre las longitudes al cuadrado dl^2 y dl'^2

$$dl^2 = dx_i^2$$

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2$$

$$du_i(x) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$dl'^2 = dx_i^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_k dx_j$$

Si consideramos pequeños desplazamientos pueden despreciarse los términos cuadráticos resultando:

$$dl'^2 - dl^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j$$

Las nueve derivadas parciales de los desplazamientos forman un tensor simétrico de rango dos S_{ij} .

Definición, **tensor de deformación**. Se define el tensor de deformación como el tensor de rango dos formado por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Ec. 2.1.1}$$

$$S_{ij} = S_{ji}$$

En general las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden descomponerse en fuerzas de volumen y fuerzas de superficie. Ejemplos de fuerzas de volumen son la gravedad y la fuerza sobre una distribución volumétrica de carga en un campo eléctrico. Fuerzas de superficie son las de contacto directo entre cuerpos (siempre estamos considerando situaciones macroscópicas), o la fuerza sobre un conductor cargado en un campo eléctrico.

Las fuerzas de superficie pueden descomponerse en una componente normal y dos rasantes o tangenciales, el valor de las tensiones rasantes depende de la base de vectores elegida para expresarlas.

Definición, **tensión normal**. Se define la tensión normal como la proyección sobre la normal de la fuerza aplicada en una superficie por unidad de superficie

Tensión normal:
$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\{F\} \cdot \{n\}}{\Delta S} \right)$$

Definición, **tensión rasante**. Se define la tensión rasante como la proyección sobre el plano tangente a una superficie de la fuerza aplicada por unidad de superficie

Tensión rasante:
$$\gamma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\{F\} \cdot \{t\}}{\Delta S} \right)$$

donde $\{t\}$ es un versor que pertenece a ΔS y al plano formado por $\{n\}$ y $\{F\}$.

Cuando estudiamos un sólido sometido a deformación, estamos interesados en las tensiones internas que actúan. Estas tensiones internas, que dependen del punto considerado, se obtienen cortando el sólido con planos imaginarios y sustituyendo una sección del sólido por la fuerza necesaria para mantener el equilibrio.

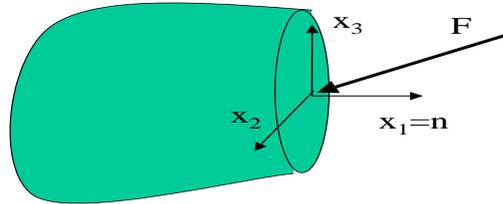


Figura 2.1 Corte del sólido

Expresado en la base x_1, x_2, x_3 tenemos tres tensiones resultantes. Estas tres tensiones se denominan

- T_{11} tensión normal correspondiente la plano de normal x_1 en la dirección de x_1
- T_{12} tensión rasante correspondiente la plano de normal x_1 en la dirección de x_2
- T_{13} tensión rasante correspondiente la plano de normal x_1 en la dirección de x_3

Repitiendo el proceso con planos de normal x_2 y x_3 tenemos un conjunto de nueve tensiones para el punto considerado. Estos valores evidentemente dependen de la base elegida para la representación.

Pueden agruparse de matricial de la siguiente manera:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Si elegimos un nuevo sistema de referencia ortonormal x'_1, x'_2, x'_3 la ley de transformación de T es:

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha_{ik} x_k \\ T'_{ij} &= \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.1.2}$$

Definición, **tensor de esfuerzos**. Llamamos tensor de esfuerzos al tensor de rango dos T .

2.1 Relación entre esfuerzo y deformación. Ley de Hooke.

Estudiaremos la relación entre el esfuerzo y la deformación de materiales elásticos, éstos recuperan su configuración original después de eliminadas las tensiones. Un sólido elástico puede no tener una relación lineal entre tensión y deformación, la elasticidad solo implica la independencia de la historia del sistema.

Las tensiones internas son función de la deformación en ese punto

$$T_{ij} = T_{ij}(S_{lk})$$

de esta forma puede desarrollarse en serie de Taylor en torno a la configuración sin deformar

$$T_{ij}(S_{lk}) = T_{ij}(0) + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{lk}} \right)_{S_{lk}=0} S_{lk} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{lk} \partial S_{mn}} \right)_{S_{lk}=0} S_{lk} S_{mn} + \dots$$

Como la tensión sin deformar es nula, la aproximación al primer orden se reduce a

$$T_{ij} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{lk}} \right)_{S_{lk}=0} S_{lk}$$

$$c_{ijkl} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{lk}} \right)_{S_{lk}=0} \quad \text{Ec. 2.2.1}$$

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{lk}$$

Las derivadas del tensor de segundo rango T forman un tensor de rango cuatro y son la expresión mas general para la relación entre T y S en pequeñas deformaciones. Esta relación lineal es conocida como la ley de Hooke.

Como el tensor de tensiones y el de deformación son simétricos se reduce el número de coeficientes independientes de 81 a 36

$$T_{ij} = T_{ji}$$

$$S_{kl} = S_{lk}$$

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jilk} = c_{klij}$$

2.3 Energía elástica.

Al deformar un medio elástico se almacena energía en su interior. Esta es una energía potencial a partir de la cual puede deducirse el tensor de tensiones de la forma habitual, igualando la variación de la energía al trabajo realizado por las fuerzas externas al producirse la deformación

$$\delta U = \int_V \rho g_i du_i dv + \int_S p_i du_i ds$$

La presión sobre cada punto de la superficie puede expresarse como la proyección del tensor de esfuerzos sobre la normal $\{n\}$ a la superficie. Luego aplicamos el teorema de la divergencia para obtener

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \rho g_i du_i dv + \int_s T_{ik} du_i n_k ds \\ \delta U &= \int_V \rho g_i du_i dv + \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} du_i) dv \\ \delta U &= \int_V \left(\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \right) du_i dv + \int_V T_{ik} \frac{\partial du_i}{\partial x_k} dv\end{aligned}$$

Si consideramos un proceso reversible el sistema se encuentra instantáneamente en equilibrio y utilizando que el tensor es simétrico

$$\begin{aligned}\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= 0 \\ \delta U &= \frac{1}{2} \int_V T_{ik} d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dv = \int_V T_{ik} dS_{ik} dv\end{aligned} \quad \text{Ec 2.3.1}$$

La densidad volumétrica de energía puede expresarse como función de la entropía y la deformación

$$\begin{aligned}u_e &= u_e(\sigma, S) \\ du_e &= \Theta d\sigma + T_{ik} dS_{ik} \\ T_{ik} &= \left[\frac{\partial u_e}{\partial S_{ik}} \right]_{\sigma}\end{aligned} \quad \text{Ec. 2.3.2}$$

Sustituyendo esta relación en el tensor elástico obtenemos las relaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}c_{ijkl} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \\ c_{klij} &= \frac{\partial T_{kl}}{\partial S_{ij}} \\ c_{ijkl} &= c_{klij} = \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right]_{\sigma}\end{aligned} \quad \text{Ec. 2.3.3}$$

Esta relación nos permite reducir el número de coeficientes del tensor de 36 a 21. Aquí se obtuvieron los valores del tensor elástico a entropía constante, estos son los que interesan en el caso de propagación de ondas ultrasónicas ya que las vibraciones son muy rápidas y no hay tiempo para intercambiar calor.

Para obtener los coeficientes en condiciones isotérmicas, utilizamos al energía libre de Helmholtz como función de la temperatura y la deformación.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= u_e - \Theta \sigma \\ d\mathfrak{F} &= du_e - \Theta d\sigma - \sigma d\Theta \\ du_e &= \Theta d\sigma + T_{ik} dS_{ik} \\ d\mathfrak{F} &= -\sigma d\Theta + T_{ik} dS_{ik} \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}(\Theta, S_{ij}) \\ T_{ik} &= T_{ik} = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial S_{ik}} \right)_{\Theta}\end{aligned}$$

Y podemos encontrar una ecuación de Maxwell para los coeficientes isotérmicos

$$c_{ijkl} = c_{klij} = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{\Theta}$$

Por ultimo calcularemos la expresión de la energía elástica por unidad de volumen en el caso adiabático, los coeficientes c corresponden a este caso. Se utiliza la simetría al permutar i, j por k, l

$$\begin{aligned}du_e &= \Theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} \\ du_e &= \Theta d\sigma + c_{ijkl} S_{kl} dS_{ij} \\ du_e &= \Theta d\sigma + \frac{1}{2} (c_{ijkl} S_{kl} dS_{ij} + c_{klij} S_{ij} dS_{kl}) \\ du_e &= \Theta d\sigma + \frac{1}{2} c_{klij} d(S_{ij} S_{kl})\end{aligned}$$

Después de la integración la densidad de energía interna puede escribirse

$$u_e(\sigma, S_{ik}) = \Theta \sigma + \frac{1}{2} c_{klij} S_{ij} S_{kl} = u_0(\sigma) + \frac{1}{2} c_{klij} S_{ij} S_{kl}$$

Puede llegarse a una expresión análoga en función de los coeficientes c isotérmicos a partir de la función de Helmholtz

$$\mathfrak{F}(\Theta, S_{ik}) = \mathfrak{F}_0 + \frac{1}{2} c_{klij} S_{ij} S_{kl}$$

Entonces podemos definir la energía potencial elástica tanto para el caso isotérmico como para el adiabático

$$\Phi_e = \frac{1}{2} c_{klij} S_{ij} S_{kl} \quad \text{Ec. 2.3.4}$$

2.4 Ondas elásticas en sólidos.

En este análisis se considerara que el desplazamiento en un punto depende de la posición y del tiempo

$$u_i = u_i[x_k, t]$$

La ecuación del movimiento para un punto del medio continuo se obtiene a partir de la ley de Newton, esta ecuación se aplicará a un pequeño volumen del sólido ΔV y se hará específica por unidad de volumen. La fuerza por unidad de volumen proyectada en la dirección i puede escribirse como

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + X_i = f_i$$

Si despreciamos las fuerzas de volumen X_i

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{Ec. 2.4.1}$$

Sustituimos el tensor de tensiones con la ley de Hooke

$$\begin{aligned} T_{ji} &= c_{ijkl} S_{lk} \\ S_{lk} &= \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.4.2}$$

La solución de estas ecuaciones da la propagación de ondas en cada dirección i . Esta solución representa el caso mas general de propagación en un medio anisotrópico. Por analogía a la ecuación de ondas en el caso homogéneo se probaran soluciones de la forma

$$u_i(x, t) = u_i^o f\left(t - \frac{\{n\} \{x\}}{v}\right)$$

Se calculará la velocidad de fase y la polarización de la onda u_i^o . Derivando y sustituyendo en la ecuación de ondas se obtiene

$$\rho v^2 u_i^o = c_{ijkl} n_j n_k u_i^o$$

Definimos el tensor de Christoffel como

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k \quad \text{Ec. 2.4.3}$$

Sustituyendo esta definición

$$\Gamma_{il} u_i^o = \rho v^2 u_i^o$$

Esta ecuación nos muestra que existen tres polarizaciones posibles, estas son los vectores propios del tensor de Christoffel, a cada vector propio le corresponde un valor propio ρv^2

Resumiendo, una onda plana que se propaga en la dirección \vec{n} tiene en el caso mas general tres polarizaciones diferentes, las cuales no necesariamente son longitudinales o transversales, y pueden tener diferentes velocidades según la polarización.

Puede demostrarse que el tensor de Christoffel es simétrico, sus valores propios son reales y positivos, esto implica velocidades de fase reales, y las polarizaciones son mutuamente ortogonales. [18]

En general, el vector desplazamiento de las distintas polarizaciones no es perpendicular o tangente a la dirección de propagación $\{n\}$. La polarización con $\{u\}$ mas cercano a $\{n\}$ se llama casi-longitudinal, las otras son llamadas casi-transversales. Usualmente estas ultimas se propagan mas lentamente.

Ejemplo: sólido isotrópico

El caso mas simple a considerar es un medio isotrópico, en el las constantes elásticas pueden ser expresadas en función de los coeficientes de Lamé λ y μ que vienen dados por

$$\lambda = c_{12}$$

$$\mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

Ver apéndice **A1** para la expresión de los coeficientes c en forma matricial.

Sustituyendo en la expresión del tensor de Christoffel

$$\Gamma_{il} = (\lambda + \mu)n_i n_l + \mu \delta_{il}$$

Para calcular las velocidades resolvemos la ecuación de valores propios

$$\Gamma_{il} u_i^o = \rho v^2 u_i^o$$

$$(\lambda + \mu)n_i n_l u_l^o + \mu u_i^o = \rho v^2 u_i^o$$

Tenemos dos soluciones

$$\{n\} \cdot \{u\}^o = 0$$

que corresponde a una onda de corte de velocidad

$$V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{Ec. 2.4.4}$$

y otra que corresponde a una onda longitudinal

$$\left(\begin{matrix} \{n\} \\ \{u\} \end{matrix} \right) \{n\} = \{u\}$$

con velocidad

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{Ec. 2.4.5}$$

Entonces para un sólido isotrópico dada una dirección de propagación tenemos una onda longitudinal y una onda transversal o *shear*.

Sus velocidades cumplen

$$V_T < \frac{V_L}{\sqrt{2}}$$

2.5 Flujo de energía elástica

Cuando una onda elástica se propaga transporta energía. Estudiaremos el flujo de energía y se definirá el vector de Pointing para el caso acústico. Al igual que para ondas electromagnéticas el vector de Pointing representa la potencia transmitida por unidad de área.

Cuando consideráramos fenómenos dinámicos la fuerza por unidad de volumen no es mas nula

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}) du_i dv + \int_V T_{ik} d(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}) dv \\ \rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.5.1}$$

Sustituyendo podemos obtener una expresión para la densidad de energía cinética

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}) du_i dv + \int_V T_{ik} dS_{ik} dv \\ du_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \\ \int_V (\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}) \frac{\partial u_i}{\partial t} dt dv &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho (\frac{\partial u_i}{\partial t})^2 \right] dt dv = \int_V \frac{\partial E_c}{\partial t} dt dv \end{aligned}$$

Aquí hemos definido la energía cinética por unidad de volumen

$$E_c = \frac{1}{2} \rho (\frac{\partial u_i}{\partial t})^2 \quad \text{Ec. 2.5.2}$$

El incremento de energía contenida en el volumen es igual al trabajo realizado por el esfuerzo mecánico en la superficie

$$dU = \oint_S T_{ik} n_k du_i ds$$

Entonces la potencia

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \oint_S T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t} n_k ds$$

Podemos definir ahora el vector de Pointing acústico Pa . Como siempre su dirección es la del flujo de energía y su modulo potencia por unidad de área.

$$Pa_k = -T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \oint_S Pa_k n_k ds = 0 \quad \text{Ec. 2.5.3}$$

También definimos el vector velocidad de energía como

$$\vec{V}^e = \frac{\vec{Pa}}{E}$$

El vector velocidad de energía muestra la dirección en que esta se propaga, también puede llamarse rayo acústico análogo al rayo luminoso en óptica. Cuando el rayo es ortogonal a los frentes de onda plana, o sea paralela n , se dice que es un modo de propagación puro.

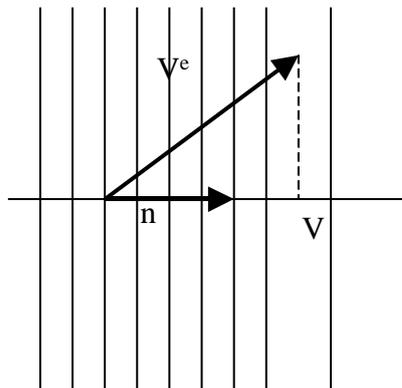


Figura 2.2 Proyección de la velocidad de energía

2.6 Modelo unidimensional del efecto piezoeléctrico

En algunos casos la ley de Hooke no describe totalmente la relación entre la deformación y el esfuerzo. Algunos materiales se polarizan eléctricamente cuando se deforman, este efecto, llamado efecto piezoeléctrico directo, se manifiesta por ejemplo en la aparición de cargas de polarización en la superficie de un medio deformado.

Este es un fenómeno lineal, la polarización cambia de signo cuando el signo de la deformación cambia.

La piezoelectricidad es un fenómeno microscópico complejo, asociado a la simetría de las moléculas que constituyen el material o las redes cristalinas, pero puede plantearse un modelo simple que da información cualitativa del fenómeno.

Los átomos y moléculas en un sólido se apartan de sus posiciones de equilibrio cuando el medio se deforma, este desplazamiento genera un momento dipolar y dependiendo de la simetría el promedio por unidad de volumen puede ser distinto de cero, esto es tenemos una polarización macroscópica resultante de la deformación.

El efecto piezoeléctrico directo siempre esta acompañado del efecto piezoeléctrico inverso, esto es cuando el material se somete a un campo eléctrico externo se deforma. El efecto inverso no solo es lineal sino que queda determinado por la misma relación que el directo.

El efecto piezoeléctrico puede incluirse en las ecuaciones constitutivas de la siguiente manera, a la ley de Hooke hay que adicionar un termino dependiente del campo eléctrico, como el campo es un vector y el tensor de deformaciones es de rango dos, el termino debe ser un tensor de rango tres al que llamamos e . Para la ecuación constitutiva eléctrica tenemos que el desplazamiento es la contracción del tensor dieléctrico con el campo, para agregar un termino proporcional al la deformación de nuevo se necesita un tensor de rango tres, cuya contracción con la deformación de un vector, veremos a la largo de este punto que este tensor es $-e$.

Existe otro efecto llamado el efecto electrostrictivo que es cuadrático del campo aplicado, la causa también es la fuerza eléctrica sobre las moléculas del material, pero se presenta en todos los tipos de material y es un efecto de segundo orden. En general es despreciable frente al piezoeléctrico.

Modelo simple

Para plantear nuestro modelo suponemos una situación unidimensional donde partículas cargadas están ligadas por fuerzas elásticas. Esto puede ser una manera simple de pensar en la situación de equilibrio para una molécula.

Suponemos que la carga total del sistema es nula, pero están distribuidas de manera no simétrica con respecto al centro. El referencial esta centrado en la carga +

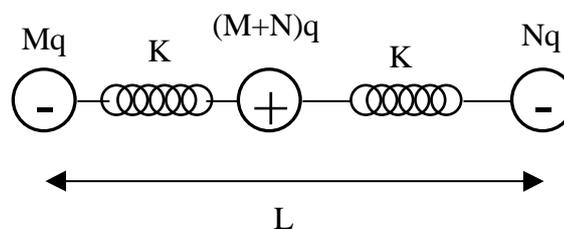


Figura 2.3 Modelo unidimensional

Para obtener la expresión del desplazamiento eléctrico D cuando se deforma el sistema, aplicamos una fuerza externa F al sistema. Como supongo las constantes elásticas iguales tenemos igual desplazamiento mecánico de cada extremo.

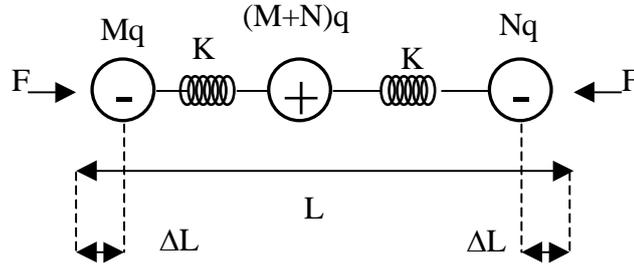


Figura 2.4 Deformación producida por una fuerza externa

Aquí se utilizan

$q(M+N)$ Carga total de la molécula
 n Número de moléculas por unidad de volumen

Cuando el sistema no está deformado la polarización macroscópica P_e es no nula

$$P_e = \frac{\sum p_{ei}}{\Delta V} = \frac{n\Delta V}{\Delta V} [Mql_M - Nql_N]$$

Después de la deformación

$$P_e = n[Mq(l_M - \Delta l) - Nq(l_N - \Delta l)]$$

Entonces el cambio de polarización entre ambos estados de deformación es

$$\Delta P_e = n[-Mq\Delta l + Nq\Delta l] = nq(N - M)\Delta l$$

Esta variación en la polarización es la producida por la fuerza externa y es proporcional a la deformación. Llamamos e al coeficiente de proporcionalidad

$$e = nq(N - M)l$$

$$\Delta P = e \frac{\Delta l}{l} = eS$$

El desplazamiento eléctrico en ausencia de deformación

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$P = \chi^S E$$

Se modificara con el aumento de polarización

$$P = \chi^S E + \Delta P = \chi^S E + eS$$

$$D = \epsilon_0 E + \chi^S E + eS$$

Con lo que obtenemos la nueva ecuación constitutiva

$$D = \varepsilon E + eS \quad \text{Ec. 2.6.1}$$

Ahora estudiaremos que ocurre cuando se aplica un campo eléctrico externo

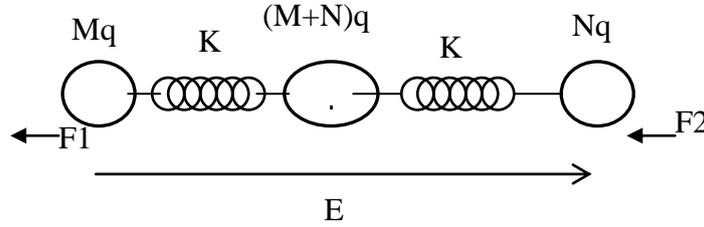


Figura 2.5 Campo eléctrico aplicado

Sobre los extremos aparecen fuerzas debidas al campo eléctrico, como la tensión es la fuerza normal por unidad de superficie

$$T_1 = -\frac{qME}{A}nV = -qMEnl$$

$$T_2 = \frac{qNE}{A}nV = qNEnl$$

$$\Delta T = T_2 + T_1 = q(N - M)nl = eE$$

Utilizando la ley de Hooke, la tensión total debe ser

$$T + \Delta T = c^E S$$

$$T = c^E S - eE \quad \text{Ec. 2.6.2}$$

Obtenemos la ecuación constitutiva mecánica. Los coeficientes c^E y ε^S son la constante elástica a campo cero y la permitividad a deformación cero.

Vemos en este modelo que la piezoelectricidad esta asociada a la falta de simetría respecto al centro y que en este caso puede existir un momento dipolar en ausencia de campo externo.

2.7 Ecuaciones constitutivas

La extensión tridimensional del coeficiente piezoeléctrico e es un tensor de rango tres e_{ijk} . Las ecuaciones constitutivas que generalizan las 2.6.1 y 2.6.2 se escriben como

$$D_i = \varepsilon^S_{ij} E_j + e_{ijk} S_{jk}$$

$$T_{ij} = c^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad \text{Ec. 2.7.1}$$

Estas ecuaciones son la aproximación lineal al problema, que es valida para pequeñas deformaciones y campos. En general será el caso en este estudio.

Las constantes piezoeléctricas vinculan las magnitudes elásticas con las eléctricas. Pueden expresarse

$$e_{ijk} = \left(\frac{\partial D_i}{\partial S_{ik}} \right)_E$$

$$e_{ijk} = - \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial E_i} \right)_S$$

Dada la simetría de T_{ij} y S_{ij}

$$e_{ijk} = e_{ikj}$$

De las 27 constantes independientes del tensor de rango 3 sobreviven 18 por la simetría. Sobre un material piezoeléctrico actúan fuerzas mecánicas y eléctricas, consideraremos como antes un proceso reversible

$$\delta W_M = T_{ij} dS_{ij}$$

$$\delta W_E = E_i dD_i$$

$$dU = \delta Q + \delta W_M + \delta W_E$$

$$dU = T d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i$$

La energía U es una función que depende de la entropía, al deformación y el desplazamiento eléctrico. Introducimos mediante una transformación de Legendre el potencial termodinámico ζ para tener una función del campo eléctrico

$$\zeta = U - E_i D_i$$

$$d\zeta = \Theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i$$

Las tensiones y el desplazamiento eléctrico son las fuerzas generalizadas que se obtienen como derivadas parciales del potencial

$$T_{ij} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial S_{ij}} \right)_{T,E}$$

$$D_i = - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial E_i} \right)_{T,S}$$

Tomando las derivadas cruzadas encontramos la ecuación de Maxwell para este caso

$$- \left(\frac{\partial D_i}{\partial S_{ij}} \right)_{T,E} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_i} \right)_{T,S_{ij}} = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial E_i \partial S_{ij}} \right)_T$$

$$e_{kij} = \left(\frac{\partial D_i}{\partial S_{ij}} \right)_{T,E} = - \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_i} \right)_{T,S_{ij}} \quad \text{Ec. 2.7.2}$$

Esto muestra que los coeficientes son iguales en los dos efectos piezoeléctricos como se había planteado en las ecuaciones constitutivas. Las derivadas anteriores son a temperatura, campo eléctrico o deformación constantes. Si se cambian las condiciones también cambian las constantes, como esto es lo que ocurre un sistema real estudiamos como quedan las ecuaciones para el caso de campo eléctrico y tensión mecánica independientes. Para ello utilizamos el potencial termodinámico Ψ

$$\Psi = \Phi - T_{jk} S_{jk} = U - E_i D_i - T_{jk} S_{jk}$$

$$d\Psi = \Theta d\sigma - S_{jk} dT_{jk} - D_i dE_i$$

$$S_{jk} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T_{jk}} \right)_{T,E}$$

$$D_i = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E_i} \right)_{T,T_{ij}}$$

Como antes tomando las derivadas cursadas obtenemos la ecuación de Maxwell que usamos para definir las nuevas constantes piezoeléctricas

$$d_{ijk} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_i \partial T_{jk}} \right)_T = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E_i} \right)_{T,T_{ij}} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T_{ij}} \right)_{T,E}$$

Utilizando la compilancia s^E a campo eléctrico constante y la permitividad a tensión constante obtenemos el nuevo conjunto de ecuaciones constitutivas

$$S_{jk} = d_{ijk} E_i + s_{jklm}^E T_{lm}$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}^T E_j + d_{ijk} T_{jk}$$

Para otros conjuntos de variables independientes ver [44]

2.8 Ondas elásticas en un medio piezoeléctrico

Como hemos visto, en un material piezoeléctrico las magnitudes eléctricas y mecánicas están vinculadas. Este vinculo implica que cuando se propaguen ondas en el medio tendremos ondas mecánicas y eléctricas.

En principio deberían resolverse simultáneamente las ecuaciones de Maxwell y Newton vinculadas por las ecuaciones constitutivas, las soluciones serian ondas elasto-electromagnéticas pero debido a al gran diferencia de velocidades los fenómenos se pueden estudiar desacoplados.

$$\frac{V_{electro}}{V_{elastica}} \approx 10^5$$

Para las ondas mecánicas pueden introducirse algunas simplificaciones, como el campo electromagnético varía muy lentamente se considera el campo eléctrico conservativo

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi \\ E_k &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\end{aligned}\quad \text{Ec. 2.8.1}$$

Retomando las consideraciones generales de ondas elásticas intentamos calcular el tensor de Christoffel para materiales piezoeléctricos. El estudio se realiza para ondas de volumen y considera el medio ilimitado.

Primero escribimos la ecuación constitutiva en función del desplazamiento mecánico y el potencial eléctrico, utilizando 2.1.1 y 2.8.1

$$\begin{aligned}T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ T_{ij} &= c_{ijkl}^E \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\end{aligned}\quad \text{Ec. 2.8.2}$$

Sustituyendo la tensión en la ley de Newton

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\end{aligned}\quad \text{Ec. 2.8.3}$$

Considerando un medio sin cargas libres la divergencia del desplazamiento es cero, utilizando la segunda ecuación constitutiva obtenemos

$$\begin{aligned}D_j &= e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \varepsilon_{jk}^S \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial D_j}{\partial x_j} &= 0 \\ e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} &= \varepsilon_{jk}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\end{aligned}$$

Eliminando el potencial se obtiene la ecuación de ondas

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{e_{kij} e_{jkl}}{\varepsilon_{jk}^S} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \left(c_{ijkl}^E + \frac{e_{kij} e_{jkl}}{\varepsilon_{jk}^S} \right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}\end{aligned}\quad \text{Ec. 2.8.4}$$

Consideramos ahora la propagación en la dirección n_j , como siempre probamos soluciones que se propagan a velocidad V

$$u_i = u_i^o f\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right)$$

$$\varphi = \varphi^o f\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right)$$

En este caso el campo eléctrico es longitudinal, o sea paralelo a la dirección de propagación de la onda acústica

$$E_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{n_j}{V} \varphi^o \frac{\partial f}{\partial \left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right)} = \frac{n_j}{V} \varphi^o f.$$

Sustituyendo la solución

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = u_i^o f''$$

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} u_l^o f''$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} \varphi^o f''$$

Definimos las proyecciones sobre las direcciones n_j y n_k

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl}^E n_j n_k$$

$$\gamma_i = e_{kij} n_j n_k$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{jk}^S n_j n_k$$

Obtenemos una ecuación independiente del tiempo que nos permite determinar las polarizaciones de la onda

$$\rho V^2 u_i^o = \Gamma_{il} u_l^o + \gamma \varphi^o$$

$$\gamma_l u_l^o - \varepsilon \varphi^o = 0$$

$$\rho V^2 u_i^o = \left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \right) u_l^o \quad \text{Ec. 2.8.5}$$

Al igual que para materiales no piezoeléctricos las polarizaciones son los valores propios del tensor de Chistoffel

$$\bar{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \quad \text{Ec. 2.8.6}$$

$$\bar{\gamma} = \rho V^2$$

El tensor de Chistoffel es simétrico y las polarizaciones son ortogonales entre si. El efecto de la piezoelectricidad en la velocidad de propagación puede verse en el cambio de los coeficientes de rigidez. Las nuevas constantes elásticas definidas para ondas planas, son conocidas como constantes *stiffened*

$$\bar{\Gamma}_{il} = \bar{c}_{ijkl} n_j n_k$$

$$\bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl}^E + \frac{(e_{pij} n_p)(e_{qkl} n_q)}{\varepsilon_{jk}^S n_j n_k} \quad \text{Ec. 2.8.7}$$

2.9 Estudio unidimensional del acoplamiento piezoeléctrico. [44]

Existen diversas formas de definir los coeficientes de acoplamiento electromecánico k , una de las mas directas es

$$U_{elastica} \propto c^E \cdot S^2$$

$$U_{interaccion} \propto e \cdot E \cdot S$$

$$U_{electrica} \propto \varepsilon \cdot E^2$$

$$k^2 = \frac{U_{interaccion}^2}{U_{elastica} \cdot U_{electrica}} = \frac{e^2}{c^E \cdot \varepsilon^S}$$

Siendo el campo eléctrico un vector y la deformación un tensor el coeficiente k depende de la dirección considerada.

Intuitivamente el coeficiente de acoplamiento da una idea de la intensidad del efecto piezoeléctrico, esto es para utilizar el material como transductor electro mecánico debe tener el mayor k posible. Es una situación análoga la coeficiente de acoplamiento electromagnético en un transformador

Electromagnético	Electromecánico
$\Phi_m = \Phi_m(I_1, I_2)$ $d\Phi_m = \frac{\partial\Phi_m}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial\Phi_m}{\partial I_2} dI_2$ $V_1 = L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2$ $V_2 = L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1$ $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ $k^2 = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}$	$D = \varepsilon^S E + eS$ $T = c^E S - eE$ $\begin{bmatrix} D \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^S & e \\ -e & c^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ S \end{bmatrix}$ $k^2 = \frac{e^2}{\varepsilon^S \cdot c^E}$

Para aclarar los conceptos introducidos consideraremos ahora la propagación de ondas en un medio piezoeléctrico unidimensional. El medio es infinito, no hay carga libre en el medio y D es en la dirección z y en el problema unidimensional solo depende de z tenemos:

$$\nabla \cdot D = 0$$

$$D_z = cte$$

Aun D depende del tiempo. La corriente de desplazamiento total en el medio es

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i_D$$

Esta corriente debe ser uniforme o cero. En un transductor piezoeléctrico con electrodos en cada cara, la corriente de desplazamiento atraviesa el medio al igual que en un condensador. En un medio infinito, esperamos que esta corriente de desplazamiento sea cero $D = 0$.

Constante elástica piezoeléctrica *stiffened*. [49]

Hallaremos ahora la constante elástica efectiva con $D = 0$ o c^D , y determinaremos la constante de propagación de una onda en un medio piezoeléctrico infinito.

$$D = \varepsilon^S E + eS$$

$$D = 0$$

$$E = -\frac{eS}{\varepsilon^S}$$

Sustituyendo en la otra ecuación constitutiva

$$T = c^E S - eE$$

$$T = c^E S - e\left(-\frac{eS}{\varepsilon^S}\right)$$

$$T = c^E \left(1 + \frac{e^2}{c^E \varepsilon^S}\right) \cdot S = c^D S$$

De esta forma el medio piezoeléctrico tiene una constante elástica efectiva c^D llamada constante elástica stiffened. Utilizando la definición de coeficiente de acoplamiento k .

$$c^D = c^E(1 + k^2)$$

$$k^2 = \frac{e^2}{c^E \varepsilon^S}$$

Ec. 2.9.1

Constante dialéctica libre de esfuerzo. Stress-free.

Consideraremos ahora las propiedades de un medio finito con sección transversal infinita. En este caso D debe ser finito podemos definir una constante dieléctrica efectiva en el medio. Ya se ha visto que si el strain S es cero tenemos la constante

$$\varepsilon^S = \frac{D}{E}$$

De igual forma podemos definir la constante libre de stress

$$T = c^E S - eE$$

$$T = 0$$

$$S = \frac{e}{c^E} E$$

$$D = \varepsilon^S E + eS$$

$$D = \varepsilon^S E + e \frac{e}{c^E} E$$

$$D = \varepsilon^S (1 + k^2) E$$

$$\varepsilon^T = \varepsilon^S (1 + k^2)$$

Ec. 2.9.2

Vemos que la constante libre de stress es mayor que la constante libre de strain.

CAPITULO 3

MODELADO DE TRANSDUCTORES PIEZOELECTRICOS

En este capitulo se estudian los modelos prácticos utilizados para transductores piezoeléctricos. El estudio comienza relacionando la teoría presentada en el capitulo anterior con el modelo de línea de transmisión para sólidos [4]. Luego se estudia el modelo de Mason que realiza un estudio unidimensional con la analogía a una red de tres puertos. Para este modelo se muestra una aplicación con el calculo de la impedancia eléctrica [49] [9]. Como ejemplo final de modelo unidimensional se desarrolla el modelo de Shmit para piezocomposites [78] [79] [80][81][82][83] [6]

Como intento de atacar el problema en dos y tres dimensiones se presenta el modelo de Lamberti de modos desacoplados [50][51][52][53][54]. El estudio de la periodicidad y su influencia sobre los modos laterales en los piezocomposites se ataca utilizando el modelo presentado por Auld, la solución encontrada es del tipo de Floquet y permite analizar cualitativamente el fenómeno de formación de bandas prohibidas de frecuencia [2] [3] [4].

Por ultimo se presenta el modelo de elementos finitos, enfocando el estudio en las ecuaciones básicas del modelo para medios piezoeléctricos [1][63] [66]. La aplicación del mismo al cálculo de ejemplos concretos se presenta en los capítulos cuatro y cinco, y el uso del software comercial ANSYS con que se implemento en el apéndice A2.

3.1 Modelo de línea de transmisión para sólidos isotrópicos [4]

Como en electromagnetismo trataremos el problema de una onda propagándose en un medio piezoeléctrico con un modelo de línea de transmisión. El material considerado es isotópico por lo que se elige una dirección de propagación z arbitraria sin perdida de generalidad.

Usaremos la notación matricial del apéndice A1 para las magnitudes elásticas, para ver como se cambian las ecuaciones se desarrolla la componente z de la ley de Newton. Se considera que las variaciones solo se producen en al dirección de propagación z .

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + X_i \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + X_z \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial T_3}{\partial z} + X_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.1.1}$$

A partir de la ecuación constitutiva obtenemos

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = c_{ij3l} \frac{\partial v_l}{\partial z} \quad \text{El 3 indica la direccion z}$$

que se expresa en forma matricial para un medio isótropo

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad \text{Ec 3.1.2}$$

$$c_{11} - c_{12} = 2c_{44}$$

Pueden obtenerse tres sistemas de ecuaciones para T_5 , T_4 y T_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_5}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - X_x \\ c_{44} \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial T_5}{\partial t} \\ \frac{\partial T_4}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} - X_y \\ c_{44} \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial T_4}{\partial t} \\ \frac{\partial T_3}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - X_z \\ c_{11} \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial T_3}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{Ec 3.1.3}$$

Estas ecuaciones son formalmente análogas a las ecuaciones de una línea de transmisión eléctrica

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} + v_s \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.1.4}$$

Entre los modelos puede identificarse la analogía

Stress negativo	$-T_j$	Voltaje	V
Velocidad de partícula	v_i	Corriente	I
Fuerza de volumen	F_i	Fuente de voltaje	v_s
Densidad	ρ	Inductancia	L
Inverso de la rigidez	$(c_{jk})^{-1}$	Capacidad	C

Nuestras ecuaciones pueden describirse como

$$\frac{\partial(-T_j)}{\partial z} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + F_i$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial z} = -c_{ij}^{-1} \frac{\partial(-T_j)}{\partial t}$$

Que son iguales a las 3.1.4. Si queremos considerar un medio real, la amortiguación de la onda debe incluirse como un termino con una derivada primera respecto del tiempo

$$c_{ij} \rightarrow c_{ij} + \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\left(c_{ij} + \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial(-T_j)}{\partial t} \quad \text{Ec. 3.1.5}$$

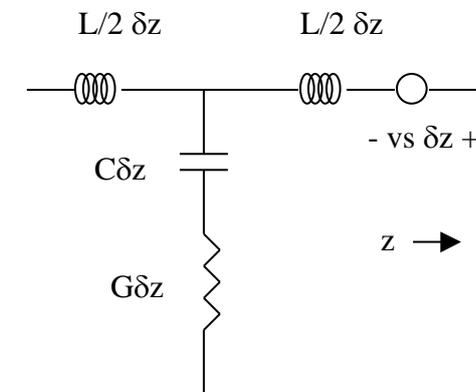


Figura 3.1 Línea equivalente de transmisión

Las ondas que se propagan en la línea de transmisión, en el caso de no tener fuente distribuida tienen la forma

$$V = A e^{i(\omega t \pm k z)}$$

$$I = \pm \frac{A}{Z_o} e^{i(\omega t \pm k z)}$$

$$k = \omega \left(\frac{LC}{1 + i\omega \frac{C}{G}} \right)^{1/2}$$

Se define la impedancia característica de la línea como la relación entre el voltaje y la corriente

$$Z_o = \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + iw \frac{C}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la analogía se obtiene

$$-T_j = Ae^{i(\omega t \pm kz)}$$

$$v_i = \pm \frac{A}{Z_a} e^{i(\omega t \pm kz)}$$

$$k = \omega \left(\frac{\frac{\rho}{c_{ij}}}{1 + \frac{i\omega \eta_{ij}}{c_{ij}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde se define la impedancia acústica característica para un medio que puede tener pérdidas

$$Z_a = -\frac{T}{v}$$

$$Z_a = (\rho c_{ij})^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{i\omega \eta_{ij}}{c_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.2 Modelo de Mason [49] [4] [44] [75]

Consideraremos un transductor uniforme o un resonador con sección transversal de varias longitudes de onda y electrodos de área A como se muestra en la figura. Como los electrodos son superficies equipotenciales, es razonable que $E_x = E_y = 0$.

Con esta simetría, el transductor está diseñado para vibrar longitudinalmente y suponemos que no hay movimiento en la dirección x o la y . En este caso los parámetros S , E , D , v , u y T tienen componentes solo en la dirección z .

El transductor se trata como un sistema de tres puertos, uno eléctrico y dos mecánicos. Como antes utilizamos la analogía de identificar la tensión mecánica T con el voltaje eléctrico, y la velocidad de partícula v como análoga a la corriente.

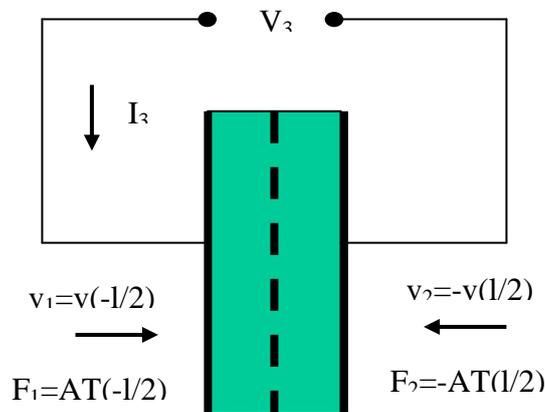


Figura 3.2 Modelo de tres puertos

Las magnitudes son positivas en la dirección del eje z . Esto significa que las condiciones de borde en los puertos acústicos son

$$F_1 = AT \left(\frac{-l}{2} \right)$$

$$F_2 = -AT \left(\frac{l}{2} \right)$$

$$v_1 = v \left(\frac{-l}{2} \right)$$

$$v_2 = -v \left(\frac{l}{2} \right)$$

Consideraremos la propagación de una onda monocromática de frecuencia ω . Todas las magnitudes pueden expresarse como un módulo dependiente de la posición que oscila sinusoidalmente en el tiempo

$$v(z, t) = v(z) \cdot e^{j\omega t + \phi_v}$$

$$T(z, t) = T(z) \cdot e^{j\omega t + \phi_T}$$

$$S(z, t) = S(z) \cdot e^{j\omega t + \phi_S}$$

$$D(z, t) = D(z) \cdot e^{j\omega t + \phi_D}$$

La ecuación de onda **2.4.1** se reduce para el caso unidimensional

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$j\omega \rho v(z) = \frac{dT(z)}{dz} \quad \text{Ec. 3.2.1}$$

A partir de la relación entre deformación y desplazamiento

$$S_{lk} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial S(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(z, t)}{\partial z}$$

$$j\omega \cdot S(z) = \frac{dv}{dz} \quad \text{Ec. 3.2.2}$$

Para el cálculo de la corriente I_3 se considera positiva entrante al transductor, por eso el cambio de signo con respecto a la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \int \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \vec{D} \cdot \vec{n} \, ds \right) &= 0 \\ I_3 &= j\omega AD\end{aligned}$$

Se considera el campo magnético constante en el tiempo por lo que el campo eléctrico es conservativo

$$V_3 = \int_{-1/2}^{1/2} E \cdot dz$$

Podemos eliminar E de las ecuaciones obteniendo la ecuación constitutiva en función de D y con el coeficiente c^D que como antes significa a desplazamiento cero

$$\begin{aligned}T &= c^E S - eE \\ D &= \varepsilon^S E + eS \\ D = 0 &\rightarrow E = \frac{-eS}{\varepsilon^S} = hS \\ h &= \frac{-e}{\varepsilon^S} \\ T &= c^E S - ehS \\ D &= (\varepsilon^S h + e)S \\ T &= c^D S - hD \\ c^D &= c^E \left(1 + \frac{e^2}{c^E \varepsilon^S} \right) = c^E (1 + k^2)\end{aligned}$$

Donde vemos que aparece nuevamente la constante de acoplamiento k definida en **2.9.1**

A partir de las relaciones anteriores deducimos la ecuación diferencial para $v(z)$, considerando que el campo D es constante con z

$$\begin{aligned}j\omega \cdot S(z) &= \frac{dv}{dz} \rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = j\omega \cdot \frac{dS}{dz} \\ T = c^D S - hD &\rightarrow \frac{dT}{dz} = c^D \frac{dS}{dz} - h \frac{dD}{dz} \rightarrow \frac{dT}{dz} = c^D \frac{dS}{dz} \\ \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{j\omega}{c^D} \cdot \frac{dT}{dz} \\ j\omega \rho v(z) &= \frac{dT(z)}{dz} \\ \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{\omega^2 \rho}{c^D} \cdot v(z) &= 0\end{aligned}$$

Ec. 3.2.3

Las soluciones para T y v son ondas que se propagan en ambas direcciones. El índice F indica la dirección positiva y B la negativa del eje z

$$\begin{aligned} v(z) &= v_F e^{-j\beta z} + v_B e^{j\beta z} \\ T(z) &= T_F e^{-j\beta z} + T_B e^{j\beta z} - hD \end{aligned}$$

Se definen los siguientes parámetros²

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \left(\frac{\rho}{c^D} \right)^{1/2} \\ Z_o &= \sqrt{\rho \cdot c^D} \\ T_F &= -Z_o v_F \\ T_B &= -Z_o v_B \\ C_o &= \frac{\varepsilon^S A}{l} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.2.4}$$

Usando las condiciones de borde para este caso la velocidad puede expresarse como

$$v(z) = \frac{-v_2 \text{sen} \left[\beta \left(z + \frac{l}{2} \right) \right] + v_1 \text{sen} \left[\beta \left(\frac{l}{2} - z \right) \right]}{\text{sen}[\beta l]} \quad \text{Ec. 3.2.5}$$

Estas expresiones pueden arreglarse en forma matricial para dar la relación entre voltajes y corrientes generalizados

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} AZ_o \cot(\beta l) & AZ_o \cos ec(\beta l) & h/\omega \\ AZ_o \cos ec(\beta l) & AZ_o \cot(\beta l) & h/\omega \\ h/\omega & h/\omega & 1/\omega C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.2.6}$$

Estas ecuaciones tienen la forma de una red de tres puertos como se ha dicho y el circuito equivalente que resulta se llama equivalente de Mason.

Definiendo las impedancias características para el caso de $I_3 = 0$ resulta

$$\begin{aligned} Z_{11} &= -jAZ_o \cot(\beta l) \\ Z_{22} &= -jAZ_o \cos ec(\beta l) \\ Z_{12} &= Z_{21} = -jAZ_o \cos ec(\beta l) \end{aligned}$$

² Aquí se utiliza β como número de onda para evitar la confusión con el coeficiente de acoplamiento

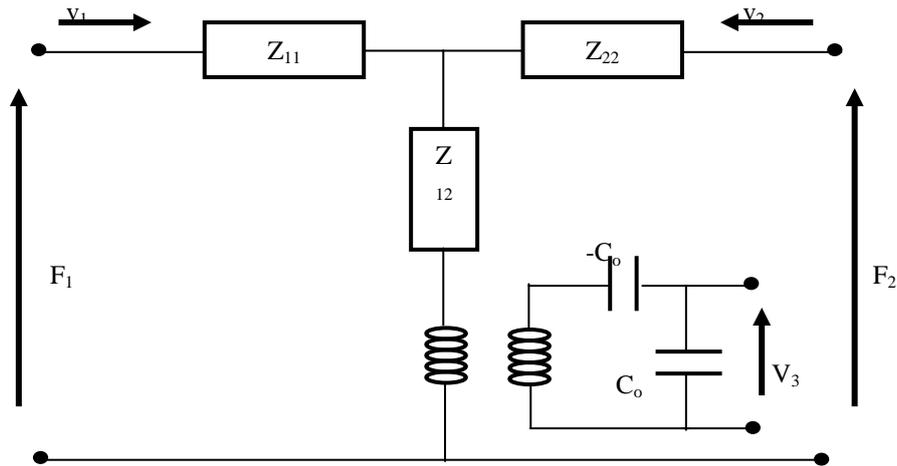


Figura 3.3 Circuito equivalente de Mason

En este modelo los puertos mecánicos son simétricos, hemos considerado el transductor descargado, o sea sus caras están libres. El voltaje del puerto eléctrico depende de dos términos

$$V_3 = \frac{j}{j\omega} (v_1 + v_2) + \frac{I_3}{j\omega C_o}$$

Uno debido a la capacidad C_o entre los electrodos y otro proporcional al movimiento $v_1 + v_2$. La rama eléctrica se acopla al sistema mecánico mediante un transformador ideal de relación de vueltas N

$$N = hC_o$$

3.3 Aplicación al cálculo de la impedancia eléctrica [49]

Cuando el transductor se somete a carga mecánica en sus caras, el modelo se extiende colocando las impedancias acústicas correspondientes. Designamos estas impedancias por Z_1 y Z_2 respectivamente y se determinan como

$$Z_1 = -\frac{F_1}{v_1} = \frac{AT(-l/2)}{v(-l/2)}$$

$$Z_2 = -\frac{F_2}{v_2} = \frac{-AT(l/2)}{v(l/2)}$$

Despejando de las ecuaciones para el modelo de Mason, puede obtenerse la impedancia eléctrica vista en los terminales 3. Este dato es muy útil ya que es uno de los parámetros más fáciles de medir en un transductor de ultrasonido. Ver capítulo cuatro.

De la ecuación:

$$Z_3 = \frac{V_3}{I_3} = \frac{1}{j\omega Co} \left[1 + k^2 \frac{j(Z_1 + Z_2)A \cdot Zo \cdot \sin(\beta l) - 2(A \cdot Zo)^2(1 - \cos(\beta l))}{\left[(A \cdot Zo)^2 + Z_1 Z_2 \right] \sin(\beta l) - j(Z_1 + Z_2)A \cdot Zo \cos(\beta l)} \right]$$

$$k^2 = 1 - \frac{c^E}{c^D} = \frac{e^2}{c^E \varepsilon}$$

Para el caso de un transductor descargado las expresión se simplifica

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = 0$$

$$Z_3 = \frac{V_3}{I_3} = \frac{1}{j\omega Co} \left[1 - k^2 \frac{\tan(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] \quad \text{Ec. 3.3.1}$$

La ecuación anterior muestra que el circuito equivalente anterior puede ser representado por la capacidad del transductor “*calmped capacity*” en serie con la impedancia equivalente del movimiento Z_{eqa} , esta impedancia es la contribución acústica a la impedancia eléctrica, definida por la relación

$$Z_{eqa} = - \frac{k^2 \tan(\beta l/2)}{j\omega Co (\beta l/2)} \quad \text{Ec. 3.3.2}$$

El transductor se presenta como una inductancia en paralelo con una capacidad, en frecuencias donde el largo del transductor es un número impar de medias longitudes de onda la impedancia es infinita, $\beta l = (2n + 1)\pi$ La frecuencia de resonancia correspondiente ω_{on} está dada por

$$\omega_{on} = \frac{\pi(2n+1)V_L}{l} \quad \text{Ec. 3.3.3}$$

$$V_L = \sqrt{\frac{c^D}{\rho}}$$

Por simplicidad llamaremos ω_o la frecuencia de resonancia paralelo de menor orden, con $n = 0$. También existen resonancias cuando el largo del transductor es un numero par de media longitud de onda, pero el campo eléctrico asociado con esos modos tiene simetría impar respecto al centro del resonador, no hay potencial eléctrico neto aplicado en estas resonancias por lo que no son excitables eléctricamente, no hay acoplamiento eléctrico en los modos pares.

La frecuencia del modo fundamental se determina por

$$f_o = \frac{V_L}{2l}$$

El transductor exhibe una impedancia eléctrica cero a la frecuencia ω_1 cercana a $n=0$ de la resonancia paralelo. En el entorno de esta frecuencia ω_1 el transductor se comporta como un condensador en serie con una inductancia, y de esta forma se dice que tiene una resonancia serie. A esta frecuencia ω_1 , la impedancia del transductor Z_3 es cero entonces:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\tan(\beta l/2)}{(\beta l/2)}$$

sustituyendo

$$\beta = \frac{\omega}{V_L}$$

$$\omega_o = \frac{\pi V_L}{l}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\tan\left(\frac{\omega_1 l}{2V_L}\right)}{\left(\frac{\omega_1 l}{2V_L}\right)}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\tan\left(\frac{\pi \omega_1}{2\omega_o}\right)}{\left(\frac{\pi \omega_1}{2\omega_o}\right)}$$

Ec. 3.3.4

Puede determinarse k de midiendo ω_1 y ω_o .

Obtendremos ahora el circuito eléctrico equivalente para el transductor en la cercanía de la frecuencia de resonancia. Para ello se desarrolla primero la expresión de la tangente en los puntos donde diverge, esto es

$$\tan(\alpha) \rightarrow \infty$$

$$\alpha \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\alpha}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

Aplicando este desarrollo al calculo de la impedancia acústica

$$Z_{eqa} = -\frac{k^2 \tan(\beta l/2)}{j\omega Co (\beta l/2)}$$

$$Z_{eqa} = -\frac{1}{j\omega Co} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{eff}^2}{1 - \omega^2 / \omega_{on}^2}$$

$$\omega_{on} = \frac{\pi(2n+1)V}{l} = \omega_o(2n+1)$$

Donde se ha definido el coeficiente de acoplamiento efectivo para cada modo k_{eff} , debe notarse que este coeficiente decrece con el orden del modo

$$k_{eff}^2 = \frac{8k^2}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} \quad \text{Ec. 3.3.5}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de la impedancia eléctrica del transductor

$$Z_3 = \frac{1}{j\omega C_o} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{eff}^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{on}^2}} \right]$$

$$Z_3 = \frac{1 - k_T^2}{j\omega C_o} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega k_{eff}^2}{(\omega_{on}^2 - \omega^2) C_o} \quad \text{Ec. 3.3.6}$$

Aquí puede verse que la impedancia equivalente del circuito esta formada por un condensador en serie con n circuitos tanque LC, cada uno de los cuales representa un armónico

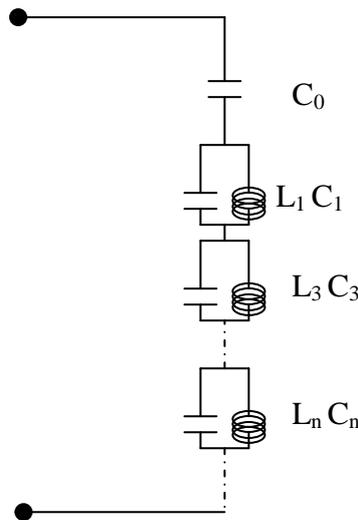


Figura 3.4 Circuito equivalente para n armónicos

La expresión anterior incluye todos los modos de resonancia, puede aproximarse al primer modo como

$$Z_3 = \frac{1 - k^2}{j\omega C_o} + \frac{j8\omega k^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)\pi^2 C_o} \quad \text{Ec. 3.3.7}$$

En esta expresión pueden identificarse dos frecuencias características, ω_o que es la frecuencia a la que la impedancia se hace infinita y ω_l que es la frecuencia a la que la impedancia se hace cero. A partir del cociente entre estas frecuencias puede estimarse el factor de acoplamiento

$$Z_3(\omega_1) = 0 \rightarrow \frac{1-k^2}{j\omega_1 C_o} = - \frac{j8\omega_1 k^2}{(\omega_o^2 - \omega_1^2)\pi^2 C_o}$$

$$(1-k^2)(\omega_o^2 - \omega_1^2) = \frac{8\omega_1^2 k^2}{\pi^2}$$

$$\frac{\omega_o^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{8k^2}{(1-k^2)\pi^2}$$

Como k es del orden de 0.5 puede aproximarse sin gran error por su desarrollo de Taylor

$$\frac{\omega_o}{\omega_1} = 1 - \frac{8k^2}{\pi^2} \quad \text{Ec. 3.3.8}$$

El comportamiento de la impedancia en trono a la frecuencia fundamental puede ser representado por un circuito equivalente de la forma

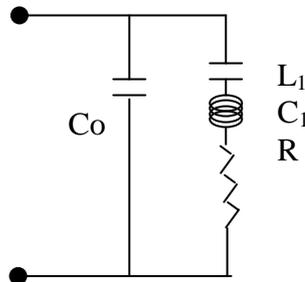


Figura 3.5 Circuito equivalente en el modo espesor

A partir de la impedancia de este circuito calculamos los valores de L , C_1 y C_2 .

$$Z_3 = \frac{\left(\frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}{\left(\frac{1}{j\omega C_1}\right) + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}$$

$$Z_3 = \frac{1 - \omega^2 LC_2}{j\omega C_2 + (1 - \omega^2 LC_2)j\omega C_1}$$

$$Z_3(\omega_1) = 0 \rightarrow L = \frac{1}{\omega_1^2 C_2} \quad \text{Ec. 3.3.9}$$

Debe cumplirse que en w_o la impedancia sea infinita, en este caso

$$\begin{aligned}
 jw_o C_2 + (1 - w_o^2 LC_2) jw_o C_1 &= 0 \\
 C_2 + \left(1 - \frac{w_o^2}{w_1^2}\right) C_1 &= 0 \\
 \frac{w_o}{w_1} &= 1 - \frac{8k^2}{\pi^2} \\
 \frac{C_2}{C_1} &= \frac{\frac{8k^2}{\pi^2}}{1 - \frac{8k^2}{\pi^2}}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 3.3.10}$$

Elegimos C_1 como la capacidad entre los electrodos sin acoplamiento piezoeléctrico, esto es cuando $k=0$ la impedancia vista es C_o .

El modelo se completa considerando ahora la carga del medio en los terminales mecánicos. Se toma el valor de βl en modo fundamental por lo que

$$\begin{aligned}
 \sin(\beta l) &= 0 \\
 \cos(\beta l) &= -1 \\
 Z_3 = \frac{V_3}{I_3} &= \frac{1}{jw_o C_o} \left[1 + k^2 \frac{-4(A \cdot Z_o)^2}{[j(Z_1 + Z_2)A \cdot Z_o](\beta l)} \right] = \frac{1}{jw_o C_o} + k^2 \frac{4(A \cdot Z_o)}{(Z_1 + Z_2)\pi w_o C_o}
 \end{aligned}$$

Aquí el segundo termino es una resistencia, representa la disipación de potencia hacia los terminales mecánicos. A partir del modelo calculamos

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= \frac{\left(\frac{1}{jw_o C_o}\right) \left(jwL + \frac{1}{jwC_2} + R\right)}{\left(\frac{1}{jwC_o}\right) + \left(jwL + \frac{1}{jwC_2} + R\right)} \\
 Z_3 &= \frac{1 - w^2 LC_2 + jwC_2 R}{jwC_2 + (1 - w^2 LC_2 + jwC_2 R) jwC_o} \\
 w = w_o &\rightarrow jw_o C_2 + (1 - w_o^2 LC_2) jw_o C_o = 0 \\
 Z_3 &= \frac{jw_o C_2 R - \frac{C_2}{C_o}}{-w_o^2 C_2 C_o R} = \frac{1}{jw_o C_o} + \frac{1}{w_o^2 C_o^2 R}
 \end{aligned}$$

Comparando con la expresión obtenida

$$\frac{1}{w_o^2 C_o^2 R} = k^2 \frac{4(A \cdot Z_o)}{(Z_1 + Z_2) \pi w_o C_o}$$

$$R = \frac{(Z_1 + Z_2) \pi}{4(A \cdot Z_o) w_o C_o k^2} \quad \text{Ec. 3.3.11}$$

Resumiendo, tenemos un modelo eléctrico simple que permite estudiar el comportamiento del transductor en torno de la frecuencia fundamental de resonancia.

¿Qué información da el modelo? Tenemos el comportamiento visto desde los terminales eléctricos, por lo que podemos calcular la constante de acoplamiento a partir de la curva de impedancia, también podemos estudiar la adaptación del transductor a un circuito eléctrico, considerando inclusive el efecto de la carga mecánica. Además podemos calcular cuanta potencia se entrega a la carga mecánica suponiendo que toda la energía disipada se entrega como trabajo mecánico en la superficie del transductor.

¿Qué no dice el modelo? No hay nada que permita estudiar vibraciones locales en la superficie del transductor, todo lo que tenemos es un comportamiento global como un pistón de movimiento homogéneo.

Aun así el modelo mas usado para el estudio de transductores piezoeléctricos, en el 3.5 veremos un intento por generalizarlo a dos y tres dimensiones en el modelo de Lamberti.

3.4 Modelo de Smith para piezocomposites.

[78]. [79] [80][81][82][83] [6]

En este punto estudiaremos el modelo de Smith para piezocomposites, el modelo considera al composite como un pistón homogéneo y calcula parámetros efectivos para el conjunto.

Como resultado se obtiene una densidad, tensor elástico y dieléctrico para el conjunto cerámica polímero.

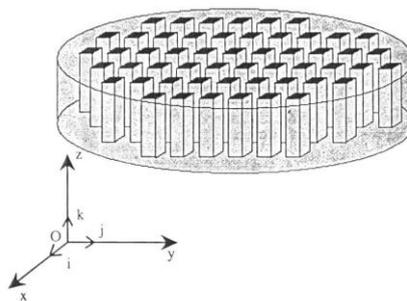


Figura 3.6 Piezocomposite 1-3

En la figura se muestra un piezocomposite con conectividad 1-3 polarizado según el eje z.

La hipótesis de tratar el compuesto como un material homogéneo con propiedades efectivas mejora cuando el espacio entre los elementos cerámicos disminuye.

Este modelo no da información sobre las frecuencias asociadas a la periodicidad de la red ni a los bordes finitos del composite.

El estudio se hace utilizando la notación matricial del apéndice A1

Notación

supraíndice p : polímero
 supraíndice C : cerámica piezoeléctrica
 sin supraíndice: piezocomposite
 v , fracción de volumen de material cerámico piezoeléctrico
 valores promedio indicados con techo sobre las cantidades

hipótesis simplificadoras

- Los medios individuales se consideran independientes de x e y . Esto implica que la tensión y deformación son independientes de la dirección en la plano x - y .

$$\begin{aligned}
 S_1 &= S_2 \\
 T_1 &= T_2
 \end{aligned}$$

- No se consideran esfuerzos de corte

$$\begin{aligned}
 T_4 &= T_5 = T_6 = 0 \\
 S_4 &= S_5 = S_6 = 0
 \end{aligned}$$

- El campo eléctrico y el desplazamiento se suponen según el eje z

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 = 0 & ; & & E_3 \neq 0 \\
 D_1 &= D_2 = 0 & ; & & D_3 \neq 0
 \end{aligned}$$

- Modelo de Voigt de deformación constante, se supone que la deformación es la misma en ambas fases

$$S_3^p = S_3^C = S_3$$

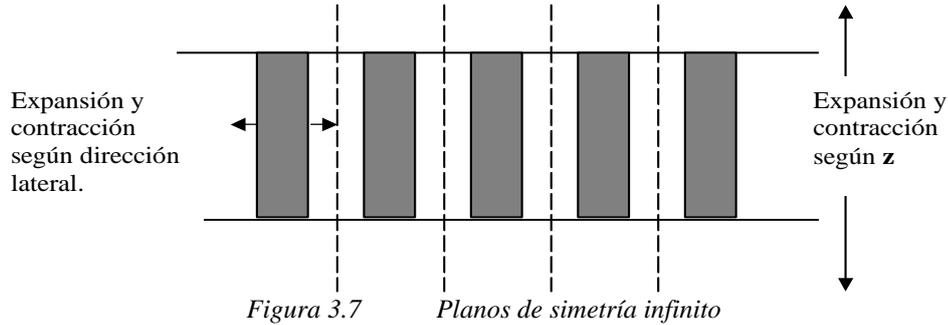
- Campo eléctrico igual en ambas fases

$$E_3^p = E_3^C = E_3$$

- La constante dieléctrica de la piezocerámica es mucho mayor que la del polímero

- Composite infinito. Esta hipótesis reduce el análisis del compuesto a una celda unitaria, puede considerarse que existen dos planos de simetría y que son los indicados en la figura como punteados y no tienen movimiento lateral.

$$\begin{aligned}
 T_1^p &= T_1^c = T_1 \\
 T_2^p &= T_2^c = T_2 \\
 (1-\nu)S_1^p + \nu S_1^c &= S_1 = 0 \\
 (1-\nu)S_2^p + \nu S_2^c &= S_2 = 0
 \end{aligned}$$



Ecuaciones constitutivas

Las cantidades de interés obtenidas en el modelo son las ecuaciones constitutivas para la dirección z . Operando a partir de las hipótesis anteriores puede demostrarse

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \bar{c}_{33}^E S_3 - \bar{e}_{33} E_3 \\
 D_3 &= \bar{e}_{33} S_3 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 3.4.1}$$

Donde se han utilizado las constantes efectivas

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{33}^E &= \nu \left[c_{33}^E - \frac{2(1-\nu)(c_{13}^E - c_{12}^p)^2}{(1-\nu)(c_{11}^E + c_{12}^E) + \nu(c_{11}^p + c_{12}^p)} \right] + (1-\nu)c_{11}^p \\
 \bar{e}_{33} &= \nu \left[e_{33} - \frac{2(1-\nu)e_{31}(c_{13}^E - c_{12}^p)}{(1-\nu)(c_{11}^E + c_{12}^E) + \nu(c_{11}^p + c_{12}^p)} \right] \\
 \bar{\epsilon}_{33}^S &= \nu \left[\epsilon_{33}^S + \frac{2(1-\nu)(e_{31})^2}{(1-\nu)(c_{11}^E + c_{12}^E) + \nu(c_{11}^p + c_{12}^p)} \right] + (1-\nu)\epsilon_{11}^p
 \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones pueden calcularse los parámetros de interés para el composite en el modo espesor. Esto son la velocidad de las ondas de compresión, el coeficiente de acoplamiento y la impedancia acústica equivalente

$$k = \frac{\bar{h}_{33}}{(c_{33}^D \bar{\beta}_{33}^S)^{1/2}} = \frac{\bar{e}_{33}}{(c_{33}^D \bar{\epsilon}_{33}^S)^{1/2}}$$

$$Z_a = (c_{33}^D \rho)^{1/2}$$

$$V_l = \left(\frac{c_{33}^D}{\rho} \right)^{1/2}$$

Ec. 3.4.2

Donde se ha utilizado

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{(e_{33})^2}{\epsilon_{33}^S}$$

$$\bar{h}_{33} = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S}$$

$$\bar{\beta}_{33}^S = \frac{1}{\epsilon_{33}^S}$$

Ec. 3.4.3

Por ultimo se presenta la evolución de las magnitudes mencionadas al variar la fracción de polímero de las muestras. La siguiente figura esta sacada de la referencia [6]

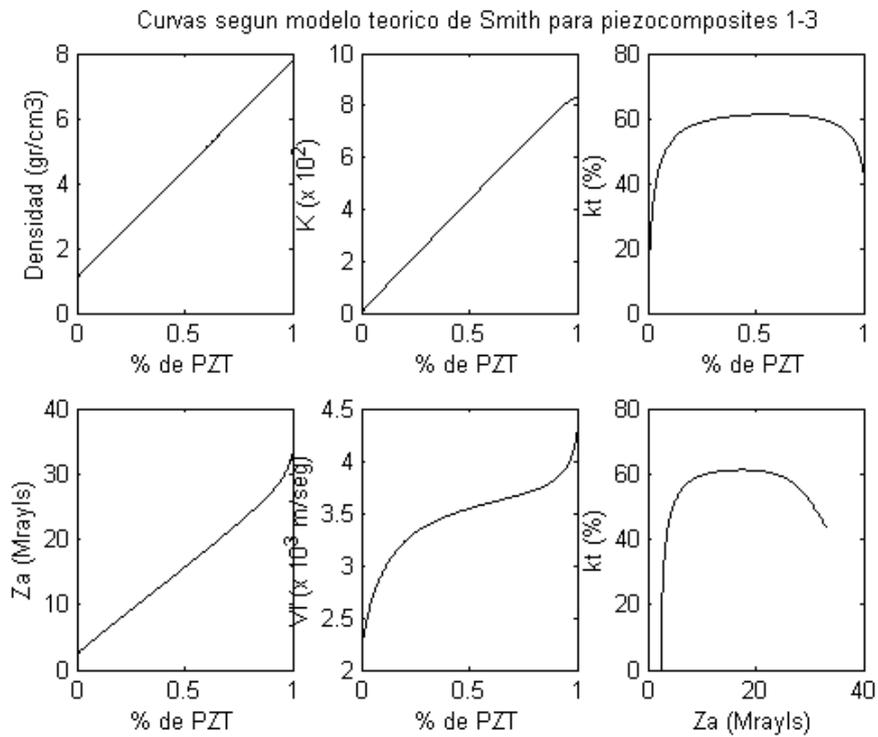


Figura 3.8 Evolución de las propiedades

3.5 Modelo de Lamberti y Pappalardo

[50] [51][52] [53][54]

En los modelos de Mason y Smith se considera el transductor como un pistón homogéneo caracterizado por constantes elásticas efectivas en la dirección del movimiento. Una forma de mejorar el modelo de Mason es considerar los elementos bidimensionales. Se obtiene un sistema de cinco puertos, dos mecánicos en la dirección de polarización, dos mecánicos transversales y uno eléctrico. A partir de esto puede aplicarse al estudio de geometrías tipo 2-2, pudiendo distinguir distintas amplitudes de vibración para cada elemento piezoeléctrico y de polímero.

Una nueva mejora fue introducida por los autores considerando un modelo tridimensional con cuatro puertos mecánicos transversales, este modelo puede distinguir la vibración de cada elemento en una geometría 1-3, pero falla al no considerar los modos de propagación transversal, por lo que no puede reproducir los modos laterales que se discutirán en 3.6

De todas formas es un modelo con gran sentido físico que aproxima la solución y por ello se estudia con detalle.

Modelo bidimensional de un elemento aislado

Consideramos un elemento piezoeléctrico bidimensional rectangular donde la dirección y se considera infinita para el estudio. Se busca la solución para las ondas de compresión ortogonales bajo las siguientes hipótesis

- no se consideran las deformaciones trasversales, $S_4=S_5=S_6=0$
- no se considera la dirección y , $S_2=0$
- consideramos polarización solo en la dirección z , $e_{11}=0$
- no se considera acoplamiento piezoeléctrico entre la dirección z y la x , $e_{31}=e_{13}=0$

La notación mantiene

$$1 \rightarrow x$$

$$2 \rightarrow y$$

$$3 \rightarrow z$$

Desarrollaremos las ecuaciones constitutivas para el caso que no hay efecto piezoeléctrico en la dirección x

$$T = c^E S - eE$$

$$D = \varepsilon^S E + eS$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E_{11} & c^E_{13} \\ c^E_{31} & c^E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^S_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon^S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

Ec. 3.5.1

Despejando las ecuaciones en función de D y S

$$\begin{aligned} T_1 &= c^E_{11}S_1 + c^E_{13}S_3 - c^D_{11}S_1 + c^D_{13}S_3 \\ T_3 &= c^E_{13}S_1 + \left(c^E_{33} + \frac{e^2_{33}}{\epsilon_{33}} \right) S_3 - \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} D_3 = c^D_{13}S_1 + c^D_{33}S_3 - h_{33}D_3 \\ E_3 &= -\frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} S_3 + \frac{1}{\epsilon_{33}} D_3 = -h_{33}S_3 + \frac{1}{\epsilon_{33}} D_3 \end{aligned}$$

En las mismas hipótesis obtenemos las ecuaciones de onda correspondientes

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} = \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c^D_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^D_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.5.2}$$

Probamos la solución en que se propagan dos ondas ortogonales independientes, la propagación en x es independiente de z , $u_1 = u_1(x)$ y la propagación en z es independiente de x $u_3 = u_3(z)$

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) + B \cos \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) \right] e^{j\omega t} \\ -\rho w^2 \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) + B \cos \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) \right] e^{j\omega t} &= -c^D_{11} \frac{w^2}{v_x^2} \left[A \operatorname{sen} \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) + B \cos \left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) \right] e^{j\omega t} \\ v_x &= \sqrt{\frac{c^D_{11}}{\rho}} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^D_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + c^D_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \\ u_3 &= \left[C \operatorname{sen} \left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) + D \cos \left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) \right] e^{j\omega t + \pi} \\ v_z &= \sqrt{\frac{c^D_{33}}{\rho}} \end{aligned}$$

Las constantes se obtienen a partir de las condiciones de borde. Puede escribirse una condición de borde para las tensiones integradas en las superficies de la cerámica A_1 , A_2 , A_3 y A_4

$$\int_{A_1} T_1(0) ds = \int_{A_1} (c_{11}^D S_1(0) + c_{13}^D S_3(0)) ds = 0$$

$$S_1(0) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{w}{v_1} \left[A \cos\left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) - B \operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot x}{v_x} \right) \right]_0 e^{j\omega t} = A \frac{w}{v_x} e^{j\omega t}$$

$$S_3(0) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)_{x=0} = \frac{w}{v_z} \left[C \cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) - D \operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) \right] e^{j(\omega t + \pi)}$$

$$\int_{A_1} c_{13}^D S_3(0) ds = L_x \int_0^{L_z} c_{13}^D \frac{w}{v_z} \left[C \cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) - D \operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z} \right) \right] e^{j(\omega t + \pi)} dz$$

$$= L_x c_{13}^D [C \operatorname{sen}(\theta_z) + D(\cos(\theta_z) - 1)] e^{j(\omega t + \pi)}$$

$$\theta_z = \frac{w \cdot L_z}{v_z}$$

$$A \left[L_z c_{11}^D \frac{w}{v_x} \right] + C [c_{13}^D \operatorname{sen}(\theta_z) e^{j\pi}] + D [c_{13}^D (\cos(\theta_z) - 1) e^{j\pi}] = 0$$

Considerando excitación sinusoidal en el puerto eléctrico, obtenemos ecuaciones similares

$$\int_{A_2} T_1(L_x) ds = 0$$

$$A \left[L_z c_{11}^D \frac{w}{v_x} \cos(\theta_x) \right] - B \left[L_z c_{11}^D \frac{w}{v_x} \operatorname{sen}(\theta_x) \right] + C [c_{13}^D \operatorname{sen}(\theta_z) e^{j\pi}] + D [c_{13}^D (\cos(\theta_z) - 1) e^{j\pi}] = 0$$

$$\theta_x = \frac{w \cdot L_x}{v_1}$$

$$\int_{A_3} T_3(0) ds = 0$$

$$A [c_{13}^D \operatorname{sen}(\theta_x)] + B [c_{13}^D (\cos(\theta_x) - 1)] + C \left[L_x c_{33}^D \frac{w}{v_z} e^{j\pi} \right] = h_{33} L_x D_o$$

$$\int_{A_4} T_3(L_z) ds = 0$$

$$A [c_{13}^D \operatorname{sen}(\theta_x)] + B [c_{13}^D (\cos(\theta_x) - 1)] + \left[\frac{w L_x c_{33}^D e^{j\pi}}{v_z} \right] [C \cos(\theta_z) - D \operatorname{sen}(\theta_z)] = h_{33} L_x D_o$$

Resolviendo este sistema obtenemos las constantes A, B, C y D

$$A = \alpha D_o$$

$$B = -\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_x}{2}\right) D_o$$

$$C = \beta D_o e^{-j\pi}$$

$$D = -\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right) D_o e^{-j\pi}$$

$$\alpha = v_x L_x \frac{2c_{13}^D h_{33} v_z \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right)}{4(c_{13}^D)^2 v_x v_z \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right) - w^2 c_{11}^D c_{33}^D L_x L_z}$$

$$\beta = v_z L_z \frac{c_{11}^D h_{33} w L_x}{w^2 c_{11}^D c_{33}^D L_x L_z - 4(c_{13}^D)^2 v_x v_z \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right)}$$

Sustituyendo la solución con las condiciones de borde queda

$$u_1(x, t) = \alpha \left[\operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot x}{v_x}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \cos\left(\frac{w \cdot x}{v_x}\right) \right] D_o e^{j\omega t}$$

$$u_3(z, t) = \beta \left[\operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) \right] D_o e^{j\omega t}$$

Ec. 3.5.3

A partir de estas soluciones puede calcularse el campo eléctrico y el voltaje entre los electrodos

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \frac{1}{\epsilon_{33}^S} D_3$$

$$E_3(z, t) = \left\{ \frac{1}{\epsilon_{33}^S} - \frac{e_{33} \beta w}{\epsilon_{33}^S v_z} \left[\cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) \right] \right\} D_o e^{j\omega t}$$

$$V_3 = \int_0^{L_z} E_3 dz = \frac{1}{\epsilon_{33}^S} \left[L_z + 2e_{33} \beta \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \right]$$

Modelo bidimensional de un elemento cargado mecánicamente

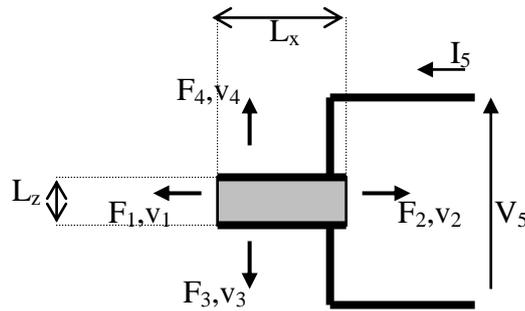


Figura 3.9 Modelo bidimensional

Para estudiar el comportamiento del elemento piezoeléctrico interactuando mecánicamente por contacto en las superficies externas. El calculo difiere del caso anterior en las condiciones de borde que se utilizan, estas pueden expresarse como continuidad en la velocidad para los puntos de la superficie

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} &= v_1 \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=L_x} &= -v_2 \\ \left. \frac{\partial u_3}{\partial t} \right|_{z=0} &= v_3 \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{z=L_z} &= -v_4 \end{aligned}$$

y la continuidad entre el esfuerzo interno y las fuerzas externas aplicadas

$$\begin{aligned} \int_{A_1} T_1(0) ds &= -F_1 \\ \int_{A_2} T_1(L_x) ds &= -F_2 \\ \int_{A_3} T_3(0) ds &= -F_3 \\ \int_{A_4} T_3(L_z) ds &= -F_4 \end{aligned}$$

Utilizando estas condiciones las solución a las ecuaciones de onda es

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{j\omega} \left[v_1 \cos\left(\frac{w \cdot x}{v_x}\right) - \frac{v_1 \cos(\theta_x) + v_2}{\text{sen}(\theta_x)} \text{sen}\left(\frac{w \cdot x}{v_x}\right) \right] \\ u_3(z, t) &= \frac{1}{j\omega} \left[v_3 \cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) - \frac{v_3 \cos(\theta_z) + v_4}{\text{sen}(\theta_z)} \text{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) \right] \end{aligned}$$

Tomando como para el modelo de Mason la relación entre la corriente que entra al transductor y el desplazamiento eléctrico

$$I_3 = j\omega AD$$

Se obtiene una relación entre las fuerzas y las velocidades generalizadas en el dominio de las frecuencias

$$F = [A]u$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1}{jtg(\theta_x)} & \frac{Z_1}{jsen(\theta_x)} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & 0 \\ \frac{Z_1}{jsen(\theta_x)} & \frac{Z_1}{jtg(\theta_x)} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & 0 \\ \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{Z_3}{jtg(\theta_z)} & \frac{Z_3}{jsen(\theta_z)} & \frac{h_{33}}{j\omega} \\ \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{Z_3}{jsen(\theta_z)} & \frac{Z_3}{jtg(\theta_z)} & \frac{h_{33}}{j\omega} \\ 0 & 0 & \frac{h_{33}}{j\omega} & \frac{h_{33}}{j\omega} & \frac{1}{j\omega C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.5.4}$$

$$Z_1 = \rho v_x L_y L_x$$

$$Z_3 = \rho v_z L_y L_x$$

$$C_o = \frac{\epsilon_{33}^S L_y L_x}{L_z}$$

Modelo bidimensional de elementos acoplados

Ahora aplicaremos el modelo al estudio de un array piezocomposite, para ello consideramos dos tipos de elementos, uno piezoeléctrico y otro polímero. El comportamiento del elemento piezoeléctrico queda determinado por las relaciones obtenidas en el párrafo anterior, para el polímero el modelo se reduce porque no hay dependencia con el campo eléctrico dentro de él. La matriz correspondiente al polímero la relación es

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{1p}}{jtg(\theta_{xp})} & \frac{Z_{1p}}{jsen(\theta_{xp})} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13p}^D L_{yp}}{j\omega} & 0 \\ \frac{Z_{1p}}{jsen(\theta_{xp})} & \frac{Z_{1p}}{jtg(\theta_{xp})} & \frac{c_{13p}^D L_{yp}}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & 0 \\ \frac{c_{13p}^D L_{yp}}{j\omega} & \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{Z_{3p}}{jtg(\theta_{zp})} & \frac{Z_{3p}}{jsen(\theta_{pz})} & 0 \\ \frac{c_{13}^D L_y}{j\omega} & \frac{c_{13p}^D L_{yp}}{j\omega} & \frac{Z_{3p}}{jsen(\theta_{pz})} & \frac{Z_{3p}}{jtg(\theta_{zp})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.5.5}$$

Donde se han definido las constantes

$$\theta_{xp} = \frac{wL_{xp}}{v_p}$$

$$\theta_{zp} = \frac{wL_{zp}}{v_p}$$

$$Z_{1p} = \rho_p v_p L_{yp} L_{xp}$$

$$Z_{3p} = \rho_p v_p L_{yp} L_{xp}$$

$$C_p = \frac{\epsilon_{33p}^S L_{yp} L_{xp}}{L_{zp}}$$

En este punto tenemos un sistema de cinco puertos para cada material (el índice p simboliza el polímero), cada elemento del array interactúa con las cargas en su superficie y con los elementos adyacentes.

Puede formarse una matriz que represente al array completo conectando los elementos adyacentes y pueden considerarse las cargas externas como impedancias conectadas en los terminales mecánicos correspondientes.

Consideremos el caso de dos elementos adyacentes. Las fuerzas generalizadas se relacionan con las velocidades en el polímero y la cerámica como

$$F_i^{c,5} = A_{i,j}^{c,5} u_j^{c,5}$$

$$F_h^{p,5} = A_{h,k}^{p,5} u_k^{p,5}$$

Ec. 3.5.6

El índice 5 indica que las matrices son 5×5 . La condición para acoplar los puertos mecánicos es

$$F_2^c = F_1^p$$

$$v_2^c = -v_1^p$$

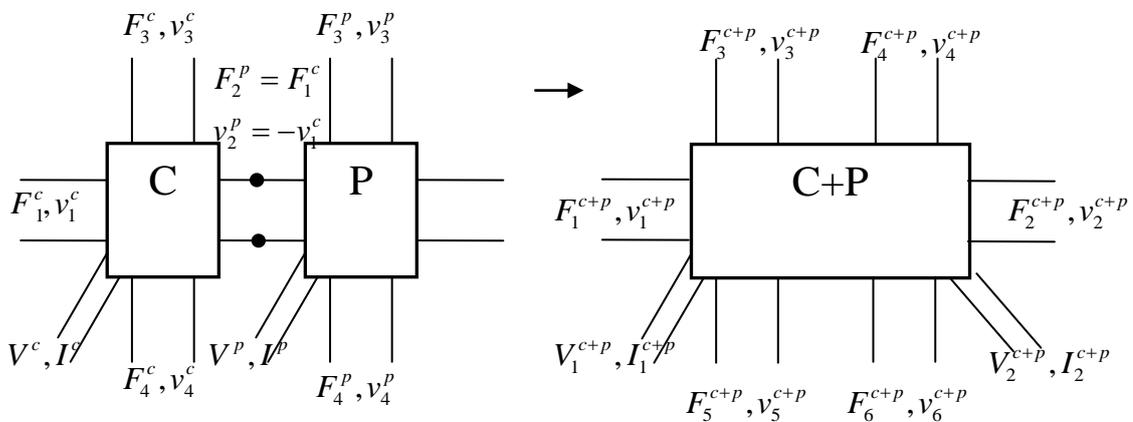


Figura 3.10 Acoplamiento de elementos

Sustituyendo estas condiciones en las matrices originales puede obtenerse un nuevo sistema entre 5+5-2 variables y la matriz resultante se determina

$$F_i^{c+p,8} = A_{i,j}^{c+p,8} u_j^{c+p,8}$$

$$A_{i,j}^{c+p,8} = \begin{cases} A_{i,j}^c - \frac{A_{i,2}^c A_{2,j}^c}{A_{2,2}^c A_{1,1}^p} & (1 \leq i, j < 5) \\ \frac{A_{i,2}^c A_{1,j}^p}{A_{2,2}^c A_{1,1}^p} & (1 \leq i < 5); (5 \leq j < 8) \\ \frac{A_{2,j}^c A_{i,1}^p}{A_{2,2}^c A_{1,1}^p} & (1 \leq j < 5); (5 \leq i < 8) \\ A_{i,j}^p - \frac{A_{i,1}^p A_{1,j}^p}{A_{2,2}^c A_{1,1}^p} & (5 \leq i, j < 8) \end{cases}$$

Aplicando este algoritmo sucesivamente pueden reducirse las matrices a una única equivalente de todo el transductor.

Para tener en cuenta la carga mecánica en las superficies externas del array, backing y matching hay que utilizar las impedancias equivalentes. Se obtiene la respuesta a las excitaciones externas como

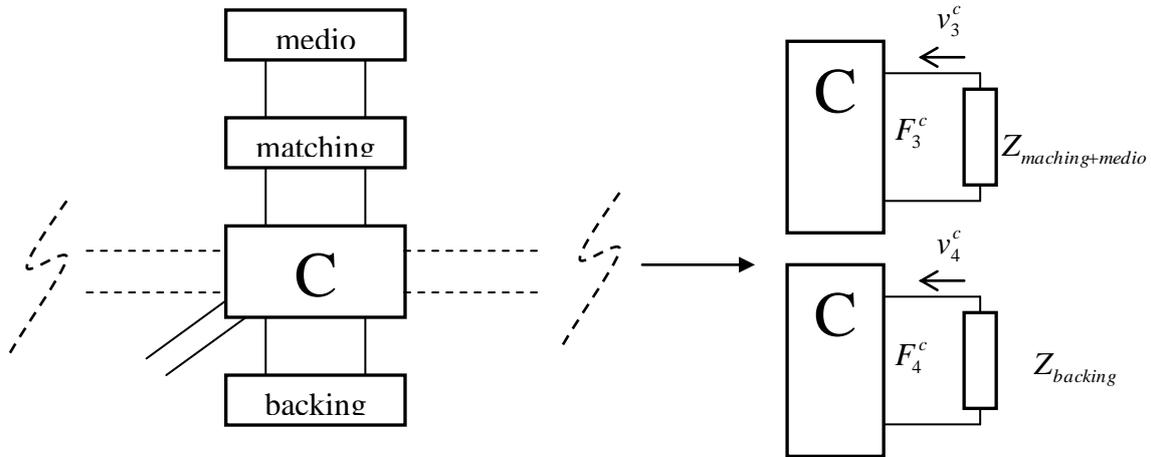


Figura 3.11 Impedancias externas

Las ecuaciones para los puertos pueden escribirse

$$F^a = G^a - Z^a u^a$$

$$F^a = A^a u^a$$

$$(A^a + Z^a) u^a = G^a$$

Ec. 3.5.7

El índice a simboliza la matriz asociada a todo el array. Al igual que las matrices para cada elemento, la matriz $[A^a]$ es simétrica y compleja mientras que la matriz $[Z^a]$ es diagonal y real.

Modelo tridimensional para un elemento

Recientemente los autores del modelo han propuesto un nuevo modelo tridimensional para los elementos piezoeléctricos. El modelo es una generalización del caso anterior y considera una función de onda ortogonal propagándose en cada dirección.

Al igual que en el caso bidimensional no pueden cumplirse las condiciones de borde en forma puntual. Se adopta una condición integral, para la condición eléctrica se desprecia el acoplamiento piezoeléctrico transversal. Con esta base puede construirse un algoritmo para acoplar este tipo de elementos como se realizo con los array, esto permite modelar estructuras tipo 1-3.

Como hipótesis se consideran solo ondas de compresión, por lo que no modela los modos transversales o *shear waves*.

Para el planteo de las ecuaciones se considera polarización según el eje z y electrodos en el plano x - y . Las ecuaciones constitutivas resultan

$$\begin{aligned} T_1 &= c^D_{11}S_1 + c^D_{12}S_2 + c^D_{13}S_3 - h_{31}D_3 \\ T_2 &= c^D_{12}S_1 + c^D_{11}S_2 + c^D_{13}S_3 - h_{31}D_3 \\ T_3 &= c^D_{13}S_1 + c^D_{13}S_2 + c^D_{33}S_3 - h_{33}D_3 \\ E_3 &= -h_{31}S_1 - h_{31}S_2 - h_{33}S_3 + \frac{1}{\epsilon_{33}^S} D_3 \end{aligned}$$

Como la constante dieléctrica de la cerámica es mucho mayor que la del vacío puede despreciarse la variación espacial del desplazamiento eléctrico, a pesar de trabajar con electrodos de área comparable con el espesor.

Las ecuaciones de onda son análogas a la **3.5.2**

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^D_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^D_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + c^D_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^D_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + c^D_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c^D_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= c^D_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + c^D_{13} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + c^D_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.5.8}$$

Las soluciones al sistema de ecuaciones se eligen como tres ondas planas ortogonales y desacopladas. A estas soluciones se impone la condición de borde de continuidad de la velocidad en cada superficie

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} &= v_1, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=Lx} &= -v_2 \\ \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{y=0} &= v_3, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{y=Ly} &= -v_4 \\ \left. \frac{\partial u_3}{\partial t} \right|_{z=0} &= v_5, \quad \left. \frac{\partial u_6}{\partial t} \right|_{z=Lz} &= -v_6 \end{aligned}$$

Finalmente las soluciones son

$$u_1(x,t) = \frac{1}{j\omega} \left[v_1 \cos\left(\frac{w \cdot x}{v_{xy}}\right) - \frac{v_1 \cos(\theta_x) + v_2}{\text{sen}(\theta_x)} \text{sen}\left(\frac{w \cdot x}{v_{xy}}\right) \right]$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{j\omega} \left[v_3 \cos\left(\frac{w \cdot y}{v_{xy}}\right) - \frac{v_3 \cos(\theta_y) + v_4}{\text{sen}(\theta_y)} \text{sen}\left(\frac{w \cdot y}{v_{xy}}\right) \right]$$

$$u_3(z,t) = \frac{1}{j\omega} \left[v_5 \cos\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) - \frac{v_5 \cos(\theta_z) + v_6}{\text{sen}(\theta_z)} \text{sen}\left(\frac{w \cdot z}{v_z}\right) \right]$$

Las velocidades de estas ondas de compresión son

$$v_y = v_x = \sqrt{\frac{c_{11}^D}{\rho}}$$

Ec. 3.5.9

$$v_z = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$$

El comportamiento externo del transductor se calcula imponiendo continuidad entre el esfuerzo y la fuerza aplicada en la superficie, como las soluciones elegidas no pueden satisfacer esas condiciones se impone una condición integral mas débil

$$\int_{A_1} T_1(0) ds = -F_1, \int_{A_2} T_1(L_x) ds = -F_2$$

$$\int_{A_3} T_2(0) ds = -F_3, \int_{A_4} T_2(L_y) ds = -F_4$$

$$\int_{A_5} T_3(0) ds = -F_5, \int_{A_6} T_3(L_z) ds = -F_6$$

Como antes se obtiene la relación entre las fuerzas generalizadas y las velocidades, se utiliza el hecho de que el acoplamiento piezoeléctrico transversal se desprecia $h_{31}=0$

Definiendo las constantes

$$\theta_x = \frac{wL_x}{v_{xy}}$$

$$\theta_{yx} = \frac{wL_y}{v_{xy}}$$

$$\theta_z = \frac{wL_z}{v_z}$$

$$Z_1 = \rho v_{xy} L_y L_z$$

$$Z_2 = \rho v_{xy} L_z L_x$$

$$Z_3 = \rho v_z L_y L_x$$

$$C_o = \frac{\epsilon_{33}^S L_y L_x}{L_z}$$

Se obtiene la ecuación matricial que relaciona las fuerzas generalizadas con las velocidades

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1}{jtg(\theta_x)} & \frac{Z_1}{jsen(\theta_x)} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & 0 \\ \frac{Z_1}{jsen(\theta_x)} & \frac{Z_1}{jtg(\theta_x)} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & 0 \\ \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & Z_2 & Z_2 & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & 0 \\ \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{c_{12}^D L_z}{jw} & \frac{Z_2}{jtg(\theta_y)} & \frac{Z_2}{jsen(\theta_y)} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & 0 \\ \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jsen(\theta_y)} & \frac{c_{13}^D L_x}{jtg(\theta_y)} & Z_3 & Z_3 & \frac{h_{33}}{jw} \\ \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{Z_3}{jtg(\theta_z)} & \frac{Z_3}{jsen(\theta_z)} & \frac{h_{33}}{jw} \\ \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_y}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{c_{13}^D L_x}{jw} & \frac{Z_3}{jsen(\theta_z)} & \frac{Z_3}{jtg(\theta_z)} & \frac{h_{33}}{jw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{33}}{jw} & \frac{h_{33}}{jw} & 1 \\ & & & & & & \frac{1}{jwC_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ I \end{bmatrix}$$

A partir de esta expresión pueden calcularse las transferencias eléctrica y electromecánicas.

3.6 Modelo de Auld para modos laterales

[2] [3] [4] [86]

El cuando se utiliza un modelo unidimensional para los discos piezoeléctricos se ignoran las condiciones de borde en el plano normal a la dirección de propagación. En este caso las resonancias están dadas solo por el espesor de la muestra y no dependen de la geometría particular en dicho plano.

Pero como los transductores son de diámetro finito, existen también modos de resonancia lateral que en general están acoplados con el modo espesor.

El mecanismo de acoplamiento entre los modos es el modulo de Poisson, cuando un elemento de volumen se deforma en la dirección espesor, también lo hace en la dirección normal. En el interior de un material homogéneo estas deformaciones producen esfuerzos que están compensados por los elementos de volumen adyacentes, pero en el borde no, por lo que el elemento del borde se encuentra sometido a un esfuerzo que genera ondas acopladas con el modo espesor.

A causa de este efecto las resonancias de un transductor finito son combinaciones de modos espesor y laterales. En el caso que coinciden las frecuencias de resonancia de ambos modos se produce un acoplamiento muy fuerte.

Los detalles de cómo se da este acoplamiento dependen de la geometría particular, además de que la propagación lateral debe estudiarse como una guía de ondas si el espesor es pequeño.

Para el caso de estructuras piezocomposites puede utilizarse la periodicidad de la estructura a fin de evitar la propagación de las ondas laterales.

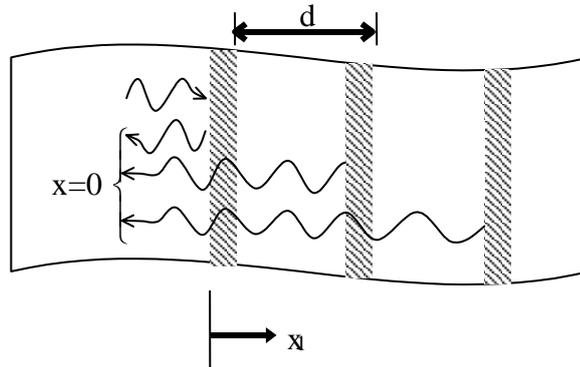


Figura 3.12 Scattering unidimensional

Para simplificar consideremos un problema unidimensional, una onda que viaja por el medio periódico en la dirección x será reflejada en cada interfase. Las ondas reflejadas se suman en cada punto del medio, como por ejemplo en $x=0$. Si el periodo espacial es un múltiplo de media longitud de onda se da la condición de interferencia constructiva. Esta condición se cumple aun cuando la reflexión sea débil en cada interfase.

El fenómeno es análogo al que ocurre en una red de difracción, por ello se llaman frecuencia de Bragg. Estas resonancias de Bragg crean bandas prohibidas de propagación *stopbands*, donde las ondas provenientes de los bordes del transductor son fuertemente atenuadas.

Composite unidimensional

Se estudiara el caso simple de un composite unidimensional periódico, para modelarlo utilizamos funciones que describen las propiedades en función de la posición, el planteo se realiza separando el valor medio y la variación respecto al mismo

$$\begin{aligned} c_{ij}(z) &= \bar{c}_{ij} + \Delta c_{ij}(z) \\ \rho(z) &= \bar{\rho} + \Delta \rho(z) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.6.1}$$

Consideramos una onda plana de corte, polarizada según x que se propaga en la dirección z .

$$u = u_1(z)e^{j\omega t}$$

Por lo que la ecuación de onda se obtiene como

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \quad \text{Ec. 3.6.2}$$

Ambos medios son isotrópicos, entonces la relación entre las magnitudes deformación, esfuerzo y tensión es

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ T_{13} &= c_{44}(z)S_{13} \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{44}(z) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ -\rho(z)w^2 u_1(z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{44}(z) \frac{\partial u_1(z)}{\partial z} \right) \\ \left[\left(\bar{\rho}w^2 + \bar{c}_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \left(\Delta c_{44}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \Delta c_{44}(z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \Delta \rho(z)w^2 \right) \right] u_1(z) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.6.3}$$

Donde puede identificarse un termino dependiente de los valores medios y otro de la variación

$$[\bar{M} + \Delta M(z)]u_1(z) = 0 \quad \text{Ec. 3.6.4}$$

Si consideramos una traslación de coordenadas de tamaño igual al paso de la red d

$$\begin{aligned} z &= z' + d \\ [\bar{M} + \Delta M(z' + d)]u_1(z' + d) &= 0 \end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis rectos son invariantes frente a esta traslación, de esto se deduce que la solución también debe tener la misma periodicidad, este enunciado conocido como el principio de Floquet puede escribirse

$$u_1(z' + d) = u_1(z') \quad \text{Ec. 3.6.5}$$

Entonces la dependencia espacial de la onda puede desarrollares en serie de Fourier de periodo espacial d

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j(\omega t - k_n z)} \\ k_n &= k_o + \frac{2\pi n}{d} \end{aligned}$$

Aquí se eligió el signo correspondiente a la propagación en el sentido de z creciente, el otro caso es análogo.

Para la determinación de los armónicos espaciales se utiliza la ortogonalidad de las funciones exponenciales

$$\begin{aligned}
 [M + \Delta M(z)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j(k_n z)} &= 0 \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} M a_n e^{-j(k_n z)} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta M(z) a_n e^{-j(k_n z)} \\
 \int_0^d \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} M a_n e^{-j(k_n z)} \right) e^{j(k_m z)} dz &= - \int_0^d \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta M(z) a_n e^{-j(k_n z)} \right) e^{j(k_m z)} dz \\
 d(\bar{\rho} w^2 - k_m^2 \bar{c}_{44}) a_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(- \int_0^d (\Delta M(z) e^{-j(k_n z)}) e^{j(k_m z)} dz \right) a_n
 \end{aligned} \tag{Ec. 3.6.6}$$

Aquí tenemos un sistema de infinitas ecuaciones lineales homogéneas, cuya solución permite obtener la relación de dispersión entre w y el número de onda k_o

$$\begin{aligned}
 K_{m,m} a_m &= \sum_n K_{m,n} a_n \\
 \text{Det}[K_{m,n}] &= f(w, k_o) = 0
 \end{aligned} \tag{Ec. 3.6.7}$$

Como existen infinitas ecuaciones, el aumento de k_o en una cantidad $\frac{2\pi}{d}$ no varía el sistema de ecuaciones total debido a que

$$k_m = k_o + \frac{2\pi m}{d}$$

esto significa que la relación de dispersión es periódica con periodo $\frac{2\pi}{d}$, cada rama de la solución corresponde a un valor de k_o .

Aproximación de dos armónicos acoplados

Pueden obtenerse soluciones numéricas de la ecuación característica del sistema, para ello debe truncarse el desarrollo hasta un cierto orden. La solución converge a medida que se aumenta el número de términos del desarrollo. En el caso que los medios son cerámica y polímero la diferencia entre los parámetros de cada medio es importante y deben considerarse muchos términos del desarrollo porque las reflexiones son grandes.

Podemos realizar una aproximación gruesa suponiendo que hay poca reflexión y que solo los dos primeros términos son significativos. Esto permite hallar una solución analítica para la amplitud de los armónicos y la relación de dispersión, que aunque es cuantitativamente equivocada a causa de la hipótesis mencionada, muestra cualitativamente aparición de bandas prohibidas.

El sistema de ecuaciones homogéneo tiene solución si el determinante es nulo

$$\begin{aligned}
 K_{0,0} a_0 &= K_{-1,-1} a_{-1} \\
 K_{-1,-1} a_{-1} &= K_{-1,0} a_0
 \end{aligned} \tag{Ec. 3.6.8}$$

Para la obtención de los coeficientes K se realiza una aproximación lineal en torno de la primera frecuencia de Bragg.

La velocidad promedio para las ondas de corte en el compuesto es

$$\bar{V}_s = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad \text{Ec. 3.6.9}$$

El numero de onda y la frecuencia angular asociadas a la primera banda son

$$k_0 = \frac{\pi}{d}$$

$$w_0 = \frac{\pi \bar{V}_s}{d}$$

La aproximación lineal se realiza como

$$k = \frac{\pi}{d} + \delta k$$

$$w = w_0 + \delta w = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} + \delta w$$

Calculo de $K_{0,0}$

$$K_{0,0} = (\bar{\rho} w^2 - k_0^2 \bar{c}_{44}) d = [\bar{\rho} \left(\frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} + \delta w \right)^2 - \left(\frac{\pi}{d} + \delta k \right)^2 \bar{c}_{44}] d$$

$$K_{0,0} = 2 \bar{\rho} \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \delta w - 2 \frac{\pi}{d} \bar{c}_{44} \delta k$$

$$K_{0,0} = 2 \frac{\pi}{d} \bar{c}_{44} \left(\frac{\delta w}{\bar{V}_s} - \delta k \right)$$

Análogamente

$$K_{-1,-1} = 2 \frac{\pi}{d} \bar{c}_{44} \left(\frac{\delta w}{\bar{V}_s} + \delta k \right)$$

Para el caso de $K_{0,-1}$ y $K_{-1,0}$ hay que conocer la función que modula la densidad. En el caso particular de una variación rectangular puede demostrarse que

$$K_{0,-1} = K_{-1,0} = K$$

$$K = \frac{-1}{2} \sin c \left(\frac{\pi}{2d} \right) \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 \left(\Delta c_{44} + \Delta \rho \bar{V}_s^2 \right)$$

Para que el sistema original tenga solución el determinante debe ser nulo

$$\det \begin{bmatrix} K_{0,0} & -K_{0,-1} \\ -K_{-1,0} & K_{-1,-1} \end{bmatrix} = 0$$

$$2\pi c_{44} \left(\frac{\delta w}{V_s} - \delta k \right) 2\pi c_{44} \left(\frac{\delta w}{V_s} + \delta k \right) - K^2 = 0$$

$$\left(\frac{\delta w}{V_s} \right)^2 - \delta k^2 = \left(\frac{K}{2\pi c_{44}} \right)^2 \quad \text{Ec. 3.6.10}$$

Aunque la aproximación de onda acoplada con dos armónicos es válida solo para reflexiones muy débiles, la forma de la solución final da una descripción cualitativamente correcta de la propagación en el medio periódico.

A partir de ella se pueden intuir los comportamientos en los medios bidimensionales y plantear modelos análogos.

En la siguiente figura se muestra la definición de las variables reducidas y la parte real e imaginaria de la solución en el espacio w - k . La figura pertenece a la referencia [4] que utiliza β para el número de onda.

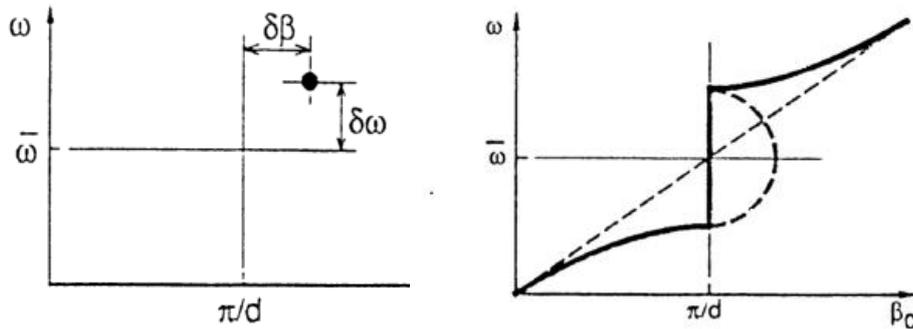


Figura 3.13 Relación de dispersión para la banda prohibida.

3.7 Elementos finitos [1] [38] [59] [66]

Hay muchos problemas prácticos en física e ingeniería para los que no se puede obtener una solución exacta. Las causas pueden ser la complejidad del sistema de ecuaciones involucrado, las condiciones de borde o las condiciones iniciales para los problemas dinámicos.

Para atacar esta clase de problemas utilizamos aproximaciones numéricas. Las soluciones analíticas exactas dan como resultado el comportamiento de un sistema para cualquier punto del mismo, mientras que las soluciones numéricas solo aproximan el resultado en un conjunto discreto de puntos llamados nodos. Por ello una vez definida la geometría del problema y las ecuaciones vinculadas a su solución, debe procederse a discretizar el mismo.

Resumiendo cambiamos la solución continua por un conjunto de soluciones discretas en los nodos, a su vez los nodos definen elementos en los que se divide el problema.

Hay dos grandes tipos de métodos numéricos, las diferencias finitas y los elementos finitos. En las diferencias finitas se discretizan las ecuaciones diferenciales, aproximando las derivadas por las diferencias correspondientes, el método es intuitivo y directo pero es difícil de aplicar en geometrías complejas y cuando el medio es anisotrópico. Por otra parte el método de elementos finitos utiliza formulaciones integrales para cada elemento, para ello emplea funciones de interpolación para las magnitudes dentro del elemento en puntos que no son nodos.

Una vez definido el problema, deben realizarse las siguientes etapas en una simulación de elementos finitos

- Preproceso.
 1. Definir la geometría. En este punto hay que considerar especialmente las simplificaciones que pueden introducirse por la simetrías del problema.
 2. Seleccionar el tipo de elemento a utilizar. Esto determina los grados de libertad de cada nodo y las funciones de interpolación a utilizar.
 3. Definir las propiedades del material. En el caso de elementos piezoeléctricos, además de la matriz elástica deben suministrarse la matriz piezoeléctrica y la matriz de permitividad.
 4. Dividir la geometría en elementos o mesh. El tamaño de los elementos depende de la precisión requerida, pero en general la solución converge cuando se realiza una división mas fina.
 5. Fijar las condiciones de borde. Para los piezoeléctricos deben fijarse tanto las mecánicas como las eléctricas.
 6. Ensamblado de las ecuaciones. En caso de un software comercial esta operación es transparente al usuario.
- Solución.

En este punto se resuelve el sistema de ecuaciones involucrado. Para ello debe seleccionarse el tipo de análisis deseado, por ejemplo armónico o transitorio. Se obtienen los valores de los grados de libertad asociados a cada nodo para cada frecuencia en el análisis armónico y para cada tempo en el análisis transitorio.

- Postproceso
 1. Calculo de los resultados a partir de los valores nodales obtenidos en la solución. Pueden calcularse funciones de los valores nodales o valores asociados a los elementos integrando los valores nodales.
 2. Visualización de los resultados. En los software comerciales existe una gran variedad de gráficos asociados a los resultados como superficies deformadas, mapas de color, diagramas vectoriales, etc.

Elementos finitos piezoeléctricos

En este punto se presenta la teoría de elementos finitos para aplicaciones piezoeléctricas, pueden encontrarse descripciones elementales del método en la referencia [48]

La deducción de la formulación de elementos finitos utilizada se basa en el principio de los trabajos virtuales y fue presentada por Allik y Hughes en [1]

Las ecuaciones constitutivas 2.7.1 vinculan la tensión mecánica y el desplazamiento eléctrico con la deformación y el campo eléctrico en cada punto

$$D_i = \varepsilon^S_{ij} E_j + e_{ijk} S_{jk}$$

$$T_{ij} = c^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k$$

Utilizando la notación matricial introducida en el A1

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c]^E \{S\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e] \{S\} + [\varepsilon] \{E\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.7.1}$$

Queremos obtener las ecuaciones en función de las variables que se utilizaran como grados de libertad para los nodos, estas son los desplazamientos y el potencial eléctrico. Para ello sustituimos

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

En la formulación de elementos finitos se aproximan los valores de desplazamiento y voltaje en puntos interiores al elemento en función de sus valores nodales. Para ello se utilizan funciones de interpolación N cuyos coeficientes dependen de los valores nodales. Suponemos un elemento formado con n nodos con lo que el desplazamiento y el potencial se expresan como

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_{xi} \\ \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_{yi} \\ \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_{zi} \end{Bmatrix} \quad \varphi = \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i \quad \text{Ec. 3.7.2}$$

Sustituyendo las funciones de interpolación en la deformación

$$\{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{xi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{yi}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{zi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{yi}}{\partial z} + \sum_{i=1}^n N_i u_{zi} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{zi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i u_{yi}}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 3.7.3}$$

Definimos los operadores matriciales $[B_u]$ y $[B_\varphi]$ que contiene las derivadas de las funciones de forma como

$$[B_u] = \begin{bmatrix} [N_x] & & & & & \\ & [N_y] & & & & \\ & & [N_z] & & & \\ [N_z] & & & [N_x] & & \\ [N_y] & & & & [N_x] & \end{bmatrix} \quad [B_\varphi] = \begin{bmatrix} [N_x] \\ [N_y] \\ [N_z] \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.7.3}$$

Donde las matrices $[N_x]$, $[N_y]$ y $[N_z]$ contienen las derivadas de las funciones de forma para cada nodo de un elemento con respecto a x , y y z respectivamente. Utilizando esta notación matricial las ecuaciones pueden escribirse

$$\begin{aligned}\{S\} &= [B_u]\{u\} \\ \{E\} &= -[B_\varphi]\{\varphi\}\end{aligned}$$

Con lo que la ecuación constitutiva queda

$$\begin{aligned}\{T\} &= [c]^E [B_u]\{u\} + [e]^T [B_\varphi]\{\varphi\} \\ \{D\} &= [e][B_u]\{u\} - [\varepsilon][B_\varphi]\{\varphi\}\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.7.5}$$

Las ecuaciones estáticas para el equilibrio del cuerpo piezoeléctrico pueden obtenerse del principio de los trabajos virtuales, igualando el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas a la variación de energía interna producidas por los desplazamientos virtuales

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta S\}^T \{T\} dV &= \{\delta u\}^T \{F\} \\ - \int_V \{\delta E\}^T \{D\} dV &= \{\delta u\}^T \{Q\}\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.7.6}$$

Las deformaciones y los desplazamientos virtuales pueden sustituirse por

$$\begin{aligned}\{\delta S\}^T &= \{\delta u\}^T [B_u]^T \\ \{\delta E\}^T &= -\{\delta \varphi\}^T [B_\varphi]^T\end{aligned}$$

Como los desplazamientos virtuales no dependen del dominio de integración

$$\begin{aligned}\{\delta u\}^T \int_V [B_u]^T [c]^E [B_u]\{u\} + [B_u]^T [e]^T [B_\varphi]\{\varphi\} dV &= \{\delta u\}^T \{F\} \\ \{\delta \varphi\}^T \int_V [B_\varphi]^T [e][B_u]\{u\} - [B_\varphi]^T [\varepsilon][B_\varphi]\{\varphi\} dV &= \{\delta u\}^T \{Q\}\end{aligned}$$

Integrando en el volumen del elemento pueden definirse las matices

$$\begin{aligned}[K_{uu}^e] &= \int_V [B_u]^T [c]^E [B_u] dV \\ [K_{u\varphi}^e] &= \int_V [B_u]^T [e]^T [B_\varphi] dV \\ [K_{\varphi u}^e] &= \int_V [B_\varphi]^T [e][B_u] dV \\ [K_{\varphi\varphi}^e] &= - \int_V [B_\varphi]^T [\varepsilon][B_\varphi] dV\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.7.7}$$

Las ecuaciones para el elemento se reducen al sistema

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}^e] & [K_{u\phi}^e] \\ [K_{\phi u}^e] & [K_{\phi\phi}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ Q \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 3.7.8}$$

Aquí el supraindice e indica que se trata de un elemento individual, el sistema resultante es de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas donde los coeficientes dependen de la integración de las constantes elásticas pesadas por las funciones $[B]$ en el volumen del elemento.

La generalización para el caso dinámico implica adicionar un termino correspondiente a masa por aceleración y otro correspondiente a la amortiguación. El resultado queda en este caso

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}^e] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{uu}^e] & 0 \\ 0 & [C_{\phi\phi}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}^e] & [K_{u\phi}^e] \\ [K_{\phi u}^e] & [K_{\phi\phi}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ Q \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 3.7.9}$$

La introducción de la amortiguación en la ecuación dinámica merece un comentario adicional. En general tanto las perdidas estructurales como dieléctricas son funciones complejas dependientes de la frecuencia. Un modelo de aproximación utilizado para el calculo de la matriz mecánica es

$$[C_{uu}^e] = \alpha [M_{uu}^e] + \beta [K_{uu}^e] \quad \text{Ec. 3.7.10}$$

La matriz de perdidas dieléctricas puede expresarse como función de la frecuencia

$$[C_{\phi\phi}^e] = \frac{1}{\omega} \int_V [N_\phi]^T [\varepsilon] [N_\phi] dV \quad \text{Ec. 3.7.11}$$

La matriz de masa utilizada en las ecuaciones anteriores se obtiene a partir de la densidad

$$[M_{uu}^e] = \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV \quad \text{Ec. 3.7.12}$$

Por ultimo a partir de las ecuaciones de un elemento se ensamblan las ecuaciones globales, donde las incógnitas son todos los desplazamientos y potenciales nodales y las matrices se ensamblan con las condiciones de vinculo entre los elementos. Estas son acción y reacción para las fuerzas e igualdad de las cargas en los nodos comunes.

CAPITULO 4

TECNICAS EXPERIMENTALES

En este capítulo se describen las técnicas experimentales utilizadas para el desarrollo de la tesis. Se presenta el fundamento de cada técnica así como sus limitaciones, intentando dejar en claro la información suministrada por cada una.

Cada técnica se acompaña con un ejemplo de aplicación en un disco homogéneo, esto nos permite comparar con los cálculos presentados en el capítulo dos y utilizar las constantes conocidas del PZT5A comercial. Además del cálculo se incluye la simulación con FEA del disco, que en esta geometría puede utilizarse con la simplificación axisimétrica. Ver apéndice A6 para el modelo axisimétrico.

4.1 Caracterización eléctrica [45]

La caracterización eléctrica es la más simple y por ello la más utilizada de las técnicas de medida. Existen diversas formas de implementarla, pero en general se basan en excitar el piezoeléctrico con una señal eléctrica conocida y medir la corriente que se entrega.

El sistema se asume dinámico, lineal e invariante en el tiempo, por lo que su comportamiento eléctrico queda completamente caracterizado si se conoce la respuesta para cada frecuencia.

La medida se realiza completamente desde los terminales eléctricos, para ello deben previamente colocarse electrodos en las caras de la piezocerámica.

Se obtiene la impedancia del sistema como se detalla a continuación.

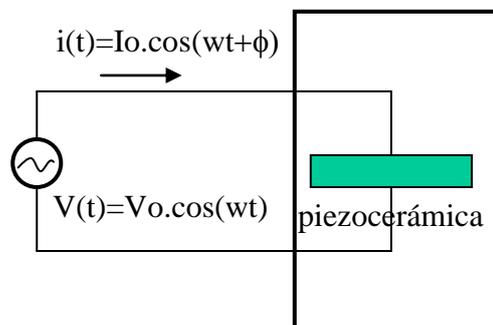


Figura 4.1 Excitación sinusoidal

Si el sistema es lineal, una excitación de frecuencia w solo puede causar respuestas de la misma frecuencia. Entonces si excitamos el sistema con una señal

$$V(t) = V_o \cos(\omega t)$$

la corriente será

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \phi)$$

Estas magnitudes pueden expresarse como la parte real de una exponencial compleja

$$V(t) = V_o \cos(\omega t) = \text{Re}\{V_o e^{j\omega t}\}$$

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\{I_o e^{j(\omega t + \phi)}\} = \text{Re}\{I_o e^{j\phi} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\bar{I}_o e^{j\omega t}\}$$

El sistema se fuerza con una fuente de voltaje conocido, por lo que las incógnitas son el modulo y la fase de la corriente. Aquí el problema se reduce a una única incógnita compleja

$$\bar{I}_o = I_o e^{j\phi} \quad \text{Ec } 4.1.1$$

La impedancia del sistema se define como el complejo dependiente de la frecuencia

$$Z(\omega) = \frac{V_o}{\bar{I}_o(\omega)} \quad \text{Ec } 4.1.2$$

Donde se supone la excitación de amplitud fija y real o de fase cero.

Realizando un barrido en función de la frecuencia determinamos la curva de impedancia. Los datos se presentan como dos diagramas, uno de amplitud y otro de fase contra la frecuencia.

En la siguiente figura se muestra el diagrama de impedancia para un disco de PZT5A en el rango de frecuencias 100 KHz – 5 MHz

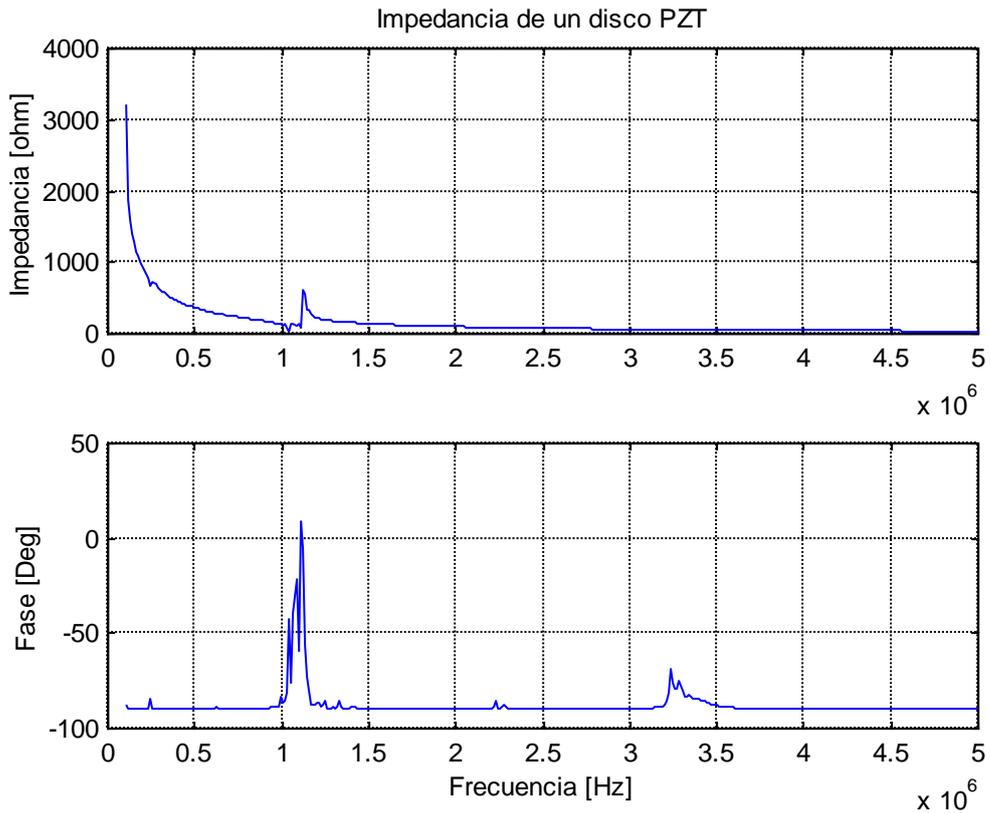


Figura 4.2 Impedancia en función de la frecuencia

En este ejemplo se ve un caso típico de la impedancia de un transductor, este se comporta como un condensador en baja frecuencia, con lo que la impedancia crece cuando w tiende a cero. Esto quita resolución cuando queremos observar pequeñas variaciones comparadas con el gran valor de baja frecuencia.

Una forma habitual de presentar estos resultado es con su inverso, llamada admitancia

$$Y(w) = \frac{1}{Z(w)} \quad \text{Ec } 4.1.3$$

Al igual que antes se muestra modulo y fase en función de la frecuencia

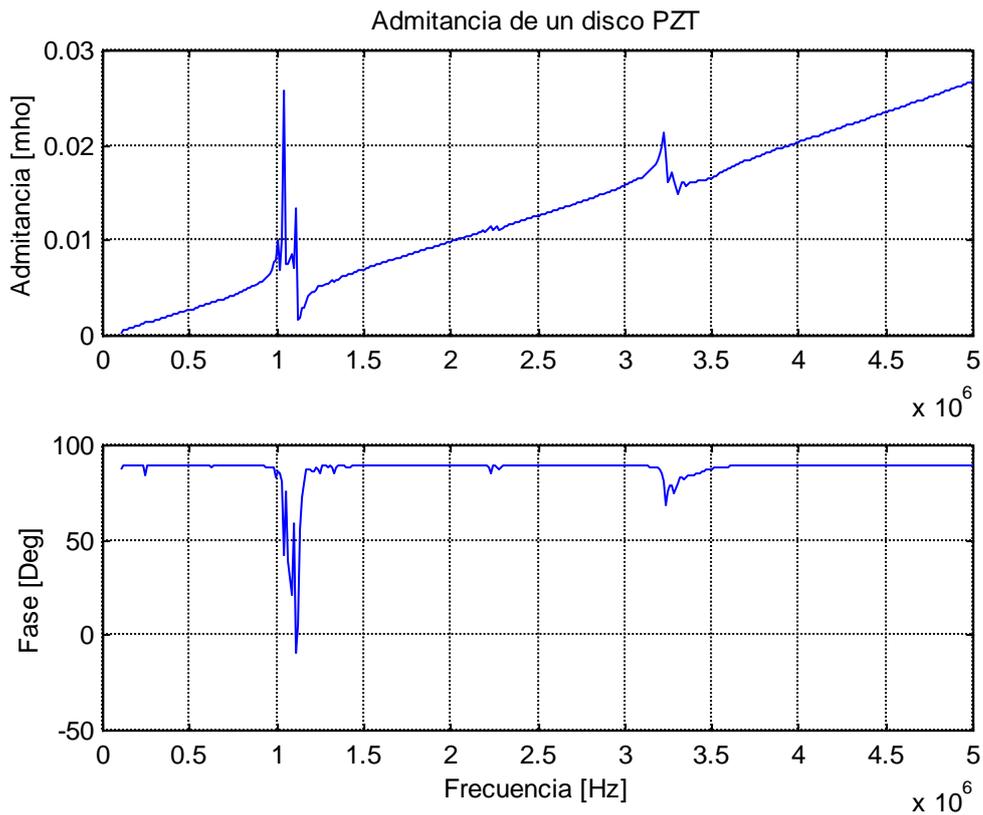


Figura 4.3 Admitancia en función de la frecuencia

Una forma muy útil de presentar la información medida es el cálculo de la potencia eléctrica consumida por el transductor.

La técnica tradicional de determinar la frecuencia de resonancia en piezocerámicas se basa en suponer que el sistema se comporta como un circuito RLC y a partir del modelo determinar la frecuencia de resonancia y antiresonancia. Esto es razonable cuando se trata de un modo único desacoplado de otros posibles modos de resonancia.

Esta hipótesis que es muy buena en cristales como el cuarzo no lo es tanto en cerámicas PZT, aquí las pérdidas hacen que los factores de calidad Q sean bajos por lo que se produce solapamiento de modos.

La determinación de la resonancia basada en el consumo de potencia no usa un modelo interno del transductor, solo supone que en estado estacionario la potencia consumida eléctricamente es radiada en forma acústica, por lo que la vibración media de la superficie, y la potencia radiada deben tener la misma dependencia con la frecuencia que la potencia consumida.

Es un resultado conocido que la potencia media consumida por una carga eléctrica es

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\phi)$$

A partir de los datos de impedancia se obtiene una función proporcional a la misma

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{|Z|} \cos(\text{Arg}(Z)) \quad \text{Ec. 4.1.4}$$

En la siguiente figura se muestra la potencia consumida por el disco PZT

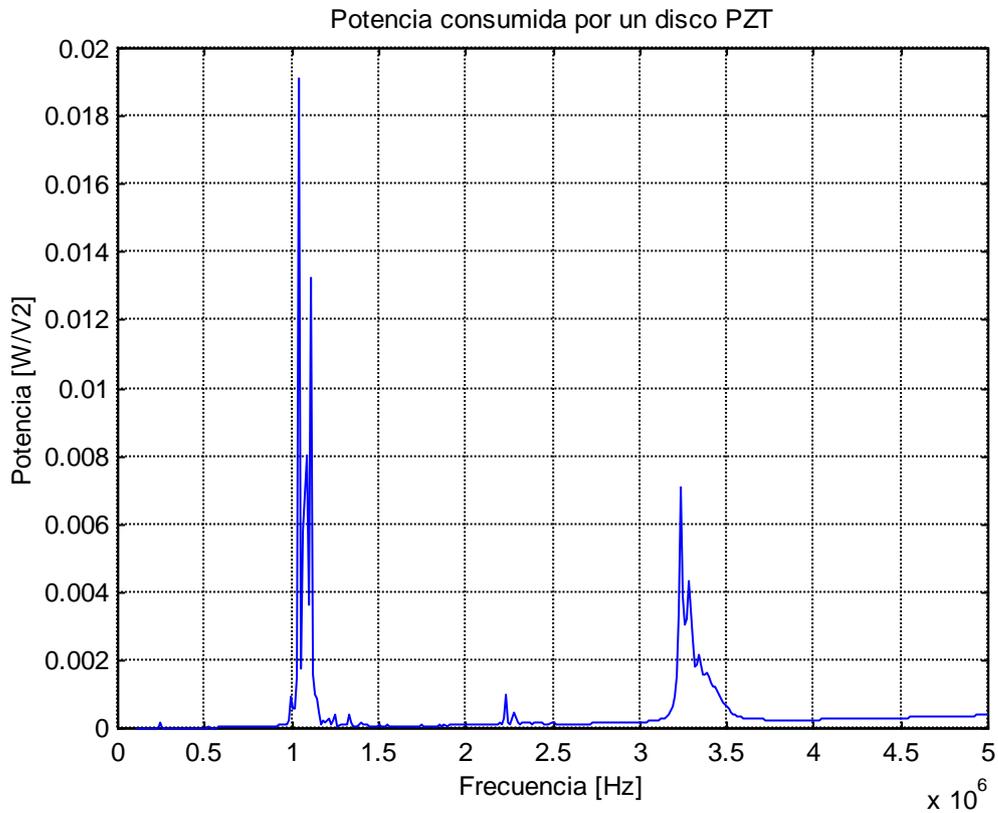


Figura 4.4 Potencia en función de la frecuencia

Ajuste con el modelo de Mason

El modelo de Mason se puede aplicar muy bien a este caso ya que el disco tiene un radio mucho mayor que su espesor y puede considerarse como un pistón.

Utilizamos las constantes piezoeléctricas que están en el apéndice A5 para el PZT5A

$$c_{33}^E = 11.1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

$$e_{33} = 15.8 \text{ C m}^{-2}$$

$$\varepsilon_{33} = 1700 \varepsilon_0$$

El espesor l y el radio r del disco son

$$l = 2 \text{ mm}$$

$$r = 10 \text{ mm}$$

A partir de estas constantes podemos estimar la constante de rigidez a desplazamiento cero

$$c_{33}^D = c_{33}^D \left(1 + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}} \right) = 12.6e10 \text{ Nm}^{-2}$$

Con esto calculamos la velocidad de las ondas de compresión y la frecuencia del primer armónico.

$$V_L = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} = 4.07 \text{ e3 m s}^{-1}$$

$$f_0 = \frac{V_L}{2l} = 1.02 \text{ MHz}$$

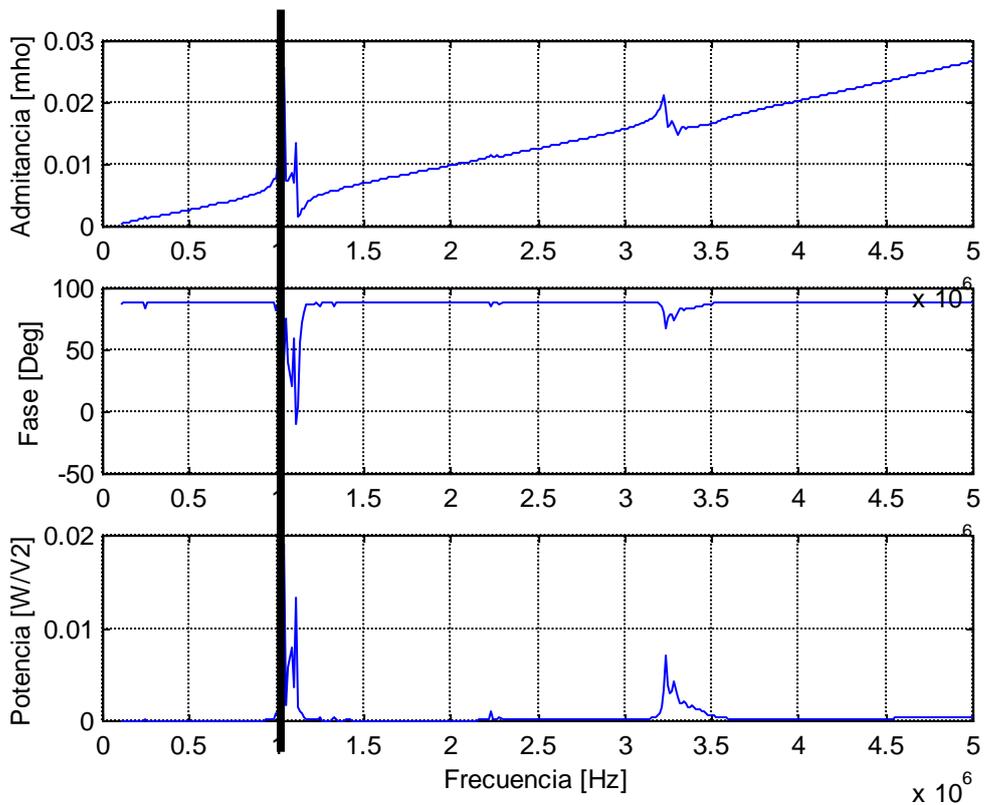


Figura 4.5 Frecuencia del modo espesor

En la figura se observa el ajuste entre el calculo y la medida eléctrica, la línea gruesa indica la frecuencia calculada.

Puede obtenerse mas información del modelo de Mason a partir del circuito equivalente par el modo espesor presentado en 3.3.

Indice

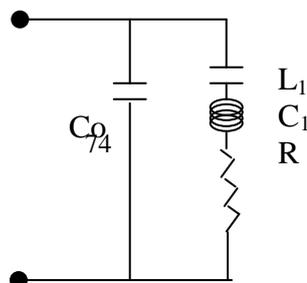


Figura 4.6 Circuito equivalente en modo espesor

Los parámetros calculados a partir de la serie de medidas son

$$R = 6,1 \ \Omega$$

$$L_1 = 56.6 \ \mu\text{H}$$

$$C_1 = 517.2 \ \text{pF}$$

$$C_0 = 1.14 \ \text{nF}$$

En la siguiente grafica se muestra el resultado de simular el circuito equivalente de Mason y se compara con la curva medida. Los parámetros del circuito son obtenidos del HP4194A

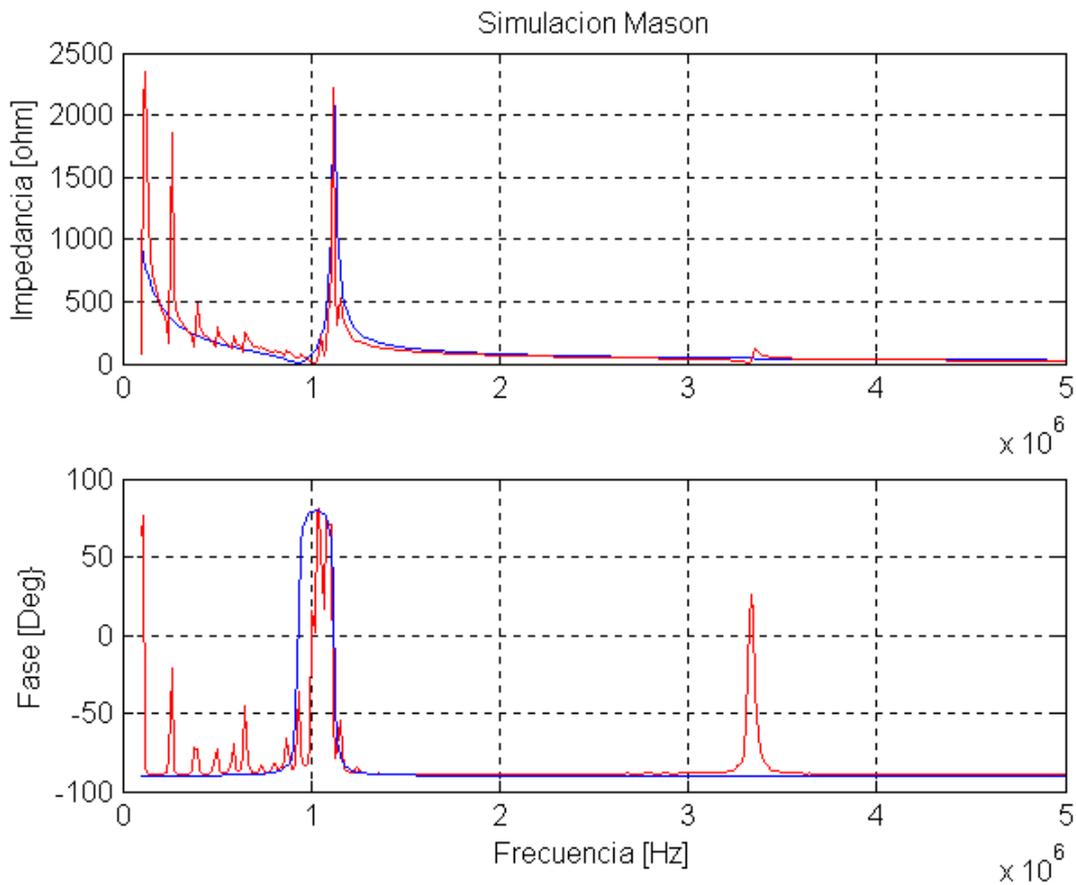


Figura 4.7 Simulación del modo espesor y media de impedancia

Por ultimo se presenta la simulación de la admitancia por elementos finitos, las constantes utilizadas se encuentran en el apéndice A5 como PZT5A

La simulación utiliza la simetría axisimétrica. Para la grilla se utilizo un paso de 0.1 mm como se indica en la figura

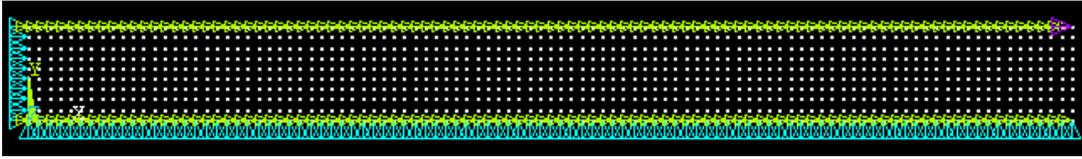


Figura 4.8 Grilla para simulación por FEA

En la grafica se muestra la simulación de admitancia en modulo y fase además de la curva de potencia consumida. Los datos experimentales están en rojo.

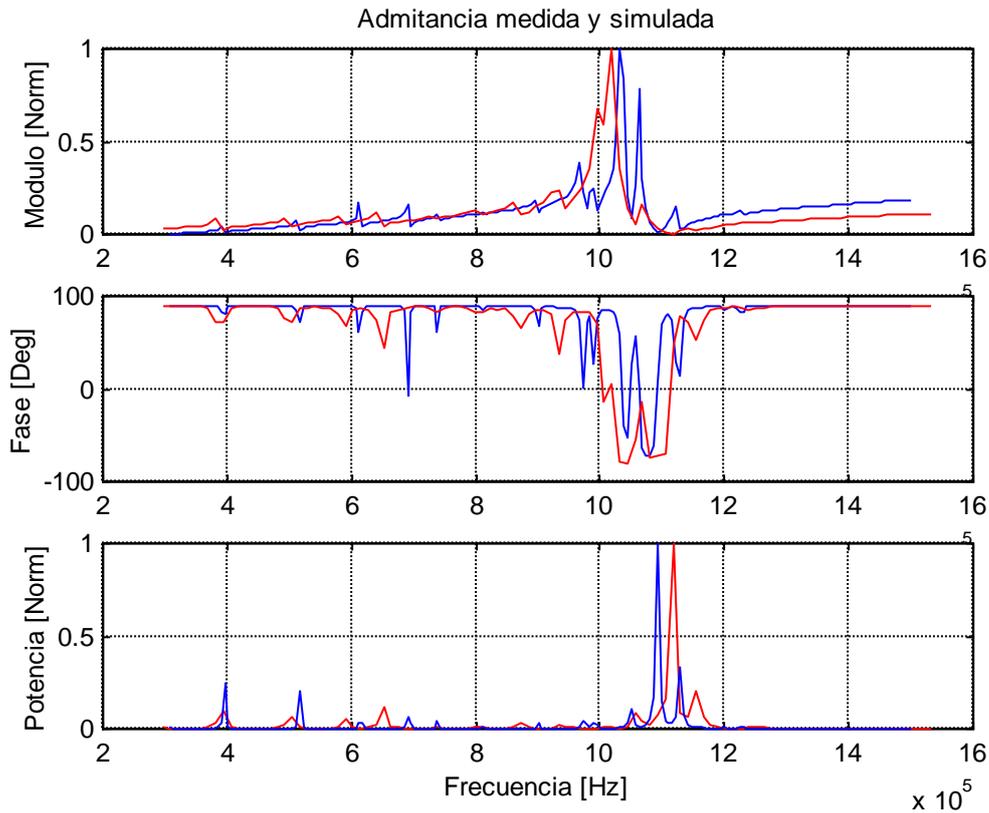


Figura 4.9 Simulación eléctrica por FEA

Para comparar los resultados debe fijarse el amortiguamiento de la simulación. Pero el amortiguamiento real de la muestra depende además de la frecuencia [64] [68] [70]., el parámetro comúnmente utilizado en ANSYS para ingresarlo es una constante, para disminuir este efecto reduzco el rango de frecuencias a 300 KHz – 1.5 MHz.

En la practica las medias de admitancia son realizadas con el analizador HP4194A, en el apéndice A4 se describe la operativa para realizar estas medidas así como la interfase HP4194A-Matlab

4.2 Espectroscopia acústica

El método de espectroscopia acústica permite relevar el desplazamiento de una superficie piezoeléctrica y obtener la función de trasferencia electromecánica de cada punto de misma.

No se ha encontrado referencias al mismo en la bibliografía, por lo que considero que es un aporte original de la tesis.

Fue presentado por primera vez en [67], y se encuentra una crítica al mismo en [15]

Si existe en la literatura [46] un método de determinar similar que consiste en excitar la muestra con un pulso tipo delta, obtener la respuesta en el tiempo con un osciloscopio y mediante la transformada de Fourier obtener la transferencia. A pesar de ser teóricamente equivalentes la caracterización de un sistema complejo en el dominio del tiempo es muy difícil, fundamentalmente en el caso de modos acoplados.

La gran ventaja de la presente implementación es que utiliza el módulo de transferencia del HP4194A. Niveles de excitación, de voltios, corresponden a amplitudes del orden del armstrong. Esta vibración puede ser detectada porque el HP4194 realiza una detección sincrónica que permite relaciones de amplitud de hasta -120 dB.

La resolución en amplitud es de 0.001 dB y en fase 0.01 Deg. [90]

La espectroscopia acústica se presenta como una alternativa al método tradicional de interferometría óptica, cuya implementación requiere un pulido a espejo en la cara a relevar. En general este no es el caso en los transductores utilizados, siendo necesaria la construcción de muestras especiales para ser medidas. además en algunos casos el electrodo no cubre totalmente la superficie, dificultando más el espejado.

La medida se realiza excitando sinusoidalmente el transductor PZT, la vibración del mismo es recogida con un hidrófono acoplado mediante aceite o agua. Tenemos en este caso un diagrama de bloques entre la señal del generador y la obtenida en el hidrófono como se indica en la figura

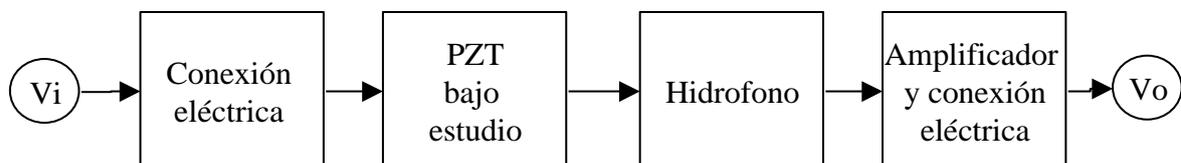


Figura 4.10 Diagrama de bloques de espectrometría acústica

Transferencia de cada bloque:

- El bloque indicado como conexión eléctrica, consiste en los cables y si existe un amplificador entre el generador y la muestra bajo estudio, es conveniente que la respuesta de este bloque sea plana en el rango de frecuencias de interés, ya que la compensación no da buenos resultados.
- El bloque PZT tiene una transferencia electromecánica, como se discutió en los capítulos dos y tres. Puede pensarse como un sistema con una entrada y muchas salidas, siendo estas cada punto de la superficie. Podemos entonces tener una transferencia para cada uno.
- Acoplante, aunque no está indicado en el diagrama, debe acoplarse la superficie con el hidrófono. Si la distancia entre el hidrófono y la superficie es pequeña puede pensarse el fluido transmite el movimiento a la membrana y el desplazamiento en la superficie

es el mismo en la cara del hidrófono, no existiendo ningún efecto de difracción. Por esto se supone la transferencia de este bloque igual a uno.

- Hidrófono, la transferencia del hidrófono se supone plana en la banda de frecuencias de interés, en este bloque se realiza nuevamente la conversión electromecánica. [7]
- Etapa de entrada, la señal del hidrófono debe acondicionarse para ser comparada con la señal de excitación, esta corresponde a la entrada del circuito de detección.

La medida se realiza tomando como entrada la señal generada en el analizador HP4194 y como salida la de la tensión en el amplificador del hidrófono. Esta transferencia es el producto de las respuestas individuales de cada uno de los bloques indicados en el diagrama, por ello para obtener la respuesta del PZT debe descontarse la transferencia del hidrófono y los cables.

En la siguiente figura se muestra un esquema del montaje práctico del método

La muestra a medir se coloca en un módulo especialmente diseñado para este fin, permite la alineación de la muestra y se encuentra solidario al conjunto que permite mover el hidrófono mediante motores paso a paso. Tiene un conector BNC para recibir la señal desde el HP4194A y esta realizado en aluminio para mejorar el blindaje electromagnético.

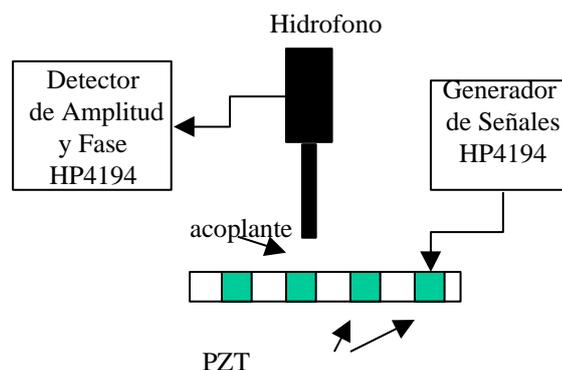


Figura 4.11 Montaje para espectroscopia acústica

Manipulación

- La muestra piezoeléctrica debe estar polarizada y con electrodos.
- Soldar en el módulo de medida los electrodos a entrada de señal desde el HP4194A. El electrodo de tierra debe ser el que queda en contacto con el hidrófono.
- Conectar el cable desde la salida "Dual" del HP4194A a la entrada de señal.
- Conectar la entrada "Reference channel" con la señal generada en "Dual". Da mejor resultado hacer la conexión con un conector T que utilizar la salida del equipo.
- Conectar el hidrófono al "Test channel"
- Acoplar el hidrófono y la muestra mediante aceite o agua.
- Configurar el HP4194A en modo transferencia. "Gain-Phase"
- Seleccionar relación de amplitud y fase en grados. "Tch/Rch".
- Seleccionar el rango de frecuencias
- Seleccionar el tiempo de integración y el promedio. Ej. tiempo medio y promedio 2.
- Seleccionar el modo "Dual"
- Seleccionar los atenuadores de entrada.

Reference channel $1M\Omega$ $-20dB$

Test channel $1M\Omega$ 0dB

Debe tenerse especial cuidado con la alineación de la muestra, fundamentalmente si se quiere mover el hidrófono. Un desnivel de la muestra se refleja en una capa de acoplante variable con la posición lo que produce un “background” proporcional al mismo donde se superpone la medida. Para mejorar este problema se puede utilizar un plano de simetría de la pieza y simetrizar los datos.

En el apéndice **A4** se detallan los comandos del HP4194A para realizar una secuencia de medidas.

Ejemplo de medida

A continuación se presenta una medida realizada sobre el disco de PZT en el centro del mismo

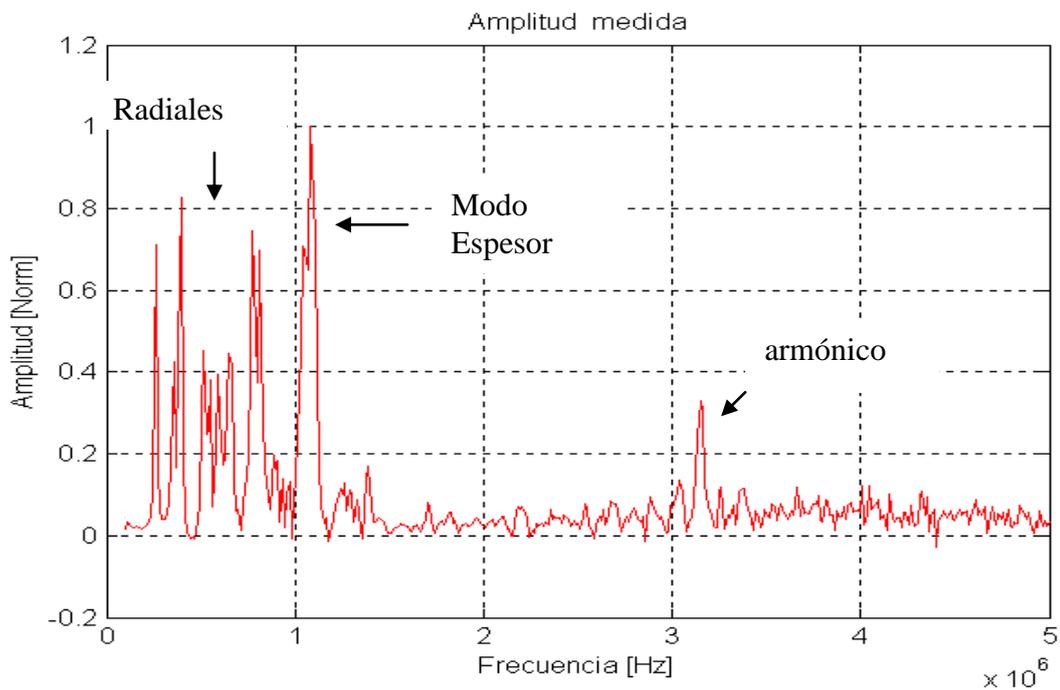


Figura 4.12 Vibración experimental normalizada

La medida se realizó con un hidrófono de 0.6 mm de diámetro. Pueden observarse la frecuencia de resonancia espesor, los modos radiales y el tercer armónico.

Para verificar la posición de los picos vemos la media realizada eléctricamente de potencia consumida por la muestra

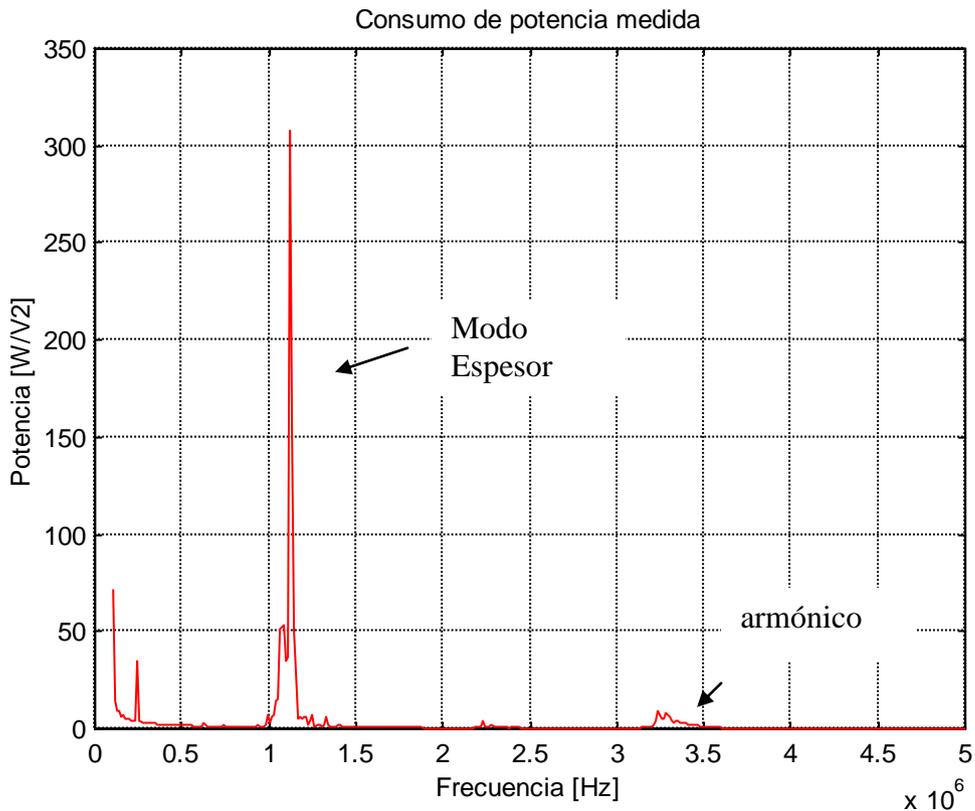


Figura 4.13 Consumo de potencia medido

Aquí se ve claramente el modo espesor, pero mucho mas agudo, el tercer armónico y los modos radiales quedan reducidos frente a la amplitud del modo espesor.

Aquí sacamos tres conclusiones importantes

- Las frecuencias donde se dan las resonancias son bien determinadas por los dos métodos.
- La amplitud relativa y el ancho de los picos varia entre la medida eléctrica y la acústica. Esto se debe a que en al medida acústica la muestra esta cargada mecánicamente, en una cara por la capa de acoplante y en la otra transfiere energía al soporte. Como se mostró en 3.3 una carga mecánica se convierte en un termino de amortiguación de la muestra.
Resumiendo las condiciones de carga son distintas y debe esperarse mas amortiguación en la medida acústica que en la eléctrica.
- La resolución en frecuencia del método de espectroscopia acústica es muy buena, comparable con la medida eléctrica

Desventajas del método

Calibración absoluta

La obtención de valores absolutos de desplazamiento requiere la calibración previa del hidrófono, cables y el acoplante utilizado. En esta primera etapa no formo parte del trabajo, optando por trabajar con valores relativos.

Si bien se realizaron algunas pruebas, la comparación con la interferometría óptica es uno de los puntos pendientes para completar el método, se propone como trabajo futuro la implementación de un interferómetro que sirva de referencia.

Montaje experimental

El montaje para realizar una media relativa en un punto fijo es robusto, pero cuando se quiere realizar un barrido es muy delicado, debiendo estar paralelo el plano de la muestra con el movimiento del hidrófono para relevar la superficie. Pero el problema del paralelismo es común a todos los métodos de medida de superficie. Otro punto delicado es que las condiciones de carga (que dependen del acoplante) hacen que varíe la forma de los picos, esto afecta la repetitividad de las medidas.

Ruido eléctrico

Al ser el detector tan sensible parte de la señal se transfiere como radiación electromagnética desde la entrada al hidrófono. Aparece un fondo que crece con la frecuencia debido a este efecto, esto es notorio en alta frecuencia donde además aparecen picos debidos al acoplamiento electromagnético, en la práctica con el blindaje que se utiliza actualmente pueden realizarse medidas hasta 5 Mhz teniendo en cuenta la pequeña deriva que depende de la posición de los cables por lo que no puede descontarse a priori. El utilizar la compensación del equipo no da buenos resultados ya que hay la transferencia no puede realizarse sin el hidrófono.

Comparación con el método FEM

Una alternativa simple de fijar la escala del problema es utilizar la simulación con FEM, esto permite ajustar los valores de amplitud por unidad de voltaje de excitación.

A continuación se presenta una medida de amplitud realizada sobre un disco piezoeléctrico. Se realizó la simulación de amplitud para el disco y se presenta el resultado en la siguiente figura.

Se repiten la geometría y el grillado del 4.1 pero como se comentó se cambian las condiciones de amortiguación. Vale aquí el comentario realizado para el rango de frecuencias de 300 KHz – 1.5 MHz.

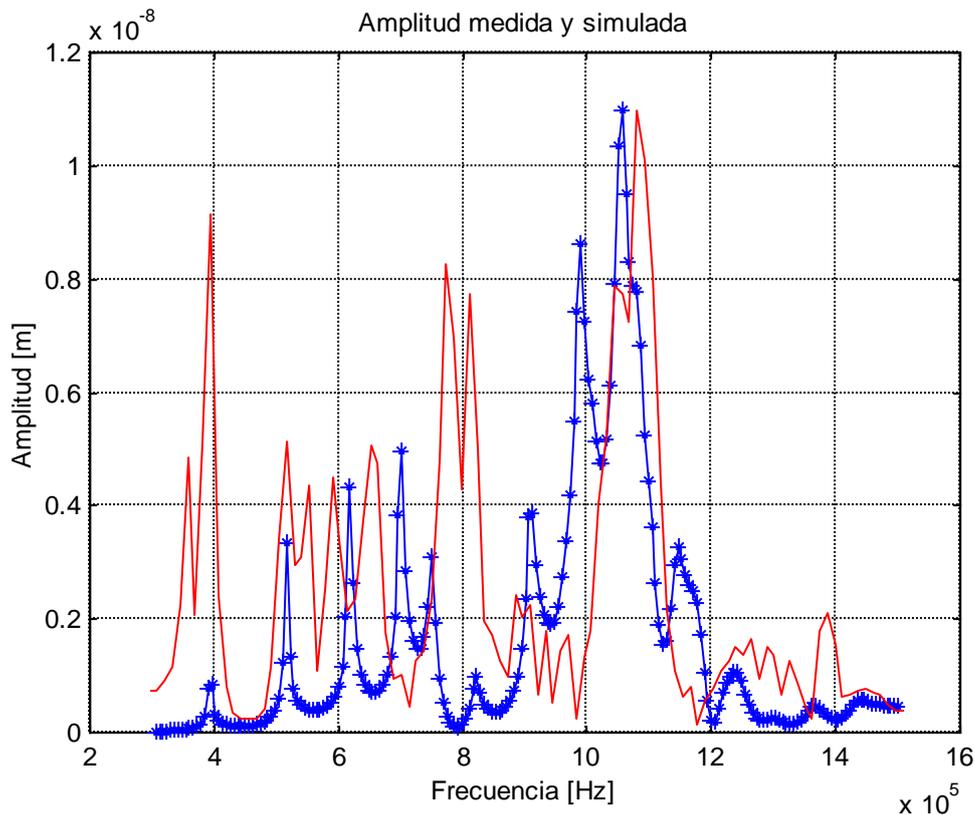


Figura 4.14 Amplitud medida y simulada para el disco

El ajuste de los datos medidos y simulados es aceptable, mostrando el acoplamiento entre la frecuencia espesor y los modos radiales. Las diferencias más importantes están en el ancho de los picos (ver el modo espesor en torno a 1MHz) y que los modos radiales para bajas frecuencias son más importantes siendo estos una consecuencia típica de la atenuación que es difícil de introducir en el modelo FEM.

Superficie de Amplitud y sonograma

Utilizando este método puede relavarse la vibración de la superficie en función de la posición y la frecuencia simultáneamente. Esto se realiza moviendo el hidrófono a lo largo de una línea y relavando al amplitud.

La superficie amplitud de vibración vs. frecuencia y posición da mucha información, muestra la localización de máximos de amplitud tanto en frecuencias como en el espacio.

Una forma de presentar el gráfico es la proyección de la superficie sobre el plano frecuencia-posición e indicar la amplitud en escala de colores. Llamamos a esta representación sonograma.

Como se vera en los ejemplos esta representación es muy útil cuando se quiere estudiar la localización espacial de los armónicos y el acople de modos.

No se encuentran en la literatura del tema diagramas del estilo, por lo que considero que es un aporte original.

La siguiente figura muestra un sonograma de amplitud medido y simulado con un paso espacial de 0.2 mm

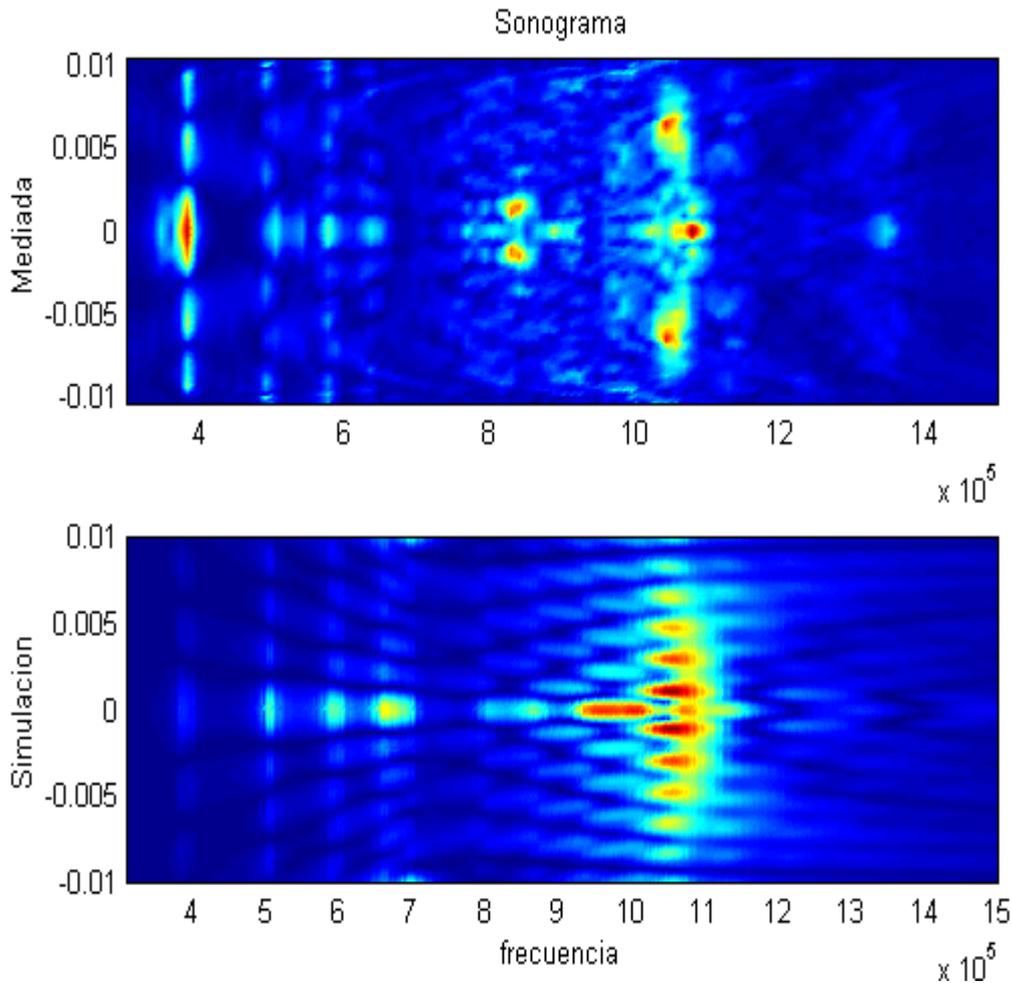


Figura 4.15 Sonograma experimental y simulado

Aquí puede verse claramente la modulación espacial de los modos producido por el acoplamiento con los bordes. Este es uno de los problemas a evitar en el diseño de transductores reales.

Esto nos permite sacar algunas conclusiones

- La posición de las frecuencias, esto nos permite afirmar que la espectroscopia acústica y los FEM dan las mismas frecuencias de resonancias.
- La modulación espacial es correcta, obsérvese

armónico radial en el entorno de 400 KHz	cinco picos
armónico radial en el entorno de 500 KHz	siete picos
armónico radial en el entorno de 600 KHz	nueve picos
armónico radial en el entorno de 700 KHz	once picos
En el entorno de los 850 KHz comienza el acoplamiento con el modo espesor	
Modo espesor en el entorno de 1.1 MHz	
- Como ya se comento anteriormente el ancho de los modos y su altura relativa (intensidad del color) son fuertemente influenciados por la amortiguación y difieren en la comparación.

CAPITULO 5

ANALISIS DE LA VIBRACIÓN EN ESTRUCTURAS COMPLEJAS

El capítulo trata el estudio de estructuras piezocomposites con diferentes geometrías. Se aplican los modelos teóricos analizados en el capítulo dos y tres, se realizan cálculos, estudios por elementos finitos y cuando es posible se comparan los resultados con los obtenidos en las mediciones.

Como problema central se trata el estudio de un piezocomposite periódico de conectividad 1-3, introduciendo a lo largo de este ejemplo las herramientas necesarias para realizar un análisis de vibración por elementos finitos de la superficie.

Luego se ataca un problema importante en este tipo de estructuras como son los modos laterales debidos a la periodicidad de la red.

Por ultimo se presentan tres ejemplos concretos de aplicación actual en el trabajo del laboratorio, el estudio de la ruptura de la periodicidad mediante un piezocomposite 1-3-1, el estudio de un film piezoeléctrico y un array con geometría de cantor.

5.1 Piezocomposite 1-3.

[27] [78] [79] [40] [38] [33] [34] [36] [14] [74]

En este primer ejemplo discutiremos algunas hipótesis físicas que permiten el modelado de los transductores reales. Como ya se comentó en el capítulo uno un transductor piezocomposite consiste en un arreglo de cerámicas piezoeléctricas inmersos en una matriz de polímero.

Estudiaremos primero cuatro cuestiones importantes

- En cuantos elementos debe dividirse una estructura para resolver un modo de vibración.
- Que simetrías permiten simplificar el problema
- Acople de modos
- Que constantes utilizar para los materiales y como influyen en el comportamiento de los modos.

Estudio del numero de elementos.

Para realizar el modelo de elementos finitos debe dividirse el dominio del problema en elementos, a medida que se refina la partición la solución converge al resultado real. El tiempo de calculo de una simulación aumenta con la cantidad de elementos y el numero de grados de libertad asociados a los mismos.

Rápidamente se llega al punto de hacer impracticable la simulación, debe encontrarse entonces la solución de compromiso entre el numero de elementos utilizados y la precisión de los resultados obtenidos.

Nuestro problema actual es analizar los modos de vibración en las estructuras piezoeléctricas, entonces el numero de elementos utilizados debe permitir visualizar los modos mas importantes.

Se sugiere en las referencias [59] [40] [70] que se utilicen 10 elementos por longitud de onda del modo a visualizar para resolverlo con detalle. El piezoeléctrico solo se comporta como un resonador con ambos extremos libres, por lo que su dimensión corresponde a media longitud de onda.

Primero estudio la evolución de la solución cuando se aumenta el numero de elementos. La pieza bajo estudio corresponde a un palito del piezocomposite.

Dimensiones:

2.4mm de espesor

1 mm de lado con base cuadrada.

Se simula la respuesta de amplitud para el punto centro del elemento y se calcula la admitancia de la muestra.

Se realiza el mismo análisis armónico en un rango de 10 KHz a 5 MHz en 200 pasos de calculo para diferentes grillados.

Los grillados elegidos son

0.8 mm

0.6 mm

0.4 mm

0.2 mm

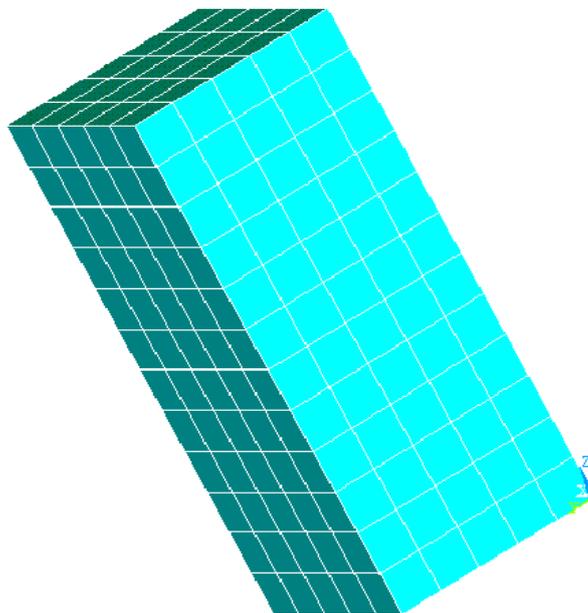


Figura 5.1 Elemento piezoeléctrico

Las siguientes figuras muestran la amplitud de vibración del punto central del palo en función de la frecuencia y la admitancia eléctrica para cuatro grillados diferentes

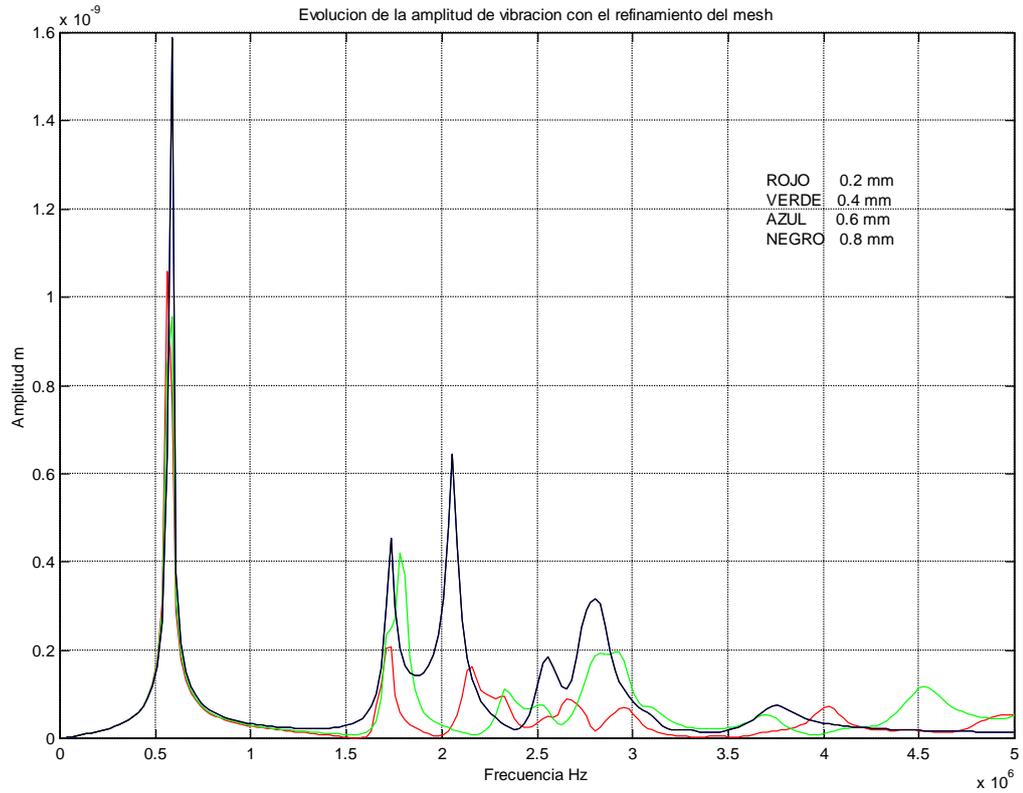


Figura 5.2 Evolución de la amplitud con el grillado

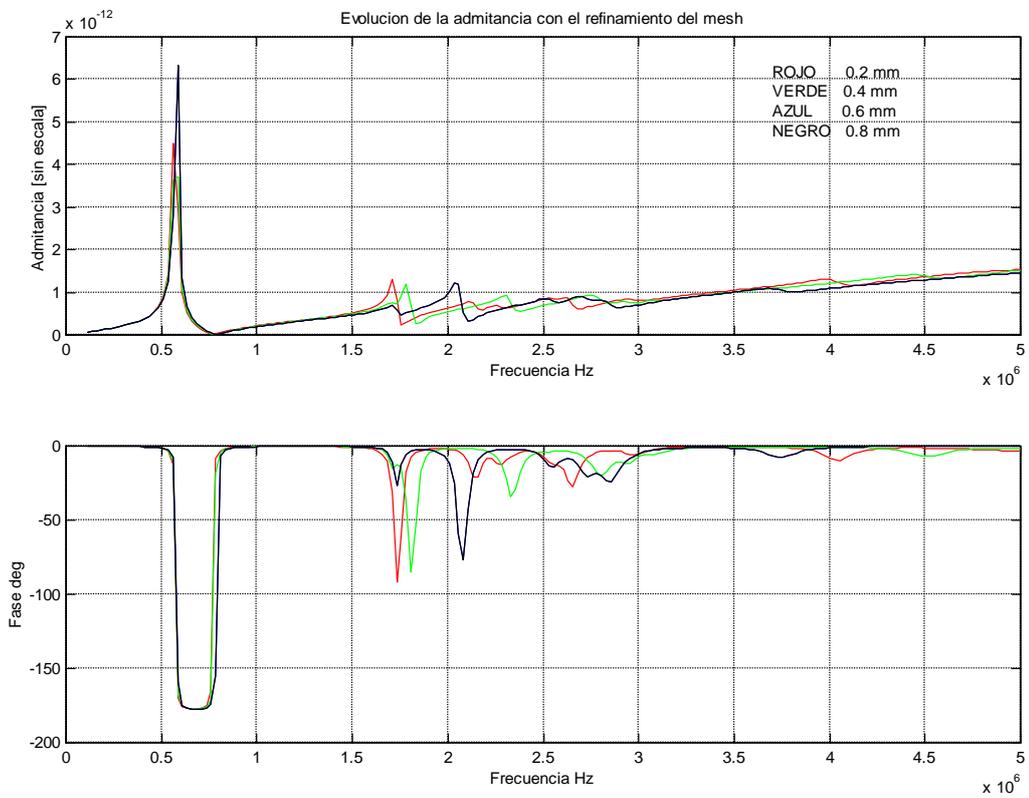


Figura 5.3 Evolución de la Admitancia con el grillado

Esto nos permite concluir que

1. El modo espesor, en nuestro caso de 570 KHz es bien representado por todas las particiones.
2. El tercer armónico en 1710 KHz aparece en todas las particiones pero aquí ya existen discrepancias entre los resultados.
3. Las frecuencias mayores asociadas a los modos en el plano x - y y a los armónicos superiores del modo espesor son mal calculados por las particiones mas gruesas.

Para este caso concluimos que el criterio sugerido de 10 elementos por longitud de onda del modo espesor es adecuado para nuestro análisis.

Simetría de la pieza con condiciones de borde. [59] [40] [70]

Si el piezoelectrico que se simula presenta planos de simetría tanto para la geometría como para la excitación, puede reducirse el numero de elementos utilizados aplicando condiciones de borde adecuadas.

La regla para fijar las condiciones de borde es la siguiente, si existe un plano de simetría en el problema el desplazamiento en la dirección de la normal a dicho plano es nulo para todos los puntos del mismo.

En el caso del elemento estudiado permite reducir el volumen entre 8 ya que existen tres planos de simetría

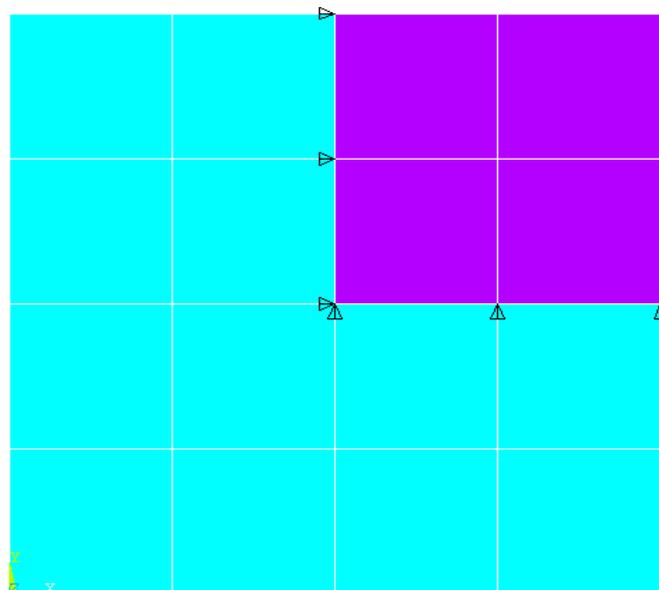


Figura 5.4 Planos de simetría

En la figura se muestra como remplazar una geometría por otra menor utilizando las condiciones de borde que fijan los planos de simetría.

Un caso particular se presenta en un medio infinito, donde existe una figura que se repite periódicamente. Puede utilizarse en este caso dos planos de simetría por eje y reducir de esta forma el problema.

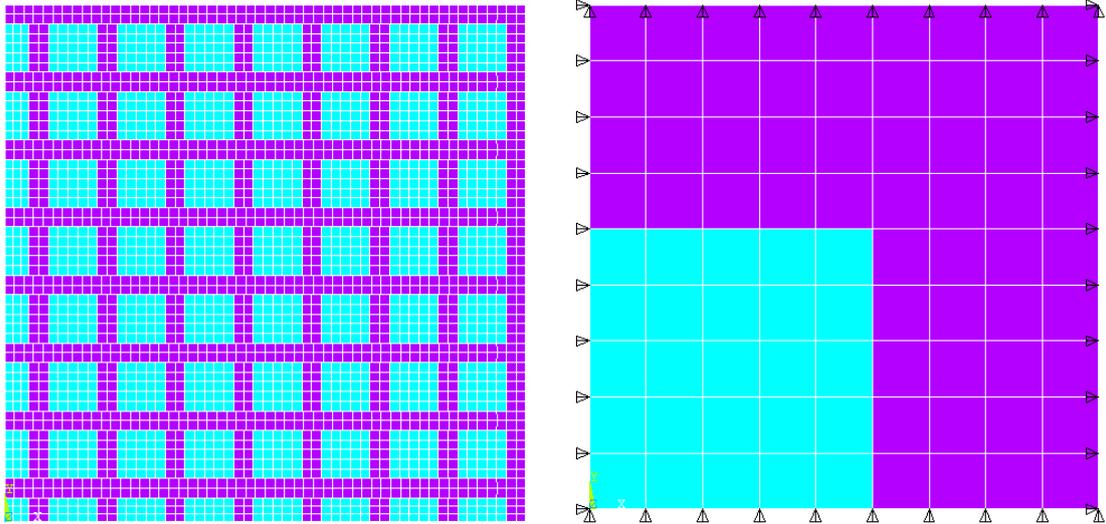


Figura 5.5 Simetría para red infinita

La geometría estudiada es

- Espesor 0.1 mm
- Cerámica de base cuadrada 1 mm
- polímero 0.4 mm

Para verificar el uso de esta simetría infinito en el caso de nuestros piezocomposite realizo una simulación aumentando el numero de elementos

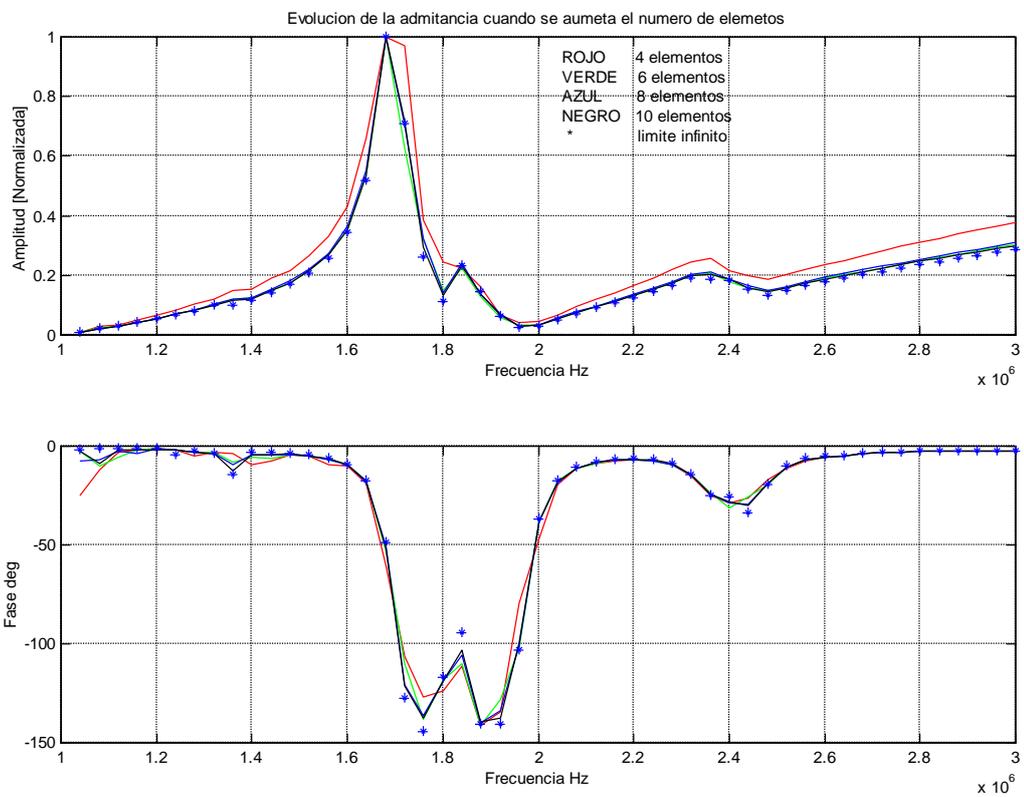


Figura 5.6 Simetría infinito

En esta simulación se verifica que aumentando el número de elementos la solución converge a la obtenida con la simetría infinito.

El uso de esta simetría simplifica hace posible el modelado del composite 1-3

Acople de modos. [40] [70][38] [14]

Estudiaremos ahora si los modos de vibración están acoplados. Este conocimiento es útil para simplificar el problema reduciendo el análisis a dos dimensiones.

Lo que queremos descubrir es si el problema completo en tres dimensiones es análogo a estudiar problemas bidimensionales separados y superponer.

Ya se observó en el capítulo cuatro que los modos radiales se acoplan con el modo espesor en un disco, en el caso de los composites es de mucha importancia descubrir si existe un acoplamiento fuerte entre los modos laterales producidos por la periodicidad de la red y el modo espesor o sus armónicos. Ver 3.6

Como ejemplo estudiaremos los modos de vibración de un composite de geometría

Espesor = 2.4 mm

Largo de la cerámica = 1 mm

Largo del polímero = 0.4 mm

En las referencias se identifican generalmente dos tipos de modos laterales dependiendo de si se corta el composite por una diagonal del cerámico o por el centro, como se muestra en la figura da lugar a dos periodicidades.

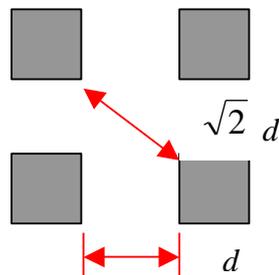


Figura 5.7 Periodicidades en el piezocomposite

A modo de ejemplo se estudia la periodicidad de paso de red 1.4 mm y se realizan tres simulaciones para comparar los modos de vibración obtenidos en cada una.

- Celda completa
- Corte con el plano $Y = 0$
- Palca XY

Se comparan los resultados de la celda completa con los otros tres

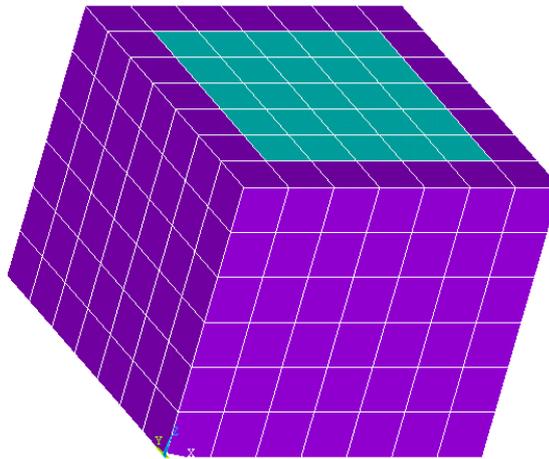


Figura 5.8 Celda piezocomposite

Cada división de la grilla corresponde a un elemento y su lado es de 0.2 mm. Se mantiene el mismo grillado para todas las simulaciones

Los resultados para la admitancia simulada en este caso son

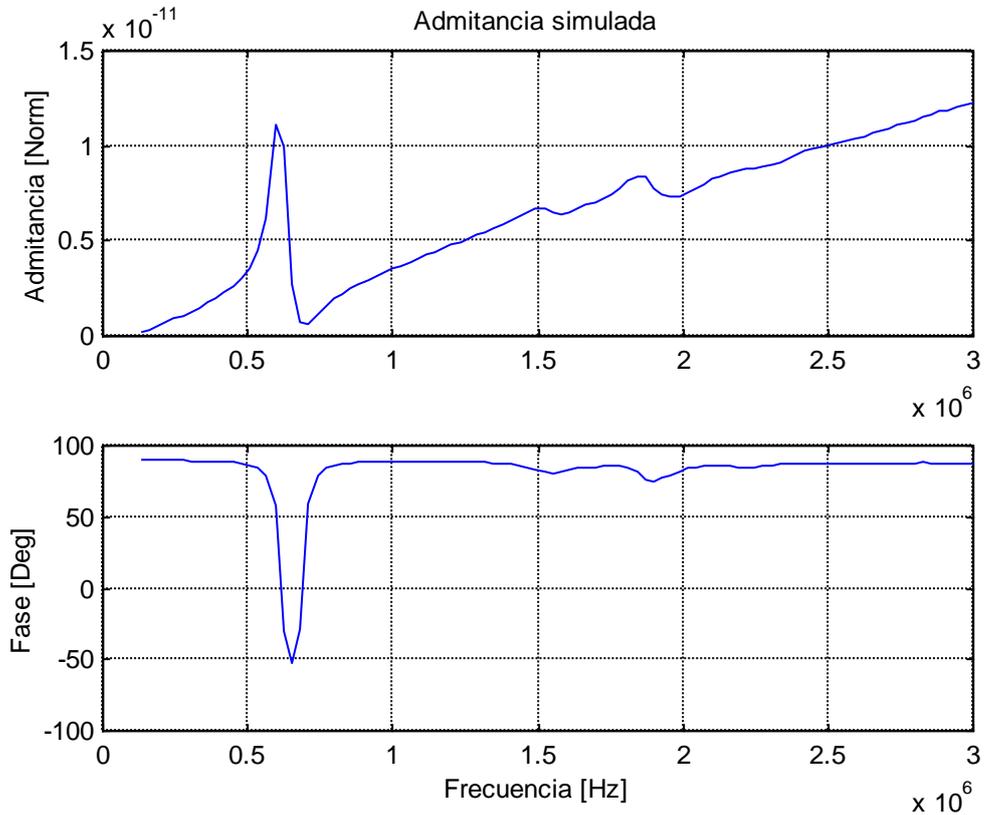


Figura 5.9 Admitancia para celda piezocomposite

Aquí se observa el modo espesor en 680 KHz. A este modo corresponderían un tercer armónico en 2.0 MHz y un quinto armónico en 3.4 MHz aproximadamente. Se observan varios picos que corresponden a los armónicos y los modos laterales. Se observa además un acoplamiento entre estos modos.

Investigaremos ahora el uso de un modelo bidimensional que considera el composite como infinito en la dirección Y . Esto nos permite estudiar el modo espesor y los modos laterales asociados a la periodicidad en el plano X - Z . Se utilizó un modelo de *plane strain* que supone deformación nula fuera del plano. Ver apéndice A6

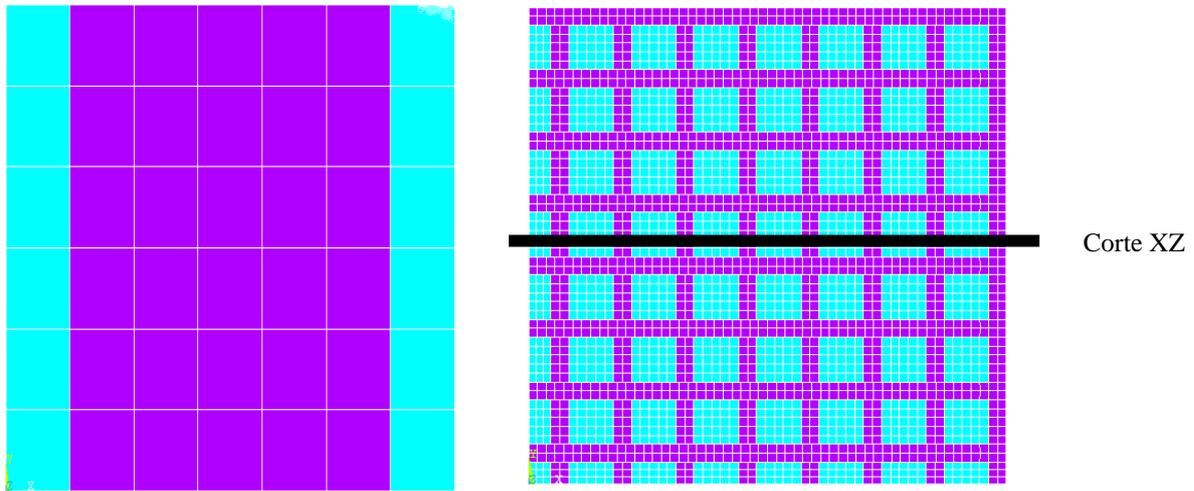


Figura 5.10 Corte del piezocomposite en el plano XZ

En la siguiente figura se compara esta simulación (verde) con el resultado obtenido en la celda completa (azul)

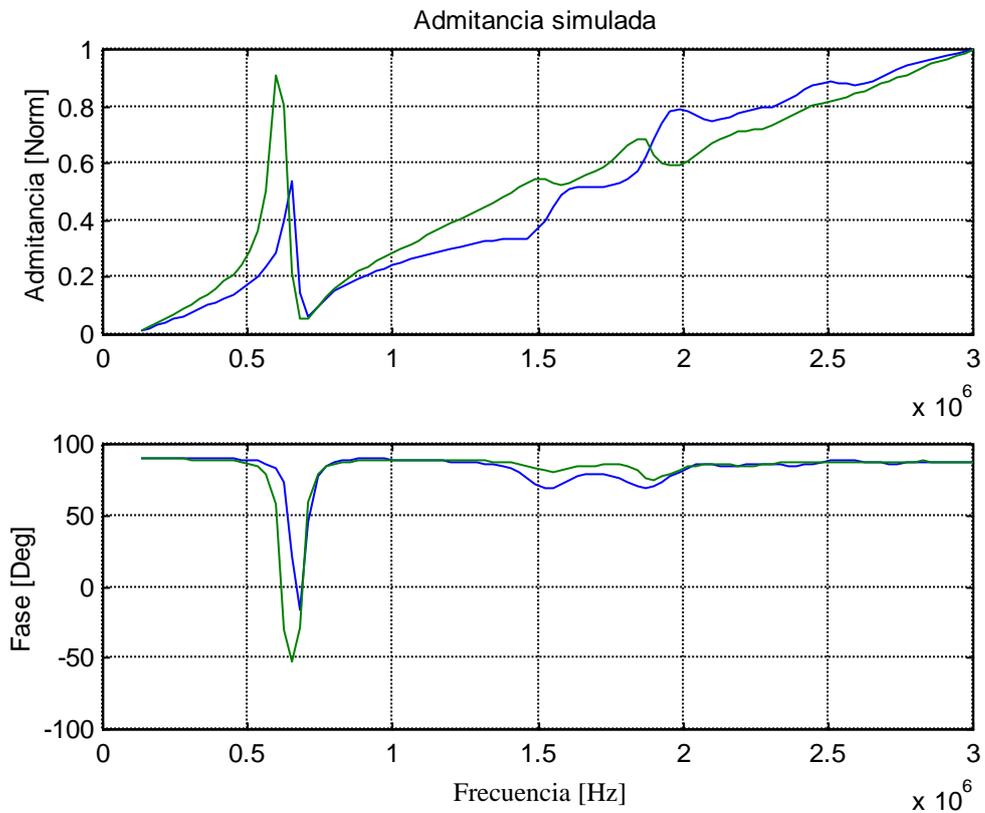


Figura 5.11 Admitancia para celda y corte XZ

Se observa el ajuste del modelo para el modo espesor, pero no ocurre lo mismo en la zona donde esta el tercer armónico y los laterales.

Para intentar verificar la hipótesis de que las frecuencias laterales se acoplan con los armónicos del modo fundamental simulo una placa con la geometría correcta en el plano X-Y pero con un espesor mucho menor. Esto permite desacoplar los modos y estudiar la región donde aparecen si no esta el modo espesor.

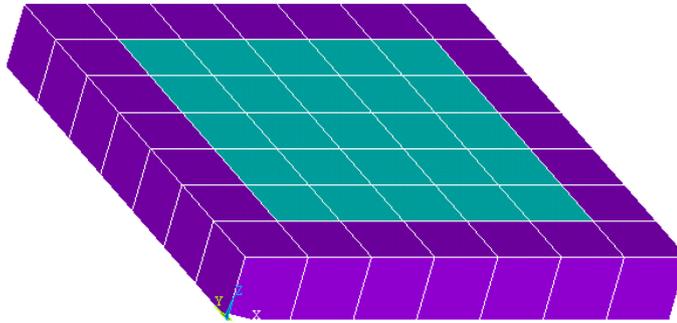


Figura 5.12 Placa piezocomposite

La simulación de la placa solo se utiliza para ver las frecuencias laterales, al cambiar el espesor pierde totalmente la escala frente a la celda original

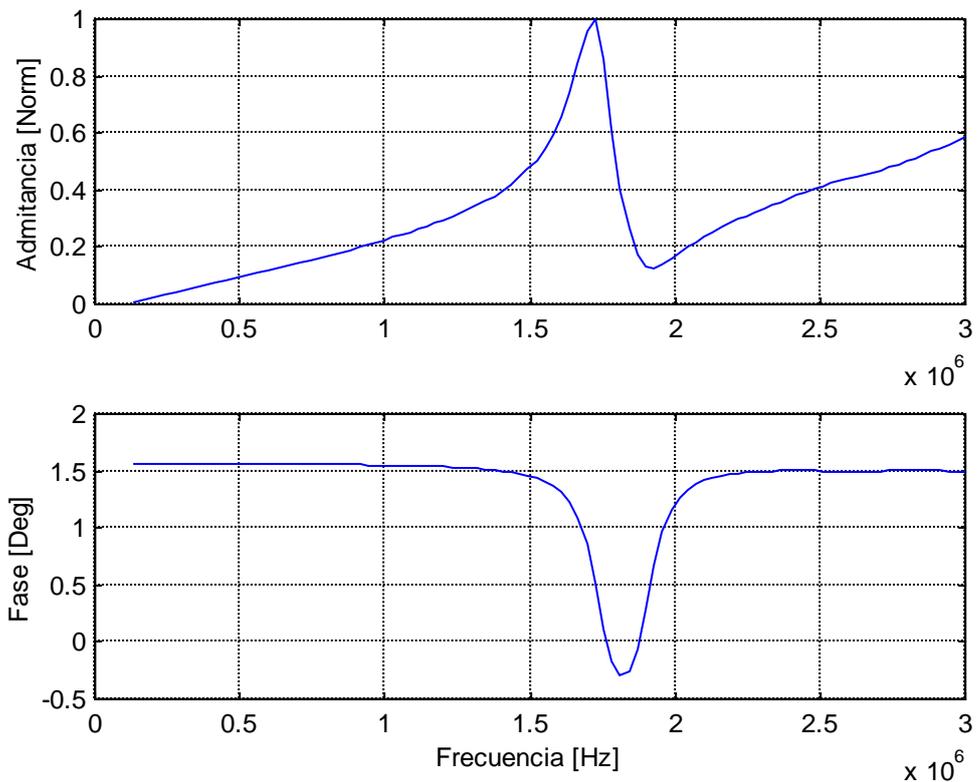


Figura 5.13 Admitancia de placa piezocomposite

Esta simulación nos permite verificar que existe al menos una frecuencia lateral en el entorno de 1.8 MHz, con lo que se acoplan con el tercer armónico de aproximadamente 2 MHz

Influencia de las propiedades en los modos de oscilación

[27] [78] [12]

En este punto discutiremos como influyen las propiedades de los materiales en los diferentes modos de oscilación. Se esperara una dispersión del orden de 10 % en los materiales piezoeléctricos comerciales, lo que da un rango de ajuste de los mismos en cada problema particular.

La fabricación de un material piezoeléctrico es un proceso complejo cuyas etapas deben ser finamente controladas, pequeñas variaciones en ellas pueden producir cambios apreciables en las propiedades del material. A escala de laboratorio el ensayo de nuevos materiales trae aparejado el problema de la caracterización elástica y piezoeléctrica.

Aquí el método de FEA se presenta como una alternativa a la validación de las medias o para estimar las mismas en caso de que no sea posible realizarlas.

El estudio se realiza en dos etapas, primero un polímero típico y luego un PZT5A.

Estudio del polímero.

Este material es homogéneo e isotópico, la propagación de ondas elásticas en este tipo de medios fue discutida en 2.4. La homogeneidad e isotropía determina que solo hay dos constantes independientes, el tensor elástico puede expresarse en función de los coeficientes c o de las constantes de Lamé como

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Las velocidades de propagación para las ondas de compresión y corte son las ecuaciones 2.4.4 y 2.4.5 respectivamente

$$V_L = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$V_T = \sqrt{\frac{(c_{11} - c_{12})/2}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Para el caso del polímero presentado en el apéndice A5 como [Hossack 1991]

$$V_L = 2682 \text{ m/s}$$

$$V_T = 1714 \text{ m/s}$$

Para evaluar la dispersión en las frecuencias se dio un rango de variación del 10 % a los parámetros y se calculo la velocidad para cada caso. La siguiente figura muestra los valores posibles para cada velocidad

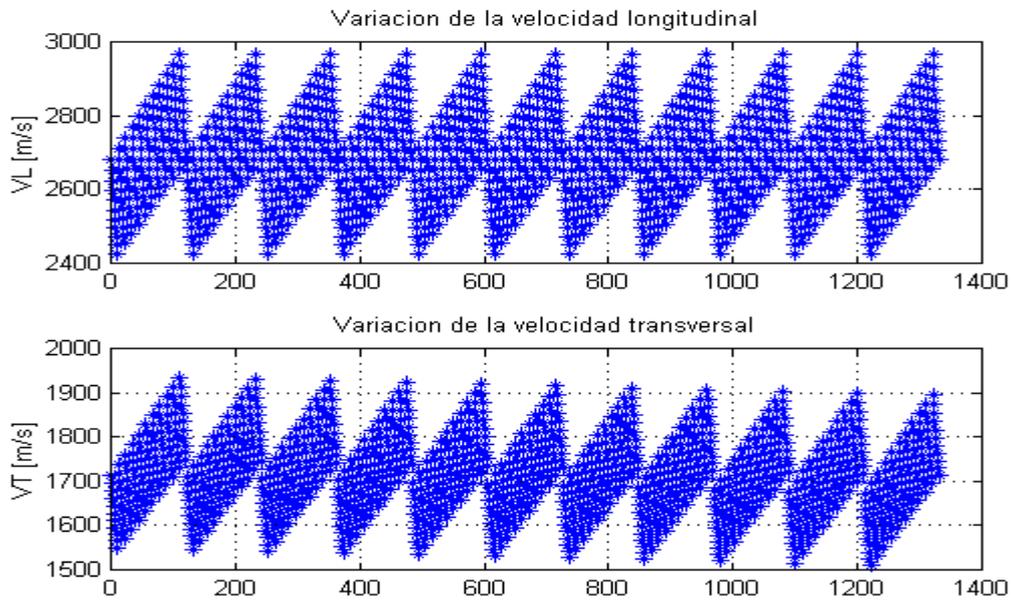


Figura 5.14 Dispersión de velocidades

Para el caso de piezoelectrico la cerámica piezoelectrica se asume como homogénea e isotópica en ausencia de polarización, existiendo la anisotropía cuando se polariza el medio. Se presenta la variación de las tres matrices asociadas al piezoelectrico al polarizarse en la dirección z, se utiliza la notación ANSYS del apéndice A1.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Sin polarizar} & & \text{polarizado} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Aquí puede verse que la tensión directa solo aparece con un campo eléctrico en la dirección z, además las componentes T_{xx} y T_{yy} son iguales y negativas, esto corresponde a que un campo en la dirección z que aplica tensión positiva en T_{zz} se contrae con una tensión negativa en su plano perpendicular. En cuanto a las tensiones de corte solo aparecen cuando se aplican campos normales a la dirección de polarización y pertenecen al plano formado por la polarización y el campo.

Para el tensor elástico ocurre algo semejante

$$c = \begin{array}{c} \text{Sin polarizar} \\ \left[\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \Rightarrow \begin{array}{c} \text{polarizado} \\ \left[\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

Vemos aquí que las dos constantes elásticas de un material isotópico y homogéneo se transformaron en cuatro constantes independientes. Sigue existiendo la simetría en el plano x - y por lo que el modulo de compresión y el de corte son iguales en ambas direcciones. La diferencia esta en los módulos asociados a la dirección z .

La determinación de las constantes elásticas “*stiffened*” que es necesaria para la velocidad de propagación en el material piezoelectrico se discutió en general en el 2.8 como la solución al tensor piezoelectrico de Cristoffel.

Pero en el desarrollo de modelo de Mason 3.2, el de Lamberti 3.5 y el de Auld 3.6 para medios periódicos solo algunas constantes *stiffened* son relevantes para determinar las frecuencias de resonancia.

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} = 126.1e9 \text{ N/m}^2$$

$$V_{Lz} = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} = 4035 \text{ m/s} \quad \text{Ec. 3.3.3}$$

$$c_{11}^D = c_{11}^E + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S} = 136.2e9 \text{ N/m}^2$$

$$V_{Lx} = V_{Ly} = \sqrt{\frac{c_{11}^D}{\rho}} = 3983 \text{ m/s} \quad \text{Ec. 3.5.10}$$

$$c_{44}^D = c_{44}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} = 36.7 \text{ N/m}^2$$

$$V_{Txz} = V_{Tyz} = \sqrt{\frac{c_{44}^D}{\rho}} = 2163 \text{ m/s} \quad \text{Ec. 3.6.9}$$

Por ultimo tenemos el tensor dieléctrico que al polarizarse cambia la permitividad en la dirección de la polarización

$$\begin{array}{ccc} \text{Sin polarizar} & & \text{polarizado} \\ \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} & \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow & \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Aquí se realiza el mismo calculo de la variación de la velocidad para los tres modos cuando los parámetros se dispersan 10 %

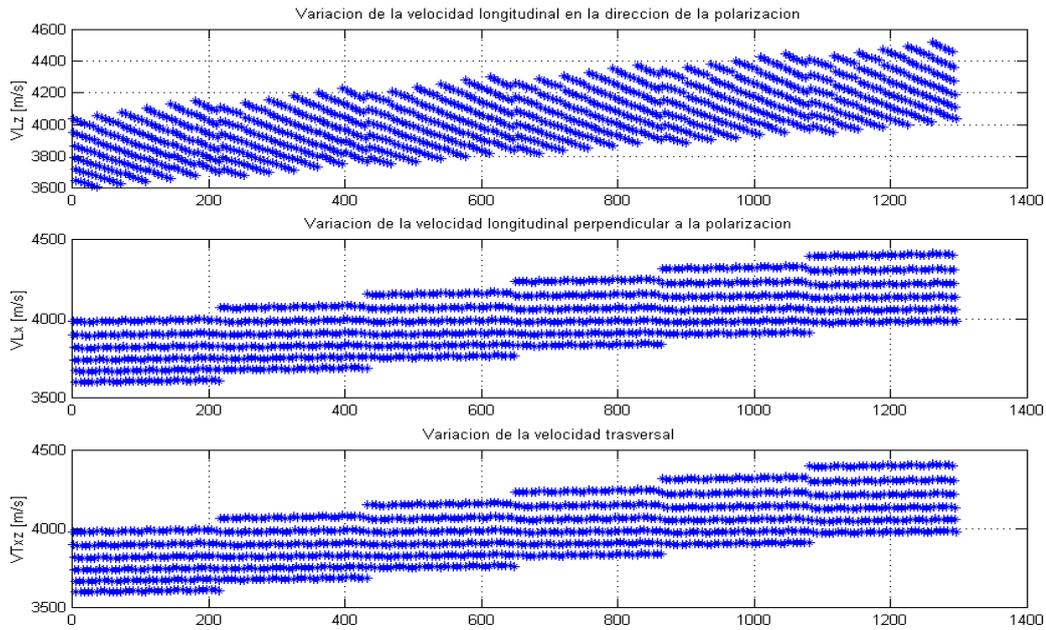


Figura 5.15 Dispersión de las velocidades en el piezoeléctrico

Como conclusión general podemos decir que la dispersión de los parámetros permite grandes variaciones en las velocidades, esto lleva aparejada una gran variación en las frecuencias de resonancia asociadas a estas velocidades. Esto tiene dos aspectos, pueden encontrarse conjuntos de constantes admisibles para ajustar variaciones entre las resonancias medidas y las calculadas por FEA. Lo negativo es que la determinación de los parámetros basada solo en las curvas de resonancia es difícil dado el solapamiento de los modos.

Medida y ajuste del modelo para un composite 1-3

En este punto se realiza una media en un composite real y se compara con los resultados de la simulación. Como ya se dijo en el punto anterior aparecen además del modo espesor y sus armónicos los modos laterales debidos a la periodicidad de la red.

La geometría es la que hemos utilizado anteriormente

Cerámica de base cuadrada 1 mm

Polímetro 0.4 mm de ancho

Alto de los elementos 2.4 mm

Primero se comparan las medias eléctricas, el resultado experimental se indica en rojo.

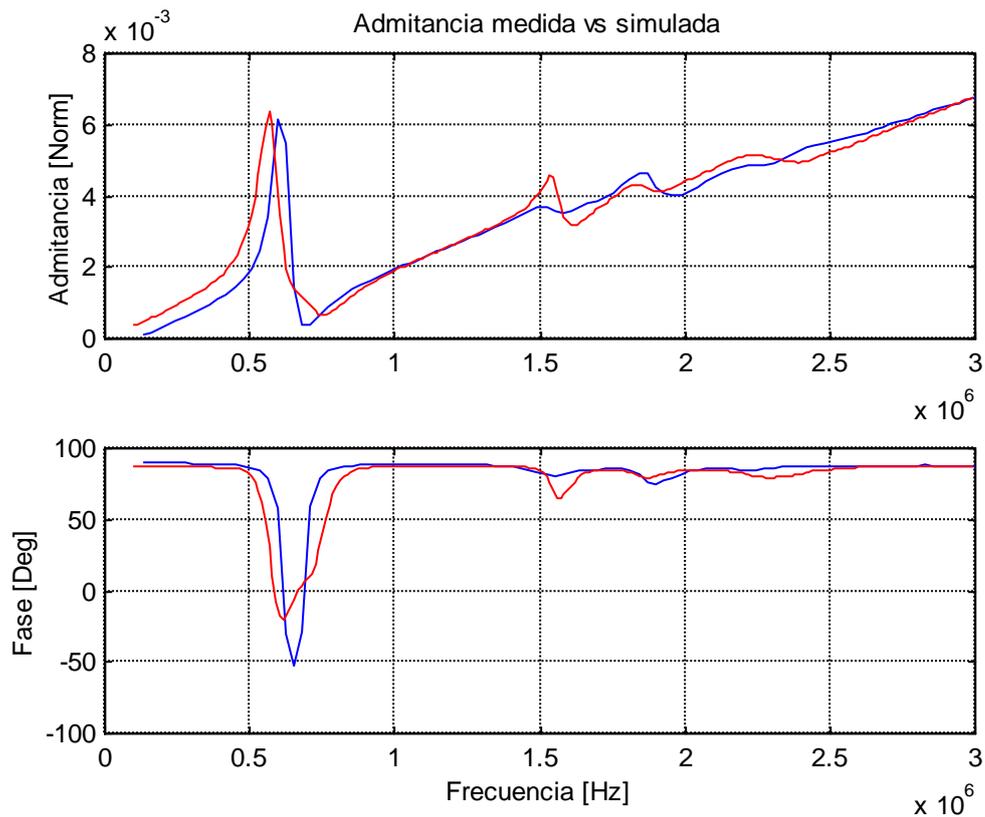


Figura 5.16 Admitancia medida vs. experimental

Aquí se observa un buen ajuste entre la simulación y la medida, pero para mejorar el ajuste debe utilizarse un amortiguamiento que dependa de la frecuencia.

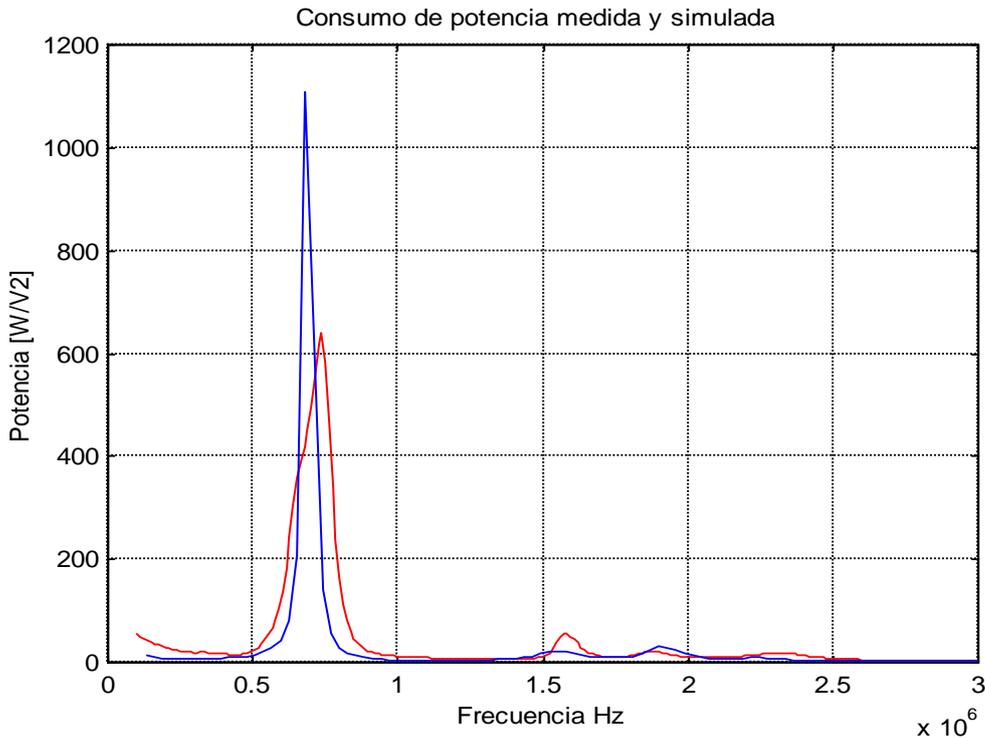


Figura 5.17 Consumo de potencia medido y simulada

Aquí se observa claramente que las frecuencias están en la medida y la simulación, pero existe una dispersión en los valores. Como se dijo antes esto puede deberse al ajuste de la atenuación para cada frecuencia o a la no uniformidad de las celdas en el composite real.

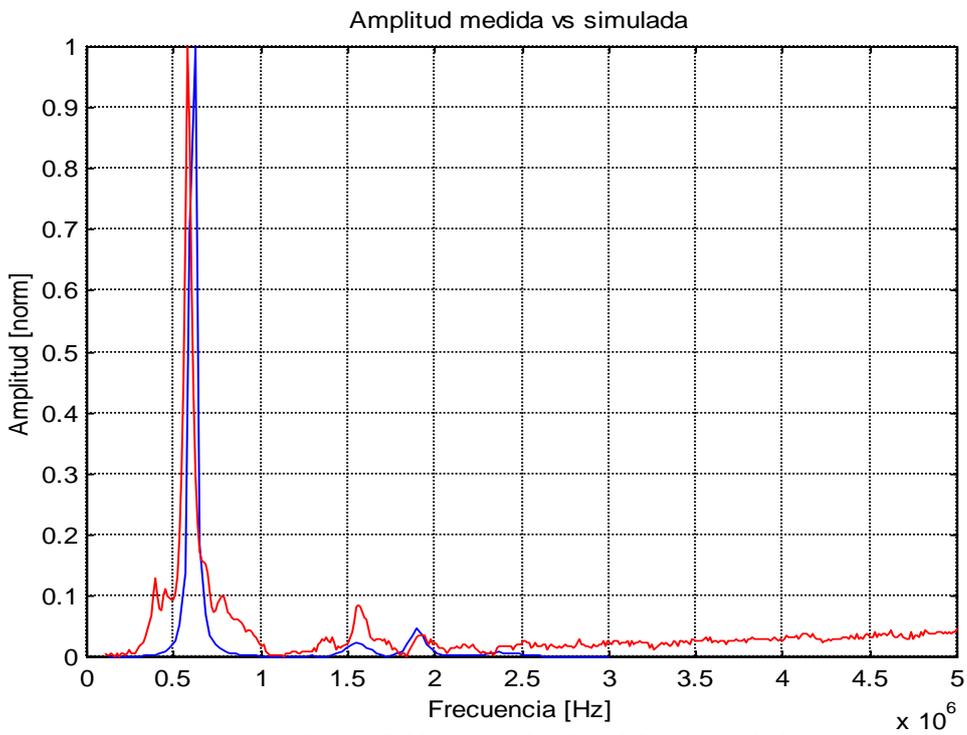


Figura 5.18 Amplitud medida vs. simulada

Aquí se observa mejor el ajuste de la simulación. La deriva a medida que aumenta la frecuencia se debe a ruido electromagnético como se comentó en 4.2.

Por ultimo se muestra el sonograma para la simulación y la medida.

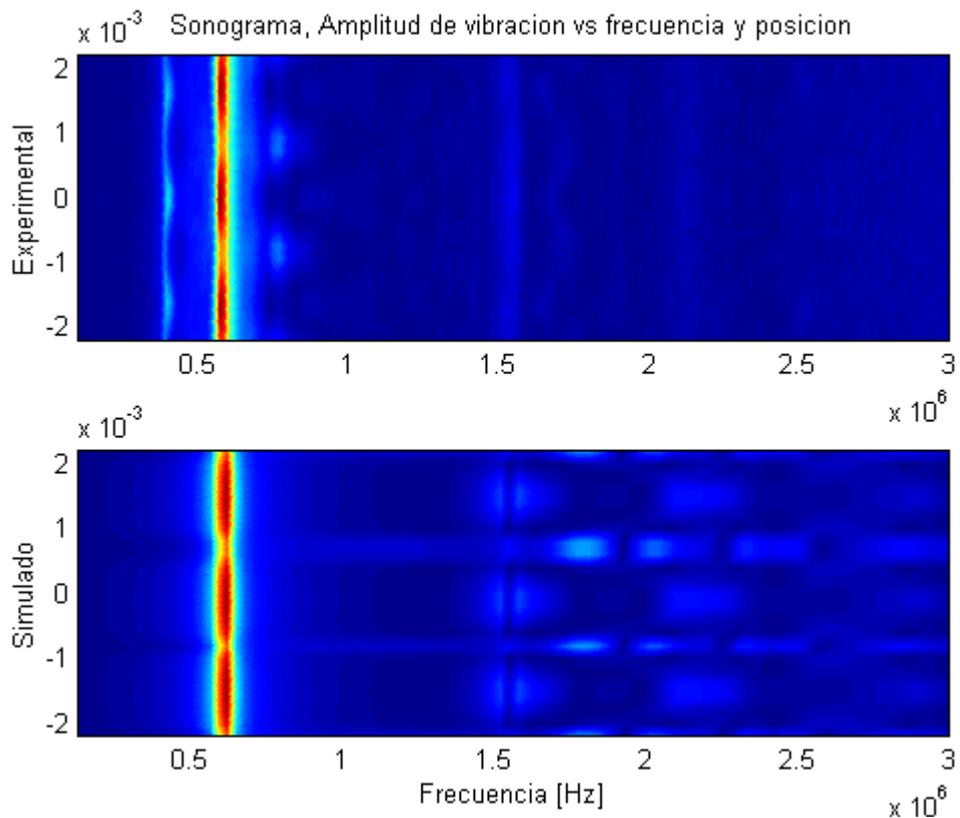


Figura 5.19 Sonograma experimental y simulado

La discrepancia en la región de los armónicos se observa en el sonograma pero no en al respuesta de amplitud y la admitancia.

Esto puede deberse al ajuste del amortiguamiento, que además de ser constante, esta realizado para una posición particular sobre al cerámica.

5.2 Estudio de la periodicidad en un medio con conectividad 2-2 [2] [56] [70] [8] [71] [5] [6]

La geometría 2-2 se presta al estudio de diferentes problemas asociados con la periodicidad espacial en los composites así como los fenómenos asociados a los acoplamientos entre el modo espesor y los modos transversales, permitiendo reducir el numero de elementos sustancialmente.

Como se comento en el punto anterior en un composite 1-3 existen dos periodicidades espaciales, una con el paso de red d y otra con $\sqrt{2}d$.

Para simplificar el problema consideramos un medio de anillos concéntricos que tiene una sola periodicidad, además como se comento en el punto de acople de modos es muy difícil distinguir las frecuencias ya que se solapan los armónicos laterales con los del modo espesor.

En el desarrollo de este punto se explicara el uso de la periodicidad como forma de eliminar el acoplamiento con los modos radiales. Esto se logra colocando el modo espesor dentro de la primer *stopband*. Este punto fue tratado en 3.6 y se recuerda la figura que muestra cualitativamente la banda prohibida de frecuencias para una periodicidad d .

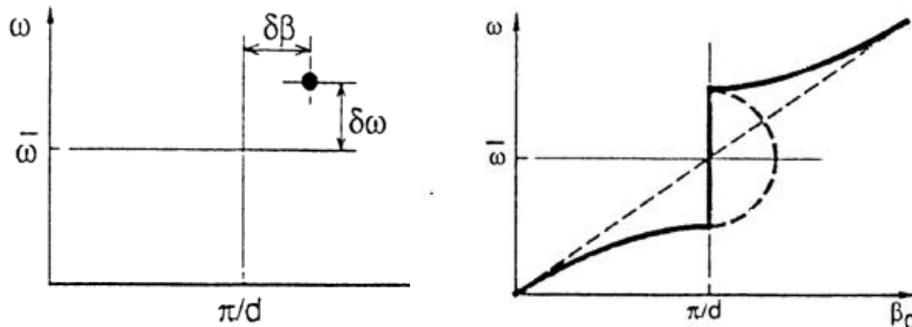


Figura 5.20 Relación de dispersión para la banda prohibida.

Primero se simula un medio homogéneo y se identifica el problema.

La geometría elegida es un disco de diámetro 28 mm de largo por 2.4 mm de espesor. Esto corresponde a las frecuencias, para la simulación se utilizo una grilla de 0.2mm.

$$V_{Lz} = 4035 \text{ m/s}$$

$$f_{oz} = \frac{V_{Lz}}{2l_z} = 840 \text{ KHz}$$

$$V_{Lx} = 3983 \text{ m/s}$$

$$f_{ox} = \frac{V_{Lx}}{2l_x} = 71 \text{ KHz}$$

$$V_{Tx} = 2163 \text{ m/s}$$

$$f_{oT} = \frac{V_T}{2l_x} = 39 \text{ KHz}$$

En la siguiente figura se muestra la vibración de la superficie para el rango de frecuencias 100 KHz 3MHz

Puede verse el modos espesor de 840 KHz modulado por el acoplamiento de las frecuencias debidas a los modos radiales, también se ve que el tercer armónico de 2.52 MHz se acopla con los radiales pero en menor medida.

Amplitud de vibracion vs frecuencia y posicion

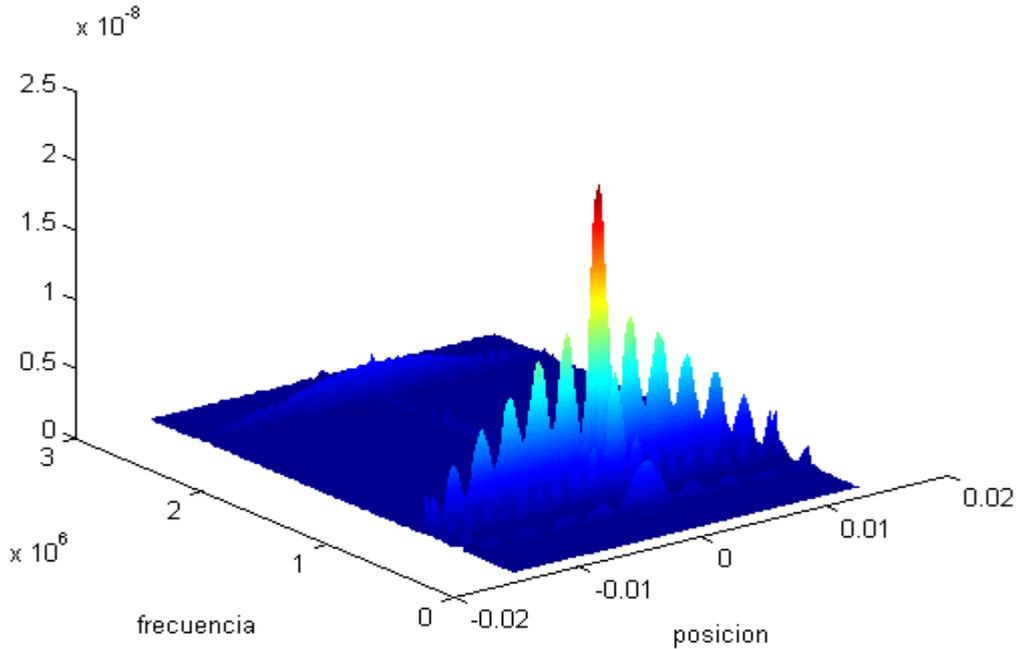


Figura 521 Vibración de la superficie

Aquí puede verse claramente que el patrón de franjas que aparece superpuesto a las resonancias es debido al acoplamiento con los modos producidos por los bordes.

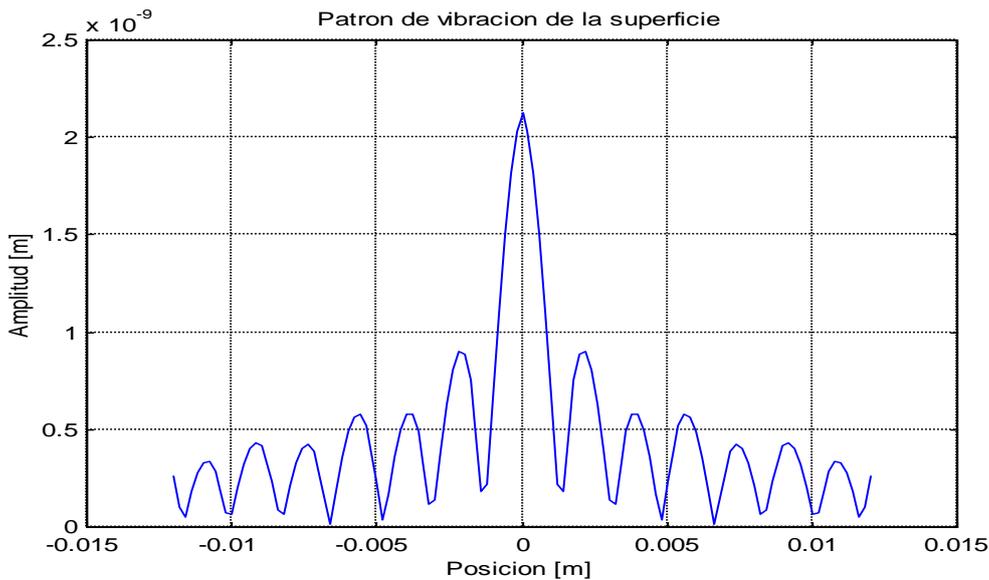


Figura 5.22 Modulación de la superficie por el acoplamiento con los laterales

En la superficie se observan 14 lóbulos a una frecuencia de 590 KHz, esto corresponde a 42.1 KHz por lóbulo que es del orden de la frecuencia transversal. En otros cortes se observan modulaciones semejantes múltiplos de la frecuencia de 71 KHz

En este punto queda claro que el acoplamiento entre el modo espesor y los laterales distorsiona fuertemente la vibración de la superficie. Una técnica usual en la industria de los transductores médicos es utilizar un piezocomposite con periodicidad lateral seleccionada de forma que presente una banda prohibida de frecuencia para las ondas que se propagan en el plano perpendicular al modo espesor. La teoría cualitativa de este fenómeno que presento en el 3.6. sirve como guía para el trabajo, recordando la velocidad promedio en el polímero y la primera banda prohibida son

$$\bar{V}_s = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad f_0 = \frac{\bar{V}_s}{2d} \quad \text{Ec. 3.6.9}$$

El procedimiento es el siguiente

- Elegir un paso para la red
- Elegir una fracción de cerámica, esto determina las velocidades promedio tanto para el modo espesor como para las ondas transversales
- Calculo de la frecuencia central de la banda prohibida
- Visualización de los efectos del primer armónico
- Comparar los resultados

El calculo de las velocidad longitudinal media para el compuesto se realizo siguiendo el modelo de Smith presentado en 3.4. Para la velocidad tangencial media se utiliza la interpolación lineal como en el modelo de Auld de 3.6.

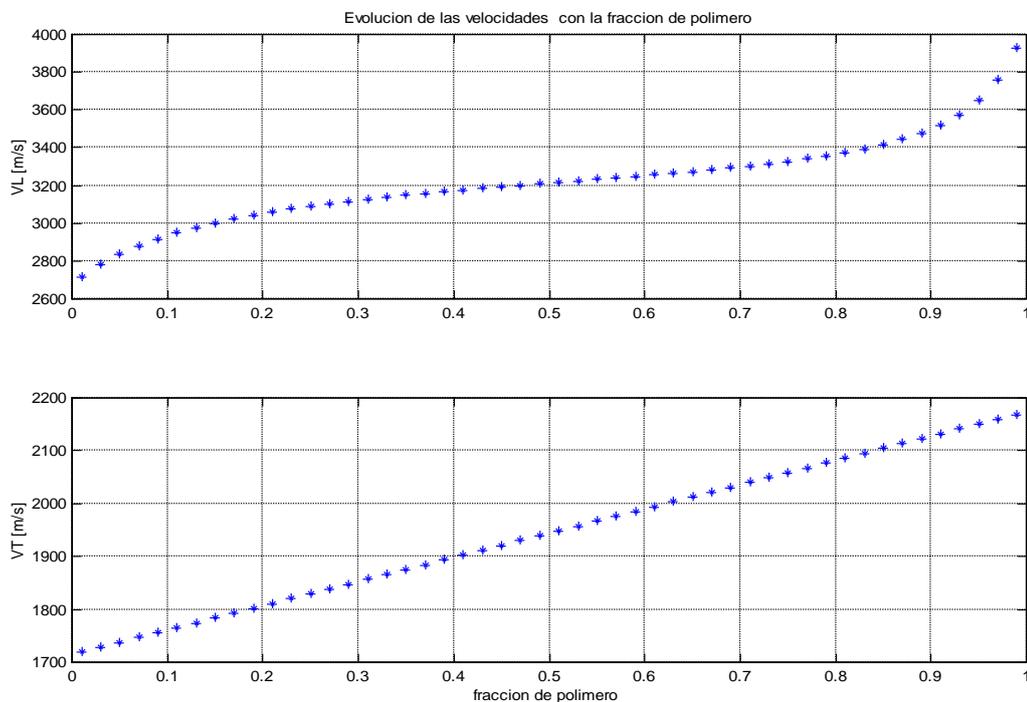


Figura 5.23 Evolución de la velocidad transversal y longitudinal con la fracción

Se selecciona el paso de red 1.4 mm para todos los casos, esto simplifica la construcción de las simulaciones con el mismo tamaño de elemento 0.2 mm utilizado en la muestra homogénea.

Las fracciones de cerámica elegidas varían cambiando un elemento polímero por uno cerámico.

Se muestran las fracciones utilizadas y las velocidades calculadas según los el modelo de Shmit para cada caso

fracción %	V_L m/s	V_T m/s	Frec. Espesor KHz	Frec. Bragg KHz
100	4035	2170	840	-
85	3416	2104	711	751
71.4	3304	2042	688	729
57.1	3239	1976	675	705
42.8	3182	1911	663	682
28.6	3111	1845	648	659
14.3	2992	1779	623	635
0	2682	1714	558	-

Primero observamos la evolución de la admitancia y la potencia eléctrica consumida. Se muestran los casos de 100% (rojo), 57% (verde) y 14% (azul)

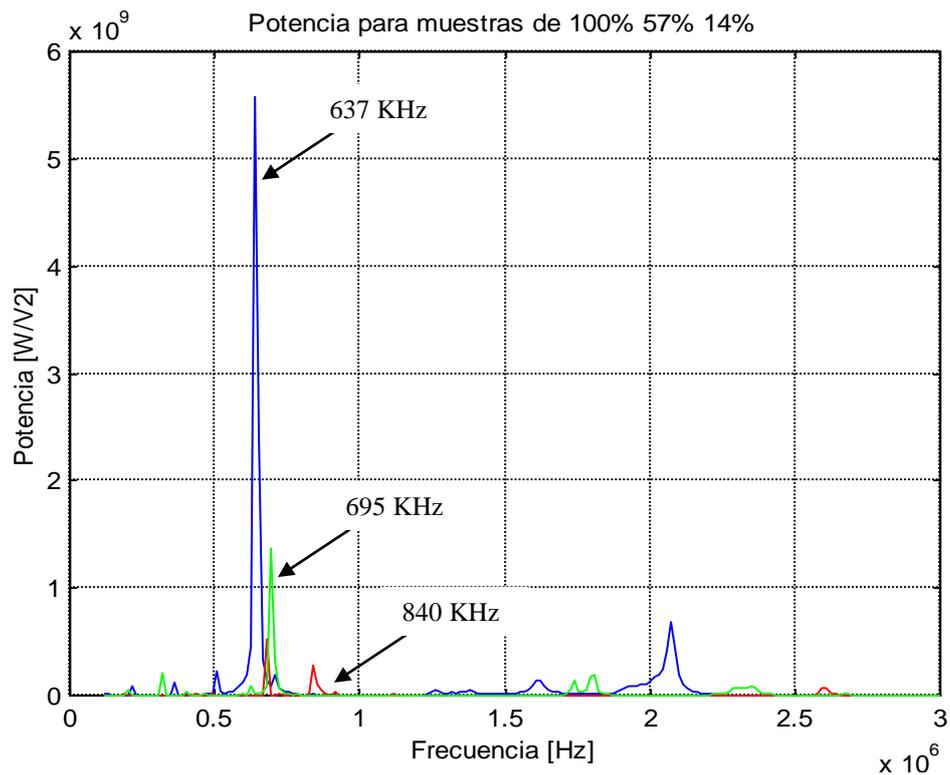


Figura 5.24 Evolución de la potencia consumida

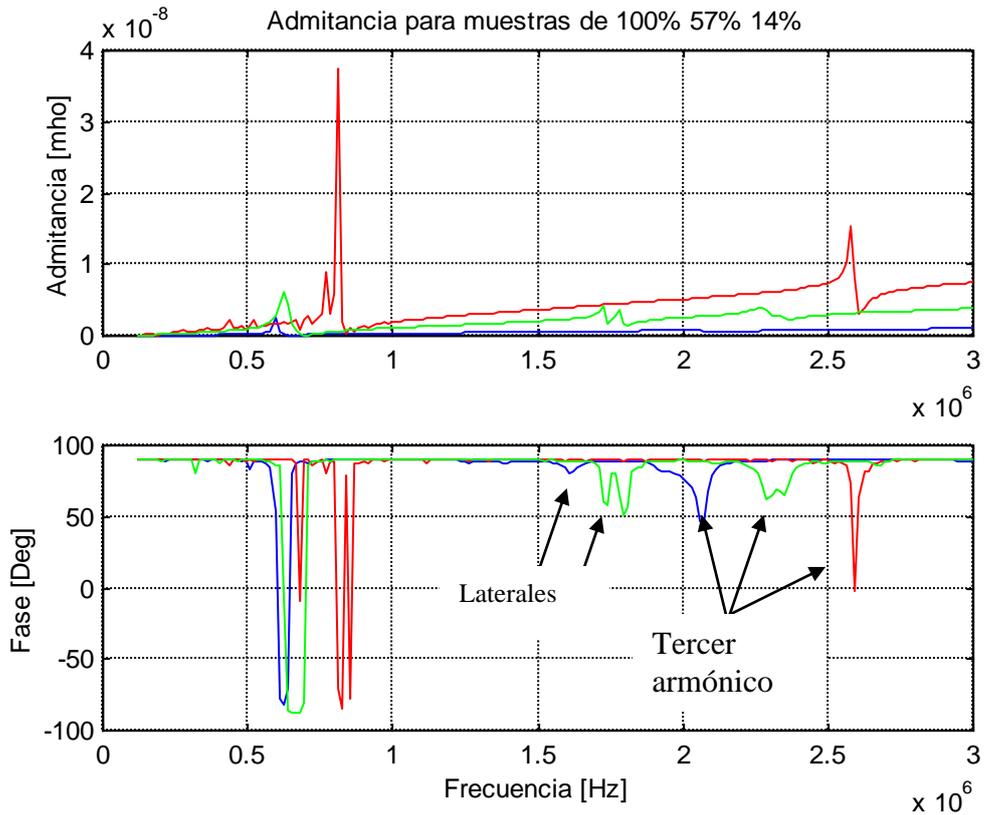


Figura 5.25 Evolución de la admitancia

Pueden verificarse cuatro aspectos importantes

- Puede controlarse la velocidad del material, esto se refleja con la evolución de la frecuencia de resonancia al variar la fracción. El modelo propuesto por Smith ajusta muy bien esta evolución. En la siguiente tabla se comparan las frecuencias del modo espesor

Calculado con Shmit [KHz]	Simulado con ANSYS [KHz]
840	840
675	695
623	637

- La admitancia de base crece proporcionalmente con la fracción. Esto puede verse también con la evolución de la potencia consumida por voltio. Tenemos entonces un material al que puede ajustarse la impedancia eléctrica. Este comportamiento también es predicho por el modelo de Smith con la evolución de ϵ .

$$Y(\omega) = j\omega C = j\omega \frac{\epsilon A}{l_z}$$

- Aparecen frecuencias debidas a la periodicidad de la red. Estas están indicadas en el diagrama de fase aunque son notorias en los tres. La frecuencias observadas no coinciden exactamente con un múltiplo de la frecuencia de Bragg calculada con la formula 3.6.9, esto muestra que el modelo de Auld es solo cualitativo. Lo que se representa correctamente es el corrimiento de esta frecuencia con la fracción de volumen. En la tabla siguiente se copara el segundo armónico calculado con el modelo de Auld con la simulación

Calculado con Auld [KHz]	Simulado con ANSYS [KHz]
-	-
1410	1760
1246	1610

- Se reduce sustancialmente el acoplamiento con los modos radiales. Aquí el modelo de la stopband es cualitativamente correcto, puede verse en el sonograma de amplitud como desaparece la influencia de los modos radiales en torno al espesor. Para el caso de 14 % es notoria la aparición de acoplamientos con la frecuencia lateral, esto es debido a que la disminución de la fracción de cerámica redujo mucho la amplitud del modo espesor, entonces los laterales ganan peso frente al mismo. Para cuantificar este efecto se muestra la figura 5.27

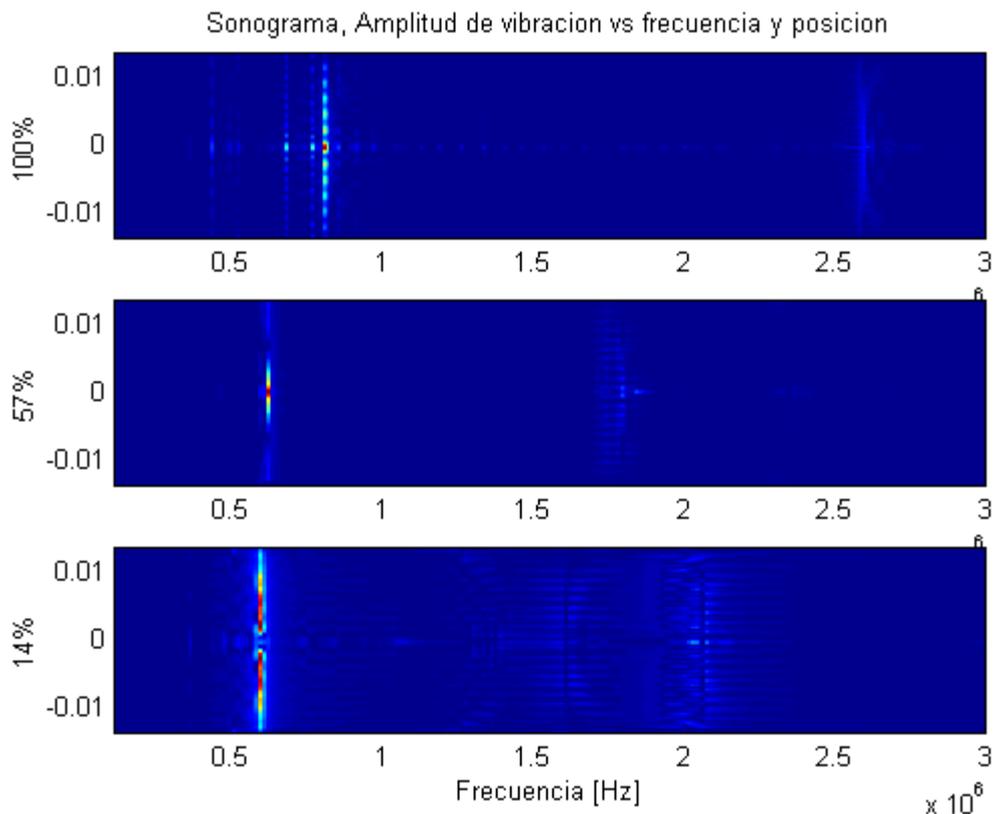


Figura 5.26 Sonograma de amplitud para diferentes fracciones.

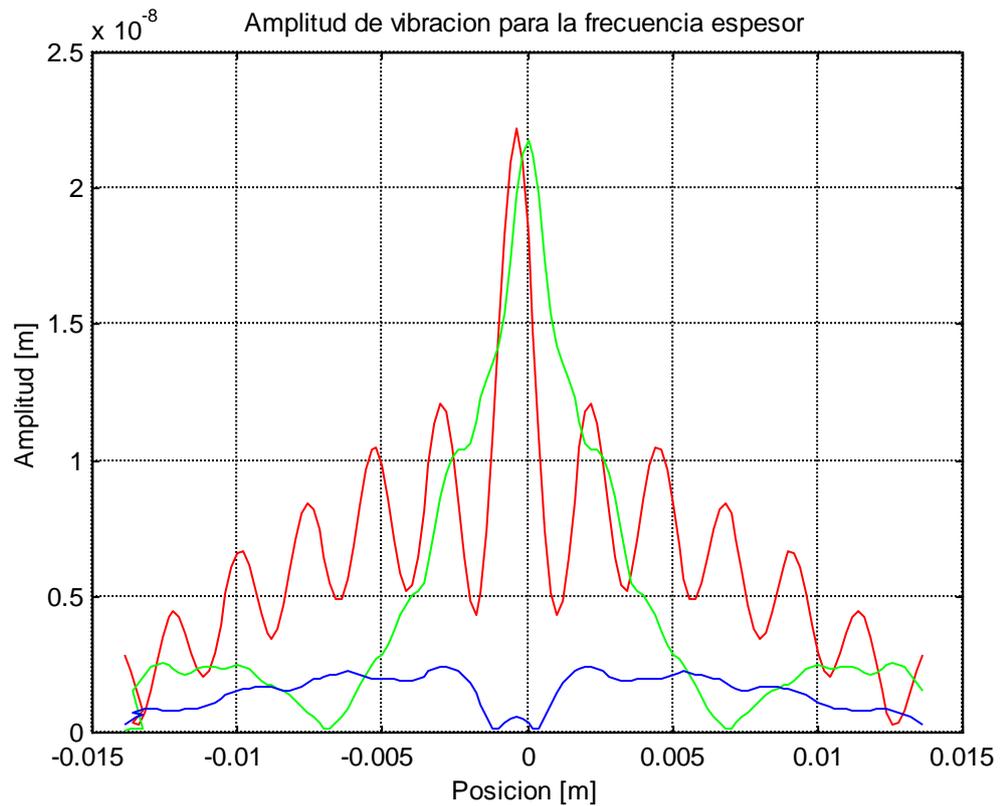


Figura 5.27 Amplitud para el modo espesor

Como conclusiones primarias puede decirse que

- Un transductor que opere en la banda de 650 KHz puede realizarse con un compuesto de cerámica y polímero de 2.4mm de espesor.
- La periodicidad de 1.4 mm mostró ser eficiente para eliminar acoplamiento con el modo radial
- La fracción de volumen de 57 % mostró ser una solución de compromiso entre la eliminación de la modulación de amplitud y conversión electromecánica. Notar que no se pierde amplitud de vibración.
- Para la operación en alta frecuencia aparece un modo espurio introducido por la periodicidad

5.3 Ruptura de la periodicidad en piezocomposite 1-3.

Como se desarrollo en el punto anterior, la introducción de la red polímero-cerámica reduce drásticamente los modos radiales o producidos por los bordes. Eligiendo adecuadamente esta periodicidad puede colocarse la frecuencia espesor en una banda prohibida de frecuencias para la propagación de ondas de corte. Pero esto trae aparejado el problema de que el armónico de esta frecuencia lateral esta cerca del modo espesor, y este armónico distorsiona fuertemente la superficie. [80] [19]

Numerosos autores han trabajado en la identificación y posteriormente la eliminación de estos armónicos [27] [2]] [5] [13] [14]

El compromiso es el siguiente, se desea tener la fundamental de la resonancia lateral, que ensancha la banda del modo espesor y elimina los radiales pero se desea eliminar el armónico que distorsiona la superficie. [53]

Se ha propuesto como método para eliminar los modos laterales formar redes no periódicas. Nuestro grupo propuso como forma de lograrlo el retirar algunos palitos de cerámica dentro del compuesto. Esta alternativa se evaluó experimentalmente mostrando resultados prometedores. [67] [62]

En este momento estamos trabajando en una red 1-3-1 esto es cerámica, polímero, hueco que presenta doble periodicidad. La alternativa de tener una red 1-3-1 con diversas periodicidades no es original [41] pero se propuso trabajar sobre el polímero y no quitar directamente la cerámica, los propios autores la critican por lo difícil de implementar.

A continuación se muestran los resultados del estudio de la red 1-3-1. El mismo se realizo en tres etapas, primero se simula una red periódica convencional, luego se sustituye un elemento de la red por polímero, esto altera la periodicidad pero sin introducir los huecos. Por ultimo se cambia el polímero por un hueco y se comparan los resultados.

La geometría utilizada es

Cerámicos de 0.8 mm de base cuadrada

polímero de 0.4 de ancho

Espesor de la muestra 2.4mm

Nótese la pequeña diferencia respecto a la celda real que se dispone en el laboratorio. Esto se debe a la facilidad de realizar las simulaciones con esta geometría.

En la siguiente figura se muestra la geometría para las los tres tipos de piezocomoposite.

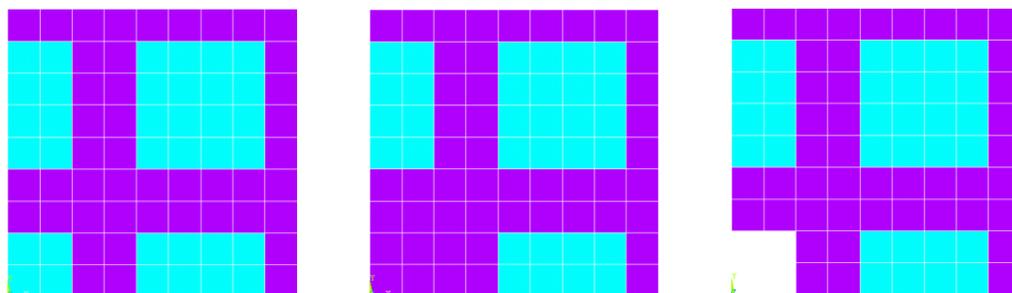


Figura 5.28 Celdas piezocomposite

Primero se presenta un gráfico comparativo de la respuesta eléctrica en las tres simulaciones. La simulación correspondiente a la red 1-3 periódica se indica en azul, la que tiene un elemento sustituido por polímero en rojo y la que tiene el agujero en verde

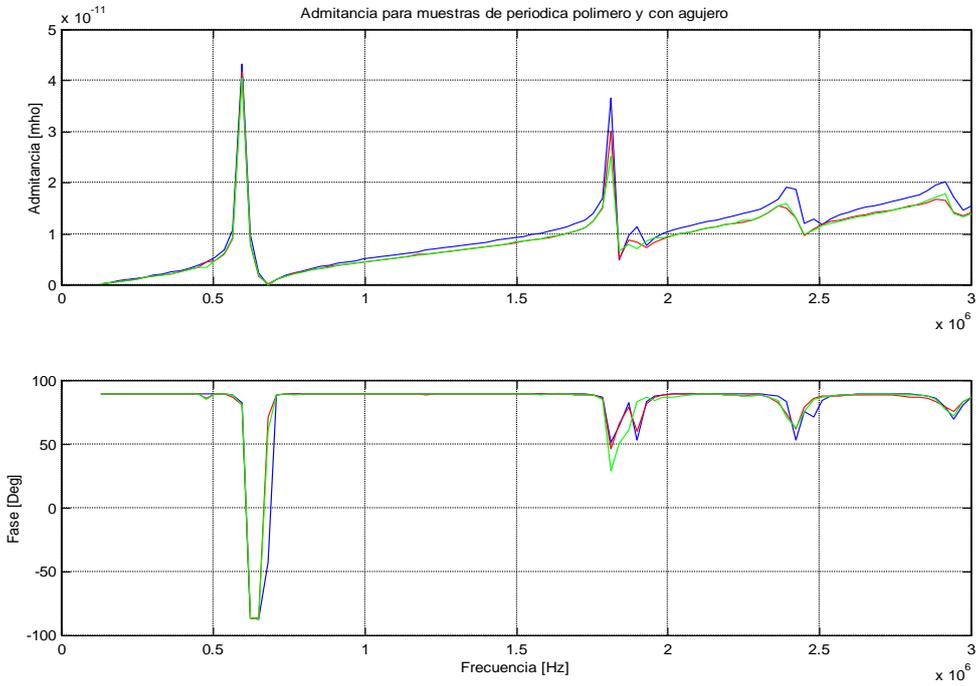


Figura 5.29 Admitancia para las tres celdas

Aquí no se nota gran diferencia entre las muestras, pero veremos el sonograma de la superficie para evaluar si hay cambios espaciales

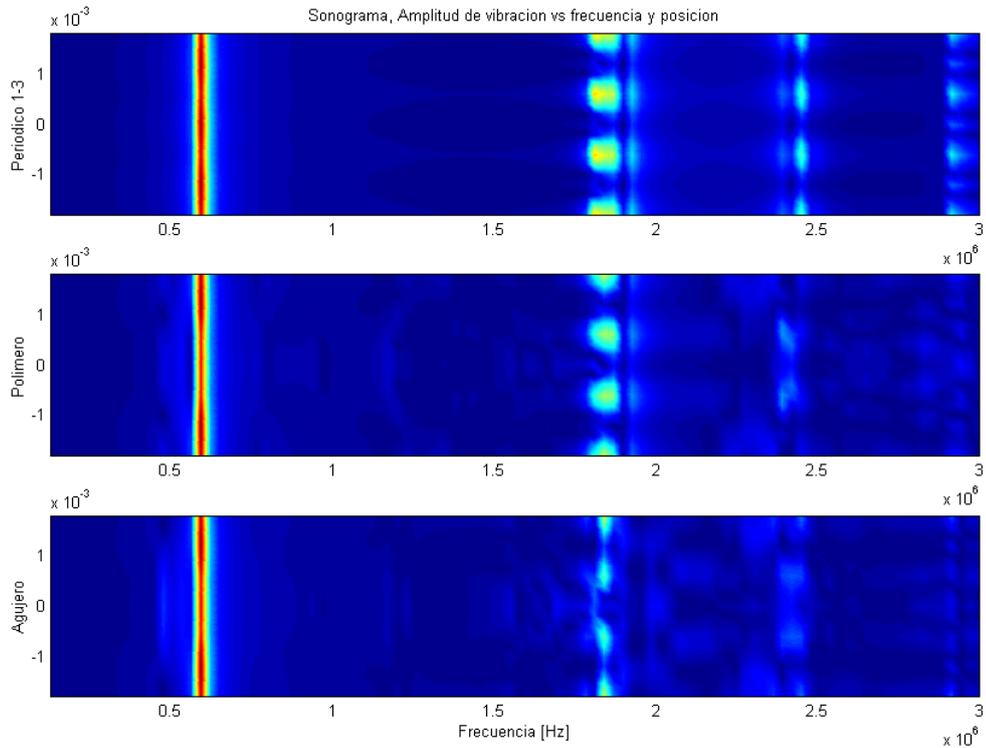


Figura 5.30 Sonogramas para las diferentes celdas

Aquí si se observa un gran cambio en la distribución espacial de la vibración, fundamentalmente en la zona donde el armónico del modo espesor se acopla con los modos laterales. Este resultado primario nos motiva a seguir trabajando en esta dirección.

Finamente como una forma mas de visualizar el problema se presenta la deformación del volumen para las frecuencias donde se observan las resonancias.

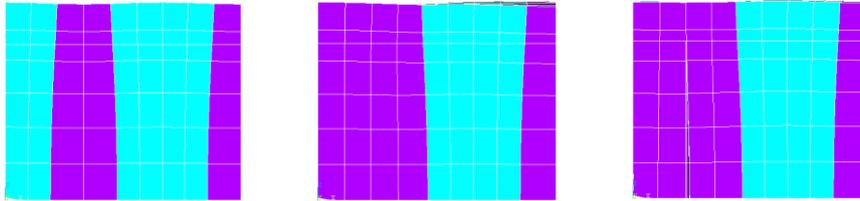


Figura 5.31 Vibración en la frecuencia espesor

Aquí se muestra la deformación para la frecuencia espesor de 680KHz
 Las escala de amplificación de la deformación de $2e6$

Se nota en el perfil de los elementos cerámicos que en esta frecuencia resuena con media longitud de onda en el espesor, lo que corresponde con el modo espesor

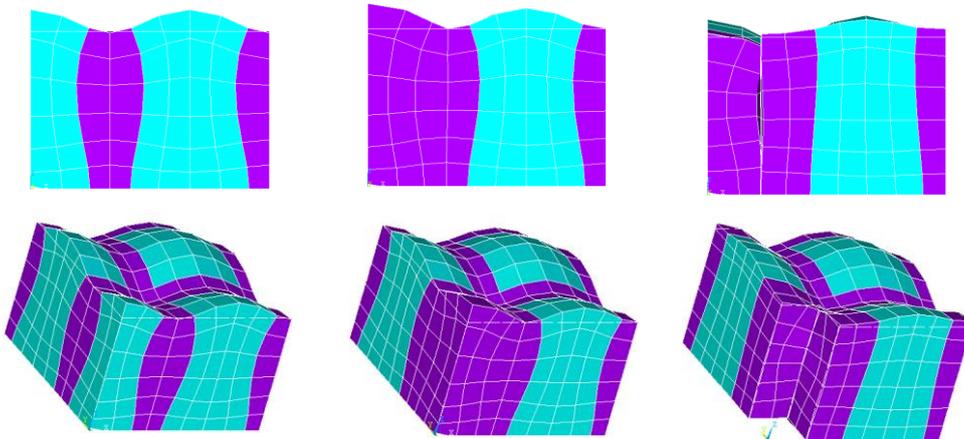


Figura 5.32 Vibración de la superficie para la frecuencia de 1.84MHz

La escala de amplificación es $2e5$

Aquí puede verse claramente el acoplamiento entre el tercer armónico, ver la deformación a lo largo de los palos y la frecuencia lateral, ver la deformación sobre la superficie.

Esta herramienta de la superficie deformada es de gran utilidad para reconocer el origen de las resonancias, pero su escala puede resultar engañosa, por ello para aclarar la amplitud relativa de cada frecuencia se muestra una grafica de amplitud real en función de la posición y la frecuencia.

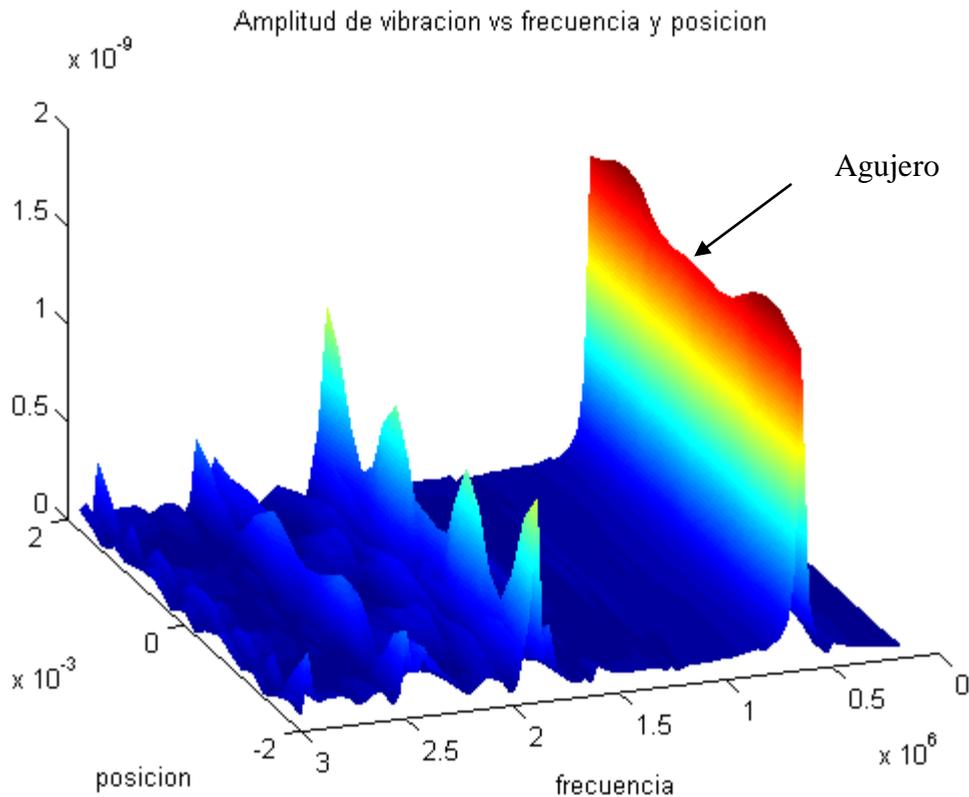


Figura 5.33 Amplitud de vibración en función de frecuencia y posición para el agujero

En esta última superficie podemos ver la posición del agujero en la frecuencia espesor, a pesar del mismo no se distorsiona mucho la vibración.

5.4 Monoelemento de PZT capa gruesa. [65]

En este punto se describe parte del trabajo presentado en *Eurosensors XVI* a realizarse en septiembre 2002. Este trabajo se realiza en conjunto con investigadores del Instituto Nacional de Tecnología Industrial – CITEI de Argentina y parte de los datos presentados corresponden al trabajo original realizado en el INTI.

En el INTI se están fabricando transductores de película gruesa sobre sustrato de alumina, este proceso se reporta en [28] [29]

“En años recientes los transductores piezoeléctricos de ultrasonidos se encaminan hacia una reducción de tamaño con una mejora en sus características electroacústicas para aplicaciones donde el lugar disponible es mínimo o es necesario agruparlos en arreglos de muchos elementos para controlar la dirección y focalización del campo acústico.

Los transductores de película gruesa son una alternativa atractiva a los transductores piezoeléctricos convencionales ya que es posible obtener un mayor ancho de banda con una sensibilidad comparable, así como facilidad de fabricación e integración con electrónica. Muchas aplicaciones, especialmente las de imágenes por inmersión, requieren una mejora en las propiedades de la cerámica tanto en términos de rendimiento individual como el ajuste de su impedancia acústica, como su comportamiento en los arreglos ya mencionados.

El objeto de este trabajo es el de ampliar la caracterización de un transductor piezoeléctrico de Titanato Zirconato de Plomo fabricado con tecnología de película gruesa y su capacidad para generar ultrasonido en sólidos y líquidos, su comportamiento vibratorio usando FEM y su sensibilidad como receptor en el funcionamiento pulsado.”

Un problema central en este tipo de nuevos materiales es la determinación de sus propiedades electromecánicas. Esto es muy difícil en materiales tipo film, por ello se utilizan técnicas indirectas basadas en las predicciones del comportamiento de un modelo.

Primero se utiliza el modelo unidimensional KLM, que es un modelo del estilo línea de transmisión desarrollado en 3.1.

A partir de el se estiman algunos parámetros como la constante elástica en la dirección de polarización.

Luego se utiliza el método de elementos finitos como validación y ajuste de lo calculado y para estimar nuevas propiedades.

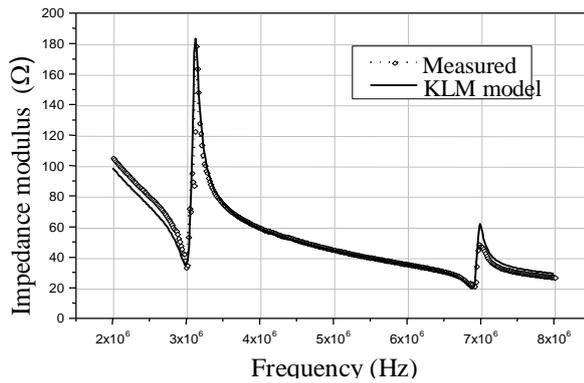


Figura 5.34 Impedancia medida y calculada de un transductor de 220 μm de PZT-Alumina

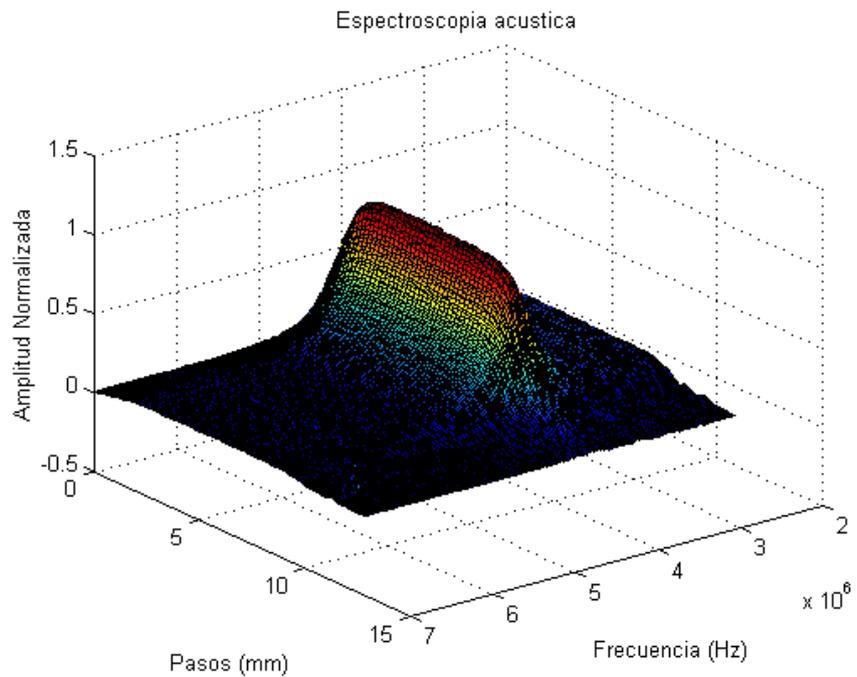


Figura 5.35 Espectrometría acústica de film PZT-alumina

Otra forma de atacar el problema es comparar la simulación de amplitud de FEM con la medida obtenida por espectrometría acústica, de esta forma podemos chequear los parámetros estimados a partir de la medida eléctrica.

Por ultimo se muestran los resultados de medir la amplitud con espectroscopia acústica y una comparación con resultados simulados por FEM

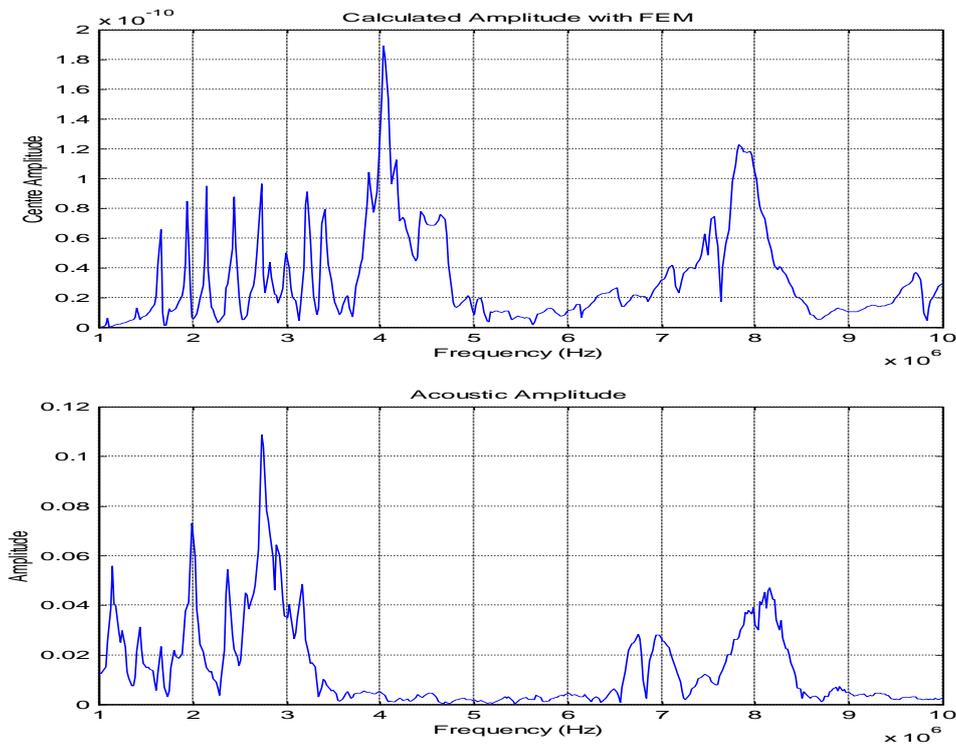


Figura 5.36 Amplitud medida y simulada

Es de destacar que los resultados son primarios con el conjunto de constantes estimadas por el modelo unidimensional. Es trabajo actual encontrar un conjunto de constantes que ajusten tanto la respuesta eléctrica como la acústica.

De todas formas se observa que cualitativamente son equivalentes.

5.5 Array 2-2 con geometría de cantor.

Aquí se describe otro trabajo que estamos realizando en este momento que consiste en estudiar al localización de ondas acústicas en geometrías fractales.

Los pasos realizados en el laboratorio para este trabajo son

- Fabricación de la cerámica base
- Caracterización de las propiedades de la cerámica
- técnica de colocación de electrodos con geometrías complejas
- Técnica de fabricación del array, cortado y llenado de polímero.
- Modelado teórico y por FEM
- Medición

“El objetivo de este trabajo es el estudio del fenómeno de localización de ondas de Lamb en la superficie de una piezocerámica con geometría fractal. En una primera etapa se ha realizado la simulación de la vibración de la cerámica mediante la técnica de elementos finitos. En una segunda etapa se ha construido una piezocerámica con geometría fractal y se ha comenzado a realizar una serie de experiencias para caracterizar completamente los modos de vibración de la misma.”

Un fractal de cantor se construye dividiendo el segmento bajo estudio en tres partes iguales, luego cada extremo se divide en tres y se repite el proceso.

Aquí se presenta el resultado de simular una barra homogénea, un array periódico con el paso largo/27 que corresponde a tres divisiones de cantor y el array de cantor correspondiente

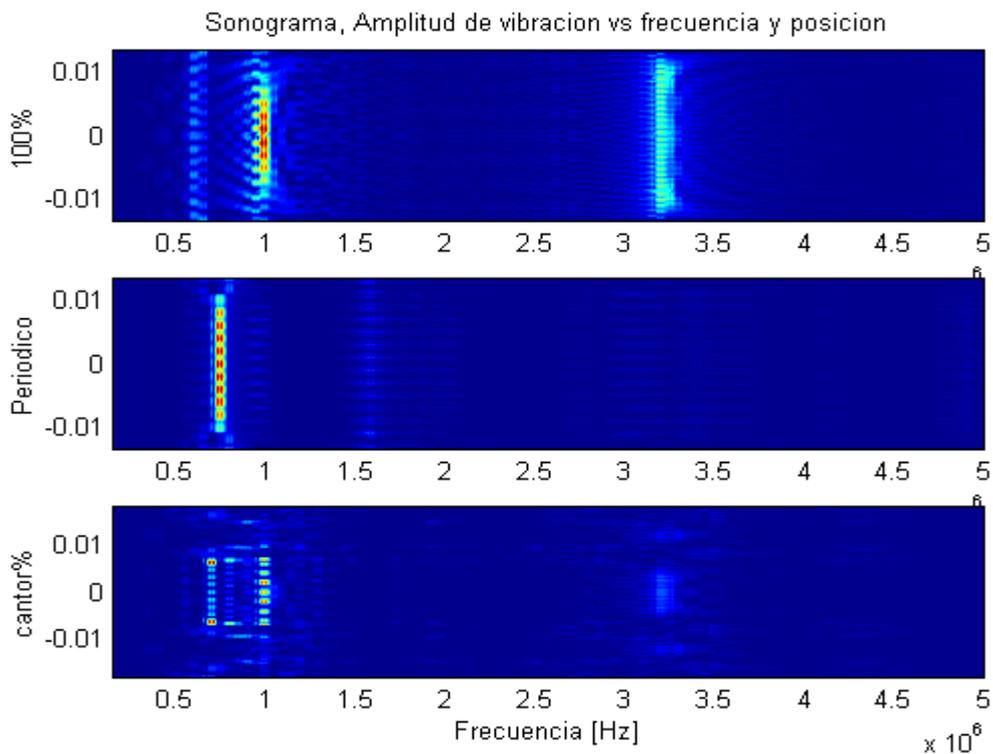


Figura 5.37 Sonograma comparativo

Se puede ver también la evolución en la admitancia eléctrica para la barra entera (azul), el periódico (rojo) y el cantor (verde)

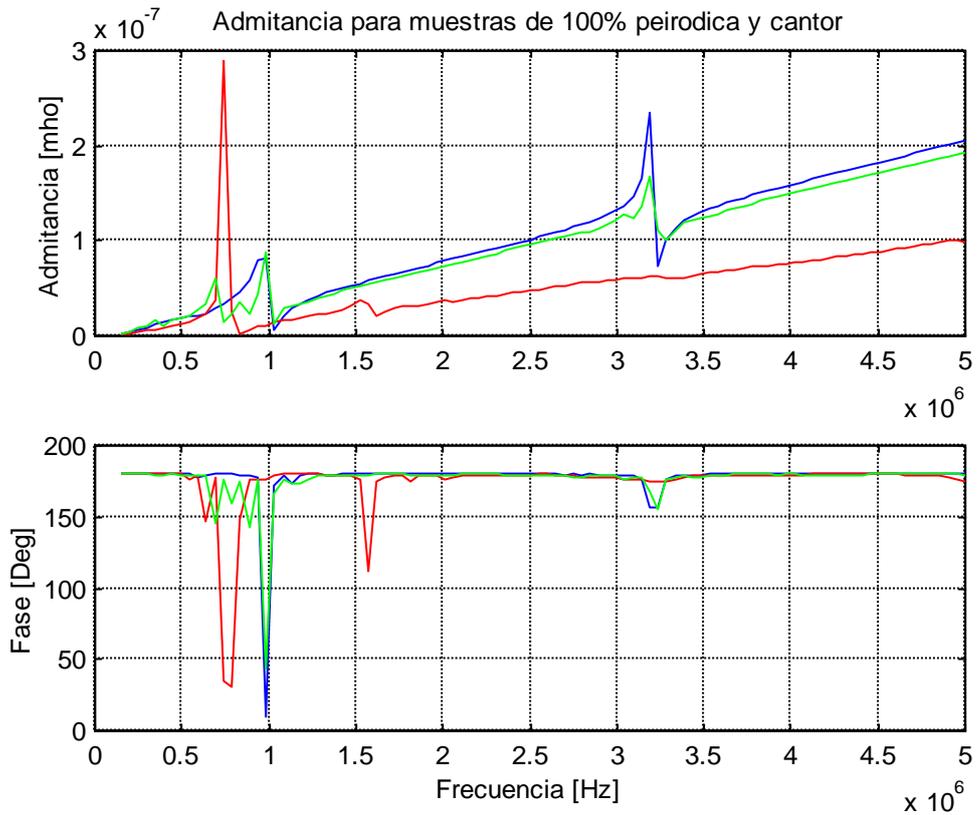


Figura 5.38 Admitancia eléctrica comparada

Como conclusión primaria puede verse que el método de relevamiento de amplitud y construcción del sonograma se presenta como una herramienta muy útil para el estudio de localización de amplitud en espacio y frecuencia.

La simulación de FEM muestra resultados primarios que deberán validarse con la experiencia.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Conclusiones

El primer objetivo del trabajo de tesis fue realizar un estudio de los principios físicos básicos de los transductores piezoeléctricos hasta llegar al estado actual del arte. Se evaluaron los modelos teóricos mas aceptados por la comunidad científica, poniendo énfasis en las hipótesis físicas involucradas en los mismos.

Como conclusión se extrae que los modelos resuelven situaciones muy simplificadas y en general no tratan problemas de acoplamiento de modos.

Ninguno de los modelos “físicos analíticos” es capaz de resolver el problema de una geometría arbitraria.

Como alternativa se tienen los métodos numéricos, en el trabajo se utilizó con éxito el método de los elementos finitos FEM.

Se evaluó un software comercial ANSYS de elementos finitos para la simulación de estructuras complejas. Se encontró un buen acuerdo entre las medidas y los resultados de simulación.

Otra conclusión importante es que el uso de un modelo físico es imprescindible cuando se realiza una simulación de FEM. Aunque estos no dan resultados cuantitativamente aceptables, permiten estimar cualitativamente los mismos lo que es fundamental en un problema tan complejo.

Además las constantes de los materiales utilizadas pueden cambiar entre las muestras, que en general proceden de distintos fabricantes, por lo que entender la física asociada a las ecuaciones constitutivas es fundamental para el ajuste de las mismas.

Un factor muy difícil de ajustar en estos casos es la atenuación, que depende de la constitución del material y las condiciones de carga mecánica.

La representación del tipo sonograma es muy útil para estudiar la localización de vibraciones en los distintos modos. Se concluye que el método es muy adecuado para estudiar los problemas propuestos y considero que es un aporte original de la tesis ya que no se la encuentra en las referencias estudiadas

Para el uso del laboratorio se deja implementada una interfase que permite manejar el software de elementos finitos ANSYS desde Matlab. Esto permite que un usuario no especialista en el uso del programa pueda simular las geometrías usuales en transductores piezoeléctricos variando los parámetros relevantes de diseño.

Por ejemplo en un composite 1-3 puede variarse la periodicidad, el espesor y los materiales. De una manera muy simple puede simularse después la respuesta sin tener que programar sentencias en ANSYS. Se deja documentado el uso de este software, totalmente desarrollado para la tesis, para su aplicación posterior.

Además de ser necesaria una nueva geometría, tengo la posibilidad de implementarla rápidamente y agregarla al software existente.

Para los usuarios que quieran introducirse en el ANSYS se deja una guía básica para la simulación de un piezoeléctrico. Esto no evita el difícil camino de aprender a utilizar un programa tan complejo, pero espero que sirva de ayuda.

Un segundo objetivo fue la aplicación de un método experimental capaz de relevar la vibración de la superficie.

Aquí se desarrollo el método original de espectrometría acústica el mismo permite caracterizar punto a punto la transferencia electromecánica del transductor.

El método presenta además de una gran sensibilidad, la posibilidad de medir superficies no pulidas e incluso no planas. Esto es una gran ventaja comparada con la interferometría óptica.

Yo considero que es otro aporte original de la tesis al no encontrar referencias del mismo en la bibliografía consultada y es un punto en el que debe proseguir el trabajo.

El objetivo de dejar implementado el método de espectroscopia acústica se cumplió también, para ello además del montaje se desarrollo el software de interfase necesario para la comunicación entre el HP4194A y Matlab. Este software permite trabajar con el instrumento directamente desde el Matlab, lee las variables generadas por el instrumento y las convierte en variables internas de forma transparente al usuario, también permite controlar las diferentes funciones y programar comandos. Se deja además de los fuentes documentación de uso.

Además se programaron rutinas especiales que permiten realizar secuencias de barrido con el hidrófono al tiempo que se mide con el analizador de impedancias, esta interfase se encuentra programada en C y esta disponible para el uso y modificación si es necesario.

Se dejan los fuentes y la documentación de uso.

Como forma de medir los picos de resonancia en osciladores acoplados, se propone utilizar la potencia eléctrica consumida en lugar del método tradicional de estimar la frecuencia a partir de el máximo y el mínimo de la impedancia, esto independiza la medida del modelo utilizado. Esto no es original, aunque en los textos clásicos y en el estándar IEEE no lo mencionan algunos autores incluyen el estudio de potencia consumida en función de la frecuencia para estudiar la dinámica de transductores.

En cuanto al estudio de modos complejos de vibración y las hipótesis físicas involucradas, se estudio en profundidad el problema de los transductores pizocomposite 1-3, incluyendo la influencia de la periodicidad, el significado de las bandas prohibidas de frecuencia y el ajuste de los modelos existentes.

El resultado es que tanto las medidas como la simulación son consistentes con los modelos físico, pero los FEM abren un campo de desarrollo muy grande al resolver situaciones mas complejas.

Estos problemas son de gran interés para el desarrollo de transductores y son una rama muy activa de la investigación aplicada al ultrasonido, motivando los resultados primarios obtenidos la realización de nuevos trabajos tanto teóricos como experimentales.

Se evaluó la potencia del método de FEM para determinar constantes elásticas en nuevos materiales, aquí también se ve una gran perspectiva de aplicación, sobre todo en materiales a los que es muy difícil aplicar las técnicas convencionales. Un ejemplo de esto son los

materiales tipo film presentados el capítulo cinco. Para poder atacar este problema nuevamente es fundamental la comprensión física de los parámetros involucrados.

Perspectivas futuras

En este momento tenemos las herramientas necesarias para la investigación de nuevos transductores en la frontera del desarrollo actual.

Durante el desarrollo del trabajo surgieron nuevas ideas en las que comenzaremos a trabajar de inmediato, algunas de ellas son

- Profundizar la aplicación de ruptura de periodicidad con un piezocomposite 1-3-1 como se desarrolló en el capítulo cinco. Este trabajo ya está en marcha, debemos en este momento simular la geometría óptima para la fabricación de las muestras.
- Estructuras que mejoren la focalización con utilizando anillos, por ejemplo anillos de Fresnel.
- Estructuras con electrodos flexibles. Mediante esta técnica se pueden aplicar condiciones de borde arbitrarias en la superficie de los transductores. Se están realizando las primeras pruebas y parte de ello es el trabajo presentado del array de cantor. Pero los electrodos flexibles abren el campo de realizar sustratos piezocomposite excitados con condiciones de borde arbitrarias, perspectiva que parece muy interesante.
- Transductores multifrecuencia. El uso de varias periodicidades permite tener más de una frecuencia lateral, esto puede utilizarse como forma de aumentar el ancho de banda de los transductores.
- Caracterización de nuevos materiales como el PZT de película gruesa. Se están dando los primeros pasos en esta dirección como se muestra en el capítulo cinco.

Quedan puntos en los que es necesario seguir trabajando como

- Mejorar el método de espectrometría. Trabajar en la eliminación de ruidos y mejorar el montaje que permita repetitividad en las medidas.
- Incorporar el método de interferometría óptica al laboratorio. La dificultad encontrada para correlacionar las medidas interferométricas con el método acústico se salvarían si se dispone del interferómetro. Es muy difícil realizar esto con los equipos en diferentes laboratorio ya que las medidas de amplitud absoluta dependen del punto que se considera de la muestra y de la carga mecánica que se le aplica.
- Mejorar el uso del paquete comercial ANSYS, que presenta infinidad de posibilidades sin explorar. Por ejemplo, incorporar las simulaciones de transitorios y la propagación de ondas en fluidos. Esto permite el estudio del campo difractado en una situación real. Aquí debe buscarse el ajuste con los métodos ya experimentales empleados en el laboratorio como la respuesta acústica eléctrica y el método de Schlieren y con otras técnicas de simulación ya existentes.

APENDICE A1

NOTACION TENSORIAL Y MATRICIAL

En este apéndice se resumen las notaciones utilizadas en la tesis y de uso habitual en el estudio de transductores piezoeléctricos.

Notación tensorial

Las ecuaciones constitutivas para un material piezoeléctrico se escribe en forma tensorial

$$D_i = \varepsilon_{ij}^S E_j + e_{ijk} S_{jk}$$

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k$$

Aquí el campo eléctrico y el desplazamiento son tensores de orden uno, el tensor dialéctico de orden dos, el piezoeléctrico de orden tres y el elástico de orden cuatro.

Como se vio en el capítulo 2 los tensores son simétricos

$$e_{ijk} = e_{ikj}$$

$$T_{ij} = T_{ji}$$

$$S_{kl} = S_{lk}$$

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jilk} = c_{klij}$$

Utilizando las relaciones de Maxwell

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

Notación matricial IEEE [std-176 1987]

Esta simetría permite reducir el numero de constantes independientes y plantear el problema en forma matricial

jk	jk	IJ
11	xx	1
22	yy	2
33	zz	3
23=32	yz=zy	4
13=31	xz=zx	5
12=21	xy=yx	6

. Los símbolos utilizados son

$[\]$ **Matriz**
 $\{ \}$ **Vector**

El cambio de estructura es

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \{T_I\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix}$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_6 & S_5 \\ S_6 & S_2 & S_4 \\ S_5 & S_4 & S_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \{S_I\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones constitutivas se escriben en forma matricial

$$\{D\} = [\varepsilon^S] \{E\} + [e]^T \{S\}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & e_{41} & e_{51} & e_{61} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & e_{42} & e_{52} & e_{62} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & e_{43} & e_{53} & e_{63} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}$$

$$[T] = [c^E] - [e] \{S\}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Observación: Cuando en la tesis se indexa un coeficiente elástico, piezoeléctrico o dieléctrico se refiere a los índices utilizados en el estándar IEEE.

Notación matricial ANSYS

El software comercial ANSYS utiliza una variante de la notación matricial, esta permuta las componentes de corte con respecto al sistema IEEE

ANSYS	IEEE	jk
1	1	xx
2	2	yy
3	3	zz
4	6	xy=yx
5	4	yz=zy
6	5	xz=zx

TESIS DE MAESTRIA EN FISICA

*Dinámica de estructuras
piezocomposites complejas.*

*Aplicación a transductores de
ultrasonido*

APENDICES

Autor: Ing. Nicolás Pérez

Director de Tesis: Dr. Carlos Negreira

APÉNDICE A2 USO DEL SOFTWARE ANSYS

APÉNDICE A3 USO DEL SOFTWARE DE INTERFACE ANSYS-MATLAB

APÉNDICE A4 USO DEL HP4194A

APENDICE A2

USO DEL SOFTWARE ANSYS

En este apéndice se resumen los pasos a seguir para realizar una simulación de un disco piezoeléctrico en ANSYS. El material no pretende reemplazar el uso del manual de ANSYS solo muestra un ejemplo concreto que sirva de guía a quien se inicie en el tema.

Los comandos corresponden a la versión **5.4**

I Ingreso al programa.

Debe ingresarse al programa utilizando la opción *multiphysics*. De lo contrario no tiene capacidad de procesar elementos piezoeléctricos. En la misma interfase se selecciona el directorio de trabajo y la memoria requerida.

Esto se logra ejecutando

C:\ansys54\BIN\Intel\ANSYSI.EXE

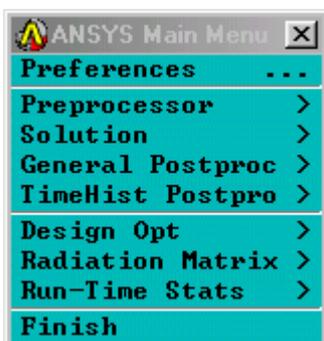
O **run interactive** desde el menú de programas

Product selection **ANSYS/Multiphysics**

Working directory

Memory requested

Una vez dentro del programa tenemos dos menú principales, el menú de utilidades y el menú principal.



II Postproceso.

Indice

Propiedades de materiales. En este caso lo mas útil es tener un archivo de texto con las propiedades. Ver apéndice A6 para la definición de las mismas y una guía de cómo generar este archivo.

Para cargar un archivo desde el menú de utilidades

File > Read input from

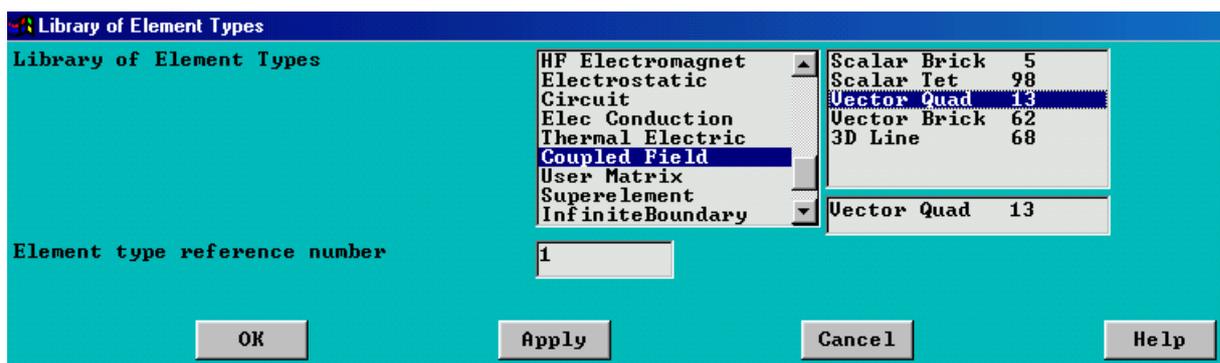
Para cambiar un valor desde el menú principal. Ej. densidad

Preprocesor > Material Props > Isotropic > DENS

Si la propiedad es de la matriz elástica o piezoeléctrica

Preprocesor > Material Props > Data tabs

Tipo de elemento. El tipo de elemento utilizado determina el tipo de geometría que se puede modelar, y las ecuaciones que pueden asignarse a sus nodos. Para el caso piezoeléctrico los materiales deben soportar ecuaciones de campo acoplado. En la imagen se ven los tipos posibles y para el ejemplo se selecciono el PLANE13



En nuestro caso el elemento tendrá comportamiento axisimérico y los grados de libertad deben ser desplazamiento y voltaje.

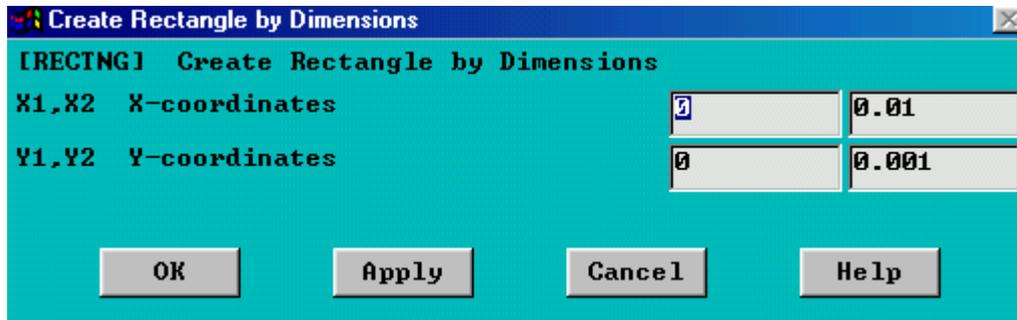
Preprocesor > Element type > Add/Edit/Delete > Add

Preprocesor > Element type > Add/Edit/Delete > Options > K1 > UX UY VOLT

Preprocesor > Element type > Add/Edit/Delete > Options > K1 > Axisimetric

Geometría. En el ejemplo la geometría es muy simple, un disco en el corte axisimérico se ve como un rectángulo con la altura en la dirección Y y el radio en la dirección X . Es importante que el eje de revolución axisimérico es el Y y debe dibujarse desde el o quedara un agujero en el centro.

Preprocesor > Modeling > Create > Rectangle > By dimensions



Las dimensiones elegidas son 10 mm para el radio y 2 mm para el espesor. Se dibuja la mitad del espesor por la simetría.

Grilla. La selección de la grilla se hace en dos pasos, primero se define el tamaño máximo de los elementos y segundo es ordena que se aplique al grilla. Para el ejemplo se selecciona un tamaño de grilla de 0.2 mm lo que da 20 elementos en la longitud de onda del espesor

Preprocesor > Meshing > Size Cntrls > Global > Size > Size

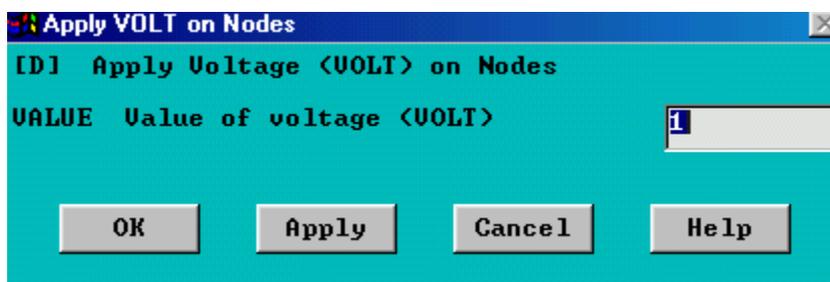
Preprocesor > Meshing > Mesh > Areas > Mapped > 3 or 4 sided

Condiciones de borde. Se utilizan dos tipos de condiciones de borde, mecánicas y eléctricas. Las mecánicas fijan el desplazamiento horizontal en el eje de giro y el vertical para el plano $Y = 0$. Las condiciones de borde eléctricas son los electrodos en el plano $Y = 0$ y $Y = 2\text{ mm}$

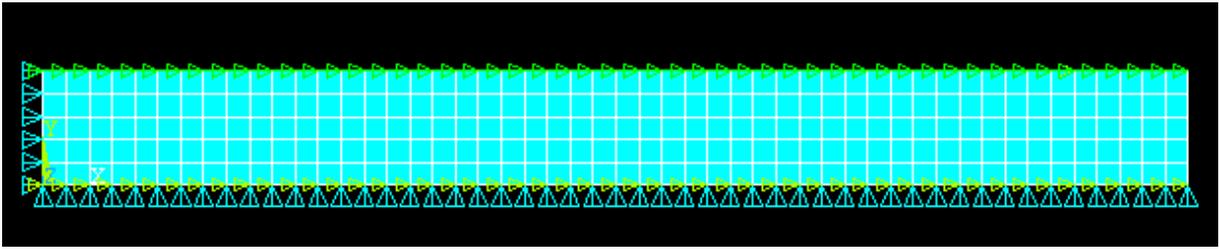
Preprocesor > Loads > Apply > Displacement > On nodes

Preprocesor > Loads > Apply > Electrical > Boundary > On nodes

Para los bordes eléctricos se secciona un electrodo y se fija el voltaje en cero, luego se selecciona el otro y se fija en uno.



Al fin del preproceso debe tenerse la geometría y las condiciones de borde



En este punto puede ser útil guardar el trabajo hecho. Esto se realiza en el menú de utilidades, la extensión .db indica base de datos.

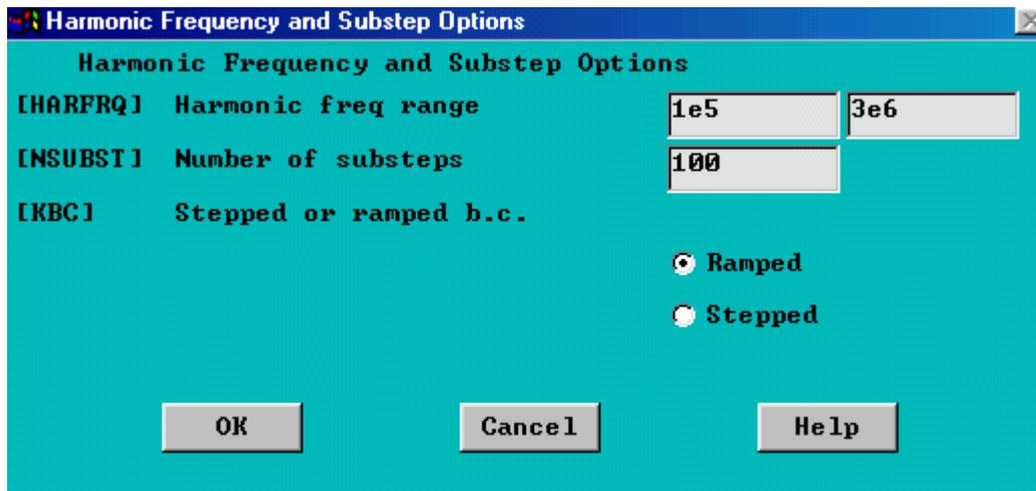
File > Save as >

III Solución.

El tipo de análisis a realizar será armónico, el rango de frecuencias elegido es de 100 KHz a 3 MHz y se divide en 100 pasos

Solution > New analysis > Harmonic

Solution > Load step opts > Time/Frequency > Freq and substeps



Para ejecutar la solución

Solution > Solve > Current LS

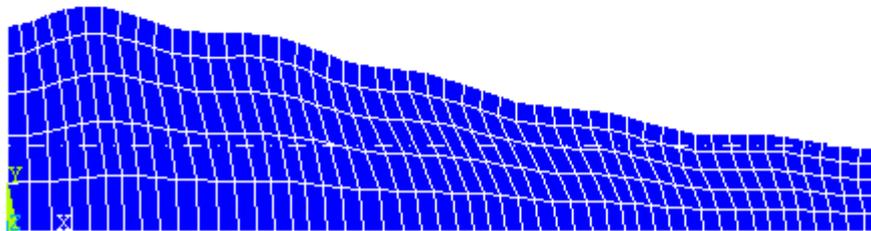
IV Postproceso.

Una vez calculada la solución se procede a visualizar los resultados. Existen dos grandes postprocesadores, *General postprocesor* o POST1 y el *Time history postprocesor* o POST26

Para visualizar la superficie deformada utilizamos el POST1. En el ejemplo se elige la frecuencia de 1 MHz que está en el entorno de la frecuencia resonante.

General postprocesor > By time/freq > TIME
 General postprocesor > Plot results > Deformed shape

1



```

ANSYS 5.4
JUN 23 2002
01:21:47
DISPLACEMENT
FREQ=.100E+07
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.162E-08

*DSCA=.100E+07
ZV =1
DIST=.005525
XF =.005023
YF =.001308
Z-BUFFER
    
```

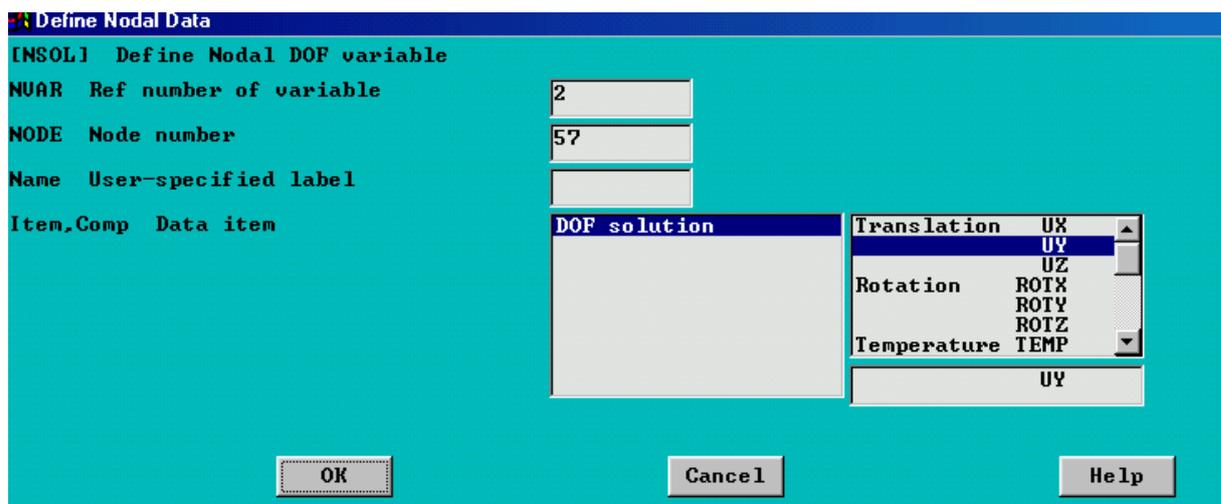
Observe la escala de deformación en 1e6. La escala en el modo grafico se fija desde el menú de utilidades

PlotCtrls > Style > Displacement scaling

Para visualizar las variables en función de la frecuencia utilizamos el POST26

Por ejemplo para ver la deformación del nodo que están en el centro del disco

TimeHist postprocesor > Define variables > Add > Nodal DOF

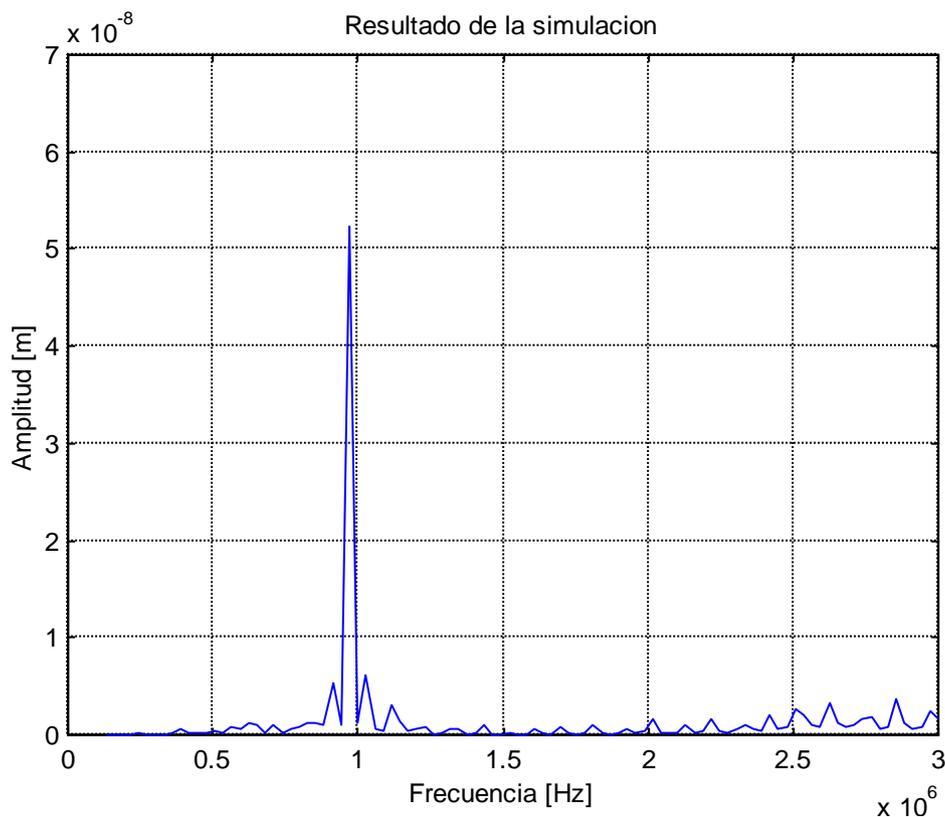


Para la selección del numero de nodo puede utilizarse el menú de utilidades para pedir que numere los nodos y hacer un zoom

Plot Controls > Numbering > Node numbers
Plot Controls > Pan Zoom Rotate

Para ver la grafica en el ANSYS luego de definida la variable

TimeHist postprocesor > Graph variables



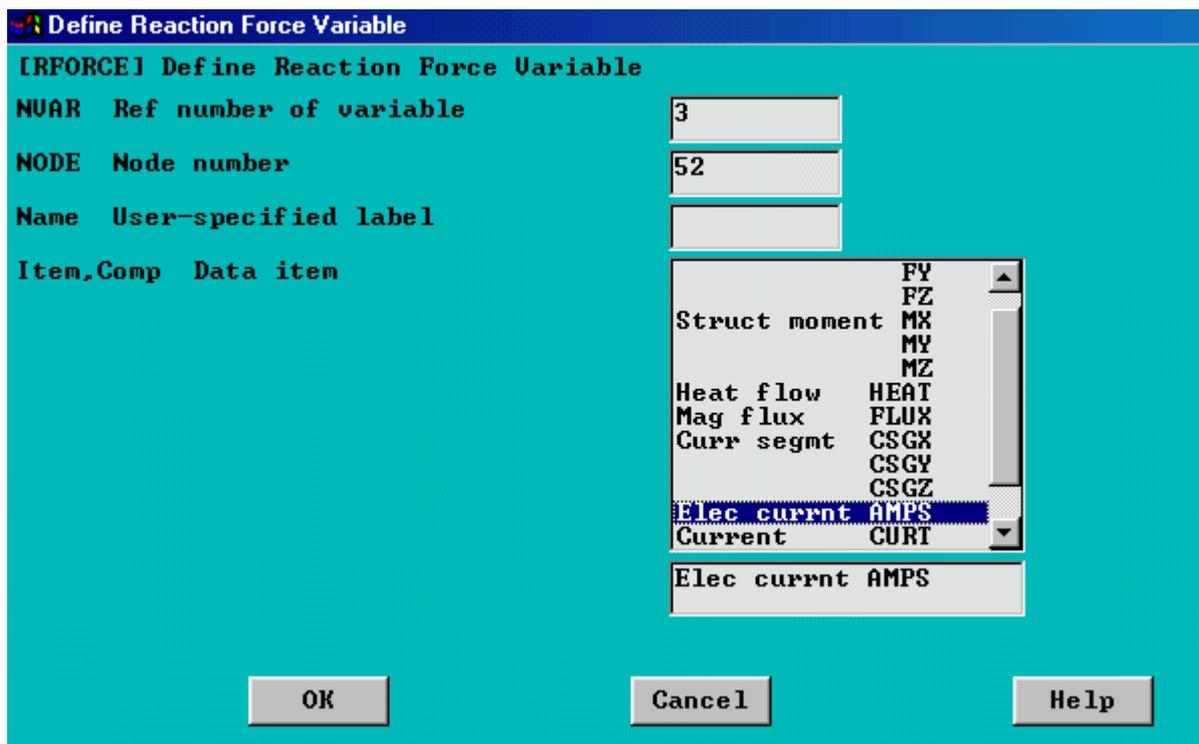
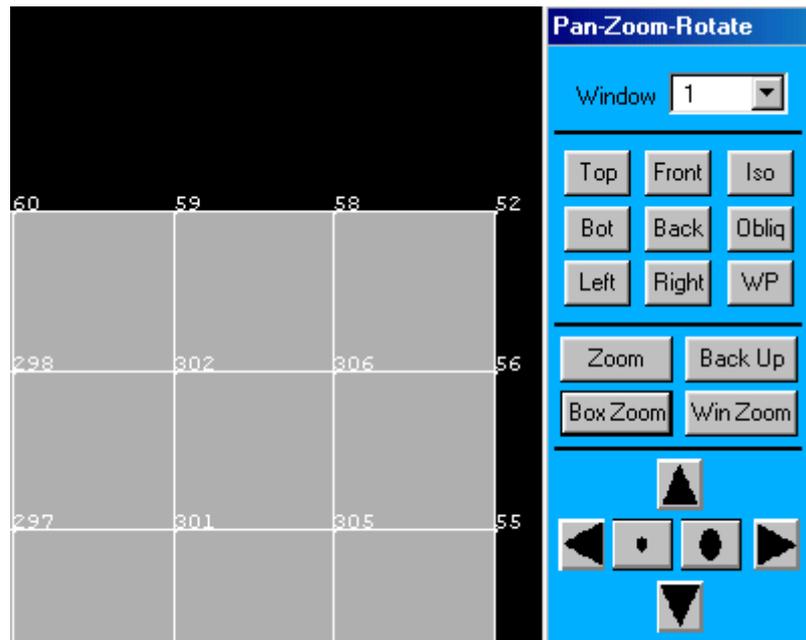
Para ver la admitancia, primero hay que pedir al programa la carga en el electrodo, como ejemplo utilizo el mismo nodo.

TimeHist postprocesor > Define variables > Add > Reaction Force

La carga se considera como una reacción.

El nodo que debe seleccionarse es el de menor valor en el electrodo que se quiere calcular. En nuestro caso es el 52

Plot Controls > Numbering > Node numbers
Plot Controls > Pan Zoom Rotate



Luego de obtenida la carga, que fue definida como la variable numero 3, hay que hacer la derivada respecto al tiempo de la función, que como es sinusoidal queda multiplicada por la frecuencia angular

Multiply Time-History Variables

[PROD] IR = <FACTA * IA> * <FACTB * IB> * <FACTC * IC>

IR Reference number for result

FACTA 1st Factor

IA 1st Variable

FACTB 2nd Factor

IB 2nd Variable

FACTC 3rd Factor

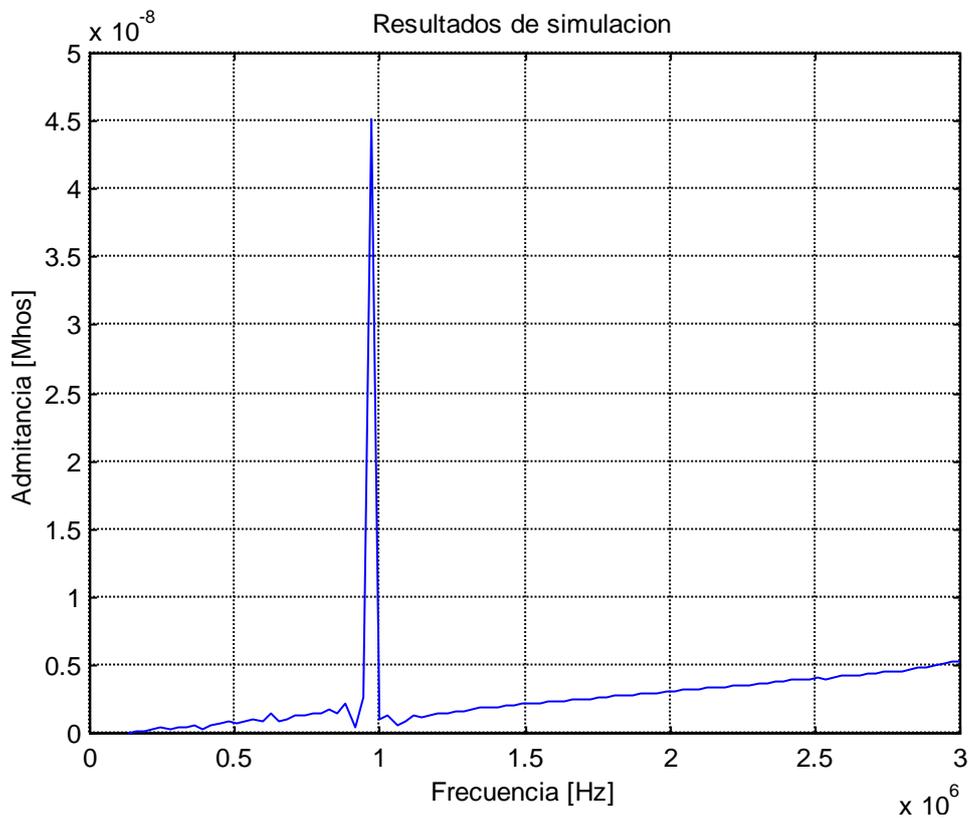
IC 3rd Variable

Name User-specified label

OK Apply Cancel Help

Para ver la grafica en el ANSYS luego de definida la variable

TimeHist postprocesor > Graph variables



APENDICE A3

USO DEL SOFTWARE DE INTERFACE ANSYS-MATLAB

La interfase ANSYS-Matlab permite generar archivos de configuración para simular en ANSYS, leer los datos simulados y convertirlos en variables Matlab, leer curvas experimentales adquiridas con el HP4194A y comparar las medidas con los datos simulados.

Los fuentes pueden estar colocados en cualquier punto de path de Matlab.
En la configuración original se usa

c:\ansys54\biblioteca

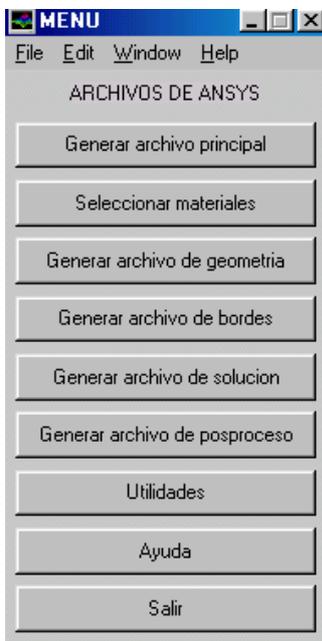
Este directorio debe estar configurado en el path de Matlab.

Todos los datos generados se guardan en el directorio de trabajo. En caso de generar un sonograma debe existir un subdirectorio llamado **\archivos** del directorio de trabajo.

El inicio de programa se realiza ejecutando

ansys

La interfase con el usuario es



Archivo principal

El archivo principal contiene un macro de los archivos que se ejecutaran en la simulación. Permite configurar el título para los gráficos y el trabajo. Cuando esto se realiza los archivos generados por ANSYS tendrá el nombre dado.

Esto es importante sobre todo el archivo de resultados **.rst** y la base de datos **.db**

El archivo generado es el principal.lgw para leerlo desde ANSYS hay que seleccionar desde el menú de utilidades

File > Read input from > principal.lgw

Seleccionar materiales

Permite seleccionar la configuración del tipo de elemento y las constantes del material de un archivo.

Por defecto el directorio donde se encuentran los materiales es

c:\ansys54\biblioteca\materiales

Como guía las terminaciones indican el tipo de elemento utilizado. Cada archivo tiene al menos dos materiales, el uno es la cerámica y el dos el polímero.

vol significa elemento de volumen

axi significa elemento axisimétrico

stress significa elemento de plane stress

strain significa elemento de plane strain

Generar archivo de geometría

Las geometrías se dividen en dos grandes grupos, los elementos de volumen y los planos.

Dentro de los planos la selección de axisimétrico, plane stress o plane strain se realiza con el archivo de materiales, siendo la geometría igual para todas.

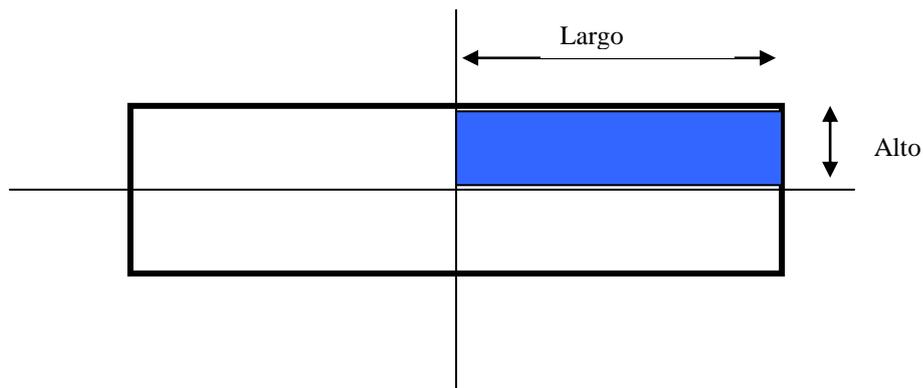
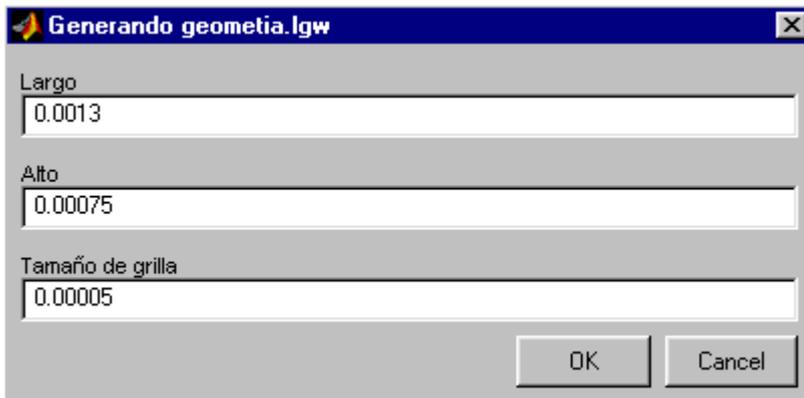
Cada opción de geometría presenta un menú que permite configurar los parámetros relevantes de la misma.

geometría Plana

- Array 2-2
- Monoelemento y sustrato
- Cantor
- Barra

Ejemplo Barra

La opción barra presenta la siguiente interfase, esto permite configurar el largo, alto y el tamaño de grilla. Debe prestar atención a la simplificación que utilizara luego con las condiciones de borde, si se simula un cuarto de barra el largo y el alto deben ser la mitad de los reales.



Barra con la simplificación por simetría

geometría volumen

- Disco homogéneo
- Barra homogénea
- Array 2x2
- Cantor 3D
- Piezocomposite 1-3
- Celda piezocomposite

Generar archivo de bordes

El archivo de condiciones de borde permite generar las condiciones tanto eléctricas como mecánicas de una simulación.

Para las condiciones mecánicas debe especificarse el eje, la posición y el grado de libertad. Si el punto debe permanecer fijo el valor es cero.

En la figura se muestra el ejemplo de fijar el desplazamiento en la dirección X, en la coordenada 1mm del eje X

The screenshot shows a dialog box titled "Generando borde.lgw" with the following fields and values:

- Plano perpendicular al eje: X
- Posicion sobre el eje: 0.001
- Grado de libertad: UX
- Valor: 0

Buttons for "OK" and "Cancel" are visible at the bottom right.

Para los bordes eléctricos, debe especificarse además si el electrodo tiene un nodo maestro. En el ejemplo se muestra un electrodo excitado con un voltio y con nodo maestro, la posición es 1 mm en el eje Y

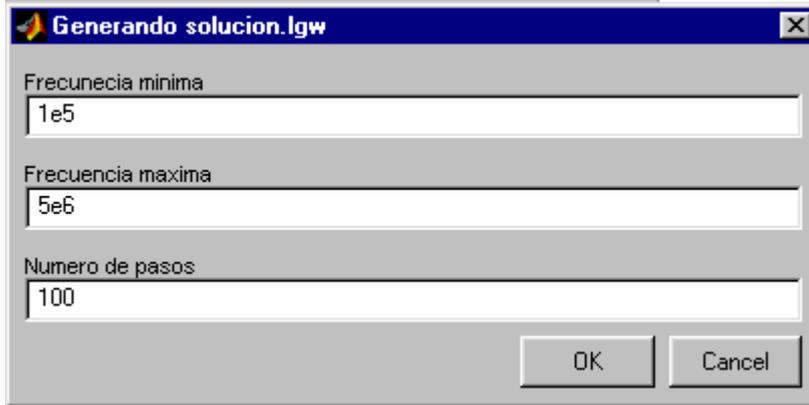
The screenshot shows a dialog box titled "Generando borde.lgw" with the following fields and values:

- Plano perpendicular al eje: Y
- Posicion sobre el eje: 0.001
- Valor del voltaje: 1
- ¿Nodo maestro?: Si

Buttons for "OK" and "Cancel" are visible at the bottom right.

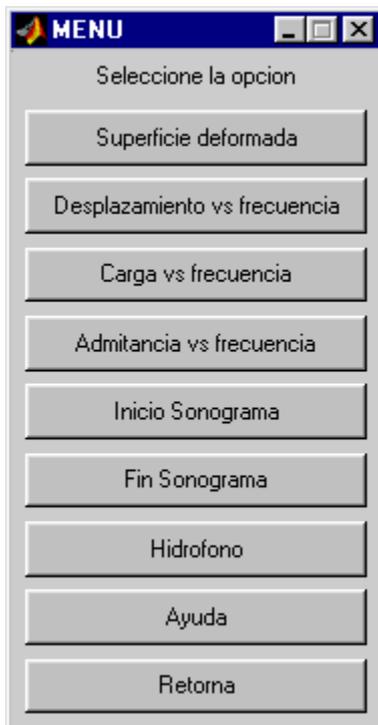
Generar archivo de solución

En el archivo de solución solo se encuentra implementado el análisis armónico. Deben especificarse la frecuencia inicial, la final y el número de frecuencias a simular



Generar archivo de postproceso

El archivo de postproceso permite programar la presentación de los resultados del ANSYS. Las opciones son las presentadas en el menú.



Ejemplo **Admitancia vs. Frecuencia**

Para ver el grafico de admitancia hay que seleccionar esta opción. El nodo donde se calcula la admitancia es el nodo maestro, y si se selecciona guardar, el ANSYS genera un archivo PRADM.lis en el directorio de trabajo.

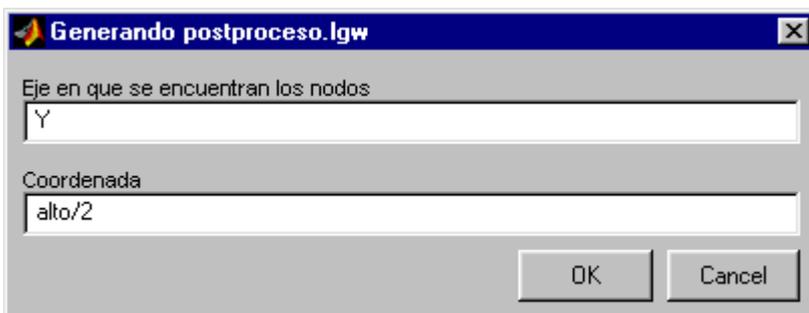
Para leer este archivo se secciona el menú de utilidades, importar archivo de admitancia y se genera un archivo con variables Matlab Amp, fase y f para la amplitud , fase y frecuencia respectivamente.

Ejemplo **Sonograma**

Para generar un sonograma hay que realizar los siguientes pasos

Primero desde el menú de postproceso, inicio sonograma. Esto selecciona donde están los nodos para el mismo.

Leer con el ANSYS



Segundo desde el menú de postproceso, fin sonograma. Esto lee los nodos generados en el ANSYS y genera los comandos para leer las variables en estos nodos.

Verificar si existe un subdirectorio \archivos en el directorio de trabajo.

Leer con el ANSYS.

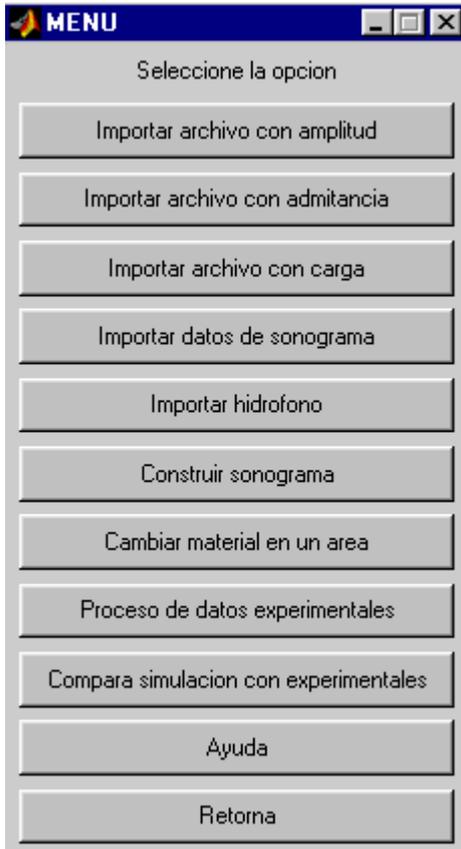
Tercero desde el menú de utilidades, importar archivos de sonograma.

Cuarto, desde el menú de utilidades construir sonograma.

menú de utilidades

El menú de utilidades tiene diversas rutinas que se utilizan para importar datos desde el ANSYS, graficar datos experimentales y comparar los resultados con las simulaciones.

Las opciones disponibles son



APENDICE A4

USO DEL HP4194A

Manipulación modo transferencia

- La muestra piezoeléctrica debe estar polarizada y con electrodos.
- Soldar en el modulo de medida los electrodos a entrada de señal desde el HP4194A. El electrodo de tierra debe ser el que queda en contacto con el hidrófono.
- Conectar el cable desde la salida “Dual” del HP4194A a la entrada de señal.
- Conectar la entrada “Reference channel” con la señal generada en “Dual”. Da mejor resultado hacer la conexión con un conector T que utilizar la salida del equipo.
- Conectar el hidrófono al “Test channel”
- Acoplar el hidrófono y la muestra mediante aceite o agua.
- Configurar el HP4194A en modo transferencia. “Gain-Phase”
- Seleccionar relacion de amplitud y fase en grados. “Tch/Rch”.
- Seleccionar el rango de frecuencias
- Seleccionar el tiempo de integración y el promedio. Ej. tiempo medio y promedio 2.
- Seleccionar el modo “Dual”
- Seleccionar los atenuadores de entrada.

Reference channel	1Mohm	-20dB
Test channel	1Mohm	0dB

Debe tenerse especial cuidado con la alineación de la muestra, fundamentalmente si se quiere mover el hidrófono. Un desnivel de la muestra se refleja en una capa de acoplante variable con la posición lo que produce un “background” proporcional al mismo donde se superpone la medida. Para mejorar este problema se puede utilizar un plano de simetría de la pieza y simetrizar los datos.

SOFTWARE DE INTERFACE HP4194A-MATLAB

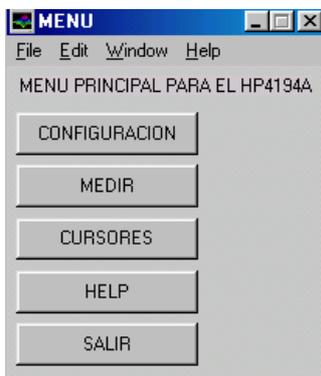
La interfase HP4194A-Matlab esta basada en la comunicación entre tareas de Windows DDE. Permite configurar en forma remota el instrumento y adquirir los datos del mismo.

Solo esta programado el modo de analizador de impedancias. Algunas funciones aun no se encuentran implementadas.

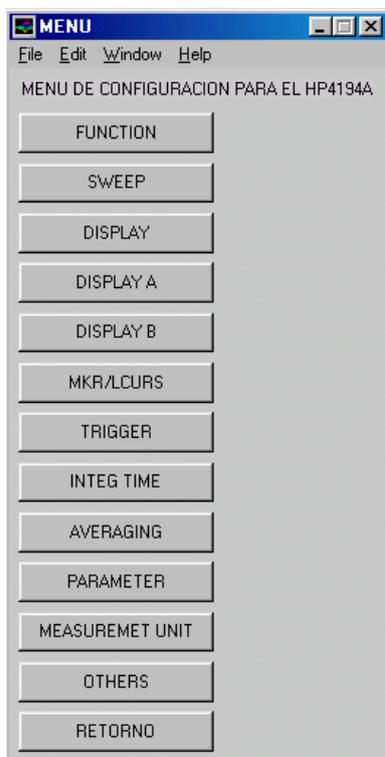
Para que funcione debe estar habilitada la comunicación con el modulo DDE del software HP. En caso contrario se tiene un mensaje de error

```
Error in ==> c:\matlab\toolbox\matlab\dde\ddeexec.dll
Error in ==> D:\Mis_documentos\nico\matlab\MATLAB\hp4194.m
On line 14 ==> res=ddeexec(canal,['OPENCONFIG(nico)']);
```

El ingreso al programa en forma normal presenta un menú de opciones

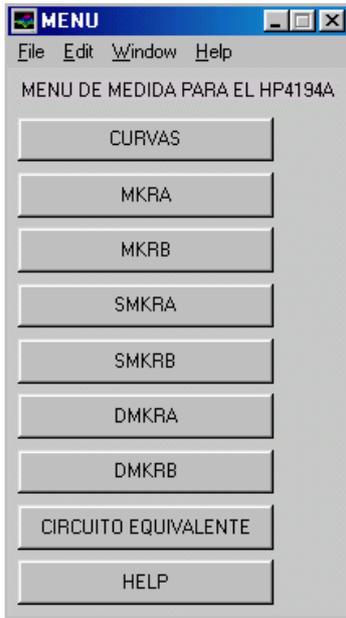


Configuración: Corresponde al configuración de cada opción en el instrumento.



Las opciones están programadas con el mismo formato que la interfase en el panel de comandos del instrumento.

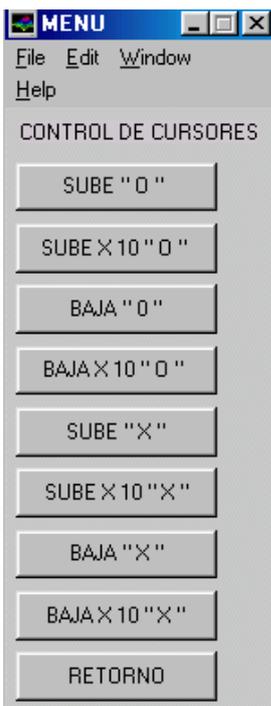
El menú medir presenta la opciones de medir las curvas de la pantalla, los marcadores o los parámetros del circuito equivalente



Los datos medidos quedan como variables del entorno Matlab.
Las curvas quedan en las variables

datoX frecuencia
datoA Amplitud
datoB fase

La opción cursores permite controlar desde PC la posición de los cursores en la pantalla, donde se adquieren los datos correspondientes a los marcadores.



SOFTWARE DE INTERFACE HP4194A PARA SECUENCIA DE BARRIDO

El programa esta desarrollado en plataforma C para dos. Todos los fuentes están disponibles.

El ejecutable para el barrido de superficie se llama superf.exe.

Al iniciar el programa aparece una pantalla de presentación del tipo

```
SISTEMA DE MEDIDA DE TRANSFERENCIA CON MOTORES ORIEL Y HP4194A

Facultad de Ciencias - Instituto de Fisica
Laboratorio de Acustica Ultrasonora

Programador: Nicolas Perez / Gabriel Montaldo / Febrero 2000

Para continuar, oprima una tecla.
```

En caso de problemas con la comunicación GPIB aparece un código de error

Error en la llamada IORESET

Error = 2 : Invalid select code or device address

<Return> Para continuar

Error en la llamada IOTIMROUT

Error = 2 : Invalid select code or device address

<Return> Para continuar

Error en la llamada IOREMOTE

Error = 2 : Invalid select code or device address

<Return> Para continuar

Las causas pueden ser:

- No esta conectada la tarjeta GPIB
- No es correcto el numero de instrumento
- No esta conectado el HP4194A (Este el caso típico con el analizador apagado)

Una vez ingresado al programa la interfase de usuario tiene la forma

```

MENU PARA PRINCIPAL PARA CONTORL DE MOTORES ORIEL.

Presione la letra indicada para seleccionar una función:

  C      Para Configuar la secuencia.
  A      Para configurar los parametros.
  E      Para Ejecutar la secuencia.
  X      Para sincronizar el medidor.
  S      Para Salir del programa.
  flechas Para mover de a paso en X e Y.

Estado actual de los parámetros del Sistema:

Posición actual: [en X, en Y] =      0.0      0.0
Tamaño del paso: [en X, en Y] =     100.0     100.0
Cantidad de pasos:[en X, en Y] =      0         0
Medidor:      *** Inactivo ***
    
```

Aquí se presentan la opciones par realizar la medida de transferencia en función de la frecuencia.

Primero es recomendable verificar que los motores estén operativos. Esto se logra con la flechas del teclado que mueven los motores en el plano X-Y. La operación normal necesita solo un motor para barrer una línea

En caso de que no respondan

- Verificar que los motores estén conectados al modulo de comando
- Verificar que el modulo de comando este conectado al PC
- Verificar que le modulo de comando este encendido (Este es el caso típico)

opción C: Configurar secuencia

Esto nos permite configurar la cantidad de pasos en cada eje. Lo típico es seleccionar solo un eje y barrer una línea, pero se tiene la opción de barrer un plano fijando ambos ejes

```

Configuración de la secuencia

Valores actuales

cantidad de pasos en x = 100
cantidad de pasos en y = 0

Ingrese la nueva cantidad de pasos en x = 100
Ingrese la nueva cantidad de pasos en y =
    
```

opción A: Configurar parámetros

Esto nos permite fijar el tamaño de paso en cada eje. Con la configuración original 1 corresponde a 0.1 milímetros.

Esto puede cambiar si se desregula el control de los motores, por lo que hay que verificarlo por ejemplo seteando 1 de tamaño y luego realizar una secuencia de N pasos.

```

Función para configurar los parámetros:
EL TAMAÑO DE PASO SE CONFIGURA EN MULTIPLOS DE 100 MICRAS
QUE ES LA RESOLUCION DEL SISTEMA
Tamaño de paso en x = 100
Tamaño de paso en y = 100
Ingrese el nuevo tamaño de paso en x =
    
```

opción E: Configurar secuencia

Aquí comienza la ejecución de la secuencia. La interfase indica el numero de paso en que se encuentra.

```

SE ESTA EJECUTANDO UNA SECUENCIA.

Numero de paso en x: 3
Numero de paso en y: 0

%

Para retornar al menu principal oprima <ESC>
    
```

opción X: Sincronizar con el medidor

Esto permite tomar la lectura del HP4194A en cada paso. Es importante destacar que los datos adquiridos deben ser configurados previamente. El programa no configura ninguna opción.

Cuando se activa el medidos aparece un indicador

* Medidor activo

Cuando se inicia la secuencia el programa pide el nombre de archivo para guardar los datos. El máximo son cuatro letras, y el formato es

XXXXa000.dat
XXXXa001.dat
.....
XXXXa00N.dat

Para los datos de amplitud

XXXXb000.dat
XXXXb001.dat
.....
XXXXb00N.dat

Para los datos de fase

Estos se guardan en el directorio de trabajo.

En caso de problemas de comunicación aparece un mensaje análogo al descrito en el inicio.

Opción S: Salir del programa.

APENDICE A5

CONSTANTES DE MATERIALES UTILIZADOS Y SU REPRESENTACION EN ANSYS

El software ANSYS utiliza para referirse a la tensión mecánica el símbolo σ y para la deformación ε . Sin embargo cuando se refiere a piezoelectricos usa la notación habitual de T y S con la modificación en el orden mencionada en el apéndice A1.

ANSYS sobreentiende que la matriz elástica es simétrica, por lo que solo deben ingresarse los componentes de la diagonal superior. La matriz elástica debe ser a campo cero y la matriz dieléctrica a deformación cero.

La matriz dialéctica se asume diagonal, todos los coeficientes se ingresan al programa indexados de manera continua.

Nótese que los coeficientes están indexados de acuerdo con la notación IEEE y con el numero de secuencia ANSYS

$$\{D\} = [\varepsilon^S] \{E\} + [e]^T \{S\}$$

$$[T] = [c^E] - [e] \{S\}$$

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{16}^E & c_{14}^E & c_{14}^E \\ - & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{26}^E & c_{24}^E & c_{24}^E \\ - & - & c_{33}^E & c_{36}^E & c_{34}^E & c_{34}^E \\ - & - & - & c_{66}^E & c_{64}^E & c_{65}^E \\ - & - & - & - & c_{44}^E & c_{45}^E \\ - & - & - & - & - & c_{55}^E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ - & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ - & - & 12 & 13 & 14 & 15 \\ - & - & - & 16 & 17 & 18 \\ - & - & - & - & 19 & 20 \\ - & - & - & - & - & 21 \end{bmatrix}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & - & - \\ - & \varepsilon_{22}^S & - \\ - & - & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$

Método de ingresar las constantes en ANSYS

Primero debe estar en el preprocesador, esto se impone con el comando

/PREP7

Los elementos a utilizar de la biblioteca ANSYS se detallan en el apéndice A3

Matriz elástica

Activa tabla de datos, matriz elástica anisotrópica. Nmat es el número de material utilizado, por defecto usa el material 1

TB, ANEL, 'Nmat'

Ingresar los datos a la tabla. Posición indica donde se carga el valor. Puede seguirse la secuencia de valores a partir de este punto

TBDATA, 'posición', 'valor', 'valor', ...

Ej. de material polarizado en el eje z

Definir las constantes

c_{11}

c_{12}

c_{13}

c_{33}

c_{44}

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

TB,ANEL,1

TBDATA,1, c_{11} , c_{12} , c_{13} ,0,0,0

TBDATA,7, c_{11} , c_{13} ,0,0,0

TBDATA,12, c_{33} ,0,0,0

TBDATA,16, c_{66} ,0,0

TBDATA,19, c_{44} ,0

TBDATA,21, c_{44}

Matriz piezoeléctrica

Activa tabla de datos, matriz piezoeléctrica, Nmat es el numero de material, por defecto Nmat es uno

TB,PIEZ,'Nmat'

Ingresar los datos a la tabla. Posición indica donde se carga el valor. Puede seguirse la secuencia de valores a partir de este punto

TBDATA, posición, valor, valor, ...

Ej. material polarizado en el eje z

Ingresar las constantes

e_{31}

e_{33}

e_{15}

TBDATA,1, 0,0, e_{31}

TBDATA,4, 0,0, e_{31}

TBDATA,7, 0,0, e_{33}

TBDATA,10,0,0,0

TBDATA,13,0, e_{15} ,0

TBDATA,16, e_{15} ,0,0

Matriz dieléctrica

El comando para ingresar permitividad dieléctrica en la dirección x es

MP,PERX, 'Nmat', valor

Ej. Material con polarización en la dirección z

ϵ_{11}

ϵ_{33}

MP,PERX,1, ϵ_{11}

MP,PERY,1, ϵ_{11}

MP,PERZ,1, ϵ_{33}

Densidad y amortiguamiento

Para el amortiguamiento puede definirse una constante independiente de la frecuencia. Los comandos utilizados son

MP,DENS,'Nmat', 'valor'

MP,DAMP,'Nmat', 'valor'

Constantes elásticas para materiales anisotropicos

Las constantes de materiales isotrópicos se ingresan con el comando

UIMP,'Nmat','propiedad', 'valor'

Los propiedades pueden ser

EX	Modulo de Young
DENS	Densidad
PRXY	Modulo de Poisson mayor
NUXY	Modulo de Poisson menor
GXY	Modulo de corte

Si se especifica solo en una dirección el programa asume que es isotropico

Constantes de materiales utilizados (MKS)

PZT5A [Hossack 1991]

$$e_{31} = -5.4$$

$$e_{33} = 15.8$$

$$e_{15} = 12.3$$

$$c_{11} = 12.1 \text{ e}10$$

$$c_{12} = 7.54 \text{ e}10$$

$$c_{13} = 7.52 \text{ e}10$$

$$c_{33} = 11.1 \text{ e}10$$

$$c_{44} = 2.11 \text{ e}10$$

$$c_{66} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\epsilon_{11} = 1730 * 8.85 \text{ e-}12$$

$$\epsilon_{33} = 1700 * 8.85 \text{ e-}12$$

$$\rho = 7550$$

EPOXI [Hossack 1991]

$$c_{11} = 8.2 \text{ e}9$$

$$c_{12} = 1.5 \text{ e}9$$

$$c_{33} = c_{11}$$

$$c_{44} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\epsilon = 4 * 8.85 \text{ E-}12$$

$$\rho = 1140$$

APENDICE A6

MODELOS BIDIMENSIONALES EN ANSYS

Existen tres simplificaciones que reducen los modelos tridimensionales a bidimensionales, en el software ANSYS esta se llaman axisimetrica, deformación plana y esfuerzo plano.

En este apéndice se resumen los tres tipos y se presenta el cambio de las matrices para la polarización en la dirección Y, ya que los modelos bidimensionales trabajan en el plano X-Y.

El elemento que se utiliza para las simulaciones piezoeléctricas planas es el PLANE13.

Modelo axisimetrico

Este modelo considera el sólido de revolución entorno al eje Y.

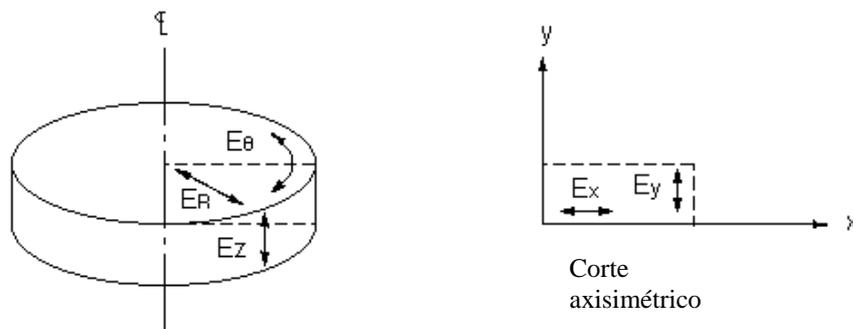


Figura A6.1 Cambio de volumen a axisimétrico

El cambio es

$$R \rightarrow x$$

$$z \rightarrow y$$

$$\theta \rightarrow z$$

Modelo de deformación plana. Plane strain

El modelo de deformación plana es útil cuando se quiere simular un medio con una dimensión infinita, por ejemplo una cañería o en nuestro caso una barra con una dimensión mucho mayor que las otras.

La simplificación es suponer que la deformación en la dirección z es nula.

$$S_{zz} = 0$$

$$S_{xz} = 0$$

$$S_{yz} = 0$$

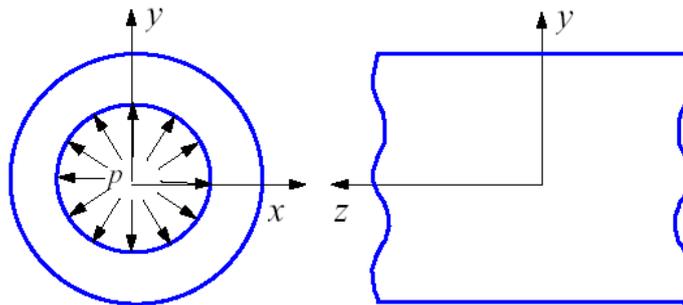


Figura A6.2 deformación plana

Para que la hipótesis sea válida las cargas deben estar aplicadas en el plano del corte, por ejemplo en la figura se muestra un caño sometido a presión

Modelo de esfuerzo plano. Plane stress

El modelo de esfuerzo plano es útil cuando se quiere simular un medio delgado que no recibe cargas en la dirección normal al plano.

La simplificación es suponer que la deformación en la dirección z es nula.

$$S_{zz} = 0$$

$$S_{xz} = 0$$

$$S_{yz} = 0$$

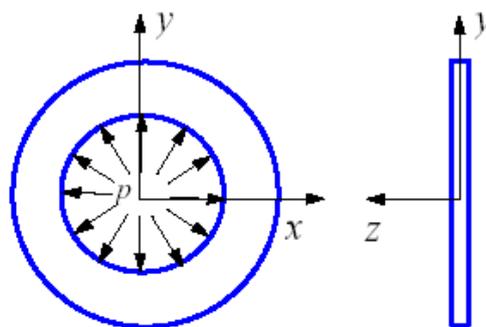


Figura A6.3 Esfuerzo plano

Es útil para simular películas delgadas.

GLOSARIO DE TERMINOS

x	vector posición
u	desplazamiento
l	distancia
S	deformación
T	Tensión mecánica
σ_n	componente normal de la tensión en la dirección n
γ	tensión rasante
n	versor normal
t	versor tangencial
F	fuerza
α	matiz de cambio de base
c	tensor elástico
U	energía
ρ	densidad de masa
g	aceleración de la gravedad
σ	entropía
Θ	temperatura
u_e	densidad volumétrica de energía
\mathfrak{S}	energía de Helmholtz
Φ_e	densidad de energía elástica
X	fuerzas volumétricas
f	fuerza por unidad de volumen
Γ	tensor de Cristoffel
V_T	velocidad transversal
V_L	velocidad longitudinal
Pa	vector de Pointing acústico
P_e	polarización microscópica eléctrica
p_e	momento dipolar eléctrico
D	desplazamiento eléctrico
E	campo eléctrico

ϵ	permitividad dieléctrica
χ	susceptibilidad eléctrica
e	tensor piezoeléctrico
W_E	trabajo eléctrico
W_M	trabajo mecánico
Ψ	potencial termodinámico
ζ	potencial termodinámico
B	campo magnético
ϕ	potencial eléctrico
k	coeficiente de acoplamiento electromecánico
k	numero de onda
β	numero de onda
v	velocidad de partícula
L	inductancia
C	capacidad
P	potencia
A	área
Z_o	impedancia acústica específica

REFERENCIAS

- [1] H. Allik, T. Hughes, “*Finite element method for piezoelectric vibration*”
International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 2. pp 151-157. (1970).
- [2] B.A. Auld, H. A. Kunkel, Y. A. Shui, Y. Wang, “*Dynamic behavior of periodic piezoelectric composites*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 554-558. (Nov. 1983).
- [3] B.A. Auld, Y. Wang, “*Acoustic wave vibrations in periodic piezoelectric composites*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 528-532. (1984).
- [4] B.A. Auld.. “*Acoustic fields and waves in solids*”. **Krieger Publishing Company, second edition 1990**
- [5] Aulet, A. ;Negrreira, C.; Gómez, H.; Eiras, J.E. ; Bassora, L.
“*Identification of lateral vibration modes of piezo-electric composites 1-3 and their effects.*”
IEEE Ultrasound Symp.,Vol.2 pp 1063-1066. (Nov. 1994).
- [6] A. Aulet “*Ceramicas piezocomposites 1-3 PZT-polimero para emision-recepción de ultrasonidos*”. **Laboratorio de Acústica Ultrasonora. Facultad de Ciencias. UDELAR.** Trabajo de tesis de maestría en física.
- [7] D. Bacon “*Characteristics of a pvdF Membrane Hydrophone for Use in the Range 1-100 MHz*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 29 pp 18-25. (Enero 1982).
- [8] S. Ballandras, G Pierre, F. Blanc, P. Edoa, W. Steichen “*A periodic finite element formulation for the design of 2-2 composite transducers.*”
IEEE Ultrasound Symp., pp 957-960. (1999).
- [9] A. Ballato. “*Modeling piezoelectric and pizomagnetic devices and structures via equivalent networks.*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 48. N° 5 pp 1189-1240. (2001).
- [10] G. Benny, G. Hayward “*Bean profile measurements and simulations for air-coupled ultrasonic transducers.*”
IEEE Ultrasound Symp., pp 1041-1044. (1999).

- [11] T. Bui, H. Chan, J. Unsworth “*Specific acoustic impedances of piezoelectric ceramic and polymer composites used in medical applications*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 2416-2421. June 1988.
- [12] D Certon, F. Patat, F. Levassort, L Tessier “*Influence of the polymer and ceramic transverse stiffness in 1-3 piezocomposites on the lateral mode frequencies*”
IEEE Ultrasonics Symp. (1996).
- [13] D Certon, F. Patat, F. Teston, L. Ratsimandresy, M. Lethiecq “*Experimental analysis of plate waves in 1-3 piezoelectric composites materials*”
IEEE Ultrasonics Symp. Pp. 887-890. (1997).
- [14] D Certon, O. Casula, F. Patat, D Royer “*Teorical and experimental investigations of lateral modes in 1-3 pizocomposites*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 44. N°3 pp 643-651. (1997).
- [15] D Certon, O. Boumatar, J. Guyonvarch, N. Felix, F. Patat “*Characterization of transducers arrays by laser interferometry: influence of acoustic-optic interactions on displacement measurement in water*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp. 1065-1068 (2001)
- [16] H.B. Callen “*Termodinámica*”. **Editorial AC 1975**
- [17] PG Dargie, NR Harris, N M White, JK Atkinson and RP Sion, “*Sensors and their Applications VIII*”, **Glasgow, Sept. 1997.**
- [18] E. Dieulesaint, D. Royer. “*Elastic waves in solids*”. **John Wiley & Sons 1980.**
- [19] A. Gachagan, H. Hayward “*Improving the bandwidth of 1-3 connectivity recibeibers using mode coupling*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 3334-3352. (1998).
- [20] E. Galgoci, J.Runt “*Interfacial adhesion in PZT-Epoxy composites*”.
Ferroelectrics, Vol 70. pp 205-212, (1986)
- [21] P. Gendreu, M. Fink, D. Royer “*Visualization of surface displacement and transmitted field of piezocomposite transducers by optical proving*”
IEEE Ultrasonics Symp. (1993)
- [22] Geng, X. and Zhang, Q.M. “*Dynamic behavior of periodic piezoceramic-polymer composite plates*”
Appl. Phys. Lett. 67 (21) pp 3093-3095. (Novembre 1995).

- [23] M. Gindre, W. Hurbach, R. Coursant, M. Fink “*Mechanical displacement induced in a piezoelectric structure: experimental measurement by laser interferometry and simulation by finite element method*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 11-19. (1998).
- [24] T. Gomez, F. Montero de Espinoza, F. Levassort, M. Lethiecq, A. James, E. Ringgard, C. Millar, P. Hawkins “*Ceramic powder-polymer piezocomposites for electroacoustic transduction: modeling and design*” **Ultrasonics N° 36. 907-923 (1998)**
- [25] M Grewe, T. Gururaja, T. Schrouf, R. Newnam “*Acoustic properties of particle-polymer composites for ultrasonic transducer backing applications*” **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 37. N°6 pp 506-513. (1990).**
- [26] Gururaja, T.R.; Schulze, W.A.; Cross, L.E.; Auld, B.A.; Shui, Y.A. and Wang, Y. “*Resonant Modes of Vibration in Piezoelectric PZT-Polymer Composites with Two Dimensional Periodicity*” **Ferroelectrics, Vol. 54 pp 183-186, (1984)**
- [27] Gururaja, T.R. et al, “*Piezoelectric composite materials for ultrasonic transducer applications part I.*” **IEEE Trans. Sonics Ultras. SU-32, (1985).**
- [28] S. Gwirc, S. Tropea, N. Pérez, C. Negreira, F. Montero de Espinoza, “*Fabrication and characterization of piezoelectric thick film elements and arrays*”, **Proceedings of the 2000 IEEE Ultrasonics Symposium, pp. 1121-1124, Oct. 2000.**
- [29] S. Gwirc, S. Tropea, N. Pérez, C. Negreira, “*Emission acoustic field of thick film PZT elements*”, **Proceedings of 2nd IberoAmerican Conference on Sensors, pp. 164-167, Nov. 2000.**
- [30] R. Hamilton, G. Hayward “*The modeling and design of controllable composite transducers*” **IEEE Ultrasonics Symp. pp 393-396. (1990).**
- [31] K. Hashimoto, M. Yamaguchi “*Elastic, piezoelectric and dielectric properties of composite materials*” **IEEE Ultrasonics Symp. pp 697-702. (1986).**
- [32] G. Hayward, C. MacLeod, T. Durrani “*A systems model of the thickness mode piezoelectric transducer*”. **Journal of Acoustical Society of America. pp 369-382.(1984).**

- [33] G. Hayward, J. Hossack “*Unidimensional modeling of 1-3 composite transducers*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 599-608. (1990).
- [34] G. Hayward, J. Bennett, R. Hamilton “*A theoretical study on the influence of some constituent material properties on the behavior of 1-3 connectivity composite transducers*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 2187-2196. (1996).
- [35] G. Hayward, A. Gachagan “*An evaluation of 1-3 connectivity composite transducers for air-coupled ultrasonic applications*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 2148-2157. (1996).
- [36] G. Hayward, J. Bennett “*Assessing the influence of pillar aspect ratio on the behavior of 1-3 connectivity transducers*”. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**. Vol 43. N°1 pp 98-107. (1996).
- [37] A. Healey, S. Leeman, J. Weight “*Space-Time Imaging of Transient Ultrasound Fields*”. **Inc. Int. J. Imaging Syst. Technol**. Vol 8 pp 45-51. (1996).
- [38] A. Hladky-Hennion, J. Decarpigny “*Finite element modeling of active periodic structures: application to 1-3 pizocomposite*”. **Journal of Acoustical Society of America**. pp 621-635. (1993).
- [39] J. Hossack, B. Auld, H. Batha “*Techniques for suppression spurious resonant modes in 1-3 composite transducers*” **IEEE Ultrasonics Symp.** pp 651-655. (1991).
- [40] J. Hossack, G. Hayward “*Finite-element analysis of 1-3 composite transducers*” **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**. Vol 38. N°6 pp 618-629. (1991).
- [41] J. Hossack, B. Auld “*Improved efficiency piezoelectric ceramic-polymer composite transducers*” **IEEE Ultrasonics Symp.** pp 523-526. (1992).
- [42] J. Hossack, B. Auld “*Improved modeling of 0-3 composite materials*” **IEEE Ultrasonics Symp.** pp 945-949. (1995).
- [43] J. Hu, G. Li, H. Chan, C. Choy “*An Improved method for analyzing the performance of multilayer piezoelectric transformers*” **IEEE Ultrasonics Symp.** pp 943-955. (1999).

- [44] T. Ikeda “*Fundamentals of Piezoelectricity*”
Oxford University Press. (1996).
- [45] “*IEEE Standard on Piezoelectricity-IEEE Std 176-1987*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 43. N°5. (1996).
- [46] B. Jaffe, W. Cook, H. Jaffe “*Piezoelectric Ceramics*” **Academic Press-London and New York (1971)**
- [47] X. Jia, G. Quentin, M. Lassoued “*Optical heterodyne detection of pulsed ultrasonic pressures*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 40. N°1 pp 67-69. (1993).
- [48] N. Kikuchi “*Introduction to the finite element method*”
Course Note. University of Michigan. (1995)
- [49] G.S. Kino “*Acoustic waves: Devices, imaging and analog signal processing*”. **Prentice-Hall 1987**
- [50] N. Lamberti, M Pappalardo “*A two-dimensional model for bounded resonant piezoelectric ceramic plate*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 775-779. (1989).
- [51] N. Lamberti, V. Genovese, M Pappalardo “*A two-dimensional model of the multielement piezoelectric transducer*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 785-789. (1990).
- [52] N. Lamberti, M Pappalardo “*A general approximated two-dimensional model piezoelectric array elements*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol. 42 pp. 243-252. (Marzo 1995).
- [53] N. Lamberti, F. Montero de Espinoza. S. Sanchez, A Iula, M. Pappalardo “*Two-dimensional model of multifrequency composites*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 1033-1036. (1995).
- [54] N. Lamberti, A. Iula, M. Pappalardo “*A new three-dimensional model of piezoelectric elements for composite materials*”
Acoustical Imagin. Vol XXIII. (1997).
- [55] N. Lamberti, A. Iula, R. Carotenuto, P. Di Rosa, M. Pappalardo “*The evaluation of the k factor for lossy and composite(Langevin-type) piezoelectric elements*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp. 977-981. (1999).

- [56] N. Lamberti, P. Gori, G. Caliano, A. Iula, R. Carotenuto, M. Pappalardo “*Radiation pattern distortion caused by interelement coupling in linear array transducers*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 1071-1075. (1999).
- [57] N. Lamberti, F. Montero de Espinoza, N. Pérez, H. Gomez, C. Negreira “*Optimization of acoustic matching layers for piezocomposite transducers*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 977-981. (1999).
- [58] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. “*Teoría de la elasticidad*”. **Reverté S. A. 1969.**
- [59] R. Lerch. “*Finite element analysis of piezoelectric transducers*”
IEEE Ultrasonics Symp. Vol 1 pp 643-653, (1988).
- [60] J. Monchalin “*Optical detection of ultrasound*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 33. N°5 pp 485-499. (1986).
- [61] M. Naillon, R. Coursant, F. Besnier. “*Analysis of piezoelectric structures by a finite element method*”
Acta Electronica, Vol 25 pp. 341-362, (1983).
- [62] C. Negreira, H. Gomez, N. Perez, I. Nunez, J. Eiras. “*Lateral modes and diffracted field behavior in non periodical 1 – 3 piezocomposite transducers*”
IEEE Ultrasonics Symp. Vol 1 pp 950-953, (1998).
- [63] E. Nelli Silva “*Modelagem vibracional de transdutores de ultra-som piezoelctricos pelo metodo de elementos finitos*”
Tesis de Mestre em Engenharia. Universidade de Sao Paulo. (1993)
- [64] R. Pastore, A. Ballato, H. Cui “*Loss in piezoelectric ceramic resonators*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 935-938. (1999).
- [65] Ed. M. Prudenziati, “*Handbook of Sensors and Actuators/Thick Film Sensors*”, **Elsevier, NH, vol. 1, 1994.**
- [66] S. Pelamedu, A. Barnett, R. Dukkipati, N. Naganatan , “*Finite element approach to model and analyse piezoelectric actuators*” **American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal Communicated on Feb 1999.**
- [67] N. Perez, C. Negreira, H. Gomez, C. Bello. “*Piezocomposite array transducers optimization by breaking periodicity.*”
IEEE Ultrasonic Proceedings, Vol 2 pp 1081-1084, 1999.

- [68] D. Powell, J. Mould, G. Wojcic “*Dielectric and mechanical absorption mechanisms for time and frequency domain transducer modeling.*” **IEEE Ultrasonic Proceedings, Vol 1 pp 1-6, 1998.**
- [69] W. Qi, W. Cao “*Finite element study on random design of 2-2 composite transducers.*” **IEEE Ultrasonic Proceedings, pp 1011-1014, 1996.**
- [70] W. Qi, W. Cao “*Finite element analysis of periodic and random 2-2 piezocomposite transducers with finite dimensions.*” **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 44. N° 5. pp 1168-1171. (1997).**
- [71] W. Qi, W. Cao “*Finite element study on 1-D array transducer design.*” **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 47. N° 4. pp 949-955. (2000).**
- [72] D. Royer, E. Dieulessanint “*Optical detection of sub-angstrom transient mechanical displacements.*” **IEEE Ultrasonic Proceedings, pp 527-530, (1986).**
- [73] L. A. Santaló. “*Vectores y tensores con sus aplicaciones*”. **Editorial Universitaria de Buenos Aires 1961**
- [74] R. Schechter, K. Simmons, R. Mignogna “*Computational and experimental investigation of the fields generated by 1-3 piezocomposite transducer*” **Ultrasonics Vol. 39 pp 163-172. (2000).**
- [75] S. Sherrit, S. Leary, B. Dogin, Y. Bar Cohen “*Comparison of the Mason and KLM equivalent circuits for piezoelectric resonators in the thickness mode*”. **IEEE Ultrasonic Symposium. pp 921-926. 1999**
- [76] Y. Shui, X. Geng, Q. Zhang “*Theoretical modeling of resonant modes of composite ultrasonic transducers*”. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 42. N° 4. pp 766-773. (1995).**
- [77] W. A. Smith, A. A. Shaulov “*Tailoring the properties of composite piezoelectric materials for medical ultrasonic transducers*”. **IEEE Ultrasonic Symposium. pp 642-647. 1985**
- [78] W. A. Smith, A. A. Shaulov “*Composite piezoelectrics: basic research to a practical device*”. **Ferroelectrics 87. pp 309-320. 1988.**
- [79] W. A. Smith, “*The role of piezocomposites in ultrasonic transducers*” **IEEE Ultrasonic Symposium. pp 755-766. 1989**

- [80] W. Smith, A. Shaulov, B. Auld “*Design of piezocomposites for ultrasonic transducers*”
Ferroelectrics Vol 91. pp 155-162. (1989).
- [81] W. Smith, B. Auld “*Modeling 1-3 composite piezoelectric: thickness-mode oscillations*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 38. N° 1. pp 40-47. (1990).
- [82] W. A. Smith, “*The application of 1 – 3 piezocomposites in acoustic transducers*”.
IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics. pp 154-152 (1991)
- [83] W. A. Smith, “*Optimizing electromechanical coupling in piezocomposites using polymers with negative poisson’s ratio*”
IEEE Ultrasonic Symposium. pp 661-666. 1991
- [84] W. Smith “*Modeling 1-3 composite piezoelectrics: hydrostatic response*”
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. Vol 40. N° 1. pp 41-49. (1993).
- [85] Peter R. Stepanishen “*Pulsed transmit/receive response of ultrasonic piezoelectric transducers*”. **Journal of Acoustical Society of America. pp 1815-1827. June 1981.**
- [86] Y. Wang, B.A. Auld, “*Acoustic wave propagation in one-dimensional periodic composites*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 637-641. (1985).
- [87] J. Wang, D. Ostergaard, “*A finite element electric circuit coupled simulation method for piezoelectric transducer*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 1105-1117. (1999).
- [88] K. Yamada, J. Sakamura, K. Nakamura “*Equivalent network analysis of piezoelectrically-graded broadband ultrasound transducers*”
IEEE Ultrasonics Symp. pp 1119-1123. (1999).
- [89] Q. Zang, W. Cao, H. Wang, L. Cross “*Characterization of the performance of 1-3 type piezocomposites for low frequency applications*”. **Journal of Acoustical Society of America. pp 1403-1409.(1993).**
- [90] “*HP 4194A Impedance/Gain-Phase Analyzer*”.
Hewlett Packard. Part Number: 04194-90001.