

Simetrías Asintóticas en la Electrodinámica de Espinores sin Masa

Tesis de Maestría en Física

Autor: Lic. Adrián Agriela

Orientador: Dr. Miguel Campiglia



Agradecimientos

Quiero Agradecerle a mi tutor Dr. Miguel Campiglia por brindarme su apoyo, guía y conocimiento durante todo el proceso de mi maestría. A todos los integrantes del tribunal: Dres. Michael Reisenberger, Alessandro Codello, Guzmán Hernández, Santiago Villaba y Aureliano Skirzewski. Y un agradecimiento muy especial a toda mi familia por el apoyo constante que me brindaron con entendimiento y mucho afecto.

Índice

1. Introducción	6
2. Preliminares	9
2.1. Elementos de la Teoría Clásica de Campos	9
2.1.1. Teorema de Noether	11
2.2. QED de Espinores sin masa	12
2.2.1. Corrientes Conservadas y Simetrías	14
2.3. Matriz S	17
2.3.1. Reglas de Feynman para QED	19
2.3.2. Ejemplo	22
2.3.3. Simetrías de la Matriz S	23
3. Cargas y Simetrías Asintóticas	24
3.1. Diagrama de Penrose del Espacio de Minkowski	24
3.2. Coordenadas Nulas	26
3.3. Campos Asintóticos	28
3.4. Corrientes y Cargas Asintóticas	29
3.5. Espacio de Fase Radiativo y Simetrías Asintóticas	32
3.6. Espacio de Fock Asintótico	36
4. Identidad de Ward para Q_λ y Teorema Soft para Fotones	40
4.1. Cargas Soft y Hard	40
4.2. Identidad de Ward para Q_λ	43
4.3. Teorema Soft para Fotones	44
4.4. Equivalencia entre la Identidad de Ward y el Teorema Soft	50
5. Electrón y Positrón Soft	51
5.1. Teorema Soft para Electrones y Positrones	51
5.2. Carga del Electrón y Positrón Soft	61
5.3. Simetría Asintótica	66

5.4. Álgebra de Cargas	67
6. Conclusiones	69
A. Apéndice I	71
A.1. Espinor Asintótico	71
A.2. Corrientes Conservadas y Simetrías de la Densidad Lagrangiana	75
A.3. Cargas Asintóticas a partir de la forma Simpléctica	80
A.4. Cargas Asintóticas a partir de las Corrientes Conservadas	88
B. Apéndice II	91
B.1. Demostración de la Identidad de Ward para Q_λ	91
B.2. Equivalencia entre Identidad de Ward y Teorema Soft	97
B.3. Ejemplo de Teorema Soft para Fotones	99
C. Apéndice III	102
C.1. Simetría Asintótica	102
C.2. Álgebra de Cargas	104

Resumen

En los últimos años se ha demostrado que ciertas propiedades de las amplitudes de dispersión, conocidas como teoremas soft, pueden entenderse en términos de simetrías que actúan sobre estados asintóticos. Siguiendo esta línea de investigación, en esta tesis estudiamos los teoremas soft de la electrodinámica con espinores sin masa y discutimos las simetrías correspondientes. A pesar de la relevancia de esta teoría, hasta ahora no se había realizado un análisis completo de sus simetrías asintóticas. En particular, presentamos por primera vez las cargas asintóticas asociadas a los electrones soft y realizamos un primer análisis de las simetrías que generan.

1. Introducción

En los últimos años los trabajos realizados por Strominger [1,2], relacionan los teoremas soft (o factorización infrarroja) con las simetrías asintóticas de la teoría.

Los teoremas soft describen las propiedades de la amplitud de dispersión en donde participan partículas cuya energía tiende a cero que se denominan como partículas soft. En la realidad cuando hablamos de que la energía tiende a cero, quiere decir que la energía de dichas partículas es mucho menor que la energía de las demás que participan del proceso de interacción. Los primeros trabajos sobre esto fueron en QED (Electrodinámica Cuántica, por sus siglas en inglés) en el año 1937 por Bloch y Nordsieck [3], luego esta línea de trabajo se continuo desarrollando por Low y otros [4–8], a posterior Weinberg introduce un teorema soft para gravedad en 1958 [9]. Por otro lado las simetrías asintóticas surgen al realizar un análisis en el borde o región asintótica del espacio tiempo, con el fin de determinar las transformaciones que generan cantidades conservadas. Los primeros trabajos sobre esto fueron los de Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs [10,11] que habían buscado recuperar el grupo de Poincaré como simetría asintótica en la relatividad general. También en los últimos años se han encontrado simetrías del mismo tipo en QED y en teorías no abelianas [1,12,13,15–24].

La conexión entre los teoremas soft y las simetrías asintóticas, se da por medio de una relación matemática que denominamos como identidad de Ward. Estas son identidades de la matriz de dispersión que expresan la conservación de las cargas asociadas a las simetrías de la región asintótica. La conexión mencionada se ha trabajado en diferentes teorías. Siguiendo esta línea de investigación, en este trabajo nos centramos en mostrar la relación entre los teoremas soft y las simetrías asintóticas para QED con espinores sin masa, es importante mencionar que dada la relevancia de esta teoría, hasta el momento no se ha realizado un análisis completo de sus simetrías asintóticas.

En esta tesis re-derivamos la relación mencionada en el caso de fotones soft, como en el trabajo de Strominger [36]. Asimismo como trabajamos con espinores no masivos, esto nos permite derivar los teoremas soft para electrones y positrones.

Para determinar la simetría asintótica asociada a los nuevos teoremas soft se implementa la identidad de Ward a partir de los mismos con el fin de obtener las cargas conservadas. Una vez que se obtienen las cargas se derivan las transformaciones que generan las simetrías. La tesis tiene la siguiente estructura. En la sección 2 introducimos conceptos fundamentales de QFT (Teoría Cuántica de Campos, por sus siglas en inglés) para tener un buen entendimiento del trabajo. Se introduce la teoría con la que trabajamos y además presentamos desde un punto de vista clásico las simetrías y corrientes conservadas de la misma. Por otra parte presentamos las reglas de Feynman, herramienta muy importante para determinar las amplitudes de dispersión. El análisis de los teoremas soft se basa en estas reglas.

En la sección 3 se determinan las cargas en la región asintótica. Para conseguir las mismas, es necesario realizar un análisis asintótico. Para esto primero consideramos una versión compacta del espacio tiempo de Minkowski (o diagrama de Penrose). En donde alcanzar el infinito para esta versión compacta es estar en una superficie tridimensional que denominamos como infinito nulo. Luego introducimos las coordenadas y el límite en que se alcanza el infinito nulo. A partir de como decaen los campos podemos establecer las cargas ya sea a partir del comportamiento asintótico de las corrientes o por medio del formalismo canónico. Por otra parte presentamos el espacio de Fock asintótico donde introducimos como son los operadores de creación y aniquilación.

En la siguiente sección 4 reproducimos el trabajo de Strominger [36]. Primero introducimos la existencia de partículas soft y hard en la carga Q_λ , luego buscamos la identidad de Ward de esta carga. En la sub-sección 4.4 mostramos la equivalencia que existe entre la identidad de Ward y el teorema soft para fotones. Por lo tanto la transformación de gauge asintótica es una simetría de la matriz de dispersión. Con esto podemos decir que el teorema soft para fotones se puede entender a partir de la simetría asintótica de gauge. En el apéndice B se muestra el cálculo detallado de la equivalencia.

Por último en la sección 5 mostramos que al estar trabajando en QED para espinores sin masa nos permite derivar el teorema soft para electrones y positrones. Luego establecemos la carga conservada a partir de los teoremas soft por medio de las identidades de Ward.

Por medio de estas determinamos las transformaciones que generan las simetrías asintóticas a través del formalismo canónico. Por último buscamos el álgebra de cargas asociada al conjunto de cargas que surgen a partir de las diferentes simetrías.

En la sección 6 , llegamos a la conclusión sobre el trabajo realizado y se hacen comentarios sobre cuestiones a trabajar a futuro. Luego en la tesis se pueden encontrar tres apéndices. En el apéndice A se presenta un cálculo sobre el espinor asintótico, luego mostramos las simetrías y corrientes conservadas de la teoría. Por último se hacen en detalle los cálculos para determinar las cargas asintóticas ya sea a partir de la forma simpléctica o por medio de las corrientes.

En el apéndice B se muestran en detalle las operaciones para determinar la identidad de Ward para el caso de Q_λ , asimismo se muestra la equivalencia entre dicha identidad y el teorema soft para fotones. También presentamos un ejemplo simple para el un buen entendimiento del teorema soft para fotones.

Por último en el apéndice C se muestra el cómputo detallado de las simetrías asintóticas asociadas al electrón y positrón soft. También se exponen los algunos cálculos del álgebra de cargas.

2. Preliminares

Presentamos conceptos de la teoría clásica de campos que van a permitir generar un entendimiento mayor de este trabajo. Por otra parte se hace una breve introducción de las propiedades y elementos de la QED para espinores sin masa. A partir del lagrangiano de la teoría buscamos la corriente potencial simpléctica, por medio de este elemento determinamos las corrientes conservadas a partir del teorema de Noether. Mostramos que las transformaciones de gauge locales, las del grupo de Poincaré y la rotación global axial son simetrías y además determinamos las corrientes conservadas. Luego se presenta la matriz S (matriz de dispersión) y su concepto de simetría, además presentamos las reglas de Feynman para QED.

2.1. Elementos de la Teoría Clásica de Campos

En esta sub-sección presentamos conceptos de la teoría clásica de campos necesarios para el desarrollo de QED siguiendo la notación de [26,27]. En la mecánica clásica la acción S es una cantidad muy importante ya que a partir de ella podemos describir la dinámica de un sistema y esta se define como la integral en el tiempo del lagrangiano L . En una teoría de campos local la acción se puede escribir como la integral en el espacio de la densidad lagrangiana \mathcal{L} , la cual es una función de $\phi^a(x)$ y $\partial_\mu\phi^a(x)$, donde $\phi^a(x)$ puede ser $\mathcal{A}_\mu(x), \Psi(x), \dots$

$$S = \int \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu\phi^a(x))d^4x. \quad (2.1)$$

A partir de S podemos obtener las ecuaciones del movimiento que describen la dinámica de los campos. Para obtenerlas debemos primero plantear la variación de δS para una variación infinitesimal de los campos $\phi^a(x)$ [26,27]. La variación de S para un $\delta\phi^a(x)$ es

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a(x)}\delta\phi^a(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} \right) \delta\phi^a(x) + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} \delta\phi^a(x) \right) \right]. \quad (2.2)$$

El principio de acción estacionaria pide que $\delta S = 0$ y cuando $\delta\phi^a(x)$ se anula en los bordes de la región de integración obtenemos las ecuaciones del movimiento de los campos que se denominan como las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$E(\phi^a(x)) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a(x))} \right) = 0. \quad (2.3)$$

En general en las teorías de campos encontramos que la densidad lagrangiana se puede descomponer en un término que corresponde a la parte libre (no interactuante) más otro término que involucran interacciones [27]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.4)$$

En la mecánica clásica podemos utilizar otra cantidad para describir la dinámica del sistema y ésta es el hamiltoniano que es la transformada de Legendre del lagrangiano. En el caso de campos tenemos una densidad hamiltoniana \mathcal{H} que es una función de la variable de momento conjugado $\pi^a(x)$ el cual se define como

$$\pi^a(x) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^a(x)} \quad (2.5)$$

donde se define el hamiltoniano H como

$$H = \int \mathcal{H}d^3x = \int d^3x \left[\pi^a(x)\dot{\phi}^a(x) - \mathcal{L} \right]. \quad (2.6)$$

siendo \mathcal{H} la densidad hamiltoniana. De igual manera que \mathcal{L} se puede escribir a \mathcal{H} como la suma de un término libre \mathcal{H}_{libre} más otro de interacción \mathcal{H}_{int} . Si el \mathcal{L}_{int} no contiene a $\dot{\phi}^a(x)$ y solo involucra a $\phi^a(x)$ tenemos que el hamiltoniano de interacción no contiene a $\pi^a(x)$ con esto se llega a que $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$. El hamiltoniano de interacción es importante ya que a partir de él se pueden describir los procesos de dispersión [26, 27].

2.1.1. Teorema de Noether

Se puede mostrar la relación entre las simetrías de una teoría y las corrientes conservadas por medio del Teorema de Noether [28, 31]. Definimos la simetría de una teoría como las variaciones infinitesimales de los campos que dejan invariante la acción a menos de un término de superficie, que no afecta a las ecuaciones del movimiento $E(\phi^a(x))$ para un conjunto de campos $\phi^a(x)$ [26].

Consideremos en particular una transformación infinitesimal $\delta\phi^a(x)$ de tal forma que la acción es invariante a menos de un término de borde

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu K^\mu(x) \quad (2.7)$$

siendo $K^\mu(x)$ un vector definido en el espacio-tiempo. Esto es equivalente a que la densidad lagrangiana solo puede variar por termino de una divergencia

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(x) \quad (2.8)$$

El teorema de Noether permite construir una corriente donde su divergencia es proporcional a $E(\phi^a(x))$ y la misma se conserva si $\phi^a(x)$ es solución de las ecuaciones del movimiento. Primero notamos que el último termino de (2.2)

$$\delta S = \int d^4x [-E(\phi^a(x))\delta\phi^a(x) + \partial_\mu\theta^\mu(\phi^a(x), \delta\phi^a(x))] \quad (2.9)$$

describe la derivada total de la corriente potencial simpléctica $\theta^\mu(\phi^a(x), \delta\phi^a(x))$, que representa una 1-forma [31]. Si usamos la simetría de transformación $\delta\phi^a(x)$, encontramos una ley de conservación

$$\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = E(\phi^a(x))\delta\phi^a(x) \stackrel{w}{=} 0 \quad \mathcal{J}^\mu = \theta^\mu(\phi^a(x), \delta\phi^a(x)) - K^\mu(x) \quad (2.10)$$

donde $\stackrel{w}{=} 0$ implica que $\phi^a(x)$ es solución a las ecuaciones del movimiento [32]. Entonces concluimos que para cada simetría $\delta\phi^a$ de la teoría vamos a tener una corriente conservada si se satisfacen las ecuaciones del movimiento.

Las cargas conservadas las obtenemos a partir de

$$Q = \int_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}_\mu \mathcal{J}^\mu \quad (2.11)$$

donde \mathcal{E} es una superficie tridimensional en la cual integramos la corriente. En la sección 3 determinamos las cargas asintóticas, por lo que \mathcal{E} corresponde a una superficie tridimensional que denominamos como infinito nulo, \mathcal{I} , en la cual integramos las componentes relevantes de las corrientes.

2.2. QED de Espinores sin masa

La QED es una teoría de gauge abeliana que se describe por medio de las variables de campo que son el campo de gauge \mathcal{A}_μ y el spinor de Dirac Ψ [27, 29]. En esta tesis vamos a tratar la QED para espinores sin masa en el gauge de Lorenz. La densidad lagrangiana en este caso es la siguiente

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi \right) \quad (2.12)$$

siendo $\sqrt{-\eta}$ la raíz cuadrada del determinante de la métrica del espacio-tiempo de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ o también denominado como elemento volumétrico de dicho espacio, además consideramos a la métrica con la signatura $-+++$. Donde $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ es el tensor de Maxwell, con $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ y además $D_\nu = \partial_\nu + ie\mathcal{A}_\nu$ para el caso de Ψ , con $\nu = 0, 1, 2, 3$. En la situación de $\bar{\Psi}$ tenemos que $D_\nu = \partial_\nu - ie\mathcal{A}_\nu$. Siendo γ^μ las matrices de Dirac en la base de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

donde los 1 que aparecen en γ^0 corresponden a la matriz identidad con dimensión 2×2 , mientras que σ^j representan las matrices de Pauli, por lo que γ^μ posee dimensión 4×4 .

Las γ^μ cumplen las siguientes relaciones de anti-conmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

donde además se define a $\gamma^5 := \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ [26]. El último término de la densidad lagrangiana describe el acoplamiento de la electrodinámica libre con un electrón de tal forma que este sea invariante bajo transformaciones de gauge $U(1)$. Además este último representa el hamiltoniano de interacción \mathcal{H}_{int} siendo este

$$\mathcal{H}_{int} = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\Psi. \quad (2.15)$$

A partir de (2.3) determinamos las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} \partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} - e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi &= \partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} - J^\nu = 0 \\ i\not{D}\Psi &= 0 \\ i\bar{\Psi}\overleftarrow{\not{D}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ y $J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ la densidad de corriente eléctrica. Para desarrollar el análisis cuántico que deseamos hacer en QED, debemos presentar como es la forma cuantizada de los campos. La cuantización de estos últimos está relacionado con el tipo de partícula que pueden ser bosones o fermiones. En nuestro caso \mathcal{A}_μ representa un fotón que es un bosón, mientras que Ψ y $\bar{\Psi}$ representan fermiones (electrones) y anti-fermiones (positrones) respectivamente. El campo de gauge \mathcal{A}_μ cuantizado es el siguiente [26]

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \sum_s \int d\tilde{p} (a_s(p)\varepsilon_{\mu,s}^*(p)e^{ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)\varepsilon_{\mu,s}(p)e^{-ip\cdot x}) \quad (2.17)$$

con

$$d\tilde{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \quad (2.18)$$

siendo $\varepsilon_{\mu,s}(p)$ los vectores de polarización, $s := \pm$ la helicidad de los fotones y $a_s(p)$, $a_s^\dagger(p)$ son los operadores de creación y aniquilación de fotones. Estos últimos cumplen la siguiente relación de conmutación [26]

$$[a_s(p), a_{s'}^\dagger(p')] = 2|p|(2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(p - p'). \quad (2.19)$$

Por otra parte los espinores Ψ y $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_s \int d\tilde{p} (b_s(p) u_s(p) e^{ip \cdot x} + c_s^\dagger(p) v_s(p) e^{-ip \cdot x}) \\ \bar{\Psi}(x) &= \sum_s \int d\tilde{p} (c_s(p) \bar{v}_s(p) e^{ip \cdot x} + b_s^\dagger(p) \bar{u}_s(p) e^{-ip \cdot x}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

con $u_s(p) e^{ip \cdot x}$ y $v_s(p) e^{-ip \cdot x}$ son las soluciones de onda plana a la ecuación de Dirac de espinores sin masa, donde s representa la helicidad de electrones y positrones. A su vez estos constituyen la base de espinores sin masa para cada momento p^μ [26]. Los operadores $b_s(p)$, $b_s^\dagger(p)$ crean y aniquilan electrones, mientras que $c_s(p)$, $c_s^\dagger(p)$ cumplen la misma función pero para positrones. Donde satisfacen las siguientes relaciones de anti-conmutación [27]

$$[b_s(p), b_{s'}^\dagger(p')] = [c_s(p), c_{s'}^\dagger(p')] = 2|p|(2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(p - p') \quad (2.21)$$

2.2.1. Corrientes Conservadas y Simetrías

La densidad lagrangiana (2.12) es invariante bajo la transformación de gauge local [27]

$$\delta_\Lambda \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad \delta_\Lambda \Psi = -ie\Lambda \Psi \quad (2.22)$$

donde se incluye el caso particular de $\Lambda = 1$ que corresponde a la simetría global U(1). También es invariante bajo la rotación global axial [27]

$$\delta_5 \mathcal{A}_\mu = 0 \quad \delta_5 \Psi = i\gamma^5 \Psi. \quad (2.23)$$

Por otra parte la densidad lagrangiana es invariante por un factor de una derivada total bajo las transformaciones del grupo de Poincaré que están constituidas por las traslaciones en el espacio-tiempo y por las transformaciones de Lorentz [26]. Los campos transforman bajo traslaciones de la siguiente forma [26]

$$\delta_\epsilon \mathcal{A}_\nu = \epsilon^\gamma \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu \qquad \delta_\epsilon \Psi = \epsilon^\gamma \partial_\gamma \Psi \qquad (2.24)$$

para las transformaciones de Lorentz tenemos que [26]

$$\delta_\omega \mathcal{A}_\nu = \omega_\nu{}^\gamma \mathcal{A}_\gamma + \omega_\delta{}^\gamma x^\delta \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu \qquad \delta_\omega \Psi = \left(\omega_\delta{}^\gamma x^\delta \partial_\gamma - \frac{1}{2} \omega_{\gamma\delta} S^{\gamma\delta} \right) \Psi \qquad (2.25)$$

tomando el campo vectorial $\xi^\nu = \omega_\gamma{}^\nu x^\gamma$ y usando la definición de derivada de Lie para covectores $(\mathcal{L}_X w)_j = w_{i,j} X^i + w_i X^i{}_{,j}$ con ${}_{,j} = \partial_j$ [43] tenemos que las transformaciones de Lorentz adquieren la siguiente forma

$$\delta_\xi \mathcal{A}_\nu = \mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\nu \qquad \delta_\xi \Psi = \left(\xi^\gamma \partial_\gamma + \frac{1}{2} \partial_\delta \xi_\gamma S^{\gamma\delta} \right) \Psi \qquad (2.26)$$

siendo $S^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ el álgebra de Lorentz para la representación de espinores [26]. Aplicando el teorema de Noether, las simetrías de la densidad lagrangiana dan a lugar a corrientes conservadas. Es decir la rotación global axial, las transformaciones de gauge locales y las del grupo de Poincaré van a tener asociadas sus correspondientes corrientes conservadas.

Para obtener las mismas ya sabemos que $\delta \mathcal{L} = E(\phi) \delta \phi + \partial_\mu \theta^\mu(\delta)$, para la densidad lagrangiana (2.12) tenemos que la misma se comporta bajo transformaciones de δA_μ y $\delta \Psi$ como

$$\delta \mathcal{L} = \sqrt{-\eta} [(\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi) \delta \mathcal{A}_\nu + i \delta \bar{\Psi} \overleftarrow{\mathcal{D}} \Psi - i \bar{\Psi} \overleftarrow{\mathcal{D}} \delta \Psi + \partial_\mu (-\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta \mathcal{A}_\nu + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Psi)] \qquad (2.27)$$

los primeros tres términos de la variación representan las ecuaciones del movimiento de los campos \mathcal{A}_ν , Ψ y $\bar{\Psi}$. El último término representa la derivada total de la corriente potencial simpléctica θ^μ

$$\theta^\mu(\delta) = \sqrt{-\eta} (-\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta \mathcal{A}_\nu + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Psi) \qquad (2.28)$$

al imponer que se cumplen las ecuaciones del movimiento nos queda que $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \theta^\mu$. En los casos de las transformaciones de gauge locales y la rotación global axial $\delta \mathcal{L} = 0$

de forma tal que la corriente conservada se obtiene directamente evaluando $\theta^\mu(\delta)$ por las transformaciones que corresponden [31]. Para el caso de la rotación global axial la corriente conservada es

$$\mathcal{J}_5^\mu = \theta^\mu(\delta_5) = -\sqrt{-\eta}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi. \quad (2.29)$$

mientras que para las transformaciones de gauge locales tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Lambda^\mu = \theta^\mu(\delta_\Lambda) &= \sqrt{-\eta}(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda + e\Lambda\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = \sqrt{-\eta}(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda + \Lambda J^\mu) = \\ &= -\sqrt{-\eta}\partial_\nu(\Lambda\mathcal{F}^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde usamos que $-\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = J^\nu$ [27]. Para el caso de las transformaciones del grupo de Poincaré tenemos que la densidad lagrangiana va a variar por un factor de una derivada total con $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$. En este caso la corriente conservada es de la forma $\mathcal{J}^\mu = \theta^\mu(\delta) - K^\mu$ [31]. Para traslaciones la densidad lagrangiana va a variar como $\delta_\epsilon\mathcal{L} = \partial_\mu(\epsilon^\mu\mathcal{L})$ y para las transformaciones de Lorentz $\delta_\omega\mathcal{L} = \partial_\mu(\omega_\delta{}^\mu x^\delta\mathcal{L})$. La corriente para el caso de las traslaciones es

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta} [(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\epsilon^\gamma\partial_\gamma\mathcal{A}_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\epsilon^\gamma\partial_\gamma\Psi)] - \epsilon^\mu\mathcal{L}. \quad (2.31)$$

La corriente conservada que surge de las transformaciones de Lorentz es

$$\mathcal{J}_\omega^\mu = \sqrt{-\eta} [-\mathcal{F}^{\mu\nu}(\omega_\nu{}^\gamma\mathcal{A}_\gamma + \omega_\delta{}^\gamma x^\delta\partial_\gamma\mathcal{A}_\nu) + i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\omega_\delta{}^\gamma x^\delta\partial_\gamma - \omega_{\gamma\delta}S^{\gamma\delta})\Psi] - \omega_\delta{}^\mu x^\delta\mathcal{L}. \quad (2.32)$$

La corriente asociada al grupo de Poincaré va a estar dada por la suma de \mathcal{J}_ω^μ y \mathcal{J}_ϵ^μ . Ambas corrientes se pueden expresar de forma compacta por medio de un tensor simétrico, llegando a que

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}\epsilon_\gamma T^{\mu\gamma} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{J}_\omega^\mu = \sqrt{-\eta} \left[\omega_{\delta\gamma} x^\delta T^{\mu\gamma} + \frac{\bar{\Psi}\omega_{\delta\gamma}\gamma^\mu S^{\delta\gamma}\Psi}{2} \right] \quad (2.34)$$

siendo $T^{\mu\gamma}$ el tensor simétrico de energía momento [26]. Por más detalles sobre las operaciones ver el apéndice A.2 .

2.3. Matriz S

La matriz S es un objeto que permite conectar estados asintóticos (que no interactúan entre si) iniciales y finales por medio de interacciones. Por lo tanto este objeto contiene toda información sobre los procesos de dispersión posibles que se puedan generar en la teoría que se está trabajando. A partir de él se pueden determinar las probabilidades de que ocurran los procesos de dispersión, tasas de decaimiento, funciones de correlación y secciones eficaces. Para construir la matriz S primero debemos preparar los estados asintóticos iniciales y finales, que en este caso van a ser estados definidos en los tiempos $T = \pm\infty$ respectivamente, de forma tal que estos se encuentran en la representación de Heisenberg [26].

De cierto modo es necesario generar una traslación temporal que nos permita realizar la conexión entre los estados y producir la interacción. Por lo tanto la traslación temporal del estado $|in\rangle$ es

$$|in'\rangle = e^{-iHT}|in\rangle \quad (2.35)$$

siendo este un estado de partículas libres, si se hace el límite $T \rightarrow -\infty$. De igual manera lo hacemos para el estado $|out\rangle$, donde la traslación temporal es

$$|out'\rangle = e^{iHT}|out\rangle \quad (2.36)$$

donde este estado se comporta como uno de la teoría libre cuando $T \rightarrow +\infty$. La amplitud de dispersión entre los estados (2.35) y (2.36) es

$$\mathcal{A} := \langle out'|in'\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle out|e^{-2iHT}|in\rangle \quad (2.37)$$

donde la matriz de dispersión S la definimos como [26]

$$S := \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-2iHT} \quad (2.38)$$

En general el hamiltoniano como ya mencionamos, se puede escribir como la suma de un término libre y uno de interacción, siendo $H = H_o + H_{int}$.

La matriz S en la representación de interacción esta dada por

$$S = \mathcal{T} \left(e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t) dt} \right) \quad (2.39)$$

donde H_I es el hamiltoniano de interacción en la representación de interacción. Como necesitamos una teoría covariante entonces

$$S = \mathcal{T} \left(e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{int}(x) d^3x} \right). \quad (2.40)$$

Siendo \mathcal{T} el operador de tiempo ordenado que actúa en los operadores de la siguiente manera

$$\mathcal{T} = \begin{cases} O_1(t_1)O_2(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ O_2(t_2)O_1(t_1) & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases}. \quad (2.41)$$

Donde reescribimos a \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = \langle out | \mathcal{T} \left(e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{int}(x) d^3x} \right) | in \rangle \quad (2.42)$$

En particular la matriz de dispersión se puede descomponer de la forma $S = 1 + iT$ donde 1 es la matriz identidad y representa la situación donde las partículas no interactúan, lo que representa un resultado trivial, por lo que vamos a estar interesados en el aporte de iT [26]. Por otro lado la amplitud de iT es

$$\langle out | iT | in \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_k p_{k,in} - \sum_j p_{j,out} \right) i \mathcal{M}(\Pi_k p_{k,in} \rightarrow \Pi_j p_{j,out}) \quad (2.43)$$

donde $\mathcal{M}(\Pi_k p_{k,in} \rightarrow \Pi_j p_{j,out})$ es el análogo a la amplitud de dispersión para una partícula. Para determinar la amplitud de dispersión \mathcal{A} primero realizamos una expansión (2.40), luego al evaluar cada termino con los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$ vamos a encontrar que algunos términos van a contribuir en la amplitud de dispersión. Este cálculo también se puede realizar por medio de los diagramas de Feynman [26, 27].

2.3.1. Reglas de Feynman para QED

Los diagramas de Feynman fueron introducidos por Richard Feynman a mitad de siglo veinte y son una herramienta fundamental para reducir los cálculos en QFT [30]. Por medio de los diagramas se describen los procesos de dispersión que experimentan las partículas. Estos son útiles para el cálculo de probabilidades de que ocurran los procesos de dispersión, funciones de correlación, secciones eficaces y tasas de decaimientos [26,27]. En esta sección presentamos los diagramas de Feynman para QED y las reglas para determinar amplitudes de dispersión para diferentes procesos posibles que pueden darse en esta teoría. Como sabemos QED se describe por medio de fotones, electrones y positrones. Los fotones en los diagramas de Feynman se representan por medio de líneas onduladas como se observan en las figuras 1 y 2.

En el caso de estar en una línea externa puede representar a una de las partículas entrantes o salientes que participan de la dispersión, en la amplitud se lo expresa por medio de $\epsilon_{\mu,s}(p)$ cuando el fotón es entrante o por un $\epsilon_{\mu,s}^*(p)$ cuando es saliente, estos corresponden a los vectores de polarización del fotón. Mientras que s indica el sentido de la polarización [26,27].

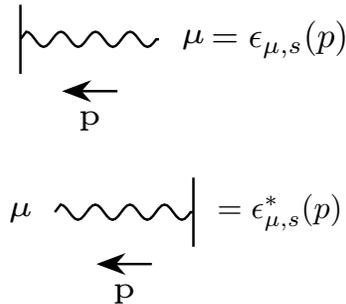


Figura 1: Descripción de los fotones cuando se encuentran en una línea externa en el proceso de dispersión, siendo $\epsilon_{\mu,s}(p)$ un fotón saliente mientras que $\epsilon_{\mu,s}^*(p)$ es un fotón entrante. Imagen tomada de [26].

Cuando en el diagrama de un proceso, el fotón está en una línea interna en la amplitud se sustituye por un propagador de Feynman para un fotón.

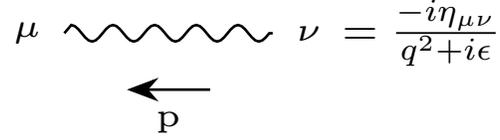
$$\mu \text{ ~~~~~ } \nu = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$$


Figura 2: Propagador de Feynman de un fotón. Imagen tomada de [26].

Los fermiones y anti-fermiones se describen en los diagramas por medio de líneas llenas como se observan en las figuras 3 y 4 . Cuando estos están en una línea externa al igual que el fotón participan del procesos y pueden ser una de las partículas entrantes o salientes. Cuando se tiene un fermión entrante la amplitud se evalúa por medio de $u_s(p)$ y cuando es saliente por medio de $\bar{u}_s(p)$. Los anti-fermiones se evalúan por medio de $v_s(p)$ y $\bar{v}_s(p)$. Las cantidades $u_s(p)$, $\bar{u}_s(p)$, $v_s(p)$, $\bar{v}_s(p)$ corresponden a las soluciones de onda plana de la ecuación de Dirac para Ψ , $\bar{\Psi}$. En los diagramas, estos se representan por medio de líneas llenas, para diferenciarlos se impone que el momento del anti-fermión apunte en el sentido opuesto a la flecha que indica si es entrante o saliente [26] [27].

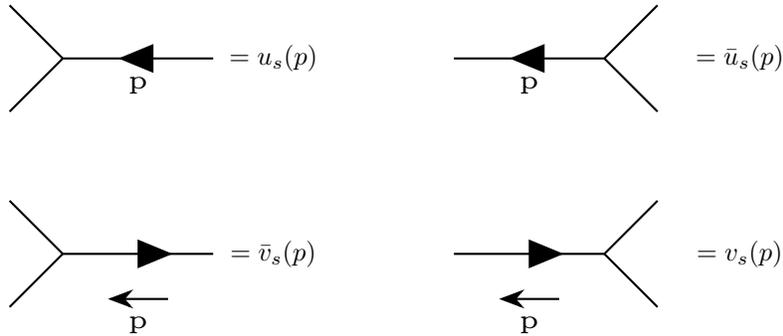


Figura 3: En la amplitud de dispersión los fermiones se evalúan por medio de $u_s(p)$ y los salientes por $\bar{u}_s(p)$. Mientras que los anti-fermiones por $v_s(p)$ y $\bar{v}_s(p)$ respectivamente. Imagen tomada de [26].

si tenemos un fermión en una línea interna en la amplitud debemos sustituir por un propagador de Feynman para fermiones.

$$\text{---}\blacktriangleright\text{---} = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

Figura 4: Propagador de Feynman de un fermión. Imagen tomada de [26].

Al estar en QED, tenemos interacción de fotones con electrones (fermiones) y positrones (anti-fermiones) [26] [27], cuando se tiene un vértice en la amplitud de dispersión se sustituye por la cantidad $-ie\gamma^\mu$.

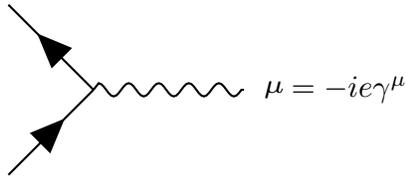


Figura 5: Sustituimos en la amplitud de dispersión por esta cantidad $-ie\gamma^\mu$ cuando nos encontramos con un fotón en el vértice. Imagen tomada de [26].

Muy importante en cada uno de los vértices se debe de imponer la conservación del momento. Para cada loop de momento indeterminado k se debe integrar por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{2.44}$$

También se debe tomar en cuenta la regla de signo. Esta establece que por cada intercambio de fermiones externos idénticos y por cada loop de este tipo de partículas se debe agregar un factor de -1 a la amplitud [27] .

2.3.2. Ejemplo

Consideremos un proceso de dispersión como ejemplo para entender como funcionan los diagramas de Feynman. Tomemos un proceso de dispersión donde participan electrones sin masa y fotones como se observan en la figura 6 .

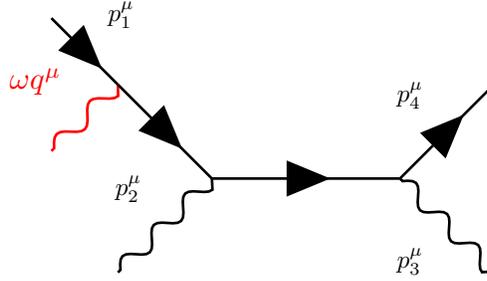


Figura 6: Proceso de dispersión donde participan 2 electrones y 3 fotones.

Mas adelante este tipo de proceso va a estar relacionado con un teorema que se presenta en la sección 4 . Para determinar \mathcal{A} aplicamos las reglas que presentamos y recorremos el diagrama de derecha a izquierda. Primero tenemos un fermión(electrón) saliente por lo que en la amplitud según las reglas va un termino de $\bar{u}_s(p_4)$. A la derecha de este va multiplicado por el termino de un vértice $-ie\gamma^\mu$, luego por la polarización del fotón saliente ϵ_μ^* seguido del propagador de un fermión con momento $p_3 + p_4$ que surge de la conservación del momento en el vértice. Nos encontramos con otro vértice por lo que tenemos otro termino de la forma $-ie\gamma^\delta$ con un fotón entrante de polarización ϵ_ν^* . Hay otro propagador entre el vértice y el fotón saliente con momento $p_1 - \omega q$, llegando a otro vértice $-ie\gamma^\delta$. Por último tenemos el fotón saliente con polarización ϵ_δ seguido del electrón entrante $u(p_1)$, donde la amplitud de dispersión es

$$\mathcal{A} = -ie^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \epsilon_\nu^*(p_3) \frac{(p_4 + p_3)}{(p_4 + p_3)^2} \gamma^\delta \epsilon_\delta(p_2) \frac{(p_1 - \omega q)}{(p_1 - \omega q)^2} \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(\omega q) u(p_1) \quad (2.45)$$

2.3.3. Simetrías de la Matriz S

En el marco de la matriz S, las leyes de conservación del teorema de Noether toman la forma de 2.46 , donde O es operador asociado a la cantidad conservada y generador de la simetría

$$OS = SO \quad (2.46)$$

es decir que conmutan con la matriz S. En particular si consideramos estados asintóticos $|in \rangle$ y $|out \rangle$ entonces la definición de simetría la podemos extender a la siguiente [36]

$$\langle out|[O, S]|in \rangle = 0 \text{ o } \langle out|O^{out}S - SO^{in}|in \rangle = 0. \quad (2.47)$$

Como ejemplo se puede ver de forma directa que la energía es una cantidad conservada, si consideramos el operador Hamiltoniano H tenemos que

$$\langle out|H^{out}S - SH^{in}|in \rangle = 0 \rightarrow E^{out} \langle out|S|in \rangle = E^{in} \langle out|S|in \rangle. \quad (2.48)$$

Esto conlleva a que la energía se conserve $E^{out} = E^{in}$. En general, si consideramos la carga como un operador tenemos que la conservación se expresa como

$$\langle out|Q^{out}S - SQ^{in}|in \rangle = 0. \quad (2.49)$$

A esta ecuación la denominamos como identidad de Ward. Notar que esta definición de identidad de Ward difiere de la usada en teoría de campos ¹. Esta ecuación representa una parte muy importante de este trabajo ya que es la relación matemática que une las simetrías asintóticas y los teoremas soft [36].

¹Notar que el hecho de que la amplitud de dispersión de fotones longitudinales es cero es un ejemplo de "identidad de Ward" en el sentido usual [26].

3. Cargas y Simetrías Asintóticas

Como estamos interesados en realizar un análisis asintótico de la teoría en esta sección introducimos la transformación de coordenadas que nos fija la dirección y límite donde se alcanza la región asintótica que en este caso la denominamos como infinito nulo. Para visualizar como es el comportamiento del espacio tiempo en estas nuevas coordenadas introducimos los diagramas de Penrose. Una vez establecida la dirección y el límite obtenemos los campos y cargas en el infinito nulo. Con los campos asintóticos determinamos el espacio de fase radiativo que luego nos lleva al espacio de Fock asintótico que lo determinamos a partir de la transformada de Fourier de los campos asintóticos. El cual a partir de estos últimos definimos los operadores de creación y aniquilación. Además mostramos que relación deben cumplir los operadores del espacio de Fock con los operadores del espacio de Fock asintótico en el infinito nulo con el fin de preservar las relaciones de conmutación.

3.1. Diagrama de Penrose del Espacio de Minkowski

Para realizar un análisis asintótico de los campos y de las cantidades asociadas a estos es necesario conocer la estructura del espacio-tiempo de Minkowski. Para esto usamos los diagramas de Penrose [33]. Estos diagramas se obtienen a partir de una transformación conforme que es un re-escalo de la métrica por medio de un cambio de coordenadas conveniente de tal forma que el espacio-tiempo se compacta, donde el infinito puede ser tratado como una superficie tridimensional [34]. En particular el diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski que vamos a utilizar es el que se observa en la figura 7. Además la transformación conforme que genera el diagrama mencionado tiene la propiedad de preservar la relación de causalidad de los eventos [35].

Como podemos ver en la figura 7 las partículas masivas libres solo pueden moverse por medios de geodésicas que conecten únicamente el infinito temporal futuro i^- y el infinito temporal pasado i^+ . Como nuestro trabajo consta en solo el tratamiento de partículas no masivas, estas se mueven del infinito nulo pasado \mathcal{I}^- al infinito nulo futuro \mathcal{I}^+ por medio de geodésicas nulas.

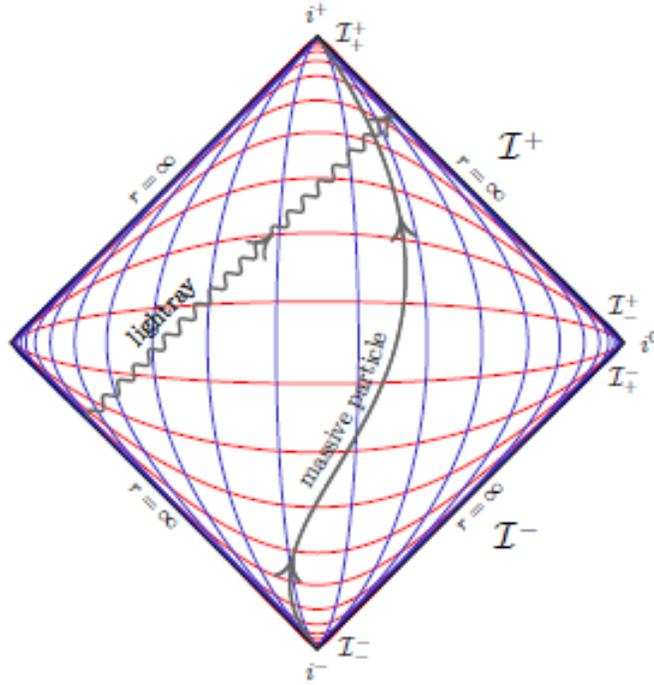


Figura 7: Imagen tomada de [36]. Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski.

Para nuestro análisis asintótico alcanzar el infinito es estar tanto en \mathcal{I}^+ o \mathcal{I}^- . El punto \mathcal{I}_+^+ es el futuro de \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}_-^- es el pasado de \mathcal{I}^- . Por otra parte, \mathcal{I}_+^- representa el pasado de \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}_-^+ es el futuro \mathcal{I}^- , estos puntos están próximos a i^0 que denominamos como infinito espacial el cuál representa una discontinuidad donde hay que tener especial cuidado al hacer el análisis próximo a este punto. Por esto se le va a pedir a los campos una condición de continuidad antipodal que no desarrollaremos en este trabajo, por más detalles ver [36]. Desde un punto de vista geométrico según la figura 7, los puntos i^\pm e i^0 que representan superficies esféricas, \mathcal{I}^+ y \mathcal{I}^- son superficies tridimensionales. Además las líneas rojas representan superficies de t constante mientras que las azules son superficies de r constante [36].

En la siguiente sub-sección desarrollamos la transformación de coordenadas que permite describir \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^- . Además se establece el límite y dirección con la que se alcanzan las regiones asintóticas.

3.2. Coordenadas Nulas

Para describir los campos cerca de \mathcal{I}^+ , trabajamos con coordenadas nulas salientes. Primero identificamos una dirección nula $q^\mu(x)$ dada por un punto $x := (z, \bar{z})$ en la esfera celeste como se observa en la figura 8.

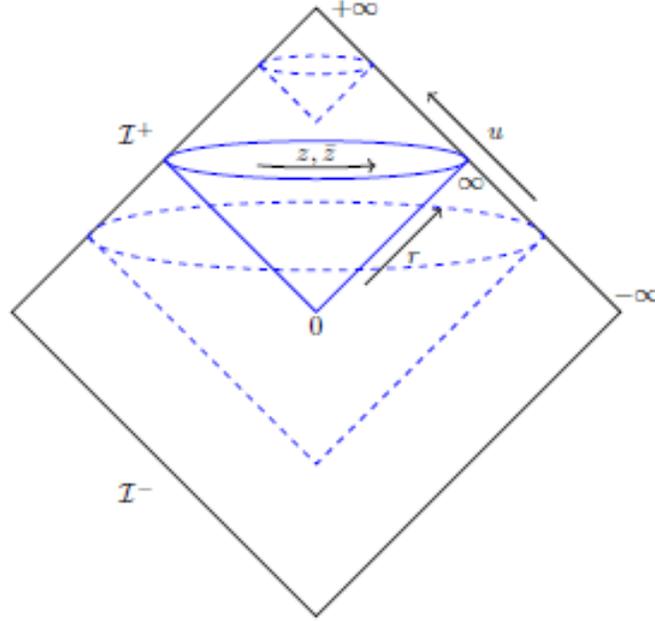


Figura 8: \mathcal{I}^+ es parametrizado por el tiempo retardado u y por las coordenadas esféricas (z, \bar{z}) . Imagen tomada de [36].

Elegimos

$$q^\mu(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + |z|^2, z + \bar{z}, -i(z - \bar{z}), 1 - |z|^2) \quad (3.1)$$

para esta elección uno tiene que

$$dq^\mu dq_\mu = 2d\bar{z}dz \quad (3.2)$$

corresponde a un espacio plano conforme. Ver [38] para diferentes opciones conformes. Luego, se elige un vector nulo k^μ transverso a $q^\mu(x)$ que especifica el flujo del tiempo

$$k^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \quad k^\mu q_\mu = -1 \quad (3.3)$$

con esta definición parametrizamos las coordenadas cartesianas x^μ por medio de (r, u, x) , teniendo la siguiente forma

$$x^\mu(r, u, x) = r q^\mu(x) + u k^\mu \quad (3.4)$$

en estas coordenadas la métrica del espacio-tiempo cerca de \mathcal{I}^+ es

$$ds^2 = -2dudr + 2r^2 dzd\bar{z} \quad (3.5)$$

donde \mathcal{I}^+ se alcanza tomando $r \rightarrow \infty$ con (u, x) constante como se observa la figura 8 , siendo $u = t - r q^0(x)$. Para realizar una descripción de \mathcal{I}^- no podemos usar las coordenadas u debido a que estas alcanzan un valor infinito al aproximarse a \mathcal{I}^+ , por esto introducimos nuevas coordenadas como se observan en la figura 9 [36]. Nuevamente usamos la misma dirección nula $q^\mu(x)$, lo único que el flujo l^μ de tiempo en este caso tiene la forma

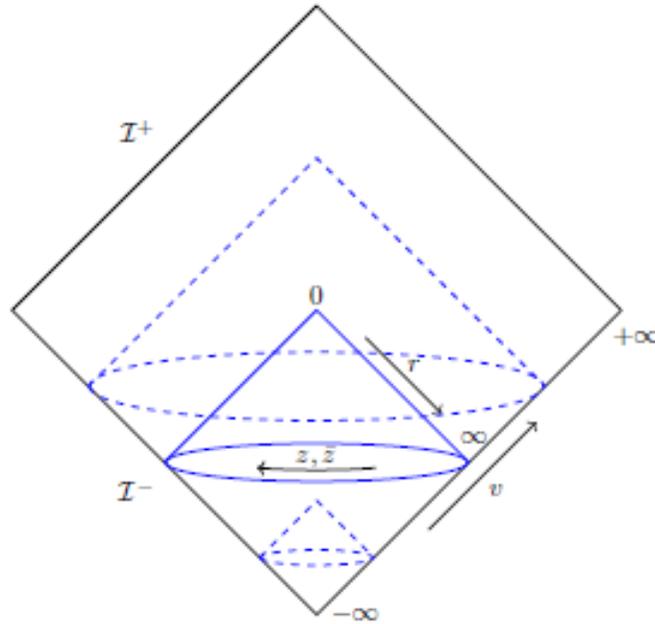


Figura 9: \mathcal{I}^- es parametrizado por el tiempo avanzado v y por las coordenadas esféricas (z, \bar{z}) . Imagen tomada de [36].

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1), \quad l^\mu q_\mu = 1 \quad (3.6)$$

con esta definición parametrizamos las coordenadas cartesianas por medio de (r, v, x) , teniendo la siguiente forma

$$x^\mu(r, v, x) = r q^\mu(x) + v l^\mu \quad (3.7)$$

en estas coordenadas la métrica del espacio-tiempo cerca de \mathcal{I}^- es

$$dx^\mu dx_\mu = 2dvdr + 2r^2 dzd\bar{z} \quad (3.8)$$

donde \mathcal{I}^- se alcanza tomando el mismo límite para r y con (v, x) constante como se observa en la figura 9 , siendo $v = t + r q^0(x)$ [36].

3.3. Campos Asintóticos

Ahora presentamos el comportamiento de los campos \mathcal{A}_μ y Ψ en \mathcal{I}^+ . Para el caso de \mathcal{A}_μ sabemos que en coordenadas cartesianas estos decaen de la forma $1/r$ [37], en las nuevas coordenadas tenemos [13, 16, 36]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z(r, u, x) &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} A_z(u, x) + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \mathcal{A}_{\bar{z}}(r, u, x) &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} A_{\bar{z}}(u, x) + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \mathcal{A}_u(r, u, x) &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} r^{-1} A_u(u, x) + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{A}_r(r, u, x) &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} \mathcal{O}(r^{-2}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde la única componente no nula del campo electromagnético es la transversal A_x donde lo consideramos como un campo de gauge en \mathcal{I}^+ , se obtiene el mismo comportamiento para \mathcal{I}^- . Estos decaimientos de los campos de \mathcal{A}_μ se obtienen a partir de un análisis de fase estacionaria en los modos de Fourier [16] . También es de interés presentar el comportamiento asintótico en la variable u para los campos $A_z(u, x)$ y $A_{\bar{z}}(u, x)$ que según [12–14].

$$\begin{aligned}
A_z(u, x) &\stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\equiv} A_z(\pm\infty, x) + \mathcal{O}(1/u) + \dots \\
A_{\bar{z}}(u, x) &\stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\equiv} A_{\bar{z}}(\pm\infty, x) + \mathcal{O}(1/u) + \dots
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Se obtiene el mismo comportamiento en la variable v que describe \mathcal{I}^- .

Los campos de Dirac han sido discutidos por [39]. Como otro campo sin masa, el spinor de Dirac decae como $1/r$. La ecuación de Dirac impone restricciones en las componentes de orden principal del spinor, dejando solo dos componentes independientes en el campo asintótico. El spinor de Dirac tiene la siguiente forma

$$\Psi \stackrel{r \rightarrow \infty}{\equiv} \frac{1}{2^{1/4}r} \begin{pmatrix} -\bar{z}\psi_-(u, x) \\ \psi_-(u, x) \\ \psi_+(u, x) \\ z\psi_+(u, x) \end{pmatrix}.
\tag{3.11}$$

En el apéndice A se encuentra en detalle como se obtiene (3.11). El comportamiento asintótico de las componentes del espinor en la variable u es del orden $\mathcal{O}(1/u^2)$. Donde ψ_{\pm} los consideramos como campos fermiónicos complejos en \mathcal{I}^{\pm} . Además los ψ_{\pm} van a estar asociados con la helicidad positiva/negativa de los electrones. De forma similar, $A_z, A_{\bar{z}}$ van a estar asociados con la helicidad positiva/negativa de los fotones. Por tanto introducimos la siguiente notación $A_+ := A_z$, $A_- := A_{\bar{z}}$. Notar que de forma diferente a los ψ_{\pm} , los campos de gauge satisfacen la condición de que $A_+^* = A_-$.

3.4. Corrientes y Cargas Asintóticas

Sabiendo como es el comportamiento de los campos asintóticos podemos escribir como son las corrientes asociadas a las diferentes transformaciones en el infinito nulo e integrando en \mathcal{I}^+ obtenemos la carga en el infinito nulo futuro Q^+ . Si se integra en \mathcal{I}^- obtenemos la carga Q^- en el infinito nulo pasado, para evitar el exceso de notación no vamos a diferenciar las regiones mencionadas en la integración [36]. Como \mathcal{I} es una superficie tridimensional con $r = \infty$ constante y con vector normal saliente en dirección r entonces al realizar la integral de superficie (2.11) sobre \mathcal{I} , la componente relevante es $\mu = r$ para todos los casos.

Para que las cargas Q^\pm sean generadores las transformaciones asociadas a estas deben dejar invariante el comportamiento asintótico de los campos [42, 47].

Para determinar la carga asociada a la corriente de gauge en \mathcal{I} , elegimos un decaimiento en r para $\Lambda(r, u, x)$ de la forma

$$\Lambda(r, u, x) \rightarrow \lambda(x) + \mathcal{O}(1/r). \quad (3.12)$$

Este decaimiento permite establecer que la carga es no trivial y que es un generador ya que la transformación de gauge asintótica deja invariante el comportamiento asintótico de los campos [36]. La corriente de gauge (2.30) en \mathcal{I} es

$$J_\lambda^r = \sum_s \dot{A}_{-s} \partial_s \lambda(x) + e \lambda(x) \psi_s^* \psi_s \quad (3.13)$$

integrando obtenemos la carga Q_λ , siendo esta

$$Q_\lambda = \int_{\mathcal{I}} d^3V J_\lambda^r = \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^3V \left(\dot{A}_{-s} \partial_s \lambda(x) + e \lambda(x) \psi_s^* \psi_s \right). \quad (3.14)$$

donde $d^3V = dud^2x$ corresponde al elemento de volumen en \mathcal{I}^+ y $d^3V = dvd^2x$ para \mathcal{I}^- .

Los siguientes comportamientos asintóticos de las corrientes tienen asociadas transformaciones de coordenadas que mantienen invariantes el comportamiento asintótico de los campos. Para el caso de la corriente axial (2.29), la misma adquiere el siguiente comportamiento asintótico

$$J_5^r = \psi_+^* \psi_+ - \psi_-^* \psi_- \quad (3.15)$$

integrando se tiene que la carga axial Q_5 es

$$Q_5 = \int_{\mathcal{I}} d^3V J_5^r = \int_{\mathcal{I}} d^3V (\psi_+^* \psi_+ - \psi_-^* \psi_-). \quad (3.16)$$

Con el grupo de Poincaré, primero tratamos la corriente asociada a las traslaciones (2.24) que se comporta de forma asintótica como

$$J_\epsilon^r = \sum_s \epsilon^\gamma q_\gamma \left(-\dot{A}_{-s} \dot{A}_s - i\psi_s^* \dot{\psi}_s \right) + \mathcal{O}(1/r) \quad (3.17)$$

con q_γ de la forma (3.1). Los términos del orden $\mathcal{O}(1/r)$ los despreciamos y tenemos que la carga Q_ϵ es la siguiente

$$Q_\epsilon = \int_{\mathcal{I}} d^3V J_\epsilon^r = \int_{\mathcal{I}} d^3V \epsilon^\gamma q_\gamma \left(\ddot{A}_{-s} A_s + i\dot{\psi}_s^* \psi_s \right) \quad (3.18)$$

por último realizamos el mismo tratamiento que para la corriente asociada a las transformaciones de Lorentz (2.25), cuyo comportamiento asintótico es el siguiente [39]

$$\begin{aligned} J_\omega^r &= \sum_s \dot{A}_{-s} \left(\mathcal{L}_{(Y^a \partial_a)} + \alpha u \partial_u \right) A_s + \\ &+ \psi_+^* \left(Y(z) \partial_z + \bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) + Y'(z) + \frac{1}{2} (Y'(z) + \bar{Y}'(\bar{z})) u \partial_u \right) \psi_+ + \\ &+ \psi_-^* \left(Y(z) \partial_z + \bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} Y'(z) + \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} (Y'(z) + \bar{Y}'(\bar{z})) u \partial_u \right) \psi_- + \mathcal{O}(1/r) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $Y^a := \omega_\nu{}^\mu q^\nu D^a q_\mu$ con $D^a = h^{ab} \partial_b$ siendo $a := z, \bar{z}$, $\alpha = D_a Y^a / 2$ y h^{ab} la métrica del plano conforme (3.2). Integrando se llega a la carga asociada a las transformaciones de Lorentz. La carga de Poincaré está dada por la contribución de Q_ϵ y Q_ω . En el apéndice A.4 se encuentra en detalle la obtención de las corrientes y cargas asintóticas.

3.5. Espacio de Fase Radiativo y Simetrías Asintóticas

Ahora realizamos una descripción canónica en las regiones \mathcal{I}^\pm donde las variables del espacio de fase son A_\pm y ψ_\pm en sus respectivas regiones. Estas definen una forma simpléctica que se construye a partir de la corriente potencial simpléctica (2.28). Al igual que en la parte anterior para evitar el exceso de notación no vamos a distinguir entre \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^- en los procedimientos. En la región \mathcal{I} la componente relevante de (2.28) es la radial r que tiene la siguiente forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta^r(\delta) = \dot{A}_z \delta A_{\bar{z}} + \dot{A}_{\bar{z}} \delta A_z + i\psi_+^* \delta \psi_+ + i\psi_-^* \delta \psi_-. \quad (3.20)$$

Tomando la segunda variación en (3.20) e integrando sobre las variables que correspondan obtenemos la estructura simpléctica en \mathcal{I} .

$$\Omega := \sum_{s=\pm} \int_{\mathcal{I}} d^3V \left(\delta \dot{A}_{-s} \wedge \delta A_s + i\delta \psi_s^* \wedge \delta \psi_s \right) \quad (3.21)$$

En principio el espacio de fase radiativo está bien definido ya que el mismo está libre de vínculos y la forma simpléctica contiene los grados de libertad (cuatro grados por punto) físicos de la teoría en la región asintótica. Donde los campos que toman valores en \mathcal{I}^- constituyen el espacio de datos iniciales mientras que los que toman valores en \mathcal{I}^+ componen el espacio de datos finales. Evaluando (3.21) por medio de dos variaciones δ_1 y δ_2 se tiene que

$$\Omega(\delta_1, \delta_2) = \sum_{s=\pm} \int_{\mathcal{I}} d^3V \left(\delta_1 \dot{A}_{-s} \delta_2 A_s - \delta_2 \dot{A}_{-s} \delta_1 A_s + i\delta_1 \psi_s^* \delta_2 \psi_s - i\delta_2 \psi_s^* \delta_1 \psi_s \right) \quad (3.22)$$

donde es importante la posición de los campos fermiónicos ya que estos anti-conmutan. Usando la regla $(\psi_1 \psi_2)^* = \psi_2^* \psi_1^*$ para el producto de complejo conjugado de campos fermiónicos se puede verificar que la forma simpléctica es real. Para realizar la discusión a partir de los corchetes de Poisson, es necesario considerar que el campo vectorial Hamiltoniano X_F está asociado a una función Hamiltoniana F del espacio de fase. El cuál podemos obtener explícitamente por medio de la siguiente definición [43]

$$\Omega(\delta, X_F) := \delta F. \quad (3.23)$$

El corchete de Poisson entre funciones bosónicas esta dado por

$$\{F, G\} := X_G(F) = -X_F(G) = \Omega(X_G, X_F) \quad (3.24)$$

si F y G son fermiónicas, hay un signo adicional que puede ser determinado por medio de la regla de Leibnitz Grassmaniana para corchetes de Poisson,

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} \pm \{F_1, G\} F_2 \quad (3.25)$$

donde el menos se presenta si F_2 y G son fermiónicas. En particular, el corchete de Poisson entre dos funciones fermiónicas es simétrico en vez de anti-simétrico. Ver capitulo seis de [44] por más detalles. Habiendo presentado estas definiciones uno encuentra que los corchetes de Poisson elementales no nulos son

$$\begin{aligned} \{A_s(u, x), \dot{A}_{-s}(u', x')\} &= \frac{1}{2} \delta(u - u') \delta^{(2)}(x, x'), \\ \{\psi_s(u, x), \psi_s^*(u', x')\} &= -i \delta(u - u') \delta^{(2)}(x, x'). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Usando la definición (3.23) podemos determinar las cargas que constituyen generadores en el espacio de fase. Para poder encontrarlas debemos establecer cuales son las transformaciones de coordenadas que dejan invariante la forma simpléctica en \mathcal{I} (es equivalente decir que dejan invariante el comportamiento asintótico de los campos). En la sub-sección 3.4 se presentan cargas cuyas transformaciones que las producen cumplen con el requerimiento que se menciona. Por lo que deberíamos de obtener los mismos resultados utilizando el formalismo canónico. Para determinar las cargas se debe evaluar a la forma simpléctica para las diferentes variaciones de los campos asociadas a las posibles transformaciones δ_i en \mathcal{I} [43]

$$\delta Q_i := \Omega(\delta, \delta_i). \quad (3.27)$$

La transformación de gauge en su forma asintótica deja invariante el comportamiento asintótico de los campos si se elige a $\Lambda(r, u, x)$ de la forma dada por (3.12), entonces las componentes transversales de los campos de gauge A_s y las componentes del spinor ψ_s transforman de la siguiente forma [36]

$$\delta_\lambda A_s = \partial_s \lambda(x) \quad \delta_\lambda \psi_s = -ie\lambda(x)\psi_s. \quad (3.28)$$

Las cargas Q_λ asociadas a las transformaciones de gauge (3.28) son las siguientes

$$Q_\lambda = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \partial_s \lambda(x) \dot{A}_{-s} + \lambda(x) e \psi_s^* \psi_s \quad (3.29)$$

La rotación global axial al tratarse de una transformación global, la misma tiene el mismo comportamiento en todo punto. Por lo que A_s y ψ_s transforman como

$$\delta_5 A_s = 0 \quad \delta_5 \psi_+ = -i\psi_+ \quad \delta_5 \psi_- = i\psi_- \quad (3.30)$$

de forma tal que la carga asociada a dicha transformación es

$$Q_5 = \int_{\mathcal{I}} dud^2x [\psi_+^* \psi_+ - \psi_-^* \psi_-] \quad (3.31)$$

Por otra parte A_s y ψ_s transforman bajo traslaciones como

$$\delta_\epsilon A_s = -\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_s \quad \delta_\epsilon \psi_s = -\epsilon^\nu q_\nu \dot{\psi}_s \quad (3.32)$$

donde obtenemos la carga Q_ϵ a partir de (3.32), siendo esta

$$Q_\epsilon = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \epsilon^\nu q_\nu [\ddot{A}_{-s} A_s + i \dot{\psi}_s^* \psi_s]. \quad (3.33)$$

Tenemos que las transformaciones de Lorentz en la región asintótica para A_s y ψ_s son [39]

$$\delta_\omega A_s = \mathcal{L}_{(Y^a \partial_a)} A_s + \alpha u \partial_u A_s = \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s \quad (3.34)$$

las componentes del spinor transforman para Y [39]

$$\begin{aligned}\delta_Y \psi_- &= \left(Y(z) \partial_z + \frac{1}{2} Y'(z) + \frac{1}{2} Y'(z) u \partial_u \right) \psi_- \\ \delta_Y \psi_+ &= \left(Y(z) \partial_z + Y'(z) + \frac{1}{2} Y'(z) u \partial_u \right) \psi_+\end{aligned}\tag{3.35}$$

mientras que para \bar{Y}

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{Y}} \psi_- &= \left(\bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) u \partial_u \right) \psi_- \\ \delta_{\bar{Y}} \psi_+ &= \left(\bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) u \partial_u \right) \psi_+.\end{aligned}\tag{3.36}$$

donde $Y^a := \omega_\nu{}^\mu q^\nu D^a q_\mu$ con $D^a = h^{ab} \partial_b$ siendo $a := z, \bar{z}$ y h^{ab} la métrica del plano conforme (3.2). Por lo que la carga Q_ω asociada a las transformaciones (3.34), (3.35) y (3.36) es

$$Q_\omega = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(\dot{A}_{-s} \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s + \psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s \right).\tag{3.37}$$

Tomando la contribución de Q_ϵ y Q_ω obtenemos la carga asociada al grupo de Poincaré.

Se puede ver que las cargas obtenidas a partir de (3.27) coinciden con las que se obtienen de la integración de las diferentes corrientes en la región asintótica, entonces se puede decir que la forma simpléctica definida es consistente. Esto es debido a que tanto las corrientes conservadas como la forma simpléctica, las construimos a partir de $\theta^\mu(\delta)$ y de las variables del espacio de fase. Hasta el momento hemos obtenido un comportamiento cinemático de las cargas debido a que conocemos a las mismas en las regiones asintóticas.

Para probar la conservación de estas al producirse la interacción se utiliza la identidad de Ward que se presenta en la sub-sección 2.3.3. Ya es conocida la conservación de la carga asociada al grupo de Poincaré y la de la carga Q_λ [36]. La carga asociada a la rotación global axial Q_5 desde el punto vista de la mecánica cuántica no se conserva a 1 loop. Esto es conocido como la anomalía axial [41].

3.6. Espacio de Fock Asintótico

Para obtener el espacio de Fock asintótico debemos cuantizar los campos asintóticos $A_s(u, x), \Psi(u, x)$ y $\bar{\Psi}(u, x)$. Para realizar esto primero consideramos todos los modos ω de radiación que atraviesan \mathcal{I}^+ . Para expresar los campos en función de los modos ω aplicamos la transformada de Fourier en la variable u a cada uno de ellos

$$\begin{aligned} A_s(u, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{A}_s(\omega, x) e^{-i\omega u} \\ \psi_s(u, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\psi}_s(\omega, x) e^{-i\omega u} \\ \psi_s^*(u, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\psi}_s^*(\omega, x) e^{i\omega u} \end{aligned} \quad (3.38)$$

los corchetes de Poisson (3.33) implican que

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_s(\omega, x), \tilde{A}_{-s}(\omega', x')\} &= \frac{i\pi}{\omega'} \delta(\omega + \omega') \delta^{(2)}(x, x') \\ \{\tilde{\psi}_s(\omega, x), \tilde{\psi}_s^*(\omega', x')\} &= -i2\pi \delta(\omega - \omega') \delta^{(2)}(x, x'). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Notar que la información de $A_s(u, x)$ está contenida en $\tilde{A}_s(\omega, x), \omega > 0$ ya que $\tilde{A}_s(-\omega, x) = (\tilde{A}_{-s}(\omega, x))^*$ debido a que el campo de gauge es real. Pero no hay relación entre la frecuencia positiva y negativa en las componentes de $\tilde{\psi}_s(\omega, x)$.

Análogamente se hace para los campos que están en \mathcal{I}^- . Donde definimos un conjunto independientes de funciones de modo ω en cada región \mathcal{I}^\pm , siendo estas

$$\begin{aligned} a_s(\omega, x) &:= \tilde{A}_s(\omega, x), \quad \omega > 0 \\ b_s(\omega, x) &:= \tilde{\psi}_s(\omega, x), \quad \omega > 0 \\ c_s(\omega, x) &:= \tilde{\psi}_{-s}^*(-\omega, x), \quad \omega > 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

tras la cuantización, estas funciones se convierten en los operadores de Fock asintóticos de creación y aniquilación de fotones, electrones y positrones [26].

Las relaciones de (anti) conmutación de los operadores las obtenemos a partir de la condición de cuantización a los (3.26), es decir que podemos escribir, $\{ , \} = -i[,]$ [26]

$$[a_s(\omega, x), a_s^\dagger(\omega', x')]_- = \frac{\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega') \delta^{(2)}(x, x'), \quad (3.41)$$

$$[b_s(\omega, x), b_s^\dagger(\omega', x')]_+ = [c_s(\omega, x), c_s^\dagger(\omega', x')]_+ = 2\pi \delta(\omega - \omega') \delta^{(2)}(x, x').$$

Los operadores de creación y aniquilación (3.40) lo podemos relacionar con los operadores del espacio de Fock usuales (3.42). Para encontrar la relación debemos tomar como es el decaimiento de los campos (3.42) y luego poder expresarlos en función de (ω, x) .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(x) &= \sum_s \int \tilde{d}p (a_s(p) \varepsilon_{\mu,s}^*(p) e^{ip \cdot x} + a_s^\dagger(p) \varepsilon_{\mu,s}(p) e^{-ip \cdot x}) \\ \Psi(x) &= \sum_s \int \tilde{d}p (b_s(p) u_s(p) e^{ip \cdot x} + c_s^\dagger(p) v_s(p) e^{-ip \cdot x}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $\tilde{d}p = dp / ((2\pi)^3 2|p|)$ y los (anti) conmutadores elementales son

$$[d_s(p), d_{s'}^\dagger(p')]_\pm = 2|p|(2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(p - p'), \quad d = \{a, b, c\}. \quad (3.43)$$

Para obtener el comportamiento asintótico de (3.42) primero expresamos los campos en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(X) &= \sum_s \int \tilde{d}p (a_s(p) \varepsilon_{\mu,s}^*(p) e^{ip \cdot X} + a_s^\dagger(p) \varepsilon_{\mu,s}(p) e^{-ip \cdot X}) \\ \Psi(X) &= \sum_s \int \tilde{d}p (b_s(p) u_s(p) e^{ip \cdot X} + c_s^\dagger(p) v_s(p) e^{-ip \cdot X}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

en este caso tomamos a X^μ como en las coordenadas (3.4) y escribimos al momento $p^\mu = \omega q^\mu(x)$. Esta expresión del momento en función de (ω, x) es la que permite relacionar el espacio de Fock usual con el de Fock asintótico como se observa en (3.48). En estas coordenadas el elemento de línea del momento tiene la siguiente forma

$$\tilde{d}p = \frac{\omega}{2(2\pi)^3} d^2 x' d\omega \quad (3.45)$$

la fase de la onda plana se convierte en

$$p \cdot X = r\omega q(x) \cdot q(x') + u\omega k \cdot q(x') \quad (3.46)$$

donde

$$q(x) \cdot q(x') = -|z - z'|^2. \quad (3.47)$$

En el límite $r \rightarrow \infty$, la integral en d^2x' se puede resolver por medio de un análisis de saddle point [45] [46], lo que permite expresar al campo en función de (ω, x) . La parte de frecuencia positiva de un campo escalar tiene la siguiente ecuación al aplicar el análisis mencionado [52]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \tilde{d}p \phi(p) e^{ip \cdot X} = \frac{1}{4\pi i r} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \phi(\omega q(x)) e^{-i\omega u} + \mathcal{O}(1/r^2) \quad (3.48)$$

de tal forma que podemos aplicar esta ecuación para los correspondientes campos (3.44). En el caso del campo \mathcal{A}_μ tenemos que [13]

$$A_z(u, x) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left(a_+(\omega, x) e^{-i\omega u} - a_-^\dagger(\omega, x) e^{i\omega u} \right) + \mathcal{O}(1/r) \quad (3.49)$$

de forma similar se obtiene el resultado para $A_{\bar{z}}(u, x)$. Las polarizaciones del fotón con momento $p^\mu(x) = \omega q^\mu(x)$ pueden tomarse de la forma [36]

$$\varepsilon_{\mu,-}(x) = \partial_z q_\mu(x), \quad \varepsilon_{\mu,+}(x) = \partial_{\bar{z}} q_\mu(x) \quad (3.50)$$

el cual satisfacen

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm \cdot q &= 0, & \varepsilon_\pm \cdot \varepsilon_\pm &= 0, & \varepsilon_+ \cdot \varepsilon_- &= 1, \\ \varepsilon_{\mu,+} \varepsilon_{\nu,+}^* + \varepsilon_{\mu,-} \varepsilon_{\nu,-}^* + \frac{q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu}{q \cdot k} &= \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.51)$$

con k^μ un vector nulo con un producto escalar no cero con q^μ dado por la ecuación (3.3).

Para el espinor tenemos que las soluciones de onda plana asociadas a la ecuación de Dirac para espinores sin masa con momento $p^\mu = \omega q^\mu(x)$ son las siguientes [29]

$$u_+(\omega, x) = v_-(\omega, x) = 2^{1/4}\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad u_-(\omega, x) = v_+(\omega, x) = 2^{1/4}\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} -\bar{z} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

el cual satisfacen las siguientes relaciones

$$qu_{\pm}(\omega, x) = 0, \quad u_s^\dagger(\omega, x)u_{s'}(\omega, x) = 2\omega q^0 \delta_{ss'}, \quad \sum_s u_s(\omega, x)\bar{u}_s(\omega, x) = \not{p} \quad (3.53)$$

y similarmente para v_{\pm} . Donde se llega a que

$$\Psi(u, x) = \frac{1}{4\pi i r} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} 2^{1/4}\sqrt{\omega} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} [b_-(\omega, x)e^{-i\omega u} - c_+^\dagger(\omega, x)e^{i\omega u}] \\ \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} [b_+(\omega, x)e^{-i\omega u} - c_-^\dagger(\omega, x)e^{i\omega u}] \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1/r^2). \quad (3.54)$$

Comparando las expresiones de (3.42) con (3.49) y (3.54) encontramos que los operadores de Fock están relacionados con los operadores de Fock (3.40) de la siguiente manera

$$a_s(\omega, x) = \frac{1}{4\pi i} a_s(p), \quad b_s(\omega, x) = \frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} b_s(p), \quad c_s(\omega, x) = \frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} c_s(p). \quad (3.55)$$

Notando que $\delta^{(3)}(p-p') = \frac{\sqrt{2}}{\omega|p|} \delta(\omega-\omega')\delta^{(2)}(x, x')$ se verifica que los conmutadores (3.43) llevan a los conmutadores (3.41).

4. Identidad de Ward para Q_λ y Teorema Soft para Fotones

En esta sub-sección hacemos las deducciones que se realizan en el trabajo de Strominger [36]. Las cargas asociadas a las transformaciones de gauge locales (3.29) van a introducir dos tipos de cargas que denominamos como carga soft y hard, la primera va a estar relacionada con fotones cuya energía tiende a cero que denominamos como fotones soft. El otro tipo de carga se denomina hard por tener un comportamiento energético mucho mayor que el soft. Las cargas (3.29) las vamos a describir en términos de los operadores de Fock asintóticos. Una vez hecho esto deducimos la identidad de Ward de Q_λ que implica la conservación de la misma y que la transformación de gauge asintótica es una simetría. Además mostramos la equivalencia entre la identidad de Ward y el teorema soft para fotones.

4.1. Cargas Soft y Hard

Previo a introducir la identidad de Ward, nos interesa expresar la carga asociada a las transformaciones de gauge (4.4) en términos de los operadores del espacio de Fock asintótico. Primero trabajamos con el primer término, pero antes de expresarlo en función de los operadores, es necesario analizar que es lo que ocurre en los infinitos temporales de \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^- [36]. A partir de ahora los superíndices que contengan \pm implica que son cantidades definidas en \mathcal{I}^\pm respectivamente. Los campos $A_s(u, x)$ cuando $u \rightarrow \pm\infty$ se comportan de la siguiente forma según [12–14]

$$A_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right) + \dots \quad (4.1)$$

siendo

$$A_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\sim} A_s(\pm\infty, x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right) + \dots \quad (4.2)$$

con esto planteamos que a orden dominante

$$A_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} A_s(\pm\infty, x) = A_s^{\pm\infty}(x). \quad (4.3)$$

Asumiendo que $\partial_{[a}A_{b]}^{\pm\infty}(x) = 0$ que se escribe como $\partial_z A_z^{\pm\infty}(x) = \partial_{\bar{z}} A_z^{\pm\infty}(x)$ implica que no hay estados asintóticos con cargas magnéticas [36]. Tomando en cuenta esto último e integrando por partes

$$\sum_s \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x [\partial_s \lambda^+(x) \dot{A}_{-s}(u, x)] = 2 \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x [\partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \dot{A}_z(u, x)]. \quad (4.4)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier (3.38) para el campo de gauge e integrando en u y ω se llega a que

$$\int_{\mathcal{I}^+} dud^2x (\partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \dot{A}_z(u, x)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -2 \int_{\Sigma^+} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \tilde{A}_z(\omega, x). \quad (4.5)$$

siendo Σ una superficie de Cauchy. Aplicando el promedio del limite de $\omega \rightarrow 0$ se obtiene que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -2 \int_{\Sigma^+} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \tilde{A}_z(\omega, x) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} - \int_{\Sigma^+} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) (\tilde{A}_z(\omega, x) - \tilde{A}_{\bar{z}}^*(\omega, x)) \quad (4.6)$$

usando las relaciones (3.41) expresamos el primer termino de la carga en función de los operadores

$$\sum_s \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x (\partial_s \lambda^+(x) \dot{A}_{-s}(u, x)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -i \int_{\Sigma^+} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) [a_+^+(\omega, x) - a_-^+(\omega, x)]. \quad (4.7)$$

A partir de esta ecuación podemos ver que el termino lineal con los A_s de la carga Q_λ esta asociado con fotones cuya energía tiende a cero que los denominamos como soft debido al comportamiento de la energía. Para expresar el segundo término de la carga por medio de los operadores tenemos que realizar la transformada de Fourier para ψ_s y ψ_s^* , y aplicar las definiciones de $b_s(\omega, x)$, $c_s(\omega, x)$ llegando a que [36]

$$\begin{aligned} & \sum_s \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x [e\lambda^+(x) \psi_s^*(u, x) \psi_s(u, x)] = \\ & = \sum_s \int_{\mathcal{I}^+} d^2x d\omega \frac{e\lambda^+(x)}{2\pi} [b_s^{\dagger+}(\omega, x) b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x) c_s^+(\omega, x)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Este término de la carga lo vamos a denominar como hard ya que la energía de este término es mucho mayor que la carga soft. Esto último es debido a que la carga hard está constituida por partículas que participan del proceso de dispersión.

Tomando la contribución de ambos términos, obtenemos la carga Q_λ definida en \mathcal{I}^+

$$\begin{aligned}
Q_\lambda^+ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i \underbrace{\int_{\Sigma^+} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) [a_+^\dagger(\omega, x) - a_-^\dagger(\omega, x)]}_{Q_S} + \\
&+ \underbrace{\sum_s \int_{\mathcal{I}^+} d^2x d\omega \frac{e\lambda^+(x)}{2\pi} (b_s^{\dagger+}(\omega, x)b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x)c_s^+(\omega, x))}_{Q_H}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Realizando el mismo procedimiento y tomando en cuenta que el campo $A_s(v, x)$ tiene el mismo comportamiento que $A_s(u, x)$, cuando $v \rightarrow \pm\infty$ y además que $\partial_{[aA^{\pm\infty}b]}(x) = 0$, se obtiene Q_λ en \mathcal{I}^- . Donde el comportamiento de los términos es igual que Q_λ^+ pero con la diferencia de operadores y funciones definidas en la respectiva región.

$$\begin{aligned}
Q_\lambda^- &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i \underbrace{\int_{\Sigma^-} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^-(x) [a_+^-(\omega, x) - a_-^-(\omega, x)]}_{Q_S} + \\
&+ \underbrace{\sum_s \int_{\mathcal{I}^-} d^2x d\omega \frac{e\lambda^-(x)}{2\pi} (b_s^{\dagger-}(\omega, x)b_s^-(\omega, x) - c_s^{\dagger-}(\omega, x)c_s^-(\omega, x))}_{Q_H}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

dado como es el comportamiento de cada uno de los factores, la carga se puede descomponer como la suma de un término soft Q_S y uno hard Q_H [36]. En particular si hacemos un análisis de la carga a partir del comportamiento de la función $\lambda(x)$ encontramos que si esta es constante el término soft se anula, ya que depende de la derivada y solo nos queda el término hard que representa la carga eléctrica total que atraviesa la superficie \mathcal{I} . Si $\lambda(x)$ no es constante encontramos que ambos factores persisten y en particular ambos se evalúan por medio de una función de peso que depende del punto de la esfera conforme por donde salen las partículas [36]. En el apéndice B se encuentran las cuentas detalladas para obtener cada uno de los términos en función de los operadores.

4.2. Identidad de Ward para Q_λ

Como ya mencionamos en la sub-sección 2.3.3 la conservación de la carga a partir de la matriz S la denominamos como identidades de Ward. Ahora buscamos obtener la identidad de Ward en particular para Q_λ .

La conservación de la carga Q_λ (4.9)(4.10) implica que la amplitud del conmutador de dicha carga con la matriz S deber ser nulo [36]

$$\langle out | Q_\lambda^+ S - S Q_\lambda^- | in \rangle = 0. \quad (4.11)$$

Para que la ecuación (4.11) se cumpla, las funciones $\lambda^\pm(x)$ deben cumplir la siguiente condición de continuidad antipodal

$$\lambda^+(x)|_{\mathcal{I}_-^+} = \lambda^-(-x)|_{\mathcal{I}_+^-}. \quad (4.12)$$

Donde consideramos que los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$ son estados de multi-partículas que no interactúan entre si debido a que estos están definidos en \mathcal{I}^- y \mathcal{I}^+ respectivamente. Los mismos pueden estar compuestos por fotones, electrones y positrones que consideramos como partículas hard que dependen de (ω, x) y de la helicidad. En este caso vamos a considerar que tenemos positrones en las posiciones x_k^+, x_k^- , electrones en x_j^+, x_j^- y fotones en x_l^+, x_l^- con sus energías y helicidades respectivas. De forma tal que los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$ son los siguientes

$$\begin{aligned} |in\rangle &= \prod_{jkl} |x_k^-, \omega_k^-, s\rangle |x_j^-, \omega_j^-, s'\rangle |x_l^-, \omega_l^-, s''\rangle \\ \langle out| &= \prod_{jkl} \langle x_k^+, \omega_k^+, s| \langle x_j^+, \omega_j^+, s'| \langle x_l^+, \omega_l^+, s''|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Al evaluar la ecuación (4.11) usando las relaciones de conmutación de los operadores (3.14) y además como actúan los mismos sobre los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda(x) \langle out | a_+^+(\omega, x) S - S a_-^{\dagger -}(\omega, x) | in \rangle &= \\
= e \sum_{i \in \psi \bar{\psi}} [C_i^+ \lambda(z_i^+) - C_i^- \lambda(z_i^-)] \langle out | S | in \rangle & \quad (4.14) \\
\text{con } C_i = \begin{cases} 1 & \text{para } \psi \\ -1 & \text{para } \bar{\psi} \end{cases} &
\end{aligned}$$

esto representa la identidad de Ward para Q_λ [36]. En el apéndice B.1 hay un desarrollo detallado de como obtener la identidad de Ward.

4.3. Teorema Soft para Fotones

El teorema soft para fotones establece que la amplitud de dispersión de un conjunto de partículas con un fotón adicional con energía tendiendo a cero es igual a la amplitud de dispersión sin el fotón adicional multiplicado por un factor soft más correcciones de orden ω^0 [36]

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle out | a_+^+(p) S | in \rangle &= \sum_{i \in \psi \bar{\psi}} e \left[\frac{C_i^+ p_i^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^+ \cdot p} - \frac{C_i^- p_i^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^- \cdot p} \right] \langle out | S | in \rangle + \mathcal{O}(\omega^0) \\
&= - \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle out | S a_-^{\dagger -}(p) | in \rangle
\end{aligned} \quad (4.15)$$

donde $p^\mu = \omega q^\mu$ es el momento del fotón soft. Tomando los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$ en la base de ondas planas

$$|in\rangle = |p_1^-, \dots, p_n^-\rangle, \quad |out\rangle = |p_1^+, \dots, p_m^+\rangle \quad (4.16)$$

también se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \sum_{i \in \psi \bar{\psi}} e \left[\frac{C_i^+ p_i^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^+ \cdot p} - \frac{C_i^- p_i^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^- \cdot p} \right] \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) + \mathcal{O}(\omega^0) \quad (4.17)$$

siendo $\mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})$ la amplitud sin el fotón adicional.

Para derivar la ecuación (4.17) consideramos un proceso de dispersión de un total de n partículas entrantes y m salientes que constituyen un total de $w = n + m$ partículas. Donde dentro del tipo de partículas entrantes y salientes, se tienen fotones, electrones y positrones

Luego agregamos al proceso de dispersión un fotón soft, el cual lo representamos con una línea ondulada de color rojo como se observa en la figura 10 , con momento $p^\mu = \omega q^\mu$.

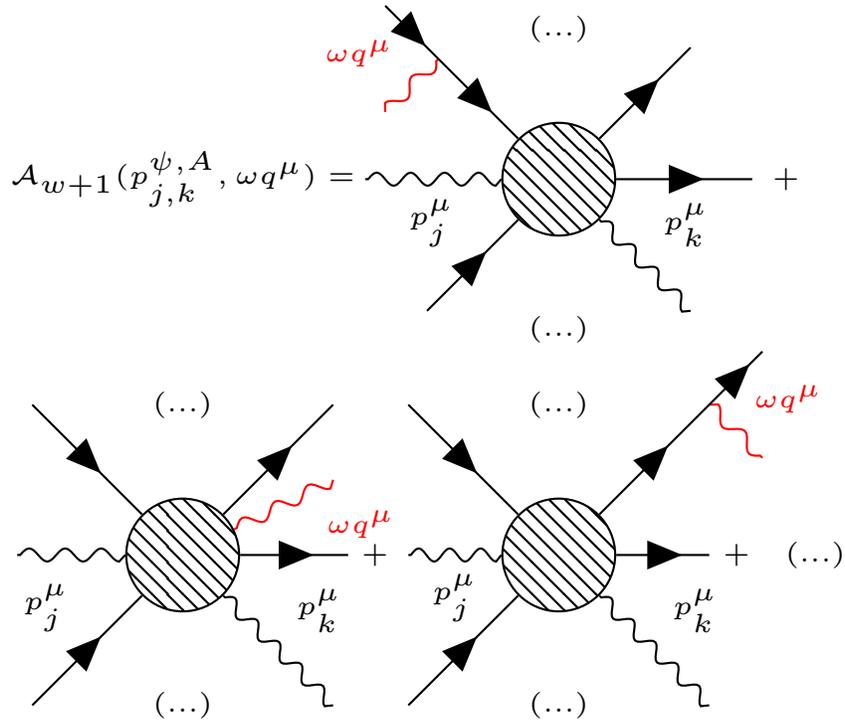


Figura 10: Los diagramas de Feynman representan los posibles procesos de dispersión en donde participa el fotón soft. En el primer y tercer diagrama, el fotón está adherido a un electrón o positrón y en la restante está en una línea interna. Imagen modificada de [36] .

La amplitud de dispersión con el fotón soft adicional se escribe como la suma de dos tipos de términos, uno donde el fotón está sobre a una línea externa y otro donde el fotón está en una línea interna. En el caso que el fotón se encuentra en una de las líneas externas tenemos dos contribuciones, una cuando el fotón está en una partícula entrante y otra en la saliente.

La teoría solo permite que las partículas entrantes y salientes sean positrones y electrones, dejando por fuera los fotones [36]. Consideramos que tenemos un total de j electrones y k positrones entrantes, y por otro lado tenemos un total de j' electrones y k' positrones salientes.

Habiendo hecho esta división, escribimos la amplitud de dispersión con el fotón soft adicional como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) &= \sum_{j \in \psi} \mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^A) + \sum_{k \in \bar{\psi}} \mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^A) + \\ &+ \sum_{j' \in \psi} \mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j',\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^A) + \sum_{k' \in \bar{\psi}} \mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k',\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^A) \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde cada uno de los términos representa la amplitud de dispersión con el fotón adicional sobre un electrón o positrón, ya sea entrante o saliente. Al aplicar las reglas de Feynman que se presentan en la sub-sección 2.3.1, debemos tomar en cuenta que las mismas se dedujeron con la signatura $+- --$ y al estar usando $-++$ debemos agregar un -1 donde se requiera (es decir en casos que se tengan contracciones y donde esté involucrada la métrica $\eta_{\mu\nu}$ como en el caso del propagador del fotón). Para determinar la amplitud de dispersión cuando el fotón esta en una línea externa, primero consideramos off-shell la línea que contiene el fotón, luego tomamos el límite de $\omega \rightarrow 0$ y por último se opera en el numerador del propagador. Al realizar esto obtenemos el producto de un factor soft por la amplitud de dispersión original al considerar on-shell nuevamente la línea que contenía al fotón soft. Cuando el fotón está en el electrón j -ésimo entrante tenemos que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) = e F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \frac{\cancel{p}_j^- - \omega \not{q}}{(p_j^- - \omega q)^2} \gamma^\mu \epsilon_{\mu,+}^* u_s(p_j^-) \quad (4.19)$$

siendo $F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})$ la amplitud de dispersión con la línea que contiene al fotón soft off-shell, el cual representa un espinor. Tomando el límite soft $\omega \rightarrow 0$ el término $\frac{\cancel{p}_j^- - \omega \not{q}}{(p_j^- - \omega q)^2}$ pasa a la forma $\frac{-\cancel{p}_j}{2\omega p_{j,q}}$, ahora para expresar el coeficiente de la forma $\frac{p_{j,\epsilon}^+}{p_{j,q}}$ debemos tomar en cuenta que $\{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} = 2\eta^{\rho\mu}$ y además que $\cancel{p}_i u_s(p_j) = 0$ [26].

Con esto nos queda la siguiente amplitud

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -e F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \frac{p_{j,\nu}^- \gamma^\nu}{2\omega p_j^- \cdot q} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^* u_s(p_j^-) = \\
&= -e F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \frac{p_{j,\nu}^- (2\eta^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu)}{2\omega p_j^- \cdot q} \varepsilon_{\mu,+}^* u_s(p_j^-) = \\
&= -e F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \frac{2p_j^- \cdot \varepsilon^+ - \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^* \not{p}_j^-}{2p_j^- \cdot p} u_s(p_j^-)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

al operar se obtiene que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -e F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \frac{p_j^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_j^- \cdot p} u_s(p_j^-) \tag{4.21}$$

como $\mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) = F_{w-1}(p_{1,\dots,j-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) u_s(p_j^-)$ entonces tenemos que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -e \frac{p_j^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_j^- \cdot p} \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}). \tag{4.22}$$

Para el caso del k-esimo positrón entrante tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) &= -e \bar{v}_s(p_k^-) \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^* \frac{\not{p}_k^- - \omega \not{q}}{(p_k^- - \omega q)^2} F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) \\
&\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} e \bar{v}_s(p_k^-) \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^* \frac{\not{p}_k^-}{2\omega p_k^- \cdot q} F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

siendo $F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})$ la amplitud de dispersión con la línea que contiene al fotón soft off-shell, el cual representa un espinor. Tomando en cuenta que $\not{p}_k = \sum_{s'} v_{s'}(p_k) \bar{v}_{s'}(p_k)$ y además que $\bar{v}_s(p_k) \gamma^\mu v_{s'}(p_k) = 2p_k^\mu \delta_{ss'}$ [53], se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} e \bar{v}_s(p_k^-) \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^* \frac{\sum_{s'} v_{s'}(p_k^-) \bar{v}_{s'}(p_k^-)}{2\omega p_k^- \cdot q} F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) = \\
&= e \varepsilon_{\mu,+}^* \frac{\sum_{s'} 2p_k^{\mu,-} \delta_{ss'} \bar{v}_{s'}(p_k^-)}{2\omega p_k^- \cdot q} F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) = e \frac{p_k^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^- \cdot p} \bar{v}_s(p_k^-) F_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

como $\mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}) = \bar{v}_s(p_k^-) \mathcal{F}_{w-1}(p_{1,\dots,k-1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}})$ se llega a que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} e^{\frac{p_k^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^- \cdot p}} \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}). \quad (4.25)$$

Ahora si el fotón está en un electrón j'-esimo saliente aplicamos crossing symmetry [26], por lo que la amplitud de dispersión para un positrón entrante es igual a la amplitud de dispersión de un electrón saliente con el momento opuesto. Con lo dicho establecemos que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,j',\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} e^{\frac{p_{j'}^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_{j'}^+ \cdot p}} \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}). \quad (4.26)$$

Para el caso del k'-esimo positrón saliente, aplicamos nuevamente crossing symmetry. Donde la amplitud de dispersión de un positrón saliente es igual a la amplitud de dispersión de un electrón entrante con el momento opuesto.

Con esto podemos decir que

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,k',\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -\frac{p_{k'}^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_{k'}^+ \cdot p} \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A}). \quad (4.27)$$

En el caso de estar en una de las líneas internas se tiene el siguiente diagrama como se observa en la figura 11 , que corresponde a una parte del proceso de dispersión.

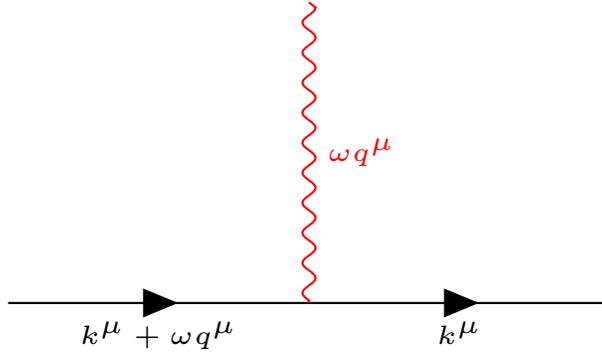


Figura 11: Diagrama que describe como es el comportamiento de parte del proceso de dispersión cuando el fotón está en una línea interna.

Al calcular encontramos que

$$ie \frac{\mathcal{K} - \omega q}{(k - \omega q)^2} \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* + \frac{\mathcal{K}}{k^2} \quad (4.28)$$

donde tomando el limite de ω tendiendo a cero tenemos

$$ie \frac{\mathcal{K} \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* + \mathcal{K}}{k^4} \quad (4.29)$$

de tal forma que el fotón soft en una linea interna no contribuye al teorema soft, ya que no presenta un polo en ω , es decir que representa un termino del $\mathcal{O}(\omega^0)$.

Sumando en todas las partículas entrantes y salientes

$$\mathcal{A}_{w+1}(p_{1,\dots,w}^{\psi,A,\bar{\psi}}, \omega q_+^{\mu,A}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \sum_{i \in \psi\bar{\psi}} e \left[\frac{C_i^+ p_i^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^+ \cdot p} - \frac{C_i^- p_i^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_i^- \cdot p} \right] \mathcal{A}_w(p_{1,\dots,w}^{\psi,A}) + \mathcal{O}(\omega^0) \quad (4.30)$$

obtenemos el teorema soft para fotones [36]. En el apéndice B.3 se encuentra un ejemplo para el caso de un total de cuatro partículas, donde se muestra en detalle como se opera para derivar el teorema soft usando diagramas de Feynman.

4.4. Equivalencia entre la Identidad de Ward y el Teorema Soft

Para mostrar la equivalencia entre la identidad de Ward (4.14) y el teorema soft para fotones debemos elegir una función $\lambda(x)$ en este caso vamos a tomar que $\lambda(w, \bar{w}) = \frac{1}{z-w}$ con $\partial_{\bar{z}}\lambda(w, \bar{w}) = 2\pi\delta^{(2)}(z-w)$ sustituyendo en (4.14) tenemos que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle out|a_+^\dagger(p)S - Sa_-^\dagger(p)|in \rangle = \frac{e}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \left[\frac{C_k^+}{z - z_k^+} - \frac{C_k^-}{z - z_k^-} \right] \quad (4.31)$$

Para ir de la ecuación (4.15) a la (4.31) primero debemos plantear por invarianza CPT [36] que

$$\langle out|a_+^\dagger(p)S|in \rangle = - \langle out|Sa_-^\dagger(p)|in \rangle \quad (4.32)$$

además se tienen que considerar la relaciones (3.55) para pasar al espacio de Fock asintótico.

Después tenemos que expresar el momento en término de la energía ω y las coordenadas de la esfera conforme, en nuestro caso elegimos que $p_k^\mu = \omega_k q^\mu(x_k)$ para cada partícula hard y $p^\mu = \omega q^\mu(x)$ el momento del fotón soft que tiene las polarizaciones posibles dadas según (3.50) [36]. Operando en el teorema del fotón soft usando el resultado de producto interno (3.47), las polarizaciones (3.50) y además tomando la contribución de los fotones soft entrantes y salientes recuperamos la identidad de Ward(4.31). En el apéndice B.2 se muestra el calculo detallado. Esta equivalencia es uno de los resultados fundamentales del trabajo de Strominger ya que muestra la conexión explicita entre la simetría de gauge asintótica que se denomina como large gauge y el teorema soft por medio de una identidad de Ward [36].

5. Electrón y Positrón Soft

En esta sección vamos a introducir por primera vez los teoremas soft para electrones y positrones. Por medio de la equivalencia entre la identidad de Ward y el teorema soft encontramos la carga asociada al electrón y positrón soft. Luego se determinan las transformaciones que generan dichas cargas, realizando una primera discusión de los resultados. Por ultimo se calcula el álgebra que generan las cargas obtenidas a partir de la simetrías la teoría, procediéndose a realizar un primer análisis de los resultados.

5.1. Teorema Soft para Electrones y Positrones

El teorema soft se puede aplicar para otros tipos de partículas [1–4, 9, 48, 49], en este caso al estar analizando la QED para espinores sin masa podemos aplicar el teorema al electrón y positrón, que corresponde a la situación donde los mismos poseen momento $p^\mu = \omega q^\mu$ y $\omega \rightarrow 0$. Al igual que el caso anterior, para presentar el teorema soft para las partículas en cuestión vamos a considerar un proceso de dispersión en el que participan un total de n partículas, dentro del proceso vamos a considerar que participan electrones, positrones y fotones.

Primero presentamos el teorema soft para electrones. De forma similar al fotón soft, la amplitud de dispersión con un electrón soft adicional es igual al elemento de matriz S con un intercambio de partícula hard, multiplicado por un factor soft que queda determinado por el vértice donde interactúan las partículas hard y la soft. Este factor además de ser multiplicativo posee el efecto del intercambio de partículas hard. Como en la situación anterior podemos plantear diagramas a nivel árbol como se observan en la figura 12 , en donde el electrón va a contribuir en la amplitud si el mismo esta sobre una de las lineas externas. Es decir que puede emerger de un positrón o fotón que constituyen partículas hard. En la situación de que el electrón emerge de un positrón se adiciona un fotón en la linea interna, mientras que si este emerge de un fotón se agrega un electrón en la linea interna. Debemos adicionar estas partículas como lineas internas con el fin de asegurar la conservación de la carga en el proceso de dispersión con esta partícula soft adicional.

En el caso de que el electrón esté en una línea interna (propagador de un fermión o de un fotón), este no va a contribuir en el teorema soft, ya que no vamos a encontrar un factor que contenga un polo en ω . De tal forma que la amplitud de dispersión con un electrón soft adicional con helicidad s se expresa como

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{A,\bar{\psi}}\}, \omega q_s^\psi) = \mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_s^\psi) + \mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_s^\psi) + \mathcal{A}_{n+1}(\{\eta_{\mu\nu}, \not{p}\}, \omega q_s^\psi) \quad (5.1)$$

siendo $\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_s^\psi)$ la amplitud de dispersión con el electrón soft adicional únicamente sobre los fotones, mientras que $\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_s^\psi)$ esta restringida a solamente el electrón soft sobre los positrones. El ultimo termino $\mathcal{A}_{n+1}(\{\eta_{\mu\nu}, \not{p}\}, \omega q_s^\psi)$ es la amplitud para el caso en que el electrón soft está sobre una línea interna (propagador de un fermión o de un fotón), el cual no contribuye en el teorema soft.

Para construir el teorema soft para electrones a partir de los diagramas es necesario poder aislar el vértice que contiene la partícula soft. Para hacer esto lo primero que se debe hacer es considerar off-shell la línea que contiene al electrón soft y tomar el límite de ω tendiendo a cero. Luego de esto se busca escribir el propagador de manera tal de obtener una amplitud de dispersión para tres partículas y una amplitud de dispersión de n partículas teniendo off-shell la partícula que se adiciona como línea interna como se observa en la figura 13 . Al realizar esto ultimo se considera on-shell la partícula que se agrega como línea interna. Con esto se obtiene el producto de un factor soft con la amplitud de dispersión, donde ambos presentan el intercambio de partículas hard.

Para determinar la amplitud de dispersión para los casos posibles vamos a considerar a las n partículas como salientes, ya que aplicando crossing symmetry la contribución en la amplitud va a ser la misma para las entrantes [26]. Además para los cálculos se toma en consideración los factores de -1 que puedan aparecer por el cambio de signatura en la métrica.

Primero se determina la amplitud para cuando el electrón con helicidad positiva está sobre un fotón

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^\psi) = -e\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu \epsilon_{\nu,s}^* \frac{(\not{p}_k + \omega \not{q})}{(p_k + \omega q^\mu)^2} F_{n-1}(p_{k-1}^{\bar{\psi},A}) \quad (5.2)$$

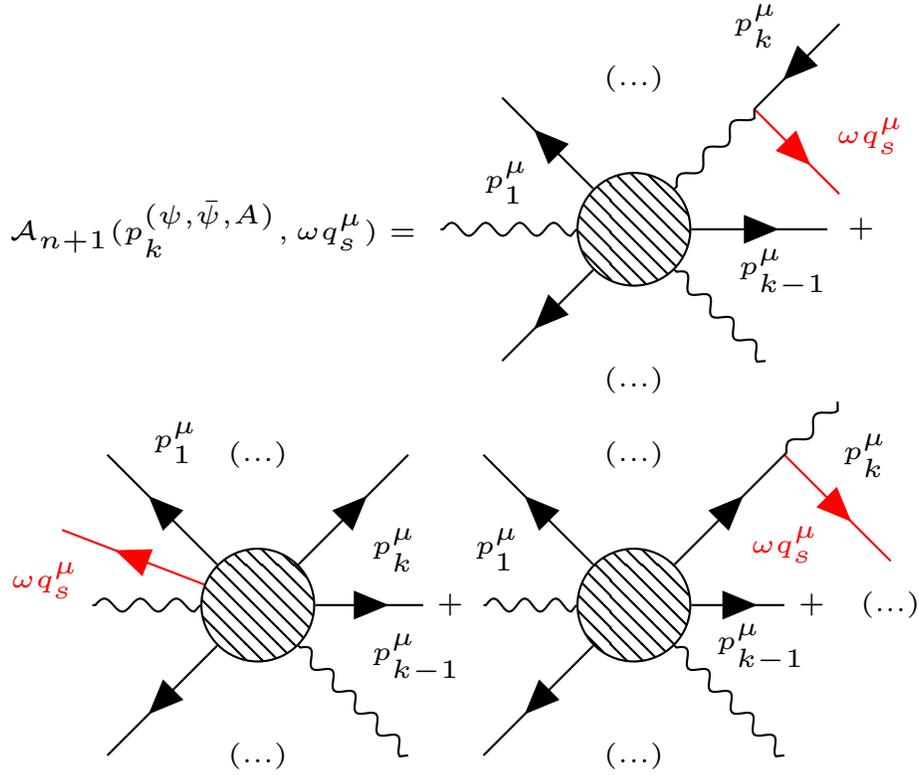


Figura 12: Los diagramas de Feynman representan los posibles procesos de dispersión en los que participa el electrón soft (representado en color rojo). El primero representa cuando este está en un positrón y el restante corresponde al estar en un fotón. Se pueden observar los cambios de tipo de partícula hard para los respectivos procesos.

siendo $F_{n-1}(p_{k-1}^{\bar{\psi}, A})$ la amplitud de dispersión con la línea off-shell donde se encuentra el electrón soft, representando un espinor. Tomando el límite de $\omega \rightarrow 0$, aplicando la propiedad $\sum_s u_s(p)\bar{u}(p) = \not{p}$ y además que $p_k^2 = (\omega q_k)^2 = 0$ entonces la amplitud esta se reduce a

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^{\psi}) = -e\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu \epsilon_{\nu, s}^* \frac{\sum_{s'} u_{s'}(p_k)\bar{u}_{s'}(p_k)}{2\omega q \cdot p_k} F_{n-1}(p_{k-1}^{\bar{\psi}, A}). \quad (5.3)$$

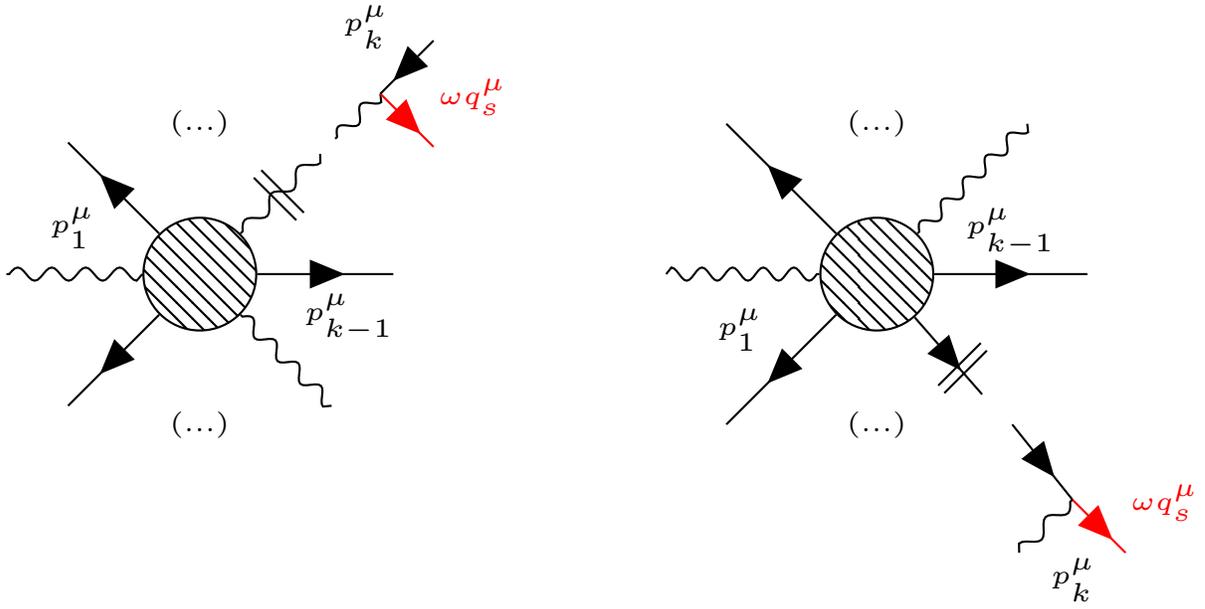


Figura 13: Diagramas que describen el objetivo que se quiere cumplir para hacer aparecer el factor soft en los casos de tener amplitud de dispersión con electrón o positrón soft adicional.

Ahora se analiza el término $\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu u_{s'}(p_k)$, a este lo podemos descomponer como $u_+^\dagger(\omega q)\gamma^0\gamma^\nu u_{s'}(p_k)$, la matriz $\gamma^0\gamma^\nu$ con las matrices γ^ν de la forma (2.13) tiene la siguiente forma

$$\gamma^0\gamma^\nu = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \sigma^\nu \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

siendo

$$\bar{\sigma}^\nu = (1, -\sigma^i) \quad \sigma^\nu = (1, \sigma^i) \quad (5.5)$$

donde $\gamma^0\gamma^\nu$ es una matriz diagonal y con los u_s de la forma (3.52) tenemos que el término $\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu u_{s'}(p_k)$ es no cero para $s' = +$

$$u_+^\dagger(\omega q)\gamma^\nu u_+(p_k) = \bar{u}_+(\omega q)\sigma^\nu u_+(p_k) \quad (5.6)$$

el cual representa un vector que tiene las siguientes entradas en las coordenadas del plano conforme.

$$u_+^\dagger(\omega q)\sigma^\nu u_+(p_k) = \sqrt{2\omega\omega_k} (1 + \bar{z}z_k, \bar{z} + z_k, i(\bar{z} - z_k), 1 - \bar{z}z_k) \quad (5.7)$$

A su vez el termino $\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu u_+(p_k)$ contraído con una polarización del fotón que puede ser positiva o negativa, en este caso el factor $\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu u_+(p_k)\epsilon_\nu^{s*}$. Tomando la definición de polarización en términos de $q^\mu(x)$ según (3.50) encontramos que el termino es distinto de cero para $s = +$

$$u_+^\dagger(\omega q)\sigma^\nu u_+(p_k)\epsilon_\nu^{+*} = 2\sqrt{\omega\omega_k}(\bar{z} - z_k) \quad (5.8)$$

ademas tomando el resultado de la ecuación (3.47) el factor soft en las coordenadas conformes es el siguiente

$$-e \frac{\bar{u}_+(\omega q)\not{\epsilon}_k^{+*} u_+(p_k)}{2\omega q \cdot p_k} = \frac{e}{\sqrt{\omega\omega_k}(z - z_k)}. \quad (5.9)$$

Entonces sumando en todas las contribuciones de los fotones salientes y con $p^\mu = \omega q^\mu$ tenemos que

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^\psi) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} - \sum_{i \in A_+} e \frac{\bar{u}_+(\omega q)\not{\epsilon}_+^{+*} u_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_+}^A \rightarrow p_{k_+}^\psi, \dots). \quad (5.10)$$

donde la amplitud es igual al producto de un factor soft y la amplitud original solo con un cambio de partícula hard, donde cambiamos un fotón por un electrón. En el caso que tenemos el electrón soft está sobre un positrón la amplitud se escribe como

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = - \frac{e\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu \eta_{\mu\nu} v_s(p_k)}{(p_k + \omega q)^2} F_{n-1}^\mu(p_{k-1}^{\bar{\psi}, A}) \quad (5.11)$$

siendo $F_{n-1}^\mu(p_{k-1}^{\bar{\psi}, A})$ un vector. Igual que en la parte anterior $\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu v_s(p_k)$ este termino es distinto de cero si $s = -$ ya que $u_+ = v_-$.

Desarrollando la métrica $\eta_{\mu\nu}$ de la forma (3.51) tenemos que el último termino en la amplitud no contribuyen ya que representan ecuaciones de la forma $\not{p}u_s(p) = 0$ y $p_\mu \mathcal{F}_{n-1}^\mu(p_{k-1}^{\bar{\psi},A}) = 0$ (identidad de Ward) [26] . Quedando solo los términos de las polarizaciones. Llegando a que la amplitud es

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = -\frac{e\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu(\varepsilon_{\mu,+}\varepsilon_{\nu,+}^* + \varepsilon_{\mu,-}\varepsilon_{\nu,+}^*)u_+(p_k)}{(p_k + \omega q)^2} F_{n-1}^\mu(p_{k-1}^{\bar{\psi},A}) \quad (5.12)$$

usando el resultado anterior el único termino que contribuye es el primero. Además tomando el límite de $\omega \rightarrow 0$ y que $p_k^2 = (\omega q)^2 = 0$ la amplitud queda de la forma

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = -\frac{e\bar{u}_+(\omega q)\gamma^\nu\varepsilon_{\nu,+}^*u_+(p_k)}{2\omega q \cdot p_k} \varepsilon_{\mu,+} \mathcal{F}_{n-1}^\mu(p_{k-1}^{\bar{\psi},A}) \quad (5.13)$$

de tal forma que obtenemos el mismo factor soft que en el caso anterior, donde la amplitud de dispersión original se ve modificada ya que intercambiamos un positrón saliente de helicidad negativa por un fotón saliente con la misma helicidad ya que $\varepsilon_{\nu,-}^* = \varepsilon_{\nu,+}$. Sumando en todos los positrones salientes tenemos que la amplitud es

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = -\sum_{k \in \bar{\psi}_-} e \frac{\bar{u}_+(\omega q)\not{\varepsilon}_+^*u_+(p_k)}{2\omega q \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k-}^{\bar{\psi}} \rightarrow p_{k-}^A, \dots) \quad (5.14)$$

donde se genera un cambio de partículas hard siendo en este caso un positrón por un fotón de helicidad negativa respectivamente. Con esto concluimos que la interacción QED fija las helicidades de las líneas internas y externas donde está el electrón soft en términos de la helicidad del primero (esto es por conservación del momento angular).

Tomando en concreto al electrón soft con helicidad positiva y llamando p_k el momento de la partícula hard, el teorema de electrón soft para helicidad positiva tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{A,\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -\sum_{k \in A_+} e \frac{\bar{u}_+(p)\not{\varepsilon}_+^*u_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k+}^A \rightarrow p_{k+}^\psi, \dots) \\ &- \sum_{k \in \bar{\psi}_-} e \frac{\bar{u}_+(p)\not{\varepsilon}_+^*u_+(p_i)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k-}^{\bar{\psi}} \rightarrow p_{k-}^A, \dots). \end{aligned} \quad (5.15)$$

En el caso de un electrón soft con helicidad negativa operando de la misma manera encontramos que para ambos casos (al estar sobre un fotón o un positrón) el factor soft está dado por

$$-e \frac{\bar{u}_-(p) \not{\epsilon}^* u_-(p_k)}{2p \cdot p_k} = \frac{e}{\sqrt{\omega \omega_k} (\bar{z} - \bar{z}_k)} \quad (5.16)$$

y en la amplitud se generan los mismos intercambios de partículas pero con las helicidades intercambiadas con respecto al caso del electrón soft con helicidad positiva. En el caso que el electrón soft (ya sea de helicidad positiva o negativa) está en una línea interna se tiene diagrama constituido por la partícula soft y dos propagadores uno de un fotón y otro de un fermión como se observa en la figura 14. Al calcular dicho diagrama encontramos

$$ie\bar{u}_s(\omega q) \frac{\not{k} - \omega \not{q}}{(k - \omega q)^2} \gamma^\mu \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \stackrel{\omega \rightarrow 0}{\equiv} ie\bar{u}_s(\omega q) \gamma^\mu \frac{\not{k}}{k^4} g_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

al tomar el limite de ω tendiendo a cero encontramos que este termino no va a contribuir con un factor soft(no encontramos un polo en ω).

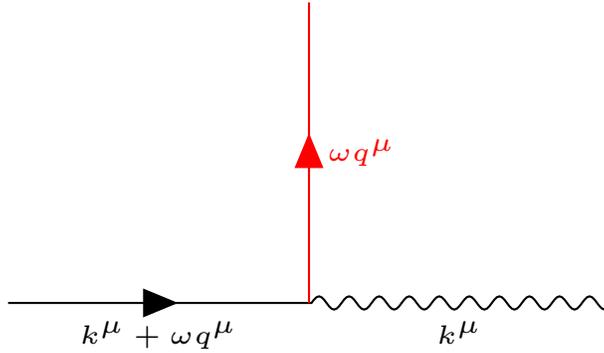


Figura 14: Diagrama que describe parte del proceso de dispersión donde participa el electrón soft en una línea interna. Donde se tiene un electrón soft saliente y dos propagadores uno de un fermión y el otro de un fotón.

De tal forma que para un electrón soft con helicidad s el teorema se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^X\}, \omega q_s^\psi) &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} - \sum_{k \in A_s} e \frac{\bar{u}_s(p) \not{\epsilon}_s^* u_s(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_s}^A \rightarrow p_{k_s}^\psi, \dots) \\ &- \sum_{k \in \bar{\psi}_{-s}} e \frac{\bar{u}_s(p) \not{\epsilon}_s^* u_s(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_{-s}}^{\bar{\psi}} \rightarrow p_{k_{-s}}^A, \dots) + \mathcal{O}(\omega^0). \end{aligned} \quad (5.18)$$

En el caso del positrón soft tomamos nuevamente las n partículas todas salientes y luego aplicamos crossing symmetry al tomar en cuenta las entrantes. En este caso las partículas hard van a ser electrones y fotones. Donde la amplitud de dispersión con el positrón soft adicional se comporta de forma similar al caso del electrón soft. Si este está sobre un fotón entrante se agrega un positrón en una línea interna, si la partícula soft está sobre un electrón debemos agregar un fotón en una línea interna. En este caso al igual que el anterior la helicidad de las partículas hard se fija por medio de la teoría. Para obtener la amplitud de dispersión se aplica el mismo procedimiento que el presentado al inicio de esta sub-sección. En el caso de que un positrón soft de helicidad positiva se encuentra sobre un fotón la amplitud de dispersión es la siguiente

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^{\bar{\psi}}) = -e F'_{n-1}(p_{k-1}^{\psi, A}) \frac{(\not{p}_k + \omega \not{q})}{(p_k + \omega q^\mu)^2} \gamma^\nu \epsilon_{\nu, s}^* v_+(\omega q) \quad (5.19)$$

siendo $F'_{n-1}(p_{k-1}^{\psi, A})$ un espinor que representa la amplitud de dispersión original pero con la línea que contiene la interacción off-shell. Tomando el límite de la frecuencia tendiendo a cero, que las partículas son sin masa y que $\sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p}$ tenemos

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^{\bar{\psi}}) = -e F'_{n-1}(p_{k-1}^{\psi, A}) \frac{\sum_{s'} v_{s'}(p_k) \bar{v}_{s'}(p_k)}{2\omega p_k \cdot q} \gamma^\nu \epsilon_{\nu, s}^* v_+(\omega q). \quad (5.20)$$

Ahora nos interesa analizar el término $\bar{v}_+(\omega q) \gamma^\nu v_{s'} = v_+^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu v_{s'}$. Tenemos nuevamente la matriz $\gamma^0 \gamma^\nu$ que según el comportamiento mostrado y dada la forma de $v_s(p)$ dados por (3.52) tenemos que solamente se puede admitir a $s' = +$. Además como el factor que estamos analizando está contraído con la polarización del fotón $v_+^\dagger(\omega q) \bar{\sigma}^\nu v_+(p_k) \epsilon_\nu^{s*}$, este es distinto de cero si solo si $s = +$.

$$v_+^\dagger(p_k)\bar{\sigma}^\nu v_+(\omega q)\epsilon_{\nu+}^* = 2\sqrt{\omega\omega_k}(\bar{z} - \bar{z}_k) \quad (5.21)$$

tomando nuevamente el factor soft en las coordenadas conformes

$$-e\frac{\bar{v}_+(p_k)\not{x}_+^*v_+(\omega q)}{2pp_k} = -\frac{e}{\sqrt{\omega\omega_k}(z - z_k)} \quad (5.22)$$

La amplitud de dispersión para el positrón soft tomando la contribución de todos los fotones es

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^A\}, \omega q_+^{\bar{\psi}}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -\sum_{k \in A_+} e\frac{\bar{v}_+(\omega q)\not{x}_+^*v_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_+}^A \rightarrow p_{k_+}^{\bar{\psi}}, \dots). \quad (5.23)$$

donde intercambiamos de la amplitud original un fotón por un positrón. Ahora si el positrón esta sobre un electrón tenemos

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = -eF'_{n-1}{}^\mu(p_{k-1}^{\psi,A})\frac{\bar{u}_s(p_k)\gamma^\nu g_{\mu\nu}v_+(\omega q)}{(p_k + \omega q)^2} \quad (5.24)$$

siendo $F'_{n-1}{}^\mu(p_{k-1}^{\psi,A})$ el mismo que se presentó anteriormente. Nuevamente tenemos un termino asociado con la matriz $\gamma^0\gamma^\nu$ que en este caso $s = -$ ya que $u_- = v_+$ para obtener una amplitud distinta de cero. Haciendo el mismo procedimiento y tomando las mismas condiciones para reducir la amplitud como en el caso del electrón soft sobre un positrón se llega a que

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^{\bar{\psi}}\}, \omega q_+^\psi) = -eF'_{n-1}{}^\mu(p_{k-1}^{\psi,A})\frac{\bar{v}_+(p_k)\gamma^\nu(\varepsilon_{\mu,+}\varepsilon_{\nu,+}^* + \varepsilon_{\mu,-}\varepsilon_{\nu,+}^*)v_+(\omega q)}{2p \cdot p_k} \quad (5.25)$$

el único factor del numerador distinto de cero es el que tiene $\varepsilon_{\mu,+}\varepsilon_{\nu,+}^*$. Con esto se obtiene el mismo factor soft para la situación anterior. Sumando en todos los electrones salientes tenemos que la amplitud de dispersión es

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^\psi\}, \omega q_+^{\bar{\psi}}) = -\sum_{k \in \psi_-} e\frac{\bar{v}_+(\omega q)\not{x}_+^*v_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_-}^\psi \rightarrow p_{i_-}^A, \dots) \quad (5.26)$$

donde se intercambia un electrón por un fotón. El teorema soft para un positrón con helicidad positiva se expresa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^X\}, \omega q_+^{\bar{\psi}}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} & - \sum_{k \in A_+} e \frac{\bar{v}_+(\omega q) \not{\xi}_+^* v_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_+}^A \rightarrow p_{k_+}^{\bar{\psi}}, \dots) \\
& - \sum_{k \in \psi_-} e \frac{\bar{v}_+(\omega q) \not{\xi}_+^* v_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_-}^{\psi} \rightarrow p_{i_-}^A, \dots)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

En el caso de tener positrón soft con helicidad negativa se opera de forma análoga al caso de helicidad positiva donde se obtiene el mismo intercambio de partículas pero con las helicidades intercambias y el factor soft en este caso es

$$-e \frac{\bar{v}_-(\omega q) \not{\xi}_-^* v_-(p_k)}{2p \cdot p_k} = -\frac{e}{\sqrt{\omega \omega_k} (\bar{z} - \bar{z}_k)}. \tag{5.28}$$

En el caso que el positrón soft se encuentra en una linea interna, de igual manera que el electrón soft este no va a contribuir con un factor soft. Donde el teorema soft para positrones con helicidad s es

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{n+1}(\{p_k^X\}, \omega q_s^{\bar{\psi}}) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} & - \sum_{k \in A_s} e \frac{\bar{v}_s(\omega q) \not{\xi}_s^* v_s(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_s}^A \rightarrow p_{k_s}^{\bar{\psi}}, \dots) \\
& - \sum_{k \in \psi_{-s}} e \frac{\bar{v}_s(\omega q) \not{\xi}_s^* v_s(p_k)}{2p \cdot p_k} \mathcal{A}_n(\dots, p_{k_{-s}}^{\psi} \rightarrow p_{i_{-s}}^A, \dots).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2. Carga del Electrón y Positrón Soft

Como ya sabemos el teorema soft está relacionado con una identidad de Ward que establece la conservación de la carga en \mathcal{I}^\pm , que da a lugar a una simetría asintótica. Ya habiendo presentado el teorema soft para electrones y positrones, dada la relación mencionada se debe poder encontrar las cargas conservadas Q_ψ y $Q_{\bar{\psi}}$. Como en el caso de Q_λ , la carga Q_ψ y $Q_{\bar{\psi}}$ van a tener un termino soft que va a ser el asociado al electrón soft, más un termino hard que va estar relacionado con las partículas hard. Por lo tanto elegimos la carga $Q_{\psi+}$, de forma tal de recuperar el teorema soft para electrones con helicidad positiva en el espacio de Fock al aplicar la identidad de Ward. Donde los operadores que constituyen la carga deben generar los intercambios de partículas, cuando el electrón soft esta sobre a las partículas hard (positrones o fotones). En este caso,

$$Q_{\psi+}(p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} b_+(p) + \frac{e\sqrt{2\omega}}{4\pi i} \int d\tilde{p}_k \frac{\bar{u}_+(p) \not{\epsilon}_+^* u_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \left(a_+^\dagger(p_k) b_+(p_k) + c_-^\dagger(p_k) a_-(p_k) \right) \quad (5.30)$$

donde los operadores de Fock son aquellos con la normalización de (3.42). Ahora expresamos el momento en función de la energía y las coordenadas de la esfera conforme con $p^\mu = \omega q^\mu(x)$.

Usando el factor soft (5.9) y la relación entre los operadores de momento y los asintóticos (3.55) la carga queda expresada en función de ω, x . El primer termino de (5.30) usando (3.55) obtenemos de forma directa

$$\frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} b_+(p) = b_+(\omega, x) \quad (5.31)$$

el término de la integral debe de manipularse un poco más

$$\begin{aligned} & \frac{e\sqrt{2\omega}}{4\pi i} \int d\tilde{p}_k \frac{\bar{u}_+(p) \not{\epsilon}_+^* u_+(p_k)}{2p \cdot p_k} \left(a_+^\dagger(p_k) b_+(p_k) + c_-^\dagger(p_k) a_-(p_k) \right) = \\ & - \frac{e\sqrt{2}}{4\pi i} \int \frac{d\omega_k d^2 x_k \omega_k}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_k} (z - z_k)} \left(a_+^\dagger(p_k) b_+(p_k) + c_-^\dagger(p_k) a_-(p_k) \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

despejando los operadores $a_+^\dagger(p_k)$, $b_+(p_k)$, $c_-^\dagger(p_k)$, $a_-(p_k)$ de (3.55) en función de ω , x y sustituyendo en (5.32)

$$\begin{aligned}
& -\frac{e\sqrt{2}}{4\pi i} \int \frac{d\omega_k d^2x_k \omega_k}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_k}(z-z_k)} \left(a_+^\dagger(p_k) b_+(p_k) + c_-^\dagger(p_k) a_-(p_k) \right) \\
&= \frac{e}{4\pi i} \int \frac{d\omega_k d^2x_k \sqrt{2\omega_k}}{4\pi(2\pi)^2(z-z_k)} \frac{(4\pi i)^2}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_+^\dagger(\omega_k, x_k) b_+(\omega_k, x_k) + c_-^\dagger(\omega_k, x_k) a_-(\omega_k, x_k) \right) \\
&= \frac{ie}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{z-z_k} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(a_+^\dagger(\omega_k, x_k) b_+(\omega_k, x_k) + c_-^\dagger(\omega_k, x_k) a_-(\omega_k, x_k) \right)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

de tal forma que obtenemos la siguiente expresión de la carga

$$\begin{aligned}
Q_{\psi_+}(\omega, x) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} b_+(\omega, x) + \\
&+ \frac{ie}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{(z-z_k)} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(a_+^\dagger(\omega_k, x_k) b_+(\omega_k, x_k) + c_-^\dagger(\omega_k, x_k) a_-(\omega_k, x_k) \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Usando las relaciones (3.40), encontramos que el primer termino

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} b_+(\omega, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \psi_+(u, x) =: \psi_+(x) \tag{5.35}$$

mientras que para la integral de frecuencia tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} (\dots) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(\tilde{A}_{\bar{z}}(-\omega_k, x_k) \tilde{\psi}_+(\omega_k, x_k) + \tilde{\psi}_+(-\omega_k, x_k) \tilde{A}_{\bar{z}}(\omega_k, x_k) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} du A_{\bar{z}}(u, x_k) \psi_+(u, x_k) := \sigma_{\bar{z}}(x).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por lo tanto, la carga no promediada asociada a la factorización del electrón soft con helicidad positiva es

$$Q_{\psi_+}(x) = \psi_+(x) + ie \partial_{\bar{z}}^{-1} \sigma_{\bar{z}}(x) \tag{5.37}$$

siendo $(\partial_{\bar{z}}^{-1} f) := \frac{1}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{z-z_k} f(x_k)$. Si se factoriza el operador derivada inverso la carga se puede escribir como

$$Q_{\psi_+}(x) = \partial_{\bar{z}}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} du D_{\bar{z}} \psi_+(x) \tag{5.38}$$

con $D_a\psi_s = (\partial_a + ieA_a)\psi_s$ la derivada covariante de gauge $U(1)$ en el infinito nulo. Para obtener la carga en caso de tener helicidad negativa la carga tiene la misma forma en términos de los operadores de Fock pero difieren en la helicidad. Al pasar al espacio de Fock asintótico usamos el factor soft (5.16) y operando de la misma forma en los operadores obtenemos en ω, x

$$Q_{\psi_-}(\omega, x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} b_-(\omega, x) + \frac{ie}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_k)} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \left(a_-^\dagger(\omega_k, x_k) b_-(\omega_k, x_k) + c_+^\dagger(\omega_k, x_k) a_+(\omega_k, x_k) \right) \quad (5.39)$$

el primer factor lo expresamos como

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} b_-(\omega, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \psi_-(u, x) =: \psi_-(x) \quad (5.40)$$

mientras que el segundo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} (\dots) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(\tilde{A}_z(-\omega_k, x_k) \tilde{\psi}_-(\omega_k, x_k) + \tilde{\psi}_-(-\omega_k, x_k) \tilde{A}_z(\omega_k, x_k) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du A_z(u, x_k) \psi_-(u, x_k) := \sigma_{z-}(x). \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde la carga no promediada queda expresada como

$$Q_{\psi_-}(x) = \psi_-(x) + ie\partial_z^{-1}\sigma_{z-}(x) \quad (5.42)$$

factorizando el operador diferencial inverso tenemos que

$$Q_{\psi_-}(x) = \partial_z^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} du D_z \psi_-(x) \quad (5.43)$$

Basándonos en el hecho de que $\lambda(x)$ es una función de peso definida en la esfera conforme que nos permite evaluar la carga Q_λ . Entonces si se quiere encontrar la carga evaluada en \mathcal{I}^\pm usando la definición de ∂_z^{-1} . Debemos integrar por una función de peso en la esfera conforme que en este caso consideramos los espinores-vectores

$$\chi(x) = (\chi_+^z(x), \chi_-^{\bar{z}}(x)). \quad (5.44)$$

Definimos las cargas

$$F_\chi := \int_{\mathcal{I}} d^2x du [\chi_+^{*\bar{z}}(x) D_{\bar{z}} \psi_+(x) + \chi_-^{*z}(x) D_z \psi_-(x)]. \quad (5.45)$$

Para el caso de la carga $Q_{\bar{\psi}}$ se aplica el mismo procedimiento que para Q_ψ . En este caso la carga se expresa en términos de los operadores respetando el intercambio de partículas hard que se presentan en el teorema soft para positrones. La carga con helicidad positiva adquiere la siguiente expresión en el espacio de Fock

$$Q_{\bar{\psi}_+}(p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} c_+(p) + e \frac{\sqrt{2\omega}}{4\pi i} \int d\tilde{p}_k \frac{\bar{v}_+(p_k) \not{\epsilon}_+^* v_+(p)}{2p \cdot p_k} [a_+^\dagger(p_k) c_+(p_k) + b_-^\dagger(p_k) a_-(p_k)] \quad (5.46)$$

usando las relaciones (3.40), la expresión del factor (5.22) y nuevamente operando de la misma forma con los operadores, la carga queda expresada en el espacio de Fock asintótico como

$$Q_{\bar{\psi}_+}(x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_+(\omega, x) - \frac{ie}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{(z - z_k)} \int_0^\infty \frac{d\omega_k}{2\pi} [a_+^\dagger(\omega_k, x_k) c_+(\omega_k, x_k) + b_-^\dagger(\omega_k, x_k) a_-(\omega_k, x_k)] \quad (5.47)$$

el primer término lo expresamos de la siguiente forma

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_+(\omega, x) = \int_{-\infty}^\infty du \psi_-^*(u, x) =: \psi_-^*(x) \quad (5.48)$$

el segundo término

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\omega_k}{2\pi} (\dots) &= \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \left(\tilde{A}_{\bar{z}}(-\omega_k, x_k) \tilde{\psi}_-^*(-\omega_k, x_k) + \tilde{\psi}_-^*(\omega_k, x_k) \tilde{A}_{\bar{z}}(\omega_k, x_k) \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty du A_{\bar{z}}(u, x_k) \psi_-^*(u, x_k) := \sigma_{\bar{z}}(x). \end{aligned} \quad (5.49)$$

llegando a la siguiente expresión para la carga no promediada en el caso de helicidad positiva

$$Q_{\bar{\psi}_+}(x) = \psi_-^*(x) - ie \partial_{\bar{z}}^{-1} \sigma_{\bar{z}}(x) \quad (5.50)$$

factorizando el operador diferencial inverso y usando que $D_a\psi_s^* = (\partial_a - ieA_a)\psi_s$ podemos expresar a (5.50) como

$$Q_{\bar{\psi}_+}(x) = \partial_{\bar{z}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} du D_{\bar{z}} \psi_-^*(x) \quad (5.51)$$

Para el caso de la helicidad negativa se procede de la misma manera, lo único que se ve modificado es la helicidad de los operadores en cada uno de los términos. En este caso la expresión de la carga en el espacio de Fock asintótico es la siguiente

$$Q_{\bar{\psi}_-}(x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_-(\omega, x) + \quad (5.52)$$

$$-\frac{ie}{2\pi} \int d^2x_k \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_k)} \int_0^\infty \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(a_-^\dagger(\omega_k, x_k) c_-(\omega_k, x_k) + b_+^\dagger(\omega_k, x_k) a_+(\omega_k, x_k) \right)$$

donde los términos expresados en función de los campos son los siguientes

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_-(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \psi_+^*(u, x) =: \psi_+^*(x) \quad (5.53)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega_k}{2\pi} (\dots) = \int_0^\infty \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(\tilde{A}_z(-\omega_k, x_k) \tilde{\psi}_+^*(-\omega_k, x_k) + \tilde{\psi}_+^*(\omega_k, x_k) \tilde{A}_z(\omega_k, x_k) \right) \quad (5.54)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} du A_z(u, x_k) \psi_+^*(u, x_k) := \sigma_{z+}(x).$$

..

nuevamente podemos expresar la carga en forma compacta a partir de la derivada covariante

$$Q_{\bar{\psi}_-}(x) = \partial_z^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} du D_z \psi_+^*(x) \quad (5.55)$$

promediando en la esfera conforme de igual manera que para F_χ tenemos

$$F_\chi^* := \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[\chi^z(x) D_z \psi_+^*(x) + \chi^{\bar{z}}(x) D_{\bar{z}} \psi_-^*(x) \right] \quad (5.56)$$

donde se observa que la carga para positrones es el complejo conjugado de F_χ .

5.3. Simetría Asintótica

Las carga obtenida (5.45) es una carga definida en \mathcal{I} no trivial, por lo tanto debe tener asociada una simetría. Las simetrías como ya mencionamos provienen de una transformación que dejan invariante el comportamiento asintótico de los campos. Entonces para encontrar las transformaciones de los campos, usamos la definición de corchete de Poisson, de forma tal que las transformaciones las obtenemos a partir del corchete de las cargas con los campos

$$\{Q_i, X_j\} = \delta_i X_j \quad (5.57)$$

Para el caso de la carga F_χ usando los corchetes de Poisson de las variables canónicas (3.26), que $D_a \psi_s = (\partial_a + ieA_a)\psi_s$, la regla de Leibnitz (3.25) y la definición (5.57) , tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_\chi \dot{A}_z &= \{F_\chi, \dot{A}_z\} = ie\chi_+^{*\bar{z}}(x)\psi_+ \\ \delta_\chi \dot{A}_{\bar{z}} &= \{F_\chi, \dot{A}_{\bar{z}}\} = ie\chi_-^{*z}(x)\psi_- \\ \delta_\chi \psi_+^* &= \{F_\chi, \psi_+^*\} = iD_{\bar{z}}\chi^{*\bar{z}}(x) \\ \delta_\chi \psi_-^* &= \{F_\chi, \psi_-^*\} = iD_z\chi^{*z}(x) \end{aligned} \quad (5.58)$$

operando de forma similar para la carga F_ϵ^* encontramos las transformaciones asociadas a los campos

$$\begin{aligned} \delta_\chi \dot{A}_z &= \{F_\chi^*, \dot{A}_z\} = -ie\chi_-^{\bar{z}}(x)\psi_-^* \\ \delta_\chi \dot{A}_{\bar{z}} &= \{F_\chi^*, \dot{A}_{\bar{z}}\} = -ie\chi_+^z(x)\psi_+^* \\ \delta_\chi \psi_+ &= \{F_\chi^*, \psi_+\} = iD_z\chi^z(x) \\ \delta_\chi \psi_- &= \{F_\chi^*, \psi_-\} = iD_{\bar{z}}\chi^{\bar{z}}(x). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Como un primer análisis encontramos en particular que estas transformaciones no dejan invariante el comportamiento asintótico en la variable u de los campos, por lo que no podemos afirmar que estas constituyen una simetría. Una solución a este problema,

es extender el espacio de fases como se hace en los trabajos realizados por Campiglia y Peraza [50, 51].

5.4. Álgebra de Cargas

Para buscar el álgebra asociada al conjunto de cargas que se obtuvieron hasta el momento, lo que buscamos es realizar el corchete de Poisson entre cargas. A partir de la definición de corchete de Poisson encontramos que para las cargas

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_j Q_i \quad (5.60)$$

siendo $\delta_j Q_i$ la transformación de la carga Q_i por medio de la de la simetría que genera la carga Q_j . Además es necesario utilizar la propiedad del corchete de Poisson

$$\{Q_i, Q_j\} = -\{Q_j, Q_i\}. \quad (5.61)$$

El corchete entre la F_χ con las demás es el siguiente

$$\{F_\chi, Q_\lambda\} = F_{\chi'}, \quad \{F_\chi, Q_5\} = F_{\chi''}, \quad \{F_\chi, Q_\epsilon\} = 0, \quad \{F_\chi, Q_\omega\} = F_{\chi'''} \quad (5.62)$$

donde $\chi' = -i\lambda\chi(x)$, $\chi'' = (i\chi^z(x), -i\chi^{\bar{z}}(x))$ y $\chi''' = \delta_\omega\chi(x)$ son vectores contenidos en el espacio generado por $\chi(x)$. Para esta carga no buscamos el álgebra que genera consigo misma ni con F_χ^* , ya que el corchete de Poisson no está bien definido. Esto lo observamos en la sub-sección anterior 5.3, al obtener la transformación que genera la simetría asintótica asociada a dicha carga.

Para F_χ^* se tiene el mismo comportamiento que F_ϵ con

$$\{F_\chi^*, Q_\lambda\} = F_{\chi'}^*, \quad \{F_\chi^*, Q_5\} = F_{\chi''}^*, \quad \{F_\chi^*, Q_\epsilon\} = 0, \quad \{F_\chi^*, Q_\omega\} = F_{\chi'''}^* \quad (5.63)$$

siendo $\chi' = i\lambda\chi(x)$, $\chi'' = (i\chi^z(x), -i\chi^{\bar{z}}(x))$ y $\chi''' = \delta_\omega\chi(x)$, donde nuevamente estos son vectores contenidos en el espacio generado por χ en el plano conforme. Tampoco buscamos el álgebra con F_ϵ por lo mencionado en el párrafo anterior.

En el caso de Q_λ encontramos que

$$\begin{aligned} \{Q_\lambda, F_\chi\} &= -F_{\chi'}, & \{Q_\lambda, Q_5\} &= 0, & \{Q_\lambda, Q_\epsilon\} &= 0, \\ \{Q_\lambda, Q_\omega\} &= Q_{\lambda'}, & \{Q_\lambda, Q_\lambda\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

donde $\lambda'(x) = \delta_{(Y^a \partial_a)} \lambda(x)$.

Para la carga Q_5 se llega a que

$$\{Q_5, Q_\lambda\} = 0, \quad \{Q_5, F_\chi\} = -F_{\chi''}, \quad \{Q_5, Q_\epsilon\} = 0, \quad , \{Q_5, Q_\omega\} = 0, \quad \{Q_5, Q_5\} = 0 \quad (5.65)$$

usando la propiedad (5.61) para obtener $\{Q_5, F_\chi\}$. Para lo casos que restan que son Q_ϵ y Q_ω , el corchete entre si y consigo mismas son resultados ya conocidos [36]. Con el resto de las cargas usamos la propiedad (5.61) para determinar el corchete. Podemos decir que los resultados obtenidos son coherentes ya que debajo de estas operaciones subyace el conmutador de las transformaciones que generan las cargas que ya son resultados bien conocidos [36].

6. Conclusiones

En los últimos años se ha demostrado que existe una conexión directa e inversa, entre los teoremas soft y las simetrías asintóticas [36]. La conexión se da por medio de las identidades de Ward. En este trabajo se hace un análisis asintótico a nivel árbol, con el fin de establecer dicha conexión para QED con espinores sin masa. En particular verificamos nuevamente la equivalencia demostrada por Strominger en sus trabajos, entre el teorema soft para fotones y la simetría de gauge asintótica. Para verificar la conexión, primero es necesario escribir las cargas asociadas a la simetría asintótica de gauge en función de los campos en el infinito nulo (región asintótica). Donde en particular la carga ya presenta la existencia de un termino soft cuya función es crear o destruir fotones soft (partículas cuya energía tiende a cero). La misma al presentar este comportamiento ya permite suponer la conexión de interés. Al aplicar la identidad de Ward sobre la carga mencionada, se verifica la equivalencia.

Como trabajamos en QED con espinores sin masa, esto nos permite derivar el teorema soft para electrones y positrones. En este caso el comportamiento del teorema soft es diferente al de fotones, ya que se genera un intercambio de partículas en el factor multiplicativo y en la amplitud. Al derivar el teorema soft se busca la simetría asintótica por medio de las identidades de Ward. Por lo que primero identificamos los candidatos a cargas para ambos casos, de tal forma que al aplicar dicha identidad, debemos recuperar el teorema del electrón y positrón soft. Dado que la carga mencionada es no trivial, implica la existencia de una simetría asintótica. Para encontrar las transformaciones que generan las simetrías se aplica el formalismo canónico.

Se encuentran que estas transformaciones no dejan invariante el comportamiento asintótico de los campos. Esto sugiere una extensión del espacio de fases como se han estudiado en gravedad y Yang-Mills [50, 51]. Al realizar el análisis asintótico de la teoría, obtenemos cargas asociadas a distintas simetrías ya conocidas. Dentro de las mismas tenemos la de gauge, rotación global axial y grupo de Poincaré. Se determina por medio del formalismo canónico, el álgebra de Lie que generan las cargas mencionadas y las nuevas que surgen de los nuevos teoremas soft.

En particular no buscamos el álgebra que generan las nuevas cargas entre si. Esto es debido a que el corchete de Poisson entre ellas no esta bien definido.

Se hizo un estudio detallado de las simetrías asintóticas en QED con espinores sin masa. Este trabajo deja para futuro algunas cuestiones a determinar:

- 1) Identificar de forma completa la simetría asintótica asociadas a las nuevas partículas soft.
- 2) Completar el álgebra de cargas.
- 3) Por último preguntarnos, si estas nuevas simetrías, también se pueden encontrar en diagramas a un loop.

A. Apéndice I

A.1. Espinor Asintótico

En la sección (3.3) presentamos el comportamiento asintótico de los campos \mathcal{A}_μ y Ψ . Aquí describiremos como se obtiene la ecuación (3.11). El espinor en las nuevas coordenadas $x^\alpha := (r, u, x^a)$ con $x^a := x = z, \bar{z}$ debe ser solución a la ecuación de Dirac para espinores sin masa

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

primero escribimos las matrices γ^μ en las nuevas coordenadas.

$$\gamma^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \gamma^\mu \quad (\text{A.2})$$

usando que $(\partial_\nu)^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta x_\nu$ y que $x^\nu = r q^\nu + u k^\nu$, tenemos que

$$\frac{\partial x^r}{\partial x^\nu} = -k_\nu; \quad \frac{\partial x^u}{\partial x^\nu} = -q_\nu; \quad \frac{\partial x^a}{\partial x^\nu} = r^{-1} h^{ab} \partial_b q_\nu \quad (\text{A.3})$$

en este caso h representa el espacio plano conforme en la esfera(3.2). Desarrollando (A.2) usando (A.3) se tiene que

$$\gamma^r = -\mathcal{K}, \quad \gamma^u = -\mathcal{Q}, \quad \gamma^a = -r^{-1} h^{ab} \partial_b \mathcal{Q} \quad (\text{A.4})$$

donde las matrices tienen la siguiente forma

$$\gamma^z = \frac{1}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2z & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^u = \frac{1}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2|z|^2 & -2\bar{z} \\ 0 & 0 & -2z & 2 \\ 2 & 2\bar{z} & 0 & 0 \\ 2z & 2|z|^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2\bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo las expresiones de las matrices gamma en las nuevas coordenadas hace que la ecuación de Dirac (A.1) tenga una nueva forma

$$-\mathcal{K}\partial_r\Psi - \not{g}\partial_u\Psi + -r^{-1}h^{ab}\partial_b\not{g}\Psi = 0 \quad (\text{A.7})$$

en el límite asintótico el espinor de Dirac se expande como

$$\Psi(r, u, x) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{\mathring{\Psi}(u, x)}{r} + \dots = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) + \dots \quad (\text{A.8})$$

introduciendo este comportamiento en (A.7) y tomando solo al orden $1/r$ tenemos que la ecuación se reduce a

$$\frac{-1}{r}\not{g}\partial_u\mathring{\Psi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

al resolver la ecuación nos encontramos que la solución es de la forma ²

$$\frac{-1}{r}\not{g}\mathring{\Psi} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Ahora consideramos que el espinor está compuesto por 4 entradas a determinar

$$\mathring{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

siendo cada una de ellas funciones de (u, x) , para encontrar las mismas se debe pedir que el espinor verifique la ecuación (A.10) de forma tal que

²De la ecuación tomamos la solución trivial, pero la solución general involucra una función $f(z, \bar{z})$ que se puede investigar a futuro que papel juega en el análisis asintótico.

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -|z|^2 & \bar{z} \\ 0 & 0 & z & -1 \\ -1 & -\bar{z} & 0 & 0 \\ -z & -|z|^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que las entradas cumplen las siguientes relaciones entre si

$$\psi_1 = -\bar{z}\psi_2, \quad \psi_4 = z\psi_3 \quad (\text{A.13})$$

donde el espinor queda con la siguiente forma

$$\mathring{\Psi} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\bar{z}\psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ z\psi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Para que $\mathring{\Psi}$ se comporte como un espinor, este debe transformar como tal bajo las transformaciones de Lorentz en el plano conforme (2.25). Al tener espinores sin masa, necesitamos una transformación que establezca el momento del espinor, con el fin de determinar su helicidad. Según [27] el que puede hacer esto es el grupo SO(2). La rotación en el plano conforme esta representada por [39]

$$J^a = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) \quad (\text{A.15})$$

ya que necesitamos un covector debido a como es la expresión de la transformación, entonces el mismo se expresa como

$$J_b = h_{ba}J^a = ir^2(-\bar{z}dz + zd\bar{z}). \quad (\text{A.16})$$

Al aplicar la transformación evaluada en el origen del plano conforme tenemos

$$\delta_J \Psi|_0 = \left(J^a \partial_a - \frac{1}{2} \partial_b J_a S^{ab} \right) \Psi|_0 \quad (\text{A.17})$$

con

$$S^{z\bar{z}} = \frac{1}{4} [\gamma^z, \gamma^{\bar{z}}] = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1/2 & \bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

y ademas como $S^{\bar{z}z} = -S^{z\bar{z}}$ entonces tenemos que

$$\delta_J \Psi|_0 = -\frac{1}{2} (\partial_b J_a) S^{ab} \Psi|_0 = -\frac{1}{2} (\partial_{\bar{z}} J_z S^{z\bar{z}} + \partial_z J_{\bar{z}} S^{\bar{z}z}) \Psi|_0 = i r^2 S^{z\bar{z}} \Psi|_0 \quad (\text{A.19})$$

donde (A.14) evaluado en el origen, transforma como un espinor bajo rotaciones. Los vectores propios de la matriz $r^2 S^{z\bar{z}}|_0$ constituyen la base de Weyl [39]. Donde llegamos a que los vectores propios son

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

con valor propio $\pm i/2$. A partir de los resultados tenemos que $\psi_2 = \psi_-$ y $\psi_3 = \psi_+$ según la helicidad. Entonces

$$\mathring{\Psi} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\bar{z}\psi_- \\ \psi_- \\ \psi_+ \\ z\psi_+ \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

si sustituimos en (A.8) y normalizando se llega a que ³

$$\Psi \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2^{1/4} r} \begin{pmatrix} -\bar{z}\psi_- \\ \psi_- \\ \psi_+ \\ z\psi_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

³Elegimos una normalización en el espinor de tal manera de tener un factor de $2^{1/4}$ en el denominador.

A.2. Corrientes Conservadas y Simetrías de la Densidad Lagrangiana

Vamos a mostrar explícitamente que la variación de la densidad lagrangiana tiene la forma que está dada por la ecuación (2.27). Partiendo de la densidad lagrangiana (2.12)

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi \right) \quad (\text{A.23})$$

aplicando la variación se obtiene que $\delta\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta\mathcal{F}_{\mu\nu} + i \delta\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(D_\mu \Psi) \right]$, desarrollando se llega a lo siguiente

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) + i \delta\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\partial_\mu \Psi + ie \mathcal{A}_\mu \Psi) \right] \quad (\text{A.24})$$

tomando en cuenta que $\delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) = 2\delta(\partial_{[\mu} \mathcal{A}_{\nu]})$ entonces

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left[-\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + i \delta\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\partial_\mu \Psi) - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \mathcal{A}_\mu \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \delta \Psi \right] \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} & \left[\partial_\mu (-\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta \mathcal{A}_\nu) + \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta \mathcal{A}_\nu + i \delta\bar{\Psi} \not{D} \Psi + \right. \\ & \left. + \partial_\mu (i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Psi) - i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \delta \mathcal{A}_\mu - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \delta \Psi \right] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

ordenando la ecuación (A.26) se llega a la variación de la densidad lagrangiana esperada que da a lugar a la corriente potencial simpléctica $\theta^\mu(\delta)$ que está representada en el último término de la ecuación (A.26).

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left[(\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi) \delta \mathcal{A}_\nu + i \delta\bar{\Psi} \not{D} \Psi - i \bar{\Psi} \overleftarrow{\not{D}} \delta \Psi + \partial_\mu (-\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta \mathcal{A}_\nu + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta \Psi) \right] \quad (\text{A.27})$$

la densidad lagrangiana (2.12) es simétrica bajo transformaciones locales de gauge y bajo rotaciones axiales. En el caso de las transformaciones locales de gauge (2.22) la densidad lagrangiana varía como

$$\delta_\Lambda \mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{4} \delta_\Lambda (\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) + i \delta_\Lambda (\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi) \right) \quad (\text{A.28})$$

al analizar los elementos por separado, se tiene que en el primer término

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda \left(-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta_\Lambda \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \delta_\Lambda \mathcal{A}_\mu) = \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

para el segundo término tenemos lo siguiente

$$\delta_\Lambda (i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi) = i \delta_\Lambda \bar{\Psi} (\gamma^\mu D_\mu \Psi) + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta_\Lambda (D_\mu \Psi) + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \delta_\Lambda (\Psi) \quad (\text{A.30})$$

además se tiene que $\delta_\Lambda (\mathcal{D}_\mu) = ie \partial_\mu \Lambda$, sustituyendo en A.30 se llega a que

$$\delta_\Lambda (i \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi) = e \Lambda \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - e \Lambda \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = 0. \quad (\text{A.31})$$

Con el resultado de las ecuaciones (A.29) y (A.31) se llega a que la densidad lagrangiana es invariante bajo transformaciones de gauge locales. Ahora hacemos lo mismo pero con las rotaciones globales axiales (2.23)

$$\delta_5 \mathcal{L} = \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{4} \delta_5 (\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) + i \delta_5 (\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi) \right) \quad (\text{A.32})$$

al analizar los elementos por separado, se tiene que en el primer factor

$$\delta_5 \left(-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{4} [\delta_5 (\mathcal{F}^{\mu\nu}) \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta_5 (\mathcal{F}_{\mu\nu})] = 0. \quad (\text{A.33})$$

Los dos factores que involucran al tensor de maxwell se eliminan por la forma explicita de la transformación global para \mathcal{A}_μ (2.23). El término que corresponde a los espinores varía como

$$\delta_5 (i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi) = i \delta_5 \bar{\Psi} (\gamma^\mu D_\mu \Psi) + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta_5 (D_\mu \Psi) \quad (\text{A.34})$$

Sabiendo que $\delta_5 (D_\mu \psi) = D_\mu \delta_5 \psi$ y sustituyendo en (A.34) se obtiene.

$$\delta_5 (i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi) = \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi = 0 \quad (\text{A.35})$$

Como la densidad lagrangiana es invariante bajo rotaciones axiales globales por el teorema de Noether existe una corriente axial clásica que se conserva. Para llegar directamente a su forma podemos aplicar rotación axial global (2.23) sobre la corriente potencial simpléctica (2.28)

$$\mathcal{J}_5^\mu = \theta^\mu(\delta_5) = \sqrt{-\eta}(-F^{\mu\nu}\delta_5 A_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta_5\Psi) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi. \quad (\text{A.36})$$

de igual manera se obtiene la corriente conservada asociada a las transformaciones de gauge locales, siendo esta

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Lambda^\mu &= \theta^\mu(\delta_\Lambda) = \sqrt{-\eta}(-F^{\mu\nu}\delta_\Lambda A_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta_\Lambda\Psi) = \\ &= -\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda + e\Lambda\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = -\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda + \Lambda J^\mu = -\partial_\nu(\Lambda\mathcal{F}^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Para el caso de las transformaciones del grupo de Poincaré los campos transforman bajo traslaciones según (2.24), mientras que bajo transformaciones de Lorentz lo hacen de la forma (2.25). La densidad lagrangiana varía según las traslaciones a primer orden de la siguiente forma

$$\delta_\epsilon\mathcal{L} = \epsilon_\nu\partial^\nu\mathcal{L} = \partial_\nu(\epsilon^\nu\mathcal{L}). \quad (\text{A.38})$$

Por el teorema de Noether al variar la densidad lagrangiana por un factor de una divergencia $\delta\mathcal{L} = \partial_\nu K^\nu$ entonces tenemos un corriente conservada $\mathcal{J}^\nu = \theta^\nu - K^\nu$. Sabemos que $\delta_\epsilon\mathcal{L} = \partial_\mu\theta^\mu(\delta_\epsilon)$, para este caso se tiene

$$\epsilon_\nu\partial^\nu\mathcal{L} = \sqrt{-\eta}\partial_\mu(-F^{\mu\nu}\delta_\epsilon A_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta_\epsilon\Psi) \quad (\text{A.39})$$

lo cual expresamos como

$$\partial_\mu[\sqrt{-\eta}(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\epsilon^\gamma\partial_\gamma\mathcal{A}_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\epsilon^\gamma\partial_\gamma) - \epsilon^\mu\mathcal{L}] = 0 \quad (\text{A.40})$$

donde obtenemos la corriente conservada asociada a las traslaciones

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\epsilon^\gamma\partial_\gamma\mathcal{A}_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\epsilon^\gamma\partial_\gamma) - \epsilon^\mu\mathcal{L}. \quad (\text{A.41})$$

A su vez esta corriente se la puede expresar en función de un tensor simétrico, para hacer esto le sumamos a la corriente un termino anti-simétrico con divergencia nula

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}\epsilon_\gamma (\mathcal{T}^{\mu\gamma} + \partial_\nu B^{\gamma\mu\nu}) \quad (\text{A.42})$$

para este caso tomamos

$$\partial_\nu B^{\gamma\mu\nu} = \partial_\nu (\mathcal{F}^{\mu\nu} A^\gamma) = \partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} A^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\nu A^\gamma = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu A^\gamma \quad (\text{A.43})$$

sustituyendo en (A.41)

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}\epsilon_\gamma (-\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial^\gamma\mathcal{A}_\nu + \mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{A}^\gamma + i^2e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A^\gamma + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial^\gamma\Psi) - \epsilon_\gamma\eta^{\mu\gamma}\mathcal{L} \quad (\text{A.44})$$

usando la definición de $F^{\mu\nu}$ y D_μ obtenemos

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}\epsilon_\gamma (-\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^\gamma_\nu + ie\bar{\Psi}\gamma^\mu D^\gamma\Psi) - \epsilon_\gamma\eta^{\mu\gamma}\mathcal{L} \quad (\text{A.45})$$

donde la corriente queda expresada por medio del tensor de energía momento.

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu = \sqrt{-\eta}\epsilon_\gamma T^{\mu\gamma} \quad (\text{A.46})$$

Para las transformaciones de Lorentz hacemos el mismo procedimiento, la densidad lagrangiana varia bajo dichas transformaciones como

$$\delta_\omega\mathcal{L} = \partial_\alpha(\omega^\alpha_\nu x^\nu\mathcal{L}) \quad (\text{A.47})$$

como $\delta_\omega\mathcal{L} = \partial_\mu\theta^\mu(\delta_\omega)$ entonces

$$\partial_\alpha(\omega^\alpha_\nu x^\nu\mathcal{L}) = \sqrt{-\eta}\partial_\mu(-F^{\mu\nu}\delta_\omega A_\nu + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta_\omega\Psi) \quad (\text{A.48})$$

el cual queda expresada como

$$\mathcal{J}_\omega^\mu = \sqrt{-\eta} [-\mathcal{F}^{\mu\nu} (\omega_\nu^\gamma \mathcal{A}_\gamma - \omega_\delta^\gamma x^\delta \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu) + i\bar{\Psi}\gamma^\mu (\omega_\delta^\gamma x^\delta \partial_\gamma - \omega_{\gamma\delta} S^{\gamma\delta}) \Psi] + \omega_\delta^\mu x^\delta \mathcal{L} \quad (\text{A.49})$$

nuevamente queremos expresar la corriente conservada en términos de un tensor simétrico, para esto primero expresamos el primer factor de (A.49) en una forma mas conveniente.

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} (\omega_\nu^\gamma \mathcal{A}_\gamma - \omega_\delta^\gamma x^\delta \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu) = \omega_{\delta\gamma} (\mathcal{F}^{\mu\delta} \mathcal{A}^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\nu} x^\delta \partial^\gamma \mathcal{A}_\nu) \quad (\text{A.50})$$

En este caso elegimos el tensor anti-simétrico de divergencia nula como

$$\begin{aligned} \partial_\nu B^{\mu\nu\delta\gamma} &= \partial_\nu (\mathcal{F}^{\mu\nu} x^\delta \mathcal{A}^\gamma) = (\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} x^\delta \mathcal{A}^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\nu x^\delta \mathcal{A}^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\nu} x^\delta \partial_\nu \mathcal{A}^\gamma) \\ &= -ex^\delta \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \mathcal{A}^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\delta} \mathcal{A}^\gamma + \mathcal{F}^{\mu\nu} x^\delta \partial_\nu \mathcal{A}^\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

sumando $\omega_{\gamma\delta} \partial_\nu B^{\mu\nu\delta\gamma}$ a la ecuación (A.49), tomando al definición de $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ y D^γ tenemos que

$$\mathcal{J}_\omega^\mu = \sqrt{-\eta} \left[\omega_{\delta\gamma} x^\delta T^{\mu\gamma} + \frac{\bar{\Psi} \omega_{\delta\gamma} \gamma^\mu S^{\delta\gamma} \Psi}{2} \right] \quad (\text{A.52})$$

donde $T^{\mu\gamma}$ representa de nuevo el tensor de energía momento mas un término que depende de $S^{\delta\gamma}$. La suma de \mathcal{J}_ω^μ y \mathcal{J}_ϵ^μ constituye la corriente conservada asociada al grupo de Poincaré.

A.3. Cargas Asintóticas a partir de la forma Simpléctica

Por medio de la forma simpléctica (3.21) buscamos las cargas asociadas a las transformaciones U(1) local de gauge, rotación global axial y grupo de Poincaré, a partir de la definición (3.27). Para buscar las cargas evaluamos la forma simpléctica de la forma dada por la (3.22), para las diferentes variaciones generadas por las transformaciones. Para la carga Q_λ asociada a la transformación local de Gauge U(1) consideramos que $\Lambda(r, u, x) \rightarrow \lambda(x) + \mathcal{O}(1/r)$ cuando r tiende a infinito.

$$\delta Q_\lambda = \Omega(\delta, \delta_\lambda) = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(\delta \dot{A}_{-s} \delta_\lambda A_s - \delta_\lambda \dot{A}_{-s} \delta A_s + i \delta \psi_s^* \delta_\lambda \psi_s - i \delta_\lambda \psi_s^* \delta \psi_s \right) \quad (\text{A.53})$$

Analizamos los términos por separado, el primero tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left[\delta \dot{A}_{-s} \partial_s \lambda(x) - \partial_u \partial_{-s} \lambda(x) \delta A_s \right] &= - \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \lambda(x) \partial_s \delta \dot{A}_{-s} = \\ &= \delta \left(- \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \lambda(x) \partial_s \dot{A}_{-s} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

El segundo término asociado a las componentes del spinor se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x i \delta \psi_s^* \delta_\lambda \psi_s - i \delta_\lambda \psi_s^* \delta \psi_s &= \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x (\lambda e \delta \psi_s^* \psi_s + \lambda e \psi_s^* \delta \psi_s) = \\ &= \delta \left(\sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x e \lambda \psi_s^* \psi_s \right) \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

dejando que $\delta Q_\lambda = \delta \left(\sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \lambda (e \psi_s^* \psi_s - \partial_s \dot{A}_{-s}) \right)$, se obtiene que

$$Q_\lambda = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \lambda (e \psi_s^* \psi_s - \partial_s \dot{A}_{-s}). \quad (\text{A.56})$$

Para buscar la carga asociada a la rotación global axial consideramos la transformación dada por la ecuación (2.23) y realizamos el mismo procedimiento

$$\delta Q_5 = \Omega(\delta, \delta_5) = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(\delta \dot{A}_{-s} \delta_5 A_s - \delta_5 \dot{A}_{-s} \delta_\lambda A_s + i \delta \psi_s^* \delta_5 \psi_s - i \delta_5 \psi_s^* \delta \psi_s \right) \quad (\text{A.57})$$

Las componentes del espinor bajo la rotación axial transforman de la siguiente manera $\delta_5\psi_- = i\psi_-$ y $\delta_5\psi_+ = -i\psi_+$. Los términos asociados a los campos de gauge (A.57) se anulan debido a la forma de la transformación, por lo tanto solo nos queda analizar el término asociado a los espinores. Hacemos el análisis por separado en términos de la helicidad s

$$\Omega(\delta, \delta_5)_- = \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left[i(i\delta\psi_-^*\psi_-) - i(-i\psi_-^*\delta\psi_-) \right] = \delta \left(\int_{\mathcal{I}} dud^2x -\psi_-^*\psi_- \right) \quad (\text{A.58})$$

$$\Omega(\delta, \delta_5)_+ = \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left[i(-i\delta\psi_+^*\psi_+) - i(i\psi_+^*\delta\psi_+) \right] = \delta \left(\int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_+^*\psi_+ \right) \quad (\text{A.59})$$

para obtener la carga axial tomamos que $\delta Q_5 = \Omega(\delta, \delta_5)_+ + \Omega(\delta, \delta_5)_-$ donde

$$\delta Q_5 = \delta \left(\int_{\mathcal{I}} dud^2x \left[\psi_+^*\psi_+ - \psi_-^*\psi_- \right] \right) \quad (\text{A.60})$$

obteniendo

$$Q_5 = \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left[\psi_+^*\psi_+ - \psi_-^*\psi_- \right]. \quad (\text{A.61})$$

Ahora determinamos las cargas asociadas a las transformaciones del grupo de Poincaré. En el caso de las traslaciones podemos representar a las mismas mediante el cambio de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$. Bajo dicho cambio de coordenadas el campo de gauge \mathcal{A}_μ tiene la siguiente forma

$$\delta_\epsilon \mathcal{A}_\mu(x^\nu) = \epsilon^\gamma \partial_\gamma \mathcal{A}_\mu(x^\nu). \quad (\text{A.62})$$

El factor asociado a la derivada parcial tiene la siguiente forma en las coordenadas $x^\alpha := (r, u, x)$ con $x^a := x = z, \bar{z}$.

$$\partial_\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha \quad (\text{A.63})$$

Usando que $(\partial_\nu)^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta x_\nu$ y que $x^\nu = rq^\nu + uk^\nu$, tenemos que

$$\frac{\partial x^r}{\partial x^\nu} = -k_\nu; \quad \frac{\partial x^u}{\partial x^\nu} = -q_\nu; \quad \frac{\partial x^a}{\partial x^\nu} = r^{-1} h^{ab} \partial_b q_\nu \quad (\text{A.64})$$

en este caso h^{ab} es la métrica que representa el espacio plano conforme en la esfera celeste (3.2).

Siendo $\eta^{\alpha\beta}$ la métrica de Minkowski en las nuevas coordenadas x^α

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

Volviendo a la ecuación (A.62), al hacer el cambio de coordenadas a x^α y tomando el limite asintótico, las componentes $s = z, \bar{z}$ del campo de gauge son las relevantes como se menciona en la sub-sección 3.3 . Por lo que las transformaciones de los campos toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon A_s(x^\beta) &= \epsilon^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha A_s(x^\beta) = \\ &= \epsilon^\gamma \left(-k_\gamma \partial_r A_s(x^\beta) - q_\gamma \partial_u A_s(x^\beta) + r^{-1} h^{ab} \partial_b q_\gamma A_s(x^\beta) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

El primer factor se anula, ya que el campo A_s solo depende de u y x , el tercero va a tener asociado un termino del orden $\mathcal{O}(1/r)$ y se va a anular debido a que r tiende a infinito. Por lo tanto solo hay contribución por parte del segundo, llevando a que la transformación infinitesimal para el campo de gauge sea $\delta_\epsilon A_s = -\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_s$. Para el caso del espinor se procede de la misma forma, tomando en cuenta que de forma asintótica solo son relevantes los términos del orden $\mathcal{O}(1/r)$, entonces las componentes del espinor transforman de la siguiente forma $\delta_\epsilon \psi_s = -\epsilon^\nu q_\nu \dot{\psi}_s$. Para buscar las cargas asociadas a la traslación procedemos de la misma forma, es decir $\delta Q_\epsilon = \Omega(\delta, \delta_\epsilon)$

$$\delta Q_\epsilon = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(-\delta \dot{A}_{-s} \epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_s + \epsilon^\nu q_\nu \ddot{A}_{-s} \delta A_s - i \delta \psi_{-s}^* \epsilon^\nu q_\nu \dot{\psi}_s + i \epsilon^\nu q_\nu \dot{\psi}^* \delta \psi_s \right). \quad (\text{A.67})$$

Integrando por partes en u se llega a que

$$\begin{aligned}
\delta Q_\epsilon &= \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \epsilon^\nu q_\nu \left(\delta \ddot{A}_{-s} A_s + \ddot{A}_{-s} \delta A_s + i \delta \dot{\psi}_{-s}^* \psi_s + i \dot{\psi}_{-s}^* \delta \psi_s \right) = \\
&= \sum_s \int_{\mathcal{I}} dudx \epsilon^\nu q_\nu \left[\delta (\ddot{A}_{-s} A_s) + i \delta (\dot{\psi}_s^* \psi_s) \right] = \\
&= \delta \left(\sum_s \int_{\mathcal{I}} dudx \epsilon^\nu q_\nu \left[\ddot{A}_{-s} A_s + i \dot{\psi}_s^* \psi_s \right] \right)
\end{aligned} \tag{A.68}$$

llegando a que $Q_\epsilon = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \epsilon^\nu q_\nu \left[\ddot{A}_{-s} A_s + i \dot{\psi}_s^* \psi_s \right]$. Ahora para el caso de las transformaciones de Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, el campo de gauge y el espinor de Dirac transforman de la siguiente manera $\mathcal{A}_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu \mathcal{A}_\nu(\Lambda^{-1}x)$ con $\Psi(x') = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$. Desde un punto infinitesimal podemos escribir a $\Lambda_\nu{}^\mu \approx \delta_\nu{}^\mu + \omega_\nu{}^\mu$ de forma tal que la variación infinitesimal del campo de gauge bajo la transformación tiene la siguiente forma

$$\delta_\xi \mathcal{A}_\mu = \omega_\mu{}^\nu \mathcal{A}_\nu + \omega_\gamma{}^\nu x^\gamma \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = \omega_\mu{}^\nu \mathcal{A}_\nu + \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \tag{A.69}$$

con $\xi^\nu = \omega_\gamma{}^\nu x^\gamma$, usando la definición de derivada de Lie para covectores [43] $(\mathcal{L}_X w)_j = w_{i,j} X^i + w_i X^i{}_{,j}$ y además $\partial_\mu \xi^\nu = \omega_\mu{}^\nu$ entonces $\delta_\xi \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \xi^\nu \mathcal{A}_\nu + \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = \mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\mu$. Ahora bien debemos presentar dicha variación en las coordenadas x^α para esto utilizamos el vector $\xi = \omega_\nu{}^\mu x^\nu \partial_\mu$ con $\partial_\mu = -k_\mu \partial_r - q_\mu \partial_u + r^{-1} D^a q_\mu \partial_a$ siendo $D^a = h^{ab} \partial_b$,

$$\xi = \omega_\nu{}^\mu \left[-r q^\nu q_\mu \partial_u + (-q^\nu k_\mu r \partial_r + q^\nu D^a q_\mu \partial_a - k^\nu q_\mu u \partial_u) + \mathcal{O}(r^{-1}) \right] \tag{A.70}$$

Definimos $Y^a := \omega_\nu{}^\mu q^\nu D^a q_\mu$ y $\alpha := \omega_\nu{}^\mu q^\nu k_\mu = D_a Y^a / 2$, con estas definiciones llegamos a que

$$\xi = Y^a \partial_a + \alpha (u \partial_u - r \partial_r) + \mathcal{O}(r^{-1}). \tag{A.71}$$

Con las variables introducidas podemos escribir la variación del campo de gauge en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \xi^\nu \mathcal{A}_\mu = \\ &= Y^a \partial_a \mathcal{A}_\mu + \alpha u \partial_u \mathcal{A}_\mu - r \partial_r \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu Y^a \mathcal{A}_a + \partial_\mu \xi^u \mathcal{A}_u + \partial_\mu \xi^r \mathcal{A}_r + \mathcal{O}(r^{-1}).\end{aligned}\tag{A.72}$$

Tomando el limite $r \rightarrow \infty$ tenemos que $\mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\mu = \mathcal{L}_{(Y^a \partial_a)} A_s + \alpha u \partial_u A_s + \mathcal{O}(r^{-1}) =: \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s + \mathcal{O}(r^{-1})$. Con la variación infinitesimal para el campo de gauge podemos buscar la carga asociada al mismo. Por lo tanto estamos en condiciones de buscar las cargas asociadas a las transformaciones de Lorentz para el caso del campo de gauge. En este caso planteamos que

$$Q_{\omega A} = \Omega(\delta, \delta_\omega)_A = \int_{\mathcal{I}} dud^2 x \sqrt{-h} h^{ab} \left(\delta \dot{A}_a \delta_{(Y^c \partial_c)} A_b - \delta_{(Y^c \partial_c)} \dot{A}_a \delta A_b \right)\tag{A.73}$$

tomando la definición de $\delta_{Y^a \partial_a} A_s$ tenemos que

$$\delta Q_{\omega A} = \int_{\mathcal{I}} dud^2 x \sqrt{-h} h^{ab} \left[\delta \dot{A}_a (\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} A_b + \alpha u \partial_u A_b) - (\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} \dot{A}_a + \alpha u \partial_u \dot{A}_a) \delta A_b \right]\tag{A.74}$$

integrando por partes en el segundo factor se tiene

$$\begin{aligned}& - \int_{\mathcal{I}} dud^2 x \sqrt{-h} h^{ab} \left[\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} \dot{A}_a + \alpha u \partial_u \dot{A}_a \right] \delta A_b = \\ &= \int_{\mathcal{I}} dud^2 x \left[\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} (\sqrt{-h} h^{ab} \dot{A}_a \delta A_b + \sqrt{-h} h^{ab} \dot{A}_b \mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} \delta A_b + \sqrt{-h} h^{ab} \dot{A}_a \alpha u \delta \dot{A}_b) \right]\end{aligned}\tag{A.75}$$

Como $\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} h_{ab} = Y^c \partial_c h_{ab} + \partial_a Y^c h_{cb} + \partial_b Y^c h_{ac} = D_a Y_b + D_b Y_a$ [43] y además $\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} \sqrt{-h} = 2\alpha \sqrt{-h}$, con esto se plantea que $\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} (\sqrt{-h} h^{ab}) = \sqrt{-h} (2\alpha h^{ab} - D_a Y_b - D_b Y_a) = 0$, esto último es nulo es debido a que Y^a es un vector de killing conforme [35] si y solo si $Y^a = \omega^\mu k^\nu D^a q_\mu$ por lo tanto la ecuación (A.75) se reduce a los siguiente

$$\int_{\mathcal{I}} \sqrt{-h} h^{ab} \dot{A}_a \delta (\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} A_b + \alpha u \partial_u A_b)\tag{A.76}$$

ahora bien con el resultado obtenido la ecuación (A.74), se representa $\delta Q_{\omega A}$ como

$$\begin{aligned}
\delta Q_{\omega A} &= \int_{\mathcal{I}} dud^2x \sqrt{-h} h^{ab} [\delta \dot{A}_a (\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} A_b + \alpha u \partial_u A_b) + \\
&\quad + \dot{A}_a \delta (\mathcal{L}_{(Y^c \partial_c)} A_b + \alpha u \partial_u A_b)] = \\
&= \delta \left(\int_{\mathcal{I}} dudx \sqrt{-h} h^{ab} (\dot{A}_a \delta_{(Y^c \partial_c)} A_b) \right)
\end{aligned} \tag{A.77}$$

sumando en todas las polarizaciones tenemos que $Q_{\omega A} = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dudx \dot{A}_{-s} \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s$.

Para el caso del espinor, debemos buscar como es la transformaciones Lorentz infinitesimal de éste. Partiendo de la forma infinitesimal de Λ_ν^μ y que $\Psi(x') = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ tenemos que

$$\delta \Psi = \left(\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu + \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) \Psi \tag{A.78}$$

ademas como $\Omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$ y $S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ tenemos que

$$\delta \Psi = \left(\omega_\nu^\mu x^\nu \partial_\mu + \frac{1}{8} \omega^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) \Psi \tag{A.79}$$

tomando que $\partial_\nu \xi_\mu = -\omega_{\mu\nu}$ y que $\xi^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu$ tenemos que

$$\delta \Psi_\xi = \left(\xi^\mu \partial_\mu - \frac{1}{8} \partial_\nu \xi_\mu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \Psi \tag{A.80}$$

aplicando el cambio de coordenadas para $\delta \Psi$, se tiene que el espinor transforma para ξ_Y de la siguiente manera

$$\delta_{\xi_Y} \Psi = \frac{1}{2^{1/4} r} \begin{pmatrix} -\bar{z} \delta_y \psi_- \\ \delta_y \psi_- \\ \delta_y \psi_+ \\ z \delta_y \psi_+ \end{pmatrix} \tag{A.81}$$

de forma tal que las componentes del espinor tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta_Y \psi_- &= \left(Y(z) \partial_z + \frac{1}{2} Y'(z) + \frac{1}{2} Y'(z) u \partial_u \right) \psi_- \\
\delta_Y \psi_+ &= \left(Y(z) \partial_z + Y'(z) + \frac{1}{2} Y'(z) u \partial_u \right) \psi_+
\end{aligned} \tag{A.82}$$

para el cambio de coordenadas según $\xi_{\bar{Y}}$ las componente del espinor transforman como

$$\begin{aligned}
\delta_{\bar{Y}}\psi_- &= \left(\bar{Y}(\bar{z})\partial_{\bar{z}} + \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2}\bar{Y}'(\bar{z})u\partial_u \right) \psi_- \\
\delta_{\bar{Y}}\psi_+ &= \left(\bar{Y}(\bar{z})\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2}\bar{Y}'(\bar{z})u\partial_u \right) \psi_+
\end{aligned} \tag{A.83}$$

Ya que tenemos como transforman de forma infinitesimal las componentes del espinor podemos buscar la carga $Q_{\omega\psi}$

$$\begin{aligned}
\delta Q_{\omega\psi} &= \Omega(\delta, \delta_\omega)_\psi = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ i \left(\delta\psi_s^* \delta_{(Y^a\partial_a)}\psi_s - \delta_{(Y^a\partial_a)}\psi_s^* \delta\psi_s \right) = \\
&= \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ [i(\delta\psi_s^* \delta_Y\psi_s - \delta_Y\psi_s^* \delta\psi_s) + i(\delta\psi_s^* \delta_{\bar{Y}}\psi_s - \delta_{\bar{Y}}\psi_s^* \delta\psi_s)]
\end{aligned} \tag{A.84}$$

tomando el termino asociado a δ_Y analizamos para cada $s = \pm$. Para la situación en la que $s = -$ tenemos la siguiente integral $\int_{\mathcal{I}} dudx \ i(\delta\psi_-^* \delta_Y\psi_- - \delta_Y\psi_-^* \delta\psi_-)$, donde vamos a integrar por partes el segundo termino obteniendo lo siguiente.

$$\begin{aligned}
- \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ \delta_Y\psi_-^* \delta\psi_- &= - \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ \left(Y(z)\partial_z + Y'(z) + \frac{1}{2}Y'(z)u\partial_u \right) \psi_-^* \delta\psi_- = \\
&= \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ \psi_-^* \left(Y(z)\partial_z + Y'(z) - Y'(z) + \frac{1}{2}Y'(z) + \frac{1}{2}Y'(z)u\partial_u \right) \delta\psi_- = \tag{A.85} \\
&= \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ \psi_-^* \left(Y(z)\partial_z + \frac{1}{2}Y'(z) + \frac{1}{2}Y'(z)u\partial_u \right) \delta\psi_- = \int_{\mathcal{I}} dudx \ (\psi_-^* \delta(\delta_Y\psi_-))
\end{aligned}$$

Se llega a que $\int_{\mathcal{I}} dud^2x \ i(\delta\psi_-^* \delta_Y\psi_- - \delta_Y\psi_-^* \delta\psi_-) = \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ i\delta(\psi_-^* \delta_Y\psi_-)$, para el caso $s = +$ se obtiene el mismo resultado. De forma tal

$$\sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ i(\delta\psi_s^* \delta_Y\psi_s - \delta_Y\psi_s^* \delta\psi_s) = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \ i\delta(\psi_s^* \delta_Y\psi_s) \tag{A.86}$$

Tomando el termino asociado $\delta_{\bar{Y}}$ de la ecuación (A.84) analizamos para $s = \pm$. Para la situación en la que $s = -$ tenemos la siguiente integral $\int_{\mathcal{I}} dudx \ i(\delta\psi_-^* \delta_{\bar{Y}}\psi_- - \delta_{\bar{Y}}\psi_-^* \delta\psi_-)$ donde vamos a integrar por partes el segundo termino de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
- \int_{\mathcal{I}} dud^2x \delta_{\bar{Y}} \psi_-^* \delta \psi_- &= - \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(\bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) u \partial_u \right) \psi_-^* \delta \psi_- = \\
&= \int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_-^* \left(\bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \bar{Y}'(\bar{z}) - \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}(\bar{z}) u \partial_u \right) \delta \psi_- = \quad (\text{A.87}) \\
&= \int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_-^* \left(\bar{Y}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} + \bar{Y}'(\bar{z}) + \frac{1}{2} \bar{Y}'(\bar{z}) u \partial_u \right) \delta \psi_- = \int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_-^* \delta(\delta_{\bar{Y}} \psi_-)
\end{aligned}$$

Se llega a que $\int_{\mathcal{I}} dud^2x i (\delta \psi_-^* \delta_{\bar{Y}} \psi_- - \delta_{\bar{Y}} \psi_-^* \delta \psi_-) = \int_{\mathcal{I}} dud^2x i \delta(\psi_-^* \delta_{\bar{Y}} \psi_-)$, para el caso $s = +$ se obtiene el mismo resultado, de forma tal

$$\sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x i (\delta \psi_s^* \delta_{\bar{Y}} \psi_s - \delta_{\bar{Y}} \psi_s^* \delta \psi_s) = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x i \delta(\psi_s^* \delta_{\bar{Y}} \psi_s) \quad (\text{A.88})$$

tomando las contribuciones de (A.86) y (A.88) tenemos que

$$\delta Q_{\omega\psi} = \delta \left(i \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_s^* \delta_Y \psi_s + \psi_s^* \delta_{\bar{Y}} \psi_s \right) = \delta \left(i \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \psi_s^* \delta_{Y^a \partial_a} \psi_s \right) \quad (\text{A.89})$$

Donde llegamos a que la expresión de la carga es la siguiente $Q_{\omega\psi} = i \sum_s \int_{\mathcal{I}} dudx \psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s$. Ya que tenemos las cargas asociadas a las transformaciones de Lorentz para el campo de gauge como el espinor, la contribución de ambas nos otorga la carga asociada a las transformaciones de Lorentz, que tiene la siguiente forma

$$Q_{\omega} = Q_{\omega A} + Q_{\omega\psi} = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \left(\dot{A}_{-s} \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s + \psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s \right). \quad (\text{A.90})$$

Por lo tanto la carga asociada a las transformaciones del grupo de Poincaré esta dada por la contribución de Q_{ϵ} y Q_{ω} .

A.4. Cargas Asintóticas a partir de las Corrientes Conservadas

Derivamos las cargas asintóticas a partir de las corrientes conservadas. Para esto debemos obtener el comportamiento asintótico de la corriente conservada a partir de los campos asintóticos y luego integrar en el infinito nulo \mathcal{I} . Como mencionamos en la sub-sección 3.4 la componente relevante de la corriente para obtener las cargas que atraviesan la superficie \mathcal{I} es $\mu = r$. Primero obtenemos las carga asintótica asociadas a las transformaciones de gauge. Sabemos que la corriente de gauge tiene la siguiente forma

$$\mathcal{J}_\Lambda^\mu = \sqrt{-\eta}(-\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda + \Lambda\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) \quad (\text{A.1})$$

tomando $r \rightarrow \infty$ y además $\Lambda(r, u, x) \rightarrow \lambda(x) + \mathcal{O}(1/r)$, entonces el comportamiento asintótico de \mathcal{J}_Λ^μ es el siguiente

$$\begin{aligned} J_\lambda^r &= r^2(-F^{rz}\partial_z\lambda(x) - F^{r\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\lambda(x) + \lambda(x)\bar{\Psi}\gamma^r\Psi) = \\ &= r^2(-\eta^{r\alpha}\eta^{z\beta}F_{\alpha\beta}\partial_z\lambda(x) - \eta^{r\alpha}\eta^{\bar{z}\beta}F_{\alpha\beta}\partial_{\bar{z}}\lambda(x) + \lambda(x)\bar{\Psi}\gamma^r\Psi) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

con $\eta^{\alpha\beta}$ de la forma dada por A.65 . Usando el espinor de la forma (3.11) se llega a que

$$\begin{aligned} J_\lambda^r &= \partial_u A_{\bar{z}}\partial_z\lambda(x) + \partial_u A_z\partial_{\bar{z}}\lambda(x) + \lambda(x)\psi_+^*\psi_+ + \lambda(x)\psi_-^*\psi_- = \\ &= \sum_s \dot{A}_{-s}\partial_s\lambda(x) + \lambda(x)\psi_s^*\psi_s \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

integrando en el infinito nulo se obtiene

$$Q_\lambda = \int_{\mathcal{I}} dud^2x J_\lambda^r = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x \dot{A}_{-s}\partial_s\lambda(x) + \lambda(x)\psi_s^*\psi_s. \quad (\text{A.4})$$

Se realiza el mismo procedimiento para las corriente restantes. Ahora analizamos el caso de la corriente asociada a la rotación global axial \mathcal{J}_5^μ

$$\mathcal{J}_5^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi \quad (\text{A.5})$$

tomando el límite asintótico \mathcal{J}_5^μ se comporta como

$$\mathcal{J}_5^\mu \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} J_5^r = \sqrt{-\eta}(\bar{\Psi}\gamma^r\gamma^5\Psi) \quad (\text{A.6})$$

usando γ^r , γ^5 y el espinor (3.11) se llega a que

$$J_5^r = \psi_+^* \psi_+ - \psi_-^* \psi_- \quad (\text{A.7})$$

siendo

$$Q_5 = \int dud^2x J_5^r = \int dud^2x (\psi_+^* \psi_+ - \psi_-^* \psi_-). \quad (\text{A.8})$$

Ahora para el caso del grupo de Poincaré vamos a obtener primero la carga asociada a las traslaciones, la corriente conservada para este caso es

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon^\mu &= \sqrt{-\eta} [(-\mathcal{F}^{\mu\nu} \epsilon^\gamma \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu + i\bar{\Psi} \gamma^\mu \epsilon^\gamma \partial_\gamma \Psi)] - \epsilon^\mu \mathcal{L} = \\ &= \sqrt{-\eta} [(-\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \epsilon^\gamma \partial_\gamma \mathcal{A}_\nu + i\bar{\Psi} \gamma^\mu \epsilon^\gamma \partial_\gamma \Psi)] - \epsilon^\mu \mathcal{L} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

tomando el limite asintótico el primer termino de (A.9), este queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sqrt{-\eta} \left(-\eta^{r\alpha} \eta^{z\beta} F_{\alpha\beta} \epsilon^\gamma q_\gamma \dot{A}_z - \eta^{r\alpha} \eta^{\bar{z}\beta} F_{\alpha\beta} \epsilon^\gamma q_\gamma \dot{A}_{\bar{z}} - i\Psi \gamma^r \epsilon^\gamma q_\gamma \dot{\Psi} \right) = \\ = \left[-\dot{A}_{\bar{z}} \epsilon^\gamma q_\gamma \dot{A}_z - \dot{A}_z \epsilon^\gamma q_\gamma \dot{A}_{\bar{z}} - i\epsilon^\gamma q_\gamma (\psi_+^* \dot{\psi}_+ + \psi_-^* \dot{\psi}_-) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

la densidad lagrangiana cuando $r \rightarrow \infty$ se comporta como

$$\mathcal{L} \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{F_{z\bar{z}} F_{\bar{z}z}}{2} + ir^2 \bar{\Psi} \gamma^z (\partial_z + ieA_z) \Psi \right]. \quad (\text{A.11})$$

Esto lleva a que $\mathcal{L} = O\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ donde en el límite este termino no va a contribuir en la corriente, donde se llega a que

$$\mathcal{J}_\epsilon^\mu \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} J_\epsilon^r = \sum_s \epsilon^\gamma q_\gamma \left[-\dot{A}_{-s} \dot{A}_s - i\psi_s^* \dot{\psi}_s \right] \quad (\text{A.12})$$

integrando en el infinito nulo \mathcal{I} y haciendo integración por partes en la variable u se obtiene

$$Q_\epsilon = \int dud^2x J_\epsilon^r = \sum_s \int dud^2x \left(\ddot{A}_{-s} A_s + i\dot{\psi}_s^* \psi_s \right). \quad (\text{A.13})$$

Para el caso de la transformación de Lorentz la corriente conservada es la siguiente

$$\mathcal{J}_\omega^\mu = \sqrt{-\eta} \left[-\mathcal{F}^{\mu\nu} (\mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\nu) + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\xi^\gamma \partial_\gamma - \frac{1}{2} \partial_\delta \xi_\gamma S^{\gamma\delta} \right) \Psi \right] + \omega_\delta^\mu x^\delta \mathcal{L} \quad (\text{A.14})$$

en la sub-sección (3.4) se muestra como es el comportamiento de \mathcal{L}_ξ donde expresamos a (A.14) en el limite asintótico como

$$\begin{aligned} J_\omega^r &= \sum_s \sqrt{-\eta} \left[-\eta^{r\alpha} \eta^{s\beta} F_{\alpha\beta} (\delta_{(Y^a \partial_a)} A_s) - \frac{i}{r^2} (\psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s) \right] = \\ &= \sum_s \left[\dot{A}_{-s} \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s + i\psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

integrando se llega a que

$$Q_\omega = \int dud^2x J_\omega^r = \sum_s \int dud^2x \left[\dot{A}_{-s} \delta_{(Y^a \partial_a)} A_s + i\psi_s^* \delta_{(Y^a \partial_a)} \psi_s \right]. \quad (\text{A.16})$$

B. Apéndice II

B.1. Demostración de la Identidad de Ward para Q_λ

El objetivo es mostrar como obtener la ecuación (4.14). Primero comenzamos escribir la carga Q_λ^+ en función de los operadores de Fock definidos en la ecuación (3.40). Iniciamos con el termino Q_S^+ que tiene la siguiente forma

$$Q_S^+ = \sum_s \int_{\mathcal{I}} dud^2x [\partial_s \lambda^+(x) \dot{A}_{-s}] \quad (\text{B.1})$$

para expresar este término en función del operador $a_s^+(\omega, x)$ tenemos que tomar en cuenta como es el comportamiento de $A_s(u, x)$ en el infinito nulo \mathcal{I}^+ a medida que $u \rightarrow \infty$. El campo transversal $A_s(u, x)$ tiene el siguiente comportamiento

$$\dot{A}_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\equiv} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\text{B.2})$$

siendo

$$A_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\equiv} \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^\varepsilon}\right) \quad (\text{B.3})$$

con esto planteamos que

$$A_s(u, x) \stackrel{u \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} A_s(\pm\infty, x) = A_s^{\pm\infty}(x). \quad (\text{B.4})$$

Imponiendo que $\partial_{[a} A_{b]}^{\pm\infty}(x) = 0$ e integrando por partes

$$\begin{aligned} Q_S^+ &= \sum_s \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x \partial_s \lambda^+(x) \dot{A}_{-s} = - \sum_s \int_{\mathcal{I}^+} dud^2x \lambda^+(x) \partial_s \dot{A}_{-s} = \\ &= - \int_{\Sigma^+} d^2x \lambda^+(x) [\partial_z (A_z^{+\infty} - A_z^{-\infty}) + \partial_{\bar{z}} (A_{\bar{z}}^{+\infty} - A_{\bar{z}}^{-\infty})] = \\ &= -2 \int_{\Sigma^+} d^2x \lambda^+(x) [\partial_{\bar{z}} (A_z^{+\infty} - A_z^{-\infty})] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

de forma tal que Q_S^+ se expresa como

$$Q_S = 2 \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) (A_z^{+\infty} - A_z^{-\infty}) = 2 \int_{\mathcal{I}} dud^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \dot{A}_z. \quad (\text{B.6})$$

Aplicamos la transformada de Fourier a \dot{A}_z

$$\begin{aligned} Q_S^+ &= 2 \int_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega du d^2x \frac{(-i\omega)}{2\pi} \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \tilde{A}_z^+(\omega, x) e^{(-i\omega u)} = \\ &= 2 \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d^2x i\omega \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \tilde{A}_z^+(\omega, x) \delta(\omega) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

entonces planteamos

$$Q_S^+ = -2 \int_{\Sigma} d^2x \lim_{\omega \rightarrow 0} i\omega \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \tilde{A}_z^+(\omega, x) \quad (\text{B.8})$$

aplicamos el promedio del límite entorno a $\omega \rightarrow 0$ donde

$$\begin{aligned} Q_S^+ &= \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \left[\lim_{\omega \rightarrow 0^+} (-i\omega) \tilde{A}_z^+(\omega, x) + \lim_{\omega \rightarrow 0^-} (-i\omega) \tilde{A}_z^+(\omega, x) \right] = \\ &= \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \lim_{\omega \rightarrow 0^+} (i\omega) \left[-\tilde{A}_z^+(\omega, x) + \tilde{A}_z^+(-\omega, x) \right] = \\ &= \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \lim_{\omega \rightarrow 0} (i\omega) \left[-\tilde{A}_z^+(\omega, x) + \tilde{A}_{\bar{z}}^{*+}(\omega, x) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

usando la definición de operadores de Fock (3.40) para $a_s(\omega, x)$ se llega a que

$$Q_S^+ = \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) \lim_{\omega \rightarrow 0} (i\omega) \left[-a_+^+(\omega, x) + a_-^+(\omega, x) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Ahora se escribe el termino Q_H en función de los operadores (3.40), sabemos que

$$Q_H^+ = \sum_s \int_{\mathcal{I}} du d^2x e^{\lambda^+(x)} \psi_s^*(u, x) \psi_s(u, x) \quad (\text{B.11})$$

aplicamos la transformada de Fourier a ψ_s^* y ψ_s donde se obtiene que

$$\begin{aligned} Q_H^+ &= \sum_s \int_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' du d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{4\pi^2} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega'', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x) e^{iu(\omega'' - \omega')} = \\ &= \sum_s \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega'', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x) \delta(\omega'' - \omega') = \\ &= \sum_s \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

para expresar Q_H^+ en función de $b_s(\omega, x)$ y $c_s(\omega, x)$ debemos primero dividir la integral (completar) donde Q_H^+ queda expresado como

$$\begin{aligned}
Q_H^+ &= \sum_s \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^0 d\omega' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x) + \\
&+ \sum_s \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} d\omega' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

aplicando un cambio de variable $\omega' = -\omega'$ y $s = -s$ en el primer termino de (B.13) se llega a que

$$\begin{aligned}
Q_H^+ &= - \sum_{-s} \int_{\Sigma} \int_0^{+\infty} d\omega' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_{-s}^{*+}(-\omega', x) \tilde{\psi}_{-s}^+(-\omega', x) + \\
&+ \sum_s \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} d\omega' d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} \tilde{\psi}_s^{*+}(\omega', x) \tilde{\psi}_s^+(\omega', x)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

usando la definición de operadores de Fock (3.40) para $b_s(\omega, x)$ y $c_s(\omega, x)$, aplicando normal ordering y renombrando $\omega' = \omega$, se llega a que

$$Q_H^+ = \sum_s \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} d\omega d^2x \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} [b_s^{\dagger+}(\omega, x) b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x) c_s^+(\omega, x)]. \tag{B.15}$$

de forma tal que la expresión de Q_{λ}^+ en función de los operadores es la siguiente

$$\begin{aligned}
Q_{\lambda}^+ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^+(x) [a_+^+(\omega, x) - a_-^+(\omega, x)] + \\
&+ \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x d\omega \frac{e^{\lambda^+(x)}}{2\pi} (b_s^{\dagger+}(\omega, x) b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x) c_s^+(\omega, x)).
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Por lo tanto obtenemos la carga Q_{λ} en función de los operadores de Fock asintótico en \mathcal{I}^+ . Realizando el mismo procedimiento tomando en cuenta que el campo $A_s(v, x)$ tiene el mismo comportamiento que $A_s(u, x)$, cuando $v \rightarrow \pm\infty$ y además que $\partial_{[a} A^{\pm\infty}_{b]}(x) = 0$, se tiene que Q_{λ} en \mathcal{I}^- es

$$\begin{aligned}
Q_{\lambda}^- &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda^-(x) [a_+^-(\omega, x) - a_-^-(\omega, x)] + \\
&+ \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x d\omega \frac{e^{\lambda^-(x)}}{2\pi} (b_s^{\dagger-}(\omega, x) b_s^-(\omega, x) - c_s^{\dagger-}(\omega, x) c_s^-(\omega, x)).
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Como Q_λ es una cantidad conservada entonces debe ser una simetría de la matriz de dispersión S es decir que

$$\langle out|Q_\lambda^+ S - S Q_\lambda^-|in \rangle = 0 \quad (\text{B.18})$$

donde la función $\lambda(x)$ cumple con las condiciones (4.12) de forma tal que $\lambda^+(x) = \lambda^-(-x) = \lambda(x)$. Consideramos estados asintóticos de multi-partículas (en esta situación las partículas no interactúan entre si) que están constituidos por un total de l fotones, j positrones y k electrones que los consideramos como partículas hard, los estados $|in \rangle$ y $\langle out|$ se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} |in \rangle &= |x_k^-, \omega_k^-, s' \rangle |x_j^-, \omega_j^-, s' \rangle |x_l^-, \omega_l^-, s' \rangle \\ \langle out| &= \langle x_k^+, \omega_k^+, s' | \langle x_j^+, \omega_j^+, s' | \langle x_l^+, \omega_l^+, s' |. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

El cual expresado por medio de los operadores de Fock asintóticos se tiene que

$$\begin{aligned} |in \rangle &= \Pi_{jkl} a_s^{\dagger-}(\omega_l, x_l) b_s^{\dagger-}(\omega_k, x_k) c_s^{\dagger-}(\omega_j, x_j) |0 \rangle \\ \langle out| &= \langle 0 | \Pi_{jkl} a_s^+(\omega_l, x_l) b_s^+(\omega_k, x_k) c_s^+(\omega_j, x_j). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Primero evaluamos $\langle out|Q_\lambda^{out} S|in \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle out|Q_\lambda^+ S|in \rangle &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda(x) \langle out|[a_+^{\dagger}(\omega, x) - a_-^{\dagger}(\omega, x)] S|in \rangle \\ &+ \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x d\omega \frac{e\lambda(x)}{2\pi} \langle out|[b_s^{\dagger+}(\omega, x) b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x) c_s^+(\omega, x)] S|in \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

del primer término vamos a considerar solo la contribución por parte de a_+^{\dagger} ya que no puedo destruir fotones soft, debido a que el estado $\langle out|$ solo contiene partículas hard. Usando la relación de conmutación (3.41) el primer termino queda como

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}} \lambda(x) \langle out|a_+^{\dagger}(\omega, x) S|in \rangle \quad (\text{B.22})$$

para el segundo término usamos las relaciones de conmutación (3.41), la expresión de los estados in y out, y como actúan los operadores en el vacío se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_s \langle out|b_s^{\dagger+}(\omega, x)b_s^+(\omega, x)S|in \rangle - \sum_s \langle out|c_s^{\dagger+}(\omega, x)c_s^+(\omega, x)S|in \rangle = \\
= \sum_k 2\pi\delta(\omega - \omega_k)\delta^{(2)}(x, x_k^+) \langle out|S|in \rangle - \\
- \sum_j 2\pi\delta(\omega - \omega_j)\delta^{(2)}(x, x_j^+) \langle out|S|in \rangle
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Se sustituye (B.23) en el segundo término de la ecuación (B.21) y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_s \int_{\Sigma} \int_0^{+\infty} d^2x d\omega \frac{e\lambda(x)}{2\pi} \langle out|[b_s^{\dagger+}(\omega, x)b_s^+(\omega, x) - c_s^{\dagger+}(\omega, x)c_s^+(\omega, x)]S|in \rangle = \\
= \int_{\Sigma} \int_0^{+\infty} d^2x d\omega \sum_k e\lambda(x)\delta(\omega - \omega_k)\delta^{(2)}(x, x_k^+) \langle out|S|in \rangle \\
- \sum_j e\lambda(x)\delta(\omega - \omega_j)\delta^{(2)}(x, x_j^+) \langle out|S|in \rangle = \\
= e \int_{\Sigma} d^2x \lambda(x) \left[\sum_k \delta^{(2)}(x, x_k^+) - \sum_j \delta^{(2)}(x, x_j^+) \right] \langle out|S|in \rangle
\end{aligned} \tag{B.24}$$

usando los resultados (B.22) y (B.24) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle out|Q_{\lambda}^+S|in \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}}\lambda \langle out|a_+^+(\omega, x)S|in \rangle + \\
+ e \int_{\Sigma} d^2x \lambda(x) \left[\sum_k \delta^{(2)}(x, x_k) - \sum_j \delta^{(2)}(x, x_j) \right] \langle out|S|in \rangle
\end{aligned} \tag{B.25}$$

integrando se llega a que

$$\begin{aligned}
\langle out|Q_{\lambda}^+S|in \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}}\lambda \langle out|a_+^+(\omega, x)S|in \rangle + \\
+ e \left[\sum_k \lambda(x_k^+) - \sum_j \lambda(x_j^+) \right] \langle out|S|in \rangle = \\
= \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}}\lambda \langle out|a_+^+(\omega, x)S|in \rangle + e \sum_i C_i^+ \lambda(x_i^+)
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$C_i = \begin{cases} 1 \text{ para } \Psi \\ -1 \text{ para } \bar{\Psi} \end{cases}$$

realizando el mismo procedimiento se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle out|SQ_{\lambda}^{-}|in \rangle = & \lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}}\lambda(x) \langle out|Sa_{-}^{\dagger-}(\omega, x)|in \rangle + \\
& + e \sum_i C_i^{-} \lambda(x_i^{-}) \langle out|S|in \rangle
\end{aligned} \tag{B.27}$$

como debe cumplirse (B.18) entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \int_{\Sigma} d^2x \partial_{\bar{z}}\lambda(x) \langle out|a_{+}^{+}S - Sa_{-}^{\dagger-}|in \rangle = \\
= e \sum_i [C_i^{+} \lambda(x_i^{+}) - C_i^{-} \lambda(x_i^{-})] \langle out|S|in \rangle
\end{aligned} \tag{B.28}$$

donde la ecuación (B.28) representa la identidad de Ward para Q_{λ} [36].

B.2. Equivalencia entre Identidad de Ward y Teorema Soft

El teorema soft para fotones establece que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle out | a_+^\dagger(p) S | in \rangle &= \sum_{k \in \psi \bar{\psi}} e \left[\frac{C_k^+ p_k^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^+ \cdot p} - \frac{C_k^- p_k^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^- \cdot p} \right] \langle out | S | in \rangle \\ &= - \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle out | S a_-^\dagger(p) | in \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

donde este es equivalente a (4.14). La ecuación (B.29) está expresada en función del momento del fotón soft p^μ y el de las partículas p_k^μ . Los estados in y out están en la base de onda planas

$$|in \rangle = |p_1^-, \dots, p_n^- \rangle, \quad \langle out| = \langle p_1^+, \dots, p_n^+ | \quad (\text{B.30})$$

Para establecer la equivalencia primero elegimos la función $\lambda(x)$ de (4.14), que en este caso es $\lambda(w, \bar{w}) = \frac{1}{z-w}$ con $\partial_z \lambda = 2\pi \delta^{(2)}(z-w)$, de tal forma que sustituyendo en (4.14) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S - a_-^\dagger(\omega, x) | in \rangle &= \\ = \frac{e}{2\pi i} \sum_{k \in \psi \bar{\psi}} \left[\frac{C_k^+}{z - z_k^+} - \frac{C_k^-}{z - z_k^-} \right] \langle out | S | in \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Para mostrar la equivalencia vamos a ir del teorema soft a la identidad de Ward. Para esto debemos expresar el momento de las partículas de (B.29) en términos de las coordenadas z, \bar{z} y la energía. Por otro lado la polarización del fotón soft la tomamos según (3.50), $p_k^\mu = \omega_k q^\mu(x_k)$ y $p^\mu = \omega q^\mu(x)$ de forma tal que

$$p_k^+ \cdot \varepsilon^+ = -\omega_k (\bar{z} - \bar{z}_k^+) \quad p_k^+ \cdot p = -\omega \omega_k |z - z_k^+|^2 \quad (\text{B.32})$$

donde se obtiene

$$\frac{p_k^+ \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^+ \cdot p} = \frac{1}{\omega(z - z_k^+)} \quad (\text{B.33})$$

aplicando lo mismo se llega a

$$\frac{p_k^- \cdot \varepsilon_+^*}{p_k^- \cdot p} = \frac{1}{\omega(z - z_k^-)}. \quad (\text{B.34})$$

Usando las relaciones que existen entre los operadores de Fock asintóticos y los de Fock, podemos expresar que el

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle out | a_+^\dagger(p) S | in \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} 4\pi i \langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S | in \rangle \quad (\text{B.35})$$

y además que $\langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S | in \rangle = - \langle out | S a_-^{\dagger-}(\omega, x) | in \rangle$ se tiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S | in \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2\pi i \langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S - S a_-^{\dagger-}(\omega, x) | in \rangle. \quad (\text{B.36})$$

Sustituyendo los resultados (B.33), (B.34) y (B.35) en (B.29) recuperamos la identidad de Ward

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle out | a_+^\dagger(\omega, x) S - S a_-^{\dagger-}(\omega, x) | in \rangle = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m e \left[\frac{C_k^+}{z - z_k^+} - \frac{C_k^-}{z - z_k^-} \right] \langle out | S | in \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

con esto queda demostrada la equivalencia entre la identidad de Ward de Q_λ y el teorema soft para fotones. Donde verificamos la conexión demostrada por Strominger [36].

B.3. Ejemplo de Teorema Soft para Fotones

El teorema soft establece que cualquier elemento de la matriz S con un fotón soft adicional es igual al elemento de la matriz original multiplicado por el factor soft mas correcciones de orden ω^0 [36]

$$\langle out|a_+^\dagger(p)S|in \rangle = \sum_{k=1}^n e \left[\frac{p_k^+ \cdot \varepsilon^+}{p_k^+ \cdot p} - \frac{p_k^- \cdot \varepsilon^+}{p_k^- \cdot p} \right] \langle out|S|in \rangle + \mathcal{O}(\omega^0) \quad (\text{B.38})$$

también se puede escribir como

$$\mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) = \sum_{k=1}^n e \left[\frac{p_k^+ \cdot \varepsilon^+}{p_k^+ \cdot q'} - \frac{p_k^- \cdot \varepsilon^+}{p_k^- \cdot q'} \right] \mathcal{A}_n(p_k^{\psi,A}) \quad (\text{B.39})$$

para derivar la ecuación (B.39) tomamos cualquier proceso de dispersión con un total de n partículas entrantes y salientes y luego agregamos un fotón saliente con momento $p^\mu = \omega q^\mu$. En el limite soft, se puede escribir la amplitud como la suma de dos tipos de términos, uno donde el fotón este adherido a una linea externa y otro donde el fotón esta en una linea interna. En esta sección mostramos una deducción simplificada de forma tal que se pueda entender el funcionamiento del teorema soft para el caso donde tenemos un total de cuatro partículas que en este caso son electrones y fotones. Consideramos el fotón soft como saliente- Los procesos de dispersión que obtenemos están representados por los diagramas a nivel árbol como se muestran en la figura 15 .

Usando las reglas de Feynman calculamos la amplitud asociada a cada uno de los casos, primero lo haremos para la situación donde el fotón soft está en la linea del electrón entrante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) &= -(i)^5 e^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu,+}^*(p_3) \frac{(\not{p}_4 + \not{p}_3)}{(p_4 + p_3)^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) \frac{(\not{p}_1 - \omega q)}{(p_1 - \omega q)^2} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(\omega q) u(p_1) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \\ &= -ie^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu,+}^*(p_3) \frac{(\not{p}_4 + \not{p}_3)}{(p_4 + p_3)^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) \frac{\not{p}_1}{2p_1 \cdot \omega q} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(\omega q) u(p_1) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

usando la relación de conmutación $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\eta^{\mu\nu}$ y que para espinores sin masa se verifica que $\not{p}_1 u(p_1) = 0$ de forma tal que lo anterior se puede expresar como

$$\mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) = -ie^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu,+}^*(p_3) \frac{(\not{p}_4 + \not{p}_3)}{(p_4 + p_3)^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) u(p_1) \frac{p_1 \cdot \varepsilon_+^*(\omega q)}{p_1 \cdot \omega q} \quad (\text{B.41})$$

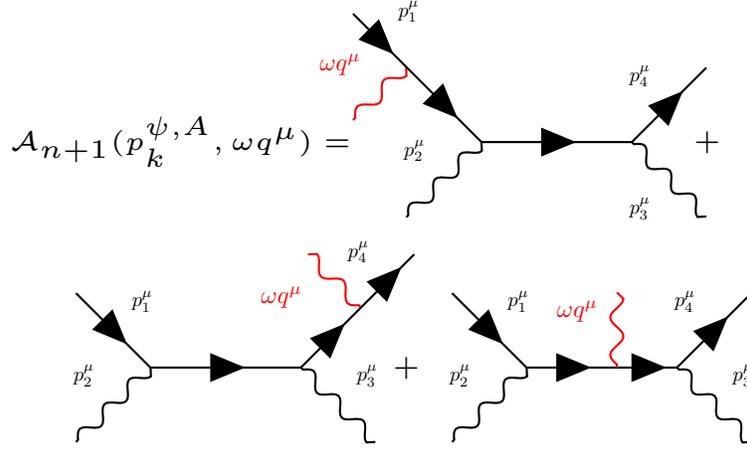


Figura 15: Procesos de dispersión constituidos por dos electrones con un fotón soft adicional en la linea externa y en la interna

vemos que en (B.41) hay un coeficiente que representa la amplitud de dispersión para el proceso cuando no actúa el fotón soft y el restante representa al coeficiente soft donde

$$\mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) = \mathcal{A}_n(p_k^{\psi,A}) \frac{ep_1 \cdot \varepsilon_+^*(\omega q)}{p_1 \cdot p} \quad (\text{B.42})$$

cuando el fotón esta sobre el electrón saliente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) &= -i e^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu,+}^*(\omega q) \frac{(\not{p}_4 + \not{\omega}q)}{(p_4 + \omega q)^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) \frac{(\not{p}_1 + \not{p}_2)}{(p_1 + p_2)^2} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(p_2) u(p_1) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \\ &= -i e^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu,+}^*(p_3) \frac{\not{p}_4}{2\omega p_4 \cdot q} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) \frac{(\not{p}_1 + \not{p}_2)}{(p_1 + p_2)^2} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(\omega q) u(p_1) \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

usando la relación $\bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_{s'}(p) = 2p^\mu \delta_{ss'}$ se llega a que

$$\mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) = \mathcal{A}_n(p_k^{\psi,A}) \frac{ep_4 \cdot \varepsilon_+^*}{p_4 \cdot p}. \quad (\text{B.44})$$

si el fotón está en la linea interna la amplitud es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{int}(p_k^{\psi,A}, \omega q_+^A) &= -i e^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu}^*(p_3) \frac{(\not{k} - \not{\omega}q)}{(k - \omega q)^2} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(\omega q) \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) u(p_1) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} \\ &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{=} -i e^3 \bar{u}(p_4) \gamma^\nu \varepsilon_{\nu}^*(p_3) \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu \varepsilon_{\mu,+}^*(\omega q) \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\delta \varepsilon_{\delta,+}^*(p_2) u(p_1) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

representando un termino del orden $\mathcal{O}(\omega^0)$. Entonces la amplitud de dispersión va a ser igual a la suma de las contribuciones calculadas anteriormente

$$\mathcal{A}_{n+1}(p_k^{\psi,A}, \omega q_\mu) = e \left(\frac{p_4 \cdot \varepsilon_+^*}{p_4 \cdot p} - \frac{p_1 \cdot \varepsilon_+^*}{p_1 \cdot p} \right) \mathcal{A}_n(p_k^{\psi,A}) \quad (\text{B.46})$$

de forma tal que obtenemos el teorema soft.

C. Apéndice III

C.1. Simetría Asintótica

Aquí se presentan los cálculos para obtener por medio de las cargas F_χ y F_χ^* , las transformaciones asociadas a las simetrías asintóticas que generan las cargas mencionadas. Para obtener las transformaciones realizamos el corchete de Poisson de las cargas con los campos. Utilizando la definición (5.57), que $D_a = \partial_a + ieA_a$, los corchetes de los campos (3.26) y la regla de Leibnitz (3.25). Las transformaciones de los campos asociadas a la carga F_χ presentan la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \dot{A}_z &= \{F_\chi, \dot{A}_z\} = \left\{ \int d^2x du (\chi_+^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+ + \chi_-^{*z} D_z \psi_-), \dot{A}_z \right\} = \\
&= \int d^2x du \chi_+^{*\bar{z}} \{A_{\bar{z}}, \dot{A}_z \psi_+\} = \int d^2x du \chi_+^{*\bar{z}} \psi_+ \{A_{\bar{z}}, \dot{A}_z\} = \\
&= \int d^2x du \chi_+^{*\bar{z}} \psi_+ \delta(u - u') \delta^2(x, x') = ie \chi_+^{*\bar{z}} \psi_+
\end{aligned} \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \dot{A}_{\bar{z}} &= \{F_\chi, \dot{A}_{\bar{z}}\} = \left\{ \int d^2x du (\chi^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+ + \chi^{*z} D_z \psi_-), \dot{A}_{\bar{z}} \right\} = \\
&= \int d^2x du \chi_-^{*z} \{A_z, \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+\} = \int d^2x du \chi_-^{*z} \psi_- \{A_z, \dot{A}_{\bar{z}}\} = \\
&= \int d^2x du \chi_-^{*z} \psi_- \delta(u - u') \delta^2(x, x') = ie \chi_-^{*z} \psi_-
\end{aligned} \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \psi_+^* &= \{F_\chi, \psi_+^*\} = \left\{ \int d^2x du (\chi^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+ + \chi^{*z} D_z \psi_-), \psi_+^* \right\} = \\
&= \int d^2x du \{ \chi^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+, \psi_+^* \} = \int d^2x du \{ \chi^{*\bar{z}} (\partial_{\bar{z}} + ieA_{\bar{z}}) \psi_+, \psi_+^* \} = \\
&= \int d^2x du [-\partial_{\bar{z}} \chi^{*\bar{z}} \{ \psi_+, \psi_+^* \} + ieA_{\bar{z}} \{ \psi_+, \psi_+^* \}] = \\
&= \int d^2x du i \delta(u - u') \delta^2(x - x') [\partial_{\bar{z}} - ieA_{\bar{z}}] \chi^{*\bar{z}} = i D_{\bar{z}} \chi^{*\bar{z}}
\end{aligned} \tag{C.49}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \psi_-^* &= \{F_\chi, \psi_-^*\} = \left\{ \int d^2x du (\chi^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+ + \chi^{*z} D_z \psi_-), \psi_-^* \right\} = \\
&= \int d^2x du \{ \chi^{*z} D_z \psi_-, \psi_-^* \} = \int d^2x du \{ \chi^{*z} (\partial_z + ieA_z) \psi_-, \psi_-^* \} = \\
&= \int d^2x du [-\partial_z \chi^{*z} \{ \psi_-, \psi_-^* \} + ieA_z \{ \psi_-, \psi_-^* \}] = \\
&= \int d^2x du i \delta(u - u') \delta^2(x - x') [\partial_z - ieA_z] \chi^{*z} = i D_z \chi^{*z}
\end{aligned} \tag{C.50}$$

operando de forma similar para la carga F_ϵ^* encontramos las transformaciones asociadas a los campos

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \dot{A}_z &= \{F_\chi^*, \dot{A}_z\} = -ie\chi_-^{\bar{z}}\psi_-^* \\
\delta_\chi \dot{A}_{\bar{z}} &= \{F_\chi^*, \dot{A}_{\bar{z}}\} = -ie\chi_+^z\psi_+^* \\
\delta_\chi \psi_+ &= \{F_\chi^*, \psi_+\} = iD_z\chi^z \\
\delta_\chi \psi_- &= \{F_\chi^*, \psi_-\} = iD_{\bar{z}}\chi^{\bar{z}}
\end{aligned} \tag{C.51}$$

C.2. Álgebra de Cargas

Aquí mostramos algunos de los cálculos para obtener los resultados sobre el álgebra asociada al conjunto de cargas asociadas a la simetrías de QED que se presentan en la sub-sección 5.4 . De tal forma que para obtener dicha álgebra, realizamos el corchete de Poisson entre las diferentes cargas definidas en el espacio. Primero buscamos el corchete de Poisson de la carga F_ϵ con Q_λ , donde usando el corchete de Poisson entre los campos (3.26), llegamos a que

$$\{F_\epsilon, Q_\lambda\} = \delta_\lambda F_\epsilon = \int_{\mathcal{I}} d^2x du [\epsilon^{*\bar{z}} \delta_\lambda (D_{\bar{z}} \psi_+) + \epsilon^z \delta_\lambda (D_z \psi_-)] \quad (\text{C.52})$$

siendo $\delta_\lambda (D_s \psi_s) = -i\lambda D_s \psi_s$ entonces

$$\{F_\epsilon, Q_\lambda\} = -i\lambda F_\epsilon \quad (\text{C.53})$$

como $\epsilon^* = (\epsilon^{*z}, \epsilon^{*\bar{z}})$ es un vector definido en el plano conforme, entonces contiene al vector $\epsilon'^* = -i\lambda \epsilon^*$ de forma tal que

$$\{F_\epsilon, Q_\lambda\} = F_{\epsilon'} \quad (\text{C.54})$$

ahora buscamos el corchete entre F_ϵ y Q_5

$$\begin{aligned} \{F_\epsilon, Q_5\} &= \delta_5 F_\epsilon = \int_{\mathcal{I}} d^2x du [\epsilon^{*\bar{z}} \delta_5 (D_{\bar{z}} \psi_+) + \epsilon^z \delta_5 (D_z \psi_-)] = \\ &= \int_{\mathcal{I}} d^2x du [i\epsilon^{*z} D_z \psi_- - i\epsilon^{*\bar{z}} D_{\bar{z}} \psi_+] \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

nuevamente como el vector ϵ^* esta definido en el plano conforme entonces contiene a $\epsilon''^* = (i\epsilon^{*z}, -i\epsilon^{*\bar{z}})$.

$$\{F_\epsilon, Q_5\} = F_{\epsilon''} \quad (\text{C.56})$$

Por otro lado al hacer el corchete con Q_ϵ encontramos

$$\begin{aligned} \{F_\epsilon, Q_\epsilon\} &= \delta_\epsilon F_\epsilon = \int_{\mathcal{I}} d^2x du [\epsilon^{*\bar{z}} \delta_\epsilon (D_{\bar{z}} \psi_+) + \epsilon^{*z} \delta_\epsilon (D_z \psi_-)] = \\ &= \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[\epsilon^{*\bar{z}} \left(-\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+ - \epsilon^\nu D_{\bar{z}} (q_\nu \dot{\psi}_+) \right) + \epsilon^{*z} \left(-\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_z \psi_- - \epsilon^\nu D_z (q_\nu \dot{\psi}_-) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

si se desarrollan las derivadas covariantes, se integra por partes y considerando que los campos decaen en u , se tiene que el primer término

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{I}} d^2x du \varepsilon^{*\bar{z}} \left(-\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+ - \epsilon^\nu D_{\bar{z}}(q_\nu \dot{\psi}_+) \right) = \\
& = \int_{\mathcal{I}} d^2x du \varepsilon^{*\bar{z}} \left(-\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+ - \epsilon^\nu (D_{\bar{z}} q_\nu) \dot{\psi}_+ - \epsilon^\nu q_\nu D_{\bar{z}} \dot{\psi}_+ \right) = \quad (C.58) \\
& = \int_{\mathcal{I}} d^2x du \varepsilon^{*\bar{z}} \left(-\epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+ - \epsilon^\nu (D_{\bar{z}} q_\nu) \dot{\psi}_+ - \epsilon^\nu q_\nu \partial_{\bar{z}} \dot{\psi}_+ + \epsilon^\nu q_\nu \dot{A}_{\bar{z}} \psi_+ \right) = 0
\end{aligned}$$

el segundo término tiene el mismo comportamiento de forma tal que operando de la misma manera se tiene que es nulo

$$\{F_\varepsilon, Q_\varepsilon\} = 0 \quad (C.59)$$

Para el caso de Q_λ , usando la propiedad (5.61)

$$\{Q_\lambda, F_\varepsilon\} = -\{F_\varepsilon, Q_\lambda\} = -F_{\varepsilon'} \quad (C.60)$$

al hacer el corchete de Q_λ con Q_5 encontramos que

$$\begin{aligned}
\{Q_\lambda, Q_5\} &= \delta_5 Q_\lambda = \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[\partial_s \lambda \delta_5(\dot{A}_{-s}) + e \lambda \delta_5(\psi_s^* \psi_s) + e \lambda \psi_s^* \delta_5(\psi_s) \right] = \\
&= \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[i \psi_+^* \psi_+ - i \psi_-^* \psi_- - i \psi_+^* \psi_+ + i \psi_-^* \psi_- \right] = 0. \quad (C.61)
\end{aligned}$$

Luego con Q_ε si se integra por partes y se toma que los campos decae en u tenemos que

$$\begin{aligned}
\{Q_\lambda, Q_\varepsilon\} &= \delta_\varepsilon Q_\lambda = \sum_s \int d^2x du \left[\delta_\varepsilon(\psi_s^*) \psi_s + \psi_s^* \delta_\varepsilon(\psi_s) + \partial_s \lambda \delta_\varepsilon(\dot{A}_{-s}) \right] = \\
&= - \sum_s \int d^2x du \varepsilon^\nu q_\nu \left[\dot{\psi}_s^* \psi_s + \psi_s^* \dot{\psi}_s - \partial_s \lambda \ddot{A}_{-s} \right] = \quad (C.62) \\
&= - \sum_s \int d^2x du \varepsilon^\nu q_\nu \left[\dot{\psi}_s^* \psi_s - \psi_s^* \dot{\psi}_s + \partial_u \partial_s \dot{A}_{-s} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Si se hace el corchete entre Q_λ y Q_ω , primero es conveniente por cuestión de simpleza, plantear lo siguiente

$$\{Q_\lambda, Q_\omega\} = -\{Q_\omega, Q_\lambda\}. \quad (\text{C.63})$$

Ahora desarrollamos el corchete $\{Q_\omega, Q_\lambda\}$ donde obtenemos

$$\begin{aligned} \{Q_\omega, Q_\lambda\} &= \delta_\lambda Q_\omega = \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[\delta_\lambda(\dot{A}_{-s})\delta_{(Y^a\partial_a)}A_s + \dot{A}_{-s}\delta_\lambda\delta_{(Y^a\partial_a)}A_s \right] + \\ &+ [(\delta_\lambda\psi_s^*)\delta_{(Y^a\partial_a)}\psi_s + \psi_s^*\delta_\lambda\delta_{(Y^a\partial_a)}\psi_s] = \sum_s \int_{\mathcal{I}} d^2x du \left[\dot{A}_{-s}\delta_{(Y^a\partial_a)}(\partial_s\lambda(x)) \right] + \\ &+ [ie\psi_s^*\psi_s\delta_{(Y^a\partial_a)}\lambda(x)] = Q_{\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Para conseguir los resultados restantes, se procede de forma similar.

Referencias

- [1] A. STROMINGER , *Asymptotic symmetries of yang-mills theory*, Journal of High Energy Physics, 2014(7):151, 2014.
- [2] A. STROMINGER , *On bms invariance of gravitational scattering*, Journal of High Energy Physics, 2014(7):152, 2014.
- [3] F. BLOCH AND A. NORDSIECK, *Note on the radiation field of the electron*, Phys. Rev. 52 (Jul, 1937) 54-59. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.52.54>.
- [4] F. LOW, *Scattering of light of very low frequency by systems of spin 1/2*, Phys. Rev. 96 (1954) 1428-1432.
- [5] M. GELL-MANN AND M. L. GOLDBERGER, *Scattering of low-energy photons by particles of spin 1/2*, Phys. Rev. 96 (1954) 1433-1438.
- [6] F. LOW, *Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions*, Phys. Rev. 110 (1958) 974-977.
- [7] E. KAZES, *Generalized current conservation and low energy limit of photon interactions*, Il Nuovo Cimento (1955-1965) 13 no. 6, (1959) 1226-1239.
- [8] D. YENNIE, S. C. FRAUTSCHI AND H. SUURA, *The infrared divergence phenomena and high-energy processes*, Annals of Physics 13 no. 3, (1961) 379-452.
- [9] S. WEINBERG, *Infrared photons and gravitons*, Phys.Rev. 140 (1965) B516-B524.
- [10] H. BONDI, M. VAN DER BURG AND A. METZNER, *Gravitational waves in general relativity VII. Waves from axisymmetric isolated systems*, Proc.Roy.Soc.Lond. A269 (1962) 21-52.
- [11] R. SACHS, *Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time*, Proc.Roy.Soc.Lond. A270 (1962) 103-126.
- [12] T. HE, P. MITRA AND A. STROMINGER , *2D Kac-Moody Symmetry of 4D Yang-Mills Theory*, arXiv:1503.02663 [hep-th].

- [13] T. HE, P. MITRA, A. P. PORFYRIADIS AND A. STROMINGER , *New Symmetries of Massless QED*, JHEP 10 (2014) 112, arXiv:1407.3789 [hep-th]
- [14] M. CAMPIGLIA AND A. LADDHA , *Loop Corrected Soft Photon Theorem as a Ward Identity*, arXiv:1903.09133 [hep-th].
- [15] D. KAPEC, M. PATE, AND A. STROMINGER, *New Symmetries of QED*, arXiv:1506.02906 [hep-th].
- [16] M. CAMPIGLIA AND A. LADDHA, *Asymptotic symmetries of QED and Weinberg's soft photon theorem*, JHEP 07 (2015) 115, arXiv:1505.05346 [hep-th].
- [17] G. BARNICH AND C. TROESSAERT, *Comments on holographic current algebras and asymptotically at four dimensional spacetimes at null infinity*, JHEP 11 (2013)003, arXiv:1309.0794 [hep-th].
- [18] G. BARNICH AND P.H. LAMBERT, *Einstein-Yang-Mills theory: Asymptotic symmetries*, Phys. Rev. D88 (2013) 103006, arXiv:1310.2698 [hep-th].
- [19] D. GRUMILLER, M. LESTON AND D. VASSILEVICH, *Anti-de Sitter holography for gravity and higher spin theories in two dimensions*, Phys. Rev. D89 no. 4, (2014) 044001, arXiv:1311.7413 [hep-th].
- [20] A. MOHD, *A note on asymptotic symmetries and soft-photon theorem*, JHEP 02 (2015) 060, arXiv:1412.5365 [hep-th].
- [21] C. CARDONA, *Asymptotic Symmetries of Yang-Mills with Theta Term and Monopoles*, arXiv:1504.05542 [hep-th].
- [22] T. ADAMO AND E. CASALI, *Perturbative gauge theory at null infinity*, Phys. Rev. D91 no. 12, (2015) 125022, arXiv:1504.02304 [hep-th].
- [23] A. SERAJ, *Multipole charge conservation and implications on electromagnetic radiation*, arXiv:1610.02870 [hep-th].

- [24] B. GABAI AND A. SEVER, *Large gauge symmetries and asymptotic states in QED*, JHEP 12 (2016) 095, arXiv:1607.08599 [hep-th].
- [25] Y. B. ZELDOVICH AND A. G. POLNAREV, *Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars*, Soviet Astronomy 51 (Feb., 1974) 30.
- [26] M.E PESKIN AND D.V SCHROEDER , *An Introduction to Quantum Field Theory*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company.
- [27] M. SCHWARTZ , *Quantum Field Theory and the Standard Model*, first edition, Cambridge University Press.
- [28] E. NOETHER , *Invarianten beliebiger differentialausdrucke*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1918:37-44, 1918.
- [29] M. SREDNICKI , *Quantum Field Theory*, first edition, Cambridge University Press.
- [30] D. KAISER , *Drawing Theories Apart*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 2005.
- [31] P. LEE AND R. WALD , *Local symmetries and constraints*, Journal of Mathematical Physics 31, 725 (1990); doi: 10.1063/1.528801.
- [32] S. AVERY AND B. SCHWAB , *Noether's Second Theorem and Ward Identities for Gauge Symmetries*, arXiv:1510.07038 [hep-th].
- [33] S. HAWKING AND G. ELLIS , *The large scale structure of space-time*, first edition, Cambridge University Press, 1973.
- [34] R. PENROSE , *Asymptotic Properties of Fields and Space-Times*, physical review letters, volume 10, number 2, january 1962.
- [35] R. WALD , *General Relativity*, first edition, The University of Chicago Press, 1984.
- [36] A. STROMINGER , *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory*, JHEP **08**, 058 (2014) [arXiv:1703.05448 [hep-th]].

- [37] J. D JACKSON , *Classical Electrodynamics*, third edition, John Wiley and Sons, inc.
- [38] D. KAPEC AND P. MITRA , *d-Dimensional Stress Tensor for Mink_{d+2} Gravity*, JHEP 05, 186 (2018) doi:10.1007/JHEP05(2018)186 [arXiv:1711.04371 [hep-th]].
- [39] T. T DIMITRESCU, T. HE, P. MITRA AND A. STROMINGER , *Infinite-Dimensional Fermionic Symmetry in Supersymmetric Gauge Theories*, JHEP **08**, 051 (2021) [arXiv:1511.07429 [hep-th]].
- [40] A. ASHTEKAR AND M. STREUBEL , *Symplectic Geometry of Radiative Modes and Conserved Quantities at Null Infinity*, Proc. Roy. Soc. Lond. A 376, 585 (1981).
- [41] S. L. ADLER , *Axial vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. 177, 2426-2438 (1969).
- [42] M. BAÑADOS AND I. REYES , *A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms*, arXiv:1601.03616 [hep-th].
- [43] P. SZEKERES , *A Course in Modern Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [44] M. HENNEAUX AND C. TEITELBOIM , *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1994.
- [45] R. WONG , *Asymptotic approximations of integrals*, SIAM 2001.
- [46] A. ERDÉLYI , *Asymptotic representations of fourier integrals and the method of stationary phase*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 3(1):17-27, 1955.
- [47] T. REGGE AND C. TEITELBOIM , *Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity*, Annals Phys., vol. 88, p. 286, 1974.
- [48] F. CACHAZO AND A. STROMINGER , *Evidence for a New Soft Graviton Theorem*, arXiv:1404.4091 [hep-th].

- [49] P. MAO AND J. WU , *Note on asymptotic symmetries and soft gluon theorems*, Phys. Rev. D 96, 065023 (2017) [arXiv:1704.05740 [hep-th]].
- [50] M. CAMPIGLIA AND J. PERAZA , *Charge algebra for non-abelian large gauge symmetries at $O(r)$* , arXiv:2111.00973 [hep-th].
- [51] M. CAMPIGLIA AND J. PERAZA , *Generalized BMS charge algebra*, arXiv:2002.06691 [gr-qc].
- [52] M. CAMPIGLIA, L. COITO AND S. MIZERA , *Can scalars have asymptotic symmetries?*, arXiv:1703.07885 [hep-th].
- [53] S. WEINBERG , *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995.

