

ESTUDIO DE CAMPOS ULTRASÓNICOS POR MÉTODOS ÓPTICOS DE ALTA RESOLUCIÓN.

**TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA
Marzo de 1996**

Ismael Núñez

Director de Tesis: Dr. Carlos Negreira.

INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
Universidad de la República-Montevideo-Uruguay

1. INTRODUCCIÓN	4
2. CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS ACUSTO-ÓPTICOS.	6
3. MÉTODOS DE FORMACIÓN DE IMÁGENES.	8
3.1. Teoría óptica de formación de imágenes de objetos de fase.	8
3.2. Método Schlieren	15
3.3. Método del campo oscuro.	18
4. INTERACCIONES ACUSTO-ÓPTICAS.	25
4.1. Introducción	25
4.2. Clasificación	27
4.3. Efecto Raman-Nath.	30
4.3.1. Teoría clásica de ondas planas.	30
4.3.2. Generalización de la teoría.	37
4.3.2.1. Campos de forma arbitraria.	37
4.3.2.2. Campos con simetría cilíndrica.	43
4.4. Efecto Bragg.	45
5. RESULTADOS EXPERIMENTALES EN BASE AL EFECTO RAMAN-NATH.	50
5.1. Contrastación del campo medido y las previsiones teóricas.	50
5.2. Comparación de los campos de una cerámica PZT 100% y una piezo-composite 42%.	55
5.2.1. La propagación como filtro pasabajos en frecuencia espacial.	55
5.2.2. Simulación y mediciones experimentales.	63
6. MÉTODOS INTERFEROMÉTRICOS.	70
6.1. Introducción.	70
6.2. Interferometría homodyna.	71
6.2.1. Teoría.	71
6.2.2. Interferómetros estabilizados.	76
6.3. Interferometría heterodyna.	79
6.3.1. Teoría.	79
6.3.1.1. Óptica.	79
6.3.1.2. Electrónica de detección.	83
6.3.1.3. Influencia de la membrana vibrante.	88
6.3.1.4. Perturbación acusto-óptica	97
6.3.2. Resultados experimentales.	101

7. LA SUPERFICIE DEL AGUA COMO MEMBRANA VIBRANTE.	106
7.1. Perturbación introducida en la resolución espacial por una membrana.	106
7.2. Presión de radiación.	112
7.3. Resultados experimentales	114
8. CONCLUSIONES	121

1. Introducción

Esta tesis persigue fundamentalmente dos objetivos.

Por una parte, el de presentar los trabajos que se han hecho en el laboratorio de acusto-óptica para el estudio de los campos de ultrasonido radiados por transductores.

Estos trabajos constan de aportes experimentales originales para la investigación en esta rama y también algunos desarrollos teóricos originales estrechamente vinculados con los métodos experimentales utilizados. Los resultados han sido publicados y presentados en congresos sobre esta temática, como se refiere en las notas bibliográficas al final del trabajo.

Por otra parte, contiene un resumido pero suficientemente explícito desarrollo general sobre los métodos acusto-ópticos y aspectos vinculados, referidos a la propagación de campos acústicos, las interacciones acusto-ópticas y a las vibraciones de membranas perturbadas por dichos campos, utilizadas para reflejar la luz que se analiza. En esta información general se incluyen los trabajos efectuados por el tesista en uno de los centros más avanzados en el tema (Laboratoire d'Ondes et Acoustique, ESPCI, París), con la finalidad de comparar los resultados obtenidos allá con los de nuestro laboratorio y así tener una buena referencia para evaluar nuestra “performance”.

Este desarrollo general sobre los métodos acusto-ópticos intenta ofrecer un “background” necesario a todos los futuros investigadores que se interesen por introducirse en el tema, y refleja todo lo que se puede hacer hoy en un laboratorio que fue montado completamente desde la nada durante los últimos tres años.

Por tal motivo, la tesis se encuentra estructurada en dos grandes núcleos. En primer lugar, el referido a *las interacciones acusto-ópticas*, esto es, a la información que se obtiene de las variaciones de fase experimentadas por la luz al atravesar un medio transparente dinámicamente perturbado (Caps. 4 y 5). En segundo lugar, el referido a la utilización de *membranas reflectivas* de la luz, puestas en vibración por los campos acústicos, con las consiguientes variaciones de fase provocadas en la luz reflejada (Caps. 6 y 7).

A su vez, cada uno de estos núcleos contiene dos partes sustanciales. La primera referida a las necesarias introducciones teóricas y resultados experimentales obtenidos con

la utilización de algunos métodos ya conocidos (como los métodos interferométricos) en la mayor parte del Cap. 4 y la totalidad del Cap. 6. La segunda parte está referida a las introducciones teóricas y resultados experimentales obtenidos en nuestro laboratorio con el método del campo oscuro para visualización de objetos de fase, presentando a su vez una contrastación de dichos resultados con las previsiones teóricas y con resultados experimentales obtenidos por otros métodos. En esta segunda parte mencionamos aportes originales en la sección 4.3.2 y en la totalidad de los Caps. 5 y 7.

El Cap. 2 introduce definiciones y clasificaciones de los métodos acusto-ópticos. En tanto que el Cap. 3, que es puramente de óptica, resulta imprescindible para las aplicaciones cuantitativas de los métodos para visualizar objetos de fase dedicados al estudio de vibraciones mecánicas. Éste es el método óptico que hemos seleccionado para visualizar el ultrasonido, y medir las magnitudes involucradas (fundamentalmente desplazamiento, presión acústica).

2. Clasificación de los métodos acusto-ópticos.

Vamos a llamar métodos acusto-ópticos en general, a todos aquellos que utilizan las perturbaciones producidas en la luz a causa de vibraciones mecánicas generadas por campos acústicos, para el estudio de éstos.

Algunos de estos métodos utilizan la reflexión de la luz sobre una membrana que vibra a consecuencia de las variaciones de presión del campo acústico. Otros utilizan la refracción de la luz que atraviesa el seno del medio en que se propaga la perturbación mecánica. En este último caso, el medio debe de ser transparente a las ondas luminosas utilizadas.

En los métodos que utilizan la luz reflejada en una membrana, ésta puede ser una superficie de frontera del medio en que se propagan las ondas acústicas (p. ej. la superficie libre del agua en cuyo interior se propaga la perturbación, o la superficie de un sólido para el estudio de las ondas superficiales). En estos casos la luz no viaja por el interior del medio y se dice que no hay “interacción” acusto-óptica. Este método, conocido como “método de la membrana”, se desarrollará en el Cap 7.

En cambio, en los métodos que utilizan la refracción de la luz que atraviesa el seno del medio perturbado por las ondas mecánicas, decimos que existe propiamente interacción acusto-óptica. En el Cap. 4 se estudiarán con cierto detalle las diversas teorías de la interacción acusto-óptica, también conocida como Efecto Brillouin.

En cualquiera de ambos casos, la luz modificada por la perturbación mecánica se puede utilizar para la formación de una imagen plana sobre una pantalla o cámara fotográfica o de vídeo. Estos métodos se llaman de “formación de imágenes” y tienen la ventaja de ofrecer una representación visual inmediata del campo acústico bajo estudio. Se desarrollarán en el Cap. 3.

Los métodos de la membrana se prestan también para el estudio interferométrico. En este caso, el interferómetro se aplica como se hace usualmente para analizar en el tiempo las vibraciones de un punto de la membrana, y de ahí deducir el desarrollo temporal del campo acústico que las produce en ese punto. A éstos los llamamos métodos interferométricos, y tienen la ventaja (sobre la formación de imágenes) de que obtenemos el

desarrollo temporal del campo en estudio. Su desventaja consiste en que, si deseamos un relevamiento espacial del campo, debemos de efectuar las lecturas punto a punto, moviendo el sistema (lo cual puede implicar ciertas desestabilizaciones), e insumiendo gran cantidad de tiempo (puede requerir de 5 a 10 horas). También son más costosos que los métodos de imagen porque implican una electrónica fina para la detección. Algunos de estos métodos se desarrollarán en el Cap. 6.

3. Métodos de formación de imágenes.

3.1. Teoría óptica de formación de imágenes de objetos de fase.

Los objetos de fase por transparencia son objetos transparentes a la radiación luminosa utilizada. Su único efecto es cambiar la fase de la misma cuando los atraviesa.

Por extensión, también consideramos los objetos de fase por reflexión. Esto es, objetos que reflejan toda o parte de la luz que incide sobre ellos en forma especular, sin modular la amplitud del campo óptico. Pero si la superficie reflectora tiene suaves y pequeñas (menores que la longitud de onda de la luz) desviaciones del plano, el frente óptico reflejado resulta también modulado en fase por reflexión.

La variación de la fase luminosa producida por estos objetos puede medirse por los métodos interferométricos, homodynos o heterodynos, con lo cual se puede obtener información sobre el parámetro del objeto que provocó tal variación (variaciones del índice de refracción en los objetos de fase por transparencia, o desplazamientos de la superficie frontera en los objetos de fase por reflexión).

Entre las ventajas de los métodos interferométricos está el hecho de que permiten la medición de desplazamientos menores que un Angström, y de que permiten obtener información de la evolución temporal de las perturbaciones del medio (naturalmente, siempre que sus períodos sean mucho mayores que el de la radiación luminosa).

Sin embargo, tienen el inconveniente de que, si la perturbación en estudio es, además, función de la posición, se necesita un relevamiento punto a punto del campo en estudio. Esto requiere una gran inversión de tiempo e instrumental posicionador de precisión, o bien renunciar a una buena resolución espacial en el plano de observación. También trae aparejada la necesidad de mover, o la sonda óptica o el medio mecánico en estudio, con lo cual se pueden producir perturbaciones adicionales.

El método de formación de imágenes, en cambio, recoge de una vez toda la luz perturbada en fase por la región en estudio. Se forma con ella una imagen y de allí se intenta sacar información sobre el estado del parámetro del medio que determinó tales perturbaciones. Esto permite obtener una distribución espacial de dicho parámetro. Por otra

parte, haciendo uso de la magnificación óptica de las imágenes, es posible la obtención de una gran resolución espacial, sin necesidad de introducir ningún movimiento perturbador en el sistema.

El método consiste esencialmente en utilizar el patrón de difracción de Fraunhofer del campo óptico cuya variación de fase se desea observar.

El máximo central (u orden cero) de dicho patrón no contiene información de la variación de fase y es donde incide la mayor cantidad de intensidad luminosa. Allí incidiría toda la luz si no hubiese variaciones en la fase.

En cambio, los órdenes superiores de difracción se producen precisamente debido a la modulación en la fase de las ondas, e inciden en lugares diferentes del orden cero sobre el patrón de difracción.

Mediante la elección de una máscara adecuada, se puede obstruir el orden cero, o cambiar su fase, volviéndose a reconstruir la imagen del objeto solamente con la luz difractada en los órdenes superiores, que transmiten la información de las variaciones de fase del campo óptico.

Una posible configuración experimental para la implementación del método se esquematiza en la Fig. 1, donde L_1 y L_2 son dos lentes convergentes de distancias focales f_1 y f_2 respectivamente.

La luz se propaga en la dirección del eje z , y en el plano focal objeto de L_1 se encuentra el campo óptico bajo observación $g(x_0, y_0, t)$. En el plano focal imagen de L_1 se coloca una máscara cuya función de transmisión es $M(x', y')$, por lo que el campo óptico saldrá multiplicado por esta función.

El plano focal imagen de la lente L_1 , que contiene la máscara M , se encuentra en el plano focal objeto de la lente L_2 . De forma que, de acuerdo a las leyes básicas de la óptica, la imagen del campo objeto g se encuentra en el plano focal imagen de L_2 , y será indicado como $s(x, y, t)$.

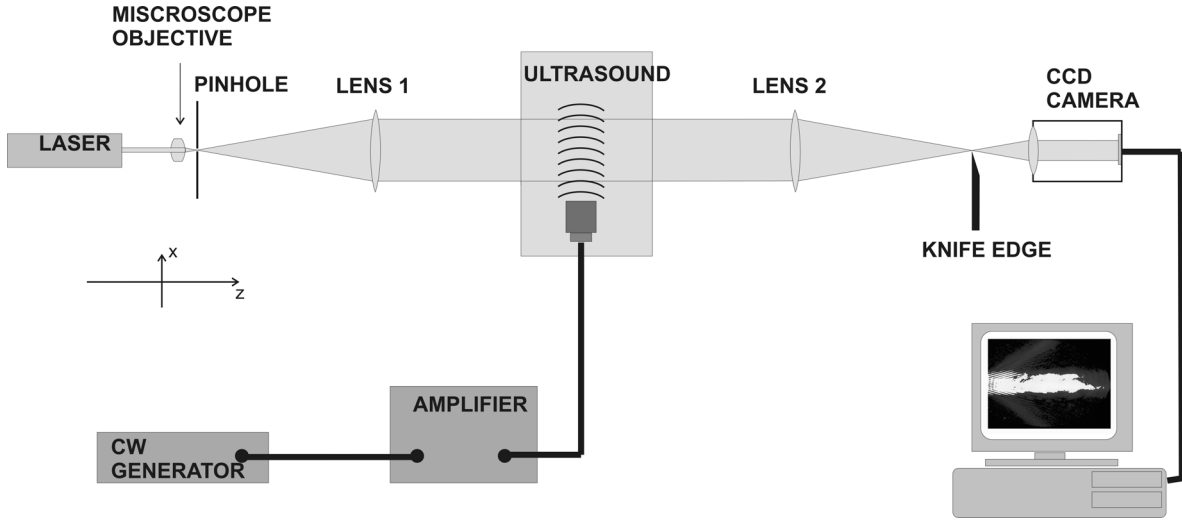


Figura 1

Si $u(x_1, y_1)$ es el campo óptico en el plano focal objeto de una lente de distancia focal f , el campo $v(x_2, y_2)$ en el plano focal imagen está dado por la transformada de Fourier bidimensional del campo de entrada u en la forma¹

$$\begin{aligned} v(x_2, y_2) &= \frac{\exp(i2kf)}{i\lambda f} \iint u(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1 = \\ &= \frac{\exp(i2kf)}{i\lambda f} \mathfrak{F}\{u(x_1, y_1)\}_{\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathfrak{F}\{u\}_{\xi, \eta}$ indica la transformada de Fourier con variables de salida ξ, η .

Según (1) tenemos entonces que el campo sobre foco imagen de L_1 en la Fig 1 es la transformada de Fourier de g con variables de salida en x', y' . Esto es:

$$\frac{\exp(i2kf_1)}{i\lambda f_1} \mathfrak{F}\{g(x_0, y_0, t)\}_{\frac{x'}{\lambda f_1}, \frac{y'}{\lambda f_1}}. \quad (2)$$

A su vez, este campo multiplicado por la función de transmisión M de la máscara es el campo objeto para la lente L_2 , cuya salida s es la transformada de Fourier de la entrada (2)

$$s(x, y, t) = \frac{\exp(i2kf_2)}{i\lambda f_2} \mathfrak{F} \left\{ M(x', y') \frac{\exp(i2kf_1)}{i\lambda f_1} \mathfrak{F} \left\{ g(x_0, y_0, t) \right\} \frac{x'}{\lambda f_1}, \frac{y'}{\lambda f_1} \right\} \frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2} \quad (3)$$

Utilizando la propiedad de las transformadas de Fourier

$$\mathfrak{F} \{ u(x, y) v(x, y) \} = \mathfrak{F} \{ u(x, y) \} \otimes \mathfrak{F} \{ v(x, y) \}, \quad (4)$$

donde $\otimes$ indica la doble convolución, la (3) resulta

$$s(x, y, t) = -\frac{e^{i2k(f_1+f_2)}}{\lambda^2 f_1 f_2} \mathfrak{F} \left\{ M(x', y') \right\} \frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2} \otimes \mathfrak{F} \left\{ \mathfrak{F} \left\{ g(x_0, y_0, t) \right\} \frac{x'}{\lambda f_1}, \frac{y'}{\lambda f_1} \right\} \frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2} \right\} \quad (5)$$

donde la convolución es en las variables de salida $x/\lambda f_2, y/\lambda f_2$.

La transformada de una transformada verifica la propiedad

$$\mathfrak{F} \left\{ \mathfrak{F} \left\{ u(x, y) \right\}_{a_1 x_1, b_1 y_1} \right\}_{a_2 x_2, b_2 y_2} = \frac{1}{a_1 b_1} u \left(-\frac{a_2}{a_1} x_2, -\frac{b_2}{b_1} y_2 \right). \quad (6)$$

Sustituyendo este resultado en (5) y definiendo la magnificación del sistema óptico como:

$$m = \frac{f_2}{f_1},$$

la (5) resulta:

$$s(x, y, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{m} \mathfrak{F}\{M(x', y')\}_{\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}} \otimes g\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}, t\right). \quad (7)$$

Hagamos un cambio de variables $-\frac{x}{m} = \tilde{x}$, $-\frac{y}{m} = \tilde{y}$.

Además, la convolución en (7) es en las variables $x/\lambda f_2, y/\lambda f_2$. Para hacerla en las nuevas variables tenemos que $\frac{x}{\lambda f_2} = -\frac{m\tilde{x}}{\lambda f_2} = -\frac{\tilde{x}}{\lambda f_1}$. Igualmente $\frac{y}{\lambda f_2} = -\frac{\tilde{y}}{\lambda f_1}$, por lo tanto la convolución en las variables $\tilde{x}, \tilde{y}$ se convierte

$$\{\otimes\}_{\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}} = \{\otimes\}_{\tilde{x}, \tilde{y}} \frac{1}{(\lambda f_1)^2}. \quad (8)$$

Con el resultado (8) y sustituyendo las nuevas variables, la (7) queda

$$s(-m\tilde{x}, -m\tilde{y}, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{m} g(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \otimes \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \mathfrak{F}\{M(x', y')\}_{-\frac{\tilde{x}}{\lambda f_1}, -\frac{\tilde{y}}{\lambda f_1}}. \quad (9)$$

Por comodidad de escritura, podemos sustituir las variables $\tilde{x}, \tilde{y}$ por x, y en (9).

Dado que la función g es la entrada al sistema y s su salida, la forma de (9) nos dice que la respuesta impulsional del sistema en el espacio (esto es, a un punto de intensidad infinita ubicado en el origen) es la transformada de Fourier de la máscara M sobre la lente de entrada L_1 en la Fig. 1,

$$h(x, y) = \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \mathfrak{F}\{M(x', y')\}_{-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}}, \quad (10)$$

por lo que su salida es la convolución de la entrada con la respuesta impulsional,

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1+f_2)}}{m} g(x, y, t) \otimes h(x, y). \quad (11)$$

Aún podemos continuar con los cálculos antes de especificar la función de la máscara $\mathbf{M}$ y de la entrada $\mathbf{g}$. Supongamos que la entrada consiste en un campo plano ligeramente modulado, de la forma

$$g(x, y, t) = G(1 + \varepsilon(x, y, t)), \quad (12)$$

donde G es un valor constante y $\varepsilon \ll 1$.

Introduciendo (12) en (11) tenemos, en un término, la convolución

$$1 \otimes h(x, y) = \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \iint \mathfrak{F}\{M(x', y')\} \left(-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}\right) dx dy, \quad (13)$$

que no es otra cosa que una transformada de Fourier del integrando con salida en $\mathbf{0,0}$:

$$1 \otimes h(x, y) = \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \mathfrak{F} \left\{ \mathfrak{F}\{M(x', y')\} \left(-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}\right) \right\}_{0,0}. \quad (14)$$

Utilizando la propiedad (6) tenemos que (14) queda

$$1 \otimes h(x, y) = M(0,0), \quad (15)$$

o sea, resulta un campo uniforme sobre todo el plano imagen, cuyo valor es el valor de la máscara en el origen.

Tomando en cuenta (15), la señal de salida (11) ante una entrada como (12) resulta

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1+f_2)}}{m} G \left[M(0,0) + \varepsilon(x, y, t) \otimes h(x, y) \right]. \quad (16)$$

Si el campo óptico de entrada está solamente modulado en fase, será de la forma

$$g(x, y, t) = G \exp(i\phi(x, y, t)). \quad (17)$$

Si la variación de fase ϕ es pequeña se puede aproximar (17) como

$$g(x, y, t) \approx G(1 + i\phi(x, y, t)), \quad (18)$$

despreciando potencias iguales y superiores a ϕ^2 frente a la unidad. Véase que (18) tiene la forma de (12), por lo que le es aplicable el resultado (16) con

$$\varepsilon(x, y, t) = i\phi(x, y, t). \quad (19)$$

No podemos ir mucho más lejos sin especificar la forma M de la máscara para poder obtener la respuesta impulsional (10) del sistema.

Diversas formas de máscaras se pueden implementar. Las más utilizadas son:

a) La colocación de una “cuchilla” que bloquea todo un semiplano hacia un lado del foco de la lente L_1 de la Fig. 1. Este método es el más antiguo y se le conoce históricamente como método “Schlieren”. Su utilización es más bien cualitativa para la visualización de los campo ultrasonoros.

b) La colocación de un círculo opaco en el foco de la lente, lo cual bloquea el orden cero de la difracción dando como resultado un fondo oscuro en la imagen. Este método se conoce como método del campo oscuro o “dark-ground”². Este método permite la obtención de resultados cuantitativos en los cuales la intensidad luminosa en la imagen resulta proporcional al promedio temporal del cuadrado de la variación de fase ϕ . Por tal motivo es aplicable a la observación de variaciones de fase periódicas, en las cuales el promedio temporal de ϕ^2 no es nulo.

c) La colocación de un círculo transparente en el foco de la lente pero que produce un retardo de fase del orden cero en de un cuarto de onda respecto a los órdenes

superiores. Este método, debido a Zernike³ en 1935, se conoce como método del contraste de fase. También arroja resultados cuantitativos en los cuales la intensidad de la imagen es proporcional a la variación de fase ϕ . Pero no es aplicable a la observación de variaciones de fase dinámicas que varían periódicamente con rapidez (como en el caso del ultrasonido) puesto que la intensidad observada responde a la media temporal de ϕ , la cual es nula. No se estudiará este método en el presente trabajo.

3.2. Método Schlieren

Como se mencionó al final de la sección anterior, en este método la máscara $M(x,y)$ de la Fig. 1 consiste en una cuchilla que obstruye el orden cero en $x=y=0$ además de todo un semiplano, digamos, $x < 0$.

Su función de transmisión será entonces la unidad para todo y y para valores de x mayores que cierto τ positivo pequeño (para asegurarse de obstruir el disco finito de difracción del orden cero), en tanto que será nula para todo y y valores de x menores que τ .

La función $sgn(x)$ (signo de x) definida como

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (20)$$

sirve para nuestros propósitos, permitiéndonos definir la función de transmisión de la máscara como

$$M(x,y) = \frac{1 + sgn(x - \tau)}{2}. \quad (21)$$

La función (21) también se conoce como función escalón, porque vale cero para $x < \tau$, 1/2 para $x = \tau$, y uno para $x > \tau$.

De acuerdo con (10), la respuesta impulsional es

$$h(x, y) = \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \mathfrak{F} \left\{ \frac{1 + \text{sgn}(x - \tau)}{2} \right\}_{-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}}. \quad (22)$$

La transformada de Fourier de la función escalón (21) es⁴

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{1 + \text{sgn}(x)}{2} \right\}_{-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}} = \frac{1}{2} \left[\delta \left(-\frac{x}{\lambda f_1} \right) + i \frac{\lambda f}{\pi x} \right] \delta \left(-\frac{y}{\lambda f_1} \right) = \frac{(\lambda f_1)^2}{2} \left[\delta(x, y) + i \frac{\delta(y)}{\pi x} \right] \quad (23)$$

por lo que la respuesta impulsional (22) resulta

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \left[\delta(x, y) + i \frac{\delta(y)}{\pi x} e^{i \frac{2\pi \tau}{\lambda f_1} x} \right]. \quad (24)$$

Para obtener la señal de salida s ante una entrada de la forma (12) debemos aplicar (16). Obsérvese que, según (21) es $\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. De forma que la convolución con (24) da

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{2m} G \left[\varepsilon(x, y, t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\xi, y, t)}{x - \xi} e^{i \frac{2\pi \tau}{\lambda f_1} (x - \xi)} d\xi \right], \quad (25)$$

donde ε es la modulación pequeña de la fase luminosa ϕ dada por (19).

Lo primero que cabe observar en (25) es una fuerte alteración de la simetría de la función ε en la salida s debido a la integral que se efectúa solamente en el eje x a causa de la cuchilla. Esto da lugar a la pérdida de información de variaciones del campo en el eje y .

Para hacer evidente esto, supongamos que la variación de fase tiene lugar solamente en el eje y , siendo de la forma $\mathcal{E}(y, t)$. Entonces (25) queda

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{2m} G\mathcal{E}(y, t) \left[1 + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \xi} e^{i\frac{2\pi\tau}{\lambda f_1}(x - \xi)} d\xi \right]. \quad (26)$$

De la teoría de funciones de variable compleja tenemos que⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imu}}{u} du = \begin{cases} i\pi & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \\ -i\pi & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (\text{valor principal de Cauchy}). \quad (27)$$

Puesto que $m = \frac{2\pi\tau}{\lambda f_1} > 0$ en (26) resulta que la señal de salida es nula.

Por lo tanto, el método Schlieren funciona, al menos cualitativamente, si existen modulaciones espaciales de la fase una dirección perpendicular a la cuchilla (eje x en nuestro caso). Además veremos que podemos obtener resultados cuantitativos sencillos cuando la modulación de la fase se produce solamente en esta dirección.

Supongamos, por ejemplo, que la modulación de la fase se produce por ondas acústicas planas que viajan en la dirección del eje x , de la forma

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}_0 \sin(Kx - \Omega t) = \mathcal{E}_0 \frac{e^{i(Kx - \Omega t)} - e^{-i(Kx - \Omega t)}}{2i}. \quad (28)$$

Sustituyendo esta expresión en (25), y utilizando (27) para efectuar la integración, obtenemos finalmente

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{2m} G\mathcal{E}_0 e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (29)$$

con lo que, la intensidad luminosa será proporcional al cuadrado de la amplitud de la variación de fase (a su vez, proporcional al cuadrado de la amplitud de presión acústica en el seno del fluido),

$$\left\langle |s(-mx, -my, t)|^2 \right\rangle_t = \frac{|G|^2}{4m^2} \varepsilon^2_0. \quad (30)$$

Este es el resultado cuantitativo al que se arriba con el método Schlieren o de la cuchilla, con la muy fuerte restricción de que la variación de fase a medir sea de la forma (28), o una superposición de éstas que, en definitiva, corresponde a una función de la forma $\alpha(x, t)$.

El método ha dado resultados aceptables en cuanto se lo ha utilizado para el estudio de campos acústicos emitido por transductores de ultrasonido. El campo de radiación de éstos es bastante direccional, y en la región lejana se puede aproximar bastante a la forma (28), sobre todo si la abertura del haz luminosa que atraviesa el medio perpendicular al haz acústico no es muy grande.

También se lo utiliza para analizar las ondas superficiales⁶, en cuyo caso la modulación de fase de la luz se produce por reflexión.

3.3. *Método del campo oscuro.*

El método del campo oscuro es mucho menos restrictivo que el Schlieren y permite extraer resultados cuantitativos. De hecho no impone ninguna condición de simetría especial al campo observado, cuya función de modulación de fase $\alpha(x, y, t)$ puede ser totalmente arbitraria.

La máscara M utilizada en este caso (Fig. 1) consiste en un círculo opaco en el foco de la lente L_1 , de radio igual al de la mancha de difracción. Esto asegura la exclusión del orden cero de difracción únicamente, contrariamente a la cuchilla que extrae el orden cero más toda la información difractada al semiplano $x < 0$ en el plano focal.

Para definir la función de transmisión de la máscara utilizaremos la función $cir(\rho/r)$ (círculo de radio r) definida como

$$cir\left(\frac{\rho}{r}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \\ 0 & \text{si } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > r \end{cases}, \quad (31)$$

de donde la función de la máscara es

$$M(x, y) = 1 - cir\left(\frac{\rho}{r}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \\ 1 & \text{si } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > r \end{cases}. \quad (32)$$

La respuesta impulsional (10) del sistema es la transformada de Fourier de (32),

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \left[\delta\left(-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}\right) - \mathfrak{F}\left\{cir\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r}\right)\right\}_{-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}} \right] = \\ &= \delta(x, y) - \frac{1}{(\lambda f_1)^2} \mathfrak{F}\left\{cir\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r}\right)\right\}_{-\frac{x}{\lambda f_1}, -\frac{y}{\lambda f_1}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Considerando la transformada de Fourier de la función círculo⁷,

$$\mathfrak{F}\left\{cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right)\right\}_{f_x, f_y} = \pi r^2 \frac{2J_1\left(2\pi r \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\right)}{2\pi r \sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \quad (34)$$

la respuesta impulsional (33) resulta

$$h(x, y) = \delta(x, y) - \frac{\pi r^2}{(\lambda f_1)^2} \frac{2J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda f_1} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\frac{2\pi r}{\lambda f_1} \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (35)$$

Sea R el radio del círculo de la pupila de entrada a la lente L_1 de la Fig. 1. El óptimo radio r del círculo opaco en el foco de L_1 debe de ser del tamaño del primer círculo de difracción, para asegurarnos de quitar la mayor cantidad de luz del orden cero sin obstaculizar los órdenes superiores. Esto es⁸

$$r = 0.610 \frac{\lambda}{R} f_1 = q_1 \frac{\lambda f_1}{2\pi R}, \quad (36)$$

donde q_1 es el primer cero de la función de Bessel $J_1(x)$.

Introduciendo (36) en la respuesta impulsional (35), ésta queda

$$h(x, y) = \delta(x, y) - \frac{q_1^2}{4\pi R^2} \frac{2J_1\left(\frac{q_1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\frac{q_1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (37)$$

por lo que la función de salida (16) ante una entrada de la forma (12) resulta, considerando además que $M(0,0)=0$,

$$\begin{aligned} s(-mx, -my, t) &= -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{m} G \varepsilon(x, y, t) \otimes h(x, y) = \\ &= -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{m} G \left[\varepsilon(x, y, t) - \frac{q_1^2}{4\pi R^2} \varepsilon(x, y, t) \otimes \frac{2J_1\left(\frac{q_1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\frac{q_1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Como aplicación inmediata de (38), obsérvese que si el campo g en (12) es plano, entonces $\varepsilon=0$, resultando nula la salida.

Este resultado era de esperar, ya que un frente plano que incide normalmente a la lente es obstruido completamente por el círculo opaco en el foco.

Si el área πR^2 de la pupila de entrada es mucho mayor que la región de fase perturbada (en la que ε no es nula), entonces es despreciable el segundo término de convolución en (38). A tal resultado se llega con cálculos más elementales que aparecen en la bibliografía dedicada al tema, y que suponen infinita la pupila de entrada desde el comienzo⁹. En estas condiciones (38) se aproxima como

$$s(-mx, -my, t) = -\frac{e^{i2k(f_1 + f_2)}}{m} G\varepsilon(x, y, t), \quad (39)$$

resultando para la intensidad luminosa en la imagen el promedio temporal del cuadrado del módulo de (39),

$$I(-mx, -my) = \frac{I_G}{m^2} \left\langle |\varepsilon(x, y, z, t)|^2 \right\rangle_t, \quad (40)$$

donde I_G es la intensidad uniforme del campo de entrada, m es como siempre la magnificación del sistema óptico, y $\langle \rangle_t$ indica el promedio temporal.

Sin embargo, la finitud de la pupila de entrada es inevitable, fundamentalmente cuando se utiliza gran magnificación para obtener una alta resolución lateral de la imagen. En estos casos, la región de perturbación de la fase ocupa la totalidad de la pupila, por lo cual se requiere un análisis más cuidadoso del término de convolución en (38).

Tomando la transformada de Fourier (con salida en las variables f_x, f_y) de la respuesta impulsional (37) obtenemos la función de transferencia espacial $H(f_x, f_y)$ del sistema, donde f_x, f_y son las frecuencias espaciales,

$$H(f_x, f_y) = 1 - \text{cir} \left(\frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}{q_1 / 2\pi R} \right), \quad (41)$$

donde *cir* es la función círculo mencionada en (31) que vale la unidad para $\sqrt{f_x^2 + f_y^2} < q_1 / 2\pi R$ y cero afuera.

Se deduce de (41) que el sistema óptico es un filtro pasa altos en frecuencias espaciales, con una frecuencia mínima de corte igual a

$$f_{min} = \frac{q_1}{2\pi R} \approx \frac{1}{1.64R}, \quad (42)$$

y define por lo tanto una longitud máxima de corte

$$L_{max} = \frac{1}{f_c} \approx 1.64R. \quad (43)$$

La Fig. 2 ilustra la situación. Las componentes del objeto que tengan períodos espaciales mayores que L_{max} (bajas frecuencias espaciales) no se detectan en la imagen. Esto determina, obviamente, que la imagen resulte más contrastada.

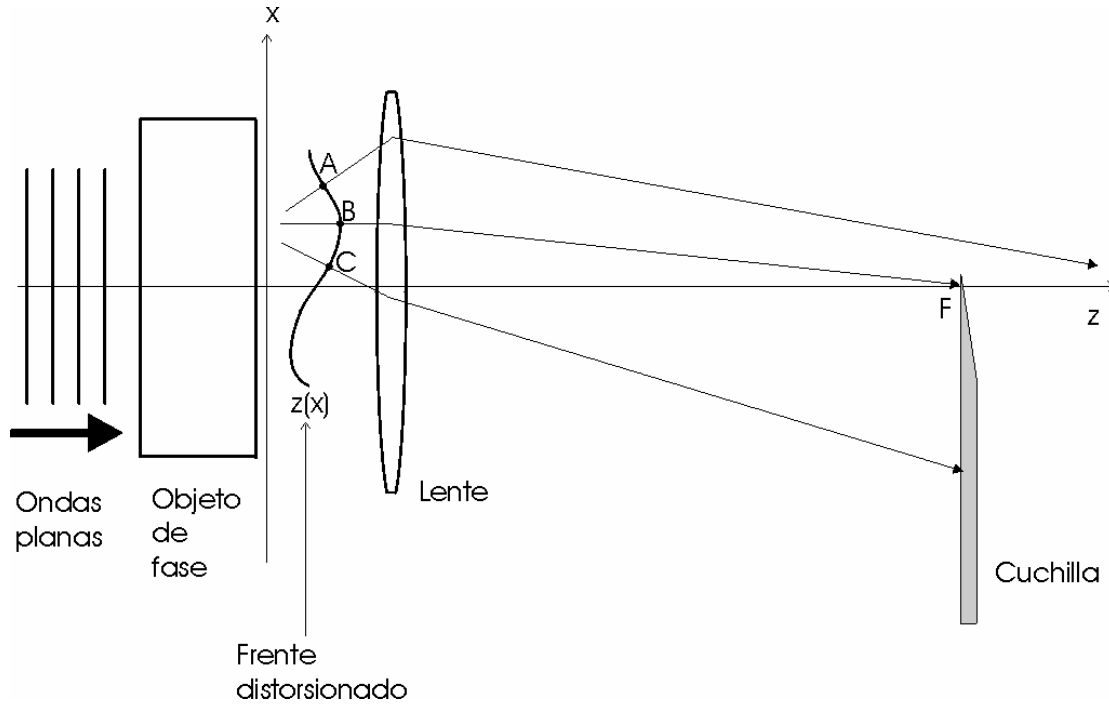


Figura 2

Todo lo antedicho es evidente debido a la limitación de la pupila de entrada al radio R . Cuanto menor sea este radio, mayor es la mancha de difracción en el foco, siendo mayor también el radio r del círculo opaco para detener el orden cero. Pero esto lleva a que las fluctuaciones espacialmente “lentas” en ϕ , próximas al orden cero, también sean bloqueadas, con lo que la longitud máxima de corte se ve reducida tal como lo establece (43).

La (43) nos advierte sobre con qué pupila de entrada debemos trabajar para asegurarnos la resolución espacial deseada. El máximo período espacial que deseamos resolver determina el radio de la pupila. Toda modulación de menor longitud pasará sin atenuación por el sistema (Fig. 2).

Asumiendo entonces que las modulaciones espaciales de la función $\mathcal{S}(x,y,t)$ tienen períodos menores que el dado por (43), la función de transferencia (41) será la unidad, con lo cual se obtiene nuevamente la expresión (39) para el campo óptico de salida, y (40) para la intensidad luminosa.

La imposición de (43) para el máximo período espacial distinguible en la imagen no es para nada una restricción seria del método del campo oscuro, puesto que tanto menor es

R cuanto mayor resolución lateral deseamos en la imagen. Pero esto significa que estamos interesados en variaciones espaciales de la fase muy pequeñas, y pueden fácilmente mantenerse menores que L_{max} en (43).

En la totalidad de los estudios acusto-ópticos que hemos efectuado en nuestro laboratorio se ha utilizado el método del campo oscuro, y la expresión (40) ha sido aplicada.

4. Interacciones acusto-ópticas.

4.1. Introducción

Se conoce con este nombre a las perturbaciones que experimenta un haz de luz cuando atraviesa un medio transparente en cuyo seno se propagan ondas mecánicas.

Los primeros estudios teóricos se deben a Léon Brillouin¹⁰ en 1922, por lo cual estas interacciones se conocen por su nombre. Los primeros experimentos datan de 1932 y se deben a René Lucas y Pierre Biquard¹¹ en Francia, y P. Debye y F. W. Sears¹² en U.S.A.

Después de la invención del láser y la obtención de transductores capaces de generar ultrasonido de alta frecuencia (del orden del GHz), se ha reforzado considerablemente el estudio del Efecto Brillouin, no solamente por su utilización en el análisis de los campos acústicos, sino fundamentalmente por la utilización de la luz modulada bajo estas circunstancias. Como se verá al estudiar la teoría de estos fenómenos, la intensidad luminosa, la dirección del haz de luz, y su frecuencia, pueden ser modulados con muy alta frecuencia mediante estos procedimientos.

La fundamentación del Efecto Brillouin se basa en la dependencia de la densidad de todo medio material con las fluctuaciones de presión producidas por las ondas mecánicas, y a su vez, en la dependencia del índice de refracción (en medios transparentes) con la densidad local.

Toda la temática de los medios cristalinos anisótropos a la propagación de la luz es de gran interés, pero no para la utilización del Efecto Brillouin como instrumento de estudio de los campos acústicos, sino más bien para el estudio de la anisotropía cristalina en la propagación de ondas mecánicas. Si lo que buscamos es el estudio del campo acústico en el interior del medio, no es aconsejable introducir la complicación adicional de utilizar medios anisótropos ante la propagación de la luz, lo cual introduce fenómenos de doble refracción con la consiguiente complejidad teórica y experimental.

Por tal motivo nos restringiremos a los medios transparentes líquidos y sólidos isotrópicos respecto a las ondas luminosas. En tales medios, la dependencia del índice de refracción óptico y la densidad puede basarse en el modelo de Lorentz-Lorenz¹³,

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}, \quad (44)$$

donde α es la polarizabilidad media por molécula, N es el número de moléculas por unidad de volumen, y n es el índice de refracción óptico del medio.

Si ρ es la densidad de masa del medio, la (44) puede ser escrita como

$$\frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{constante}. \quad (45)$$

Para pequeñas variaciones $\delta\rho$ de densidad en torno al valor de equilibrio ρ_0 obtenemos pequeñas variaciones δn del índice de refracción en torno al valor de equilibrio n_0 diferenciando (45),

$$\delta n = \frac{(n_0^2 + 2)(n_0^2 - 1)}{6n_0} \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (46)$$

Las fluctuaciones de densidad $\delta\rho$ y presión δP en el medio están relacionadas mediante el módulo adiabático de volumen B del mismo¹⁴ a través de la expresión

$$\delta P = B \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (47)$$

La combinación de (46) y (47) nos da la relación entre las fluctuaciones del índice de refracción y de presión en el medio sometido a ondas mecánicas,

$$\delta n = \frac{(n_0^2 + 2)(n_0^2 - 1)}{6n_0 B} \delta P. \quad (48)$$

La constante definida en (48) como

$$\left(\frac{\partial n}{\partial P}\right)_s = \frac{(n^2_0 + 2)(n^2_0 - 1)}{6n_0 B}, \quad (49)$$

se llama coeficiente piezo-óptico adiabático de la sustancia. Depende fundamentalmente de la longitud de onda de la luz (a través de n_0) así como de la temperatura (a través de B). La tablas I y II¹⁵ muestran valores experimentales obtenidos para diversos líquidos y para el agua a diferentes temperaturas, respectivamente.

Tabla I.- Coeficientes piezo-ópticos adiabáticos para líquidos. Las mediciones fueron hechas entorno a los 23°C por Raman y Venkateramant (1939), o por Reisler y Eisenberg (1965).

Líquido	Long. de onda (nm)	Índice de refracción	Coef. piezo-óptico (10^{-10} Pa^{-1})	Referencia
H ₂ O	589	1.333	1.447	Ram.-Venk.
	546	1.334	1.431	Reis.- Eisen.
D ₂ O	546	1.330	1.443	Reis.- Eisen.
CH ₃ OH	589	1.328	3.376	Ram.- Venk.
	546	1.330	3.383	Reis.- Eisen.
C ₆ H ₆	589	1.501	3.533	Ram.- Venk.
CS ₂	589	1.626	4.332	Ram.- Venk.

Tabla II. - Coeficientes piezo- ópticos para el agua a la longitud de onda de 633 nm (láser He-Ne).

Temperatura (°C)	Coef. piezo-óptico (10^{-10} Pa^{-1})
15	1.508
20	1.473
25	1.444

4.2. Clasificación

De acuerdo con la expresión (48), si una onda acústica sinusoidal plana atraviesa un medio transparente, se producirá una variación sinusoidal en el índice de refracción en dicho medio. Debido al elevado valor de la velocidad de la luz en comparación con la de las ondas mecánicas, podemos despreciar el desplazamiento de éstas durante el tiempo en que la luz atraviesa el medio, con lo cual la luz experimentará las refracciones correspondientes a un medio cuyo índice de refracción es constante en el tiempo y varía sinusoidalmente en el espacio.

Una clasificación primaria de los fenómenos de interacción acusto-óptica (Efecto Brillouin) se puede hacer en relación al ancho del haz de luz comparado con la longitud de onda de las ondas mecánicas¹⁶. Suponiendo una incidencia luminosa normal a la dirección de las ondas mecánicas, la Fig. 3 muestra el caso en que el ancho del haz de luz es menor que la longitud de onda mecánica. En este caso la luz converge en (haz A) o diverge desde (haz B) algún punto alternativamente mientras las ondas mecánicas progresan, esto solamente mueve el rayo de luz emergente no produciendo fenómenos de interferencia.

En la Fig. 4 el ancho del haz luminoso es mayor que la longitud de onda mecánica produciéndose un efecto igual al de la red de difracción. Varias fuentes a, b, c, ..., se forman por la curvatura de los rayos de luz, produciéndose un patrón de interferencia en el campo óptico lejano entre las ondas emitidas por estas fuentes. A esta conclusión también se llega considerando que la variación periódica del índice de refracción conforma un red de fase, que modula la fase luminosa. Como se verá a continuación, este fenómeno también requiere la condición de que el ancho del haz de ondas mecánicas no sea mucho mayor que el del haz luminoso. Este caso se conoce como Efecto Raman-Nath, o Debye-Sears, o Lucas-Biquard.

En la Fig. 5, el ángulo entre el haz luminosa incidente y el haz acústico, conjuntamente con el espesor de éste, se eligen de forma tal que resulta un simple haz de luz emergente, los demás se cancelan por efectos de interferencia. Éste se llama Efecto Bragg por ser formalmente igual al producido por los rayos X al reflejarse en los planos de las estructuras cristalinas.

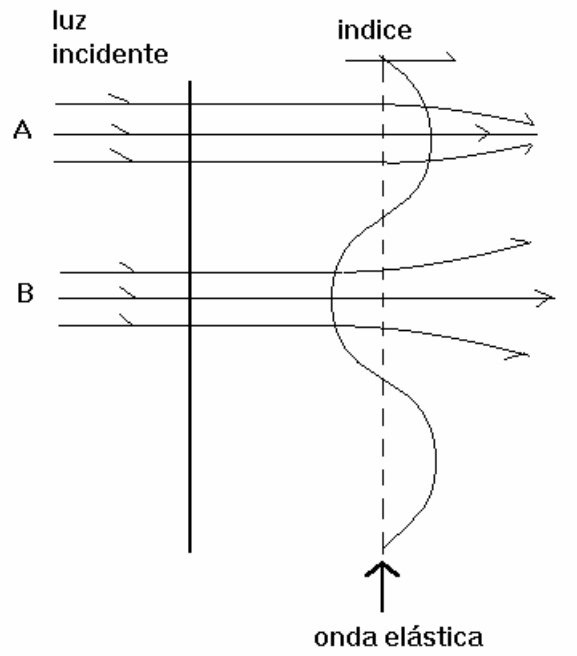


Figura 3

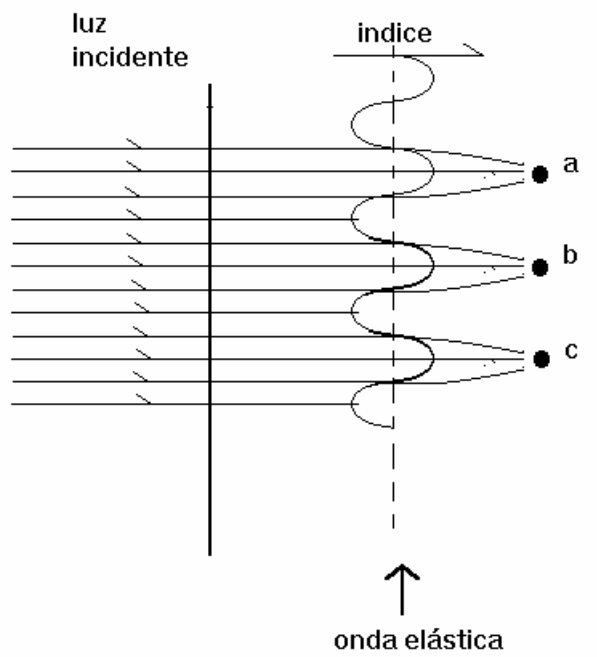


Figura 4

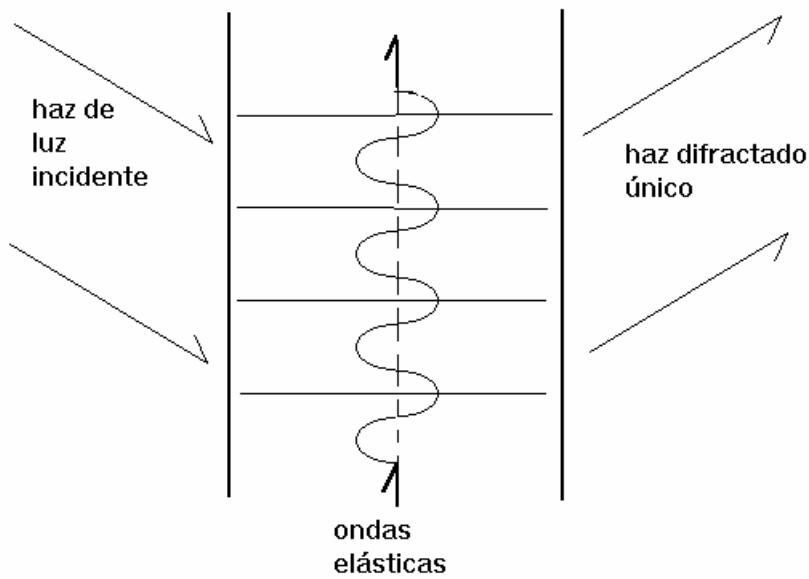


Figura 5

4.3. Efecto Raman-Nath.

4.3.1. Teoría clásica de ondas planas.

Consideremos la situación descrita en la Fig. 4. Sea z la dirección en que se propaga un frente plano de luz, x la dirección en que se propaga un frente plano de ondas mecánicas de espesor L , estando el medio material entre los planos $z=0$ y $z=L_0$.

El campo óptico incidente en $z=0$ es de la forma

$$E_I(z, t) = E e^{-i\omega t}, \quad (50)$$

donde ω su frecuencia, y E la amplitud del campo incidente.

Sea $k = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la luz en el vacío.

En dirección del eje x se propaga una onda mecánica de longitud de onda Λ , (número de onda $K = 2\pi/\Lambda$) y frecuencia Ω , cuyo campo de presión es

$$p(x, t) = p_0 \sin(Kx - \Omega t), \quad (51)$$

donde p_0 es la amplitud de presión.

Utilizando el coeficiente piezo-óptico adiabático definido en (49), la (48) puede expresarse como

$$\delta n = \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_s \delta P. \quad (52)$$

En el presente caso, la sobrepresión acústica de (51) se identifica con la variación de presión absoluta δP de (52), de forma que el índice de refracción en el medio perturbado será

$$n(x, t) = n_0 + \delta n = n_0 + \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_s p_0 \sin(Kx - \Omega t). \quad (53)$$

La variación experimentada por la fase de las ondas luminosas entre su entrada y su salida del medio transparente es

$$kLn(x, t) + k(L_0 - L)n_0 = kL_0n_0 + kL \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_s p_0 \sin(Kx - \Omega t). \quad (54)$$

Considerando este resultado, la fase total del campo óptico a la salida será

$$\phi = -\omega t + kL_0n_0 + v \sin(Kx - \Omega t), \quad (55)$$

donde la amplitud de la variación de fase de la luz se ha representado por la cantidad adimensionada

$$\nu = kL \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_s p_0, \quad (56)$$

y se conoce con el nombre de “parámetro de Raman-Nath”. Este parámetro es el que se intenta medir experimentalmente para determinar la amplitud p_0 del campo acústico.

El término $kL_0 n_0$ en (55) introduce un corrimiento de fase que es el mismo para todos los puntos del frente de onda, por lo cual podemos omitirlo. El campo óptico a la salida es entonces

$$E_S(x, t) = E e^{i[-\omega t + \nu \sin(Kx - \Omega t)]}. \quad (57)$$

Utilizando la conocida expansión¹⁷

$$e^{i\nu \sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\nu) e^{in\theta}, \quad (58)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera especie y orden n , podemos expresar el campo óptico de salida (57) como

$$E_S(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E J_n(\nu) \exp[i(nKx - \omega_n t)], \quad (59)$$

donde hemos puesto

$$\omega_n = \omega + n\Omega. \quad (60)$$

La (59) expresa el campo óptico a la salida del medio transparente como una suma de ondas planas, cada una de amplitud

$$E_n = E J_n(v), \quad (61)$$

con frecuencia ω_n dada por (60).

Se observa en (59) que la n -ésima onda tiene una componente nK del vector de onda sobre el eje x , en tanto que su módulo debe de ser

$$k_n = \frac{\omega + n\Omega}{c}, \quad (62)$$

siendo c la velocidad de la luz (Fig. 6). Esto significa que la n -ésima onda plana sale bajo un ángulo θ_n con el eje z tal que

$$\sin \theta_n = \frac{nK}{k_n} = \frac{nKc}{\omega + n\Omega}. \quad (63)$$

Dado que $\Omega/\omega \ll 1$ la (63) se puede poner como

$$\sin \theta_n = \frac{nK}{k} = n \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (64)$$

La expresión (64) corresponde a los máximos de una red de difracción con separación Λ entre rendijas.

Como los valores del entero n pueden ser positivos y negativos, la (60) nos dice que los haces difractados en el mismo sentido de la propagación acústica ($n > 0$) incrementan su frecuencia. En cambio los difractados en sentido contrario ($n < 0$) tienen frecuencias menores que ω .

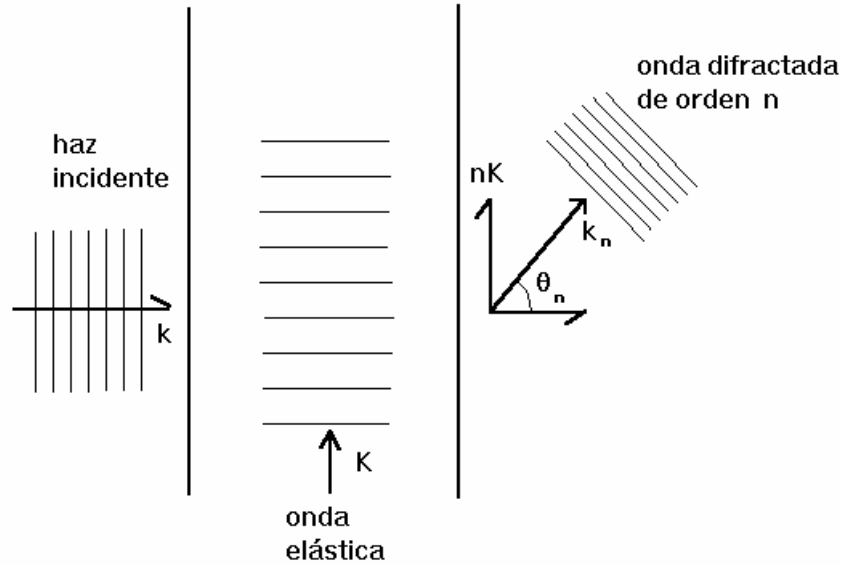


Figura 6

El efecto Raman-Nath está condicionado a que el espesor del haz acústico no supere cierto valor crítico¹⁸ que depende de la relación entre las longitudes de onda acústica y luminosa.

Supóngase que tomamos dos delgadas porciones del haz acústico de ancho L (Fig. 7), perpendiculares a haz de luz incidente y separadas entre sí por $L/2$. Una de ellas al comienzo del haz acústico (punto A) y la otra en la mitad del mismo (punto B). Analicemos la luz difractada hacia el primer orden.

Cuando la luz incidente alcanza el punto B, y éste comienza a emitir la luz difractada hacia el primer orden, el frente de onda difractado por el punto A va pasando por el punto Q y no por el punto P (lo cual se requeriría para que ambos llegaran exactamente en fase a interferir en el orden 1). Existe, por tanto, una diferencia de camino PQ entre ambas radiaciones, lo cual introduce un desfase

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{PQ} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{L}{2} (1 - \cos \theta_1). \quad (65)$$

Considerando que el ángulo es pequeño, y utilizando su valor (64) para $n=1$, tenemos que

$$\Delta\phi \cong \frac{\pi L}{2\lambda} \theta^2 \cong \frac{\pi L}{2} \frac{\lambda}{\Lambda^2}. \quad (66)$$

Obsérvese en la Fig. 7 que si este defasaje alcanza el valor de π , se cancelarán totalmente las radiaciones luminosas procedentes de A y de B. Lo mismo sucederá con todas las otras parejas de puntos que disten $L/2$ en todo el ancho del haz acústico, y, como resultado final, no existe luz en el primer orden de difracción.

Entonces, es necesario imponerle a la (66) la condición

$$\frac{\pi L}{2} \frac{\lambda}{\Lambda^2} < \pi \quad \Rightarrow \quad L < \frac{2\Lambda^2}{\lambda}. \quad (67)$$

Obsérvese de (67) que cuanto mayor es la frecuencia del ultrasonido, menor debe de ser el ancho del haz para poder observar la difracción de Raman-Nath.

Por ejemplo para el agua, a frecuencia de 10 MHz, tenemos $\Lambda \approx 0.15$ mm. Con luz de láser He-Ne de $\lambda \approx 0.6 \times 10^{-3}$ mm resulta de (67) $L < 75$ mm, lo cual se satisface para los transductores de nuestro laboratorio que tienen un ancho inferior a 30 mm y emiten a una frecuencia central de 1 o 2 MHz.

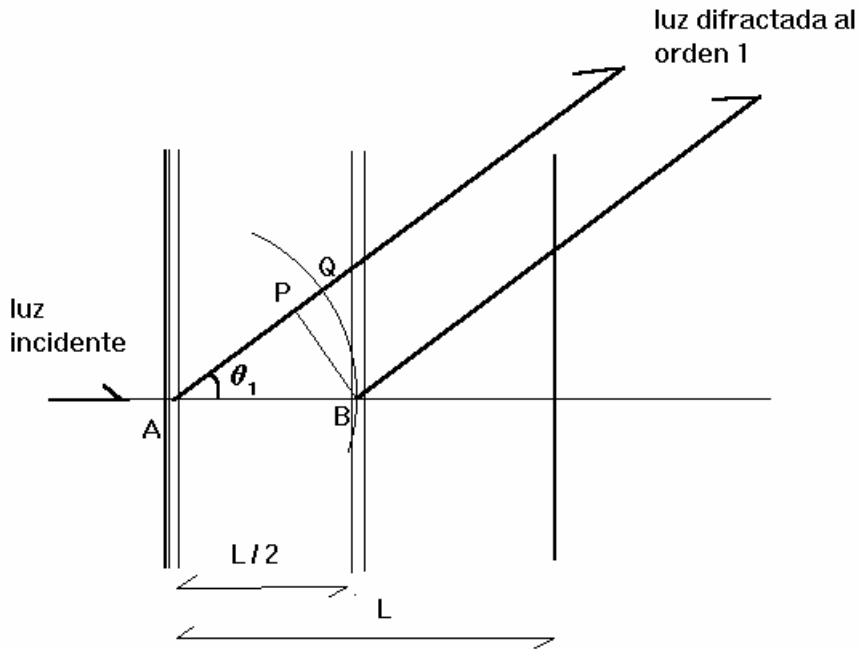


Figura 7

Colocando una lente convergente a la salida de la luz en la Fig. 4, obtendremos en su plano focal una sucesión de focos alineados en la dirección de propagación del haz acústico, cada uno de ellos con una intensidad dada por la Ec. (61),

$$I_n = I[J_n(\nu)]^2, \quad (68)$$

donde I es la intensidad luminosa del haz incidente. Debido a la pequeñez del parámetro de Raman-Nath (56), rara vez se observa más allá de los órdenes $n = \pm 2$.

Tomando la lectura de intensidad I_n de cualquiera de los órdenes visibles, y conociendo la intensidad I de la luz incidente, es posible utilizar (68) para calcular $J_n(\nu)$, y de acá obtener ν . Finalmente, conocido el valor del parámetro de Raman-Nath se puede obtener la amplitud del campo de presiones utilizando (56).

Cuidadosas mediciones del campo acústico de varios transductores han sido hechas por este procedimiento, y comparadas con medidas basadas en la presión de radiación, por

Reibold¹⁹ en 1976/77 y Haron *et al*²⁰ en 1975, habiéndose obtenido un buen acuerdo en el rango de frecuencias de 1 a 10 MHz.

4.3.2. Generalización de la teoría.

4.3.2.1. Campos de forma arbitraria.

En el apartado anterior la expresión (55) determina una proporcionalidad entre la variación de fase de la luz y el parámetro de Raman-Nath (y por consiguiente con la amplitud de la presión) debido a la suposición de ondas acústicas planas de la forma (51).

A partir de una teoría más general de la difracción de Raman-Nath deduciremos a continuación las condiciones de validez de esta proporcionalidad, aún para campos cualesquiera emitidos por transductores circulares.

La determinación de esta proporcionalidad entre las amplitudes de presión acústica y la variación de fase es útil para la simplificación de las ecuaciones. Pero además es esencial a la hora de utilizar el método de las imágenes para obtener información cuantitativa sobre el campo acústico, a través de la lectura de la intensidad luminosa en la imagen, como se verá más adelante.

Sea un transductor circular de radio a y área S en el plano yz centrado en el origen (Fig. 8).

El transductor emite ondas ultrasónicas monocromáticas de frecuencia Ω y longitud de onda λ en agua.

La sobrepresión acústica $p(x,y,z,t)$ en el punto $\vec{r}(x,y,z)$ y en el instante t es

$$p(x,y,z,t) = \Re \left[P(x,y,z) e^{-i\Omega t} \right], \quad (69)$$

donde $P(x,y,z)$ es la amplitud compleja de presión en el punto y $\Re$ indica la parte real.

Asumiendo que cada punto $\vec{r}'(0,y',z')$ del transductor emite ondas con amplitud compleja inicial arbitraria $A(y',z')$ en un medio infinito, la amplitud en $\vec{r}(x,y,z)$ será²¹

$$P(x, y, z) = \iint_S A(y', z') \frac{\exp(iK|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dy' dz', \quad (70)$$

donde $K=2\pi/\Lambda$.

El haz luminoso que incide en la direcci3n del eje z saldr3 modulado en fase.

Sea n_0 el 3ndice de refracci3n del medio no perturbado, $n(x, y, z, t)$ el 3ndice en el punto $\vec{r}$ y en el instante t cuando el medio est3 perturbado por las ondas ac3sticas, y sea $\phi(x, y, t)$ la variaci3n de fase del campo luminosa en un plano $z=cste$. a la salida del sistema, con referencia a su valor uniforme. Entonces

$$\phi(x, y, t) = k \int_{-\infty}^{\infty} [n(x, y, z, t) - n_0] dz, \quad (71)$$

donde $k=2\pi/\lambda$ para la luz en el vac3o.

Llamando μ al coeficiente piezo-3ptico $\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_s$ la (52) puede escribirse como

$$n(x, y, z, t) - n_0 = \mu p(x, y, z, t). \quad (72)$$

Sustituyendo (72) en (71) tenemos

$$\phi(x, y, t) = k\mu \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z, t) dz. \quad (73)$$

Igualmente que en (69), podemos considerar la variaci3n de fase ϕ como

$$\phi(x, y, t) = \Re[\Phi(x, y)e^{-i\Omega t}], \quad (74)$$

de forma que la (73) relaciona las amplitudes complejas de presión y fase luminosa,

$$\Phi(x, y) = k\mu \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y, z) dz. \quad (75)$$

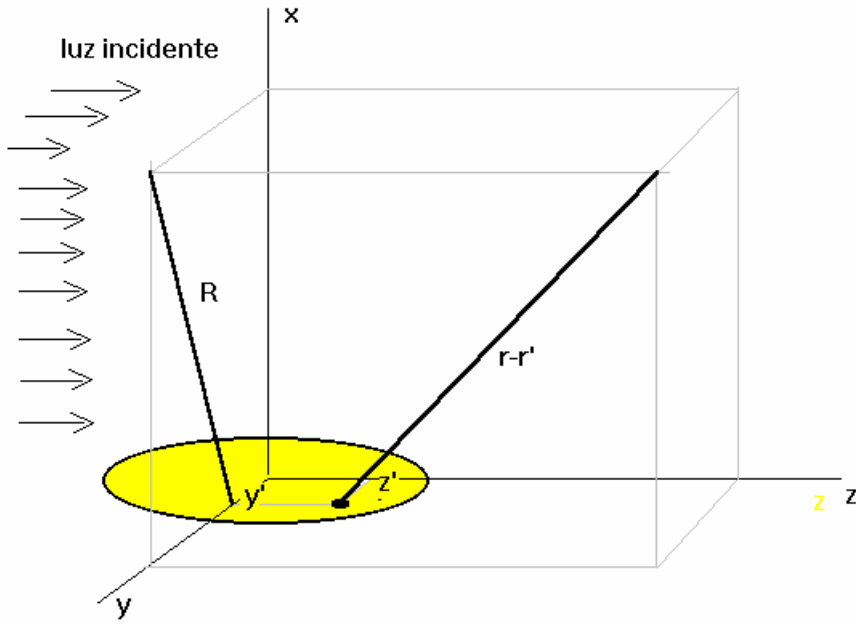


Figura 8

Sustituyendo (70) en (75) tenemos

$$\Phi(x, y) = k\mu \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S A(y', z') \frac{\exp(iK|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dy' dz' dz, \quad (76)$$

donde aparece la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iK|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(iK\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(iK\sqrt{R^2 + u^2}\right)}{\sqrt{R^2 + u^2}} du \quad (77)$$

en la cual se ha hecho el cambio de variable $u = z - z'$, y se ha definido

$$R = \sqrt{x^2 + (y - y')^2} \quad (78)$$

como se muestra en la Fig. 8.

El último miembro de (77) determina el campo de ondas cilíndricas a una distancia R de un foco emisor lineal infinito sobre el eje u . Su solución es la función de Hankel de primera clase y de orden cero²²

$$H_0^{(1)}(KR) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(iK\sqrt{R^2 + u^2}\right)}{\sqrt{R^2 + u^2}} du. \quad (79)$$

Sustituyendo (79) en (76) resulta

$$\Phi(x, y) = k\mu \iint_S A(y', z') H_0^{(1)}(KR) dy' dz'. \quad (80)$$

Nuestro objetivo es introducir las aproximaciones necesarias de forma que, en la comparación entre la variación de fase (80) y la presión (70), resulte una proporcionalidad entre ambas.

Primera restricción $R \gg \lambda$

Para $R \gg A$, como es usualmente el caso, resulta $KR \gg 1$, y la función de Hankel tiene una expresión asintótica²²

$$H_0^{(1)}(KR) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi KR}} e^{i(KR - \pi/4)}. \quad (81)$$

Con esta aproximación la (80) queda

$$\Phi(x, y) = k\mu \sqrt{\frac{2}{\pi K}} e^{-i\pi/4} \iint_S A(y', z') \sqrt{\frac{1}{R}} e^{iKR} dy' dz'. \quad (82)$$

Observando la ecuación (70) y la definición de R en (78), podemos expresar el campo de presiones sobre el plano x, y ($z=0$) como

$$P(x, y, 0) = \iint_S A(y', z') \frac{\exp\left(iK\sqrt{R^2 + z'^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z'^2}} dy' dz'. \quad (83)$$

Segunda restricción $R \gg a$.

Las integrales de (82) y (83) aún no muestran proporcionalidad entre la variación de fase de la luz y la presión acústica. Pero si consideramos la posibilidad de que sea $R \gg a$ (el radio del transductor) en la Fig. 8, estaremos evaluando la presión en puntos alejados del transductor, aunque no necesariamente próximos al eje x . Como es $|z'| \leq a$ en la integración de (83), podemos despreciar el cuadrado de z' frente al de R , lo que da

$$P(x, y, 0) = \iint_S A(y', z') \frac{\exp(iKR)}{R} dy' dz' \quad (84)$$

Tercera restricción: región paraxial $x \gg |y|$.

Aún no podemos relacionar (84) con (82) debido a que en una aparece R (que depende de la variable de integración y' según (78)), mientras que en la otra está $\sqrt{R}$ en el denominador.

Si nos limitamos no solamente a puntos lejanos al transductor, sino además al estudio del campo en la región paraxial, verificamos la condición $x \gg |y|$, con lo cual (78) se puede aproximar como $R \approx x$ en los denominadores (no así en la fase a causa del elevado valor de K), obteniéndose finalmente para (82) y (84) las expresiones respectivas:

$$\Phi(x, y) = k\mu \sqrt{\frac{2}{\pi Kx}} e^{-i\pi/4} \iint_S A(y', z') e^{iKR} dy' dz', \quad (85)$$

$$P(x, y, 0) = \frac{1}{x} \iint_S A(y', z') e^{iKR} dy' dz'. \quad (86)$$

De las cuales se deduce que

$$\Phi(x, y) = \frac{2\mu}{\lambda} \sqrt{\Lambda x} e^{-i\pi/4} P(x, y, 0). \quad (87)$$

La (87) prueba que, cumplidas las tres restricciones establecidas, la modulación de fase de la luz a la salida es directamente proporcional a la amplitud de presión del campo acústico en el plano $z=0$ dentro del medio, para una distancia fija x del transductor al punto de observación.

La ventaja de la expresión (87), obtenida por nosotros²³, sobre la teoría clásica de la difracción de Raman-Nath, es la no suposición de ondas acústicas planas, si bien resulta restringida a la región paraxial de campo lejano. Este hecho tiene relevancia por dos motivos. Primero, no presupone que el transductor emita de manera uniforme (por ej. por defectos de fabricación) y se puede utilizar para un control de calidad del mismo. Segundo, porque existen transductores expresamente diseñados para no emitir ondas planas, como los “focalizados” y los llamados “piezo-composites” (que conforman un array de emisores elementales).

Como se demostró en la Ec. (40) del Cap. 3 al tratar los métodos de visualización de objetos de fase, que la intensidad de la luz en la imagen es proporcional al cuadrado del módulo de la variación de fase, con lo cual (87) da una lectura directa del módulo de la presión en un punto dado del plano $z=0$, pues

$$I(x, y) \propto |\Phi(x, y)|^2 \propto x|P(x, y, 0)|^2. \quad (88)$$

4.3.2.2. Campos con simetría cilíndrica.

Una interesante aplicación que no requiere la aproximación a campo lejano y paraxial fue desarrollada por J. Ferrari *et al*²⁴ para fibras ópticas, pero es aplicable para el estudio del campo de algunos tipos de transductores mediante métodos ópticos.

Se requiere la aceptación de que el campo acústico tiene simetría cilíndrica entorno al eje de propagación (eje x). En estas condiciones el campo de presión puede expresarse como

$$p(x, \rho, t) = P(x, \rho) e^{-i\Omega t}, \quad (89)$$

donde

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} . \quad (90)$$

Volviendo a la expresión (75) la amplitud de variación de la fase luminosa es

$$\Phi(x, y) = k\mu \int_{-\infty}^{\infty} P(x, \rho) dz . \quad (91)$$

Tomando transformadas de Fourier en la variable y de ambos miembros de (91) resulta

$$\int \Phi(x, y) \exp(ify) dy = k\mu \iint P(x, \rho) \exp(ify) dy dz , \quad (92)$$

que escribiremos como

$$\tilde{\Phi}(x, f) = k\mu \iint P(x, \rho) \exp(ify) dy dz , \quad (93)$$

donde $\tilde{\Phi}(x, f)$ es la transformada de Fourier de $\Phi(x, y)$ en la segunda variable.

La doble integral de (93) es una integral de área en el plano y, z . Pasando a coordenadas polares,

$$\tilde{\Phi}(x, f) = k\mu \iint P(x, \rho) \exp(if\rho \sin\theta) d\theta \rho d\rho . \quad (94)$$

Utilizando la relación²⁵

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iu \cos\theta) d\theta , \quad (95)$$

la (94) resulta

$$\tilde{\Phi}(x, f) = 2\pi k\mu \int_0^{\infty} P(x, \rho) J_0(f\rho) \rho d\rho. \quad (96)$$

La integral de (96) se conoce como la transformada de Hankel²⁶ de la función $P(x, \rho)$ en la variable ρ , y es invertible, obteniéndose

$$2\pi k\mu P(x, \rho) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}(x, f) J_0(\rho f) f df. \quad (97)$$

La (97) determina que, si se mide la variación de fase $\Phi(x, y)$ de la luz a la salida del sistema, se calcula su transformada de Fourier en la variable y , se efectúa finalmente su transformada de Hankel (97), y se obtiene entonces la amplitud de presión acústica siempre que se sepa que ésta tiene simetría cilíndrica alrededor del eje de propagación x .

El inconveniente experimental que tiene para nosotros este procedimiento, es que mediante la formación de imágenes obtenemos información del módulo de la variación de fase luminosa de la lectura de la intensidad luminosa (88). Por lo que no tenemos el valor complejo de Φ , ni de sus partes real e imaginaria por separado.

Sin embargo, la utilización de métodos interferométricos permite obtener las variaciones de fase del frente luminoso. Entonces se puede utilizar (97) para obtener la presión acústica.

4.4. Efecto Bragg.

El efecto Bragg se produce cuando el haz luminoso no incide perpendicular al haz acústico, y cuando el espesor de éste supera cierto valor crítico.

Supongamos un haz de luz que incide bajo un ángulo α con los planos de fase de las ondas acústicas de longitud de onda Λ (Fig. 7A). Dos rayos difractados bajo cualquier ángulo θ por planos de fase acústicos separados Λ tendrán una diferencia de fase

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{QP'} + \overline{P'S}) = \frac{2\pi}{\lambda} \Lambda (\sin\alpha + \sin\theta), \quad (98)$$

e interferirán constructivamente cuando $\Delta\phi = 2n\pi$. Por la cual, los ángulos θ_n bajo los que se observarán los máximos estarán dados de (98) por

$$\sin\theta_n = n \frac{\lambda}{\Lambda} - \sin\alpha. \quad (99)$$

Obsérvese que los máximos en la difracción de Raman-Nath (64) son un caso particular de (99) cuando $\alpha=0$. Esto significa que el espectro presentado por (99) es el mismo que en la difracción de Raman-Nath pero girado un ángulo α en sentido horario (el orden 0 aparece bajo un ángulo $-\alpha$ con los planos acústicos).

Pero existe una diferencia sustancial con respecto a Raman-Nath que impone otra ecuación de condición para los ángulos de difracción. Debido a la incidencia inclinada de la luz, la Fig. 9B muestra que, si el espesor del haz acústico es suficiente, un mismo rayo luminoso incidente atraviesa varios planos de fase acústicos, difractándose en cada uno de ellos. Por consiguiente, se debe tomar en cuenta también la interferencia entre los rayos difractados por un mismo rayo incidente, como se muestra en la Fig. 9B.

Para que ambos rayos interfieran constructivamente, la mínima diferencia de fase entre ellos debe de ser 2π . De la Fig. 9B tenemos

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{PM} - \overline{PN}) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Lambda}{\sin\alpha} [1 + \cos(\theta + \alpha)]. \quad (100)$$

Si llamamos $\phi = \theta + \alpha$ a la dirección del haz difractado con respecto al incidente, obtenemos un sistema de ecuaciones para θ y n con (99) y (100) de la forma

$$\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha) = n \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad \frac{\lambda}{\Lambda} \sin \alpha = 1 + \cos \varphi. \quad (101)$$

De (101) se puede despejar φ obteniéndose

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{n - \sin^2 \alpha}, \quad (102)$$

que para $n=1$ tiene la solución

$$\frac{\varphi_1}{2} = \alpha \Rightarrow \theta_1 = \alpha. \quad (103)$$

La (103) expresa que el primer orden de difracción sale bajo un ángulo igual al de incidencia (reflexión especular).

Pero para $n>1$ la (102) da ángulos menores que θ_1 , con lo cual no pueden ser solución porque a mayor orden de difracción, mayor debe de ser el ángulo.

Como conclusión, tenemos entonces que en la difracción de Bragg sólo se refuerza el primer orden, y éste se produce bajo el ángulo dado en (103). Los demás se cancelan por interferencia.

Introduciendo el resultado (103) en (99), tenemos que este fenómeno se produce bajo un ángulo de incidencia determinado, llamado ángulo de Bragg, dado por

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2\Lambda}. \quad (104)$$

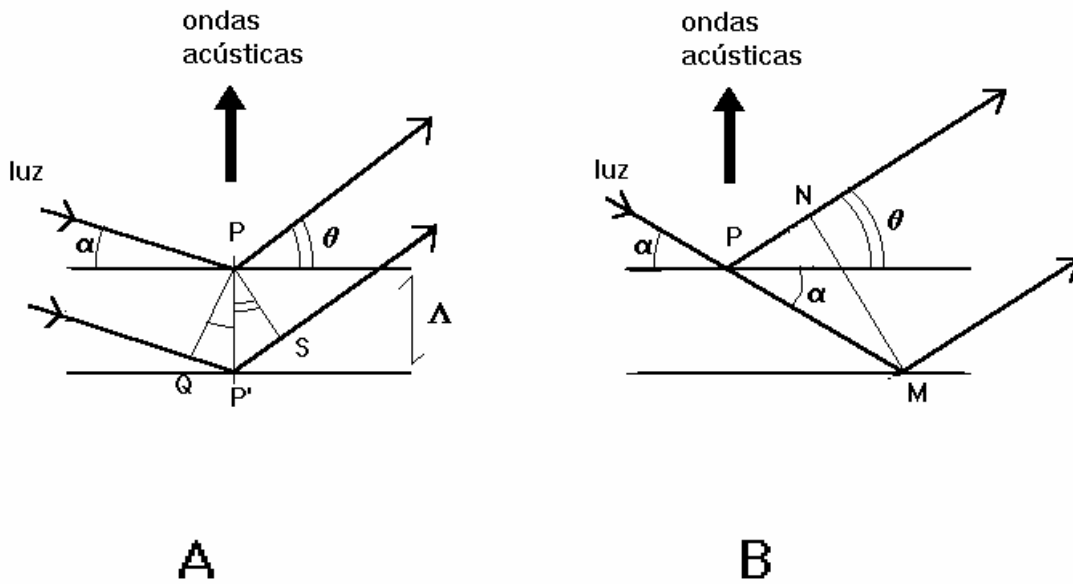


Figura 9

El efecto Bragg requiere no solamente la condición de un ángulo de incidencia dado por (104), sino además que el ancho L del haz acústico sea suficiente como para que el haz luminoso incidente atravesase varios frentes de onda acústicos antes de salir de la región perturbada.

Con referencia a la Fig. 10, donde α es el ángulo de Bragg, imponemos la condición de que

$$L \operatorname{tg} \alpha \gg \Lambda. \quad (105)$$

Dada la pequeñez del ángulo de Bragg, tenemos, de acuerdo a (104),

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{2\Lambda}, \quad (106)$$

que al sustituirse en (105) impone la condición

$$L \gg \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \quad (107)$$

Si se observa la condición (67) para la observación del efecto Raman-Nath, se observa que (107) es precisamente la condición contraria respecto al ancho del haz acústico. Por lo cual, para un transductor que emita en agua con una frecuencia de 1 MHz, cuyo campo sea iluminado con luz láser de He-Ne, la observación del efecto Bragg requiere que $L \gg 7.5 \text{ m}$, lo cual es inviable. Por tal motivo, el efecto Bragg es utilizado en dispositivos manejados por alta frecuencia en sólidos, como los moduladores acusto-ópticos (más de 80 MHz).

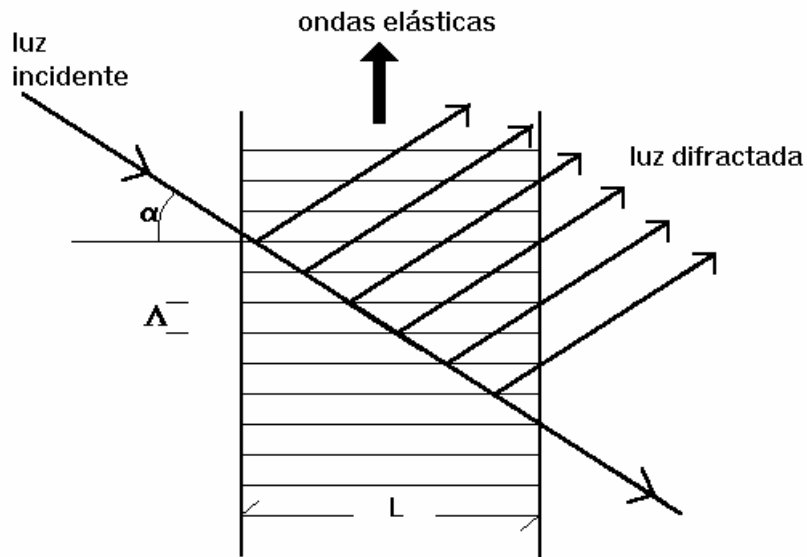


Figura 10

5. Resultados experimentales en base al efecto Raman-Nath.

5.1. Contrastación del campo medido y las previsiones teóricas.

Se montó un dispositivo experimental cuyo esquema se muestra en la Fig. 11.

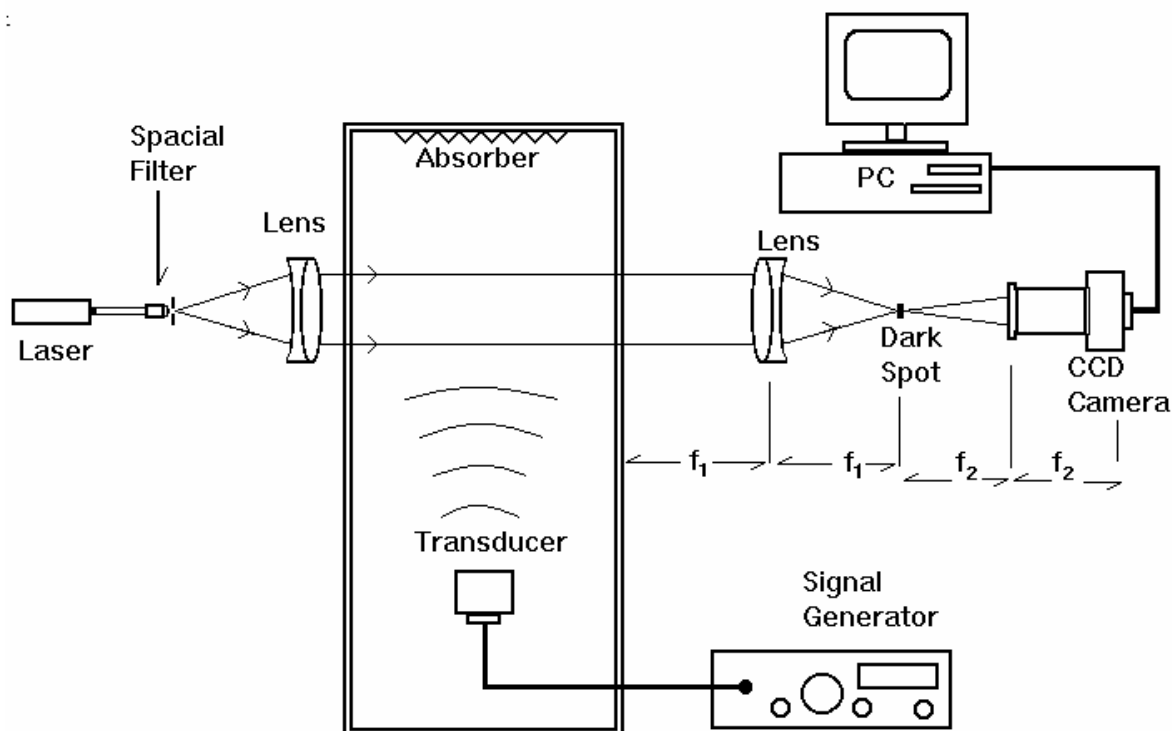


Figura 11

Para asegurarnos del cumplimiento de las condiciones en que se efectuaron las deducciones de la teoría de visualización de objetos de fase explicada antes (Fig. 1), se ubicó el punto negro en el foco imagen de la segunda lente y en foco objeto del objetivo de la cámara CCD en la Fig. 11. Éste se usó como la lente L_2 de la Fig. 1, que forma la imagen sobre el chip CCD. En esta disposición óptica vale la expresión (40) que establece la proporcionalidad entre la intensidad luminosa y la media temporal del cuadrado de la variación de fase.

Nuestro objetivo en esta sección es el testeo experimental de las deducciones de la sección 4.3.2.1 para campos de forma arbitraria¹⁵. Elegimos un transductor PZT de 1.67 cm de diámetro y lo excitamos con onda continua a su frecuencia de resonancia de 2.33 MHz. En estas condiciones la longitud de onda del U.S. en el agua es $\lambda=0.64$ mm. Exploramos el campo acústico a una distancia $x=23.9$ cm del transductor.

Las dos primeras restricciones establecidas en la Secc. 4.3.2.1 para la validez de la expresión (87), que establece una proporcionalidad entre la amplitud de variación de fase y de presión acústica, se verifican. Estas son: la longitud de onda acústica (0.64 mm) mucho menor que la distancia del transductor al punto de observación (23.9 cm) y el radio del transductor (0.88 cm) mucho menor que la distancia al punto de observación.

La tercera restricción obtenida en la Sec. 4.3.2.1 para la validez de (87) es que se trabaje en la región paraxial. Ésta se observará inmediatamente en los resultados experimentales.

Sustituyendo la expresión (87) en (40), donde $\epsilon=i\phi$, tenemos que la medida de la intensidad de la luz determina el valor de la amplitud de presión acústica en el plano $z=0$ que pasa por el eje del campo acústico (eje x) y es perpendicular a la propagación de la luz (eje z),

$$I(-mx, -my) = \left(\frac{2\mu}{\lambda m} \right)^2 I_G \Lambda x |P(x, y, 0)|^2, \quad (108)$$

donde recordemos que μ es la constante piezo-óptica del agua, λ , Λ las longitudes de onda de la luz y el sonido, respectivamente, I_G es la intensidad luminosa uniforme incidente, y m es la magnificación del sistema óptico.

El plano x, y de algunas de las imágenes obtenidas se muestran en la Fig. 12, donde las marcas sobre los ejes están espaciadas 1 cm, estando el eje x hacia abajo y el eje y horizontal.

La Fig. 12A corresponde al campo del transductor inmediatamente a su salida (donde está indicado el valor $x=0$) hasta unos 9 cm, con los valores reales de intensidad tomados por la cámara CCD.

La Fig. 12B es la misma que 12A pero con la intensidad multiplicada (por software) a los efectos de observar algún campo lateral débil. No se aprecia ninguno.

La Fig. 12C es el campo acústico relevado a partir de la distancia $x=21$ cm del transductor, con los valores reales de intensidad.

La Fig. 12D es la misma que 12C pero con la intensidad multiplicada. Se observa la presencia de uno de los lóbulos laterales de difracción, aunque no el lóbulo derecho. Esto estaría indicando una anomalía en la emisión del transductor, dado que el sistema experimental utilizado proporcionaba un campo aceptablemente uniforme (no mostrado acá) cuando el transductor no estaba en funcionamiento.

En la línea horizontal marcada en $x=23.9$ cm en la Fig. 12D se tomaron los valores de intensidad y se compararon con los datos de un cálculo teórico para el mismo transductor, suponiendo que oscila en modo pistón.

La Fig. 13 muestra ambos resultados, y la Fig. 14 una comparación de los mismos en escala logarítmica, donde la línea llena corresponde a la intensidad medida y la punteada a la intensidad calculada por la teoría. La coordenada y representada en el eje horizontal está en cm.

Obsérvese la anomalía en el campo ya señalada y visible en la Fig. 12D a la derecha del lóbulo central. La Fig. 14 muestra el muy buen acuerdo de la experiencia con la teoría que conduce a la expresión (108) en la región paraxial (casi hasta ± 1 cm).

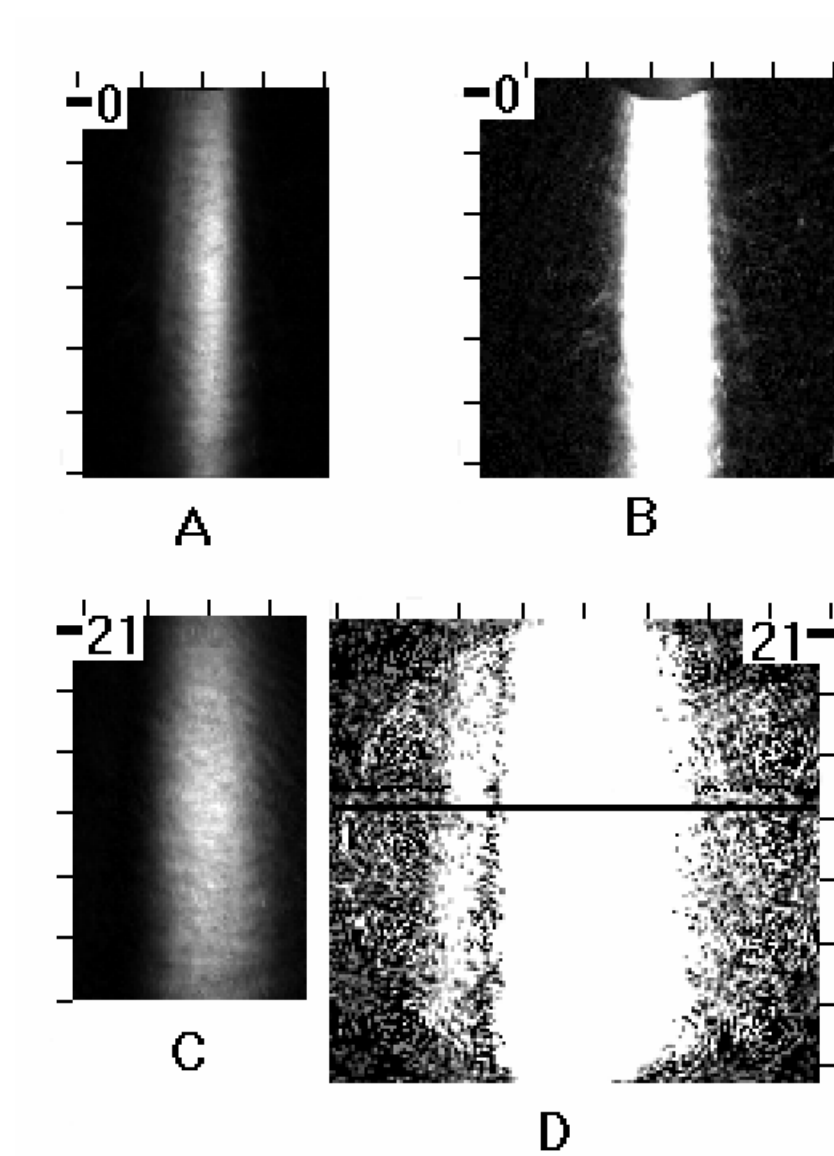


Figura 12

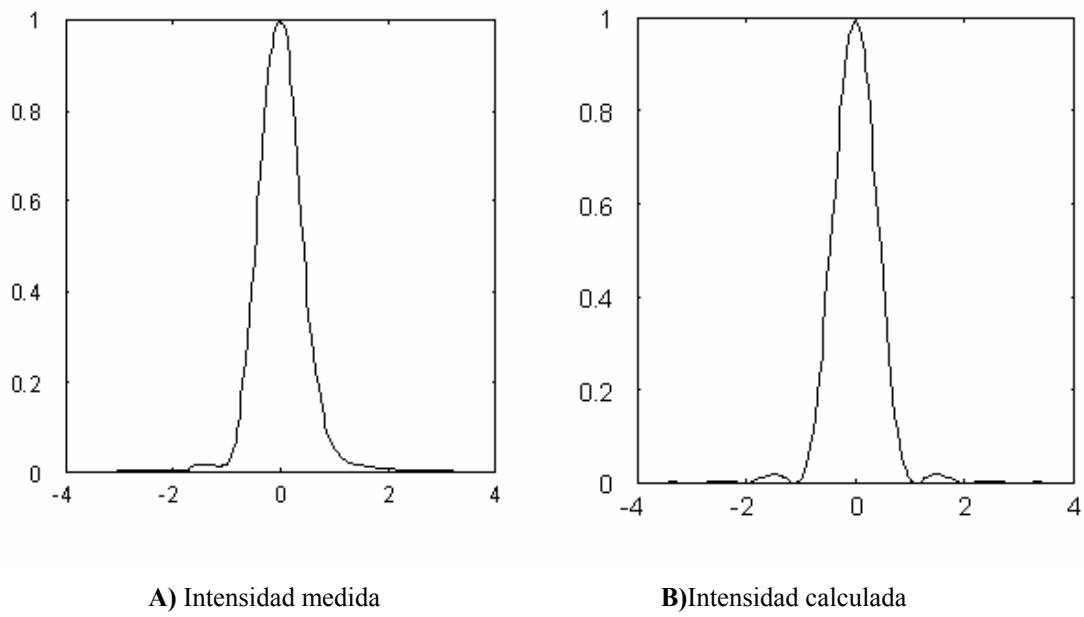


Figura 13

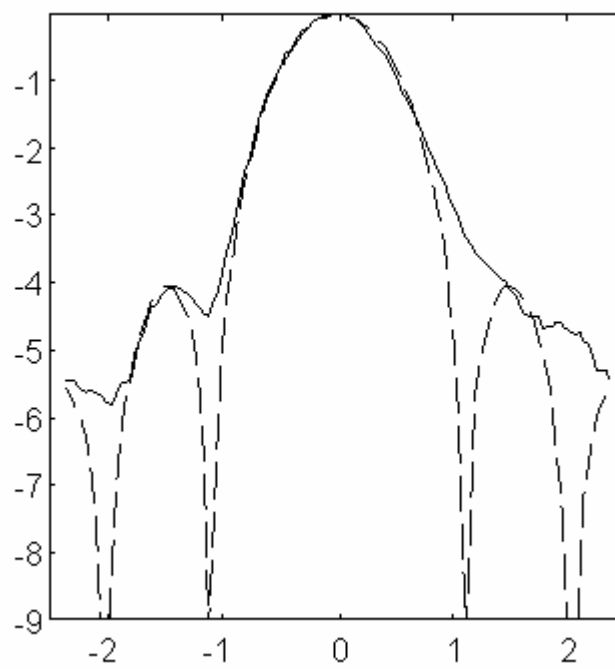


Figura 14

5.2. *Comparación de los campos de una cerámica PZT 100% y una piezo-composite 42%.*

5.2.1. *La propagación como filtro pasabajos en frecuencia espacial.*

Nuestro objetivo en esta sección es comparar los campos de una cerámica PZT 100% con una piezo-composite, como se le denomina a un array bidimensional de pequeños trozos iguales de cerámica que emiten inmersos en un substrato de resina no conductora.

En el presente caso, el transductor piezo-composite contiene un 42% de su volumen formado por cerámica.

El transductor de cerámica 100% se puede suponer que emite principalmente vibrando en modo espesor como un pistón. Su campo será como el de una onda cuasi-plana limitado por la difracción debido al tamaño finito del disco emisor.

El transductor piezo-composite emite un campo acústico fuertemente modulado en amplitud debido a la presencia de los elementos discretos de cerámica. En el modelo más simple que supone que la resina no vibra, el campo inmediatamente a la salida del transductor tiene una estructura espacial de amplitudes semejante a la superficie del transductor: cero sobre las porciones de resina y cierto valor (que supondremos el mismo) sobre cada uno de los cuadrados de cerámica que componen el array.

Para prever lo que se espera observar al estudiar los campos (en la zona límite entre campo cercano y lejano), veremos brevemente cómo la propagación de las ondas afectan las modulaciones espaciales de amplitud.

Sea un campo escalar $\phi(x, y, z, t)$ que obedece a la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (109)$$

Suponiendo ondas monocromáticas $\phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i\omega t}$ en (109) obtenemos la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (110)$$

donde $k = \omega / c$.

Sea $G(r, r')$ una función de Green para (110), tal que

$$\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi \delta(r - r'), \quad (111)$$

entonces, el teorema de Green conduce a

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_S [G(r, r') \nabla' \Phi(r') - \Phi(r') \nabla' G(r, r')] \cdot n dS \quad (112)$$

donde la integral se evalúa sobre cualquier superficie cerrada que encierre el punto r .

Supongamos que tenemos un emisor de ondas en la superficie plana S' de la Fig. 15, de forma arbitraria sobre el plano xy . La región de interés es el semiespacio $z > 0$, entonces elegimos como superficie cerrada $S = S' + S_0 + S_e$, que consiste en la zona S' del emisor de ondas, la región S_0 que completa un círculo sobre el plano xy , y la semiesfera de superficie S_e .

Como función de Green para este problema elegimos una que se anule ella misma o su gradiente para $r' \in S' + S_0$, según conozcamos respectivamente Φ o su gradiente en la región del emisor.

Para el caso de ondas mecánicas, Φ es el potencial de velocidad por lo que la amplitud de velocidad de las partículas del medio es

$$U(x, y, z) = -\nabla \Phi(x, y, z), \quad (113)$$

y este es el dato sobre la superficie del emisor. En esta circunstancia hay que elegir una función de Green que anule su gradiente sobre esta superficie, ya que se ignora el término conteniendo Φ en (112).

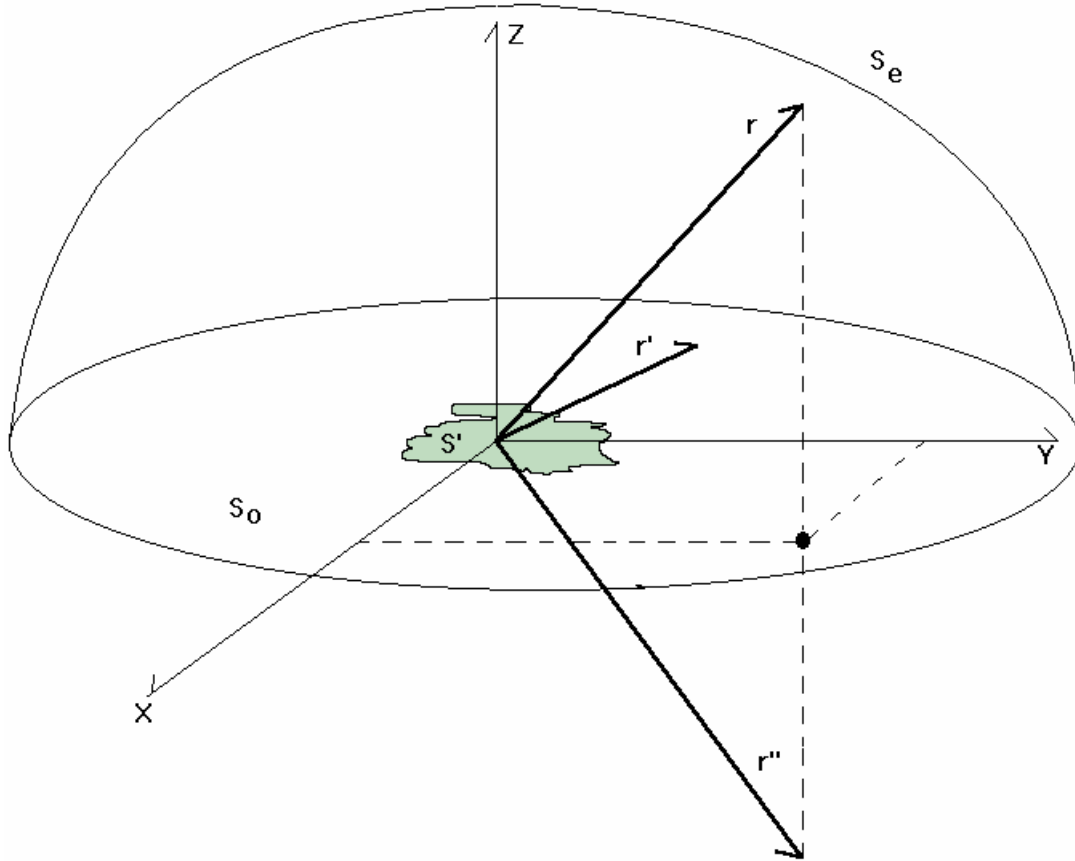


Figura 15

Si se define el punto $r'' = r - 2\hat{k}z$ (simétrico de r respecto al plano xy) fuera de la región de interés, la función de Green que satisface (111) y cumple las condiciones de frontera previstas, es

$$G(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} + \frac{e^{ik|r''-r'|}}{|r''-r'|}. \quad (114)$$

Si se deriva en (114) $\mathbf{G}$ respecto a $\mathbf{z}'$ se puede verificar que $\nabla \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$ se anula sobre el plano xy , y por lo tanto, es ésta la que se utiliza en (112) para ondas mecánicas.

El siguiente paso previo a la utilización de (112) es la extensión de la superficie S_0 a todo el plano x,y , lo cual implica la extensión del radio de la semiesfera S_e de la Fig. 15 al infinito.

Este límite anula la integral sobre la semiesfera, pues el comportamiento de la función de Green (114) para $|\mathbf{r}'| \gg |\mathbf{r}| \approx |\mathbf{r}''|$ es

$$\mathbf{G} \approx \frac{1}{|\mathbf{r}'|}. \quad (115)$$

Por su parte, el campo Φ tiende al campo de un emisor puntual cuando $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, resultando también

$$\Phi \approx \frac{1}{|\mathbf{r}'|}. \quad (116)$$

En estas condiciones, los gradientes resultan

$$|\nabla \mathbf{G}| \approx \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}, \quad |\nabla \Phi| \approx \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}, \quad (117)$$

de forma que los productos $|\Phi \nabla \mathbf{G}|$, $|\mathbf{G} \nabla \Phi|$ decaen igual o más rápidamente que $\frac{1}{|\mathbf{r}'|^3}$ sobre la semiesfera S_e cuando su radio tiende a infinito. Como el elemento de área de la esfera es $dS_e \approx |\mathbf{r}'|^2 d\Omega$, siendo $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido, es evidente que las integrales de $|\Phi \nabla \mathbf{G}| dS_e$, $|\mathbf{G} \nabla \Phi| dS_e$ se anulan en el infinito.

Por consiguiente, la integral de superficie (112) se reduce a todo el plano xy (región de $S' + S_0$ en la Fig. 15),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'+S_0} [\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \nabla' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n} dS \quad (118)$$

Considerando ahora que sobre el plano $\mathbf{xy}$ la normal es $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{k}}$, resulta más cómodo escribir (118) como

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'+S_0} \left[\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS \quad (119)$$

Para ondas mecánicas la función de Green en (114) tiene derivada respecto de z' que se anula en el plano $\mathbf{xy}$, por lo cual (119) resulta

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'+S_0} \left[\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \Phi(\mathbf{r}') \right] dS. \quad (120)$$

Por otra parte, el valor de $\mathbf{G}$ sobre el plano $\mathbf{xy}$ es, como se observa en (114),

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (121)$$

para $\mathbf{r}' \in S'+S_0$, puesto que en esas condiciones es $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|$.

De acuerdo con (113), la derivada del potencial de velocidad en el integrando de (120), es menos la componente U_z de la velocidad de las partículas del emisor. Sustituyendo esto y la (121) en (120) tenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S'+S_0} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U_z(\mathbf{r}') dS. \quad (122)$$

Finalmente, en la región del plano xy fuera de la superficie del emisor el plano no vibra, con lo cual $U_z(\mathbf{r}') = 0$ para $\mathbf{r}' \in S_0$. Entonces la integral de (122) se anula sobre S_0 , y sólo resta evaluar la integral sobre la superficie S' del emisor,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U_z(\mathbf{r}') dS' \quad (123)$$

Si nuestro interés es la componente z de la velocidad del medio en el punto $\mathbf{r}$, derivamos (123) respecto a z y utilizamos (113),

$$U_z(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{S'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U_z(\mathbf{r}') dS'. \quad (124)$$

Llamando $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = U_z(\mathbf{r})$ a la amplitud de la componente z de la velocidad del campo oscilatorio, tenemos

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S'} \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} F(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) dx' dy'. \quad (125)$$

La (125) es una ecuación exacta en el sentido de que no se han hecho aproximaciones vinculadas a la longitud de onda de la radiación ni a las distancias $\mathbf{x}, \mathbf{y}, z$.

La (125) expresa que la amplitud F del campo oscilatorio en cualquier punto del semiespacio $z > 0$ es la convolución de la respuesta impulsional

$$h_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (126)$$

de la propagación, con el valor de la amplitud del campo F sobre la fuente en $z=0$.

Tomando las transformadas de Fourier bidimensionales en x, y en (125) encontramos que

$$\mathfrak{F}\{F(x, y, z)\} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\} \mathfrak{F}\{F(x, y, 0)\}, \quad (127)$$

donde el símbolo $\mathfrak{F}$ indica la transformada bidimensional de Fourier en las variables x, y .

La conocida fórmula de Sommerfeld²⁷ establece que

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\} = \frac{e^{-2\pi z\sqrt{\xi^2+\eta^2-1/\lambda^2}}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1/\lambda^2}}, \quad (128)$$

donde ξ, η son las variables conjugadas de x, y respectivamente, y λ es la longitud de onda de la radiación.

Insertando (128) en (127) y efectuando la derivación respecto a z , la (127) resulta

$$\mathfrak{F}\{F(x, y, z)\} = e^{-2\pi z\sqrt{\xi^2+\eta^2-1/\lambda^2}} \mathfrak{F}\{F(x, y, 0)\}. \quad (129)$$

La (129) establece el interesante resultado de que la propagación de ondas es un filtro pasa-bajos para frecuencias espaciales. Esto es, si el campo en el emisor tiene variaciones espaciales menores que la longitud de onda, entonces

$$\xi^2 + \eta^2 > 1/\lambda^2, \quad (130)$$

y el exponente de (129) es real, de forma que para grandes distancias z se extinguen dichas componentes de alta frecuencia espacial.

Supongamos. por ejemplo, que la amplitud del campo F sobre el plano xy varía sinusoidalmente entre 0 y un valor máximo F_0 , con frecuencias espaciales f_x, f_y . Esto es

$$F(x, y, 0) = \frac{F_0}{2} [\cos(2\pi f_x x) \cdot \cos(2\pi f_y y) + 1], \quad (131)$$

lo cual podría ser una componente de Fourier del campo inmediatamente a la salida de un transductor piezocomposite.

Haciendo la transformada de Fourier de (131), sustituyéndola en (129) y tomando luego la transformada inversa, obtenemos para el campo $F(x, y, z)$ el valor

$$F(x, y, z) = \frac{F_0}{2} \left[e^{-2\pi z \sqrt{f_x^2 + f_y^2 - 1/\lambda^2}} \cos(2\pi f_x x) \cdot \cos(2\pi f_y y) + 1 \right]. \quad (132)$$

Como aplicación particular de (132), si consideramos la emisión de ultrasonido por una cerámica piezo-composite cuya periodicidad espacial sea menor que la longitud de onda del sonido en el medio, entonces

$$f_x^2 + f_y^2 > 1/\lambda^2, \quad (133)$$

y sólo llegará a distancias z apreciables la componente de orden cero ($f_x=0, f_y=0$), resultando $F(x, y, z)=F_0/2$ en (132).

En un emisor piezo-composite cuyas componentes fundamentales (en x y en y) de frecuencias espaciales cumplan con la condición (133), todas las otras componentes, al ser mayores que las fundamentales, también la cumplirán. Esto significa que el campo será indistinguible del producido por una cerámica llena vibrando en modo pistón con amplitud de velocidad $F_0/2$.

Sin embargo, si el período fundamental del array cuadrado que forma el transductor es mayor que la longitud de onda del ultrasonido emitido, se propagará sin evanescerse esta

componente fundamental, además de todas las otras de frecuencias espaciales mayores hasta las de corte que verifican (133).

Sabemos que la componente de continua va a dar en el orden cero de difracción, esto es, sobre el eje de propagación. Las componentes de mayor frecuencia (pero menores que la frecuencia de corte) se difractan bajo ángulos mayores, tanto más grandes cuanto mayor sea la frecuencia espacial. De aquí es que esperamos observar un “ensanchamiento” en el campo lejano de una piezo-composite debido a la llegada a los lóbulos laterales de componentes de frecuencia espacial mayores que el orden cero. Todo esto siempre y cuando el período espacial de la composite sea mayor que la longitud de onda del ultrasonido.

El transductor PZT 100%, en cambio, no contiene otras frecuencias espaciales (excepción hecha de las originadas por difracción en abertura circular) que las del orden cero, si vibra en modo pistón. Por lo cual el ensanchamiento del campo lejano sólo se debe a la difracción de la abertura.

Como se verá a continuación, las medidas tomadas por nosotros²⁸ corroboran plenamente estas conclusiones teóricas.

5.2.2. Simulación y mediciones experimentales.

Con un programa en Matlab se implementó un cálculo numérico de campos de dos transductores reales que luego fueron sometidos a pruebas experimentales con el montaje de la Fig. 11. El cálculo de los campos se hizo para cada uno sobre un plano (x,y) paralelo a su superficie emisora a una distancia $z=22 \text{ cm}$ del mismo.

Uno de ellos es un transductor 100% PZT de 24.6 mm de diámetro emitiendo a su frecuencia de resonancia principal de 880 kHz (longitud de onda en el agua de 1.69 mm). Su límite de campo lejano comienza a partir de una distancia $z \approx a^2/\lambda \approx 9 \text{ cm}$, por lo que el campo calculado puede considerarse en la zona de campo lejano.

El otro es un transductor piezo-composite con el 42% de volumen de PZT, de 25.7 mm de diámetro. Los elementos de PZT son prismas de base cuadrada de 1.10 mm de lado separados 0.45 mm, con lo que la periodicidad del array es de 1.55 mm. El transductor está

emitiendo a su frecuencia de resonancia principal de 1118 kHz (longitud de onda en el agua de 1.33 mm). Su límite de campo lejano comienza a partir de $z \approx 12 \text{ cm}$, por lo que el campo calculado también puede considerarse como lejano.

Obsérvese que el período espacial fundamental de las componentes de Fourier de la función amplitud de la superficie emisora del piezo-composite (1.55 mm), es mayor que la longitud de onda del ultrasonido emitido (1.33 mm). Según la teoría desarrollada en la sección anterior, esto significa que el campo lejano no será exactamente igual al de la cerámica 100% en lo que respecta a los lóbulos laterales, puesto que se alcanzan a propagar componentes de la frecuencia espacial mayores que el orden cero y que aún se mantienen por debajo de la frecuencia espacial de corte.

Las Figs.16A y 16B muestran las intensidades de los campos acústicos de ambos transductores. Obsérvese en la 16B la presencia de la estructura espacial fundamental de la piezo-composite, debido a que su período espacial es mayor que la longitud de onda, como lo requiere la (129) para que la función de transferencia tenga exponente complejo.

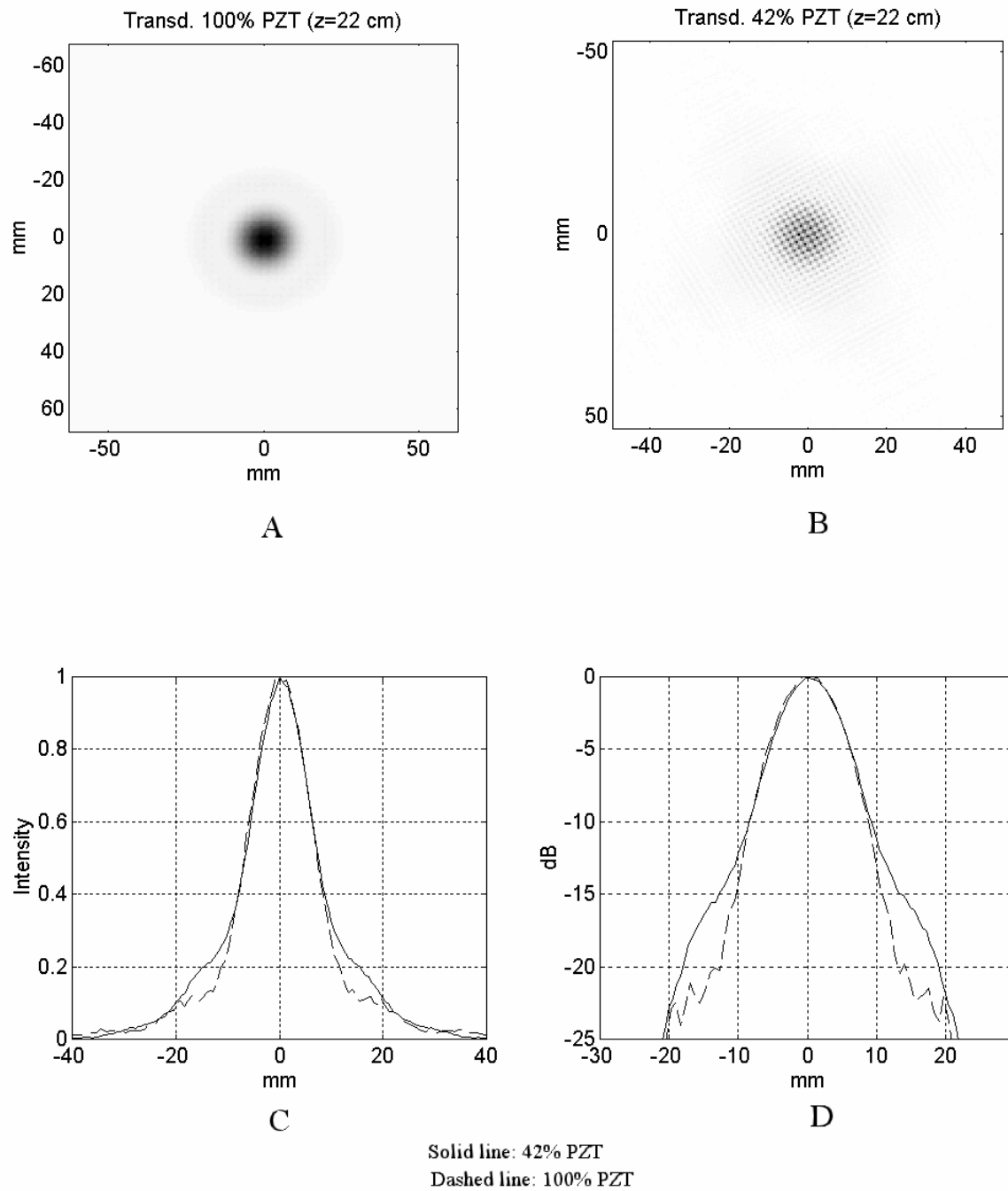


Figura 16

Como el haz luminoso atraviesa los campo acústicos representados en las Figs. 16A y 16B paralelo al plano de las mismas (digamos, de izquierda a derecha), la intensidad luminosa observada corresponde a una integración (o promedio espacial) en esa dirección.

Una vez hechos estos promedios, resultan las intensidades luminosas como funciones de una sola variable (digamos, el eje vertical en las Figs. 16A y 16B), las cuales se han normalizado y graficado en la Fig. 16C. Se observa claramente la coincidencia de ambos campos en la región paraxial, y el ensanchamiento del perfil de la piezo-composite en los lóbulos laterales.

Para mejor apreciación de detalles, la Fig. 16D representa ambas intensidades en decibeles.

Con un montaje experimental igual al del la Fig. 11 se levantaron imágenes de los campos acústicos que se muestran en la Fig. 17.

La Fig. 17A muestra el campo del transductor PZT 100%, y la Fig. 17B el campo del transductor piezo-composite al 42% PZT.

La Fig. 17C muestra una comparación en decibeles de las intensidades de estos campos (normalizadas a los máximos de ambos) en $z=22$ cm. La curva superior corresponde al transductor piezo-composite, en tanto que la curva inferior corresponde al transductor 100% PZT.

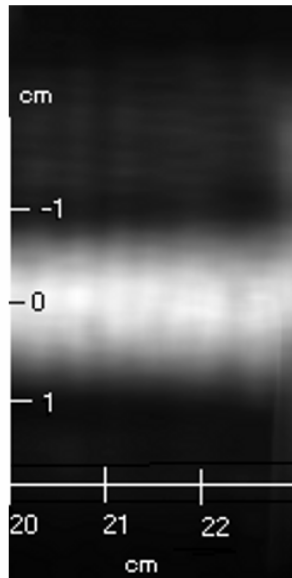
Se observa lo predicho en la teoría de la sección anterior y en el resultado del cálculo numérico: en la región paraxial coinciden ambos porque allí llega el orden cero de las frecuencias espaciales. Pero se observa el ensanchamiento previsto en el campo de la piezo-composite, debido a las frecuencias espaciales de mayor orden presentes en la modulación de la amplitud sobre la superficie emisora de este transductor.

Compárese el resultado del cálculo numérico (Fig. 16D) con la Fig. 17C. Los campos del transductor 100% PZT coinciden aceptablemente bien en ambos casos. Sin embargo, los valores de intensidad en los lóbulos laterales del piezo-composite son bastante mayores en la Fig. 17C que lo arrojado por el cálculo numérico en la Fig. 16D. Esto revela que el modelo adoptado para el cálculo de la vibración de la piezo-composite (en el cual vibrarían solamente los elementos de cerámica, estando la resina estática) es demasiado simplificado.

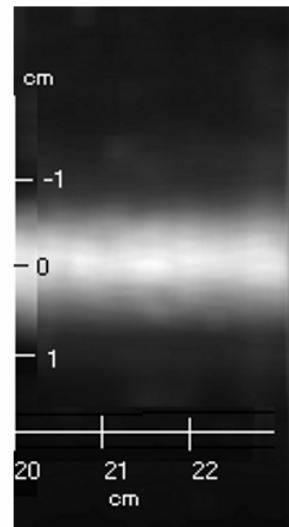
Lo deseable de un transductor piezo-composite es que su campo acústico sea similar al del emisor plano que oscila en modo pistón (como la cerámica 100% PZT), ya que las propiedades aprovechables del substrato de resina en que están inmersos los elementos de

cerámica son su flexibilidad y la impedancia acústica total del transductor (más adaptable a la de los tejidos biológicos, por ejemplo).

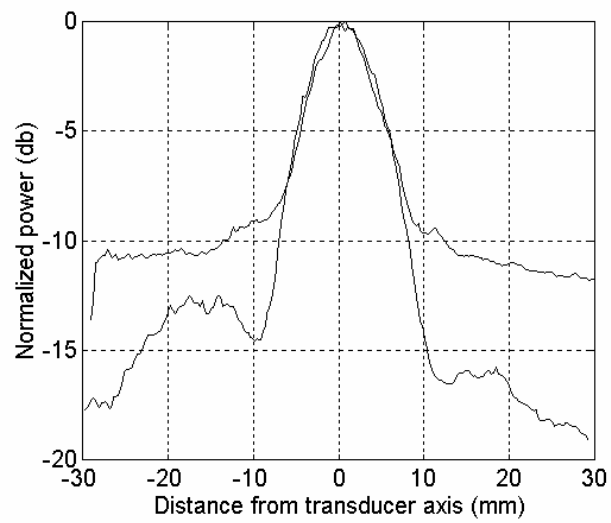
Por consiguiente, un testeo como el de la Fig. 17 tiene la ventaja de ofrecer un método muy rápido de evaluar cuánto se aparte el campo acústico de un piezo-composite, con respecto a los valores ideales.



A) Campo de la cerámica PZT 100%



B) Campo del piezocomposite 42%



C) Comparación entre ambos campos

Figura 17

6. Métodos interferométricos.

6.1. Introducción.

Estas técnicas emplean los principios de la interferometría óptica usando la luz reflejada o dispersada por una superficie sujeta a desplazamientos ultrasónicos. Esto significa que no se obtiene directamente información del campo acústico, sino del movimiento de los puntos de la superficie mecánica interpuesta para que se refleje o disperse la luz. Se necesita entonces un estudio adicional de la ecuación de movimiento de dicha membrana para obtener el campo de presión o desplazamiento de ultrasonido.

Eventualmente, puede interesar justamente el movimiento de esa superficie, como en el caso del estudio de ondas superficiales, en cuyo caso la superficie no es utilizada meramente como “transductor” del campo de presiones.

Generalmente, el estudio de las vibraciones de una superficie mediante métodos ópticos (como la interferometría), es menos sensible que los métodos piezoeléctricos (como la utilización de hidrófonos)²⁹. Sin embargo ofrecen cierto número de ventajas:

- a) No requieren contacto mecánico, por la cual no perturban el campo ultrasónico. El punto de lectura puede ser rápidamente desplazado sin agitar el medio.
- b) Alta resolución espacial puede ser obtenida sin reducción de la sensibilidad. Las medidas pueden ser localizadas sobre unos pocos micrones, si es necesario.
- c) Como las medidas pueden ser relacionadas directamente a la longitud de onda de la luz, no se requiere calibración previa del dispositivo.
- d) Su curva de respuesta a la frecuencia es prácticamente plana, algo muy difícil de obtener con los hidrófonos, principalmente a altas frecuencias.

En comparación con los métodos desarrollados en los Caps. 4 y 5, que involucran la interacción acusto-óptica, podemos decir que los métodos interferométricos tienen la ventaja de revelar los desplazamientos instantáneos de la superficie en estudio. Trascienden, por tanto, los regímenes de ondas acústicas monocromáticas o de onda continua (CW), y pueden utilizarse para transitorios.

6.2. *Interferometría homodyna.*

6.2.1. Teoría.

Los interferómetros homodynos se caracterizan por no mezclar haces de luz con diferentes frecuencias. Contrariamente a los heterodynos que modulan expresamente la frecuencia de uno de los haces luminosos (con un valor constante bien conocido) antes de hacerlo interferir con el otro.

El hecho básico consiste, como en todo método interferométrico, que uno de los haces luminosos, llamado haz de la señal (S) incide sobre la superficie vibrante en estudio y resulta modulado en fase. Entonces es hecho interferir con otro haz proveniente de la misma fuente que se refleja en un espejo fijo, llamado haz de referencia (R). Del patrón de interferencia resultante se obtiene la fase del haz S con respecto al R, y de aquí el desplazamiento instantáneo de la superficie.

Cualquiera de los clásicos interferómetros utilizados en óptica es viable. En particular nos referiremos a los tipos de división de haz, como el de Michelson (Fig. 18) y el de Mach-Zender (Fig. 19).

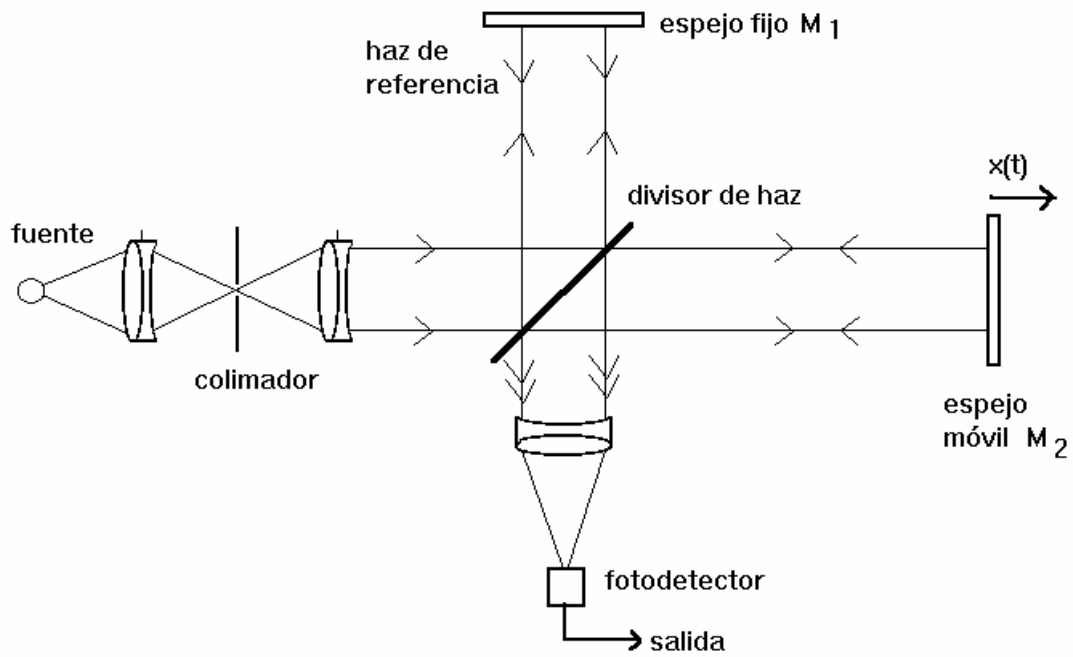


Figura 18

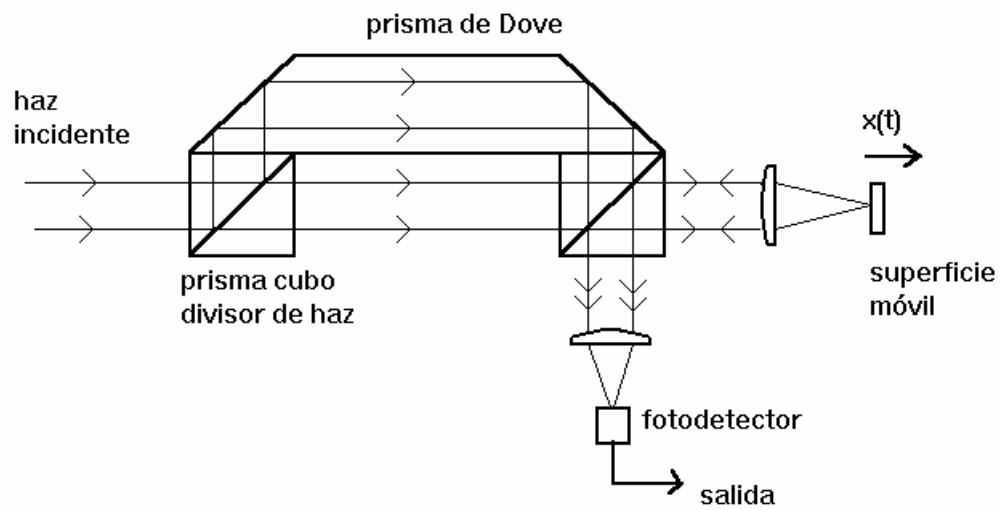


Figura 19

El Mach-Zender de la Fig. 19 construido con dos prismas cubos divisores de haz y un prisma de Dove resulta sumamente compacto y estable, al carecer de partes móviles.

Otra diferencia entre ambos es que en la Fig. 19 el haz lector es enfocado sobre un punto de la superficie (del tamaño de la mancha de difracción), lo cual conduce a una alta resolución lateral en el estudio del movimiento de la superficie. Esta focalización es imprescindible cuando la superficie móvil no es rígida (p. ej. una lámina elástica), de forma que puntos próximos pueden moverse con diferente fase.

En cualquier caso, la deducción de la intensidad resultante en el fotodetector se hace de forma similar.

Supongamos un haz plano de luz de frecuencia ω incidente sobre el divisor de haz de la Fig. 18 (o sobre el primer divisor de la Fig. 19) de la forma $E_0 e^{-i\omega t}$.

Estando en reposo la superficie bajo observación, el haz de referencia recorre una distancia total L_R hasta el fotodetector, mientras que el otro haz (llamado el de la señal) recorre una distancia total L_S hasta el mismo.

En estas condiciones, los haces de referencia y de la señal tendrán corrimientos de fase respectivos dados por

$$\Phi_R = \frac{2\pi}{\lambda} L_R, \quad \Phi_S = \frac{2\pi}{\lambda} L_S, \quad (134)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el medio considerado (el aire).

Supongamos que el haz incidente se divide en partes iguales de amplitud $E_0 / 2$ cada uno y ninguno tiene pérdidas en el camino. Esto generalmente no es así porque la superficie bajo estudio puede no ser especular, o porque existen otros divisores de haz en el camino (como en el Mach-Zender de la Fig. 19) que desvían parte de la luz. Pero en cualquier caso, esto no es relevante a la teoría y reduce la complejidad de las ecuaciones. Interponiendo filtros en el camino del haz más intenso siempre se puede lograr que ambos haces tengan la misma amplitud al interferir, aunque menor que $E_0 / 2$.

Los campos ópticos de referencia y de señal que llagan juntos al detector serán entonces

$$E_R = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t + i\Phi_R), \quad E_S = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t + i\Phi_S). \quad (135)$$

Pero si la superficie en estudio está en movimiento, en el instante t en que incide la luz sobre ella se encontrará desplazada una distancia $x(t)$ desde su posición de equilibrio en el reposo. El recorrido total del haz de la señal será entonces $L_S + 2x(t)$ (el factor 2 es porque recorre $x(t)$ de ida y vuelta), y su fase será entonces $\Phi_S + 2kx(t)$, donde $k = 2\pi/\lambda$, y Φ_S es su fase en el equilibrio dada por (134). Resulta entonces que los campos ópticos que interfieren en el detector serán ahora

$$E_R = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t + i\Phi_R), \quad E_S = \frac{E_0}{2} \exp[-i\omega t + i\Phi_S + i2kx(t)]. \quad (136)$$

El campo óptico E sobre el detector lo obtenemos sumando ambas expresiones (136), que podemos escribir como

$$E = E_R + E_S = \frac{E_0}{2} \exp[i(-\omega t + \Phi_R)] [1 + \exp(i(\Phi_S - \Phi_R + 2kx))]. \quad (137)$$

Multiplicando (137) por su complejo conjugado obtenemos la intensidad luminosa sobre el fotodetector (proporcional a su salida de corriente o voltaje)

$$I(t) = 2I_0 [1 + \cos(\Phi_S - \Phi_R + 2kx(t))], \quad (138)$$

donde se ha puesto $I_0 = |E_0|^2/4$ como la intensidad que aporta cada haz por separado.

En la Figura 20 se muestra un gráfico de la intensidad luminosa I en función del desplazamiento x de la superficie, según (138).

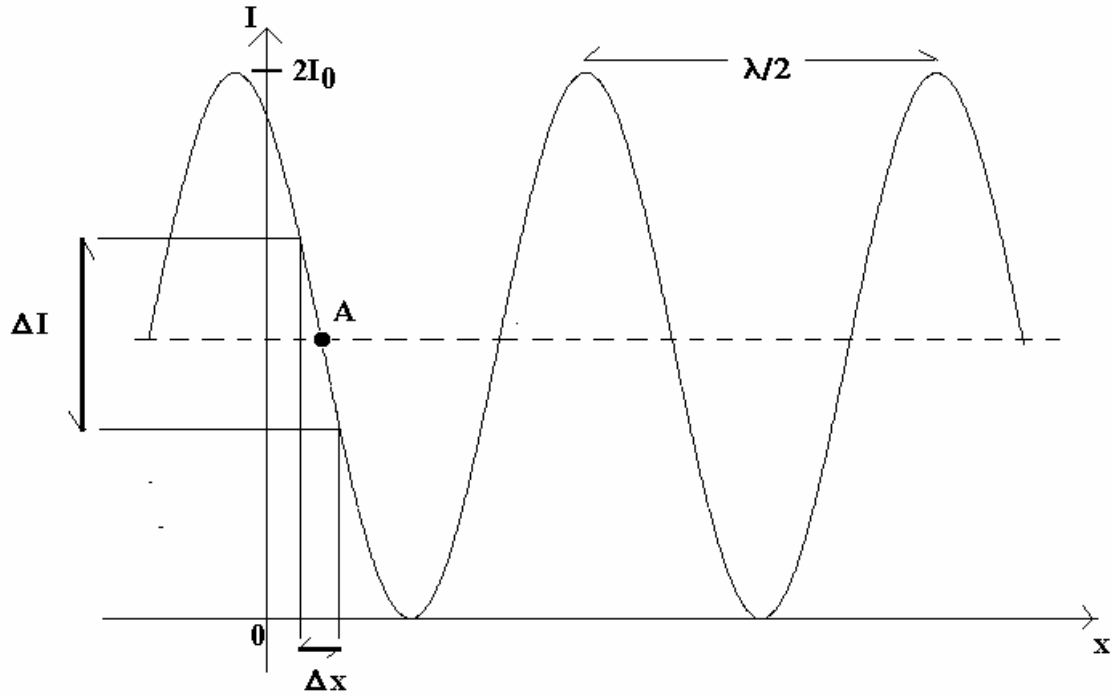


Figura 20

Para que la intensidad luminosa (y, por consiguiente, la señal de salida del fotodetector) sea una función univaluada del desplazamiento x de la superficie, es necesario que el sistema opere sobre una región monótona (creciente o decreciente) de la curva de la Fig. 20. Esto significa que el máximo desplazamiento Δx medible ha de ser menor que $\lambda/4$, que para el caso de luz láser de He-Ne significa unos 150 nm. Esta condición no es restrictiva ya que los desplazamientos producidos por campos ultrasónicos no sobrepasan los 80 ó 100 nm.

La mayor sensibilidad en la respuesta se obtiene operando en torno a los puntos de mayor pendiente de la gráfica de la Fig. 20, como por ejemplo el punto A. Esto implica elegir las longitudes L_S, L_R de los brazos del interferómetro de forma que se verifique

$$\Phi_S - \Phi_R = \frac{\pi}{2}, \quad (139)$$

en la (138), la cual resulta entonces

$$I(t) = 2I_0[1 - \sin(2kx(t))]. \quad (140)$$

La condición (139) se logra experimentalmente variando micrométricamente alguna de las longitudes L_S ó L_R cuando la superficie no vibra ($x=0$ en (140)) mientras se lee la intensidad luminosa de salida. Cuando ésta toma su valor medio ($2I_0$) se está ante la condición buscada.

Para desplazamientos inferiores a 10 ó 20 nm, trabajando con la luz de He-Ne de unos 600 nm, se puede aproximar en seno por el ángulo en (140) sin error apreciable, obteniéndose entonces una relación lineal entre la señal de salida y el desplazamiento de la superficie vibrante, dada por

$$I(t) = 2I_0[1 - 2kx(t)], \quad (141)$$

que permite inmediatamente obtener la función $x(t)$ a partir de la $I(t)$ leída por el detector.

6.2.2. Interferómetros estabilizados.

En la teoría expuesta en el apartado anterior, hemos pasado por alto a propósito algunas dificultades experimentales considerables.

La principal de ellas es la fluctuación en el tiempo de la diferencia de fases $\Phi_S - \Phi_R$ en la (138) debido a variaciones en las longitudes L_S y L_R por vibraciones mecánicas inevitables en el ambiente.

El hecho es que la condición (139) no es ostensible experimentalmente, sino que debemos sustituirla por

$$\Phi_S - \Phi_R = \frac{\pi}{2} + \varepsilon(t), \quad (142)$$

donde $\varepsilon(t)$ es una función aleatoria en el tiempo, con media nula.

En tal caso, la (140) resulta

$$I(t) = 2I_0[1 - \sin(2kx(t) + \varepsilon(t))], \quad (143)$$

o en la aproximación de pequeños desplazamientos,

$$I(t) = 2I_0[1 - 2kx(t) - \varepsilon(t)], \quad (144)$$

pudiendo llegar la amplitud de las fluctuaciones a ser de igual o mayor orden que la de los desplazamientos que se desea medir.

La condición experimental (139) de máxima sensibilidad se expresa entonces como el valor esperado de (142),

$$\langle \Phi_S - \Phi_R \rangle = \frac{\pi}{2}. \quad (145)$$

Para eliminar estas fluctuaciones nos aprovechamos de la circunstancia de que son de bajas frecuencias (menores de 1kHz³⁰), en tanto que las frecuencias involucradas en la vibración a estudio son del orden de algunos MHz, por lo cual es posible separarlas electrónicamente mediante el uso del interferómetro estabilizado de Michelson³¹ (Fig. 21).

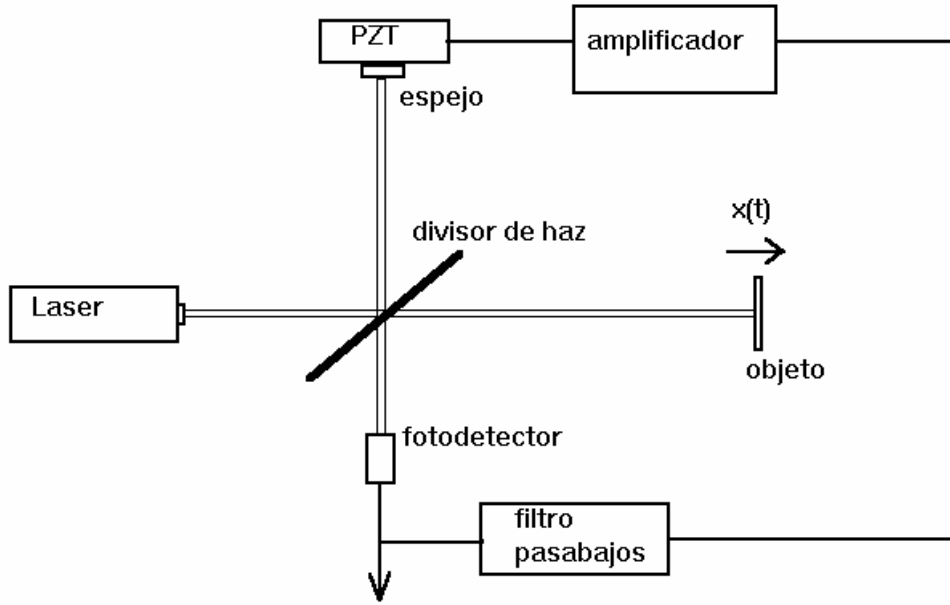


Figura 21

En este tipo de interferómetro, la señal de salida (144) se introduce a un filtro pasabajos que mantiene sólo el término de bajas frecuencias $\varepsilon(t)$. Este término se utiliza para manejar el espejo “fijo” del interferómetro (Fig. 21) a través de un amplificador y una cerámica PZT solidaria a aquél.

Esto determina que la fase de la luz del haz de referencia salga modulada, por lo cual su campo óptico, en lugar de la primera de (136), será de la forma

$$E_R = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t + i\Phi_R + i\varepsilon(t)). \quad (146)$$

Sustituyendo $\varepsilon(t)$ de (142) en (146) resulta

$$E_R = \frac{E_0}{2} e^{-i\pi/2} \exp(-i\omega t + i\Phi_S), \quad (147)$$

que al sumarle el campo del haz de la señal (segunda de (136)), obtenemos un campo total

$$E = E_R + E_S = \frac{E_0}{2} \exp[i(-\omega t + \Phi_S)] [-i + \exp(i2kx)]. \quad (148)$$

Tomando el cuadrado del módulo de (148) obtenemos una intensidad luminosa sobre el fotodiodo de la forma

$$I(t) = 2I_0 [1 - \sin(2kx(t))], \quad (149)$$

que reproduce exactamente el resultado (140) obtenido en ausencia total de fluctuaciones.

6.3. *Interferometría heterodyna.*

6.3.1. Teoría.

6.3.1.1. Óptica.

Otro método para eliminar las fluctuaciones de fase $\Phi_S - \Phi_R$ debida a las fluctuaciones en las diferencias de camino $L_S - L_R$ entre los brazos del interferómetro, es el corrimiento en la frecuencia de alguno (o ambos) de los haces previo a su interferencia. Esto se obtiene interponiendo un modulador acusto-óptico (MAO), tal como una celda de Bragg, en el camino de uno de los haces luminosos.

De acuerdo a lo visto en el apartado 4.4, si la luz incidente tiene una frecuencia ω y el MAO es manejado con una frecuencia Ω_B , el haz difractado según el ángulo de Bragg tendrá una frecuencia $\omega + \Omega_B$, donde Ω_B normalmente está entre unos 40 y 100 MHz.

De los varios tipos de interferómetros heterodynos que se pueden implementar, analizaremos el Mach-Zender desarrollado por Dieulesaint y Royer^{32, 33} en el Laboratoire d'Acoustoélectricité de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. La Figura 22 presenta un esquema del mismo.

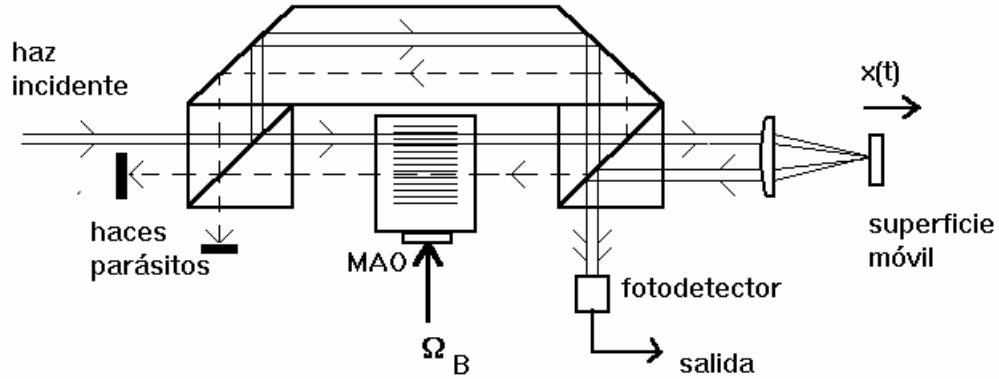


Figura 22

El haz de referencia de frecuencia ω que llega al fotodiodo no pasa por el modulador acusto-óptico y su campo óptico es

$$E_R = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t + i\Phi_R), \quad (150)$$

donde su corrimiento de fase Φ_R está dado por su camino óptico según (134).

El haz de la señal pasa por el MAO y sale con una frecuencia $\omega + \Omega_B$. Su corrimiento de fase se debe al camino óptico desde el primer divisor de haz al detector, más el producido por la vibración $x(t)$ del punto sondeado,

$$E_S = \frac{E_0}{2} \exp(-i\omega t - i\Omega_B t + i\Phi_S + i2kx), \quad (151)$$

donde k es el número de onda de la luz.

En (150) y (151) se han ajustado las intensidades (mediante filtros que no aparecen en la Fig. 22) para que cada haz por separado aporte la misma amplitud $E_0/2$ sobre el fotodetector.

La suma de (150) y (151) produce el campo de interferencia sobre el detector,

$$E = \frac{E_0}{2} e^{i(-\omega t + \Phi_R)} [1 + \exp(-i\Omega_B t + i\Delta\Phi + i2kx(t))], \quad (152)$$

donde $\Delta\Phi = \Phi_S - \Phi_R$.

De (152) resulta que la intensidad luminosa es

$$I(t) = 2I_0 [1 + \cos(2kx(t) - \Omega_B t + \Delta\Phi)]. \quad (153)$$

Como ya se mencionó, la magnitud $\Delta\Phi$ fluctúa en el tiempo. Imponiéndole las mismas condiciones de (142) para ubicarnos en el mejor punto de operación (punto A de la Fig. 20), la (153) resulta

$$I(t) = 2I_0 [1 - \sin(2kx(t) - \Omega_B t + \varepsilon(t))]. \quad (154)$$

Quitando la componente de continua en (154) tenemos

$$i(t) = -\frac{I(t) - 2I_0}{2I_0} = \sin(2kx(t) - \Omega_B t + \varepsilon(t)). \quad (155)$$

Supongamos primeramente que la superficie móvil de la Fig. 22 es manejada con una vibración armónica de la forma

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad (156)$$

con lo cual (155) resulta

$$i(t) = \sin(2kx_0 \sin(\Omega t + \varphi) - \Omega_B t + \varepsilon(t)). \quad (157)$$

Tomando en cuenta la expansión (58) podemos escribir (157) como

$$i(t) = J_{-1}(2kx_0) \sin[(\Omega + \Omega_B)t + \varphi - \varepsilon(t)] + J_0(2kx_0) \sin[-\Omega_B t + \varepsilon(t)] + J_1(2kx_0) \sin[(\Omega - \Omega_B)t + \varphi + \varepsilon(t)] + \text{terminos en } J_{\pm n}(2kx_0) \text{ con } n \geq 2 \quad (158)$$

Debido a la aproximación para z pequeño de las funciones de Bessel³⁴

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n n!}, \quad (159)$$

si $kx_0 \ll 1$ como es usual, podemos despreciar los términos en $J_{\pm n}(2kx_0)$ en (158) para $n \geq 2$. Además, en las mismas condiciones utilizamos las aproximaciones

$$J_0(2kx_0) \approx 1, \quad J_{\pm 1}(2kx_0) \approx \pm kx_0, \quad (160)$$

por lo cual (158) resulta

$$i(t) = -kx_0 \sin[(\Omega + \Omega_B)t + \varphi - \varepsilon(t)] + \sin[-\Omega_B t + \varepsilon(t)] + kx_0 \sin[(\Omega - \Omega_B)t + \varphi + \varepsilon(t)] \quad (161)$$

donde distinguimos tres componentes de diferentes frecuencias, que abreviaremos como

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -kx_0 \sin[(\Omega + \Omega_B)t + \varphi - \varepsilon(t)] \\ i_2(t) &= \sin[-\Omega_B t + \varepsilon(t)] \\ i_3(t) &= kx_0 \sin[(\Omega - \Omega_B)t + \varphi + \varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (162)$$

6.3.1.2. Electrónica de detección.

La idea central del método heterodyno radica en la posibilidad de separar electrónicamente las tres señales que conforman (161). Si se suman las fases de i_1 , i_3 se elimina el término de las fluctuaciones $\varepsilon(t)$, obteniéndose una señal proporcional a la oscilación (156) del punto sondeado.

Para ver cómo podemos hacer esto, consideremos el espectro de frecuencias de la señal (161), comenzando por el espectro de $i_2(t)$ en (162).

Como las fluctuaciones verifican la condición $\varepsilon(t) \ll 1$, podemos poner

$$i_2(t) \approx -\sin(\Omega_B t) + \varepsilon(t) \cos(\Omega_B t). \quad (163)$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos miembros de (163) obtenemos

$$\tilde{i}_2(\omega) = \frac{\delta(\omega - \Omega_B) - \delta(\omega + \Omega_B)}{2i} + \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega - \Omega_B) + \tilde{\varepsilon}(\omega + \Omega_B)}{2}, \quad (164)$$

donde ω es la frecuencia, δ es el delta de Dirac, $\tilde{i}, \tilde{\varepsilon}$ son las transformadas de i, ε respectivamente.

Para $\omega > 0$, y prescindiendo del punto de discontinuidad $\omega = \Omega_B$, de (164) resulta

$$\tilde{i}_2(\omega > 0)_{\omega \neq \Omega_B} = \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega - \Omega_B)}{2}. \quad (165)$$

Como la frecuencia Ω_B de la celda de Bragg es del orden de 70 MHz, y las fluctuaciones ε tienen frecuencias menores que $\Delta\omega \approx 1 \text{ kHz}$ ³³, el espectro $|\tilde{i}_2(\omega)|$ de $i_2(t)$

es proporcional al espectro del ruido $|\tilde{\varepsilon}(w)|$ pero centrado en la frecuencia Ω_B , y tiene una forma como la indicada en la Fig. 23.

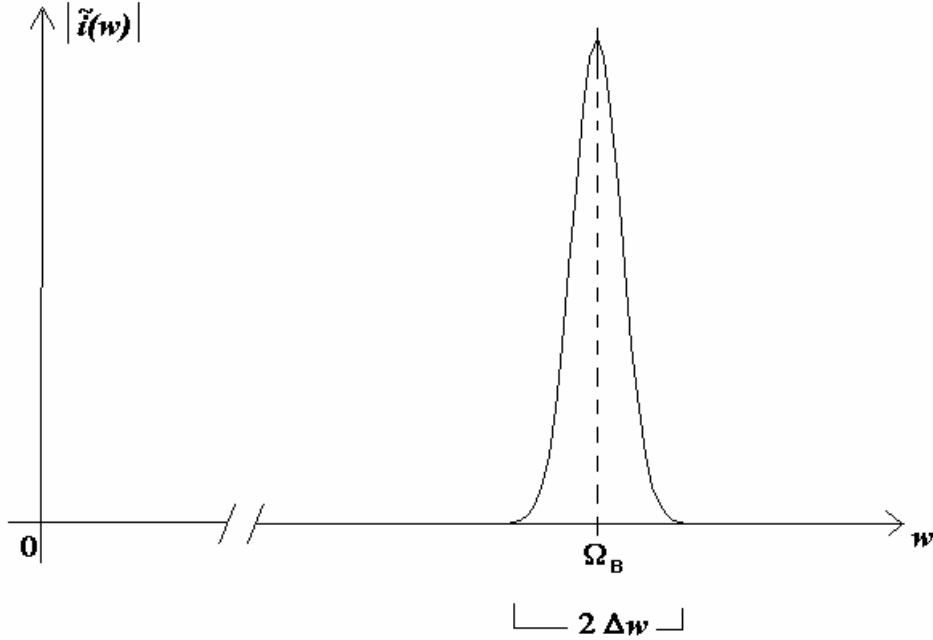


Figura 23

Si calculamos las transformadas de Fourier de i_1 , i_3 en (162) siguiendo los mismos pasos efectuados para calcular la transformada de i_2 , obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{i}_1(w > 0)_{w \neq \Omega_B + \Omega} &= kx_0 \frac{\tilde{\varepsilon}[w - (\Omega + \Omega_B)]}{2} e^{-i\varphi}, \\ \tilde{i}_3(w > 0)_{w \neq \Omega_B - \Omega} &= kx_0 \frac{\tilde{\varepsilon}[w - (\Omega - \Omega_B)]}{2} e^{i\varphi}.\end{aligned}\tag{166}$$

Los espectros de $|\tilde{i}_1|$, $|\tilde{i}_3|$ también son proporcionales al del ruido $|\tilde{\varepsilon}(w)|$ pero centrados, respectivamente, en $\Omega + \Omega_B$ y en $\Omega_B - \Omega$. La amplitud de cada uno es kx_0 como se ve en (166).

En la Fig. 24 mostramos los espectros de las tres señales (162). Obsérvese que si la frecuencia de la vibración en estudio es mayor que el ancho de banda de las fluctuaciones

($\Omega > 2 \Delta\omega$) los tres espectros no se solapan, por la cual el espectro de la señal total $i(t)$ obtenida en el detector es como el de la Fig. 24. Esto es el caso usual, ya que el ancho de banda de las fluctuaciones del ruido no supera algunos kHz, en tanto que las frecuencias de operación de los transductores de ultrasonido es de algunos MHz (obviamente, la Fig. 24 no está a escala en el eje de frecuencias).

Esto permite una inmediata determinación de la amplitud x_0 de las vibraciones, luego de leer la señal $i(t)$, obtener su espectro y normalizarlo a su valor máximo.

Sin embargo aún no se obtiene la fase φ de la vibración (156). Para obtener toda la información de la vibración se procesa la señal obtenida $i(t)$ electrónicamente, con un dispositivo como el indicado en la Fig. 25.

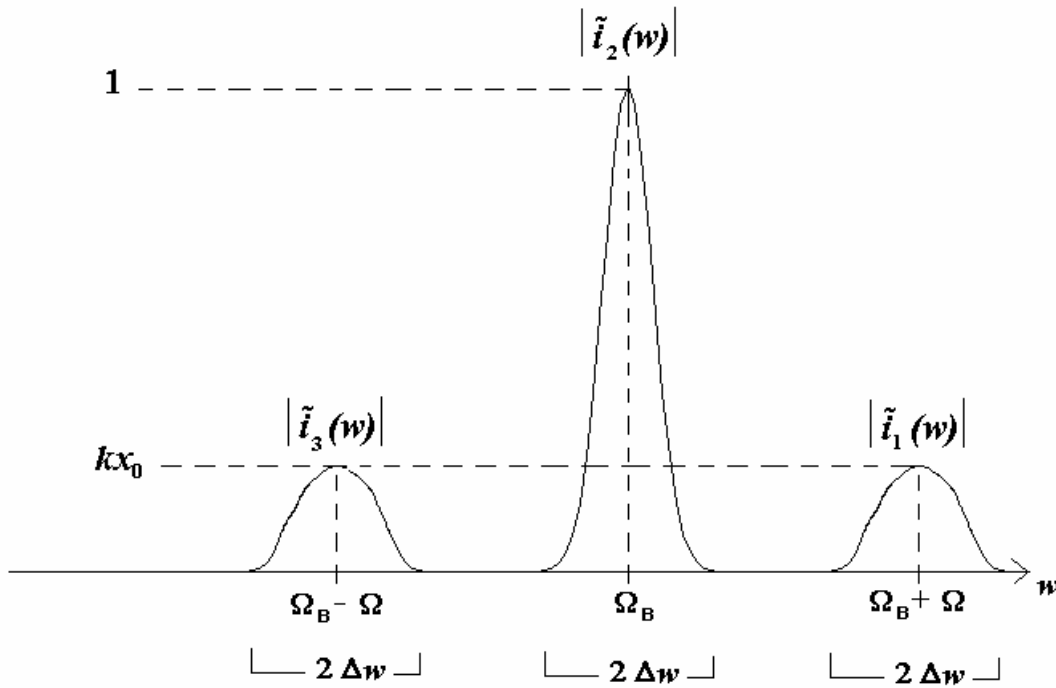


Figura 24

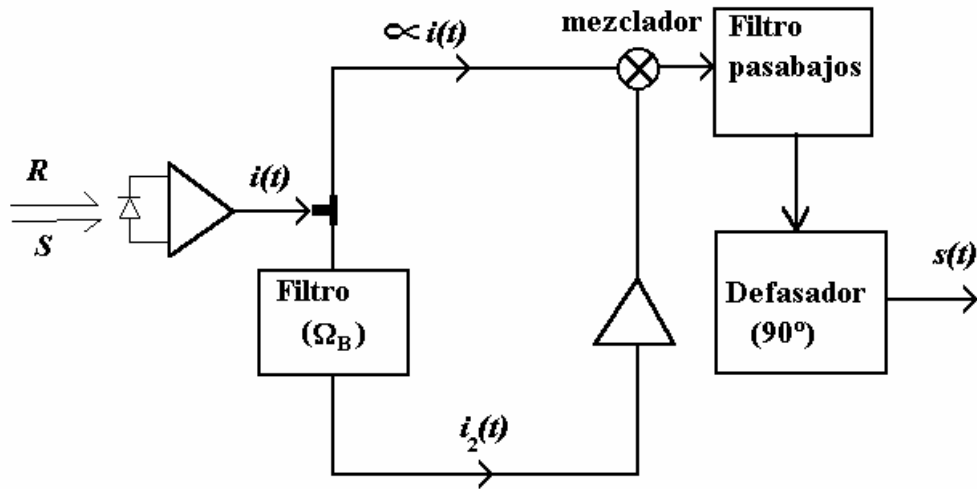


Figura 25

La señal leída por el fotodiodo, que es proporcional a $i(t)$ en (161), se divide en dos y una parte es filtrada por un filtro centrado en la frecuencia de Bragg Ω_B , con un ancho de banda suficiente (mayor que $2 \Delta\omega$) como para dejar pasar las frecuencias que componen las fluctuaciones $\varepsilon(t)$ (algunos kHz).

Esto selecciona solamente la componente $i_2(t)$ dada en (162), en tanto se cumpla la condición de la Fig. 24. Esto es, que no exista solapamiento entre los espectros de las tres componentes de $i(t)$ ($\Omega > 2 \Delta\omega$).

Luego la parte de la señal original $i(t)$ que continúa por la rama superior de la Fig. 25 se multiplica con $i_2(t)$ en el mezclador, dando lugar a una señal proporcional a

$$i(t) \cdot i_2(t) = -\frac{1}{2} - kx_0 \cos(\Omega t + \varphi) + \text{terminos en } (2\Omega_B \pm \Omega). \quad (167)$$

Si se verifica, como es usual, que $\Omega < 2\Omega_B$ (algunos MHz frente a más de 100 MHz), el filtro pasabajos a continuación del mezclador de la Fig. 25 se ocupa de cortar los

términos de alta frecuencia en (167), con tal de que posea una frecuencia de corte menor que Ω_B . Finalmente, el desfasador en 90° produce una señal de salida de la forma

$$s(t) \propto -\frac{1}{2} + kx_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad (168)$$

con lo cual se restituye completamente la amplitud y fase de la vibración (156) en estudio.

La importancia de este sistema electrónico de detección de la Fig. 25, llamado “detección de banda ancha”^{32, 33}, es su aplicación para la detección de vibraciones transitorias de la superficie, no monocromáticas como la (156).

Para ver cómo hace esto, obsérvese que los espectros de las componentes de $i(t)$ en la Fig. 24 están igualmente ensanchados por el ancho de banda $2\Delta\omega$ del ruido. Si la vibración de la superficie es un transitorio, contendrá una suma de términos (156) con distintas frecuencias que ocuparán un ancho de banda $2\Delta\Omega$. Sin embargo, este hecho no afecta el ancho de la banda central de la Fig. 24 ya que contiene solamente la portadora Ω_B y el espectro del ruido $\mathfrak{A}(t)$, ensanchando entonces las bandas laterales que contienen las frecuencias Ω , obteniéndose un espectro como el de la Fig. 26.

Las bandas laterales se encuentran centradas en Ω_C , que es la frecuencia central del espectro de la perturbación $x(t)$, y tienen su ancho de banda $\Delta\Omega$.

Véase en la Fig. 26 que si se cumple la condición

$$\Omega_C - \Delta\Omega > \Delta\omega, \quad (169)$$

los espectros no se solapan. Por lo tanto, se puede eliminar la banda central con el filtro de banda centrado en Ω_B de la Fig. 25, y todo el análisis hecho anteriormente para régimen monocromático vale para cualquier transitorio. La señal de salida del sistema de la Fig. 25 será entonces

$$s(t) \propto -\frac{1}{2} + kx(t), \quad (170)$$

cualquiera sea la función $x(t)$ de la vibración de la superficie.

Los transductores utilizados tienen una frecuencia central entre 1 y 2 MHz, en tanto que el semiancho de banda $\Delta\omega$ del ruido es del orden de 1 kHz, por la que la condición (169) puede considerarse ampliamente satisfecha.

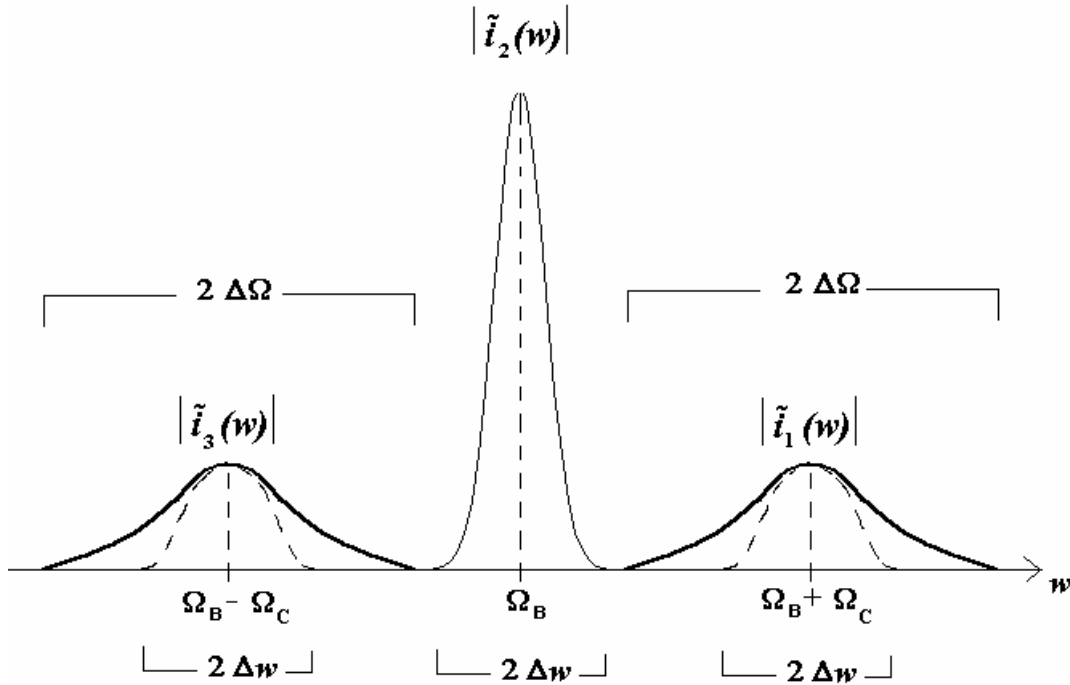


Figura 26

6.3.1.3. Influencia de la membrana vibrante.

La sonda interferométrica heterodyna utilizada por Dieulesaint y Royer^{32, 33, 35} para el estudio de campos acústicos en el seno de un fluido, utiliza una membrana circular tensa de papel Mylar como superficie reflectora del haz de luz sonda. Se requiere entonces un análisis de la perturbación que dicha membrana produce en el campo de presiones que se pretende medir.

La Fig. 27 muestra un esquema de la membrana circular de radio a ubicada en el plano $z=0$, centrada en el eje de un transductor de ultrasonido.

Sea $\sigma = \rho h$ la densidad superficial de masa de la membrana, donde ρ es su densidad volumétrica de masa y h su espesor. Sea T la tensión a que está sometida la membrana, $p(x, y, 0_-, t)$ la presión acústica a la izquierda de la membrana, $p(x, y, 0_+, t)$ la presión acústica a su derecha, y $u(x, y, t)$ su desplazamiento del plano $z=0$.

La aceleración de la membrana está determinada por las fuerzas de la tensión superficial según la curvatura de la membrana, y por las de presión a la izquierda y derecha de la misma, según la ecuación³⁶

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, 0_-, t) - p(x, y, 0_+, t). \quad (171)$$

La presión $p(x, y, 0_+, t)$ a la derecha de la membrana es la presión del campo acústico radiado por ella. Siendo, por lo tanto³⁷

$$p(x, y, 0_+, t) = Z v(x, y, t) \cong \rho_0 c_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (172)$$

donde Z es la impedancia acústica específica y v es la velocidad del fluido inmediatamente a la derecha de la membrana (igual a la velocidad de la membrana). Se ha considerado en (172) la impedancia igual a la de ondas planas, $\rho_0 c_0$, siendo ρ_0 la densidad del fluido y c_0 la velocidad de propagación de las ondas en él.

Si suponemos además que el campo acústico tiene simetría cilíndrica alrededor del eje z , podemos expresar (171) en coordenadas polares. Sustituyendo (172) en (171) y reordenando términos, ésta resulta

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho_0 c_0 \frac{\partial u}{\partial t} = p(r, t), \quad (173)$$

donde se ha puesto $p(x, y, 0_-, t) = p(r, t)$.

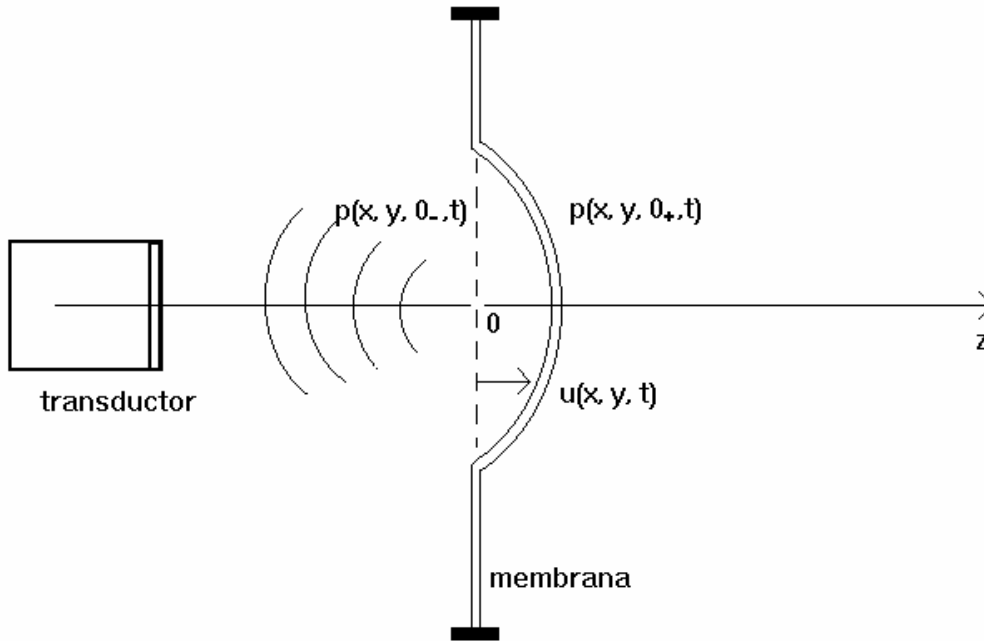


Figura 27

Para una membrana circular de radio a fija en su borde, que vibra libremente ($p(r, t) = 0$) y sin radiar ($\rho_0 c_0 \approx 0$) las soluciones con simetría circular son una superposición de funciones de Bessel de orden cero³⁸ $J_0(q_n r/a)$, donde q_n es el n -ésimo cero de $J_0(x)$.

Ahora consideramos las vibraciones forzadas de la membrana y con amortiguamiento por radiación, Ec. (173). Haciendo

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad \eta = \frac{\rho_0 c_0}{\sigma}, \quad (174)$$

que son, respectivamente, la velocidad de propagación de las perturbaciones transversales en la membrana y el coeficiente de amortiguamiento de la misma, ensayamos una solución de (173) en la forma³⁵

$$u(r, t) = \sum_n J_0\left(q_n r/a\right) F_n(t), \quad (175)$$

que cumple la condición de borde $u(a, t)=0$ para todo t .

Al sustituir (175) en (173), y considerando que las funciones de Bessel satisfacen la ecuación para oscilaciones libres sin amortiguamiento, obtenemos una ecuación para las funciones del tiempo

$$\sum_n \left[F_n''(t) + 2\eta F_n'(t) + \left(\frac{q_n c}{a}\right)^2 F_n(t) \right] J_0\left(\frac{q_n r}{a}\right) = \frac{p(r, t)}{\sigma}. \quad (176)$$

Tomando transformadas de Laplace de (176), que denotaremos como

$$L\{f(t)\}_s = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (177)$$

la (176) se transforma en

$$\sum_n \left[s^2 + 2\eta s + \left(\frac{q_n c}{a}\right)^2 \right] L\{F_n(t)\}_s J_0\left(\frac{q_n r}{a}\right) = \frac{1}{\sigma} L\{p(r, t)\}_s. \quad (178)$$

Utilizando la ortogonalidad de las funciones de Bessel³⁹

$$\int_0^a r J_0\left(q_n r/a\right) J_0\left(q_p r/a\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_1(q_n)]^2 \delta_{np}, \quad (179)$$

podemos despejar $L\{F_n(t)\}_s$ de (178):

$$L\{F_n(t)\}_s = \frac{2}{a^2 \sigma [J_1(q_n)]^2} \frac{\int_0^a L\{p(r,t)\}_s J_0\left(q_n \frac{r}{a}\right) r dr}{s^2 + 2\eta s + \left(q_n \frac{c}{a}\right)^2}. \quad (180)$$

Si suponemos que la presión es un δ -impulso en el tiempo $p(r,t)=p(r) \cdot \delta(t)$, la función $F_n(t)$ será la n -ésima componente de la respuesta impulsional de la membrana, con lo que (180) queda

$$L\{F_n(t)\}_s = \frac{2}{a^2 \sigma [J_1(q_n)]^2} \frac{\int_0^a p(r) J_0\left(q_n \frac{r}{a}\right) r dr}{s^2 + 2\eta s + \left(q_n \frac{c}{a}\right)^2}. \quad (181)$$

De la inversión de (181) resulta

$$F_n(t) = \frac{e^{-\eta t} (e^{\omega_n t} - e^{-\omega_n t})}{\omega_n a^2 \sigma [J_1(q_n)]^2} \int_0^a p(r) J_0\left(q_n \frac{r}{a}\right) r dr, \quad (182)$$

donde se ha puesto

$$\omega_n = \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{c}{a} q_n\right)^2}. \quad (183)$$

Debido al alto amortiguamiento η del agua, los valores de ω_n en (183) son reales hasta elevados órdenes del modo n . De hecho, hasta un N máximo tal que $\eta > q_N \frac{c}{a}$. De acuerdo con (174) esto implica

$$q_N < \frac{\rho_0 c_0 a}{c \sigma}. \quad (184)$$

En las medidas efectuadas por Royer *et al*³⁵ se utilizó una membrana de densidad $\rho \approx 1400 \text{ kg/m}^3$ de espesor $h \approx 3 \text{ }\mu\text{m}$ y radio $a \approx 4 \text{ cm}$, bajo una tensión $T \approx 1000 \text{ N/m}$, e inmersa en agua donde $\rho_0 \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ y $c_0 \approx 1500 \text{ m/s}$. Estos datos arrojan para $c = \sqrt{T/\sigma} \approx 500 \text{ m/s}$, por lo cual (184) resulta $q_N < 4 \times 10^4$, lo que ubica a N como del orden de 10^4 .

Introduciendo (182) en (175) obtenemos la respuesta impulsional del sistema

$$h(r, t) = \sum_{n=1}^N J_0(q_n r/a) \frac{e^{-\eta t} (e^{\omega_n t} - e^{-\omega_n t})}{\omega_n a^2 \sigma [J_1(q_n)]^2} \int_0^a p(r) J_0(q_n r/a) r dr, \quad (185)$$

por la que, ante una excitación arbitraria de presión de la forma $p(r, t) = p(r) \cdot f(t)$ el desplazamiento $u(r, t)$ de la membrana es la convolución de la respuesta impulsional (185) con la dependencia del tiempo $f(t)$,

$$u(r, t) = h(r, t) \otimes f(t), \quad (186)$$

y su velocidad es

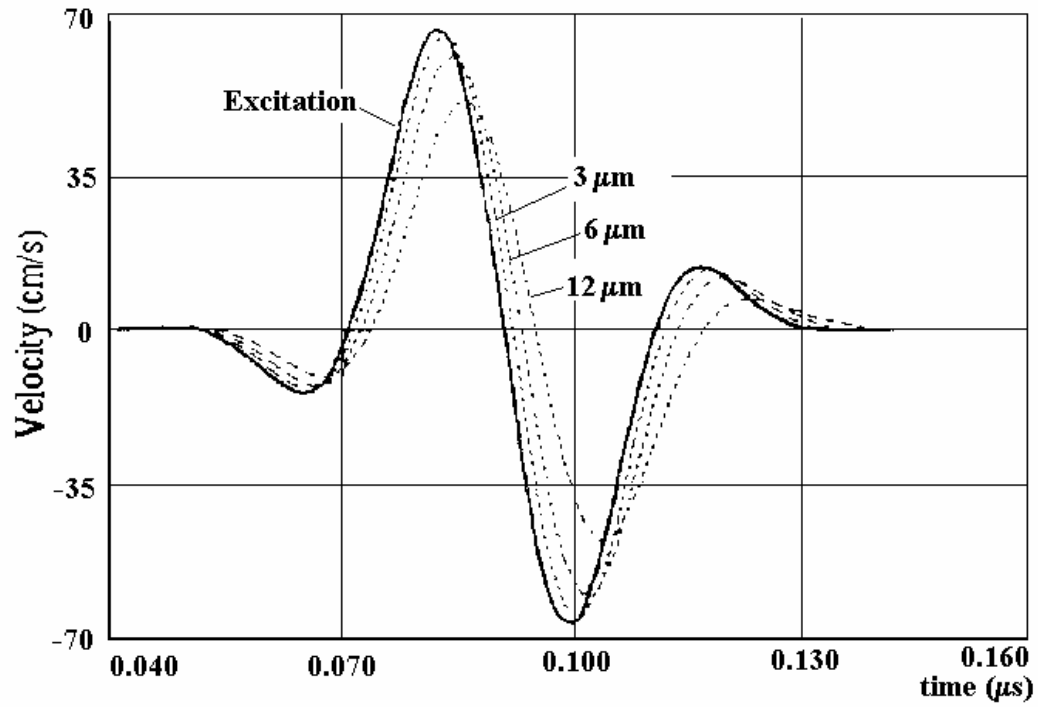
$$v(r, t) = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} \otimes f(t). \quad (187)$$

La influencia de la membrana en la lectura del campo $p(r, t)$ se evalúa a partir de la (187). Para ondas planas o quasi-planas la impedancia Z es real, por lo que, según (172), la presión y la velocidad de las partículas del medio están en fase. Para que la membrana no afecte el campo de presiones, su velocidad (187) debe coincidir con la del medio en el que se propagan las ondas. Por lo tanto, también debe de estar en fase con la presión.

Royer y Casula³⁵ han efectuado cálculos numéricos y medidas experimentales con membranas de diferentes espesores, obteniendo los resultados mostrados en las Figs. 28 y 29.

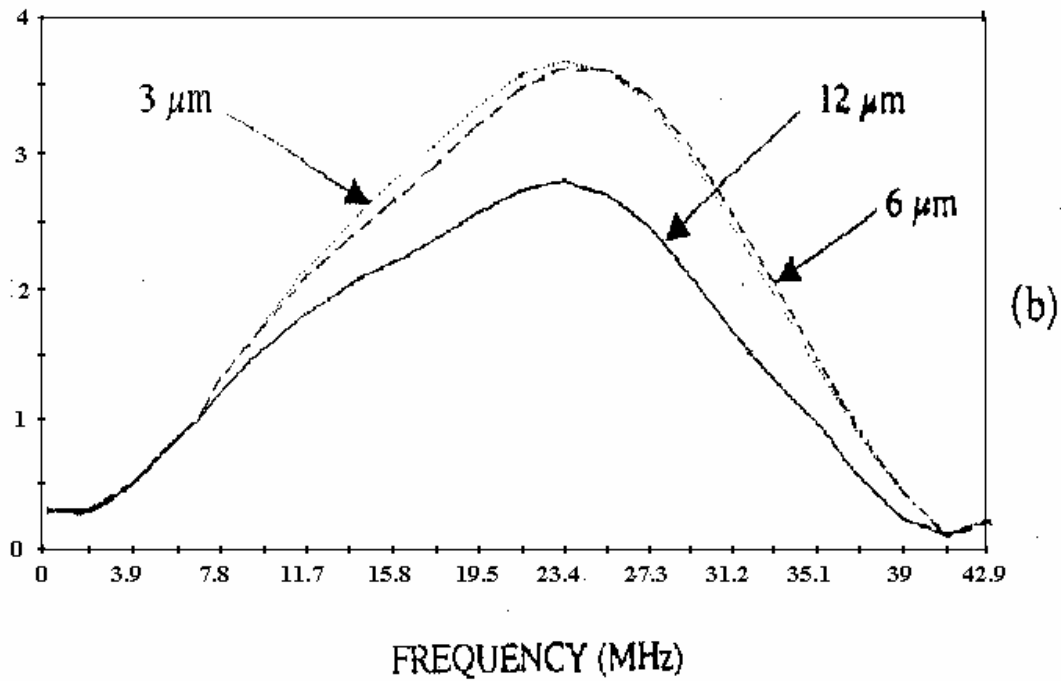
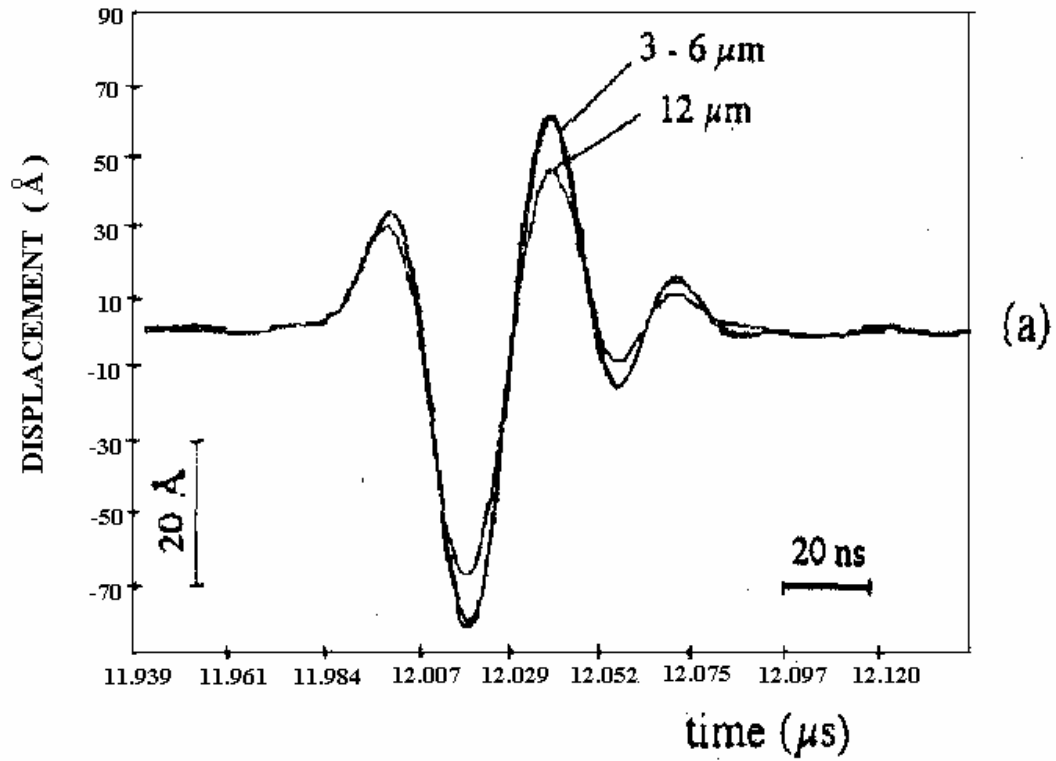
La Fig. 28 es resultado de un cálculo numérico que muestra la respuesta temporal en el centro de la membrana, a un pulso de presión de 10^6 Pa y con frecuencia central de 25 MHz. El perfil del haz ultrasónico se ha supuesto gaussiano (ancho característico $b=0.15$ mm). Las respuestas de membranas de varios espesores ($h=3, 6, 12$ μm) indican que, hasta frecuencias de 25 MHz, una membrana de Mylar de 3 μm de espesor sigue bastante bien el movimiento de las partículas del fluido. Los parámetros de la membrana son $\rho \approx 1400$ kg/m^3 , $T \approx 1000$ N/m.

La Fig. 29 muestra resultados experimentales por ellos obtenidos con la sonda interferométrica heterodyna. Los desplazamientos mecánicos de la membrana se obtuvieron en el foco de un transductor comercial de 25 MHz (Panametrics V324). Se muestran los desplazamientos en el tiempo y la respuesta en frecuencias, donde se observa que las membranas de 3 y 6 μm prácticamente no se distinguen. Sin embargo, como se puede predecir del análisis, frecuencias mayores de 10 MHz no son satisfactoriamente transmitidas a través de la membrana de 12 μm .



Respuesta temporal calculada para membranas de Mylar de espesores 3, 6 y 12 μm , inmersas en agua y excitadas por un pulso de presión (línea llena) de frecuencia central de 25 MHz. La tensión mecánica de las películas es $T=1 \text{ kN/m}$. (D. Royer, O. Casula).

Figura 28



Desplazamientos mecánicos en el tiempo (a), y respuestas en frecuencias (B), medidas por el sistema óptico, en el foco de un transductor de 25 MHz. Tres membranas de espesores 3, 6 y 12 μm de espesor han sido testadas. (D. Royer, O. Casula):

Figura 29

6.3.1.4. *Perturbación acusto-óptica*

En todo sistema interferométrico que lea las vibraciones de una superficie inmersa en el agua, es necesario considerar las variaciones de fase adicionales debido a que el haz sonda viaja en el seno del fluido (perturbaciones acusto-ópticas).

En la Fig. 30 vemos que el haz sonda penetra por el punto E al interior del agua, se refleja en un punto de la membrana desplazada $u(t)$ en ese instante y sale por el punto S, siendo L la distancia entre la ventana óptica y la membrana en equilibrio.

La variación total del haz entre la entrada E y la salida S está dada por dos aportes. Por un lado, el retardo de fase $\Delta\Phi_1$ debido al desplazamiento u de la superficie (como si la situación fuera estática) en un medio de índice n_0 (el del agua en reposo),

$$\Delta\Phi_1 = -2k n_0(L - u), \quad (188)$$

donde k es el número de onda de la luz en el vacío.

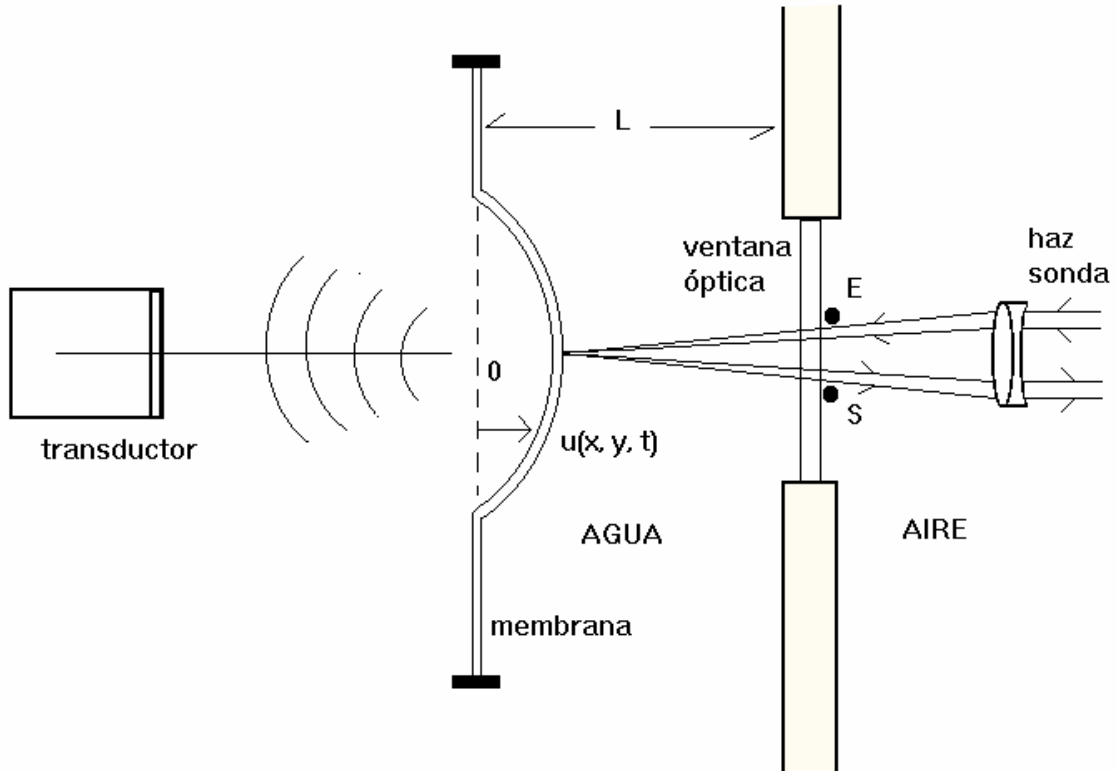


Figura 30

Por otra parte, hay un retardo adicional $\Delta\Phi_2$ en la fase debida a la interacción acusto-óptica en el trayecto $L-u$ por la variación $\Delta n(x, y, z, t)$ del índice de refracción a causa de la perturbación del agua por las ondas mecánicas,

$$\Delta\Phi_2 = -2k \int_u^L \Delta n(x, y, z, t) dz, \quad (189)$$

donde z es la dirección de propagación del haz sonda (se desprecia el pequeño ángulo de inclinación introducido por la lente en la Fig. 21, que además introduce un corrimiento de fase uniforme).

Sumando (188) y (189) obtenemos el corrimiento total de fase $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi = -2k \int_{u(t)}^L \Delta n(x, y, z, t) dz - 2k n_0 (L - u(t)). \quad (190)$$

Dado que el término $2kn_0L$ introduce un corrimiento uniforme de la fase, lo podemos omitir de (190). Además, dada que $u(t) \ll L$ podemos considerar cero el límite inferior de integración. De forma que podemos expresar (190) como

$$\Delta\Phi = -2k \int_0^L \Delta n(x, y, z, t) dz + 2k n_0 u(t). \quad (191)$$

Recordando la expresión (52) para la variación del índice de refracción con la presión acústica $p(x, y, z, t)$, sustituimos esta expresión en (191) y obtenemos

$$\Delta\Phi = -2k \mu \int_0^L p(x, y, z, t) dz + 2k n_0 u(t), \quad (192)$$

donde $\mu = \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_s$ es el coeficiente piezo-óptico del agua.

Sea $\vec{\xi}(x, y, z, t)$ el vector desplazamiento del fluido a la derecha de la membrana en la Fig. 21. Entonces la presión en esa región está dada por⁴⁰

$$p(x, y, z, t) = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (193)$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido y c la velocidad de propagación de las ondas en su seno.

Por otra parte, en la consideración de ondas acústicas cuasi-planas viajando en la dirección z tenemos $\nabla \cdot \vec{\xi} \approx \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$, por lo que podemos escribir (193) como

$$p(x, y, z, t) = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial z}. \quad (194)$$

Al sustituir (194) en (192) y efectuar la integración, obtenemos

$$\Delta\Phi = 2k\mu\rho_0 c^2 [\xi_z(x, y, L, t) - \xi_z(x, y, 0, t)] + 2kn_0 u(t). \quad (195)$$

Si consideramos el origen $z=0$ en la posición de equilibrio de la membrana, es evidente que el desplazamiento $u(t)$ de la misma coincide con el desplazamiento longitudinal de las ondas acústicas $\xi_z(x, y, 0, t)$ inmediatamente a la derecha de la membrana en la Fig. 21. Además, consideraremos que el interior de la ventana óptica en $z=L$ no se mueve, lo que implica que $\xi_z(x, y, L, t)=0$. Estas condiciones determinan que (195) resulte

$$\Delta\Phi = 2k(n_0 - \mu\rho_0 c^2)u(t), \quad (196)$$

lo cual podemos escribir como

$$\Delta\Phi = 2kn_e u(t), \quad (197)$$

donde se ha definido un índice de refracción efectivo n_e en la forma

$$n_e = n_0 - \mu\rho_0 c^2. \quad (198)$$

El corrimiento de fase para el haz sonda cuando se refleja sobre la superficie inmersa en aire ($n=1$) es simplemente $2ku(t)$. De forma que (197) expresa que la interacción acusto-óptica se toma en cuenta simplemente sustituyendo el índice de refracción n_0 del agua por un índice de refracción efectivo dado por (198).

Considerando que el agua está a condiciones normales de presión y temperatura, tenemos $n_0 = 1.3289$, $\mu = 1.35 \times 10^{-10} \text{ Pa}$, $c = 1490 \text{ m/s}$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, por lo que (198) da $n_e \cong 1.03$, que es prácticamente el índice de refracción del aire. Este detalle es importante al momento de calibrar la sonda para medir desplazamientos. Significa que puede utilizarse tanto en agua como en aire sin alterar su calibración³⁵.

6.3.2. Resultados experimentales.

Los resultados experimentales que se muestran en este apartado fueron obtenidos por el autor de esta tesis en el Laboratoire d'Ondes et Acoustique de la École Supérieure de Physique et Chimie Industrielle de Paris (ESPCI), entre el 5/1/95 al 15/2/95, bajo la dirección del Prof. Daniel Royer y la colaboración de Olivier Casula.

El autor agradece la autorización del Prof. Royer para el uso de su sonda interferométrica heterodyna, la colaboración de O. Casula en las instrucciones de manejo de la misma, y el generoso recibimiento brindado por el Director del Laboratoire d'Ondes et Acoustique, Prof. Mathias Fink.

Se efectuó un relevamiento del campo emitido por tres transductores de ultrasonido construidos en nuestro Laboratorio (Montevideo). Un transductor PZT 100% y dos transductores piezo-composite: uno al 32% y otro al 42%.

Se relevó el campo cercano inmediato a cada transductor, colocando la membrana de Mylar (de 15 μm de espesor) de la Fig. 21 muy próximo al mismo (menos de 1 mm). Se leyó punto a punto la vibración de la membrana en un área de 36x36 mm centrada en el eje del transductor, en pasos de 0.5 mm.

El generador utilizado para manejar los transductores era un Sofranel que emitía pulsos de frecuencia central 100 MHz con un ancho de banda de 4 MHz. Cada adquisición consiste de 1024 puntos durante 1 μs , almacenados en forma de 2 bytes por punto.

Considerando el número de adquisiciones tomadas para efectuar el barrido espacial, resulta que la memoria utilizada para almacenar los datos de cada transductor es de 73 x 73 x 1024 x 2 bytes, del orden de 10.4 Mb.

A los efectos de ilustrar el método, mostraremos el relevamiento del campo del transductor piezocomposite al 42% de volumen de PZT. Por otra parte, servirá para comparar los resultados con el del método del campo oscuro (Sec. 7.2) implementado por nosotros para el estudio del mismo transductor. Se verá que ambos concluyen coincidentemente.

La Fig. 31 muestra la señal temporal leída por el fotodiodo proveniente de la región central de la membrana, y la Fig. 32 su espectro.

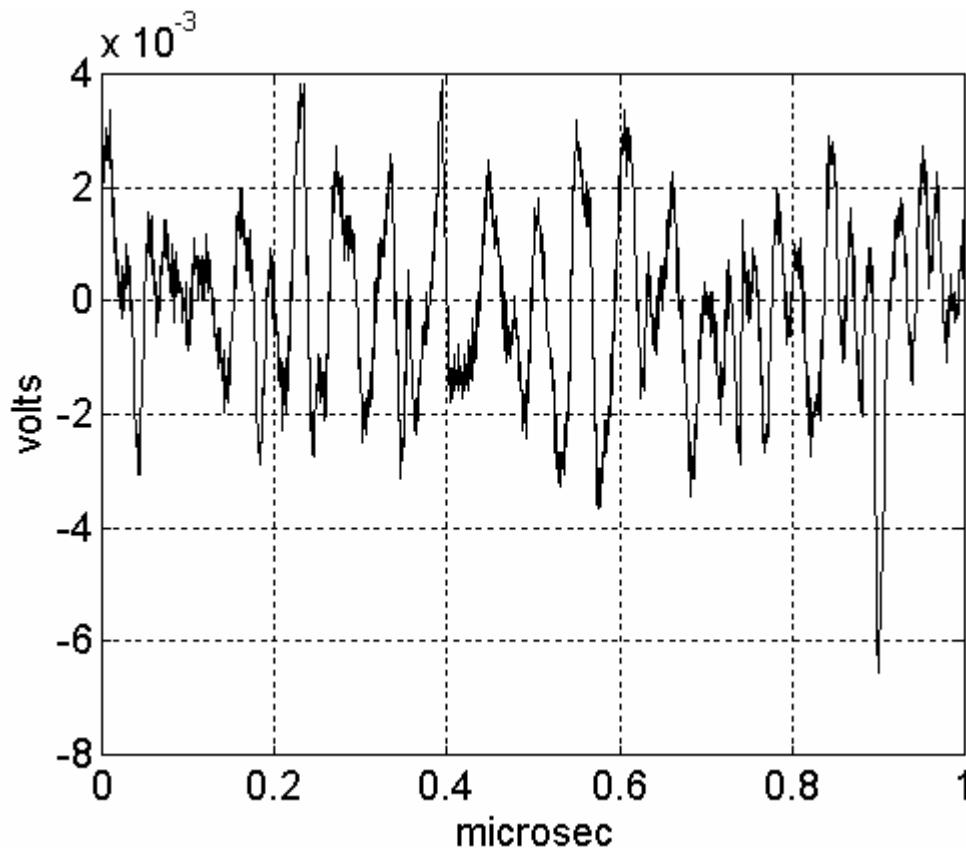


Figura 31

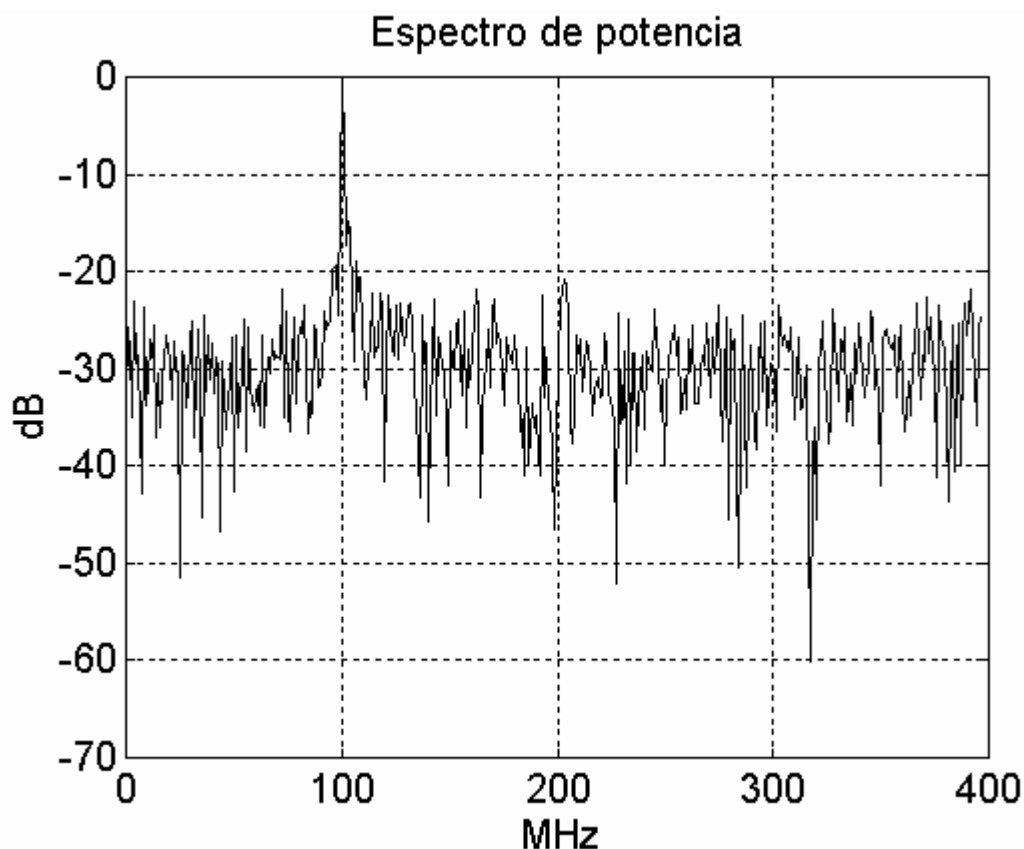


Figura 32

Se dispone de una serie de 1024 datos en el tiempo (una adquisición) como los de la Fig. 22 para cada uno de los $73 \times 73 = 5329$ puntos relevados, desde -18 mm hasta 18 mm en pasos de 0.5 mm para el eje x (horizontal) y para el eje y (vertical).

La cantidad de información, por tanto, es abundante y permite un estudio muy exhaustivo del movimiento de la membrana ante el campo acústico impulsional emitido por el transductor. De particular interés, a los efectos de su comparación con el método del campo oscuro (Sec. 7.2), resulta la presentación de las deformaciones instantáneas de la membrana (que se pueden obtener cada $1/1023 \mu s = 0.9775 \text{ ns}$) en escala de grises, de forma que la densidad de gris de la imagen sea proporcional al cuadrado del desplazamiento de la misma. Esto es proporcional a la intensidad instantánea del campo acústico.

La Fig. 33 muestra 4 imágenes correspondientes a intensidades en los instantes 0.22, 0.25, 0.28 y 0.31 μs . La Fig. 34 muestra intensidades en los instantes 0.34, 0.41 y

0.44 μs , así como la intensidad promediada durante todo el microsegundo que duró la adquisición.

La franja no excitada casi horizontal que atraviesa el diámetro de las imágenes corresponde al electrodo de conexión.

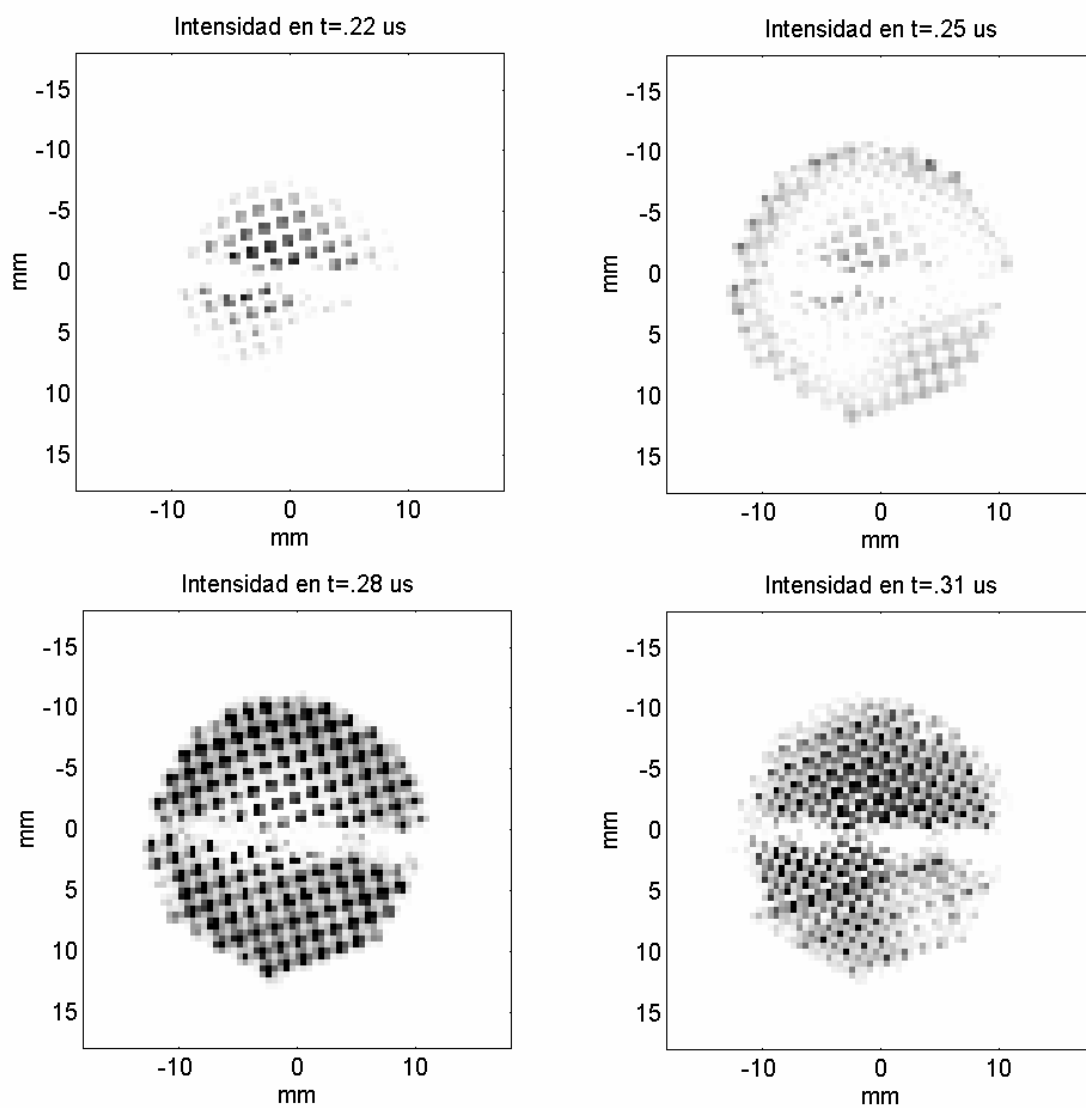


Figura 33

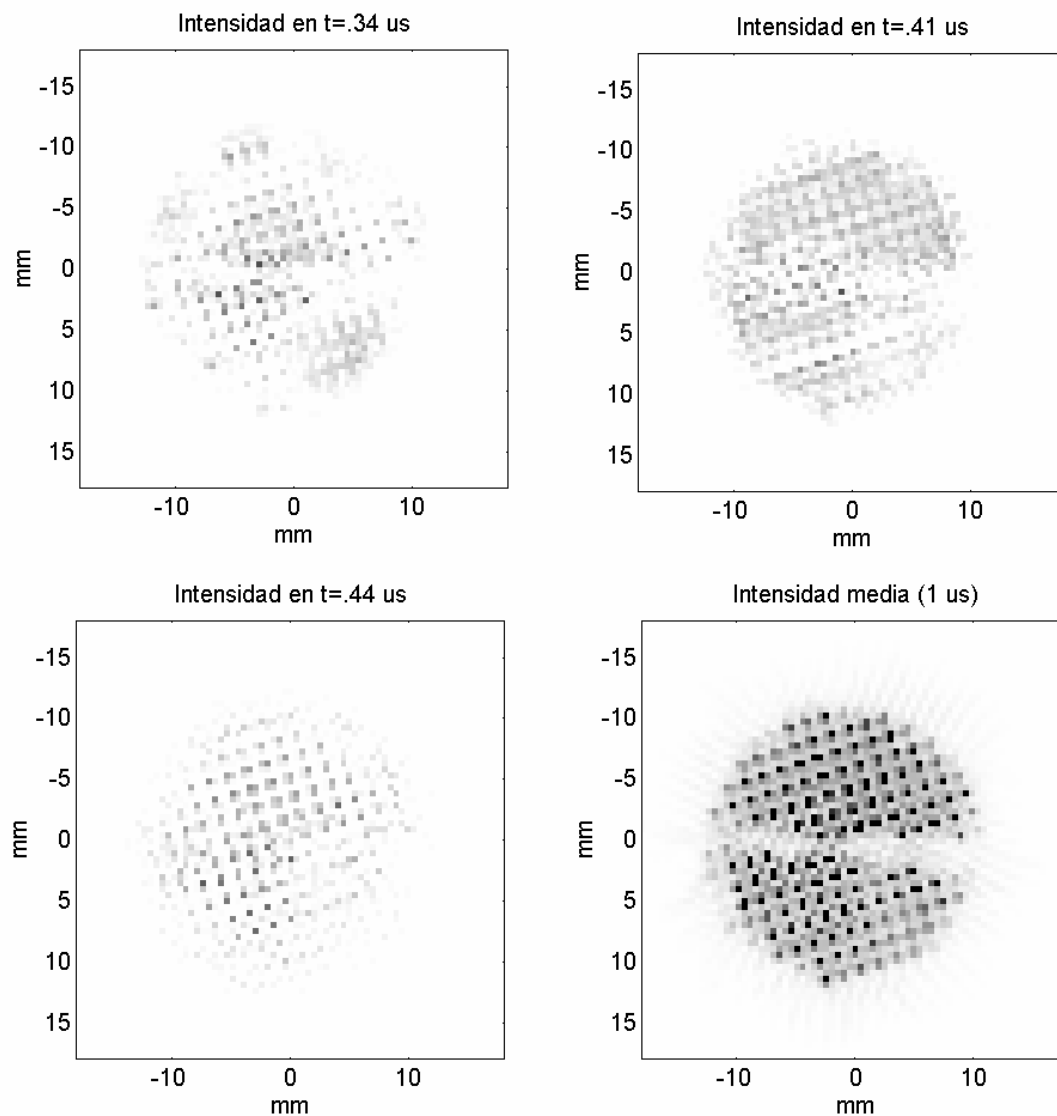


Figura 34

Aparte de dicha franja transversal, es notoria la disminución de la densidad de gris en la zona del cuarto cuadrante de la imagen de intensidad media de la Fig. 34, que también aparece en las imágenes correspondientes a los instantes de 0.44, 0.41, 0.31 y 0.22 μs . Esto podría estar indicando un funcionamiento deficitario del transductor en esa región, lo cual se verá confirmado cuando utilicemos el método del campo oscuro para visualizar el campo de este mismo transductor.

7. La superficie del agua como membrana vibrante.

7.1. Perturbación introducida en la resolución espacial por una membrana.

Con el objeto de evitar el promediado espacial que la fase del haz luminoso experimenta al atravesar el campo acústico en estudio, decidimos ensayar la aplicación del método del campo oscuro para leer los desplazamientos de una membrana interpuesta en la trayectoria del haz ultrasonoro.

Si esta membrana tiene una superficie suficientemente lisa como para no difundir la luz reflejada (superficie especular), entonces las deformaciones elásticas de la misma provocarán proporcionales modulaciones de fase en la luz reflejada, y el método del campo oscuro será apto para observarlas, con las ventajas ya mencionadas (fundamentalmente la rapidez y el bajo costo) respecto a los métodos interferométricos.

La membrana utilizada puede ser una introducida en el seno del líquido (como en la sonda interferométrica analizada en la sección 6.3.1) o podemos usar la propia membrana elástica originada a causa de la tensión superficial en la superficie libre del líquido, dirigiendo hacia ella y desde el interior, el campo acústico bajo estudio.

En esta sección probaremos que la membrana elástica introducida en el seno del líquido provoca una fuerte perturbación del campo ultrasónico, si éste varía con alta frecuencia espacial. No así su perturbación sobre la señal temporal, que puede ser despreciada eligiendo un espesor adecuado de la membrana, como ya fue probado por Royer y Dieulesaint^{30, 33, 35} y explicado antes en la sección 6.3.1.3.

En estas condiciones, es erróneo suponer que el desplazamiento de la membrana es proporcional al campo acústico bajo análisis.

También mostraremos que si la superficie libre del líquido es usada como membrana óptica, podemos lograr una sencilla y precisa relación entre las amplitudes de los desplazamientos del campo acústico y los de la superficie.

Un haz acústico incide normalmente a una membrana elástica bajo tensión T , con densidad superficial de masa σ y espesor despreciable, ubicada en el plano $z=0$, como se muestra en la Fig. 27.

Asumimos que el área de la membrana es suficientemente mayor que la sección transversal del haz acústico, para despreciar los efectos de su borde fijo.

La membrana está inmersa en el líquido (usualmente agua), y su ecuación de movimiento ya fue planteada en la sección 6.3.1.3, como la ecuación (171), que reproducimos nuevamente

$$-p(x, y, 0_+, t) + p(x, y, 0_-, t) + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (199)$$

siendo $p(x, y, 0_-, t)$ la presión acústica a la izquierda de la membrana, $p(x, y, 0_+, t)$ la presión del campo transmitido a la derecha, y $u(x, y, t)$ el desplazamiento de la membrana en la dirección z .

La presión acústica p y el vector desplazamiento $\vec{\xi}$ del líquido están relacionados por⁴¹

$$p(x, y, z, t) = -c^2 \rho \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (200)$$

siendo c la velocidad de las ondas acústicas dentro del líquido con densidad ρ .

Como tratamos con un haz cuasi-colimado viajando en la dirección z , la (200) puede aproximarse como

$$p(x, y, z, t) \approx -c^2 \rho \frac{\partial \xi_z}{\partial z}. \quad (201)$$

Substituyendo (201) en (199), obtenemos

$$c^2 \rho \left[\left(\frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)_{0+} - \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)_{0-} \right] + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (202)$$

El campo acústico a la izquierda de la membrana en la Fig. 27 es una superposición de un campo incidente de frecuencia ω , número de onda k y amplitud de desplazamiento $A_I(x, y, z)$ viajando en dirección $+z$, y su campo reflejado de amplitud $A_R(x, y, z)$ hacia la dirección $-z$.

$$\xi_{z-}(x, y, z, t) = \left(A_I(x, y, z) e^{ikz} + A_R(x, y, z) e^{-ikz} \right) e^{-i\omega t}. \quad (203)$$

El campo acústico a la derecha de la membrana es el transmitido con amplitud $A_T(x, y, z)$. Esto es

$$\xi_{z+}(x, y, z, t) = A_T(x, y, z) e^{ikz} e^{-i\omega t}. \quad (204)$$

El desplazamiento de la membrana será

$$u(x, y, t) = U(x, y) e^{-i\omega t}. \quad (205)$$

Substituyendo (203), (204) y (205) en (202) obtenemos

$$i k c^2 \rho (A_T + A_R - A_I) + T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \omega^2 \sigma U = 0. \quad (206)$$

Las condiciones de frontera sobre la membrana llevan a

$$U(x, y) = A_I(x, y, 0) + A_R(x, y, 0), \quad A_T(x, y, 0) = U(x, y). \quad (207)$$

Usando el sistema de ecuaciones (206) y (207) en A_I , A_R , A_T obtenemos las expresiones siguientes para la amplitud del campo acústico incidente en función de la amplitud de desplazamiento de la membrana,

$$T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\omega^2 \sigma + 2ikc^2 \rho \right) U = 2ikc^2 \rho A_I. \quad (208)$$

Haciendo $kc = \omega$ en (208) tenemos, para la amplitud del campo incidente,

$$A_I(x, y) = \left(1 - i \frac{\omega \sigma}{2c\rho} \right) U(x, y) - i \frac{T}{2c\omega\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (209)$$

Podemos leer ópticamente la amplitud de vibración $U(x, y)$ de la membrana, y usar (209) para obtener las amplitudes de vibración del campo incidente $A_I(x, y)$.

Es deseable no tener que efectuar las derivadas segundas en (209), para obtener una sencilla relación de proporcionalidad entre el campo acústico y los desplazamientos de la membrana. Entonces debemos buscar las condiciones que nos permitan despreciar el último término de (209).

Si el campo es producido por un transductor piezo-composite ubicado próximo a la membrana, esperamos cierta periodicidad espacial en la función $U(x, y)$. Si suponemos elementos de cerámica en el transductor distribuidos con cierta periodicidad de longitud L , el principal término en el desarrollo de $U(x, y)$ es de la forma

$$U(x, y) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} y\right). \quad (210)$$

Para despreciar el último término en (209) debemos imponer la condición

$$\frac{T}{2c\omega\rho} \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right| \ll U. \quad (211)$$

Por substitución de (210) en (211) obtenemos un límite inferior para el período espacial, que nos permita ignorar el término en la derivada segunda de (209),

$$L \gg 2\pi \sqrt{\frac{T}{c\omega\rho}}. \quad (212)$$

Una típica membrana de Mylar está usualmente bajo una tensión³⁵ $T \approx 1 \times 10^3 \text{ N/m}$. Trabajando en agua es $c \approx 1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$, $\rho \approx 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, y con un transductor típico de frecuencia de resonancia de 1 MHz, obtenemos de (212),

$$L \gg 0.1 \text{ mm}, \quad (213)$$

lo cual es una fuerte limitación al poder de resolución lateral.

Demostraremos que, si se usa la superficie libre del agua como membrana, el poder de resolución lateral se incrementa 1000 veces.

La superficie del agua está en $z=0$, el agua en $z<0$ y el aire en $z>0$. Entonces la ecuación de movimiento (201) se mantiene (despreciando un término adicional de presión hidrostática cuyo coeficiente ρg resulta muy pequeño al compararlo con $\omega^2 \sigma$), con la simplificación de que

$$\left(\frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)_{0+} = 0, \quad (214)$$

porque en el aire no se propaga el ultrasonido que nos interesa.

La única condición de frontera es ahora

$$U(x, y) = A_I(x, y) + A_R(x, y), \quad (215)$$

y la Ec. (206) queda

$$i k c^2 \rho (A_R - A_I) + T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \omega^2 \sigma U = 0. \quad (216)$$

Eliminamos A_R entre (215) y (216), ponemos $kc = \omega$ y obtenemos la amplitud del campo acústico incidente

$$A_I(x, y) = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\omega \sigma}{2c\rho} \right) U(x, y) - i \frac{T}{2c\omega\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (217)$$

Esta ecuación es similar a (209) con la sola diferencia del término $1/2$. De forma que obtenemos la misma expresión (212) para los valores de L que permiten despreciar el último término de (217).

La diferencia fundamental es que la tensión superficial del agua es $T \approx 7.5 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, por tanto, con el mismo transductor la condición (212) da

$$L \gg 0.1 \times 10^{-3} \text{ mm}, \quad (218)$$

lo cual es una mejor resolución lateral que (213).

Hay otra ventaja para usar la superficie del agua como membrana: su densidad superficial de masa es muy pequeña $\left(\sigma \approx 1 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right)$, dado que el espesor de la membrana superficial es del orden de algunas decenas de Angströms. Entonces, si nos manejamos con frecuencias tales que $\omega \ll 3 \times 10^{12} \frac{1}{\text{s}}$, obtenemos en el primer término de (217) la condición

$$\frac{\omega \sigma}{2c\rho} \ll 1, \quad (219)$$

y (217) resulta prácticamente independiente de la frecuencia, reduciéndose a⁴²

$$A_I(x, y) \approx \frac{1}{2} U(x, y). \quad (220)$$

7.2. Presión de radiación.

Cuando se trabaje en régimen monocromático y utilizando la superficie del agua como membrana, es necesario considerar el efecto de la presión de radiación. Esta presión de origen no lineal produce una deformación estática sobre la superficie del agua, que puede ser varios órdenes de magnitud mayor que la amplitud dinámica de las vibraciones^{43,44}, por lo que es este efecto el que se observa.

A tal efecto modificamos la Ec. (199) del movimiento de la membrana, agregando la presión hidrostática $\rho g u$ y considerando que es nula la presión $p(x, y, 0_+, t)$ fuera del agua, resulta:

$$p(x, y, 0_-, t) - \rho g u + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (221)$$

Si la excitación es monocromática, al tomar la media temporal de (221) se anula el segundo miembro. La media temporal de la presión en el primer miembro es la presión de radiación p_R , y el desplazamiento u se convierte en la deformación estática de la superficie

$$p_R(x, y) = \rho g u(x, y) - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (222)$$

En (222) la presión de radiación no se puede considerar proporcional al desplazamiento u puesto que las derivadas segundas del desplazamiento multiplicadas por la tensión superficial del agua T son del mismo orden que el término $\rho g u$ para campo

acústicos generados por estructuras periódicas (como los piezo-composites) del orden del milímetro.

La transformada espacial de Fourier de (222) da

$$\tilde{u}(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) \bullet \tilde{p}_R(f_x, f_y), \quad (223)$$

donde f_x, f_y son las frecuencias espaciales y H la función de transferencia

$$H(f_x, f_y) = \frac{1/4\pi^2 T}{f_x^2 + f_y^2 + \frac{\rho g}{4\pi^2 T}}. \quad (224)$$

Para la membrana de agua es $T \approx 7.3 \times 10^{-2}$ N/m, $\rho \approx 10^3$ Kg/m³, por lo que tenemos

$$\frac{\rho g}{4\pi^2 T} \approx 3600 \text{ 1/m}^2. \quad (225)$$

Estamos interesados en el campo de piezocomposites con periodicidad espacial del orden de 1 mm, de forma que $f_x \approx f_y \approx 10^3$ 1/m, con lo cual se puede despreciar el tercer término del denominador de (224) frente a la suma de los cuadrados de las frecuencias espaciales.

Podemos considerar como constante la función de transferencia (224) en torno a los valores de frecuencias espaciales que nos interesan, resultado del cálculo

$$H \approx 1.7 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{N}. \quad (226)$$

Hallando las transformadas inversas de Fourier de (223) con el valor de (226) para H obtenemos la relación

$$u(x, y) \approx 1.7 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{N} \bullet p_R(x, y). \quad (227)$$

La (227) es aproximada y su utilización es más bien cualitativa para saber el orden de magnitud de las alturas de deformación esperadas en la membrana de la superficie del agua, producidas por una cerámica piezo-composite con periodicidad espacial del orden del milímetro, que emite un campo acústico cuya presión de radiación es p_R sobre la membrana.

Como la presión de radiación es directamente proporcional a la intensidad del campo acústico^{44,45}, la medición óptica del desplazamiento u y la utilización de (227) nos proporciona directamente la intensidad del campo acústico estudiado.

En caso de excitación del transductor en regimen pulsado con un período entre pulsos mucho mayor que la duración de cada pulso, la presión de radiación puede considerarse despreciable frente a la amplitud de presión acústica dinámica. Entonces la relación (220) obtenida en la sección anterior es aplicable, al ser independiente de la frecuencia.

7.3. Resultados experimentales

A los efectos de utilizar la capa superficial del agua como membrana vibratoria, se montó un sistema como el mostrado en la Fig. 35, donde la luz reflejada en la superficie perturbada del agua sale modulada en fase con respecto a la luz que se refleja en la superficie del agua en reposo, que se considerará en el plano $z=0$.

Si $u(x,y,t)$ es el desplazamiento hacia arriba de la superficie perturbada, la variación de fase de la luz reflejada en la Fig. 35 es

$$\phi(x, y, t) = -2k u(x, y, t) \cos \theta, \quad (228)$$

donde k es el número de onda de la luz en el vacío.

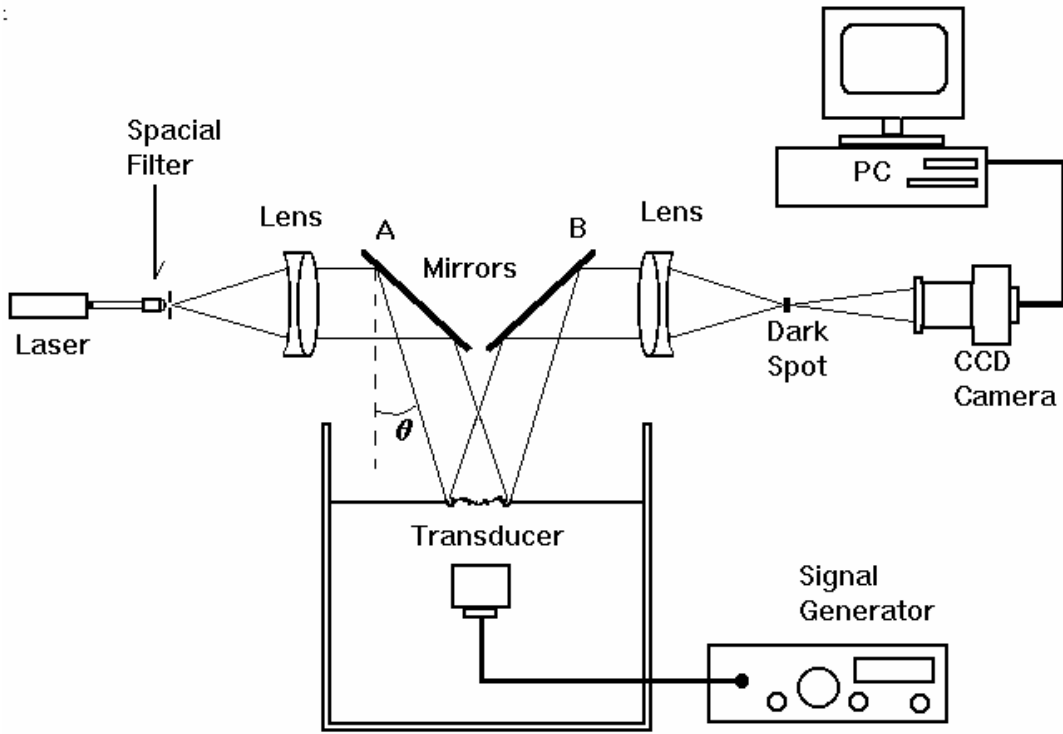


Figura 35

Luego del espejo B, el resto del sistema es la implementación del método del campo oscuro para la observación de la variación de fase (228).

El láser utilizado es un He-Ne de 1mW, las lentes son de 80 mm de diámetro y 800 mm de distancia focal, y la cámara CCD adquiere con 256 niveles de gris sobre un array de 753x244 pixeles.

El generador de funciones es un HP 8116A Pulse/Function Generator para manejar el transductor en régimen de onda continua, y un HP 8114A para manejarlo en régimen impulsional.

De acuerdo con (40) y recordando que $\varepsilon = i\phi$, sustituimos (228) en (40) para obtener

$$I(-mx, -my) = \frac{I_G}{m^2} 4k^2 (\cos \theta)^2 \left\langle |u(x, y, t)|^2 \right\rangle_t, \quad (229)$$

por lo que la intensidad luminosa en la imagen resulta proporcional a la media temporal del cuadrado del desplazamiento de la membrana (esto es, el cuadrado de la amplitud si la vibración es periódica).

De acuerdo con (220), esto nos permite medir la amplitud de vibración (en el eje z) del campo acústico que mueve la membrana.

Para evaluar el error cometido al usar (229) para calcular el desplazamiento de la membrana debemos considerar un término más en el desarrollo de la exponencial de la variación de fase. Esto es

$$e^{i\phi} \approx 1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2}. \quad (230)$$

De forma que la pequeña modulación ε que aparece en (40) y definida en (12) debe sustituirse por

$$\varepsilon = i\phi - \frac{\phi^2}{2}, \quad (231)$$

que al ponerla en (40) obtenemos

$$I(-mx, -my) = \frac{I_G}{m^2} \left(\langle \phi^2 \rangle_t + \frac{1}{4} \langle \phi^4 \rangle_t \right). \quad (232)$$

De forma que el error relativo cometido al despreciar el segundo término de (232) es

$$\varepsilon_r \approx \frac{\phi^2}{4}. \quad (233)$$

Según (233), si queremos que el error relativo sea menor de un 9%, por ejemplo, la variación de fase no debe ser superior a 0.6 radianes. De acuerdo con (228), considerando

el coseno como la unidad (pues es $\theta < 20^\circ$) y la longitud de onda de la luz del orden de 6000 Angströms, esto nos acota los desplazamientos medibles de la membrana a menos de 300 Angströms. Para desplazamientos mayores que éstos, el método igualmente proporciona resultados cualitativamente aceptables.

Hemos seleccionado el transductor piezo-composite con 42% de volumen de PZT, 25.7 mm de diámetro, y celdas emisoras de base cuadrada de 1.10 mm de lado separadas 0.45 mm. Este transductor, construido en nuestro laboratorio, lo hemos estudiado en Francia con la sonda interferométrica heterodyna, algunas de cuyas imágenes hemos presentado en la Sec. 6.3.2, Figs. 33 y 34.

En la Fig. 36 observamos algunos resultados obtenidos⁴⁶ al excitar el transductor en su frecuencia de resonancia (1.118 MHz) con diferentes voltajes de pico, indicados en la parte superior de cada imagen.

Para identificar individualmente la vibración de los elementos de PZT hemos presentado una superposición de imágenes. Sobre la imagen del transductor iluminado con luz blanca (ángulo superior izquierdo de la Fig. 36) hemos superpuesto las imágenes obtenidas con la luz láser por el método del campo oscuro, para cada voltaje de excitación.

La resolución lateral de estas imágenes está dada por los 744 pixeles que cubren los 24 mm de imagen. Esto es del orden de 0.03 mm.

Obsérvese especialmente la existencia de una región no excitada en el cuarto cuadrante de cada una de las imágenes. Esto corresponde con los resultados obtenidos en Francia mediante interferometría sobre el mismo transductor, como se observa en la Fig. 34, lo cual corrobora una falla en la emisión del mismo. Una diferencia a mencionar, en favor del método del campo oscuro, es que para obtener las medidas presentadas en la Fig. 34 se invirtieron 5 ó 6 horas de exploración punto a punto de la superficie (cada 0.5 mm), en cambio las imágenes de la Fig. 36 se obtuvieron en algunos minutos y con una resolución lateral de 0.03 mm).

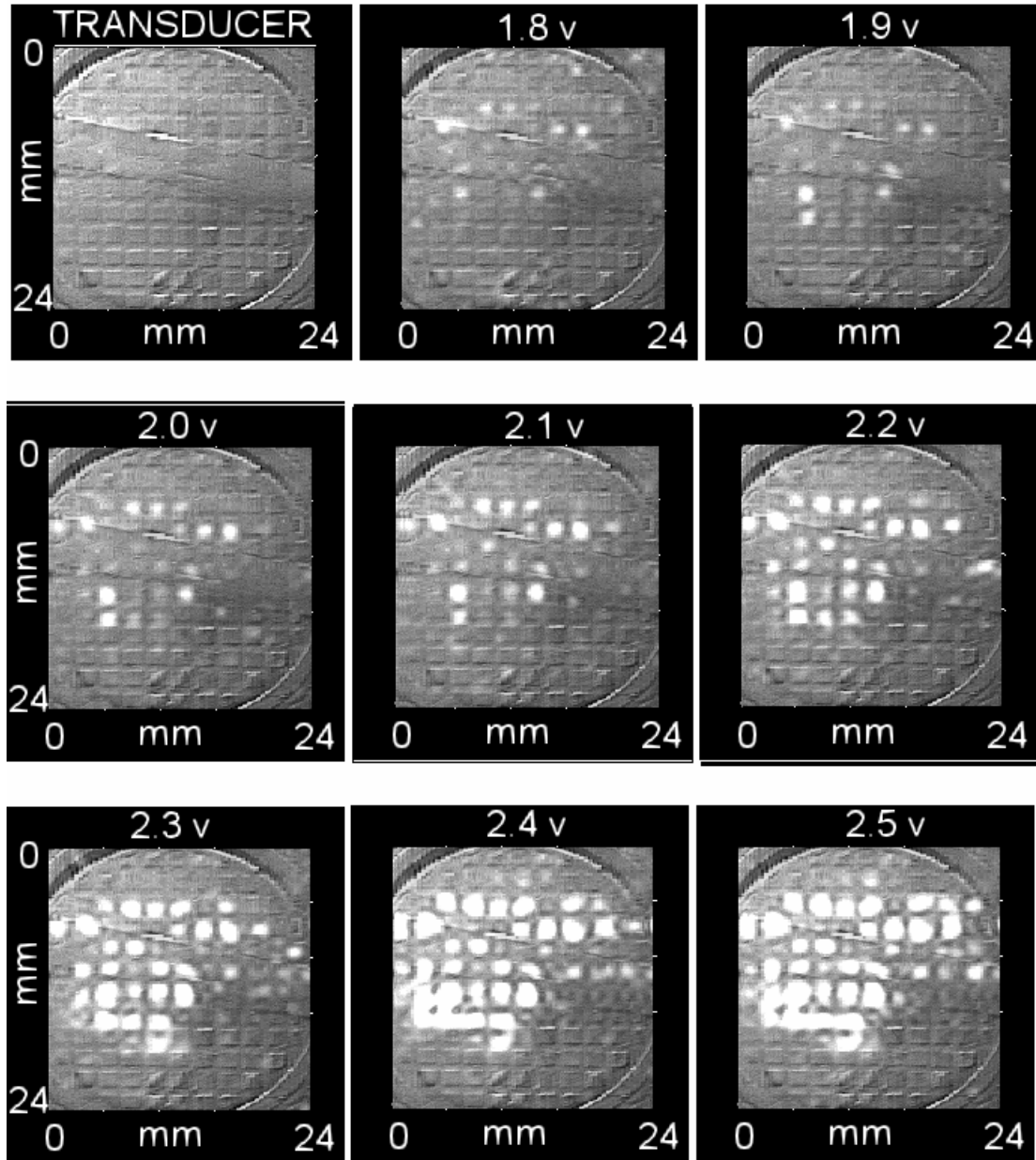


Figura 36

Hemos seleccionado la imagen con voltaje de excitación de 1.9 volts, medido la intensidad de la luz en cada punto, y aplicado la expresión (229) para despejar la amplitud de desplazamiento de la membrana, obteniendo la gráfica tridimensional mostrada en la Fig. 37. Obsérvese que los desplazamientos no superan los 300 Angströms, por lo cual estamos dentro del margen de error inferior al 9%, como se vio antes.

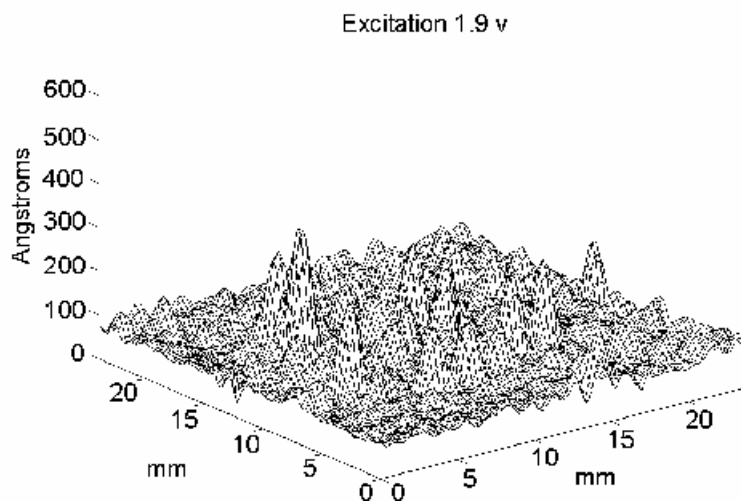


Figura 37

Para ejemplificar las posibilidades que la magnificación óptica ofrece con el fin de incrementar la resolución lateral, hemos presentado en la Fig. 38 dos imágenes de una pequeña porción de 8 mm de lado del transductor, con excitaciones de 2.3 y 2.7 volts respectivamente. Estas imágenes fueron obtenidas con un teleobjetivo de 220 mm en la cámara CCD. La resolución lateral llega ahora a cubrir 8 mm con los 744 pixeles, dando un valor de 11 μm por pixel.

La Fig. 39 muestra un ploteo tridimensional de amplitudes de desplazamiento de la membrana correspondiente a la excitación con 2.7 volts de la Fig. 38, obtenidos con la expresión (229). Obsérvese que los desplazamientos superan los 400 Angströms, con lo que el error relativo está por encima del 9%.

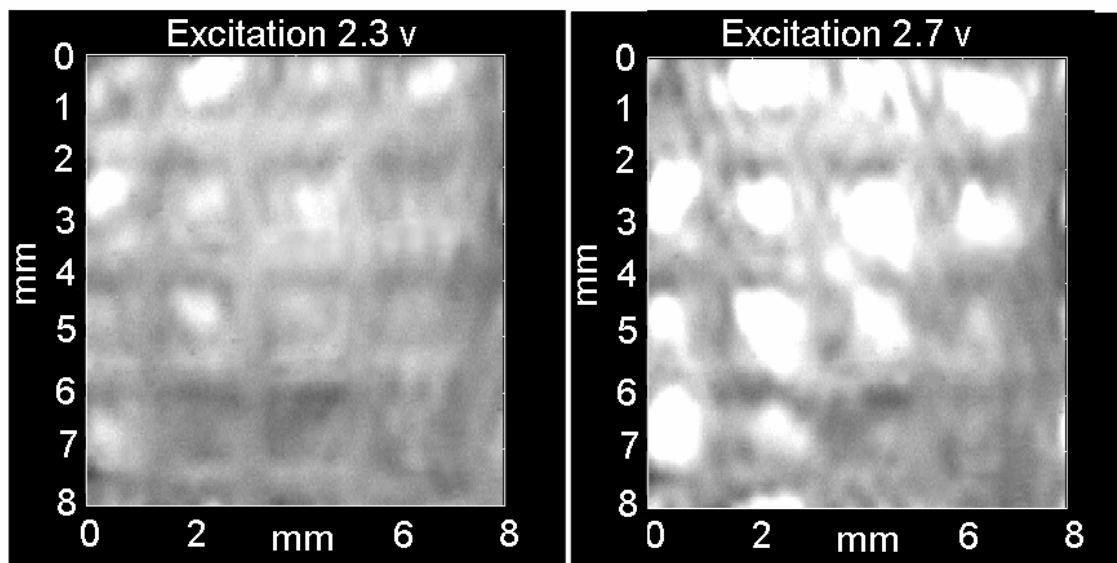


Figura 38

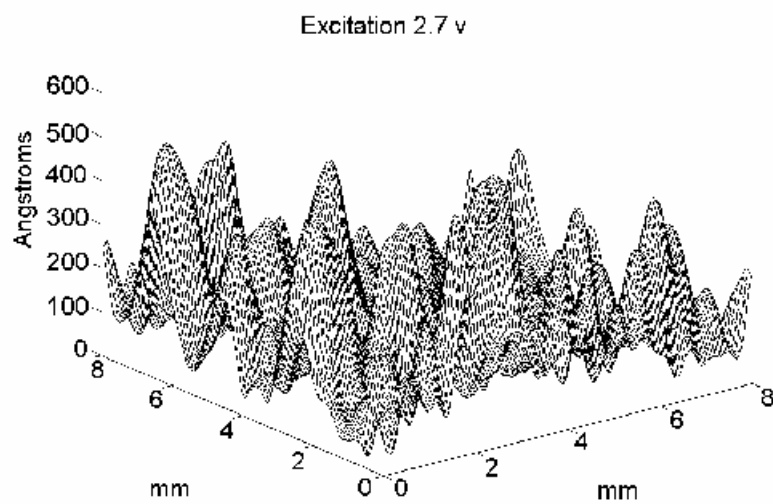


Figura 39

8. Conclusiones

Se han puesto a punto dos métodos ópticos para el estudio de los campos acústicos: el método de Raman-Nath, utilizando la interacción acusto-óptica, y el método de la variación de fase de la luz al reflejarse en la membrana superficial de agua excitada por el campo acústico.

En ambos casos se ha utilizado la técnica del campo oscuro para visualizar las variaciones de fase luminosa (Cap. 3), habiéndolo preferido frente al interferométrico, fundamentalmente por su bajo costo y su rapidez de operación.

Con el método de Raman-Nath se ha efectuado la tarea experimental detallada en el Cap. 5, donde se han hecho dos tipos de experimento. En primer lugar, se ha contrastado en la sección 5.1 la teoría desarrollada en la sección 4.3.2.1 sobre la proporcionalidad entre el campo de presiones y la variación de fase luminosa. En segundo lugar, se ha demostrado experimentalmente la no similitud de los campos de una cerámica piezo-composite y otra PZT 100%, tal como lo prevee la teoría y la simulación numérica presentadas en la sección 5.2.

Con el método de la reflexión de la luz en la membrana superficial de agua, se ha hecho un relevamiento del campo inmediato a la salida de un transductor piezo-composite, obteniéndose resultados similares a los obtenidos por el tesista en el Laboratoire d'Ondes et Acoustique de la ESPCI por métodos interferométricos notablemente más costosos, lo cual mide el nivel de performance del laboratorio que hemos montado.

Entre las varias expectativas futuras de investigación que ofrece el laboratorio de acusto-óptica mencionaremos dos que son las más inmediatamente desarrollables.

Una de ellas es la utilización de las ondas acústicas evanescentes para la realización de un microscopio acústico de alta resolución. Este tipo de ondas es consecuencia de la deducción de la sección 5.2.1, que condujo a la ecuación (129) en la que se observa que si el emisor tiene modulaciones espaciales menores que la longitud de onda, la exponencial de (129) es real y las ondas evanescen con la distancia. Esto significa que si se sumerge en el agua (inmediatamente debajo de su superficie) una estructura difractora con modulaciones espaciales de muy corta longitud y se la irradia con ondas acústicas quasi-planas

provinientes de algún transductor lejano sumergido en el agua, es posible observar las alteraciones producidas en la superficie aún cuando la longitud de las modulaciones del difractor sea menor que la longitud de onda acústica. Ello es porque la pequeñez de la distancia (z en la ec. 129) entre el difractor y la superficie no permite que estas ondas de alta frecuencia espacial evanezcan totalmente.

Otra posibilidad de inmediata aplicación es el estudio de ondas de propagación superficiales en los materiales sólidos o líquidos, y del comportamiento dinámico de capas finas. Para la observación de ondas de propagación es necesario un sistema de modulación estroboscópica del laser con frecuencia igual o submúltiplo de la de las ondas, con el fin de evitar la media temporal de una función armónica que nos da intensidad nula. El laboratorio de austo-óptica acaba de adquirir una celda de Bragg, cuyo funcionamiento se explicó en la sección 4.4, y que nos coloca en situación experimental de poder hacerlo.

Bibliografía

- ¹ Keigo Iizuka, *Engineering Optics*, Ed. Spring-Verlag (1986). Sec. 6.3.2. Pag. 151. Ec. (6.16).
- ² Born and Wolf, *Principles of Optics*, Ed. Pergamon Press (1970), Sec. 8.6. Pag. 425.
- ³ F. Zernike, *Z. Tech. Phys.*, 16 (1935).
- ⁴ K. Iizuka, *Engineering Optics*, Ed. Spring-Verlag (1986). Sec. 2.7.3. Pag. 43. Ec. (2.43).
- ⁵ A. Hauser, *Variable Compleja*, Ed. Fondo Educat. Interameric. S.A.. (1971). Sec. 8.5. Pag. 242.
- ⁶ Scruby and Drain, *Laser Ultrasonics, Techniques and Applications*, Ed. Adam Hilger (1990), Sec. 2.6.2. Pag. 66.
- ⁷ K. Iizuka, *Engineering Optics*, Ed. Spring-Verlag (1986). Sec. 2.8. Pag. 50. Ec. (2.76).
- ⁸ Born and Wolf, *Principles of Optics*, Ed. Pergamon Press (1970), Sec. 8.5. Pag. 397. Ec. (16).
- ⁹ Born and Wolf, *Principles of Optics*, Ed. Pergamon Press (1970), Sec. 8.6, pp. 425-428
- ¹⁰ L. Brillouin, *Ann. de Phys.*, 17, 88 (1922).
- ¹¹ R. Lucas - P. Biquard, *J. Physique*, 10, 464 (1932).
- ¹² P. Debye - F.W. Sears, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 18, 409 (1932).
- ¹³ Born and Wolf, *Principles of Optics*, Ed. Pergamon Press (1970), Sec. 2.3, Pag. 87, Ec. (17).
- ¹⁴ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 5.2, Pag. 146, Ec. (5.4).
- ¹⁵ Scruby and Drain, *Laser Ultrasonics, Techniques and Applications*, Ed. Adam Hilger (1990), Sec. 2.1, pp. 40, 41..
- ¹⁶ E. Dieulesaint - D. Royer, *Elastic Waves in Solids*, Ed. John Wiley & Sons (1974), Cap. 8, pp 374-377.
- ¹⁷ A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics*, Ed. McGraw-Hill (1968), Cap. 5, Pag. 166, Ecs. (5-1), (5-2)
- ¹⁸ E. Dieulesaint - D. Royer, *Elastic Waves in Solids*, Ed. John Wiley & Sons (1974), Cap. 8, pp 396-397.
- ¹⁹ Reibold R. 1976/77, *Acustica*, 36, 214.
- ²⁰ Haron H.E., Cook B.D., and Stewart H.F. (1975), *J. Acoust. Soc. Am.*, 57, 1436
- ²¹ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 8.8, Pag. 238, Ec. (8.30).
- ²² G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Ed. Academic Press, (1981).
- ²³ I. Núñez and C. Negreira, *Optical Measurement of Pressure Field Produced by U.S. Transducers*, (no publicado).
- ²⁴ J. Ferrari, E. Frins, A. Rondoni and G. Montaldo, *Retrieval algorithm for refractive-index profile of fibers from transverse interferograms*, Optics Comm. 117 (1995) pp. 25-30
- ²⁵ A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics*, Ed. McGraw-Hill (1968), Cap. 5, Pag. 140, Ec. (1-1)
- ²⁶ A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics*, Ed. McGraw-Hill (1968), Cap. 5, Pag. 141, Ec. (1-2).
- ²⁷ A. Tijonov, A. Samarsky, "Ecuaciones de la Física Matemática", 1972, Ed. Mir, Moscu, Ec. (19), pág. 753.
- ²⁸ I. Núñez, C.A. Negreira, A. Aulet, L.A. Basora, J.A. Eiras, *Acousto optical Analysis For Resonance Modes and Transmitted Field of Piezocomposites 1-3 PZT Polymer*. Anales de 11º CBECIMAT. San Pablo. Diciembre 1994, pp 709-712.
- ²⁹ Scruby and Drain, *Laser Ultrasonics, Techniques and Applications*, Ed. Adam Hilger (1990), Sec. 3.1, p. 77..
- ³⁰ E. Dieulesaint and D. Royer, *Probing of Acoustic Wave Surface Displacements*, Elastic Wave Propagation, McCarthy-Hayes Editors, (1989) pag. 26.
- ³¹ E. Dieulesaint and D. Royer, *Probing of Acoustic Wave Surface Displacements*, Elastic Wave Propagation, McCarthy-Hayes Editors, (1989) pag. 25.
- ³² E. Dieulesaint and D. Royer, *Probing of Acoustic Wave Surface Displacements*, Elastic Wave Propagation, McCarthy-Hayes Editors, (1989) pp. 17-32.
- ³³ D. Royer et E. Dieulesaint, *Mesures optiques de déplacements d'amplitude 10^{-4} à 10^2 Angström. Application aux ondes élastiques*, Revue de Physique Appliquée, Août 1989, pp. 833-846.
- ³⁴ I. Bronshtein-K. Semendiaev, *Manual de Matemáticas*, Ed. Sapiens, Bs. As. (1976) pag. 532.
- ³⁵ D. Royer and O. Casula, *Quantitative Imaging of Transient Acoustic Fields by Optical Heterodyne Interferometry*, IEEE Ultrasonics Symposim, Cannes 1994.
- ³⁶ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 4.7, Pág. 131, Ec. (4.40).
- ³⁷ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 5.10, Pág. 158, Ecs. (5.42), (5.43).

-
- ³⁸ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 4.5, Pág. 125, Ec. (4.24).
- ³⁹ A. Tijonov - A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Ed. Mir, (1972) pp. 722-723, Ec. (16), (18).
- ⁴⁰ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Secs. 5.3, 5.5, pp. 148, 150, Ecs. (5.8), (5.14).
- ⁴¹ Kinsler y Frey, *Fundamentos de Acústica*, Ed. Limusa (1988), Sec. 5.3, Pág. 148, Ec. (5.8).
- ⁴² Scruby and Drain, *Laser Ultrasonics, Techniques and Applications*, Ed. Adam Hilger (1990), Sec. 4.1.3, Pág. 153.
- ⁴³ R.S. Sharpe (Editor), *Research Techniques in Nondestructive Testing, Vol. I*, Ed. Academic Press, London and New York (1970). Chap. 5 *Ultrasonic Holography* by E.E. Aldridge, (pp 140-141).
- ⁴⁴ J. Krautkrämer, H. Krautkrämer, *Ultrasonic Testing of Materials*. Second Edition. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1977). (pp. 189-190).
- ⁴⁵ B.Agranat, M.Dubrovin, N.Javski, G.Eskin, *Fundamentos de la Física y la Técnica de los Ultrasonidos*, Ed. Mir Moscú (1990), (pág. 95).
- ⁴⁶ I. Núñez, C. Negreira, J. Ferrari. *Amplitude Measurements of Acoustic Fields by Light Reflection at the Free Surface of a Liquid*. 1995 IEEE Ultrasonics Symposium Procc. Nov. 7-10. Seattle. USA.