

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, MONTEVIDEO, URUGUAY

FACULTAD DE CIENCIAS

DILEMAS SOCIALES SOBRE REDES ESPACIALES

TESIS PRESENTADA POR ESTRELLA ADRIANA SICARDI SEGADE
PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTORADO EN FÍSICA

2012

Departamento de Física Teórica, Instituto de Física

*Dedicado a la Memoria de mi Padre, Aníbal Carlos Sicardi Schifino (1950-2003)
que me acompaña siempre en mi Corazón; a mi Compañero en las buenas y malas,
mi Amor, Marcelo José Giuliano Rivas; y a mi Querida Madre, Estrella de la Luz
Segade Reyes, que es la mejor Mamá del mundo.*

Agradecimientos

Agradezco al PEDECIBA y a la ANII por su apoyo económico. También agradezco a mi Orientador, al Instituto de Física de la Facultad de Ciencias, y a su Dirección, presente y pasada, por su apoyo; a la Comisión de Postgrado y sus Coordinadores, del pasado y el presente, así como a los integrantes de la Mesa Evaluadora, para la defensa de esta Tesis. Agradezco la comprensión de la Comisión Coordinadora Docente presente y pasada, y la asistencia técnica de la Administración de Red del Instituto. Finalmente agradezco a mi Marido, Marcelo José Giuliano Rivas y a mi Madre, Estrella de la Luz Segade Reyes, por su cariño incondicional y apoyo moral.

Resumen del Trabajo Presentado en esta Tesis

En los Capítulos 2, 3 y 4, se desarrolla la parte central de este trabajo de Tesis, consistente en tres contribuciones originales que derivaron en respectivos artículos de investigación, [1–3]. Nos enfocamos en los juegos estratégicos 2×2 , particularmente en el Dilema del Prisionero (DP), y otros dilemas sociales similares. Exploramos varias situaciones posibles de evolución iterativa de los mismos sobre redes periódicas bidimensionales, con y sin movimiento de los agentes, con diferentes tipos de estrategias [1, 3], y estudiamos el caso de redes aleatorias evolutivas de agentes [2]. En el Capítulo 2, estudiamos los juegos evolutivos espaciales 2×2 (sobre redes periódicas bidimensionales), entre agentes con estrategias heterogéneas, analizados con diferentes variantes de Autómatas Celulares (AC). Los agentes juegan repetidamente contra sus vecinos más cercanos, utilizando una matriz de pagos normalizada, definida en función de dos parámetros. El comportamiento de cada agente está regido por una Estrategia Markoviana Binaria (EMB), especificada por 4 probabilidades condicionales, $[p_R, p_S, p_T, p_P]$, donde cada una de dichas probabilidades puede tomar los valores discretos de 0 o 1. La configuración inicial de los AC consiste en que las estrategias de los agentes sean repartidas de manera aleatoria y homogénea, entre las $2^4 = 16$ posibles EMB, de manera que todas estén igualmente representadas. El sistema evoluciona posteriormente dentro del espacio de estrategias, de manera sencilla. En cada paso temporal, cada agente copia la estrategia del vecino que obtuvo un mejor pago total en ese turno. Las estrategias dominantes y la proporción de interacciones cooperativas dependen, obviamente de los parámetros de la matriz de pagos, que definen el juego. Adicionalmente, las mismas dependen del tipo de vecin-

dad considerada (von Neumann o Moore), del modo en que el estado de cooperación (C o D) del agente es actualizado en el tiempo (en forma determinística o estocástica), y de la cantidad de ruido en el sistema, introducido a través del parámetro ε que introduce un factor estocástico en las EMB. Un resultado destacable es que encontramos la existencia de una estrategia robusta, $[1, 0, 1, 1]$, que aparece como sobreviviente bajo varias condiciones diferentes de los posibles AC estudiados.

En el Capítulo 3, estudiamos lo que ocurre cuando a agentes que juegan el DP regidos por EMB y reglas de actualización de estrategias similares a las del Capítulo 2 (del tipo imitativas), ahora se les permite (a diferencia del caso estudiado en el capítulo anterior), en cada paso temporal, crear y romper vínculos con sus vecinos en función de su satisfacción con los pagos obtenidos en cada turno, y se le atribuye un costo a dichos enlaces, proporcional a la distancia geográfica (medida con la fórmula de Pitágoras en una red cuadrada periódica donde los agentes se encuentran ubicados) entre los agentes enlazados. Para este sistema, analizamos la evolución temporal de las frecuencias de las 16 EMB, comparándola con lo que ocurre en los casos estudiados en el capítulo anterior. Adicionalmente, investigamos la distribución del número de vecinos que resulta en el estado estacionario final al que evoluciona nuestra red aleatoria (que parte de un sistema totalmente desconectado), según la condición inicial de cooperación de los agentes, y la introducción o no de ruido en el comportamiento de los mismos, a través del parámetro ε .

En el Capítulo 4, estudiamos los efectos de introducir la posibilidad de un movimiento difusivo incondicional y aleatorio (definido por un coeficiente de movilidad, m) en juegos evolutivos 2×2 espaciales (los juegos se desarrollan sobre redes periódicas cuadradas con vecindades de von Neumann, donde ahora cada sitio puede estar ocupado por un agente, o estar vacío, siendo la ubicación inicial de los agentes en las mismas aleatoria, y determinada por el parámetro de concentración, ρ). Consideramos en este caso, para todos los juegos considerados, agentes que sólo pueden elegir entre 2 estrategias puras, C o D (a diferencia de las EMB de los capítulos anteriores). Se consideran 2 implementaciones diferentes de AC, con una evolución temporal del estado de los agentes basada en tres pasos. El primer paso consiste en

la actualización de las utilidades de los agentes a través del juego con sus vecinos más cercanos, ubicados en los cuatro sitios más próximos a su ubicación espacial (si los hubiera). Los dos siguientes pasos difieren en su orden en las implementaciones consideradas. El segundo (o tercer) paso consiste en la actualización de la estrategia pura (C o D) de cada agente según una regla imitativa. Por último, el tercer (o segundo) paso consiste en el movimiento aleatorio difusivo de cada agente con probabilidad m hacia alguno de sus 4 sitios vecinos más cercanos, siempre y cuando el mismo se encuentre vacío. Se estudian los casos del DP, Halcón-Paloma (HP), y la Caza del Ciervo (CdC), variando los dos parámetros de pago que definen los posibles juegos, analizando como cambian los niveles de cooperación finales, para distintos valores de la movilidad m y la densidad de los agentes en la red, ρ . Para el DP y la CdC encontramos que la baja concentración de agentes y la movilidad no nula de los mismos refuerza aún más el efecto favorable a la cooperación (comparado con los resultados de campo medio) que introduce por sí misma la estructura espacial para estos juegos. Es de particular interés, sin embargo, lo que ocurre con HP, ya que si bien, para este juego, la introducción de una estructura espacial por sí sola inhibe la cooperación (en comparación con la cooperación obtenida en el caso de campo medio), la movilidad no nula de los agentes y la dilución de su concentración en la red son capaces, en algunos casos, de suprimir los efectos inhibitorios anteriormente mencionados.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen del Trabajo Presentado en esta Tesis	4
1. Introducción	10
1.1. El Papel de la Teoría de Juegos en el Estudio de los Sistemas Complejos	10
1.2. Juegos, Pagos y Estrategias	11
1.3. El Equilibrio de Nash y los Dilemas Sociales	17
1.4. Juegos Repetidos	21
1.5. Juegos Evolutivos: Dinámicas de Poblaciones	25
1.5.1. Juegos Poblacionales	26
1.5.2. Estabilidad Evolutiva	29
1.5.3. Dinámica del Replicador	32
1.5.4. Otras Dinámicas	34
1.6. Los efectos de la Topología de las Redes de Interacción	35
2. Estrategias Markovianas en Juegos Espaciales de 2×2	38
2.1. Dinámica Evolutiva para Juegos Estratégicos 2×2	38
2.2. El Torneo Estratégico entre las Estrategias Markovianas Binarias, en Juegos 2×2 con Suma no Nula	43
2.3. Competencia de las EMB en un AC totalístico	46
2.4. Resultados	49
2.4.1. Dilema del Prisionero Determinista	49
2.4.2. Versión Estocástica	49
2.4.3. Otras Matrices de Pagos	50

2.5. Conclusiones	54
3. Estrategias Markovianas sobre Redes Aleatorias y Periódicas	60
3.1. Introducción	60
3.2. Resultados	61
3.2.1. Red Periódica	61
3.2.2. Red Aleatoria Evolutiva	65
3.3. Conclusiones	71
4. Efectos de la Difusión en el Dilema del Prisionero Espacial	78
4.1. Introducción	78
4.2. El Modelo	80
4.3. Resultados	82
4.4. Discusión y Conclusiones	92
5. Conclusiones Generales	96
A. Juegos Asimétricos	104
B. Juegos Repetidos	106
B.0.1. Estrategias como Algoritmos	107
B.0.2. Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos	109
B.0.3. La Paradoja de la Inducción Hacia Atrás	110
B.1. Racionalidad Acotada	111
C. Otras Dinámicas para Juegos Repetidos	118
C.1. Juegos Evolutivos: Dinámica Basada en Agentes	118
C.1.1. Actualización Sincrónica	121
C.1.2. Actualización Secuencial al Azar	123
C.2. Reglas de Actualización Microscópicas	124
C.2.1. Mutación y Experimentación	124
C.2.2. Imitación	125
C.2.3. Si Gano, me Mantengo; si Pierdo, Cambio	128
D. Resultados de Campo Medio para el Dilema del Prisionero	132

E. La Estructura de los Grafos Sociales	135
E.1. Redes Periódicas Bidimensionales	136
E.2. Mundos Pequeños	138
E.3. Grafos Libres de Escala	140
E.4. Redes Evolutivas	142
 Bibliografía	 144

Capítulo 1

Introducción

1.1. El Papel de la Teoría de Juegos en el Estudio de los Sistemas Complejos

La *Teoría de Juegos* es el paradigma unificador detrás de muchas disciplinas científicas. Se trata de un conjunto de herramientas de análisis, que proveen explicaciones y poder predictivo en situaciones de decisión interactiva, en los casos donde los objetivos, las metas y las preferencias de los agentes participantes se encuentran potencialmente en conflicto. Posee aplicaciones exitosas en campos tan diversos como la biología evolutiva y la psicología; la computación y la investigación operativa; las ciencias políticas y la estrategia militar; la antropología cultural, la ética y la filosofía moral y la economía. La fuerza de cohesión de la teoría se deriva de su estructura formal matemática, que permite abstraer la esencia estratégica común de situaciones reales biológicas, sociales o económicas. La Teoría de Juegos crea un marco unificado para modelos abstractos y metáforas, junto con una metodología coherente, que permite que este tipo problemas se puedan plantear y analizar, utilizando este enfoque [4].

La aparición de la Teoría de Juegos como un área de investigación aceptada en el campo de la Física es un evento relativamente reciente. Fue necesario el refuerzo mutuo de dos factores importantes: la apertura de la Física, y en particular, de la Física Estadística, hacia nuevas líneas de investigación interdisciplinarias, y la madurez suficiente de la Teoría de Juegos en sí misma, en el sentido de que esta comenzó a

abordar problemas de Sistemas Complejos, donde la competencia y la experiencia de la comunidad Física pudiera realizar aportes valiosos. Dos nuevas disciplinas surgidas recientemente, la Sociofísica [5, 6] y la Econofísica [7], y la ya existente Física Biológica, obtuvieron un nuevo impulso con la utilización de las herramientas de la Física Teórica en cuestiones cuya investigación estaba relacionada tradicionalmente con las Ciencias Sociales, la Economía o la Biología, utilizando, adicionalmente, en gran medida a la Teoría de Juegos.

1.2. Juegos, Pagos y Estrategias

Un juego es una formulación abstracta de una situación de decisión interactiva con posibles conflictos de interés. La *forma normal (estratégica)* de representar un juego debe especificar: (1) los jugadores, (2) las posibles acciones de los mismos (llamadas estrategias), y (3) los pagos recibidos por los jugadores para cada combinación posible de acciones (perfil de acciones o estrategias) que puede ser elegida por los jugadores. Sea $n=1, 2, \dots, N$ el índice denotando a los jugadores; $S_n = \{e_{n1}, e_{n2}, \dots, e_{nQ}\}$ el conjunto de Q estrategias puras disponibles para el jugador n , siendo $s_n \in S_n$ un elemento arbitrario de este conjunto; $(s_1, \dots, s_N)$ un perfil de estrategias para todos los jugadores¹; y $u_n(s_1, \dots, s_N)$ la función de pagos (utilidades) del jugador n , o sea, la medida de su satisfacción cuando el perfil de estrategias $(s_1, \dots, s_n)$ se realiza. Tal juego se nota como $G = \{S_1, \dots, S_N; u_1, \dots, u_N\}$ ².

En el caso cuando hay sólo dos jugadores $n = 1, 2$ y los conjuntos de estrategias disponibles son discretos, $S_1 = \{e_1 \dots, e_Q\}$, $S_2 = \{f_1 \dots, f_R\}$ ³, es habitual escribir

¹Se le llama perfil de estrategias a una instancia de juego particular, en que se asigna una estrategia pura particular a la acción de cada uno de los N jugadores.

²En realidad esta definición sólo se refiere a juegos estratégicos estáticos, de un solo turno, con decisión simultánea de los jugadores, e información completa. En el caso más general (juegos dinámicos o juegos con información incompleta) su representación se da generalmente en la forma extensiva, donde, además de la lista anterior, también se debe especificar: (4) cuál es el turno de “movida” de cada jugador, (5) cuáles son las alternativas de elección en cada turno, y (6) qué información está disponible para el jugador en el momento de cada jugada. Los juegos extensivos también pueden ser expresados en forma normal, pero esto puede implicar una pérdida sustancial de información. No estudiaremos juegos extensivos en este trabajo.

³Notar que, según el juego en cuestión, los conjuntos respectivos de estrategias de los e_i y los f_i disponibles para cada uno de los jugadores, pueden coincidir, o no, si bien nos concentraremos más adelante en el caso en que ambos conjuntos coinciden.

el juego en su forma bimatricial $G = (A, B^T)$, que es una forma abreviada de la siguiente tabla: ⁴

$$\begin{array}{c|ccc}
 & f_1 & \dots & f_R \\
 \hline
 e_1 & (A_{11}, B_{11}^T) & \dots & (A_{1R}, B_{1R}^T) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 e_Q & (A_{Q1}, B_{Q1}^T) & \dots & (A_{QR}, B_{QR}^T)
 \end{array} \tag{1.1}$$

Aquí el elemento de matriz $A_{ij} = u_1(e_i, f_j)$ (respectivamente, $B_{ij}^T = u_2(e_i, f_j)$) denota el pago del jugador 1 (jugador 2) ante el perfil de estrategias (e_i, f_j) ⁵.

Los juegos en forma normal de dos jugadores pueden ser *simétricos* (llamados también *juegos matriciales*) o *asimétricos* (*juegos bimatriciales*), donde la simetría se refiere a los roles de los jugadores. Para un juego simétrico los jugadores son idénticos en todos los posibles aspectos, ambos poseen iguales opciones de acción y pagos, o sea, en este caso necesariamente se cumple $R = Q$ y $A = B$. Tanto el rol del jugador 1 como el del jugador 2 son idénticos e intercambiables. Un juego simétrico en su forma normal queda entonces caracterizado por una sola matriz de pagos A , y podemos formalmente escribir $G = (A, A^T) = A$. El Dilema del Prisionero (DP), el Halcón-Paloma (HP), la Caza del Ciervo (CdC), etc., son algunos ejemplos de este tipo de juegos (Estos juegos son descriptos más adelante).

Los juegos simétricos en los cuales la matriz de pagos es simétrica, $A = A^T$, se llaman *doblemente simétricos* y pueden ser denotados como $G = (A, A) = A$. Este tipo de juegos pertenecen a los juegos de *coordinación*, o juegos *potenciales*. Los juegos asimétricos del tipo $G = (A, -A)$, se llaman *juegos de suma nula* (Ejemplo: Peniques Emparejados, ver Apéndice A). Es en este tipo de juegos donde fue probada por primera vez la existencia de un equilibrio en la forma del Teorema Minimax (von Neumann, 1928 [8]). Hablaremos de este tipo de equilibrios más adelante. En el apéndice A se dan ejemplos de juegos asimétricos 2×2 .

⁴Es convencional definir B como la matriz de elementos traspuestos a los que aparecen en la tabla.

⁵No todos los juegos en forma normal pueden ser escritos en forma matricial. Existen casos, en los que el espacio de estrategias puras no es discreto, lo cual obliga a tratar los pagos en forma funcional, si bien estas dificultades técnicas no impiden que se pueda tratar los mismos de manera formalmente similar a los juegos matriciales. Sin embargo, en este trabajo, nos restringiremos al caso de juegos matriciales, y más específicamente, a los juegos 2×2 .

Las estrategias que se denotan en los índices de las matrices son *estrategias puras*. En muchos juegos, sin embargo, los jugadores también pueden utilizar *estrategias mixtas*, que son distribuciones de probabilidad sobre las estrategias puras. El Póker es un buen ejemplo, donde los buenos jugadores juegan de acuerdo a una estrategia mixta entre las posibles estrategias puras, que consisten en “blufear” o “no blufear” (o sea, apostar de forma engañosa para intimidar a sus rivales fanfarroneando, a pesar de no tener buenas cartas; o sólo apostar si las cartas lo respaldan). En este caso, se supone que cada jugador posee un mecanismo aleatorio que puede ser utilizado para los momentos de decisión. Jugar una estrategia mixta significa que, en cada instancia de decisión, el jugador podrá jugar una de sus acciones posibles, con una cierta probabilidad asignada previamente. Cada estrategia mixta corresponde a un punto p del *simplex de estrategias mixtas*⁶.

$$\Delta_Q = \left\{ p = (p_1, \dots, p_Q) \in [0, 1]^Q : \sum_{q=1}^Q p_q = 1 \right\} \quad (1.2)$$

cuyos extremos son estrategias puras. En el caso de dos jugadores, descrito en (1.1), un perfil de estrategias es un par (p, q) , con $p \in \Delta_Q$ y $q \in \Delta_R$. Los pagos esperados para el jugador 1 y el jugador 2, en ese caso, pueden ser expresados como:

$$u_1(p, q) = p \cdot Aq, \quad u_2(p, q) = p \cdot B^T q = q \cdot Bp. \quad (1.3)$$

Observamos que, en algunos juegos, las estrategias mixtas pueden no estar permitidas. El transcurso de un juego en su forma normal es como sigue: (1) cada uno de los jugadores elige una acción de manera independiente pero simultánea (o sea, cada jugador elige su jugada sin saber la elección de su oponente), (2) los jugadores reciben el pago de acuerdo al perfil de estrategias realizado.

Consideramos los juegos 2×2 no cooperativos, consistentes en dos jugadores, ca-

⁶Un simplex es la generalización de la noción geométrica de un triángulo (en 2 dimensiones), o de un tetraedro (en 3 dimensiones), a un número arbitrario de dimensiones. Más específicamente, un n -simplex es la superficie externa convexa que envuelve a un politopo de n dimensiones y $n + 1$ vértices. Por ejemplo, un 2-simplex es un triángulo, un 3-simplex es un tetraedro, y un 4-simplex es un poliedro de 5 vértices inmerso en un espacio de 4 dimensiones. Un punto solo puede ser considerado un 0-simplex, y un segmento de recta puede ser considerado un 1-simplex. Un simplex se define como el conjunto convexo más pequeño que contiene ciertos vértices dados.

da uno con dos opciones: cooperar (C) o no cooperar (D), donde cada uno hace su elección, sin saber previamente lo que el otro va a hacer. Los cuatro resultados posibles para la interacción de ambos agentes son: (1) ambos cooperan (C, C), (2) ninguno de los dos coopera (D, D), (3) uno de ellos coopera y el otro no lo hace (C, D) o (D, C). Dependiendo de los casos enumerados arriba, los agentes obtienen, respectivamente, ambos la “recompensa” R , si los dos juegan C; ambos el “castigo” P , si los dos juegan D; o si juegan de modo diferente entre sí, el “pago del incauto” S para el agente que juega C y la “tentación de no cooperar” T para el agente que juega D. Se le asigna al juego la *matriz de pagos* M dada por:

$$M = \begin{pmatrix} (R, R) & (S, T) \\ (T, S) & (P, P) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

que resume las ganancias de los agentes que realizan las jugadas de cada *fila* cuando se enfrentan con agentes que hacen las jugadas indicadas en cada *columna* (la primer fila corresponde a que el primer agente juegue C, y la segunda fila a que juegue D, análogamente, la primer columna corresponde a que el segundo agente juegue C, y la segunda columna a que el mismo juegue D).

Si los elementos de la matriz de pagos M definida en (1.4) verifican $T > R > P > S$ el juego se llama Dilema del Prisionero (DP). La historia de este juego fue inventada por el matemático Albert Tucker en 1950, cuando quiso ilustrar la dificultad de analizar ciertos tipos de juegos estudiados previamente por Melvin Dresher y Meril Flood (científicos de la Corporación RAND, Santa Mónica, California [9]). La paradoja de Tucker ha dado lugar a una enorme difusión de la misma en la literatura de ámbitos tan diversos como la Filosofía, la Biología, la Economía, las Ciencias de la Conducta y las Ciencias Políticas, así como la propia de Teoría de Juegos. La historia del Dilema del Prisionero es la siguiente:

Dos ladrones son detenidos después de un robo realizado en conjunto, y separados por la policía. Sin embargo, la policía no tiene pruebas suficientes a fin de tenerlos condenados. Por lo tanto, el fiscal visita a cada uno de ellos y les ofrece el mismo trato: si uno confiesa (llamado deserción en el contexto de la Teoría de Juegos) y el otro permanece silencioso (cooperación con el otro prisionero), el cómplice silencioso recibe una condena de tres años, mientras que el confesor queda en libertad. Si

ambos permanecen en silencio, la policía sólo puede darles a ambos ladrones un año de pena, por un cargo menor. Si los dos confiesan, cada ladrón recibe una condena de dos años. La matriz de pagos para este juego tiene la estructura de la matriz M definida en (1.4). Para la versión repetida (Dilema del Prisionero Iterado) se supone usualmente una limitación adicional, $T + S < 2R$. Esto asegura a largo plazo una ventaja de la cooperación mutua contra un perfil de estrategias donde los jugadores alternativamente cooperen y deserten en fase opuesta.

El DP está relacionado con otros dos juegos de dilema social (Liebrand, 1983 [10]; Poundstone, 1992 [11]), el Halcón-Paloma y la Caza del Ciervo.

En la mayoría de las competencias entre animales que se dan en la naturaleza (en particular, las relacionadas con la escalada de conflictos), la no cooperación mutua da como resultado el peor resultado posible para ambos jugadores, y el daño supera el costo de ser explotados, es decir, $T > R > S > P$. Este juego se llama Halcón-Paloma, o Gallina (Rapoport, 1966 [12]). Consideremos una población de animales (por ejemplo, aves) cuyos individuos son iguales entre sí en todas sus características, excepto en una: su nivel de agresividad en las interacciones con sus semejantes. El comportamiento está codificado genéticamente, y existen animales de los dos tipos: los del tipo agresivo, que llamaremos Halcones, y los del tipo cooperativo, que llamaremos Palomas. Asumimos que cada vez que dos animales se encuentran, competirán por un recurso v , que puede ser, por ejemplo, comida. Cuando dos Palomas se encuentran, simplemente comparten el recurso. Cuando dos Halcones se encuentran, ellos pelean, y uno de ellos (al azar) termina herido seriamente, mientras el otro se queda con la totalidad del recurso. Finalmente, si una Paloma se encuentra con un Halcón, la Paloma escapa sin pelear y el Halcón se queda con la totalidad del recurso, sin sufrir heridas de ningún tipo. La matriz de pagos en este caso es:

		Animal 2	
		Paloma	Halcón
Animal 1	Paloma	$\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$	$(0, v)$
	Halcón	$(v, 0)$	$\left(\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}\right)$

(1.5)

donde $c > v$ es el costo de las heridas sufridas. Claramente, en el contexto de la

matriz M definida en (1.4), la estrategia de la Paloma corresponde a jugar C y la del Halcón corresponde a jugar D, pudiéndose calcular los valores de R , S , T y P en función de v y c de manera consistente. El juego supone una evolución Darwiniana, en la cual la adaptación está asociada a la ganancia media de la población.

Existen otros dos juegos, el juego de la Gallina y el juego de la Nevada, que tienen la misma estructura que Halcón-Paloma (O sea, que formalmente son el mismo juego, aunque sus motivaciones sean diferentes).

El Juego de la Gallina se refiere a cuando dos autos corren a toda velocidad uno hacia el otro desde lados opuestos. Al acercarse los dos autos, la destrucción mutua se vuelve inminente. El primero de los autos dobla para evitar la colisión, es llamado Gallina por su oponente, que gana por lo tanto el juego.

El Juego de la Nevada se refiere a dos automovilistas atrapados en lados opuestos de una nevada. Tienen dos opciones: (1) Salir y empezar a apalea la nieve (cooperar); o (2) permanecer en el auto (no cooperar). Si ambos apalean la nieve, cada uno obtiene el beneficio b de llegar a su casa, y comparten el costo c de su trabajo, o sea, que cada uno recibe una recompensa por la cooperación mutua dada por $R = b - c/2$. Si ambos conductores deciden quedarse en sus respectivos autos (no cooperar), ellos no logran llegar a sus casas y por lo tanto no obtienen beneficio alguno ($P = 0$). Si uno solo de ellos apalea la nieve, ambos llegan a casa, pero sin embargo, la ganancia del no cooperador ($T = b$) no está reducida por el costo de apalea la nieve, mientras que la del cooperador resulta reducida $S = b - c$. Este juego es equivalente al Dilema del Prisionero si $2b > c > b > 0$. Sin embargo, para $b > c > 0$, que es el caso llamado propiamente juego de la Nevada, el juego es equivalente a Gallina y Halcón-Paloma. Si ahora consideramos el caso en el que el valor de la recompensa supera la tentación de no cooperar, es decir, $R > T > P > S$, el juego se convierte en la Caza del Ciervo (Skyrms, 2004 [13]). La historia del juego de la Caza del Ciervo fue descrita brevemente por Rousseau en el Discurso sobre la desigualdad (1755): *Si se trataba de la caza del ciervo, todo el mundo era conciente de que debía seguir fiel en su puesto, pero si una liebre pasaba al alcance de uno de ellos, no podemos dudar de que probablemente hubiera salido en su persecución sin escrúpulo, y después de haber capturado a su presa propia, le habría importado muy poco el haber causado que sus compañeros perdieran la suya*. Cada cazador prefiere un ciervo a una liebre y

una liebre a la nada. En el contexto de la Teoría de Juegos, esto significa que la más alta ganancia se alcanza cuando cada cazador opta por la caza del ciervo. La probabilidad de la cacería exitosa de un ciervo aumenta con el número de cazadores, y prácticamente es imposible que un único cazador pueda cazar un ciervo por sí mismo. Al mismo tiempo, la oportunidad de conseguir una liebre es independiente de lo que otros hacen. En consecuencia, para dos cazadores, la matriz de pagos correspondiente puede ser dada por:

		Cazador 2		
		Ciervo	Liebre	
Cazador 1	Ciervo	(3, 3)	(0, 2)	(1.6)
	Liebre	(2, 0)	(1, 1)	

La Caza del Ciervo es un prototipo de contrato social, y un caso especial de juego de coordinación.

La cooperación biológica de algunos hongos con microorganismos en el líquen (simbiosis) es un ejemplo de comportamiento animal que ha sido descrito como una Caza del Ciervo (Strassman et. al., 2000 [14]). Cuando las amebas individuales de *Dictyostelium discoideum* se mueren de hambre, se agregan para formar un cuerpo grande cuyo éxito reproductivo depende de la cooperación de los individuos que lo forman.

1.3. El Equilibrio de Nash y los Dilemas Sociales

La invención, por parte de John Nash, del concepto de equilibrio estratégico para juegos no cooperativos (Nash, 1950 [15]) fue un hito muy importante en la Teoría de Juegos. El *equilibrio de Nash* de un juego es un perfil de estrategias, tal que ningún jugador tiene un incentivo unilateral para apartarse de su comportamiento determinado por las mismas, eligiendo otra estrategia. En otras palabras, en un equilibrio de Nash, la estrategia de cada jugador (establecida en dicho equilibrio) es la *mejor respuesta* a las estrategias de los otros. El equilibrio de Nash se puede considerar

como una extensión de la solución minimax de von Neumann [16] para los juegos de suma nula, al caso de juegos de suma no nula. Junto a la definición del concepto de equilibrio, Nash también hizo una prueba de su existencia bajo supuestos bastantes generales. El equilibrio de Nash, y sus revisiones posteriores, constituyen la solución del juego, es decir, la mejor predicción posible para el resultado de una situación de decisión no cooperativa dada.

La Teoría de Juegos Clásica se basa en dos premisas fundamentales: (1) la racionalidad perfecta de los jugadores, y (2) que la misma es de conocimiento común. La hipótesis de *racionalidad perfecta* significa que los jugadores tienen funciones de pago bien definidas, y son plenamente concientes de sus propias estrategias disponibles, de las estrategias disponibles por los oponentes y los valores de los pagos correspondientes. Se supone que los jugadores no tienen limitaciones cognitivas en la deducción de la mejor manera posible de jugar, sin importar la complejidad del juego en cuestión. En este sentido, se supone que sus cálculos no tienen costo y son instantáneos. El *conocimiento común* implica que además del hecho de que todos los jugadores son racionales, todos los agentes saben que los restantes jugadores son racionales también. Es en este contexto que definiremos el *equilibrio de Nash*.

Una estrategia s_n , de un jugador n , es *estrictamente dominada* por una estrategia s'_n (pura o mixta), si y sólo si, para cada perfil de estrategias de los oponentes, $s_{-n} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_{n+1}, \dots, s_N)$, el jugador n siempre obtiene un mejor pago jugando s'_n , que jugando cualquier otra s_n ,

$$\forall s_{-n} : u_n(s'_n, s_{-n}) > u_n(s_n, s_{-n}). \quad (1.7)$$

De acuerdo con la definición resumida usual de racionalidad (Aumann, 1992 [17]), los jugadores racionales no juegan estrategias estrictamente dominadas. Por lo tanto, las estrategias estrictamente dominadas pueden ser eliminadas de forma iterativa del problema, ya que por definición sabemos que ninguna de ellas puede formar parte de la solución óptima del juego. En algunos casos, como el Dilema del Prisionero, sólo un perfil de estrategias sobrevive a este procedimiento, que es entonces la “solución” del juego según la racionalidad perfecta. Es más común, sin embargo, que la *eliminación iterada de las estrategias estrictamente dominadas* no resuelva el juego, ya sea porque

no existan estrategias estrictamente dominadas en lo absoluto, o porque más de un perfil de estrategias sobreviva a dicha eliminación.

Un concepto más fuerte, que es aplicable para todos los juegos, es el concepto de *equilibrio de Nash*. Un perfil de estrategias $s^* = (s^*_1, \dots, s^*_N)$ de un juego es un *equilibrio de Nash* (EN) si y sólo si:

$$\forall n, s_n \neq s^*_n : u_n(s^*_n, s^*_{-n}) > u_n(s_n, s^*_{-n}). \quad (1.8)$$

En otros términos, cada estrategia s^*_n es una *mejor respuesta* (MR) a las estrategias de sus oponentes,

$$\forall n : s^*_n = \text{MR}(s^*_{-n}) \quad (1.9)$$

donde

$$\text{MR}(s^*_{-n}) = \text{argmax}_{s_n} u_n(s_n, s^*_{-n}). \quad (1.10)$$

Cuando la desigualdad anterior es estricta, s^* es llamado un *equilibrio de Nash estricto*. La condición del EN asegura que ningún jugador tenga un incentivo unilateral para desviarse del perfil y jugar otra estrategia, porque, dadas las elecciones de los demás jugadores, no hay manera en que pueda mejorar su pago. Uno de los resultados principales de la Teoría de Juegos Clásica es el *Teorema de Nash* (Nash, 1950 [15]), que establece que, dado un juego en su forma normal con un número finito de jugadores y un número finito de estrategias puras, existe al menos un EN, que puede ser de estrategias mixtas. La prueba del teorema se hace utilizando el teorema del punto fijo de Kakutani. Un EN es llamado un *equilibrio de Nash simétrico* si todos los agentes juegan la misma estrategia en el perfil de estrategias.

El equilibrio de Nash es un concepto de estabilidad, pero sólo en un sentido bastante restricto: estable respecto a cambios en la estrategia de un solo agente (unilaterales) en el perfil de estrategias. No nos dice lo que puede ocurrir si más de un agente cambia su estrategia al mismo tiempo. En este caso, es posible clasificar los EN en dos categorías. Puede suceder que exista un cambio colectivo adecuado de estrategias (con respecto al EN original) que aumente los pagos de algunos de los jugadores, y no disminuya los pagos demás. Claramente entonces el EN original era *ineficiente* (a veces se le llama *equilibrio deficiente* a este tipo de situación, [18]), y,

en teoría puede ser enmendado por el nuevo perfil de estrategias propuesto. En todos los demás casos el EN es tal que cualquier cambio colectivo de estrategias hace que al menos un jugador quede en peor situación a la dada (o, en el caso degenerado, todos los pagos siguen siendo los mismos). Estos EN se llaman *Pareto-eficientes*, y no hay forma obvia de mejorarlos.

La eficiencia de Pareto puede ser utilizada como un criterio adicional (lo que se llama un refinamiento) con respecto al concepto de EN, que provee una *selección de equilibrios*, en los casos en que el concepto de EN por sí solo proporciona más de una solución para el juego, como en algunos problemas de coordinación. Por ejemplo, si un juego tiene dos EN, siendo el primero Pareto-eficiente, y el segundo no, entonces podemos decir que el *concepto refinado de equilibrio estratégico* (en este caso, el concepto de equilibrio de Nash, más el de la eficiencia de Pareto) predice que el resultado correcto del juego es el primero de los EN. La preferencia de equilibrios Pareto-eficientes en lugar de equilibrios deficientes se convierte, en este caso, en una parte inherente de la definición de racionalidad.

Puede ocurrir también que el juego tenga un único EN, que no sea, sin embargo, Pareto-eficiente, y por lo tanto el bienestar social (la suma de todas las utilidades individuales) no sea maximizado en equilibrio. Uno de los ejemplos paradigmáticos de esta situación es el *Dilema del Prisionero*, donde el equilibrio de Nash podría ser, obviamente, evitado por un planificador central. Sin semejante control supremo, sin embargo, los resultados eficientes se hacen inestables por los incentivos individuales de cada uno de los jugadores a ganar más, en desmedro de su oponente. La única solución estable, en este caso, es el equilibrio de Nash (que consiste en que ambos prisioneros traicionen a su compañero, lo cual redundaría en que ambos reciban el pago “castigo”, P , siendo que, paradójicamente, hubieran obtenido una mejor utilidad si ambos hubieran elegido cooperar, la “recompensa”, R), que es ineficiente⁷. Una de

⁷Para el Dilema del Prisionero, es fácil probar que el perfil de estrategias (D,D) (correspondiente a que ninguno de los jugadores coopere) es un equilibrio de Nash. Para cada jugador por separado, es evidente que, juegue lo que juegue su oponente, siempre obtendrá mejor utilidad jugando D. Si su oponente juega C, el jugador obtiene un mayor pago $T > R$, si juega D, que si juega C. Si su oponente juega D, igualmente, el jugador logra un mejor pago jugando D que jugando C, pues $P > S$. Por lo tanto, (D,D) cumple la condición de la definición de equilibrio de Nash, dada la jugada de su oponente, ningún jugador puede mejorar su situación individual cambiando la estrategia jugada. Adicionalmente, se puede ver fácilmente, que ninguna de las otras 3 posibles parejas de estrategias puras son equilibrios de Nash. Por ejemplo, en el caso (C,C), si un jugador hubiera elegido cambiar

las tareas más importantes de la Teoría de Juegos es estudiar la forma de cómo resolver estos dilemas sociales, y ofrecer una explicación de la forma microscópica (individual) de como las interacciones agente-agente, sin un planificador central, aún pueden generar un estado de cooperación (espontánea) global y una solución más eficiente para muchas situaciones de la vida real.

1.4. Juegos Repetidos

La mayoría de las interacciones entre agentes que pueden ser modeladas por juegos abstractos no están relacionadas con situaciones de un solo turno, sino que se repiten de forma periódica. Cuando los mismos jugadores racionales participan repetidamente y de forma iterativa de un juego de un solo turno, no se puede aislar cada una de las instancias de esta serie (turno) y tratarla por separado. Por el contrario, en este caso, toda la serie debe ser analizada como un solo “superjuego”. Lo que un jugador hace en el principio de la serie puede afectar lo que otros decidan hacer más adelante. Supongamos que el mismo juego G (llamado *juego de un turno*) se juega un número T de veces. G puede ser el Dilema del Prisionero o cualquier otro juego matricial o bimatricial de los discutidos hasta ahora. El conjunto de acciones posibles y los pagos del juego de un turno en el período t ($t = 1, \dots, T$) son independientes de t y de la historia anterior del juego. Esto no significa, sin embargo, que las acciones en cada paso temporal se elijan independiente del tiempo y de la historia. Cuando G se juega en el instante t , toda la historia de las etapas anteriores hasta ese momento es de conocimiento común. Los pagos de los agentes, en un juego iterado, suelen definirse como la suma de todos los pagos recibidos a lo largo del tiempo.⁸ Sin embargo, es común también en muchas simulaciones de juegos iterados espaciales, tomar las utilidades del juego iterado iguales a los pagos instantáneos que obtienen los agentes en cada paso temporal. Esta segunda opción es la utilizada en esta Tesis.

su estrategia C por D, hubiera obtenido una mejor utilidad individual $T > R$. Similarmente, si consideramos el caso (C,D) o (D,C), el jugador que eligió C, puede mejorar su utilidad individual, eligiendo jugar D en su lugar, pues $P > S$. Se puede probar que tampoco existen equilibrios de Nash de estrategias mixtas para el Dilema del Prisionero.

⁸Eventualmente, en el caso de repeticiones infinitas, debe introducirse un factor de descuento o un promediado de dicha suma de pagos, para evitar que los pagos del superjuego se vuelvan infinitos en el límite de tiempos muy largos. Para más detalles, ver Apéndice B.

En juegos estáticos de un solo turno con información completa, como los que hemos considerado en los apartados anteriores, una estrategia es simplemente una acción que un jugador puede elegir en un turno dado. Para los juegos repetidos (y también para otros tipos de juegos dinámicos) el concepto de estrategia se hace más complejo. En estos juegos, *la estrategia de un jugador es un plan completo de actuación, que especifica que acción tomar, en cualquier contingencia en la que el jugador se encuentre*. El número de las posibles contingencias en un juego repetido es el número de historias posibles que el juego podría haber producido hasta un momento dado. Entonces, en este caso, la estrategia es, de hecho, un algoritmo matemático que determina la salida (la acción a tomar en el período t), en función de la entrada (el tiempo actual t y la historia de las acciones de todos los jugadores hasta el instante $t-1$). En el caso de la racionalidad perfecta no existe un límite para la complejidad de estos algoritmos. Sin embargo, la hipótesis de *racionalidad acotada* puede restringir las estrategias viables a sólo aquellas que no requieran una memoria demasiado larga o algoritmos demasiado complejos.

A modo de ejemplo, la figura 1.1 ilustra algunas estrategias frecuentemente citadas en relación al Dilema del Prisionero Iterado (o Repetido). Sea L_M la longitud de la memoria de los agentes (número de jugadas anteriores que se toman en cuenta en el algoritmo estratégico). Algunas de las estrategias, como “Siempre C” ($L_M = 0$), “Tit for Tat” (TFT, $L_M = 1$) o “Pavlov” ($L_M = 1$), son estrategias de memoria finita, otras como “Tit for Tat Arrepentido” (Contrite TFT o CTFT, Boerlijst et al., 1997 [19]; Panchanathan y Boyd, 2004 [20]) depende como entrada de la historia completa de las acciones. Sin embargo, la necesidad de una memoria a largo plazo a veces puede ser sustituida por la introducción de nuevas variables de estado de los agentes. (Nowak y Sigmund, 2005 [21] ; Panchanathan y Boyd, 2004 [20]). Por ejemplo, una de estas variables puede codificar la “reputación” de los agentes, que puede ser utilizada en la toma de decisiones, especialmente cuando el juego es tal que los opositores se eligen al azar en la población en cada turno. Por supuesto, en este caso, una estrategia deberá incluir una regla para la actualización de estas variables de estado también. A veces, estas estrategias pueden ser convenientemente expresadas como Máquinas de Estados Finitos (Autómatas de Estados Finitos, Binmore y Samuelson, 1992 [22]; Lindgren, 1997 [23]).

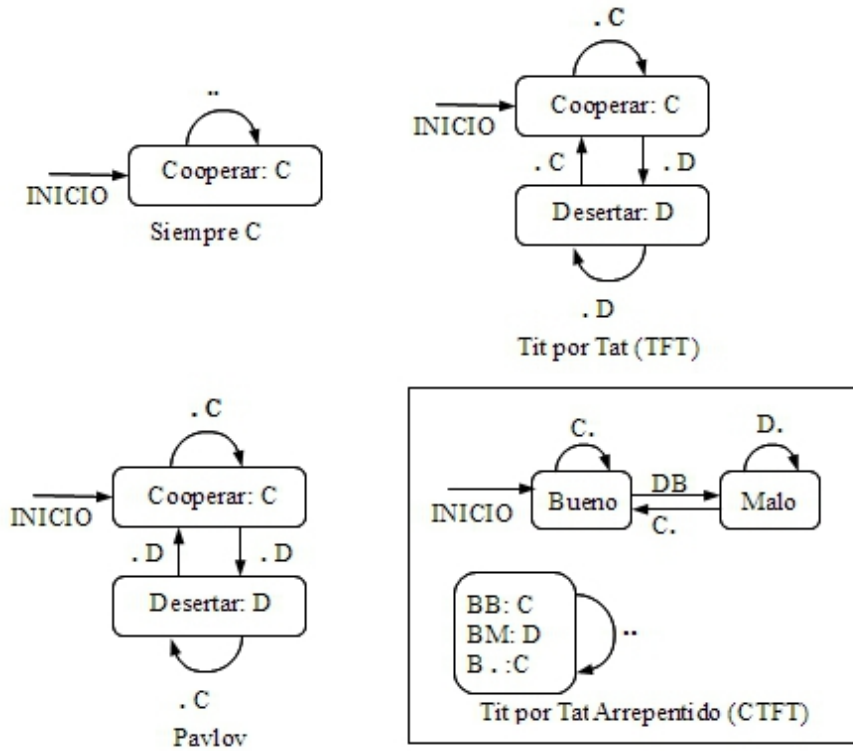


Figura 1.1: Algunas estrategias para el Dilema del Prisionero Iterado, representadas como Máquinas de Estados Finitos. Siempre C, Tit por Tat (TFT) y Pavlov requieren una memoria a corto plazo, mientras que Tit for Tat Arrepentido (CTFT) utiliza una variable de estado adicional para los agentes: Bueno (B) o Malo (M). Los cuadros denotan el estado del agente y su intención de actuar en el próximo turno. Las flechas están marcadas según las últimas acciones del jugador y su oponente (la implementación de errores está permitida). Los puntos se utilizan como comodines. Para CTFT el diagrama de arriba da la regla general para la asignación de la reputación, y el diagrama de abajo da la regla de elección de las acciones, dadas las etiquetas actuales de reputación del jugador y de su oponente.

Para ampliar el concepto de EN al caso de los Juegos Repetidos es necesario introducir un refinamiento: El Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (Selten, 1965 [24]). Dicho equilibrio consiste en un EN del juego completo iterado, que también lo es para todos los posibles subjuegos, entendiendo por subjuego a cualquier subserie temporal del juego original, que vaya desde un instante $t > 0$ arbitrario hasta el instante final del juego repetido, T (que eventualmente, puede ser infinito). Ver Apéndice B para más detalles.

Uno de los resultados más llamativos de la Teoría de Juegos Racional es que no existe cooperación en el Dilema del Prisionero Iterado finitas veces. De hecho, el teorema es más general y establece que, *si un juego de un turno G tiene un solo EN, luego el único EN perfecto en subjuegos de $G(T)$ es aquel en el que el EN de G se juega en cada instante del juego repetido finito*. La demostración se hace por inducción hacia atrás. En el último turno T de un Dilema del Prisionero Iterado Finito los jugadores racionales no cooperarán (jugarán D), ya que la estructura de incentivos del juego en este caso es la misma que la de G . En el último paso temporal no hay lugar para esperar recompensas futuras de cooperación o castigos futuros por la deserción. Sabiendo que la deserción es esperada en el último período, pasamos a considerar el penúltimo instante $T - 1$, y encontramos que la rentabilidad efectiva de la matriz de pagos en términos de los restantes $T - 1$ pasos temporales es equivalente de Nash a la de G (los pagos esperados en el último turno constituyen un corrimiento constante de matriz de pagos original). La estructura de incentivos sigue siendo similar a la de G , y por lo tanto los agentes desertarán. Consideramos ahora el ante-penúltimo turno y obtenemos resultados similares, etc. El proceso de inducción se puede continuar hacia atrás hasta el instante inicial, lo que demuestra que los jugadores racionales no cooperarán (jugarán D) en todas los turnos del Dilema del Prisionero Iterado Finito. Esta situación es llamada la Paradoja de la Inducción Hacia Atrás, ya que en la vida real, existen muchos casos de iteraciones finitas de PD que han resultado en cooperación de los jugadores.

Contrariamente a lo que se predice para un juego repetido finito, los juegos repetidos *infinitamente* pueden comportarse de manera diferente. De hecho, se ha constatado que la cooperación puede ser racional en juegos repetidos infinitamente. La colección de teoremas que formaliza este resultado se refiere generalmente como el *Teorema*

Popular (Folk Theorem)⁹. Por más detalles, ver Apéndice B.

Una forma posible de explicar la cooperación en dilemas sociales finitamente repetidos es suponer que los jugadores no son completamente racionales (lo cuál se refleja en que sus estrategias estén determinadas por algoritmos con memoria finita), o que su racionalidad no es de conocimiento común.

Competencia y cooperación son dos caras inseparables de una misma moneda. Si bien la competencia es un concepto clave en la teoría de Darwin de la evolución, la cooperación es bastante desconcertante, pero omnipresente en la naturaleza (Maynard Smith y Szathmary, 1997 [25]). Cómo evolucionó el comportamiento cooperativo entre los individuos con intereses propios, es una importante pregunta abierta en la biología y las ciencias sociales, junto con la cuestión de cómo la cooperación se articula en la competencia, a fin de lograr óptimos individuales y globales. Una poderosa herramienta para analizar estos problemas es la Teoría Evolutiva de Juegos (Hofbauer and Sigmund, 1998 [26]; Maynard Smith, 1982 [27]; Weibull, 1997 [28]), que consiste en una aplicación de la teoría matemática de juegos a los contextos biológicos.

1.5. Juegos Evolutivos: Dinámicas de Poblaciones

La *Teoría Evolutiva de Juegos* es la teoría de la adaptación dinámica y el aprendizaje en juegos repetidos (infinitamente) jugados por agentes de racionalidad acotada. Aunque hoy en día la Teoría de Juegos Evolutiva se entiende como una teoría dinámica intrínsecamente, la misma comenzó originalmente en los 70 como un novedoso concepto de refinamiento estático para los equilibrios de Nash. Manteniendo el orden histórico, discutiremos primero el concepto de *Estrategia Evolutivamente Estable* (EEE) y sus extensiones. El concepto de EEE investiga la estabilidad de un equilibrio bajo mutaciones raras, y no requiere la especificación de la dinámica subyacente real del juego. Posteriormente, discutiremos los distintos tipos posibles de evolución dinámica, su comportamiento y su relación con el concepto estático. En esta sección, restringiremos mayormente nuestra atención a los denominados “juegos poblacionales”. Debido a una serie de supuestos de simplificación relacionados con

⁹El nombre de “Teorema Popular” se refiere al hecho de que algunos de estos resultados fueran de conocimiento general ya en la década de 1950, incluso antes que nadie los hubiera publicado. Aunque más tarde teoremas específicos fueron probados y publicados, el nombre quedó.

el tipo y número de agentes y su red de interacción, estos modelos dan lugar a una descripción a nivel agregado relativamente simple. Sin embargo, en el caso de juegos con un número finito de jugadores, o con estructura social más complicada, las fluctuaciones estadísticas, derivadas de la dinámica microscópica o de la estructura social (y topológica) de las vecindades no pueden ser despreciadas. Estos últimos modelos son más complejos, y por lo general requieren un análisis a un nivel inferior, llamado análisis *basado en agentes*. Comentaremos las diferentes dinámicas disponibles en este tipo de modelos.

1.5.1. Juegos Poblacionales

Un juego de *campo medio* o un *juego poblacional* se define por el juego subyacente de un turno y de dos jugadores, el conjunto de estrategias posibles (usualmente las estrategias mixtas no se permiten o están fuertemente restringidas), y el mecanismo de actualización heurística de las estrategias individuales (reglas de actualización). Esta definición implica tácitamente las siguientes hipótesis simplificadoras:

- 1) El número de agentes de racionalidad acotada es muy grande, $N \rightarrow \infty$;
- 2) O bien todos los agentes son equivalentes y tienen las mismas matrices de pagos (juegos simétricos), o bien los agentes forman dos grupos diferentes entre sí, pero homogéneos internamente, para cada uno de los dos roles posibles en el juego (juegos asimétricos);
- 3) En cada etapa del juego (turno), los agentes o bien son apareados al azar con igual probabilidad (juegos simétricos), o bien los agentes en un grupo son emparejados al azar con los agentes del otro grupo (juegos asimétricos), por lo que la red social es la más simple posible;
- 4) Las actualizaciones de estrategias son poco frecuentes en comparación con la frecuencia de juego, de modo que la actualización se puede basar en la tasa promedio de éxito de una estrategia.
- 5) Todos los agentes utilizan las mismas reglas de actualización de sus estrategias.
- 6) Los agentes son miopes, es decir, que toman como utilidad el valor instantáneo de los pagos obtenidos en cada paso temporal en lugar de tomar la utilidad acumulada en el tiempo .

En los juegos poblacionales las fluctuaciones derivadas de la aleatoriedad del pro-

cedimiento de apareación de los agentes jugando estrategias mixtas (si se permite), o reglas de actualización estocásticas, se promedian y se pueden despreciar. Por esta razón, *los juegos poblacionales constituyen el nivel de campo medio de la Teoría Evolutiva de Juegos*. Estas simplificaciones nos permiten caracterizar el perfil general de comportamiento de una población, y por tanto la dinámica de juego, por medio de un número restringido de variables de estado.

Juegos Matriciales

Consideremos primero un juego simétrico $G = (A, A^T)$. Supongamos que hay N jugadores $n = 1, \dots, N$, cada uno jugando una estrategia pura s_n del conjunto discreto de estrategias posibles $s_n \in S = \{e_1, e_2, \dots, e_Q\}$. Es conveniente pensar en la estrategia e_i como un vector unitario de Q componentes, cuya componente i -ésima es 1, y las demás componentes son nulas. Entonces, e_i apunta a la esquina i del simplex de estrategias mixtas Δ_Q .

Sea N_i el número de jugadores que juegan la estrategia e_i . En cualquier instante, el estado de la población se caracteriza por las frecuencias relativas (abundancia, concentraciones) de las diferentes estrategias, es decir, por el vector de estado ρ en Q dimensiones:

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n = \sum_{i=1}^Q \frac{N_i}{N} e_i \quad (1.11)$$

Claramente, tenemos que $\sum_i \rho_i = \sum_i N_i/N = 1$, es decir que $\rho \in \Delta_Q$. Notamos que ρ puede ser cualquier punto del simplex Δ_Q aunque los jugadores sólo puedan jugar estrategias puras (representadas por las esquinas del simplex) en el juego. Dicho en otras palabras, la estrategia promedio puede no estar en el conjunto de estrategias posibles para un solo jugador individual. Los pagos pueden ser expresados en función de las frecuencias de las estrategias. El pago esperado (normalizado) para el jugador

n jugando la estrategia s_n en la población es ¹⁰

$$u_n(s_n, \rho) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N s_n \cdot A s_m = s_n \cdot A \rho, \quad (1.12)$$

donde la suma se hace sobre todos los jugadores m de la población excepto n , pero esta omisión es despreciable en el límite de población infinita. La ecuación (1.12) implica que para un jugador dado, el efecto unificado de los otros agentes de la población funciona como si el agente jugara contra un solo *agente representativo*, que juega la estrategia promedio de la población como si fuera una estrategia mixta. A pesar de la similitud formal, ρ no es una estrategia mixta posible del juego, sino el promedio de las estrategias puras jugadas por los agentes de la población. No es trivial a primera vista como tratar las estrategias mixtas en el caso en que las mismas no estén prohibidas en el juego de un solo turno original. Efectivamente, en el caso de un juego no restringido matricial de $S \times S$, hay S estrategias puras y un número infinito de estrategias mixtas: cada punto del simplex Δ_S representa una posible estrategia mixta del juego. En el caso en que las estrategias mixtas sean permitidas en el juego de un solo turno, el vector ρ es una especie de “funcional de estado” sobre Δ_S . Sin embargo, en muchas aplicaciones biológicas y económicas, la naturaleza del problema prohíbe las estrategias mixtas. En ese caso, el número de posibles estrategias de la población es simplemente $Q = S$.

Es bastante directo extender formalmente el concepto de equilibrio de Nash, definido hasta ahora a nivel de agentes, a un nivel agregado, donde las frecuencias de las estrategias en la población se suponen conocidas. Un *estado* de la población $\rho^* \in \Delta_Q$

¹⁰Es importante remarcar aquí que las estrategias puras s_m , son representadas por vectores de una base canónica de $\mathbb{R}^Q$, donde la dimensión Q es igual al número de estrategias disponibles en el juego de un turno, A es la matriz de pagos, y la notación $s_n \cdot A s_m$ (donde el punto indica producto escalar, y el producto usual de una matriz con un vector se nota simplemente por la concatenación de una matriz, seguida de un vector de dimensiones adecuadas) es equivalente a notar el producto matricial dado por $s_n^T A s_m$, donde la T en el supraíndice implica transposición. Observamos adicionalmente que los estados poblacionales agregados, ρ , definidos abajo, son vectores de norma Manhattan uno (esta norma se define como la suma de los valores absolutos de las componentes del vector), formados por la combinación lineal de los vectores de la base canónica correspondiente a las estrategias del juego original, anteriormente definidas.

se llama *equilibrio de Nash del juego poblacional* si y solo si:

$$\rho^* \cdot A\rho^* \geq \rho \cdot A\rho^* \quad \forall \rho \in \Delta_Q. \quad (1.13)$$

Notamos que los EN de un juego poblacional siempre son equilibrios simétricos del juego de un turno de dos jugadores. Los equilibrios asimétricos no pueden ser interpretados a nivel poblacional.

1.5.2. Estabilidad Evolutiva

Un problema central de la Teoría Evolutiva de Juegos es la estabilidad y la solidez de los perfiles de estrategias en una población. En efecto, por ejemplo la evolución biológica no es un proceso continuo, sino que se caracteriza por acontecimientos de transición abrupta de especiación y extinción de una duración relativamente corta, que separan largos períodos de relativa tranquilidad y estabilidad. En este sentido, una solución proporcionada por un modelo de Teoría de Juegos sólo puede ser una solución plausible si es estable “evolutivamente”.

Estrategias Evolutivamente Estables

El primer concepto de estabilidad evolutiva fue formulado por Maynard-Smith y Price (1973) [29], en el contexto de los juegos poblacionales simétricos. Una *Estrategia Evolutivamente Estable* (EEE) es una estrategia que, cuando es utilizada por toda una población, es inmune contra la invasión de una minoría de mutantes que juegan una estrategia diferente. Los jugadores que juegan de acuerdo a una EEE obtienen mejores beneficios que los mutantes en la población y, por lo tanto, a largo plazo, excluyen y expulsan a los invasores. Una EEE persiste como la estrategia dominante en escalas de tiempo evolutivo, por lo que las estrategias observadas en el mundo real son típicamente EEEs. El concepto de EEE es relevante cuando la tasa de mutación (en Biología) es baja. En general, la estabilidad evolutiva implica un *umbral de invasión*, es decir, una EEE sólo puede resistir la invasión hasta llegar a una frecuencia de mutantes crítica finita en la población. El concepto de EEE no contiene ninguna referencia a la dinámica real del juego, por lo que es un concepto “estático”. La única hipótesis que requiere es que la estrategia que obtiene mejores

utilidades, debe tener una tasa mayor de replicación (crecimiento). A fin de formular la estabilidad evolutiva, consideramos un juego matricial con S estrategias puras y todas las posibles estrategias mixtas compuestas a partir de estas estrategias puras, y una población en la que la mayoría, una fracción $1 - \epsilon$ de la población total, juega la estrategia en cuestión $p^* \in \Delta_S$ y una porción minoritaria del total de agentes, ϵ , juega una estrategia mutante $p \in \Delta_S$. Tanto p^* como p pueden ser estrategias mixtas. La estrategia promedio de la población, que determina los pagos individuales esperados en la misma (de campo medio), es $\rho = (1 - \epsilon)p^* + \epsilon p$, $\rho \in \Delta_S$. La estrategia p^* es una EEE, si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, menor que cierto umbral de invasión ϵ_0 , y para cualquier posible estrategia mutante $p \in \Delta_S$, la estrategia p^* obtiene ganancias estrictamente mejores en la población mixta que la estrategia mutante p ,¹¹

$$u(p^*, \rho) > u(p, \rho), \quad (1.14)$$

o sea,

$$p^* \cdot A\rho > p \cdot A\rho. \quad (1.15)$$

Si la desigualdad no es estricta, usualmente el equilibrio hallado en ese caso se llama un EEE *débil*. La ecuación (1.15) toma la forma explícita

$$p^* \cdot A[(1 - \epsilon)p^* + \epsilon p] > p \cdot A[(1 - \epsilon)p^* + \epsilon p], \quad (1.16)$$

que puede ser reordenada como

$$(1 - \epsilon)(p^* \cdot Ap^* - p \cdot Ap^*) + \epsilon(p^* \cdot Ap - p \cdot Ap) > 0. \quad (1.17)$$

Entonces, p^* es un EEE si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Condición de EN:

$$p^* \cdot Ap^* \geq p \cdot Ap^* \quad \forall p \in \Delta_S, \quad (1.18)$$

¹¹Observamos de nuevo aquí, que las estrategias mixtas individuales p , son, similarmente a lo que se definió anteriormente para estrategias poblacionales, vectores de norma Manhattan uno, consistentes con la combinación lineal de la base canónica de vectores que representa las estrategias puras disponibles en el juego de un turno. Igual que antes, tenemos que el punto denota producto escalar, de modo que $p_1 \cdot Ap_2$ es una expresión equivalente a $p_1^T Ap_2$.

(2) Condición de estabilidad:

$$p \neq p^*, p^* \cdot Ap^* = p \cdot Ap^* \Rightarrow p^* \cdot Ap > p \cdot Ap. \quad (1.19)$$

De acuerdo a (1), p^* debe ser un equilibrio de Nash simétrico del juego de un turno. Por lo tanto, a partir de la definición (1.13) y de la condición (2), si p^* es un EN no estricto, entonces p^* debe obtener pago mejor jugando contra cualquier otro p , que el pago obtenido por cada uno de esos p , jugando contra contra sí mismos. Claramente todos los EN estrictos simétricos son EEE, y todos los EEE son EN simétricos, pero no todos los EN son evolutivamente estables. Debido a este hecho, el EEE provee un medio de selección de equilibrios (o refinamiento del EN). Sin embargo, un juego puede tener varios EEE, o no tener ningún EEE, a diferencia de lo que ocurre con los EN, cuya existencia está asegurada por el Teorema de Nash.

Como un ejemplo, consideramos el juego de Halcón-Paloma, definido anteriormente, cuya matriz de pago es descrita en (1.5). El juego de un turno tiene un equilibrio de Nash dado por la siguiente estrategia mixta:¹²

$$p^* = \begin{pmatrix} 1 - v/c \\ v/c \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

que es un EEE. Efectivamente, tenemos

$$\forall p \in \Delta_2 : p \cdot Ap^* = \frac{v}{2} - \frac{v^2}{2c} \quad (1.21)$$

independientemente de p ¹³. Entonces la ecuación (1.18) es satisfecha para todo p en la igualdad. Luego debemos chequear la condición de estabilidad en la ecuación

¹²Notar que la estrategia p^* consiste en una estrategia mixta, cuya probabilidad de actuar como halcón es v/c (recordar que $v < c$) y cuya probabilidad de jugar como paloma es $1 - v/c$. Su notación vectorial es consistente con el orden dado a las columnas y filas en la definición de la matriz de pagos, (1.5).

¹³Esto se debe a que el producto de la matriz de pagos definida en (1.5), con p^* , definido en (1.20), da como resultado $(v/2 - v^2/2c)(s_1 + s_2)$, siendo s_1 el primer vector de la base canónica, correspondiente a elegir la estrategia pura paloma, y s_2 el segundo vector de la misma, correspondiente a elegir la estrategia pura halcón, y al hecho de que todos los p deben tener, por constucción, norma uno.

(1.19). Parametrizando p como $p = (q, 1 - q)^T$, tenemos,

$$p^* \cdot Ap - p \cdot Ap = \frac{(v - qc)^2}{2c} > 0, \quad \forall q \neq \frac{v}{c}, \quad (1.22)$$

con lo cual la ecuación (1.19) es efectivamente satisfecha, y por tanto p^* es un EEE. De hecho, este es el único EEE del juego Halcón-Paloma. Se puede probar un teorema (Hofbauer and Sigmund, 1998 [26]; Cressman, 2003 [30]) que dice que, una estrategia p^* es un EEE si y solo si la misma es *localmente superior*, o sea p^* tiene una vecindad en Δ_S tal que, para todo $p \neq p^*$ en esa vecindad, se cumple

$$p^* \cdot Ap > p \cdot Ap. \quad (1.23)$$

En el ejemplo del juego de Halcón-Paloma, como se ve en la ecuación (1.22), la superioridad local vale en el espacio de estrategias completo, pero esto no necesariamente es cierto en otros juegos.

1.5.3. Dinámica del Replicador

Un modelo de la Teoría Evolutiva de Juegos, se completa postulando la dinámica del juego, es decir, las normas que describen la actualización de las estrategias de la población. Dependiendo del problema real, diferentes tipos de dinámicas pueden ser apropiadas. La dinámica del juego puede ser continua o discreta, determinista o estocástica, y dentro de estas categorías principales, un gran número de diferentes reglas pueden ser formuladas en función de la situación en estudio.

A nivel macroscópico, la dinámica evolutiva continua más estudiada es la *dinámica del replicador*. Originalmente fue introducida por Taylor y Jonker (1978) [31], y tiene una presencia excepcional en los modelos de evolución biológica. A nivel fenomenológico la dinámica del replicador se puede postular directamente por el supuesto de que la tasa de crecimiento per cápita $\dot{\rho}_i/\rho_i$ de un determinado tipo de estrategia es proporcional a la diferencia de idoneidades

$$\frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} = \text{ideoneidad del tipo de estrategia } i - \text{ideoneidad promedio} \quad (1.24)$$

La ideoneidad es una medida del éxito evolutivo individual, o sea que, en el contexto de la Teoría de Juegos, la podemos asociar a los pagos recibidos en el juego. En los juegos poblacionales la ideoneidad de una estrategia i es $(A\rho)_i$, mientras que la ideoneidad promedio es $\rho \cdot A\rho$. Esto nos lleva a la ecuación

$$\dot{\rho}_i = \rho_i((A\rho)_i - \rho \cdot A\rho) \quad (1.25)$$

que usualmente es llamada la *forma de Taylor* de la ecuación del replicador. Bajo hipótesis ligeramente diferentes, la ecuación del replicador toma la forma:

$$\dot{\rho}_i = \frac{\rho_i((A\rho)_i - \rho \cdot A\rho)}{\rho \cdot A\rho}, \quad (1.26)$$

que es llamada la *forma de Maynard-Smith*. En esta forma de la dinámica, el incremento temporal de la frecuencia de la estrategia i -ésima es proporcional a la diferencia de ideoneidades relativas. Notamos que el papel del denominador es simplemente el de cambiar la escala de la velocidad del flujo. Para ambas formas, el simplex Δ_Q es invariante, y también lo son todas sus caras: si la condición inicial no contiene una cierta estrategia i , o sea, $\rho_i(t=0) = 0$, para algún i dado, su densidad permanecerá siendo nula para todo instante, $\rho_i(t) = 0, \forall t$. La dinámica del replicador no inventa nuevas estrategias, y este es el prototipo de una clase más amplia de dinámicas, llamadas *dinámicas no innovativas*. Ambas formas del replicador pueden ser deducidas rigurosamente a partir de hipótesis microscópicas.

Dinámica y Estabilidad Evolutiva

¿Cuál es la conexión entre la estabilidad dinámica y estabilidad evolutiva? Por desgracia, los dos conceptos no se superponen perfectamente. La relación real se resume mejor en forma de dos colecciones de teoremas: una relativa a los equilibrios de Nash y la otra relativa a la estabilidad evolutiva. Respecto a los equilibrios de Nash en juegos matriciales bajo la dinámica del replicador, los *Teoremas Populares de la Teoría de Juegos Evolutiva* establecen:

(a) *Todos los EN son puntos de equilibrio.*

- (b) *Los EN estrictos son atractores.*¹⁴
- (c) *Si una órbita interior*¹⁵ *converge a p^* , entonces p^* es un EN.*
- (d) *Si un punto de equilibrio es estable, entonces es un EN.*

Ninguno de los recíprocos se cumple en general. Por ejemplo, en el caso de (a), pueden existir puntos de equilibrio que no son EN. O en el caso de (b), no todos los atractores son EN estrictos. Los principales resultados para la relación sutil entre la dinámica del replicador y la estabilidad evolutiva se pueden resumir de la siguiente manera (Cressman, 2003 [30]; Hofbauer y Sigmund, 1998 [26], 2003 [32]):

- (a) *Los EEE son atractores.*
- (b) *los EEE interiores son atractores globales.*¹⁶
- (c) *Para los juegos potenciales un punto fijo es un EEE si y sólo si es un atractor.*
- (d) *En el caso de juegos matriciales 2×2 , un punto fijo es un EEE si y sólo si es un atractor.*

Otra vez, los recíprocos de (a) y (b) no siempre son verdaderos.

1.5.4. Otras Dinámicas

En el Apéndice C se describen otras dinámicas posibles para los Juegos Evolutivos. En particular, se discuten las *dinámicas basadas en agentes*. Las mismas consisten en reglas microscópicas que dan la actualización del estado cada agente en cada paso temporal, que puede depender de su historia previa y de su entorno espacial (vecindad). Si bien se pueden hacer teorías de campo medio (poblacionales) para las diversas posibilidades de reglas microscópicas, por lo general los resultados no coinciden con los obtenidos a partir de simulaciones de la evolución de un número muy grande pero finito de agentes, colocados sobre una red espacial. La actualización sincrónoma de todos los agentes en este tipo de simulaciones, nos lleva

¹⁴Un atractor es un conjunto del espacio de las fases al que un sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo. Para que dicho conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas.

¹⁵Una órbita interior es aquella que se encuentra en completamente el interior del espacio de las fases, o sea que no contiene puntos de su frontera, y por tanto se pueden definir entornos abiertos del espacio de las fases en torno a cualquiera de sus puntos.

¹⁶Un atractor global es un atractor al que tienden todas las trayectorias del sistema en el espacio de las fases, y no solamente aquellas que se encuentran cercanas al mismo.

al caso de los Autómatas Celulares (AC), que son el tipo de simulación utilizado en esta Tesis. Existen muchas posibles reglas microscópicas de actualización del estado de los agentes. En el caso de nuestras simulaciones, utilizamos reglas de imitación para la actualización de las estrategias de los agentes. Cada agente compara sus utilidades con las de sus vecinos más próximos, y copia (de manera determinística o estocástica) la estrategia de su vecino más exitoso.

1.6. Los efectos de la Topología de las Redes de Interacción

Es bien conocido que las redes de interacción de la vida real pueden tener una topología bastante compleja, que está lejos del campo de validez usual de los resultados de campo medio. Por un lado, existe una gran clase de situaciones en las que se determina el grafo de interacción por la ubicación geográfica de los agentes participantes. Los juegos biológicos son buenos ejemplos de este caso. La estructura típica es de dos dimensiones. La misma puede ser modelada por una habitual red periódica de dos dimensiones (2D). Por otra parte, los juegos motivados por consideraciones económicas o situaciones sociales se juegan muchas veces en redes libres de escala o en redes de mundo pequeño, que tienen propiedades estadísticas bastante peculiares (Albert y Barabási, 2002 [33]). Por supuesto, una incrustación geográfica fundamental, no se puede descartar tampoco (Por ejemplo, estudiar un modelo biológico que se desarrolle en un grupo de islas, donde la conectividad es 2D pero heterogénea). También son posibles estructuras jerárquicas con varios niveles. En muchos casos la conectividad entre los agentes no es rígida, sino que regularmente, puede evolucionar en el tiempo.

En el caso más simple de juegos evolutivos espaciales, los agentes se encuentran en los sitios de una red periódica, y juegan de forma repetida con sus vecinos más próximos (aquí varias opciones son posibles, como, por ejemplo, la vecindad de von Neumann, que consiste en los 4 vecinos más cercanos, o sea los 4 lugares inmediatamente contiguos al sitio en cuestión, dada la topología de una red cuadrada periódica 2D; o la vecindad de Moore, donde se consideran los 8 vecinos más cercanos en la misma red cuadrada periódica 2D, o sea, la vecindad de von Neumann, más los 4 agentes

adicionales, que se encuentran en los extremos de las 2 posibles diagonales del sitio que ubica al agente en cuestión en la red). Las ganancias individuales de cada agente se derivan de los juegos resultantes de interactuar con cada uno de sus vecinos, por lo que la utilidad total depende de la distribución de estrategias dentro de la vecindad. De vez en cuando, los agentes están autorizados a modificar sus estrategias, a fin de aumentar su utilidad. A raíz de la idea darwiniana de selección natural, en muchos modelos los agentes pueden adoptar (aprender) una de las estrategias de los vecinos que haya proporcionado mayores utilidades (como en el caso de las reglas de actualización de estrategias por imitación, discutidas arriba). Modelos similares son ampliamente utilizados y son fructíferos en diferentes áreas de la ciencia para determinar el comportamiento macroscópico a partir de las interacciones microscópicas. Al parecer, muchos aspectos de estos modelos parecen ser similares a los sistemas de muchas partículas, es decir, se pueden observar diferentes fases y transiciones entre ellas cuando los parámetros del modelo son sintonizados. Las sorprendentes analogías han inspirado a muchos Físicos a contribuir a una comprensión más profunda del campo, con la exitosa adopción de enfoques y herramientas de la Física Estadística. La Teoría de Juegos Evolutiva también puede exhibir comportamientos que no aparecen en el equilibrio de los sistemas Físicos Típicos. Estos aspectos requieren los métodos de la Física Estadística del no equilibrio, donde las complicaciones han sido investigadas por mucho tiempo. En los juegos evolutivos, con frecuencia la interacción es asimétrica, ya que la simetría de inversión temporal es rota por los pasos temporales microscópicos, y muchos estados estables (evolutivamente) diferentes, pueden coexistir mediante la formación de patrones congelados o auto-organizados.

En los modelos espaciales, las interacciones de corto alcance limitan el número de agentes que pueden afectar el comportamiento de un determinado jugador en la búsqueda de su mejor solución. Este proceso puede verse alterado fundamentalmente si el número de posibles estrategias excede el número de vecinos. Este tipo de situación puede favorecer la formación de asociaciones de estrategias diferentes, que pueden ser consideradas como agentes complejos con estructura apropiada espacio-temporal, cuya competencia determinará el estado estacionario final. En otras palabras, los juegos espaciales evolutivos proporcionan un marco matemático para el estudio del surgimiento de la complejidad estructural que caracteriza a la materia

viva.

Recientemente, la investigación de juegos evolutivos se ha combinado con la contribución de la extensa investigación de las redes, ya que las redes sociales efectivas que caracterizan las interacciones humanas poseen propiedades topológicas altamente no triviales. Los primeros resultados demostraron claramente que las características topológicas de estas redes pueden influir significativamente en su comportamiento. En muchos casos, los “juegos sobre grafos” se diferencian cualitativamente de sus homólogos definidos en una población bien mezclada (de campo medio). La investigación detallada matemática de estos fenómenos requiere una extensión de las herramientas tradicionales de la Física Estadística de no equilibrio. Los juegos evolutivos pueden conducir a regímenes dinámicos mucho más ricos y sutiles que los accesibles con los modelos tradicionales de Física Estadística del equilibrio y del no equilibrio. Son necesarios nuevos conceptos y métodos para la caracterización de la complejidad emergente y los patrones de auto-organización.

En el Apéndice E, se reseñan algunos de los tipos de grafos más usuales que se utilizan en la teoría de juegos, y algunos grafos que reproducen propiedades típicas de las redes sociales y biológicas.

Capítulo 2

Estrategias Markovianas en Juegos Espaciales de 2×2

2.1. Dinámica Evolutiva para Juegos Estratégicos 2×2

Como ya habíamos comentado en el capítulo anterior, problema de la cooperación es a menudo abordado desde una perspectiva evolutiva darwiniana: se toma un conjunto de agentes con múltiples estrategias y se los deja competir y evolucionar, de modo que las estrategias más exitosas se propaguen y difundan desplazando a las demás. La *Teoría de Juegos Evolutiva* se originó inicialmente como una aplicación de la teoría matemática de juegos a cuestiones biológicas [29], [27]; más tarde se extendió a la economía y a las ciencias sociales [34]. La evolución de la cooperación en las simulaciones del Dilema del Prisionero Iterado (DPI) se puede entender en términos de distintos mecanismos basados en diferentes factores. Entre las posibles soluciones, una muy popular tiene en cuenta a la reciprocidad como propiedad crucial de una estrategia ganadora. Esta fue la moraleja obtenida de los torneos estratégicos organizados a principios de los años 80 por R. Axelrod [35],[34]. Para ello pidió las colaboraciones de varios especialistas en teoría de juegos de diferentes disciplinas, para sugerir las estrategias a seguir. En primera instancia, hizo jugar las estrategias entre sí en un torneo del tipo todos contra todos, y calculó el promedio de sus ganan-

cias. La estrategia campeona fue la que en inglés se denomina “Tit for Tat” (TFT) y corresponde al “ojo por ojo, diente por diente”: cooperar en la primera jugada, y luego cooperar o no, copiando lo que el oponente haga en el encuentro anterior. Luego se evaluaron estas estrategias mediante algoritmos genéticos que imitaban la evolución biológica. Es decir, que se tomó como punto de partida una población de estrategias, con un representante de cada “especie”, o estrategia competidora. Si una estrategia funcionaba bien, en la generación siguiente pasaba a estar representada más de una vez, y si una estrategia no tenía éxito, se la consideraba extinta. Una vez más, TFT dominó en la mayoría de estos torneos ecológicos. Axelrod identificó como aspectos clave para el éxito de TFT, además de la voluntad cooperativa (se comienza jugando C en el primer movimiento y nunca se es el primero en no cooperar con un oponente), dos facetas de la reciprocidad, a saber: (a) se toma represalias, lo que significa que no se pasa por alto la no cooperación, sino que se responde del mismo modo, y (b) que se perdona, lo que significa que aún después de las represalias, se reanudará la cooperación, si el oponente hace un movimiento en esa dirección jugando C.

Como ya habíamos explicado anteriormente, la teoría clásica de juegos evolutivos constituye una aproximación del tipo de campo medio que no incluye el efecto de la estructura de correlación espacial de las poblaciones. Axelrod (1984) sugirió que se distribuyera a los agentes en una estructura espacial bidimensional y que se los dejara interactuar localmente, a través del juego, con sus vecinos. Este autómata celular fue explorado por Nowak y May (1992 [36]), quienes encontraron que la estructura espacial permite a los cooperadores establecer agrupaciones espaciales, en las que los beneficios de la cooperación mutua pueden superar las pérdidas al jugar contra los no cooperadores. Esto permite sostener un comportamiento cooperativo, en contraste con lo que ocurre en el juego no estructurado espacialmente, donde la no cooperación es siempre favorecida. El modelo original de Nowak-May fue extendido y modificado en varias formas diferentes (ver Capítulo 1 y Apéndice C).

En la simulación de torneo ecológico que fue llevada a cabo por Nowak y Sigmund [37], las estrategias iniciales de la competencia fueron seleccionadas de la siguiente manera. Se describe una estrategia por medio de cuatro probabilidades condicionales: $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ que determinan, respectivamente, la probabilidad de que el agente

poseedor de esa estrategia juegue C después de recibir el pago R , S , T , o P . Para simular la deriva genética, ellos introdujeron *mutaciones*, es decir la sustitución de una cierta estrategia por otra estrategia al azar en cada ronda con una pequeña probabilidad p . Además, consideraron un ambiente ruidoso, parametrizado por ε , para modelar mejor la comunicación imperfecta en la naturaleza. En esta simulación, una estrategia diferente de TFT resultó ser la más estable en el sentido evolutivo. Esta estrategia fue aproximadamente la correspondiente al $[1, 0, 0, 1]$ ¹. Esta estrategia, que anteriormente había sido bautizada como simpleton (tonto) por Rapoport y Chammah [38], más tarde pasó a denominarse *Pavlov* por los matemáticos D. y V. Kraines [39], porque si su acción resulta en una alta utilidad (T o R) se mantiene jugando lo mismo (D o C), pero de lo contrario cambia su jugada (al obtener ganancias no satisfactorias como S o P , de C pasa a D, o de D pasa a C). En otras palabras, la estrategia de Pavlov consiste en la siguiente regla: “si gano, sigo igual; si pierdo, cambio”. A diferencia de lo que ocurre con TFT, los agentes dotados con esta estrategia no pueden invadir una región poblada sólo de agentes con la estrategia consistente en jugar siempre D, dada por $[0, 0, 0, 0]$, pero, como ocurre con GTFT (TFT generosa, una estrategia que está cercana a TFT, pero tiene un valor apreciable de p_S), Pavlov es tolerante a errores en la comunicación entre los agentes. La principal ventaja de esta estrategia llamada Pavlov es que una población de agentes con esta estrategia no puede ser invadida por una población de organismos con estrategias (gradualmente mutadas) cercanas a la estrategia correspondiente a jugar siempre D, contrario a lo que ocurre con TFT, ya que basta un simple error en la comunicación para que Pavlov sea tentado a jugar D ($p_T = 0$) y luego de eso Pavlov explotará a cualquier cooperador generoso de su entorno. Esto permite que una población de agentes con la estrategia de Pavlov pueda resistir una invasión de agentes con una estrategia cercana a siempre jugar D.

Por otro lado, la estructura espacial por sí misma también ha sido identificada como elemento suficiente para construir cooperación. Es decir, un conjunto de jugadores incondicionales (que siempre juegan C o D, sin importar lo que sus opo-

¹Notar que en el trabajo de Nowak y Sigmund, los parámetros p_X varían continuamente entre 0 y 1, por lo cual, no se puede estudiar la evolución de las frecuencias de estrategias individuales, sino la evolución de una estrategia promedio, entendida como los cuatro valores promedio de las p_X de la población de agentes.

nentes juegan), sin memoria y sin elaboración estratégica. pueden alcanzar un nivel de cooperacoón sostenible cuando se los coloca en una red bidimensional y se los deja jugar sólo contra sus vecinos más cercanos [36].

La combinación de los dos elementos anteriores, los cuales se sabe que promueven la cooperación, en una competencia iterada de agentes con diferentes estrategias condicionales inmersos en una estructura espacial, se estudió por primera vez en [40], utilizando estrategias basadas en agentes con memoria de longitud L_M (que podían recordar las L_M últimas jugadas). Más tarde, Brauchli et al. [41] estudiaron el espacio de las estrategias estocásticas con memoria de un solo paso. En este capítulo, nuestro enfoque es similar: consideramos un autómata celular (AC) y adjunto a cada célula una estrategia, especificada la cuaterna $[p_R, p_S, p_T, p_P]$, que dicta la forma de juego (C o D) contra sus vecinos. Sin embargo, a fin de proporcionar un mayor discernimiento *microscópico* que sólo la evolución de los cuatro valores medios de las probabilidades condicionales (como es el caso cuando probabilidades condicionales reales continuas son consideradas), recurrimos a las *Estrategias Markovianas Binarias* (EMB). Es decir, estrategias donde las probabilidades condicionales p_X de jugar C después de obtener el pago X , pueden tomar solamente los valores 0 o 1, en vez de cualquier valor real entre ellos. Entonces, solamente consideramos un conjunto de $2^4 = 16$ EMB posibles, cuyas frecuencias se pueden medir. Otra simplificación que presentamos es que en cada paso de tiempo, un determinado agente se desempeñe del mismo modo (C o D) contra todos sus vecinos y sólo tenga en cuenta su rentabilidad total, o sea que la suma de pagos correspondiente a jugar una vez con cada uno de ellos, en vez de hacer el seguimiento de cada pago individual. Luego, dependiendo de si sus vecinos se comportaron cooperativamente o no como conjunto (diferentes posibilidades para evaluar esto son propuestas en la sección 2.3) y lo que jugó el propio agente en dicho turno, el agente adoptará la jugada C o D contra todos sus vecinos para el siguiente turno. Por lo tanto, tenemos un AC donde el estado de cada célula está determinado y el mismo se actualiza de forma sincrónoma en cada paso temporal teniendo en cuenta tanto el estado de la misma como estado *externo total* correspondiente al resto del vecindario de la misma. O, en el lenguaje de los AC, tenemos un *autómata celular totalístico* [42]. Elegimos este tipo de AC, ya que, además de su simplicidad y propiedades conocidas de simetría [43], las dinámicas resultantes muestran una

mayor robustez, siendo menos dependientes de las configuraciones iniciales.

Además de autómatas deterministas, exploramos dos fuentes de comportamiento estocástico: en primer lugar en la regla de actualización, específicamente en el criterio para evaluar si el vecindario está cooperando o no. En segundo lugar, mediante la introducción de un parámetro de ruido ε (pequeño) y la sustitución de los valores de las probabilidades condicionales p_X , 0 ó 1, por ε ó, $1 - \varepsilon$, respectivamente.

En resumen, analizamos la evolución en el espacio de las estrategias que se produce en los diferentes casos que resultan al considerar:

- Diferentes juegos de 2×2 , es decir, diferentes regiones del espacio de parámetros T, R, S y P
- Diferentes tipos de vecindarios: vecindarios de von Neumann y Moore.
- Diferentes reglas de actualización de nuestro AC: deterministas y estocásticas.
- Diferentes cantidades de ruido, medidas a través del parámetro ε .

La introducción de un parámetro de mutación adicional similar al utilizado por Brauchli et al [41], dió como resultado comportamientos sustancialmente idénticos a los resultados obtenidos a partir de introducir el parámetro de ruido ε , por lo cuál no incluimos la posibilidad de mutaciones en los resultados presentados.

En lo que sigue, este capítulo está organizado de la siguiente manera. Comenzamos presentando una tabla de 16×16 , el resultado de las confrontaciones dos a dos de todas las posibles EMB, en cuyos cuadros se representa el valor asintótico (después de un transitorio) de la ganancia media obtenida por la estrategia de la fila cuando se juega contra la estrategia de la columna. En la Sección 2.2, describimos nuestro modelo y sus variantes. A continuación, en la Sección 2.3, se presentan los principales resultados de las simulaciones. Por último, la discusión de los mismos y las conclusiones finales se encuentran en la Sección 2.4.

2.2. El Torneo Estratégico entre las Estrategias Markovianas Binarias, en Juegos 2×2 con Suma no Nula

Como ya comentamos, un cambio en el orden jerárquico de los cuatro pagos en la matriz M definida en (1.4) da lugar a diferentes juegos, además del Dilema del Prisionero. Algunos de ellos han sido bien estudiados en el contexto de las ciencias biológicas o sociales. Los casos del DP, Halcón-Paloma (HP) y la Caza del Ciervo (CdC), fueron introducidos en el capítulo anterior. Cuando la recompensa dada por la cooperación mutua en el juego de HP se reduce de modo que finalmente cae por debajo de las pérdidas del cooperante bajo la explotación del no cooperante: $T > S > R > P$, el juego se transforma en Líder. El nombre del juego proviene de la siguiente situación cotidiana: dos conductores quieren entrar en una concurrida carretera de un solo sentido desde lados opuestos, si se produce un pequeño hueco en la línea de los coches que pasan, es preferible que uno de ellos tome la iniciativa como líder entrando en el espacio generado, que en su lugar ambos tengan que esperar hasta que se genere un espacio suficiente que les permita a ambos entrar al mismo tiempo. Cuando S en el juego de Líder aumenta de modo que finalmente supera el valor de la tentación de no cooperar T , es decir, $S > T > R > P$, el juego se convierte en Heróe, siendo el nombre del juego alusivo a un agente heroico que juega C contra un agente no cooperativo.

La figura. 2.1 (c) reproduce la trama del espacio de parámetros para los 12 ordenamientos diferentes jerarquías de juegos 2×2 con $R = 1$, $P = 0$, de la referencia [44]. Cada juego se refiere a una región del parámetro S , en el plano- T representado: 1 DP; 2 Gallina o HP; 3 Líder; 4 Batalla de los sexos; 5 Caza del Ciervo ; 6 Armonía; 12 Bloqueo Mutuo; todas las demás regiones corresponden a juegos menos interesantes que no han sido bautizados.

Consideremos ahora el torneo entre las EMB, en el que cada EMB particular juega repetidamente contra todas las otras EMB. En lo que sigue, numeramos las 16 estrategias de 1 a 16 de la siguiente manera. Le asignamos a la estrategia binaria

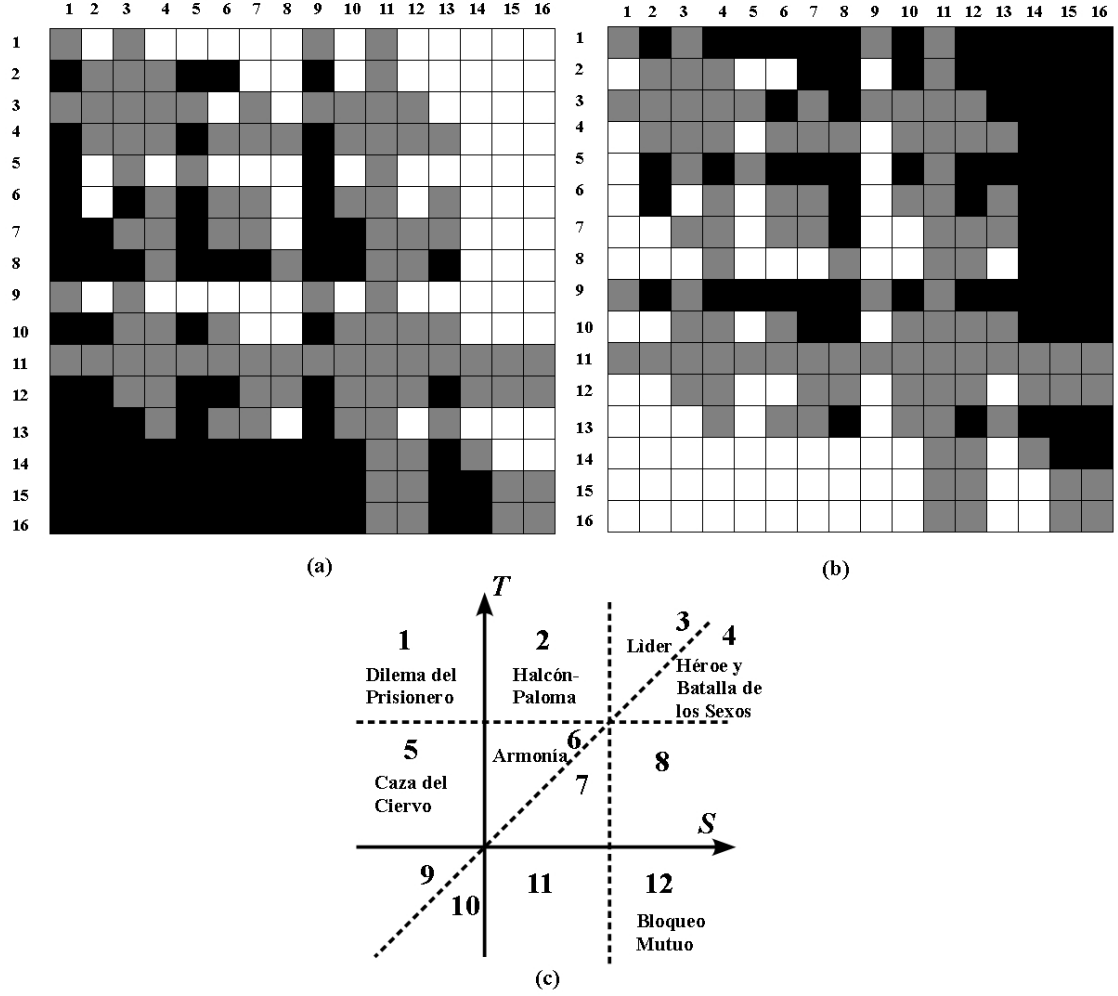


Figura 2.1: Matriz de Ganadores - 16×16 estrategias. (a): Juegos con $T > S$, Dilema del Prisionero, Halcón-Paloma, etc; (b): Juegos con $T < S$, Héroe, Batalla de los Sexos, Bloqueo Mutuo, etc. Código de colores: El blanco corresponde a que la fila le gana a la columna, el negro corresponde a lo contrario (la columna le gana a la fila), y el gris significa empate. El número de referencia de cada una de las 16 posibles estrategias binarias, $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ es dado por el número binario representado por los cuatro números de las probabilidades incrementado en 1, es decir, que el número de estrategia está dado por $n = 8p_R + 4p_S + 2p_T + p_P + 1$; (c) Los 12 posibles juegos de 2×2 , marcados como zonas en el espacio de parámetros. La ilustración corresponde al caso en que se ha tomado $R = 1$ (normalizado los parámetros en función de R) y $P = 0$. La recta punteada horizontal corresponde a $T = R = 1$, la recta punteada vertical corresponde a $S = R = 1$ y la recta punteada diagonal a $T = S$. Los ejes T y S dan, respectivamente los cortes con $T = P = 0$ y $S = P = 0$.

dada por $[p_R, p_S, p_T, p_P]$, el número binario correspondiente $\#$ representado por este arreglo binario más 1, es decir, $\# = 8p_R + 4p_S + 2p_T + p_P + 1$. Al considerar este torneo, resulta que el juego repetido entre cualquier par de EMB es cíclico: después de unos cuantos turnos, ambas estrategias vuelven a sus movimientos originales. Por ejemplo, supongamos que la estrategia $\#3$ ($[0, 0, 1, 0]$) jugando contra la estrategia $\#9$ ($[1, 0, 0, 1]$). Los movimientos iniciales son irrelevantes. Elijamos $\#3$ jugando inicialmente C y $\#9$ jugando inicialmente D. La secuencia de movimientos sería la siguiente: $[C, D] \rightarrow [D, D] \rightarrow [D, C] \rightarrow [C, D]$, es decir, que se recupera el estado inicial después de 3 turnos. Los ciclos, en estos $16 \times 16/2$ enfrentamientos posibles, son de períodos 1, 2, 3 o 4. Por lo tanto, para calcular las ganancias medias por turno de cualquier par de estrategias lo que tenemos que sumar son los pagos durante un número de asaltos igual a un mínimo múltiplo común de 1, 2, 3 y 4, o sea 12, y dividir por él. Esto permite construir una matriz de 16×16 con las ganancias medias de la estrategia de la fila 16 al jugar contra la estrategia de la columna para cualquier conjunto arbitrario de pagos $\{R, T, S, P\}$

Las ganancias medias por ronda de las estrategias i y j jugando una contra la otra, se pueden escribir como $u_{ij} = \alpha_{ij}R + \beta_{ij}S + \gamma_{ij}T + \delta_{ij}P$ y $u_{ji} = \alpha_{ji}R + \beta_{ji}S + \gamma_{ji}T + \delta_{ji}P$, respectivamente, donde α_{ij} es la probabilidad de que la estrategia i consiga la recompensa R , β_{ij} es la probabilidad de obtener la recompensa S y así sucesivamente. Debido a las simetrías de la matriz M de pagos, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\beta_{ij} = \gamma_{ji}$ y $\gamma_{ij} = \beta_{ji}$, ya que las estrategias i y j reciben R o P el mismo número de veces de manera conjunta, y la estrategia i (j) recibe T cuando j (i) recibe S . Por lo tanto, la diferencia $u_{ij} - u_{ji}$ sólo depende de si el valor de T es inferior o superior a S . Como consecuencia, la matriz 2.1 (a), que representa los resultados de los $16 \times 16 = 256$ encuentros es la misma para todos los otros juegos con $T > S$. Lo mismo es cierto para 2.1 (b) que representa los resultados para todos los juegos con $T < S$. Además observamos la simetría entre ambas matrices: una tiene los colores “opuestos” de la otra.

Para cada estrategia se calcula el pago total $U_i = \sum_j u_{i,j}$ (suma sobre los 16 posibles contendientes, incluyendo el caso de la competencia entre dos agentes con estrategias idénticas) y se halla la ganancia media de la estrategia i . Los resultados generales de este cálculo, así como los valores numéricos particulares, cuando los

$[p_R, p_S, p_T, p_P]$	Pago Promedio Asintótico U	DP	HP	Caza del Ciervo	Líder	Héroe
[0, 0, 0, 0]	$8(T + P)$	14.66	10.66	12.00	8.00	10.66
[0, 0, 0, 1]	$(55/24)R + (55/24)S + (41/6)T + (55/12)P$	12.00	11.00	10.67	9.67	11.00
[0, 0, 1, 0]	$(55/24)R + (55/24)S + (55/12)T + (41/6)P$	10.33	8.33	9.67	7.67	8.33
[0, 0, 1, 1]	$4(R + S + T + P)$	11.33	11.33	11.33	11.33	11.33
[0, 1, 0, 0]	$2S + 7T + 7P$	12.83	10.33	10.50	9.67	11.33
[0, 1, 0, 1]	$(35/12)R + (61/12)S + (61/12)T + (35/12)P$	9.67	11.17	8.67	12.67	12.67
[0, 1, 1, 0]	$(35/12)R + (61/12)S + (35/12)T + (61/12)P$	7.17	7.17	7.17	9.67	8.67
[0, 1, 1, 1]	$(55/12)R + (41/6)S + (55/24)T + (55/24)P$	7.67	9.67	8.33	12.00	10.67
[1, 0, 0, 0]	$2R + 7T + 7P$	14.83	11.33	13.17	8.00	10.33
[1, 0, 0, 1]	$(61/12)R + (35/12)S + (61/12)T + (35/12)P$	12.67	12.67	12.67	10.17	11.17
[1, 0, 1, 0]	$(61/12)R + (35/12)S + (61/12)T + (35/12)P$	10.17	8.67	11.17	7.17	7.17
[1, 0, 1, 1]	$(41/6)R + (55/12)S + (55/24)T + (55/24)P$	9.67	10.67	11.0	10.33	9.67
[1, 1, 0, 0]	$4(R + S + T + P)$	11.33	11.33	11.33	11.33	11.33
[1, 1, 0, 1]	$7R + 7S + 2T$	9.67	13.17	11.33	14.83	13.17
[1, 1, 1, 0]	$7R + 7S + 2P$	8.00	10.50	10.33	12.83	10.50
[1, 1, 1, 1]	$8(R + S)$	8.00	12.00	10.66	14.66	12.00

Cuadro 2.1: Pagos Promedio Asintóticos para Diferentes Juegos 2×2

cuatro pagos son 1, 333, 1, 0, 5 y 0 se muestran en la tabla 2.1. Por ejemplo, tenemos el DP, cuando $R = 1$, $T = 1, 333$, $S = 0$ y $P = 0, 5$; el HP, cuando $R = 1$, $T = 1, 333$, $S = 0, 5$ y $P = 0$; y así sucesivamente. Observamos que para estos valores de los parámetros, $[1, 0, 0, 0]$ es la estrategia con la mayor ganancia media para el DP y la Caza del Ciervo, mientras que $[1, 1, 0, 1]$ es la estrategia que tiene el mayor pago medio para los juegos HP, Líder y Héroe.

2.3. Competencia de las EMB en un AC totalístico

Cada agente está representado, en cada paso de tiempo t , por una célula con centro en (x, y) , con una variable de comportamiento binario $c(x, y; t)$ que toma el valor 1 (0) si se encuentra en el estado C (D). En cada paso temporal, cada agente compite en un juego 2×2 contra todos sus vecinos individualmente, 2 a 2, recolectando la utilidad total, $U(x, y; t)$, dada por la suma de los pagos $u(x, y; t)$

que consigue jugando individualmente contra cada uno de sus vecinos. Usamos una matriz de pagos reescalada, en la que se fija el segundo mejor pago X^{2do} a 1 y el peor de los pagos, X^{4to} se fija en 0. Por ejemplo, la matriz de pagos del DP es descripta por dos parámetros: $\tilde{T}$, $\tilde{P}$ (con $\tilde{T} = T/R$ y $\tilde{P} = P/R$); el HP por $\tilde{T}$ y $\tilde{S}$ (con $\tilde{T} = T/R$ y $\tilde{S} = S/R$), etc. Consideramos dos vecindades diferentes $N(x, y)$: (a) La vecindad de von Neumann ($q = 4$ celdas vecinas, la celda de arriba y la de abajo, la de la derecha y la de la izquierda de una celda determinada) y (b) la vecindad de Moore ($q = 8$ celdas vecinas: igual que la vecindad de von Neumann pero agregando las diagonales)

En el caso del AC ordinario (no totalístico) la forma en que el agente de la celda (x, y) juega en contra de su vecino en la celda (x', y') es determinada por los cuatro valores que determinan su estrategia Markoviana binaria $[p_R(x, y; t), p_S(x, y; t), p_T(x, y; t), p_P(x, y; t)]$, que da los valores de las probabilidades condicionales de que el agente juegue C en el instante t si en el instante $t - 1$ obtuvo un pago de $u(x, y; t - 1) = R, T, S$, o P , respectivamente. Aquí, como hemos anticipado, utilizamos un autómatas totalístico y entonces en cada paso temporal cada uno de los agentes en las celdas desempeña a la vez una acción definida (C o D) en contra de todos sus q (4 u 8) vecinos en vez de jugar individualmente contra cada vecino. Por lo tanto, es necesario extender las probabilidades condicionales definidas anteriormente, de tal manera que tengan en cuenta el estado “colectivo” del vecindario. Para ello, tomamos en cuenta que las probabilidades condicionales p_R , p_S , p_T y p_P también pueden considerarse, respectivamente, como la probabilidad de jugar C después de las jugadas [C,C], [C,D], [D,C] y [D,D]. Luego, una manera natural para ampliar el significado de estas probabilidades condicionales es considerar que “la vecindad juega C (D)” si la mayoría de los vecinos juegan C (D), es decir, si

$$q_C(x, y; t) \equiv \frac{\sum_{N(x, y)} c(x', y', t)}{q},$$

está por debajo o por encima de $1/2$.

Hay diferentes maneras de implementar la presente idea. Consideremos las dos variantes siguientes, una en términos de un regla de actualización determinista de la variable de comportamiento, y la otra con una norma de actualización estocástica.

■ Actualización *Determinista*:

$$c(x, y; t + 1) = c(x, y; t)[p_R\theta^+(q_C(x, y; t) - q/2) + p_S\theta^+(q/2 - q_C(x, y; t)) + (1 - c(x, y; t))[p_T\theta^+(q_C(x, y; t) - q/2) + p_P\theta^+(q/2 - q_C(x, y; t))], \quad (2.1)$$

donde $\theta^+(q_C(x, y; t))$ es una función escalón de Heaviside dada por:

$$\theta^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

■ Actualización *Estocástica*:

$$\begin{aligned} c(x, y; t) = & c(x, y; t - 1)q_C(x, y; t - 1)p_R(x, y; t) + \\ & c(x, y; t)(1 - q_C(x, y; t - 1))p_S(x, y; t) + \\ & (1 - c(x, y; t))q_C(x, y; t)p_T(x, y; t) + \\ & (1 - c(x, y; t - 1))(1 - q_C(x, y; t - 1))p_P(x, y; t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde la probabilidad de que la vecindad juegue C es igual a la fracción $q_C(x, y; t)$ de vecinos en el estado C.

Finalmente, después de la actualización de su variable de comportamiento, cada agente actualiza sus cuatro probabilidades condicionales p_X copiando las del individuo perteneciente su vecindario $N(x, y)$ que recibió las utilidades máximas. Con el fin de tener en cuenta los errores en el comportamiento de los agentes se incluye un nivel de ruido mediante un parámetro $\varepsilon > 0$ de tal manera que las probabilidades condicionales p_X para cada agente pueden ahora tomar el valor ε , o el valor $1 - \varepsilon$. Consideramos una red cuadrada con $N_{ag} = L \times L$ agentes y condiciones periódicas de contorno. Partimos de una configuración inicial en la que se asigna al azar a cada agente una estrategia de tal manera que las 16 posibles estrategias están igualmente representadas al azar dentro de la población de los N_{ag} agentes. Los resultados de esta simulación, como los de [41] son sensibles a las condiciones iniciales, por lo que, para evitar dicha dependencia, el valor de las frecuencias para las 16 EMB como función del tiempo se obtienen promediando sobre N_c simulaciones con diferentes condiciones iniciales. En la siguiente sección se presentan los resultados para varios juegos diferentes

2.4. Resultados

Los resultados de esta sección corresponden a promedios tomados sobre un ensemble de $N_c = 100$ diferentes condiciones iniciales al azar para redes cuadradas de 100×100 ². Para todos los juegos considerados, estudiamos la evolución temporal de la frecuencia promedio para cada una de las 16 estrategias, o sea la fracción de los $L \times L$ agentes en la red que juega con una estrategia determinada.

2.4.1. Dilema del Prisionero Determinista

Primero estudiamos el DP determinista para $\tilde{T} = 1,333$ y $\tilde{P} = 0,5$. La figura 2.2 muestra las frecuencias para las 16 diferentes EMB, para la vecindad de von Neumann $q = 4$. Se puede ver que, sin ruido ($\varepsilon = 0$) el sistema alcanza rápidamente un estado de equilibrio dinámico en el que varias de las 16 estrategias están presentes. Al incrementar el valor de ε , disminuye el número de estrategias, y la diversidad que se obtiene sin ruido se transforma entonces en solamente 2 estrategias sobrevivientes: $[0,0,1,0]$ y TFT ($[1,0,1,0]$). Es más, los resultados para $\varepsilon = 0,1$ corresponden al promedio de que en algunos casos toda la población termine con la estrategia $[0,0,1,0]$ y en otros casos a que toda la población termine con TFT. Pero no se da la coexistencia de ambas estrategias. Esto explica también la falta de las fluctuaciones en los resultados a pesar del alto valor del parámetro de ruido.

Los resultados para la vecindad de Moore, $q = 8$, son distintos de los obtenidos para $q = 4$, como se puede ver en la figura 2.3. Observamos que para cantidad nula o reducida de ruido ($\varepsilon \leq 0,01$) tenemos dos estrategias supervivientes $[0,0,1,1]$ y $[1,0,1,1]$. Para $\varepsilon = 0,1$ una nueva estrategia competitiva, $[0,1,1,0]$ aparece, y los agentes se distribuyen casi igual entre esta nueva estrategia, $[1,0,1,1]$, y $[0,0,1,1]$. Por último, para $\varepsilon = 0,25$, todos los agentes adoptan la estrategia $[1,0,1,1]$.

2.4.2. Versión Estocástica

Para la versión estocástica son necesarios niveles más altos de ruido (mayores valores de ε) para medir desviaciones de la situación de ruido nulo. Esto es natural

²Los resultados no cambian substancialmente cuando el tamaño de la red o la cantidad de condiciones iniciales promediadas se incrementa.

ya que hay un componente intrínseco estocástico en las reglas de actualización en este caso. La figura 2.4 es una gráfica de cada una de las 16 frecuencias contra el tiempo para el DP estocástico con $q = 8$. Para ruido nulo o pequeño, $\varepsilon \leq 0,01$, sólo sobrevive la estrategia $[0, 0, 1, 1]$. Para $\varepsilon = 0,1$, $[0, 0, 1, 1]$ sigue siendo la estrategia más popular, pero ahora convive con $[0, 1, 1, 0]$. Si el nivel de ruido se incrementa aún más, la frecuencia de la estrategia $[1, 0, 1, 1]$ empieza a volverse no despreciable, hasta que para $\varepsilon = 0,25$ pasa a controlar el total de la población.

Las estrategias ganadoras promedio son robustas, tanto para el caso estocástico como para el caso determinista con respecto a los parámetros $\tilde{T}, \tilde{P}$ de la matriz de pagos del DP, incluso para $\tilde{T} = 2$, y, siempre y cuando nos encontremos en la región correspondiente al DP el comportamiento es cualitativamente el mismo.

2.4.3. Otras Matrices de Pagos

En esta sección exploramos otros juegos para el caso determinista. Observamos primero el efecto de la permutación del castigo y el pago al incauto, intercambiando $\tilde{S} = 0.5 > \tilde{P} = 0$ (HP).

Los resultados para $q = 4$ se presentan en la figura 2.5. Para todos los valores considerados de los valores de ε entre 0 y 0,1, $[1, 0, 1, 1]$ es la estrategia dominante. Para pequeñas cantidades de ruido, observamos la coexistencia de tres estrategias: $[1, 0, 1, 1]$, $[0, 0, 1, 0]$ y TFT ($[1, 0, 1, 0]$). Por último, para $\varepsilon = 0,1$, la estrategia $[1, 0, 1, 1]$ vuelve a ser completamente dominante, con una frecuencia del 100%. Los resultados para el juego de HP con $q = 8$ se ilustran en la figura 2.5. Para $\epsilon = 0$ tenemos la convivencia de varias estrategias siendo $[1, 1, 0, 1]$ la dominante. Dicha dominancia aumenta para ϵ pequeño pero, para $\epsilon = 0,01$ la dominancia pasa a ser de $[1, 0, 1, 1]$. Para valores de ϵ mayores la dominancia de esta última pasa a ser completa.

Los resultados para el juego Líder determinista con $q = 8$ se grafican en la figura

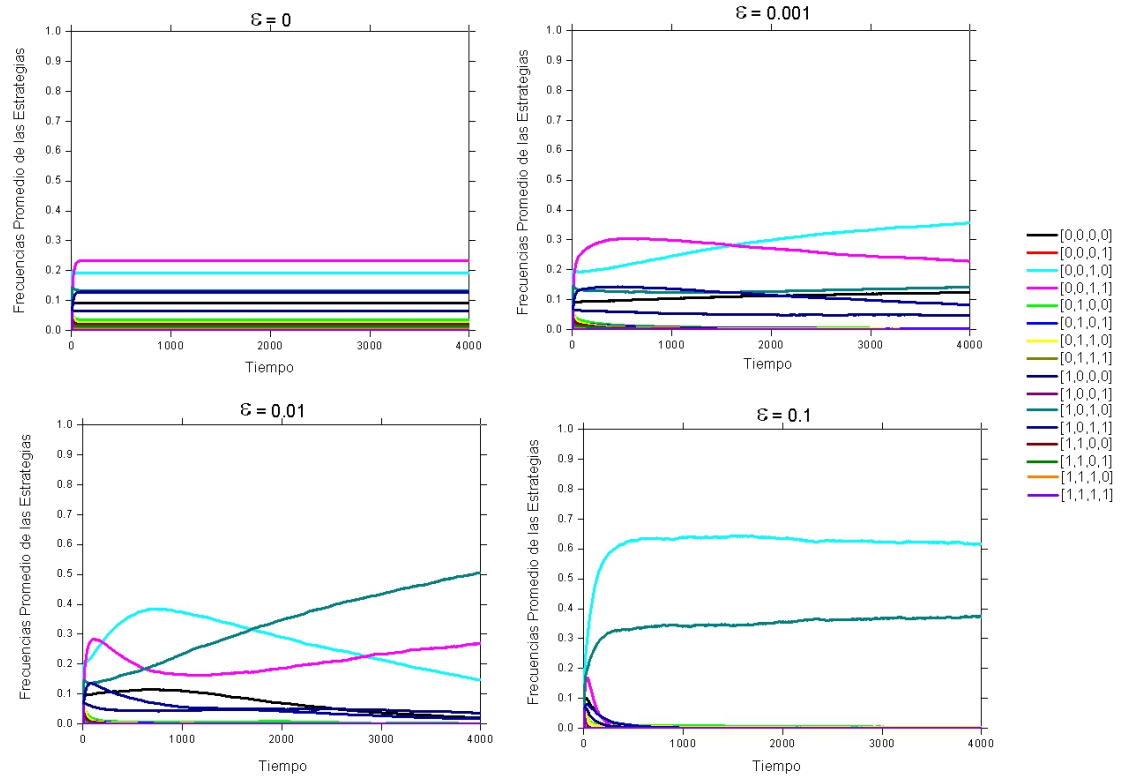


Figura 2.2: Frecuencias para las 16 Estrategias Markovianas Binarias (EMB) compitiendo como función del tiempo para el Dilema del Prisionero Determinista con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{P} = 0,5$ y $q = 4$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

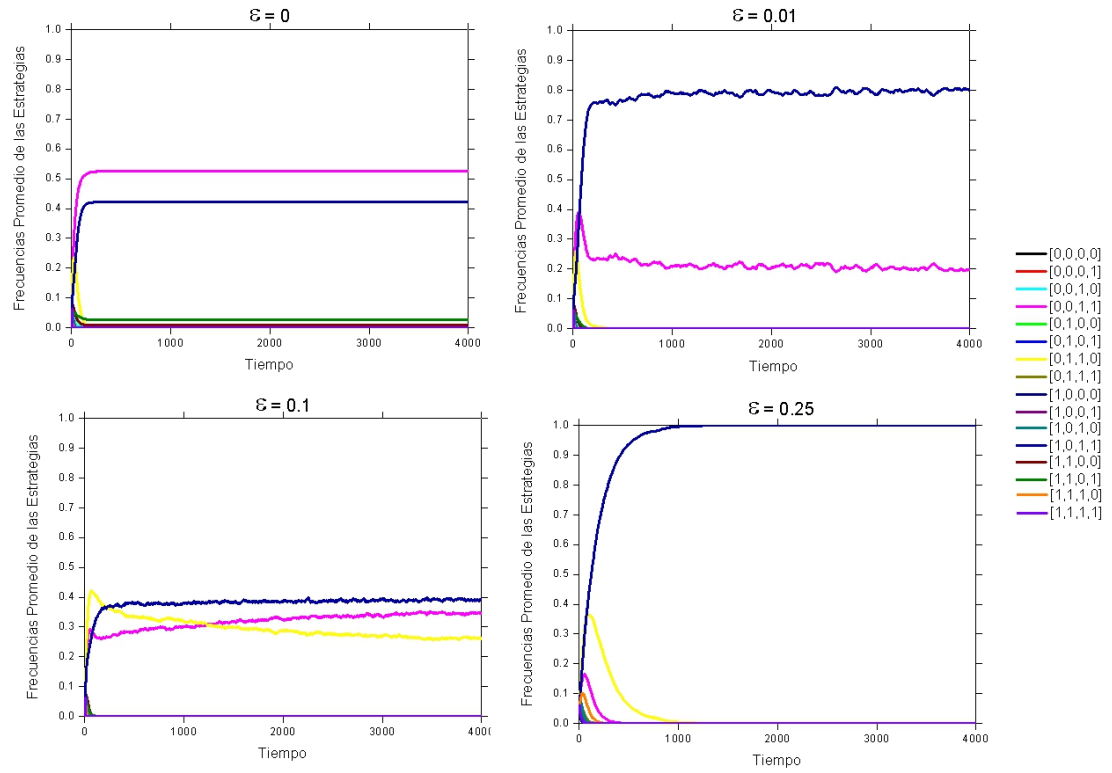


Figura 2.3: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para el Dilema del Prisionero Determinista con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{P} = 0,5$ y $q = 8$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

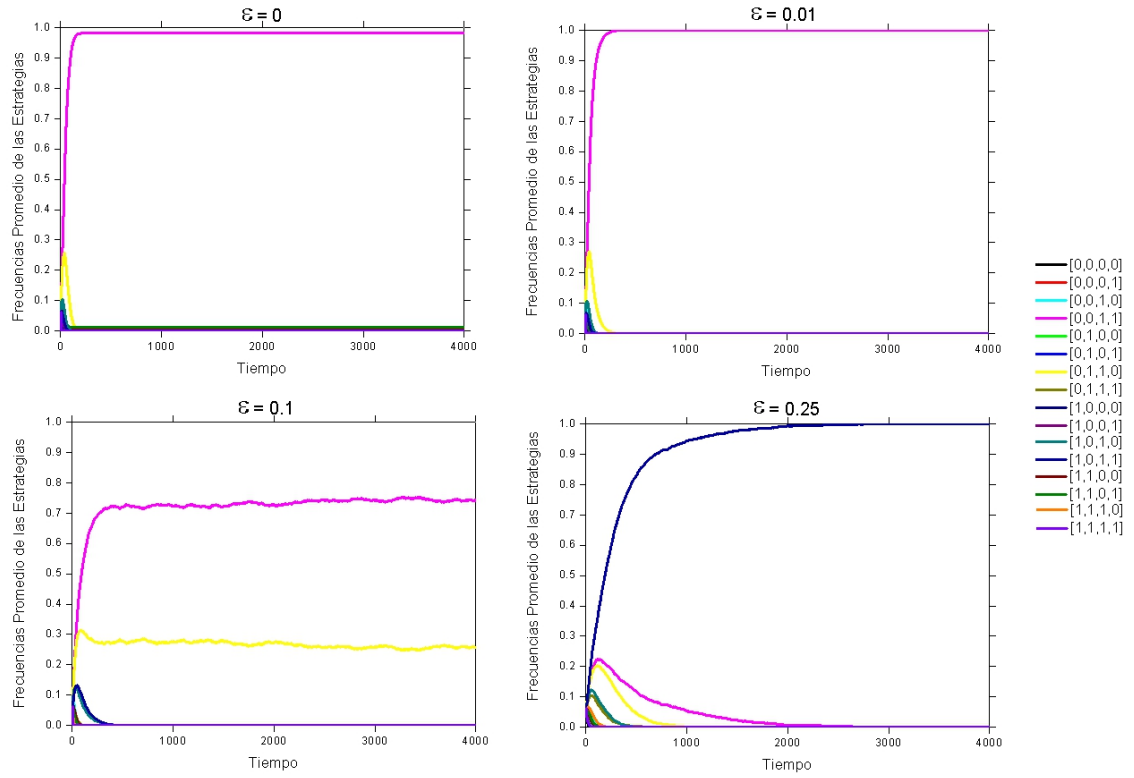


Figura 2.4: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para el Dilema del Prisionero Estocástico con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{P} = 0,5$ y $q = 8$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

2.5. Para el caso sin ruido ($\varepsilon = 0$) tenemos una notable diversidad de estrategias supervivientes. Al incrementar el valor de ε esta diversidad se transforma en sólo dos estrategias que sobreviven: $[1, 0, 1, 1]$ y $[0, 0, 1, 1]$, cuya dominancia relativa es intercambiada para valores grandes de ruido ($\varepsilon = 0,1$). Es importante notar que la falta de fluctuaciones aleatorias cuando $\varepsilon = 0,1$ (un parámetro de ruido relativamente alto) en la figura 2.5 se explica, como antes, porque los promedios corresponden a casos en los que toda la población adopta $[0, 0, 1, 1]$ o $[1, 0, 1, 1]$ como su estrategia, es decir, no hay coexistencia de estrategias en el estado estacionario.

La figura 2.8 muestra los resultados del juego Héroe determinista con $q = 8$. Para el caso sin ruido ($\varepsilon = 0$), tenemos dos estrategias principales: $[0, 0, 1, 1]$ y $[1, 0, 1, 1]$. Para cantidades intermedias de ruido $\varepsilon \ll 0,1$ la estrategia $[1, 0, 1, 1]$ pasa a dominar. Por último, para una gran cantidad de ruido ($\varepsilon \simeq 0,1$) tenemos una nueva estrategia ganadora: $[1, 0, 0, 1]$ (PAVLOV). Para el juego de la Caza del Ciervo (no graficado aquí), la estrategia dominante es siempre $[1, 1, 1, 1]$ (SIEMPRE C), un resultado que es razonable porque para este juego paga mucho el jugar C.

2.5. Conclusiones

En este capítulo desarrollamos un modelo simple para estudiar estrategias evolutivas en juegos espaciales 2×2 que provee resultados más robustos que los de modelos anteriores más complejos [41]. Por ejemplo, hemos encontrado algunas estrategias dominantes que aparecen con frecuencia en el desarrollo de varios juegos de 2×2 , y no sólo para el DP.

En relación al papel del espacio, a partir de la comparación de las figuras. (2.2)-(2.8), notamos que tres estrategias, principalmente $[1, 0, 1, 1]$ y con menos frecuencia $[0, 0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1, 1]$, dominan para los diferentes juegos, normas de actualización y niveles de ruido. Si buscamos estas estrategias en el cuadro 2.1, se observa que ninguna de ellas es una estrategia ganadora en los juegos no espaciales. Es decir, ninguna de ellas obtiene la más alta ganancia media, sino sólo una ganancia de valor mediocre. Así concluimos que la territorialidad parece tener un efecto relevante sobre la evolución de las estrategias. Adicionalmente, observamos que la separación de los resultados espaciales con respecto a los no espaciales se hace más notoria al

aumentar el tamaño de la vecindad.

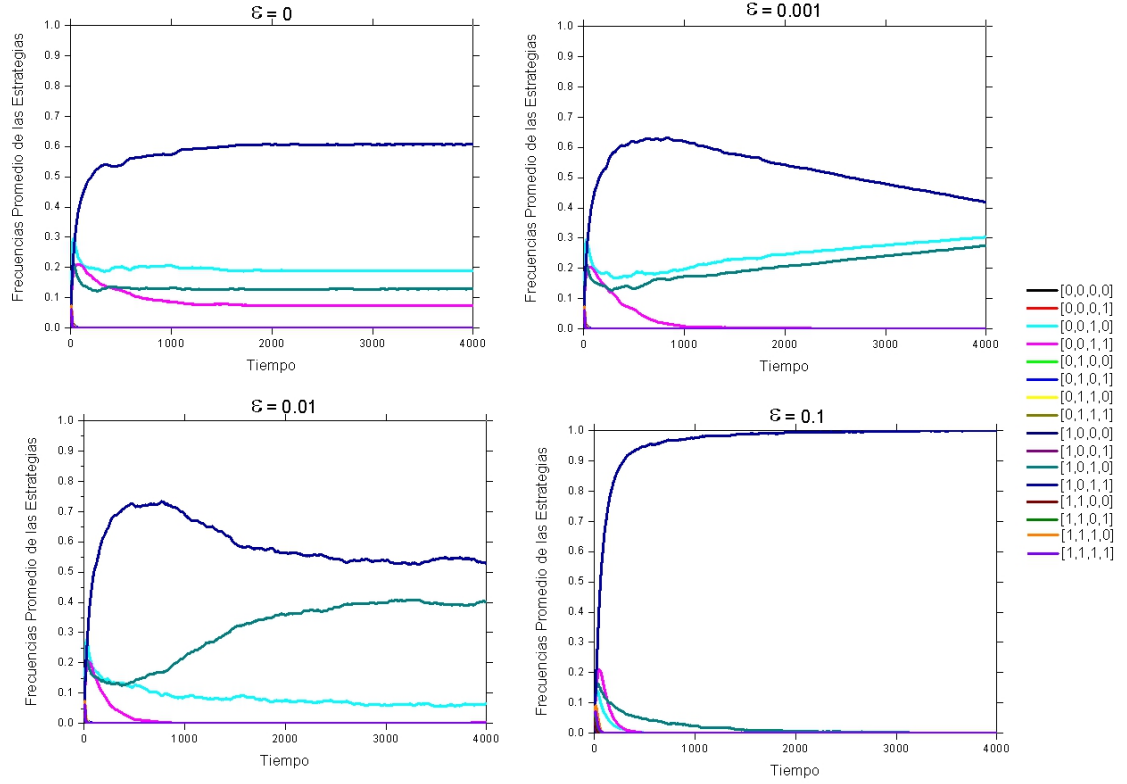


Figura 2.5: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para Halcón-Paloma Determinista con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{S} = 0,5$ y $q = 4$.. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha..

Otra conclusión importante es que para un nivel de ruido lo suficientemente grande la diversidad desaparece y se evoluciona a un estado estacionario con sólo una estrategia universal (principalmente $[1, 0, 1, 1]$) o a lo sumo dos, pero sin coexistir ambas estrategias en ningún momento (o sea, las estrategias dominantes diferentes aparecen una u otra dependiendo de las condiciones iniciales, pero para ninguna de las mismas se obtiene coexistencia de las mismas).

La estrategia $[1, 0, 1, 1]$ es particularmente interesante porque es como una estrategia intermedia entre PAVLOV $[1, 0, 0, 1]$ y TFT $[1, 0, 1, 0]$, que son las dos principales

estrategias que los humanos eligen cuando participan jugando en un experimento de dilemas sociales [45],[46]. Hemos bautizado a esta estrategia como “Pavlov No Tentado”.

De las distintas variaciones de nuestro modelo, encontramos que la evolución de las estrategias de mayor cooperación (Con mayor proporción de probabilidades condicionales $p_X = 1$) se ve favorecida cuando:

- El tamaño de la vecindad es mayor ($q = 8$ da lugar a estrategias dominantes con más valores no nulos de las probabilidades condicionales p_X que $q = 4$).
- La versión de la regla de actualización para $c(x, y; t)$ después de que el agente en la celda (x, y) jugó con sus vecinos es determinista.
- La cantidad de ruido medido por ϵ aumenta.

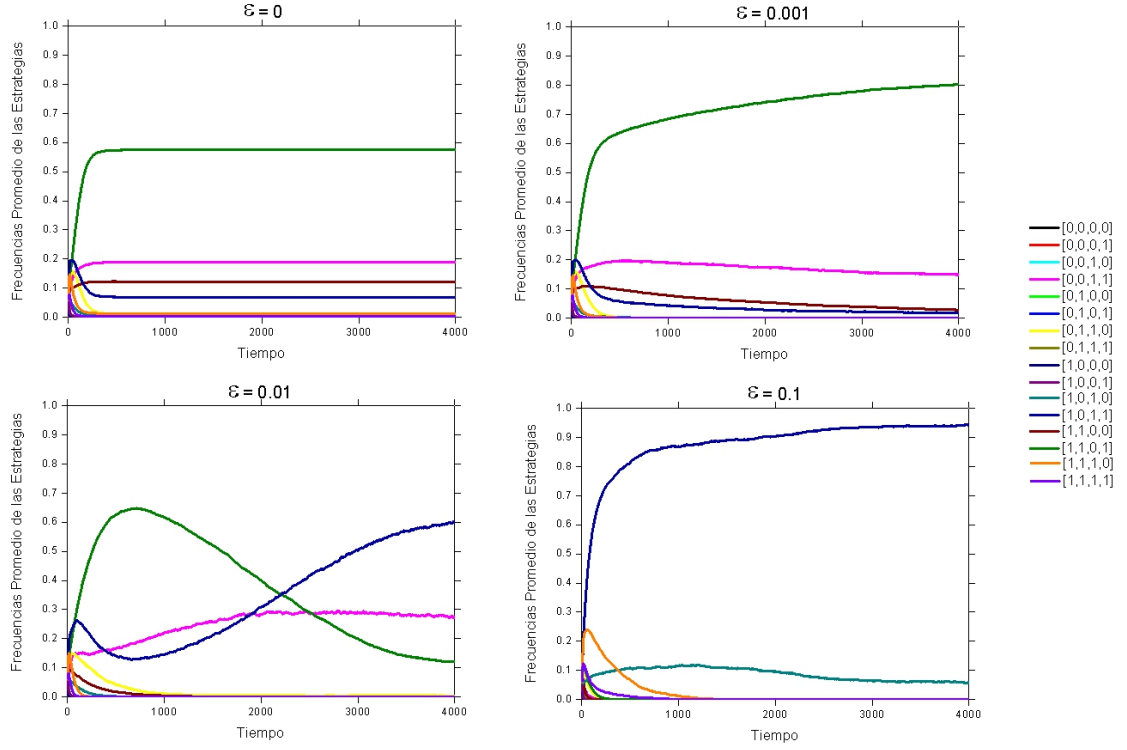


Figura 2.6: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para Halcón-Paloma Determinista con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{S} = 0,5$ y $q = 8$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

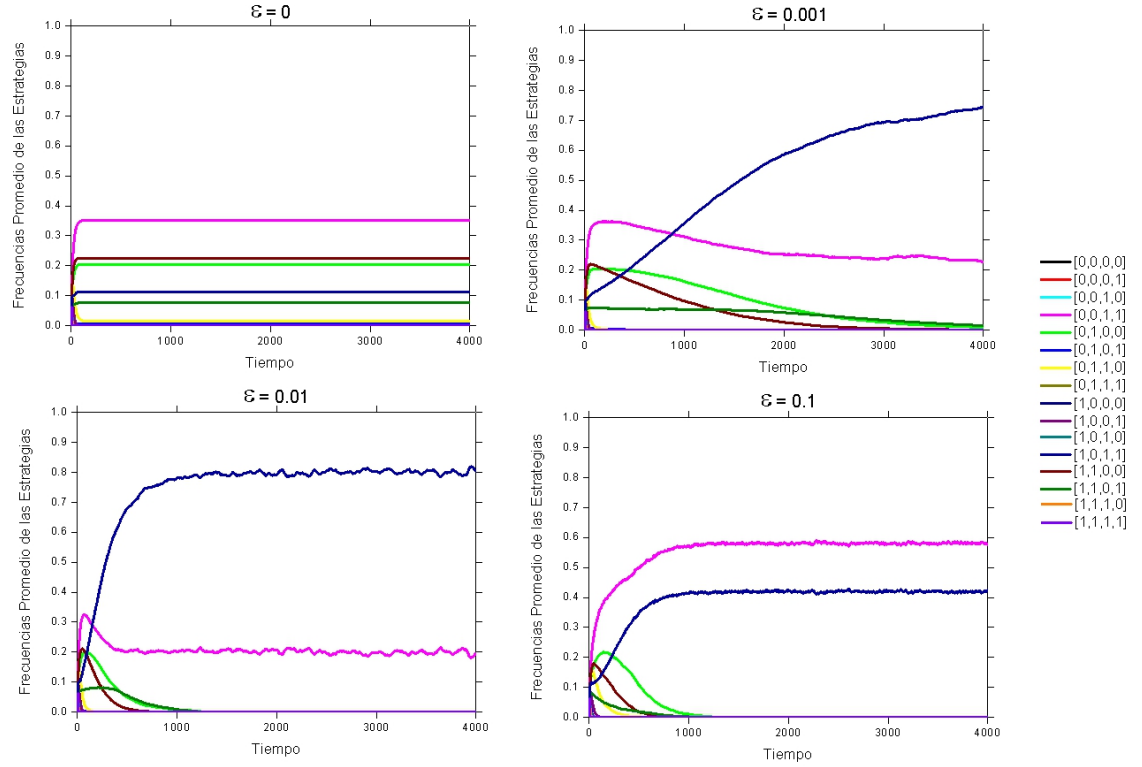


Figura 2.7: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para el juego Líder Determinista con $\tilde{T} = 1,333$, $\tilde{R} = 0,5$ y $q = 8$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

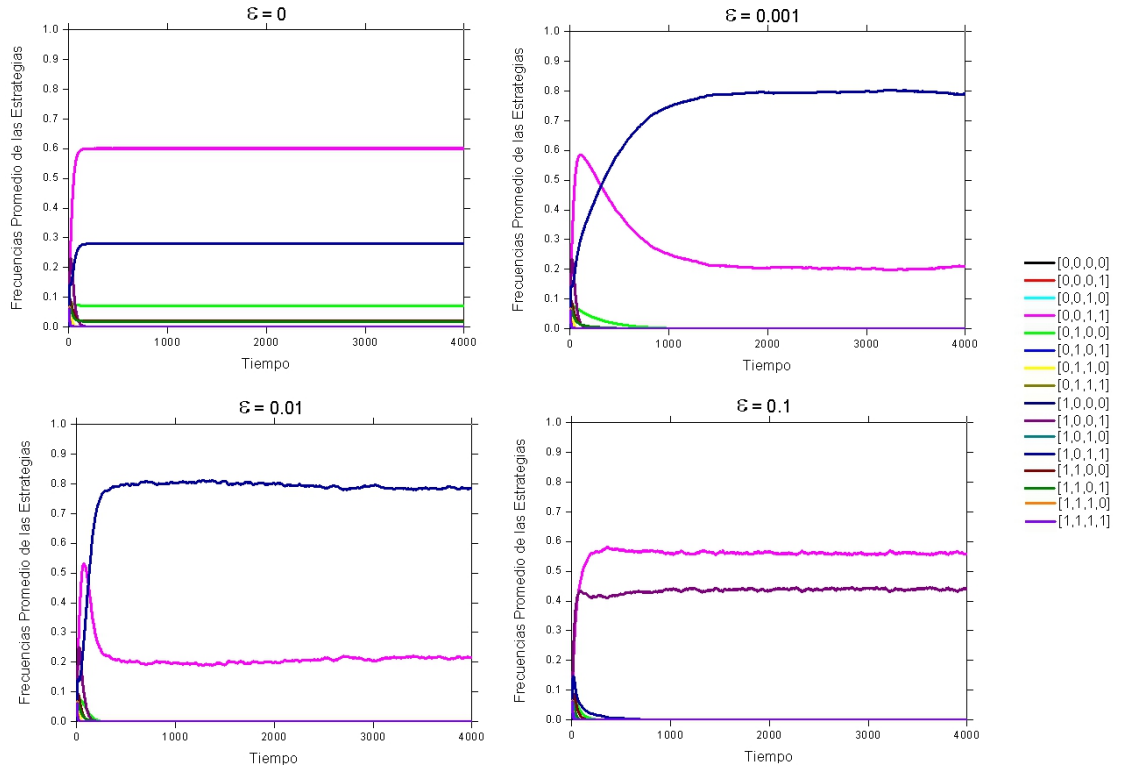


Figura 2.8: Frecuencias de las 16 EMBs compitiendo como función del tiempo para el juego Héroe Determinista con $\tilde{S} = 1,333$, $\tilde{R} = 0,5$ y $q = 8$. Las referencias de las estrategias $[p_R, p_S, p_T, p_P]$ usadas en todas las figuras se muestran en la tabla de colores a la derecha.

Capítulo 3

Estrategias Markovianas sobre Redes Aleatorias y Periódicas

3.1. Introducción

En este capítulo, nuestro enfoque es similar al del Capítulo 2: estudiaremos autómatas celulares (AC) jugando al DP cuyo comportamiento está regido con EMB especificadas por $[p_R, p_S, p_T, p_P]$. Nuestro objetivo es comparar el comportamiento de los agentes regidos con EMB en una red periódica fija con el comportamiento de los mismos en una red evolutiva. Para ambos sistemas elegimos la matriz de pagos del DP con $R = -P = 1$ y $T = -S = 2$. En la primera parte de la siguiente sección repasamos algunos de los resultados anteriores con fines de comparación (el comportamiento cualitativo para la red fija con la matriz de pagos considerada es similar al de la matriz de pagos considerada en el capítulo anterior). En una segunda parte, estudiamos un sistema similar, pero los agentes tienen ahora una conectividad dinámica, es decir: que cada agente puede crear y romper enlaces con los otros agentes en un intento de mejorar su ganancia mediante el cambio de los vecinos con los que juega.

3.2. Resultados

3.2.1. Red Periódica

Comenzamos con una red periódica, ocupada por agentes cuya estrategia inicial está distribuída aleatoriamente dentro de las 16 EMB posibles. En cada paso temporal, cada agente juega con todos sus vecinos más cercanos (consideramos la vecindad de von Neumann $q = 4$ o la vecindad de Moore, $q = 8$), siendo su ganancia la suma de todos los pagos que obtenga al jugar con los mismos individualmente, par a par. Cada agente compara su ganancia con la ganancia de los otros vecinos, y copia la estrategia del agente con el mejor rendimiento. Estudiamos la evolución temporal de las frecuencias de cada estrategia. Promediamos los resultados de varias semillas aleatorias diferentes, elegidas al azar, para obtener resultados independientes de las condiciones iniciales. Las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 corresponden a los resultados de una red periódica de 100×100 promediado en 1000 diferentes condiciones iniciales [1]. Por motivos de comparación con el caso de la red aleatoria (y conveniencia en la definición de este modelo), usamos $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$. Como observamos, los resultados cualitativos para la red periódica son similares a los hallados en el capítulo anterior, para otros valores de los parámetros de pago.

Para $q = 4$ y $\varepsilon = 0$, el sistema alcanza rápidamente un estado de equilibrio dinámico en el que varias de las 16 estrategias están presentes. Al incrementar el valor del ruido ($\varepsilon = 0,01$), disminuye el número de estrategias sobrevivientes, y la diversidad que estaba presente para el caso sin ruido se transforma en una situación donde sólo unas pocas estrategias sobreviven: TFT ($[1, 0, 1, 0]$), $[0, 0, 1, 1]$ y $[0, 0, 1, 0]$. Para $q = 8$, tanto con ruido como sin ruido ($\varepsilon = 0$ o $\varepsilon = 0,01$), tenemos sólo dos estrategias sobrevivientes: $[0, 0, 1, 1]$ y $[1, 0, 1, 1]$. Como se puede ver, la presencia de ruido puede cambiar el rendimiento de las estrategias, en el caso con ruido $[0, 0, 1, 1]$ tiene mayor frecuencia que $[1, 0, 1, 1]$, mientras que en el caso sin ruido ocurre exactamente lo contrario. El comportamiento observado es robusto con el cambio del tamaño de la red periódica.

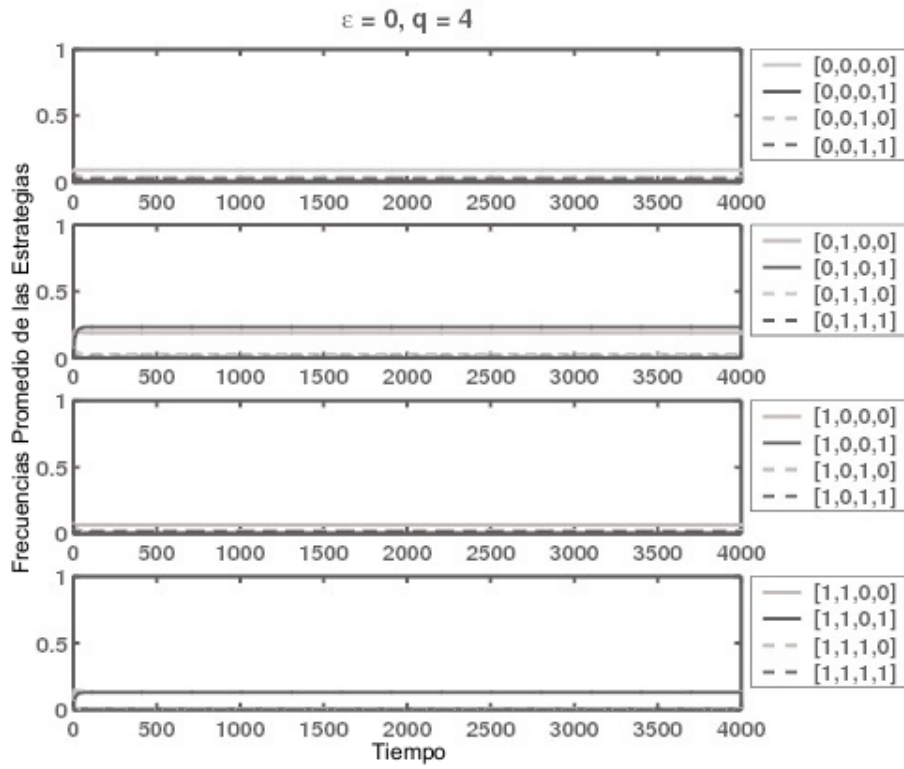


Figura 3.1: Frecuencias promedio para las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red periódica con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $q = 4$, $\varepsilon = 0$.

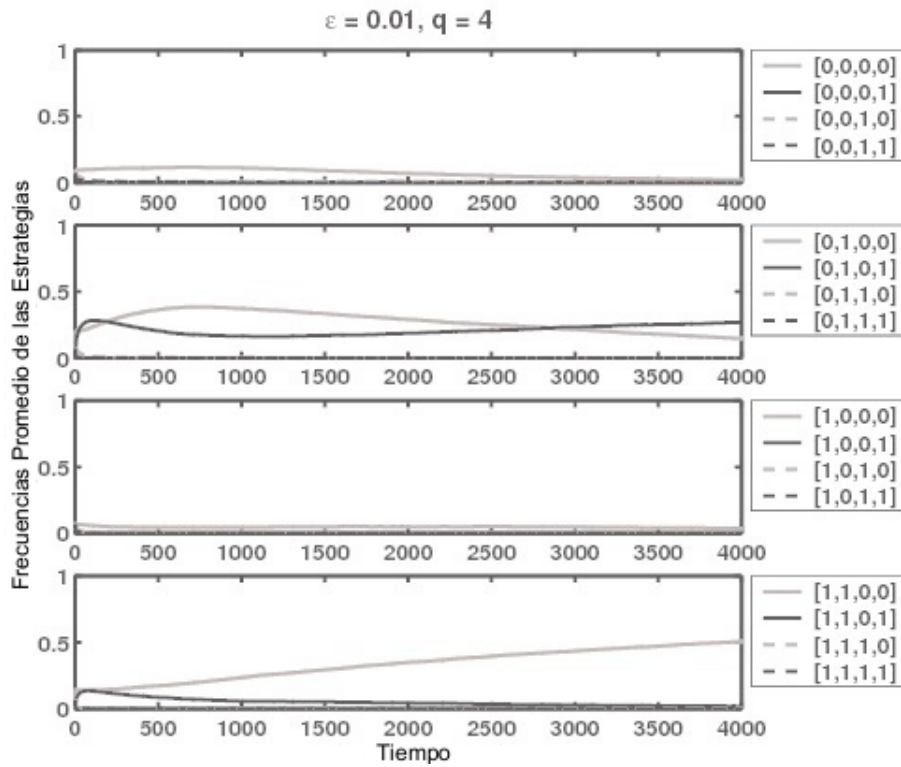


Figura 3.2: Frecuencias promedio para las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red periódica con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $q = 4$, $\varepsilon = 0,01$.

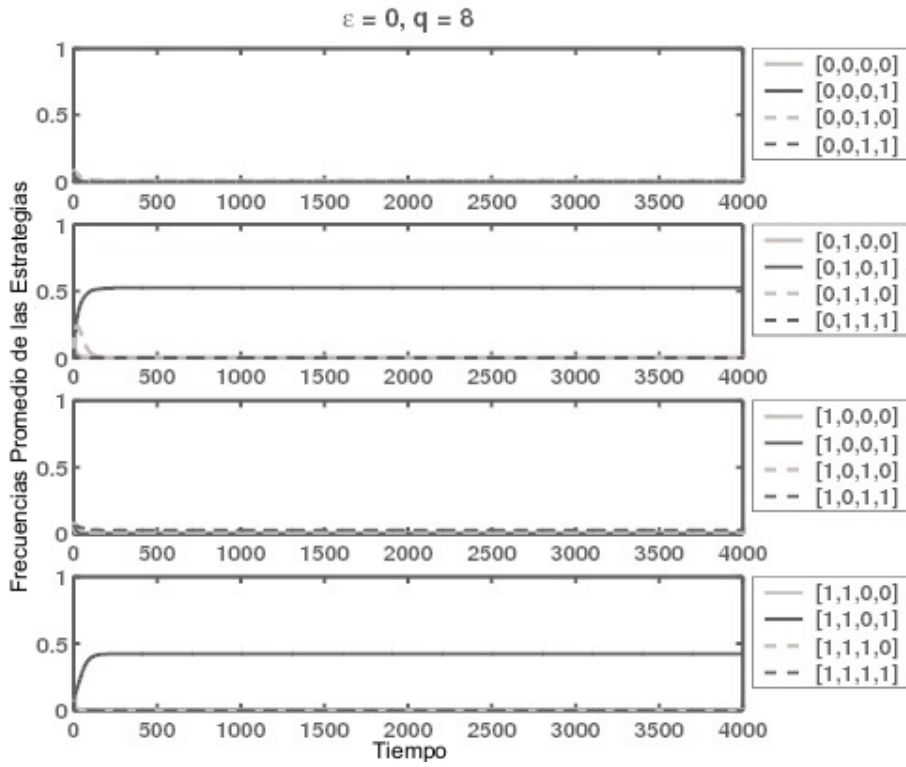


Figura 3.3: Frecuencias promedio para las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red periódica con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $q = 8$, $\varepsilon = 0$.

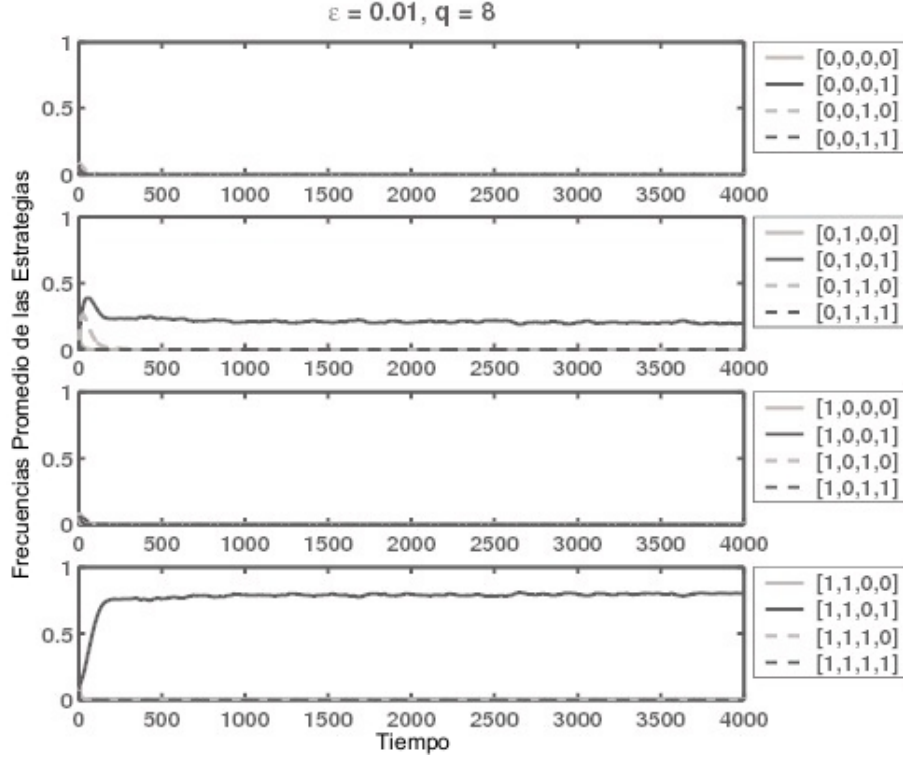


Figura 3.4: Frecuencias promedio para las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red periódica con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $q = 8$, $\varepsilon = 0,01$.

3.2.2. Red Aleatoria Evolutiva

Comenzamos con una red completamente desconectada de agentes cuyas estrategias están distribuidas al azar entre ellos como anteriormente. Pero contrariamente, ahora los agentes pueden jugar de manera diferente (C o D) con cada vecino individual

En cada paso de tiempo cada agente intenta crear un enlace si está aislado, o si su ganancia fue satisfactoria (por encima de cero) en el paso temporal anterior. En ese caso, se selecciona al azar un agente que no estaba entre sus vecinos en el instante

anterior y sólo se crea el vínculo si el otro agente se mostró satisfecho con su propia ganancia, obtenida en su respectiva vecindad, en el instante anterior, o estaba en ese instante aislado. Si la ganancia del agente no es satisfactoria, o el mismo ya se encuentra conectado a todos los agentes de la red, el agente intenta romper un vínculo. Selecciona uno de sus vecinos al azar y rompe el vínculo si la recompensa individual que obtuvo de ese agente el paso de tiempo anterior no fue satisfactoria (por encima del factor de distancia, como se explica más adelante). Luego que la red está configurada, como antes, cada agente juega contra todos sus vecinos, y a continuación copia la estrategia del vecino con el mejor rendimiento. La ganancia es ahora la suma de todas las ganancias obtenidas menos un factor proporcional a la suma de las distancias entre el agente y cada uno de sus vecinos. La distancia se mide como la distancia entre dos nodos de una red periódica, donde situamos geográficamente a los agentes (en posiciones fijas) a los efectos de calcular dichas distancias entre nodos, pero de la cuál no tomamos en cuenta los enlaces (o sea, que los enlaces entre agentes a los efectos del juego determinan una interacción social, diferente a la espacial). Se introduce este factor distancia para evitar una red completamente conectada como resultado, asignando un costo diferencial a cada enlace entre los agentes, siendo más costoso interactuar con agentes lejanos geográficamente. Adicionalmente, se consideran dos casos para las condiciones iniciales (que en todos los casos se promedian en 1000 condiciones iniciales distintas): o bien todos los agentes empezaron cooperando en el instante inicial, o bien el primer paso se selecciona al azar. Como antes, estudiamos la evolución temporal de las frecuencias de cada estrategia. Los resultados para una red de 1024 agentes se grafican en las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8.

Después de un corto transitorio, caracterizado por oscilaciones bruscas y breves (observar que esto también es diferente a lo que ocurre en el caso de la red cuadrada, donde el promedio en las semillas aleatorias es suficiente para suavizar el comportamiento de las frecuencias aún durante el transitorio, si bien la convergencia al transitorio es en ese caso mas lenta), las frecuencias llegan a un estado estacionario. Al igual que en el caso de una red periódica con $q = 4$ y $\varepsilon = 0$, en todos los casos obtenemos la coexistencia de varias estrategias. Observamos que, igual que en el caso de la red periódica, $[0, 0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1, 1]$ son algunas de las estrategias más exitosas, con la diferencia de que en este caso, la introducción de ruido ($\varepsilon \neq 0$) no selecciona

unas pocas estrategias de las muchas coexistentes en el caso sin ruido, contrario a lo que ocurre en la red regular fija.

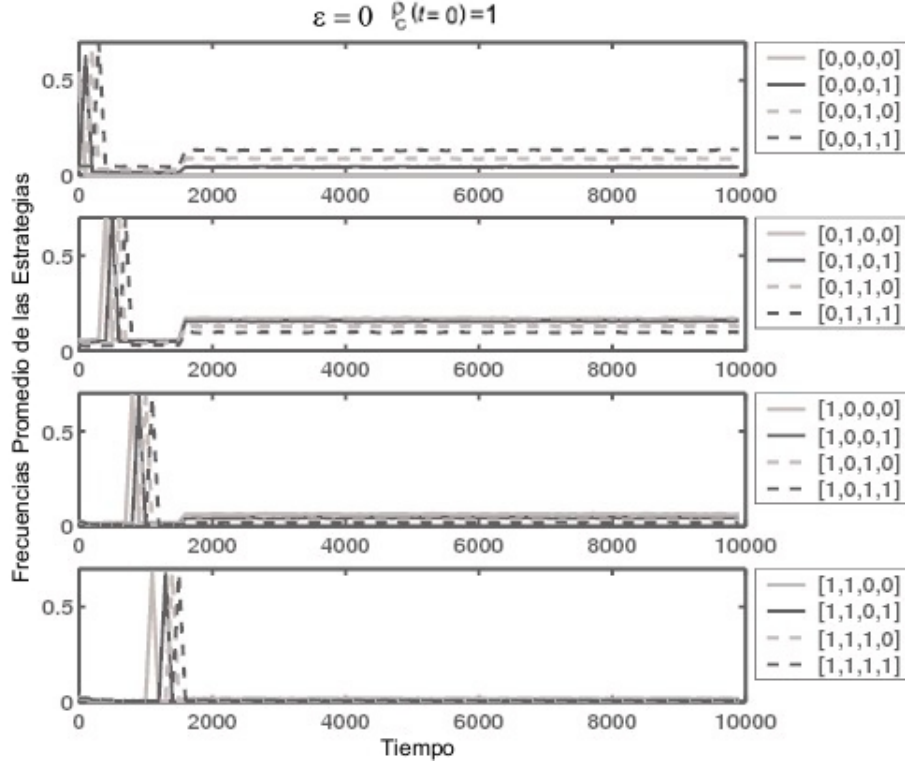


Figura 3.5: Las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$ y $P = -1$, $\varepsilon = 0$, siendo la primera jugada C para todos los agentes. Las referencias utilizadas en esta figura (Figura 3.5) son las mismas que las de la figura 3.1.

Adicionalmente, como era de esperar, los casos para $\varepsilon = 0, 01$ tienen un mismo estado estacionario, sin importar cuál es la jugada inicial de los agentes, ya que la dependencia con la condición inicial es borrada por la introducción de ruido. Adicionalmente,

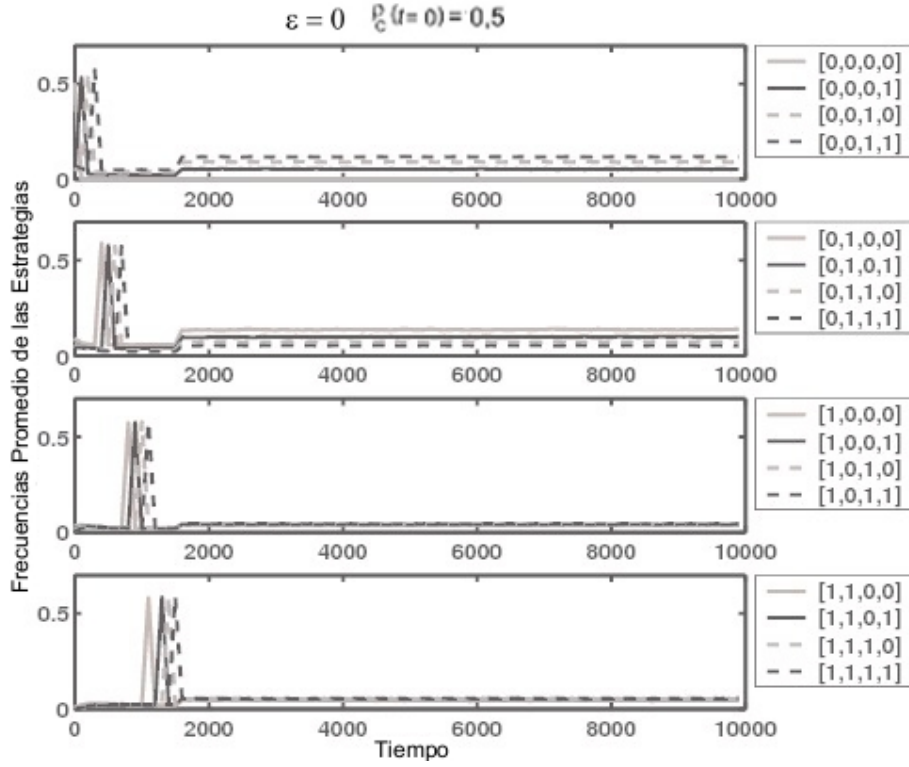


Figura 3.6: Las 16 estrategias binarias Markovianas (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$ y $P = -1$, $\varepsilon = 0$, siendo la primera jugada de cada agente elegida al azar, siendo C y D equiprobables. Las referencias utilizadas en esta figura (Figura 3.6) son las mismas que las de la figura 3.2.

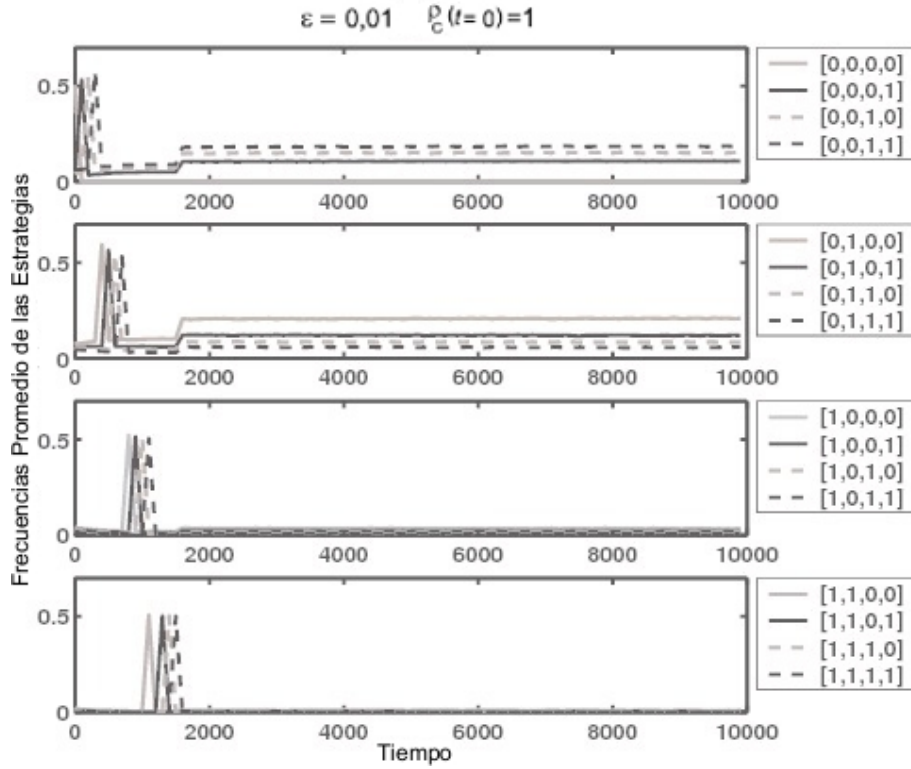


Figura 3.7: Las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$ y $P = -1$, $\varepsilon = 0,01$, siendo la primera jugada C para todos los agentes. Las referencias utilizadas en esta figura (Figura 3.7) son las mismas que las de la figura 3.3.

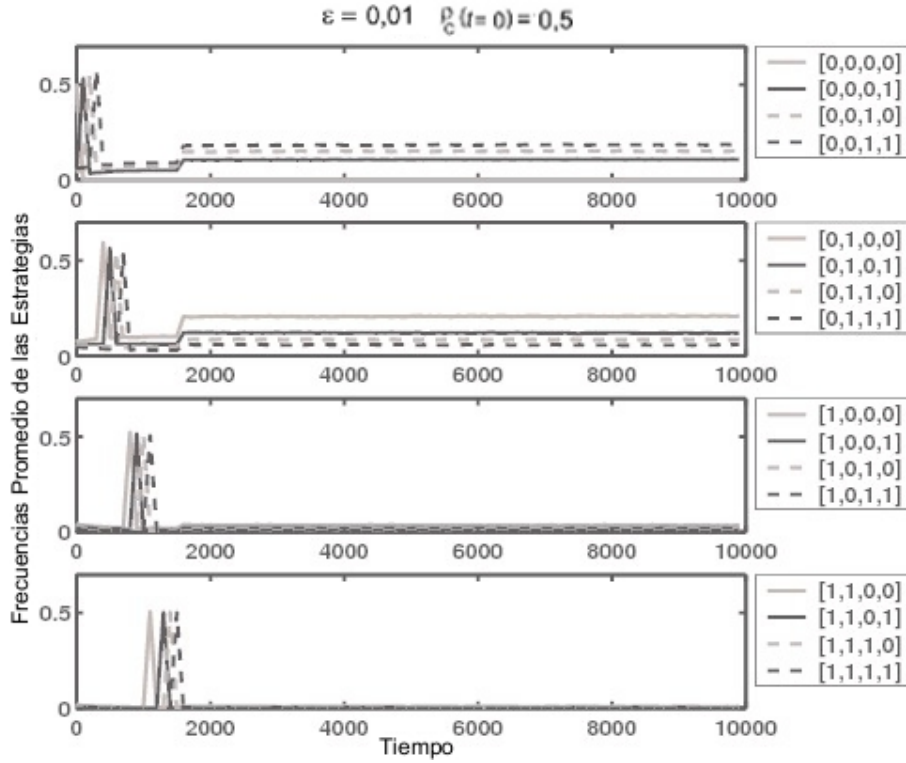


Figura 3.8: Las 16 estrategias Markovianas binarias (EMB) competidoras en función del tiempo para el Dilema del Prisionero (DP) en una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$ y $P = -1$, $\varepsilon = 0,01$, siendo la primera jugada de cada agente elegida al azar, siendo C y D equiprobables. Las referencias utilizadas en esta figura (Figura 3.8) son las mismas que las de la figura 3.4.

en todos los casos de redes evolutivas, al igual que con las redes periódicas, la estrategia correspondiente al equilibrio de Nash perfecto en subjugos que predice la teoría racional para el Dilema del Prisionero iterado finito, $[0, 0, 0, 0]$, se extingue por completo en el estado estacionario. La distribución de la conectividad de los agentes para el estado estacionario se grafica en las figuras 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12. Para $\varepsilon = 0$ (ver las gráficas de las figuras 3.9 y 3.10), hay una distribución bimodal de los vecinos, mientras que para los casos con $\varepsilon = 0,01$ (ver las gráficas de las figuras 3.11 y 3.12), que son idénticas por las razones expuestas más arriba), la distribución del número q de vecinos resultante, puede ajustarse por una distribución de Laplace, dada por $P(q) \approx 45,6 \exp(-0,486 \times q)$. En todos los casos, la distribución individual del número de vecinos para cada estrategia presente en el estacionario presenta un comportamiento cualitativamente similar para todas las estrategias (con fluctuaciones), siendo la única excepción el caso de la distribución correspondiente a $[0, 0, 0, 1]$ para $\varepsilon = 0$, en el caso en el que la primera jugada de los agentes se elige al azar equiprobablemente como C o D (Ver la curva representada con asteriscos verdes de la figura 3.10). Observamos además, que tanto el ruido como las condiciones iniciales aleatorias hacen que la conectividad disminuya, siendo el caso que presenta nodos con mayor número de enlaces el que corresponde a todos los agentes comenzando a jugar C en el instante inicial con $\varepsilon = 0$.

3.3. Conclusiones

En este capítulo, comparando los resultados para redes periódicas [1] con los resultados para las redes evolutivas, llegamos a la conclusión de que la geometría es fundamental para la selección de las estrategias sobrevivientes. Para el caso de las redes periódicas la presencia de ruido puede reducir el número de estrategias sobrevivientes de una manera significativa, pero esto deja de ser cierto para el caso de redes aleatorias evolutivas.

Como era de esperar, para el caso de las redes aleatorias evolutivas, el ruido y la selección al azar de las jugadas iniciales de los agentes tienden a disminuir la conectividad, porque en este caso los agentes son menos cooperativos y los enlaces sólo se mantienen cuando ambos agentes se encuentran satisfechos. Si se parte de

una red completamente desconectada, para $\varepsilon = 0$ existe una distribución bimodal de los vecinos, mientras que para $\varepsilon = 0,01$ la distribución del número de vecinos puede ajustarse con una distribución de Laplace.

Distribuciones de Conectividad para las Diferentes Estrategias

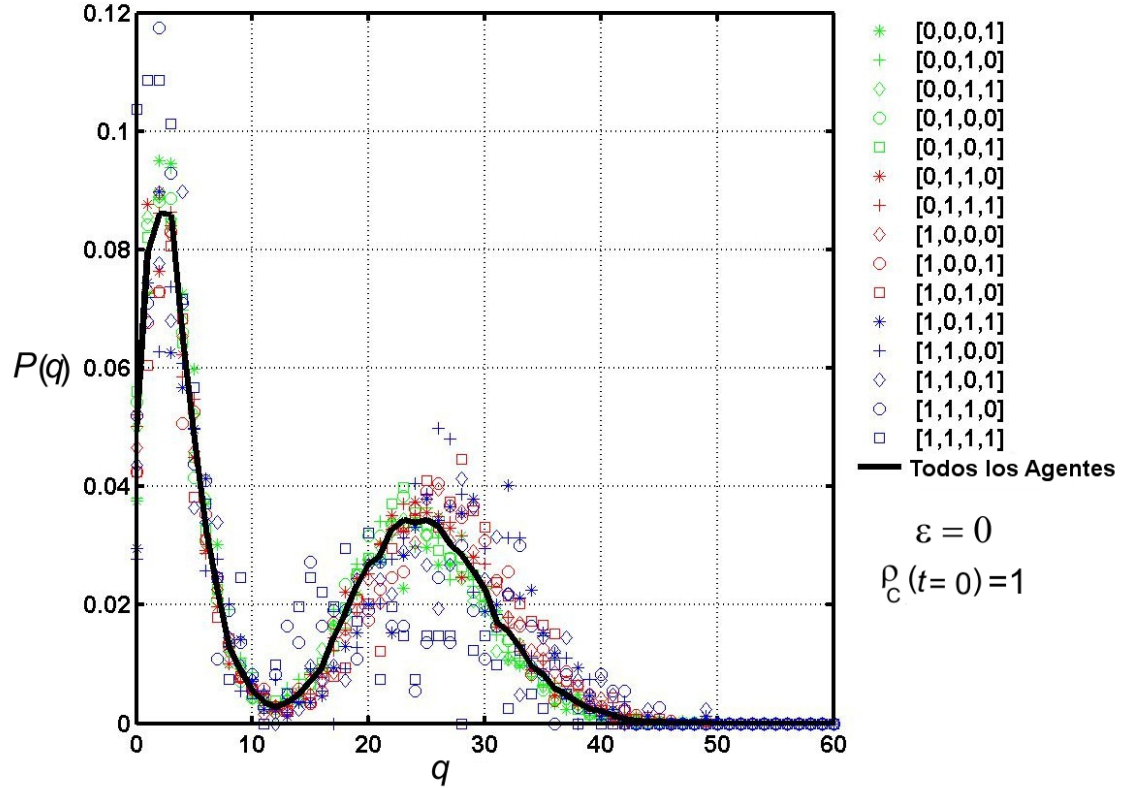


Figura 3.9: Distribución de la conectividad en el estado estacionario para todos los agentes, independientemente de su estrategia, para el DP sobre una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $\varepsilon = 0$, siendo la primera jugada C para todos los agentes. La estrategia $[0,0,0,0]$ no se grafica, por no sobrevivir agentes con dicha estrategia en el estacionario. Observamos que las distribuciones de conectividad para cada estrategia considerada individualmente son cualitativamente similares a la distribución global.

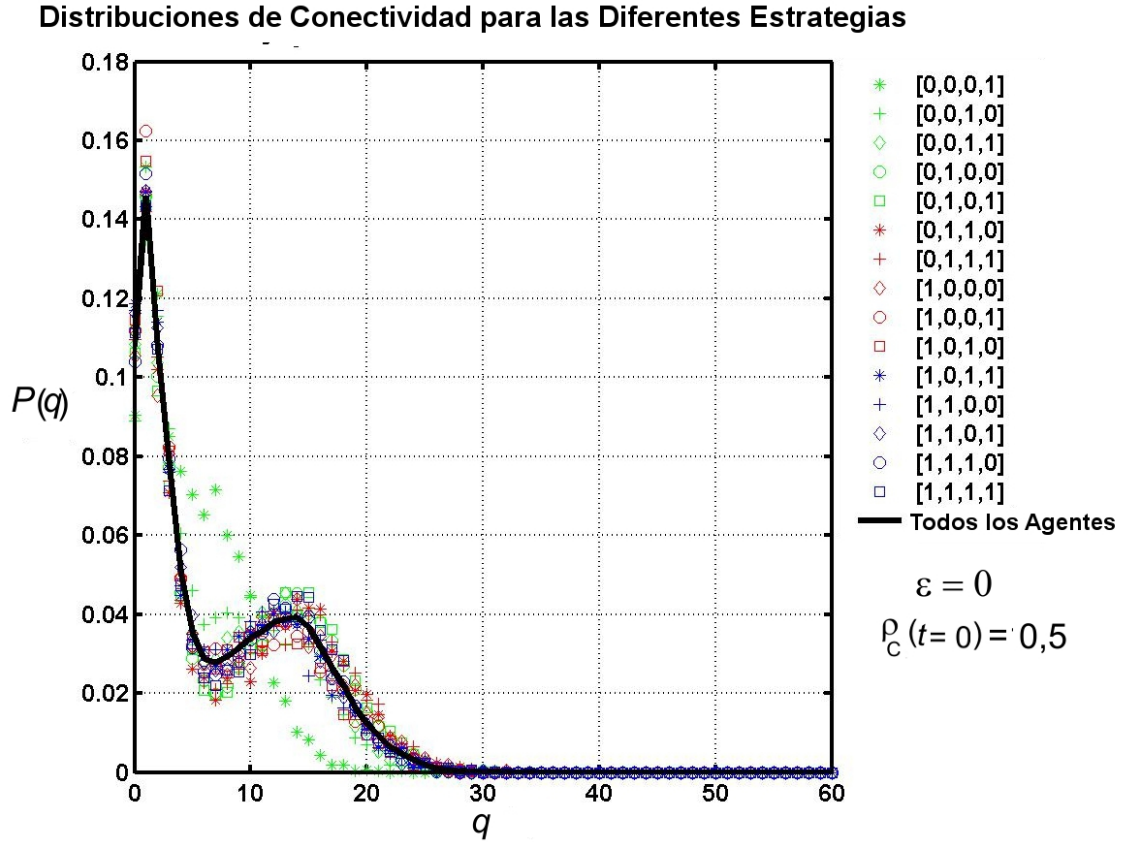


Figura 3.10: Distribución de la conectividad en el estado estacionario para todos los agentes, independientemente de su estrategia, para el DP sobre una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $\varepsilon = 0$, siendo la primera jugada de cada agente elegida al azar con C y D equiprobables. La estrategia $[0, 0, 0, 0]$ no se grafica, por no sobrevivir agentes con dicha estrategia en el estacionario. Observamos que la mayoría de las distribuciones de conectividad para cada estrategia considerada individualmente son cualitativamente similares a la distribución global. La excepción se da para curva representada con asteriscos verdes, que corresponde a la distribución de conectividad para los agentes con estrategia $[0, 0, 0, 1]$, que claramente se desvía notablemente del comportamiento de las otras distribuciones.

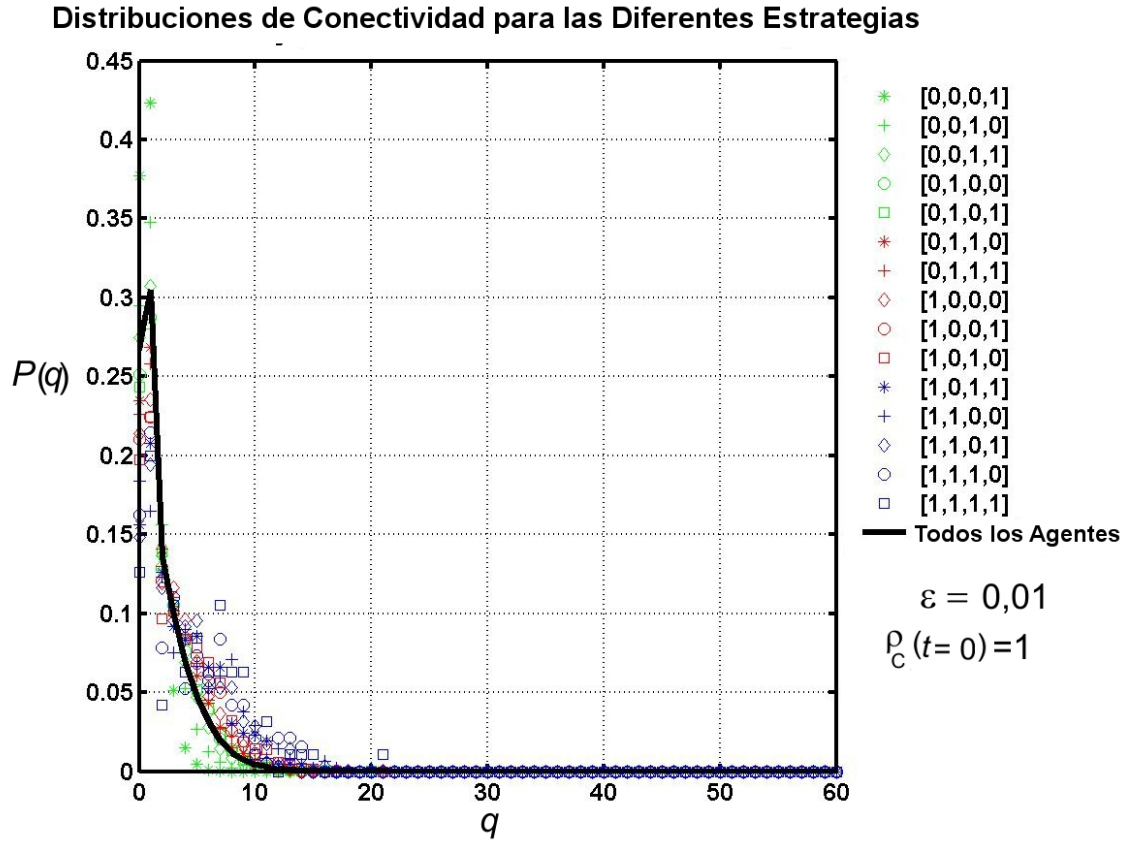


Figura 3.11: Distribución de la conectividad en el estado estacionario para todos los agentes, independientemente de su estrategia, para el DP sobre una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $\varepsilon = 0,01$, siendo la primera jugada C para todos los agentes. La estrategia $[0,0,0,0]$ no se grafica, por no sobrevivir agentes con dicha estrategia en el estacionario. Observamos que las distribuciones de conectividad para cada estrategia considerada individualmente son cualitativamente similares a la distribución global.

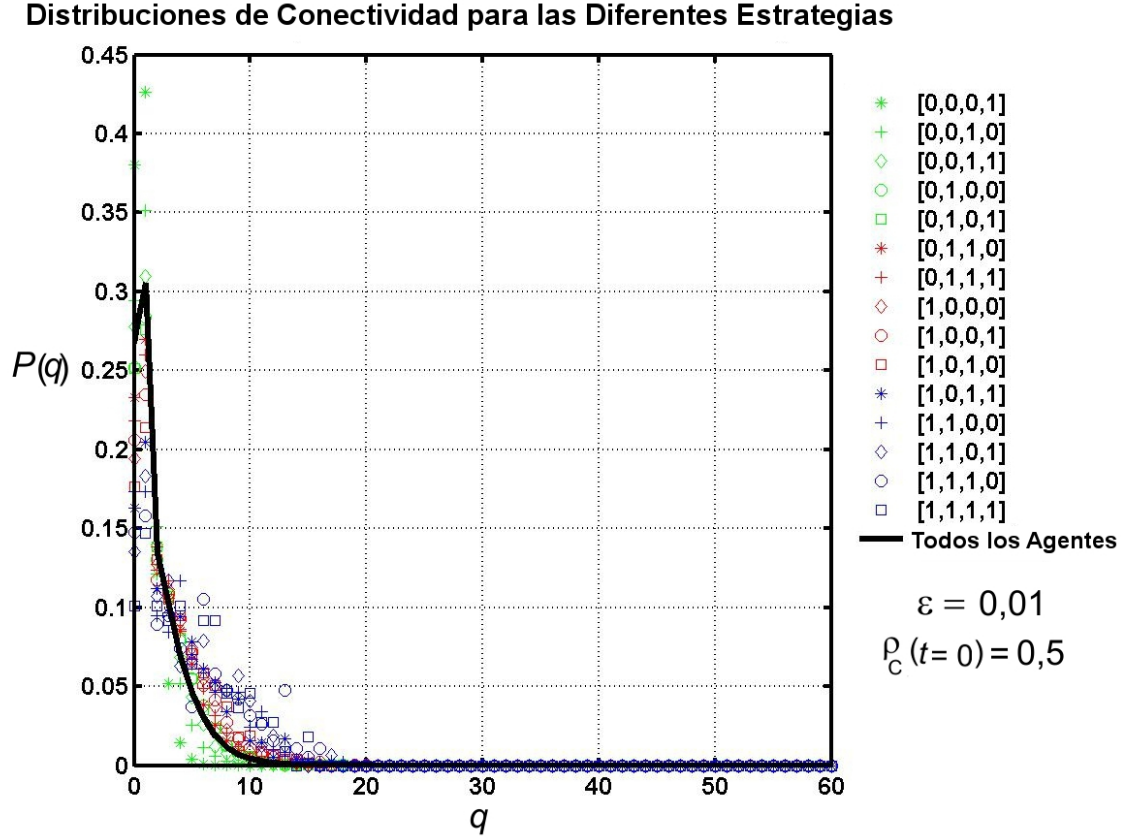


Figura 3.12: Distribución de la conectividad en el estado estacionario para todos los agentes, independientemente de su estrategia, para el DP sobre una red aleatoria evolutiva con $R = 1$, $S = -2$, $T = 2$, y $P = -1$, $\varepsilon = 0,01$, siendo la primera jugada de cada agente elegida al azar con C y D equiprobables. La estrategia $[0, 0, 0, 0]$ no se grafica, por no sobrevivir agentes con dicha estrategia en el estacionario. Observamos que las distribuciones de conectividad para cada estrategia considerada individualmente son cualitativamente similares a la distribución global.

Como trabajo futuro puede ser interesante estudiar el caso de redes evolutivas con diferentes configuraciones espaciales iniciales, como por ejemplo comenzando a partir de una red periódica.

Contrario a lo encontrado en modelos anteriores estudiados por Zimmerman et. al. [47, 48], donde se observaba una fuerte dependencia de las condiciones iniciales para la aparición de cooperación en el estado estacionario, y la desaparición de la misma al introducir ruido, nuestro modelo presenta un alto nivel de cooperación, robusto respecto a las condiciones iniciales, y que resiste la introducción de errores en el comportamiento de los agentes (ruido) simulado a través del parámetro $\varepsilon \neq 0$ (para un rango de valores moderados). Si bien el nivel de cooperación mejora al permitir que el número medio de enlaces no se conserve [49] (el modelo de Zimmerman [47, 48] supone conectividad media constante), en este caso se obtiene un estado final que nunca alcanza el estacionario. Concluimos que la introducción de estrategias Markovianas que permiten la toma de represalias (presentes en nuestro modelo) es un factor determinante a la hora de estabilizar la cooperación con respecto a las fluctuaciones debidas a las condiciones iniciales y el ruido, y que al mismo tiempo el sistema evolucione rápidamente hacia un estado estacionario en las frecuencias de las estrategias.

Observamos que las distribuciones de conectividad son atípicas, en lo que respecta a las redes sociales (comportamiento bimodal con una transición a un comportamiento exponencial, al introducir ruido no nulo en las interacciones)¹. La introducción de un costo para los enlaces proporcional a la distancia en el cálculo de la satisfacción de los agentes, juega un doble papel. Por un lado enlentece la difusión de los no cooperantes lo suficiente como para evitar un estado final de no cooperantes puros, permitiendo la formación de agrupaciones altamente cooperativas robustas. Por otro lado, introduce una probabilidad efectiva menor de formar enlaces alejados con respecto a elegir un vecino cercano a su propia vecindad. Este efecto parecería ser similar a la probabilidad jerárquica en la elección de vecinos introducida en [47]. En este contexto, sería interesante estudiar en el futuro el comportamiento de los coeficientes de agrupación de las redes sociales de nuestro modelo, y estudiar bajo

¹Ver una reseña sobre las diferentes posibles redes sociales en el Apéndice E.

qué condiciones se obtienen redes con propiedades del tipo “mundo pequeño” (Small World). Así mismo, se puede ampliar nuestro estudio a otros juegos 2×2 , como los estudiados en el Capítulo 2.

Capítulo 4

Efectos de la Difusión en el Dilema del Prisionero Espacial

4.1. Introducción

En este capítulo consideramos los efectos de la movilidad de los agentes en una red cuadrada diluída para distintos dilemas sociales. Los efectos de la concentración de agentes y de la movilidad de los mismos fueron estudiados por Vainstein y Arenzon (2001) [50] y Vainstein et al. (2007) [51] para la forma débil del Dilema del Prisionero.

Los efectos de la movilidad son difíciles de prever. Cuando se incluye la posibilidad de movimientos no selectivos de los agentes, el número efectivo de vecinos aumenta (tendiendo hacia el límite de mezcla al azar). Por otra parte, las agrupaciones espaciales tan necesarias para mantener la cooperación ahora pueden evaporarse. Estos dos efectos promueven la no cooperación y por lo tanto causan que la cantidad de cooperadores disminuya. Por otra parte, la concentración espacial de agentes (Alizon y Taylor, 2008 [52]) y la movilidad disminuyen la competencia por los recursos locales y ayudan a evitar la aplicación de represalias a los no cooperantes por parte de los cooperantes y el abuso de los cooperantes por los no cooperantes, ya que eventualmente los primeros pueden escapar de los segundos (Aunque esto último puede requerir una mayor cantidad de movimientos al azar), lo que tiende a aumentar la cooperación. En el contexto de juegos evolutivos, el efecto de la concentración es-

pacial de agentes interactuantes fue estudiado por varios autores, a veces como un costo para vagar entre parches sin estructura espacial (Dugatkin y Wilson, 1991 [53]; Enquist y Leimar, 1993 [54]) o como una habilidad conectada con la posibilidad de distribuir hijos dentro de un rango de dispersión dado (Hamilton y Táborisky, 2005 [55]; Koella, 2000 [56]; LeGalliard et al, 2005 [57]; van Baalen y Rand, 1998 [58]). Un proceso de difusión explícita se estudió en el marco de la regla evolutiva del *replicador* (Hofbauer y Sigmund, 1998 [26]), ampliada para incluir un término difusivo (Ferrière y Michod, 1995 [59], 1996 [60]), sin embargo, en este modelo las interacciones eran todavía del tipo campo medio. También han sido considerados modelos con una viscosidad variable, que refleja las diferentes etapas de desarrollo, que pueden beneficiarse de la clusterización de los cooperadores o de la dispersión, y los mismos promueven el altruismo, ya que la fase de alta viscosidad permite interacciones entre parientes cercanos y la fase de baja viscosidad reduce las desventajas de la competencia local entre individuos emparentados. En los casos de poblaciones con sólo una fase de alta viscosidad, los efectos de las interacciones entre los familiares y la competencia por recursos locales tienden al equilibrio y por lo tanto la evolución de los comportamientos altruistas es inhibida (Taylor, 1992 [61]; Wilson et al., 1992 [62]). Difiriendo de trabajos previos, Vainstein et al. (2007 [51]) consideran una versión del modelo espacial de Dilema del Prisionero de Nowak-May, donde los individuos son capaces de realizar recorridos aleatorios por todas las regiones de la red donde haya suficiente espacio libre (la estrategia no selectiva de “moverse siempre”). Específicamente, el escenario es el más simple posible: la difusión aleatoria de agentes simples, sin memoria, incondicionales, que no toman represalias, y tienen una estrategia pura. En estas condiciones, se encuentra que la cooperación no sólo es posible y robusta, para una amplia gama de los parámetros (densidad, viscosidad, etc), sino que la mayoría de las veces la cooperación es favorecida en comparación con el caso altamente viscoso (sin movilidad). Los valores de los parámetros elegidos ponen este modelo en la interface entre el Dilema del Prisionero y el Halcón-Paloma, por lo que surge la pregunta natural sobre cuál es la robustez de este comportamiento cuando $S < P$, es decir, en un verdadero Dilema del Prisionero. Por otra parte, es interesante estudiar cómo afecta la movilidad a otros juegos, como el Halcón-Paloma o la Caza del Ciervo. Jian-Yue et al. (2007 [63]) amplió los resultados de Vainstein

et al. (2007) para el juego de Halcón-Paloma, pero con una elección particular de los parámetros de pago, S y T . Otra cuestión relevante, se refiere a la existencia o no de cualquier tipo de diferencia fundamental entre esos juegos en que la movilidad se introduce. En particular, en aquellos casos en que la estructura espacial inhibe la cooperación (Hauert y Doebeli, 2004[64]), interesa estudiar si la introducción de la movilidad puede cambiar este resultado.

Nuestro objetivo aquí es presentar un análisis más completo y ampliar ese estudio anterior en varias direcciones, tratando de echar algo de luz sobre las preguntas de arriba. El capítulo está organizado de la manera siguiente. En la siguiente sección se describen los detalles del modelo de simulación. A continuación, se presentan los resultados de dos posibles implementaciones del mismo, en función del orden del paso difusivo y el de reproducción. Por último, en la sección final, presentamos nuestras conclusiones y discutimos algunas implicaciones de los resultados.

4.2. El Modelo

El modelo que utilizamos en este capítulo es un autómata celular estocástico en el cual las celdas están, o bien ocupadas por jugadores incondicionales (cooperadores o no), o bien vacías. En cada instante t , la variable $S_i(t)$ vale 0 si la correspondiente celda i -ésima está vacía, o vale ± 1 , dependiendo si el agente en la celda coopera (+1) o no coopera (-1). La cantidad relevante que caracteriza el sistema es la fracción normalizada de agentes cooperadores, ρ_C , que el sistema tiene después de alcanzar un estado estacionario. Dicha magnitud se define como $\rho_C = \frac{1}{2}(1 + \frac{M}{\rho})$ donde M es la “magnetización”, $M = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i(\infty) \rangle$ (∞ aquí denota que el sistema ha llegado al estado estacionario), N es el tamaño del sistema, y $\rho \neq 0$ es la fracción de sitios ocupados, que permanece constante en todo instante (cuando $\rho \neq 1$ decimos que el sistema está diluído). El símbolo $\langle \dots \rangle$ se refiere a un promedio en un ensemble de configuraciones iniciales. Diremos que una celda está *activa* si su estrategia ha cambiado respecto al paso temporal anterior. En cada instante, todos los individuos juegan contra sus cuatro vecinos más próximos (si están presentes), sumando las utilidades de todos los encuentros. Después de eso, el agente puede moverse o tratar de generar descendencia. Modelamos la selección natural dando ventaja total al más

apto: cada jugador compara su utilidad total con la de sus vecinos más cercanos, y adopta la estrategia del que haya obtenido una mayor ganancia dentro de ese conjunto (incluyéndose a sí mismo). Es importante observar que este tipo de actualización de las estrategias preserva el número total de individuos, dejando entonces ρ constante. En caso de que dos o más agentes de un vecindario dado tuvieran el mismo valor de utilidad, la estrategia a copiarse es elegida al azar entre las estrategias de los mismos. Durante la parte difusiva, cada agente intenta saltar, con una probabilidad m , a una de las celdas vecinas más cercanas, elegida al azar, siempre y cuando la misma se encuentre vacía. Llamamos *parámetro de movilidad* a la probabilidad m de que un agente salte de su celda a una celda vacía cercana. Notamos que m no mide la movilidad efectiva, ya que esta depende tanto de m como de ρ , sino solamente la tendencia a moverse, independientemente de las condiciones espaciales. Es más, diferentes combinaciones de m y ρ pueden derivar en la misma movilidad efectiva (medida por ejemplo a través del desplazamiento medio cuadrático), pero este parámetro, por sí solo, sería insuficiente para caracterizar el comportamiento del juego, ya que las correlaciones espaciales son determinadas por el valor de ρ . Dentro de los varios modos de implementar los procesos reproductivos y difusivos, consideramos para su estudio dos posibilidades, llamadas JRD (Juego-Reproducción-Difusión) y JDR (Juego-Difusión-Reproducción). En la primera, como su nombre lo indica, cada paso temporal consiste de un primer paso donde los agentes juegan con sus vecinos, seguido por la reproducción realizada en paralelo, y luego la difusión. En la segunda, los procesos de reproducción y difusión se hallan invertidos en su orden. Como es de esperar, la aleatoriedad introducida al sistema por la movilidad desaparece en algunas condiciones (como por ejemplo $\rho = 1$ o $m = 0$), y por tanto el resultado final puede en esos casos depender de la condición inicial.

Exploramos muchas posibilidades para los parámetros de pagos, T y S , mientras que dejamos fijos los valores de $P = 0$ y $R = 1$, y comparamos los efectos de la difusión con aquellos obtenidos, o bien para la versión espacial del Dilema del Prisionero débil (Vanestein y otros, 2007), o bien para el límite mezclado al azar (campo medio). Fueron usadas redes cuadradas de 100×100 a 500×500 con condiciones de contorno periódicas. Los promedios fueron realizados para al menos 100 condiciones iniciales diferentes y el estado estacionario fue alcanzado usualmente antes del 1000-

ésimo paso temporal de evolución del sistema, aunque, en algunos casos ni siquiera 10^7 pasos fueron suficientes para alcanzar dicho equilibrio. Las configuraciones iniciales fueron de ρN individuos ubicados al azar en la red, igualmente distribuidos entre cooperadores (C) y no cooperadores (D).

4.3. Resultados

Como ya hemos mencionado, Vanstein y otros (2007 [51]) consideraron solamente el caso del Dilema del Prisionero Débil con $P = S = 0$ para $T = 1,4$ y $R = 1$, lo cual corresponde a la zona donde, para $\rho = 1$, ambas estrategias coexisten junto con los sitios activos. Cuando $S \neq 0$, dicha región puede abarcar tanto valores de S que corresponden al Dilema del Prisionero ($S > 0$) como valores de S que corresponden al Halcón-Paloma ($S < 0$). Las figuras 4.1 y 4.2 muestran que los resultados obtenidos por Vanstein y otros (2007) para el caso de dinámica JRD, permanecen inalterados para valores de S que verifiquen $2T - 3 < S < (T - 1)/3$. Efectivamente, en la figura 4.1, la curva correspondiente a $S = -0,1$ se superpone exactamente con los resultados para todo ese intervalo, $S = 0$ incluído. Esto se ve más claramente en la figura 4.2, donde ρ , m y S son variados, y se observa una meseta (Hauert, 2001) en el intervalo $(-0,2; 2/15)$, si bien el valor de ρ_C en dicha meseta depende de tanto ρ como m . Además de esa etapa activa, el sistema presenta un gran número de fases diferentes, con transiciones bruscas (discontinuas) entre ellas. Con el propósito de comparar, hemos incluído el caso sin movilidad $m = 0$ y el caso $\rho = 1$ (línea negra continua). Los puntos de transición, calculados teniendo en cuenta varios tipos de vecindad, se representan en la figura 4.2 como líneas verticales con punteado largo, los mismos se localizan en los puntos donde S toma los valores de $(T + 3P)/2 - R = -0,3$, $2T + 2P - 3R = -0,2$, $(T + 3P - R)/3 = 2/15$, $(T + 3P)/4 = 0,35$, $T + P - R = 0,4$, y $(2P + 2T - R)/3 = 0,6$ y $P + T/2 = 0,7$. Además de estas transiciones, aparecen algunas más cuando el sistema se diluye (líneas verticales con punteado fino), $\rho < 1$, estando cada fase caracterizada por el modo en que el sistema se organiza de forma espacial. Cuando se introduce la difusión (movilidad no nula) como una etapa posterior a la de reproducción (dinámica JRD) no aparecen nuevos puntos de transición del sistema. La dilución ($\rho < 1$) sin

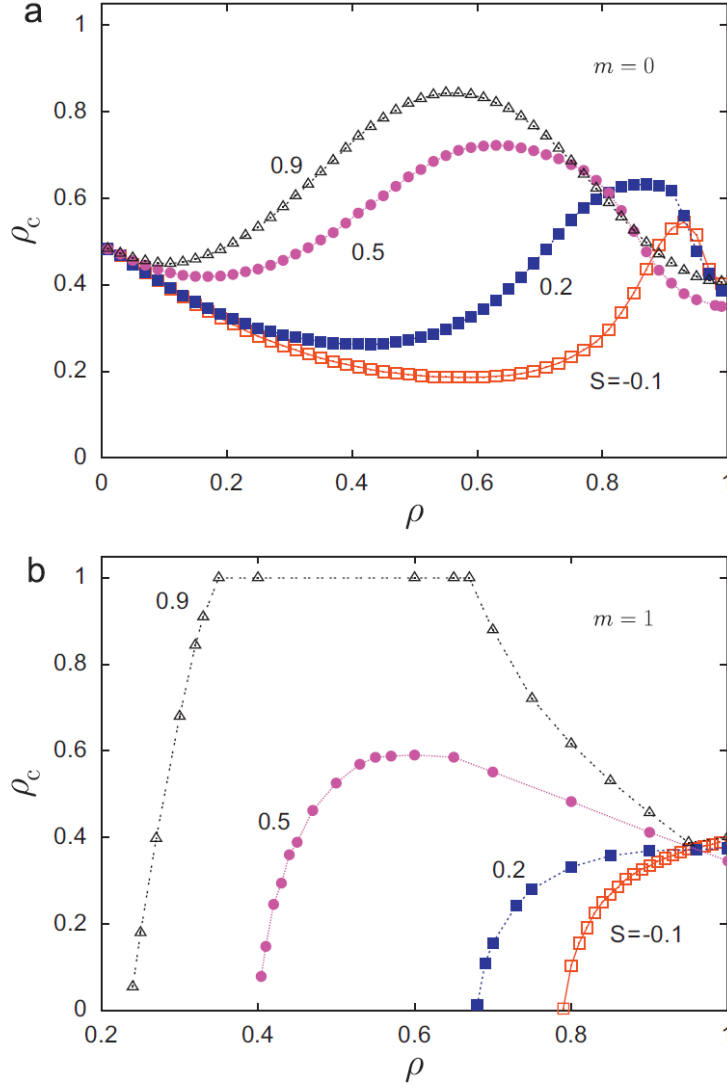


Figura 4.1: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , para movilidades $m = 0$ (arriba) y $m = 1$ (abajo), $P = 0$, $R = 1$, $T = 1,4$ y varios valores de S en el caso JRD. El caso $S = -0,1$ es representativo para todo el intervalo alrededor del punto $S = 0$ correspondiente al Dilema del Prisionero débil ($-0,2 < S < 2/15$). Efectivamente, todas las curvas en dicho intervalo colapsan. Notamos además que cerca de $\rho = 1$ ocurren respuestas negativas y ρ_C puede decrecer al aumentar S , siendo el efecto mayor cuando $m = 0$ (ver texto). Para densidades bajas, la movilidad es perjudicial para los cooperadores: núcleos de cooperadores aislados que pueden sobrevivir para $m = 0$, pueden ser predados por los no cooperadores móviles, una vez que se introduce la posibilidad de movimiento. Para valores intermedios de densidad de agentes, en cambio, la movilidad puede incrementar fuertemente la cantidad de cooperadores.

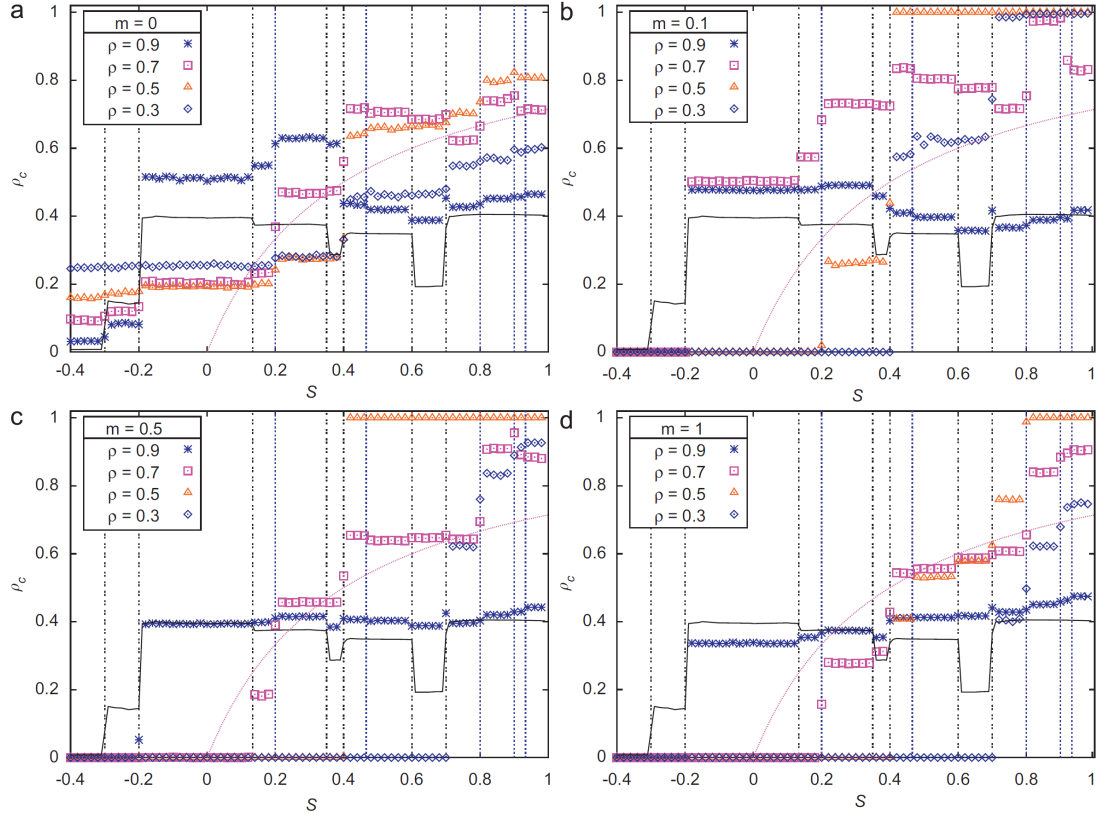


Figura 4.2: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , en función de S , en los juegos de Halcón-Paloma ($S > 0$) y Dilema del Prisionero ($S < 0$) con dinámica JRD, para varios valores de movilidad m y densidad de agentes ρ . La línea continua negra corresponde al caso de $\rho = 1$. Las líneas verticales con punteado largo marcan los puntos de transición para $\rho = 1$ ($S = -0.3, -0.2, 2/15, 0.35, 0.4, 0.6$ y 0.7) y las líneas verticales con punteado fino ubican otros puntos de transición nuevos que aparecen para $\rho < 1$ ($S = 0.2, 7/15, 0.8, 0.9$, y $14/15$), como se explica en el texto. La línea curva punteada rosa es el resultado esperado para una mezcla estocástica ($\rho_C = 0$ para el Dilema del Prisionero, $S < 0$ y $\rho_C = S/(S + T - 1)$ para el Halcón-Paloma, $S > 0$, ver detalles de deducción en el Apéndice D). Para su comparación, el caso sin movilidad ($m = 0$), cuyos resultados obviamente son independientes de la dinámica de difusión, es graficado junto con los casos de movilidad $m \neq 0$. Observamos que en la dinámica JRD no aparecen nuevos puntos de transición para $m \neq 0$, más allá de los ya observados para el caso $m = 0$.

movilidad ($m = 0$) permite una cooperación entre los agentes, para valores pequeños de S ($S < -0,3$), que está ausente para el caso de $\rho = 1$. Para densidades de agentes bajas, en particular, los núcleos espaciales de agentes están aislados, por lo cual, dependiendo de las condiciones iniciales, es posible que se formen núcleos exitosos formados sólo por cooperadores. Sin embargo, al introducirse la movilidad ($m \neq 0$), esta fase inducida por el desorden desaparece, ya que los pequeños núcleos de cooperadores son fácilmente predados por los no cooperadores que los merodean. En estos casos de baja densidad, la cooperación sólo es posible cuando la explotación de los cooperadores por los no cooperadores no es demasiado fuerte (valores mayores de S), como puede observarse en el caso de $\rho = 0,3$ y $m = 1$, donde la cooperación sólo existe para $S > 0,7$. Para densidades intermedias, algunas fases pueden unirse, como el amplio intervalo de S para el cual, para $\rho = 0,5$, se obtiene cooperación total, $\rho_C = 1$. Curiosamente, la movilidad tiene un efecto no trivial de respuesta negativa que ya está presente en los casos de $\rho = 1$ y $m = 0$. Cuando el valor de S se incrementa (menos explotación) uno esperaría mayores niveles de cooperación. Pero el comportamiento opuesto es a veces observado, y en esos casos el número de cooperadores puede decrecer. Un ejemplo de este comportamiento ocurre cuando $\rho = 1$, al aumentar S más allá del punto de transición en 0,6, donde observamos que ρ_C alcanza una nueva meseta, bastante por debajo de la meseta anterior. Al agregar la posibilidad de la movilidad, dicho efecto puede ser aumentado, atenuado, o revertido. La figura 4.2 muestra varios ejemplos de este tipo de comportamiento. En efecto, para un valor fijo de ρ , la movilidad afectará las diferentes fases de diferente modo. Por ejemplo, para $\rho = 0,5$ cuando m cambia de 0,1 a 0,5, la meseta correspondiente a una fase cooperativa para $0,2 < S < 0,4$ desaparece, pero la meseta correspondiente a otra fase cooperativa para $0,4 < S < 1$ no sufre alteraciones. Para $m = 1$, en cambio, esta región se subdivide en cinco nuevas regiones más pequeñas. Por lo tanto, el que la movilidad beneficie o perjudique la sobrevivencia de los cooperadores, depende fuertemente de tanto ρ como m . Por ejemplo para $\rho = 0,9$, ρ_C crece con m para valores altos de S , y decrece con m para valores de S más pequeños. El comportamiento de ρ_C con m es ilustrado en la figura 4.3. En algunos casos la fracción de cooperadores es una función creciente en m , siendo $m = 1$ el valor que la maximiza. En otros casos, sin embargo, se observa una disminución en el número

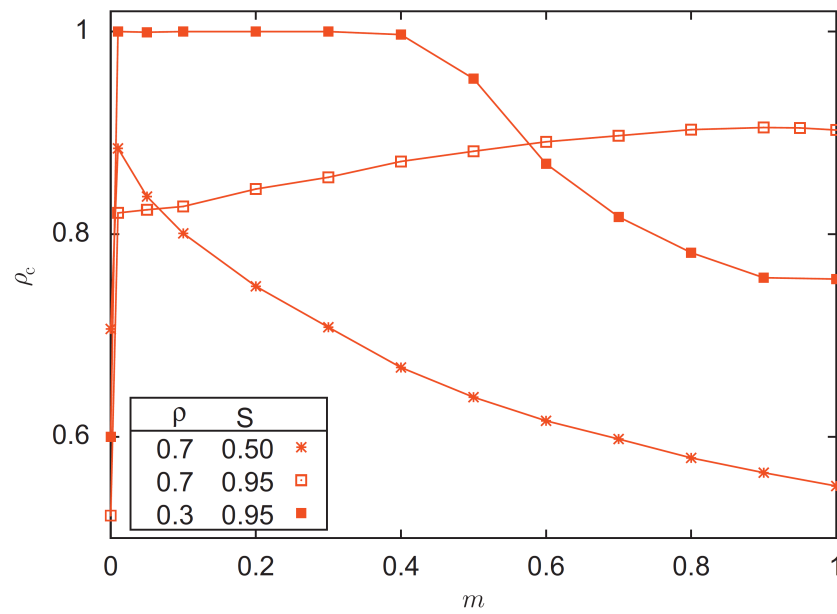


Figura 4.3: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , como función de la movilidad m , para varios valores de ρ y S . Notamos que ρ_C puede ser creciente (en cuyo caso $m = 1$ es óptima), o ser decreciente (en cuyo caso un valor pequeño pero no nulo de m es el óptimo), dependiendo de los parámetros, y que hay una discontinuidad para $m = 0$.

de cooperadores al aumentar m . En estos casos un valor mínimo pero no nulo es el valor óptimo del parámetro m para lograr la mayor cooperación (Observar que hay una discontinuidad de la curva en $m = 0$ que explica este mínimo no nulo).

Un resultado interesante se obtiene cuando comparamos las simulaciones con los resultados correspondientes a una población grande mezclada aleatoriamente. Un simple cálculo de Campo Medio (Hauert, 2001 [65]; Hofbauer y Sigmund, 1998 [26]) nos lleva a tres posibles soluciones: dos estados absorbentes en $\rho_C = 1$ y $\rho_C = 0$, y un caso mezclado con

$$\rho_C = \frac{S}{S + T - 1} \quad (4.1)$$

donde ya hemos introducido que $R = 1$ y $P = 0$ ¹. Dependiendo de los valores de S y T una de estas soluciones puede convertirse en la solución estable. En el caso de Campo Medio para el Dilema del Prisionero, no hay cooperación y $\rho_C = 0$ es la solución estable. Para el caso de la Caza del Ciervo, la solución estable dependerá también del valor inicial de la densidad de cooperadores, ρ_C^0 , y la ecuación (4.1) delimita las cuencas de atracción de dichas soluciones. Si $\rho_C^0 < S/(S + T - 1)$, la solución estable es $\rho_C = 0$; y si $\rho_C^0 > S/(S + T - 1)$, entonces $\rho_C = 1$ pasa a ser la solución estable. La solución de la ecuación (4.1), graficada en la figura 4.2 como una línea curva punteada rosa, sólo es estable para el caso de Halcón-Paloma. Es conocido el resultado de que una distribución espacial estructurada de los agentes puede a menudo inhibir la cooperación en el caso de Halcón-Paloma (Hauert y Doebeli, 2004 [64]), opuesto a lo que ocurre en el caso del Dilema del Prisionero y la Caza del Ciervo. Sin embargo, cuando introducimos la movilidad de los agentes, y la dilución de la población, la cooperación no es inhibida tan frecuentemente. En efecto, como podemos observar en la figura 4.2, en muchos casos las poblaciones con una estructura espacial superan el nivel de cooperación de la población mezclada aleatoriamente.

Además de los juegos del Dilema del Prisionero y del Halcón Paloma, también estudiamos el efecto de la movilidad en el juego de la Caza del Ciervo, como se puede ver en la figura 4.4. En la misma se grafica la fracción normalizada de agentes cooperadores en la población ρ_C como función de la densidad ρ de agentes, para varios valores de $S < 0$, $T = 0,9$, $R = 1$ y $P = 0$, para los casos de movilidad alta ($m = 1$) y movilidad nula ($m = 0$). Sin movilidad, los pequeños núcleos de coopera-

¹Ver detalles en el Apéndice D.

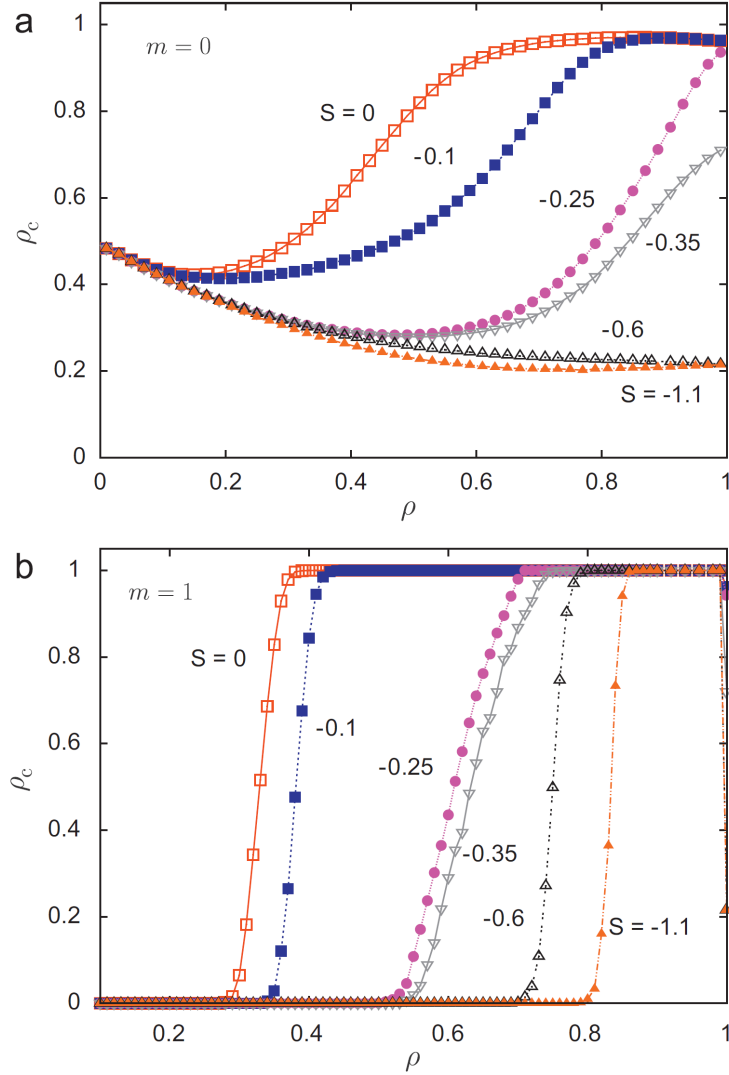


Figura 4.4: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , para movilidades $m = 0$ (arriba) y $m = 1$ (abajo), $P = 0$, $R = 1$, $T = 0,9$ y varios valores de S , correspondientes al juego de la Caza del Ciervo, en el caso JRD. Observamos en este caso un fuerte efecto, causado por la inclusión de la movilidad. La densidad de cooperadores ρ_C es una función monótona creciente de la densidad de agentes ρ para $m \neq 0$, mientras que para $m = 0$ su dependencia con ρ es o bien no monótona, o bien monótona decreciente.

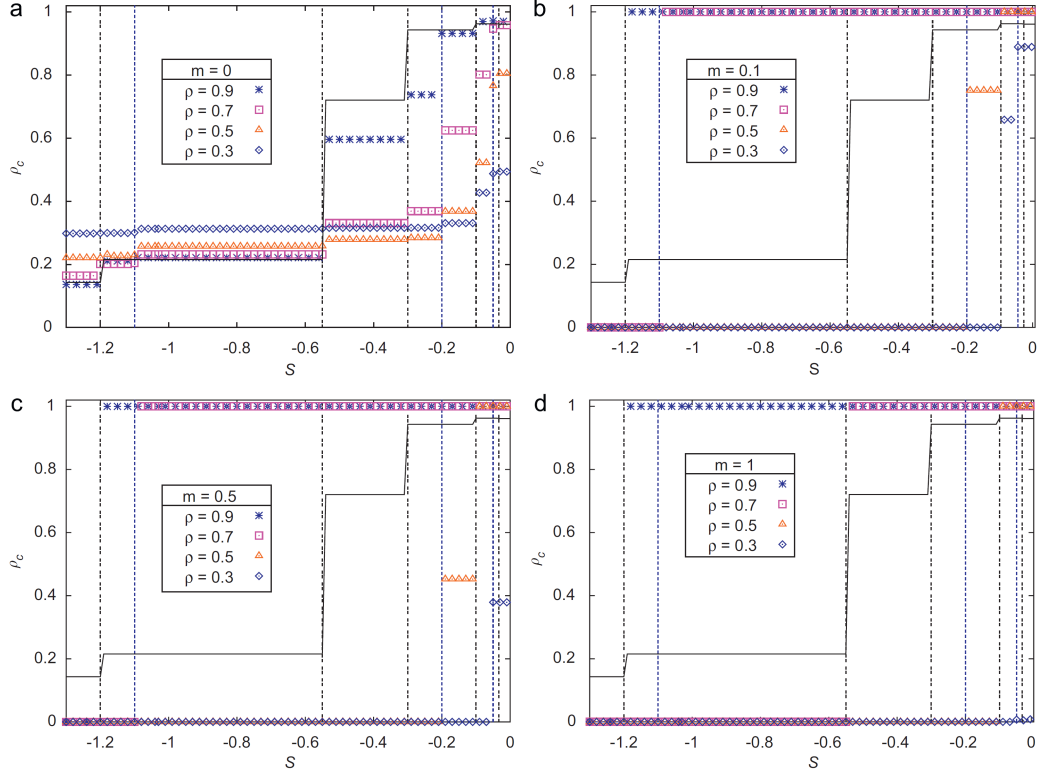


Figura 4.5: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , en función de S , en el juego de la Caza del Ciervo con dinámica JRD, para varios valores de movilidad m y densidad de agentes ρ . La línea continua negra corresponde al caso de $\rho = 1$. Las líneas verticales con punteado largo marcan los puntos de transición para $\rho = 1$ ($S = -1.2, -0.55, -0.3, -0.1$, y $-1/30$) y las líneas verticales con punteado fino ubican otros puntos de transición nuevos que aparecen para $\rho < 1$ ($S = -1.1, -0.2$, y -0.05), como se explica en el texto. Para su comparación, el caso sin movilidad ($m = 0$), cuyos resultados obviamente son independientes de la dinámica de difusión, es graficado junto con los casos de movilidad $m \neq 0$. Observamos que no aparecen nuevos puntos de transición para $m \neq 0$ más allá de los observados para el caso $m = 0$ en la dinámica JRD.

dores logran sobrevivir, y por tanto, incluso para densidades muy bajas de agentes, se mantiene la cooperación como estrategia sostenible. Una vez introducida la movilidad, la cooperación es destruída para los sistemas con baja densidad de agentes, ya que los pequeños núcleos de cooperantes son en este caso, fácilmente predados por los no cooperadores móviles. Sin embargo, por otro lado, para densidades más altas de agentes, la cooperación es considerablemente fortalecida, y la densidad de cooperantes ρ_C se hace 1 para todos los valores de $S < 0$. Es interesante notar que la movilidad también cambia en este caso la dependencia de ρ_C con la densidad de agentes ρ . Con $m = 1$, todas las curvas de ρ_C son monótonas crecientes con respecto a ρ , mientras que con $m = 0$, las curvas son decrecientes para valores bajos de S o no monótonas para valores mayores de S . La dependencia general con S , para varios valores de la movilidad m puede observarse en la figura 4.5. No aparecen respuestas negativas, y la fracción de cooperantes ρ_C aumenta, como era esperado, al incrementarse S .

Cuando el paso de difusión de los agentes se realiza antes de la reproducción de los mismos (dinámica JDR), la tasa de cooperación es frecuentemente aumentada fuertemente, como puede observarse en la figura 4.6. Los cooperadores cercanos a los no cooperadores tienen bajas ganancias, por lo cuál, si no se mueven, en el próximo paso temporal su estrategia será cambiada de cooperador a no cooperador. Por otro lado, si los mismos se mueven, existe una probabilidad no nula de sobrevivir, dependiendo en la nueva vecindad con la que se encuentren (para densidades bajas de agentes, la nueva vecindad puede corresponder a que el agente se encuentre aislado al moverse, y por tanto sobreviva). Además, un cooperador que se hallara previamente en una vecindad de otros cooperadores, tendrá altas ganancias, y puede convertir en cooperador a un no cooperador que lo encuentre al moverse. Efectivamente, para muchos valores de ρ y m , los cooperadores dominan completamente el sistema, aún en la región de S pequeño, donde la dinámica JRD no permitía sobrevivir a los cooperantes. Si bien todas las fases pre-existentes graficadas para el caso JDR con $m = 0$ son las mismas que ya teníamos para el caso JRD, en el caso de JDR, para $m \neq 0$ aparecen algunas nuevas fases del sistema. Estas transiciones inducidas por la movilidad aparecen en la gráfica marcadas por las líneas verticales continuas en $S = -3, -2, -1, -1/2, -1/3$ y 0. En particular, la transición correspondiente a

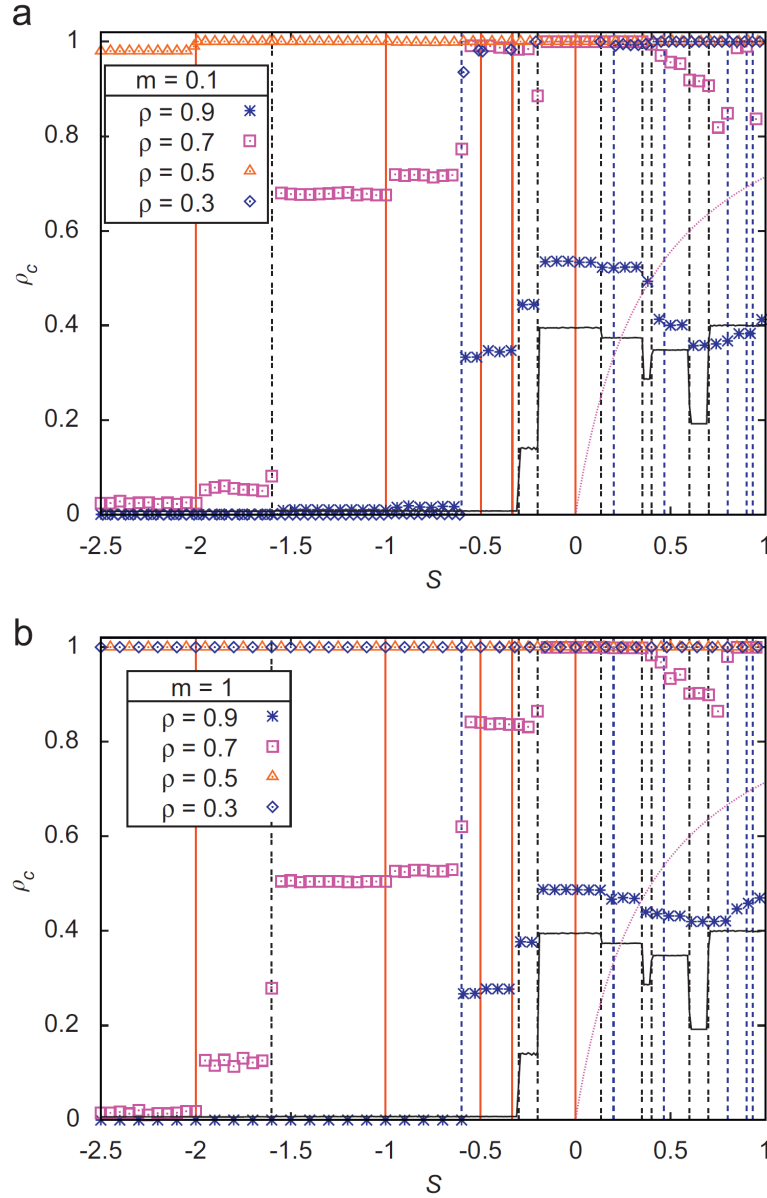


Figura 4.6: Fracción promedio de individuos cooperadores ρ_C , en función de S , ($T = 1, 4$, $R = 1$ y $P = 0$), para varios valores de movilidad m y densidad de agentes ρ en el caso JDR. La línea continua negra corresponde al caso de $\rho = 1$. Las líneas verticales punteadas marcan los puntos de transición para $\rho = 1$ y $\rho < 1$ (ver texto). A diferencia de lo que ocurre en el caso JRD, en el caso de dinámica JDR, la introducción de la movilidad si introduce nuevas transiciones, indicadas con líneas verticales continuas ($S = -3, -2, -1, -1/2, -1/3$ y 0).

$S = 0$, hace que, contrariamente a lo que ocurría en la dinámica JRD, donde el comportamiento del Dilema del Prisionero Débil era representativo de todo un rango de valores de S , para la dinámica JDR, en cambio, si bien el Dilema del Prisionero Estricto ($S < P$) y el Dilema del Prisionero Débil ($S = P$) aún se comportan del mismo modo, el caso de Halcón-Paloma con S pequeño, se comporta de modo diferente. Aunque la densidad de cooperantes correspondiente tiene un valor similar en estas dos fases, estas son, de hecho fases diferentes, siendo distintas sus configuraciones finales, aún si preparamos dos sistemas (por ejemplo uno con $S = -0,01$ y otro con $S = 0,01$) con idénticas condiciones iniciales y sujetas a las mismas secuencias de números aleatorios (las configuraciones finales en este caso son parecidas pero no idénticas).

4.4. Discusión y Conclusiones

La principal pregunta, planteada al principio de este capítulo, es cómo afecta la movilidad los resultados de diferentes juegos más allá del Dilema del Prisionero Débil (DPD), estudiado en Vainstein et al. (2007) [51]. Uno de los principales resultados novedosos surge en el contexto del Juego de Halcón-Paloma: la movilidad restablece el factor de mejora de la cooperación a través de la estructura espacial, que también se encuentra en el Dilema del Prisionero, en contradicción con lo que ocurre para el caso de movilidad nula ($m = 0$), donde en general la cooperación es más baja que en el caso totalmente mezclado (Hauert y Doebeli, 2004 [64]). En general, cuando los agentes son capaces de difundirse al azar en la red, pueden ser alcanzados niveles sin precedentes de cooperación, para amplios rangos de los parámetros. Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre para el Dilema del Prisionero y el juego de la Caza del Ciervo, la versión espacial de Halcón-Paloma muestra respuestas negativas cuando aumenta el valor de S : en lugar de aumentar la cantidad de cooperantes como uno esperaría, ρ_C a veces decrece. Este efecto, que no aparece en el caso totalmente mezclado, se observa incluso en ausencia de movilidad, algo que no había sido notado previamente por otros autores. Los cooperadores se organizan espacialmente de diferentes maneras, dependiendo del juego por medio del cual interaccionan. Por ejemplo, las agrupaciones de cooperantes pueden ser más compactas o filamentosas.

La forma de estas estructuras espaciales gobierna el efecto que la movilidad tiene en la evolución temporal del juego.

Se consideraron tres regiones de interés en el plano de S y T , el verdadero Dilema del Prisionero ($T > 1$ y $S < 0$), el Halcón-Paloma ($T < 1$ y $S > 0$) y el juego de la Caza del Ciervo ($T < 1$ y $S < 0$). Analicemos qué pasa para cada uno de estos tres juegos por separado. Empezamos con el caso del Dilema del Prisionero genuino, en el que las diferencias cualitativas con respecto al caso del DPD se producen sólo para valores de S por debajo de un umbral $\tilde{S}$, una región en que la cooperación se extingue por completo en presencia de movilidad. Esto es razonable, ya que al aumentar la penalización a la conducta del incauto (disminuyendo S) uno llega finalmente a un punto por debajo del cual los agentes cooperantes dejan de ser competitivos en su desempeño, y no pueden superar el filtro de selección impuesto por el valor de T . Para cada juego, consideramos dos simulaciones distintas, a saber, una en que los agentes primero juegan, luego se reproducen (imitan al vecino más exitoso) y luego se difunden en la red (se mueven al azar a un lugar vecino vacío), que denominamos JRD; y otro caso en el que los agentes primero juegan, después se difunden y por último se reproducen, que denominamos JDR. Es importante notar que los pasos de reproducción y difusión no conmutan, por lo cual los resultados de las simulaciones JRD y JDR son claramente diferentes. Para el caso JRD y $T = 1, 4$, se tiene $\tilde{S} = -0, 2$, independientemente de la densidad de agentes ρ , y para todos los valores de $m > 0$ considerados. Por otro lado, para el caso JDR, el valor de $\tilde{S}$ depende fuertemente de ρ . Es notable que, incluso para el caso de penalizaciones muy severas para los incautos (En la figura el valor de S baja hasta $S = -2, 5$, pero cualquier valor menor de S sirve, ya que no hay más transiciones más allá de $S = -3$, incluso para valores negativos arbitrariamente grandes de S), para valores intermedios de ρ (por ejemplo, $\rho = 0, 5$), el estado de cooperación universal ($\rho_C = 1$), o un estado muy cercano al mismo, todavía es posible de alcanzar.

En dilemas menos estrictos que el Dilema del Prisionero (la no cooperación mutua (D,D) paga menos que el pago al incauto S , en el caso de Halcón Paloma, y la cooperación mutua (C,C) paga más que la traición, caracterizada por el parámetro de pago T , en el caso de la Caza del Ciervo), el nivel de cooperación, como es de esperar, es en general más alto. En el caso de Halcón-Paloma, la cooperación es a menudo

mayor con respecto al Dilema del Prisionero débil con dinámica JRD, mientras que un estado sin precedentes de cooperación universal ($\rho_C = 1$) puede ser alcanzado a veces en el caso JDR.

Hauert y Doebeli (2004) [64] observaron que, para Halcón-Paloma, a menudo la cooperación se inhibía al introducir una estructura espacial, obteniéndose usualmente valores de ρ_C inferiores al valor obtenido en un caso de una población mezclada al azar (campo medio), donde para sistemas grandes, una de las tres soluciones, $\rho_C = S/(T + S - 1)$, 0, o 1, es estable. La introducción de una densidad de agentes ρ diluida y de una movilidad m no nula puede cambiar dramáticamente este escenario. Cuando la dilución (pero no la movilidad) está presente, la cooperación en un sistema distribuido espacialmente es mayor que en el límite de agentes mezclados al azar, ya sea para densidades intermedias o para valores suficientemente pequeños de S . Cuando la movilidad es añadida, solamente para altos valores de densidad se recupera el comportamiento de $\rho = 1$, donde la estructura espacial inhibe la cooperación. Por el contrario, para densidades no tan altas, la cooperación es favorecida en el juego de Halcón-Paloma, cuando $m \neq 0$. De esta manera, en presencia de agentes móviles, es posible volver a afirmar de modo general que la estructura espacial promueve la cooperación. En el caso de la Caza del Ciervo con dinámica JRD, la combinación de movilidad no nula y de una alta densidad de agentes ($\rho \geq 0,7$), conduce a un aumento en el valor de ρ_C o incluso a la cooperación universal. Por otro lado, para valores pequeños de ρ , a condición de que el valor del pago al incauto S sea también lo suficientemente pequeño, ρ_C resulta menor. Así concluimos que un cambio crucial al introducir movilidad es que para una movilidad dada, el nivel de cooperación crece con la densidad de los agentes, diferente a lo que ocurre cuando $m = 0$.

Debido a la dificultad en la cuantificación de las utilidades correspondientes al nivel de satisfacción de los sujetos en una situación de conflicto, o la cuantificación del nivel de adaptación ecológica de una especie dada en la competencia por recursos, el poder calcular el valor de la matriz de pagos apropiada a situaciones reales no es una tarea fácil. Esto causa que muchos ejemplos que pueden en principio ser interpretados como realizaciones del Dilema del Prisionero también puedan ser reinterpretados con el Halcón-Paloma y la Caza del Ciervo (ver Hauert y Doebeli, 2004 [64], Skyrms, 2004 [13] y referencias allí). Es por esto que es especialmente relevante estudiar la

cooperación en estos dos últimos juegos al explorar el espacio de parámetros, y no sólo restringirnos al caso del Dilema del Prisionero. Adicionalmente, si bien los efectos de la movilidad en la cooperación de organismos reales son aún mayormente desconocidos, pues son difíciles de aislar de otros factores, los resultados teóricos aquí presentados han demostrado, que incluso la existencia de una pequeña cantidad de movilidad es capaz de producir cambios muy fuertes en los resultados finales de la cooperación. Si bien la movilidad puede tener un efecto similar al ruido, permitiendo que el sistema evite quedar preso en los máximos locales del espacio de las fases asociado a las utilidades, no son equivalentes. Por ejemplo, en Hauert y Doebeli (2004) [64], varios tipos diferentes de dinámicas, con y sin ruido, dan resultados consistentes para la inhibición de la cooperación en el juego de Halcón-Paloma con estructura espacial, mientras que la introducción de la movilidad cambia drásticamente este resultado. Puesto que los resultados parecen depender en gran medida de la dinámica elegida (Aunque sólo hemos considerado el caso de “el mejor toma todo” para la actualización reproductiva, con dos posibles variantes, JDR y JRD), una pregunta importante, pero abierta, concierne a la existencia de un principio unificador, en sentido de Hamilton (Hamilton, 1964 [66], Nowak, 2006 [67]), que a partir de los parámetros del juego, pueda predecir cuándo la conducta cooperativa es de esperar, en el caso de agentes con movilidad no nula.

Capítulo 5

Conclusiones Generales

En este capítulo, repasaremos las principales conclusiones de los 3 capítulos anteriores, que forman la parte central de esta Tesis.

En el Capítulo 2, desarrollamos un modelo simplificado para estudiar estrategias evolutivas en juegos espaciales 2×2 , a partir de la definición de las Estrategias Markovianas Binarias (EMB), y de un autómata celular (AC) totalístico, que provee resultados más robustos, con respecto a los cambios en la implementación de la dinámica del sistema, que los de modelos anteriores más complejos [41], permitiendo adicionalmente la introducción de las EMB una visión más detallada de la selección de estrategias que la obtenida cuando se consideran estrategias evolutivas definidas por probabilidades continuas en los modelos anteriores ya mencionados. En particular, hemos encontrado algunas estrategias dominantes del tipo EMB, que aparecen seleccionadas con frecuencia en el desarrollo evolutivo de varios juegos de 2×2 , y no sólo para el Dilema del Prisionero (DP).

En relación al papel del espacio, notamos que, ninguna de las tres EMB, $[1, 0, 1, 1]$, $[0, 0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1, 1]$, (que aparecen como dominantes para los diferentes juegos considerados, normas de actualización y niveles de ruido), corresponde a una EMB que sea ganadora para los juegos iterados no espaciales, lo cuál se evidencia al observar el valor de su ganancia media el cuadro 2.1. Por lo tanto, es claro que la topología tiene un efecto relevante sobre la selección de EMB en la evolución del sistema. Adicionalmente, observamos que la discrepancia entre los resultados espaciales y los no

espaciales se hace aún más notoria al aumentar el tamaño de la vecindad de $q = 4$ a $q = 8$.

Otra resultado llamativo, consiste en que la introducción de un nivel de ruido suficientemente grande en el comportamiento de los agentes, hace disminuir la diversidad de posibles EMB seleccionadas por la dinámica, evolucionando el sistema en ese caso a un estado estacionario correspondiente a la selección de una única EMB (principalmente $[1, 0, 1, 1]$), o a lo sumo dos, pero sin coexistir estrategias en ningún momento (o sea, en el caso en que aparecen dos EMB dominantes diferentes, las mismas son seleccionadas, alternativamente, con probabilidad no nula, dependiendo de las condiciones iniciales de la simulación (selección biestable de dos posibles equilibrios).

Nos resultó de particular interés la EMB seleccionada, $[1, 0, 1, 1]$, dado que su regla de comportamiento corresponde a un caso intermedio entre PAVLOV $[1, 0, 0, 1]$ y TFT $[1, 0, 1, 0]$, que son las dos principales estrategias algorítmicas que los humanos eligen mayoritariamente, cuando participan jugando iterativamente en experimentos de dilemas sociales [45],[46]. Hemos bautizado a esta EMB como “Pavlov No Tentado”.

Al considerar las distintas implementaciones de nuestro AC, encontramos que la selección de las EMB más cooperativas (Aquellas con mayor proporción de probabilidades condicionales $p_X = 1$) se ve favorecida cuando:

- El tamaño de la vecindad es mayor ($q = 8$ da lugar a estrategias dominantes con más valores no nulos de las probabilidades condicionales p_X que $q = 4$).
- La versión de la regla de actualización para el estado cooperativo totalístico $c(x, y; t)$, después de que el agente en la celda (x, y) jugó con sus vecinos, es determinista.
- La cantidad de ruido, medido por ε , es mayor.

Uno de las posibles variantes de este modelo que quedaron por explorar, es estudiar cómo cambian los resultados, si se utiliza el valor de las ganancias acumuladas en el tiempo, en lugar de utilizar las ganancias instantáneas para medir el éxito de los agentes, diferente a lo que hicimos en este trabajo. También podría aportar información interesante el análisis de los patrones espaciales generados por las agrupaciones

de agentes en condiciones dinámicas similares, (por ejemplo, el tamaño y la forma de las agrupaciones espaciales de cooperantes y las agrupaciones de agentes que utilizan la misma EMB ganadora).

En el Capítulo 3, comparando, para el caso del DP, los resultados para redes periódicas similares a los obtenidos en el Capítulo 2 [1] con los resultados del DP para redes evolutivas, llegamos a la conclusión de que la geometría es fundamental para la selección de las EMB sobrevivientes. Efectivamente, en el caso de las redes periódicas, la presencia de ruido puede reducir el número de EMB seleccionadas de una manera significativa, pero este efecto del ruido no se conserva para el caso de redes aleatorias evolutivas.

Como era predecible, para el caso de las redes aleatorias evolutivas, tanto el ruido no nulo, como la condición inicial elegida al azar de manera equiprobable entre C y D del estado de cooperación en $t = 0$ de los agentes, son factores que tienden a disminuir la conectividad de la red de agentes generada en el estado estacionario, porque en este caso los agentes son menos cooperativos, y los enlaces sólo se mantienen cuando ambos agentes se encuentran satisfechos. Si se parte de una red completamente desconectada, para $\varepsilon = 0$ existe una distribución bimodal de los vecinos, mientras que para $\varepsilon = 0,01$ la distribución del número de vecinos puede ajustarse con una distribución exponencial de Laplace. Como trabajo futuro puede ser interesante estudiar el caso de redes evolutivas con diferentes configuraciones espaciales iniciales, como por ejemplo el caso comenzando a partir de una red periódica.

Contrario a lo encontrado en modelos anteriores estudiados por Zimmerman et. al. [47, 48], donde se observaba una fuerte dependencia de las condiciones iniciales para la aparición de cooperación en el estado estacionario, y la desaparición de la misma al introducir ruido, nuestro modelo presenta un alto nivel de cooperación, cualitativamente robusto con respecto a las condiciones iniciales, que resiste la introducción de errores en el comportamiento de los agentes (ruido) simulado a través del parámetro $\varepsilon \neq 0$ (para un rango de valores moderados del mismo). Si bien el nivel de cooperación parece mejorar al permitir que el número medio de enlaces no se conserve [49] (el modelo de Zimmerman [47, 48] supone conectividad media constante), en

este caso los autores obtienen un estado final que nunca alcanza el estacionario, a diferencia de lo que ocurre con el presente modelo. Concluimos que la introducción de las EMB que permiten la toma de represalias (presentes en nuestro modelo) es un factor determinante a la hora de estabilizar la cooperación con respecto a las fluctuaciones debidas a las condiciones iniciales y el ruido, y que al mismo tiempo permiten que el sistema evolucione rápidamente hacia un estado estacionario en las frecuencias de las EMB en la población total de agentes.

Es interesante notar que las distribuciones de conectividad obtenidas por nuestro sistema son atípicas, en lo que respecta a las redes sociales (comportamiento bimodal con una transición a un comportamiento exponencial, al introducir ruido no nulo en las interacciones). La introducción de un costo para los enlaces, proporcional a la distancia entre los agentes enlazados, en el cálculo de la satisfacción de los agentes, juega un doble papel. Por un lado enlentece la difusión de los no cooperantes lo suficiente como para evitar un estado final de no cooperantes puros, permitiendo la formación de agrupaciones altamente cooperativas robustas. Por otro lado, introduce una probabilidad efectiva menor de que un agente forme enlaces alejados, con respecto a la probabilidad efectiva mayor, de elegir enlaces con vecinos cercanos a su propia vecindad. Esta probabilidad efectiva de enlace parece tener un comportamiento similar a la probabilidad jerárquica en la elección de vecinos introducida en [47]. En este contexto, sería interesante estudiar en el futuro el comportamiento de los coeficientes de agrupación de las redes sociales obtenidas a partir de nuestro modelo, y estudiar bajo qué condiciones dinámicas se pueden obtener redes con propiedades del tipo "mundo pequeño" (Small World). Así mismo, se puede ampliar nuestro estudio a otros juegos 2×2 , como el Halcón Paloma, la Caza del Ciervo, etc.

En el Capítulo 4, el principal objetivo era poder discernir cómo la movilidad de los agentes en una red diluída puede afectar los resultados de las simulaciones espaciales iteradas de diferentes juegos, más allá del caso del Dilema del Prisionero Débil (DPD)¹, estudiado por Vainstein et al. (2007) [51].

Uno de los principales resultados inesperados obtenidos, surgió en el contexto del

¹Recordamos que le llama Dilema del Prisionero Débil (DPD) al caso fronterizo entre el juego del Dilema del Prisionero (DP) propiamente dicho y el juego de Halcón Paloma (HP), o sea el caso en que el que $S = P$ en la matriz de pagos.

Halcón-Paloma (HP): para este juego, la posibilidad de una movilidad no nula de los agentes restablece el comportamiento de mejora del nivel de cooperación a través de la introducción de una estructura espacial, que también se encuentra en el DP pero presenta una tendencia opuesta para HP en el caso de movilidad nula ($m = 0$), ya que en ese caso se obtienen niveles cooperación más bajos que los predichos por el modelo de Campo Medio para HP (Hauert y Doebeli, 2004 [64]). Podemos entonces generalizar, diciendo que cuando los agentes son capaces de difundirse al azar en la red, se pueden alcanzar niveles sin precedentes de cooperación para amplios rangos de los parámetros. Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre para el DP y la Caza del Ciervo (CdC), la versión espacial de HP muestra un comportamiento contrariamente a la intuición cuando aumenta el valor de S : En el caso de HP, en lugar de que la cantidad de cooperantes aumenta al aumentar el valor de S (y por tanto, disminuir el nivel de explotación de los no cooperantes sobre los cooperantes) como uno esperaría, ρ_C en algunos casos decrece. Este efecto, que no aparece en las predicciones de campo medio, se observa incluso en ausencia de movilidad, algo que no había sido notado previamente por otros autores.

Los cooperadores se organizan espacialmente de diferentes maneras, dependiendo del juego por medio del cual interactúan, pudiendo las agrupaciones de cooperantes tener formas más compactas o más filamentosas. La forma de estas estructuras espaciales gobierna el efecto que tiene la movilidad en la evolución temporal del juego. Se consideraron tres regiones de interés en el plano de S y T , el verdadero DP ($T > 1$ y $S < 0$), el HP ($T < 1$ y $S > 0$) y la CdC ($T < 1$ y $S < 0$).

En el caso del DP genuino (no débil), las diferencias cualitativas, con respecto al comportamiento del sistema en el caso del DPD, se producen sólo para valores de S por debajo de un umbral $\tilde{S}$, una región en que la cooperación se extingue por completo en presencia de movilidad no nula. Esto es razonable, ya que al aumentar la penalización a la conducta del incauto (disminuyendo el valor de S) uno llega finalmente a un punto por debajo del cual los agentes cooperantes dejan de ser competitivos en su desempeño, y no pueden superar el filtro de selección impuesto por el valor de T .

Para cada juego, consideramos dos posibles órdenes distintos de actualización del estado los agentes, a saber, uno en que los agentes primero juegan, luego se reproducen

(imitan al vecino más exitoso) y luego se difunden en la red (se mueven al azar a un lugar vacío vecino), que denominamos JRD; y otro caso en el que los agentes primero juegan, después se difunden y por último se reproducen, lo cual denominamos JDR. Es importante notar que los pasos de reproducción y difusión no conmutan, por lo cual los resultados de las simulaciones JRD y JDR son claramente diferentes.

Por ejemplo, si consideramos el comportamiento del valor de $\tilde{S}$ (que representa el umbral de no cooperación para el parámetro de pagos S , por debajo del cuál se extingue completamente la cooperación, para movilidad no nula), este difiere completamente entre ambas simulaciones. Para el caso JRD (con movilidad no nula), el valor de $\tilde{S}$ es una constante independiente de la densidad de agentes ρ en la red y del valor concreto de la movilidad de los mismos, $m > 0$. Sin embargo, para el caso JDR (con $m > 0$), el valor de $\tilde{S}$ varía fuertemente con ρ . En este último caso es interesante notar que aún para valores muy bajos del parámetro de pagos S , es posible alcanzar la cooperación universal, o por lo menos estados de muy alta cooperación, para valores medios (cerca de $\rho = 0,5$) de la densidad de agentes.

En dilemas menos estrictos que el DP (la no cooperación mutua (D,D) paga menos que el pago al incauto S , en el caso de HP, y la cooperación mutua (C,C) paga más que la traición, caracterizada por el parámetro de pago T , en el caso de la CdC), el nivel de cooperación, como es de esperar, en general más alto. En el caso de HP, la cooperación es a menudo mayor con respecto al DPD con dinámica JRD, mientras que un asombroso estado de cooperación universal ($\rho_C = 1$) puede ser alcanzado a veces en el caso JDR.

Hauert y Doebeli (2004) [64] observaron que, para HP, a menudo la cooperación se inhibía al introducir una estructura espacial, obteniéndose usualmente valores de ρ_C inferiores al valor obtenido en el caso de una población mezclada al azar (campo medio), donde para sistemas grandes, una de las tres soluciones, $\rho_C = S/(T + S - 1)$, 0, o 1, es estable. La introducción de una densidad de agentes ρ diluida, y de una movilidad m no nula puede cambiar dramáticamente este escenario. Cuando la dilución (pero no la movilidad) está presente, la cooperación en un sistema distribuido espacialmente es mayor que en el límite de agentes mezclados al azar, ya sea para densidades intermedias o para valores suficientemente pequeños de S . Cuando la movilidad es añadida, solamente para altos valores de densidad se recupera el com-

portamiento de $\rho = 1$, donde la estructura espacial inhibe la cooperación. Por el contrario, para densidades no tan altas, la cooperación es favorecida en el juego de HP, cuando $m \neq 0$. De esta manera, como ya mencionamos, en presencia de agentes móviles, es posible volver a afirmar, de modo general para los diversos juegos, que la estructura espacial promueve la cooperación. En el caso de la CdC con dinámica JRD, la combinación de movilidad no nula y de una alta densidad de agentes ($\rho \geq 0,7$), conduce a un aumento en el valor de ρ_C , o incluso a la cooperación universal. Por otro lado, para valores pequeños de ρ , a condición de que el valor del pago al incauto S sea también lo suficientemente pequeño, ρ_C resulta menor. Por lo tanto, notamos que al introducir movilidad no nula, aparece un cambio de comportamiento crucial, que consiste en que para un valor de movilidad dado, el nivel de cooperación crece con la densidad de los agentes en la red, diferente al comportamiento que se observa cuando $m = 0$.

Debido a la dificultad en la cuantificación de las utilidades correspondientes al nivel de satisfacción de los sujetos en una situación de conflicto, o la cuantificación del nivel de adaptación ecológica de una especie dada en la competencia por recursos, el poder calcular el valor de la matriz de pagos apropiada a situaciones reales no es una tarea fácil. Esto causa que muchos ejemplos que pueden en principio ser interpretados como realizaciones del Dilema del Prisionero también puedan ser reinterpretados con el Halcón-Paloma y la Caza del Ciervo (ver Hauert y Doebeli, 2004 [64], Skyrms, 2004 [13] y referencias allí). Es por esto que es especialmente relevante estudiar la cooperación en estos dos últimos juegos al explorar el espacio de parámetros, y no sólo restringirnos al caso del Dilema del Prisionero. Adicionalmente, si bien los efectos de la movilidad en la cooperación de organismos reales son aún mayormente desconocidos, pues son difíciles de aislar de otros factores, los resultados teóricos aquí presentados han demostrado, que incluso la existencia de una pequeña cantidad de movilidad es capaz de producir cambios muy fuertes en los resultados finales de la cooperación. Si bien la movilidad puede tener un efecto similar al ruido, permitiendo que el sistema evite quedar preso en los máximos locales del espacio de las fases asociado a las utilidades, no son equivalentes. Por ejemplo, en Hauert y Doebeli (2004) [64], varios tipos diferentes de dinámicas, con y sin ruido, dan resultados consistentes para la inhibición de la cooperación en el juego de HP con estructura

espacial, mientras que la introducción de la movilidad no nula cambia drásticamente este resultado. Puesto que los resultados parecen depender en gran medida de la dinámica elegida (Aunque sólo hemos considerado el caso de “el mejor toma todo” para la actualización reproductiva, con dos posibles variantes, JDR y JRD), una pregunta importante, pero abierta, concierne a la existencia de un principio unificador, en sentido de Hamilton (Hamilton, 1964 [66], Nowak, 2006 [67]), que a partir de los parámetros del juego, pueda predecir cuándo la conducta cooperativa es de esperar, en el caso de agentes con movilidad no nula.

Apéndice A

Juegos Asimétricos

La asimetría de los jugadores es a menudo una característica importante de algunos juegos, como las interacciones macho-hembra, comprador-vendedor, dueño-intruso, o emisor-receptor. Para los juegos asimétricos (bimatriciales), $B \neq A$ en 1.1, por lo que ambas matrices deben ser especificadas para definir el juego, $G = (A, B^T)$. En este caso hay diferencia si el jugador asume el rol 1 o el rol 2 en el juego ¹. En algunos casos, los jugadores pueden cambiar frecuentemente de rol en sus interacciones, como en el caso de los roles correspondientes a emisor-receptor (juego de comunicación), y por lo tanto se pueden considerar versiones simetrizadas del juego originalmente considerado asimétrico. Los jugadores, por ejemplo, pueden actuar como el rol 1 con probabilidad p , y con el rol 2 con probabilidad $1 - p$. Este tipo de juegos se llaman juegos de rol. Cuando $p = 1/2$, el juego es simétrico en un espacio de estrategias de dimensión más alta, $S_1 \times S_2$, formado por todos los pares de estrategias elementales.

Como mencionamos en el Capítulo 1, un caso particularmente interesante de juego asimétrico es el caso de los juegos de suma nula, de los cuales, el Juego de Peniques Emparejados, es un buen ejemplo. Uno de los jugadores será el ganador para el caso de que los peniques se hallen ambos del mismo lado (gana el jugador 1), y el otro lo será si los peniques se encuentran de lados diferentes (gana el jugador 2). Cada jugador toma un penique en su mano, y elige colocarlo con la cara hacia arriba o ha-

¹Más en general, se puede estudiar el caso de jugadores con matrices de pago evolutivas heterogéneas, que pueden interactuar jugando de a pares [68, 69].

cia abajo. Los jugadores revelan sus elecciones simultáneamente. Si ambos peniques están emparejados (son ambos cara o ambos cruz), el jugador 1 recibe un dólar del jugador 2. En caso contrario, si los peniques muestran uno cara y el otro cruz, el jugador 2 recibe un dólar del jugador 1. La matriz de pagos es:

		Lados Diferentes		
		Cara	Cruz	
Lados Iguales	Cara	(1,-1)	(-1,1)	(A.1)
	Cruz	(-1,1)	(1,-1)	

El equilibrio de Nash de este juego es una estrategia mixta, donde cada jugador elige cara o cruz con igual probabilidad.

Otro ejemplo de juego asimétrico es La Batalla de los Sexos. Este juego es un típico juego de coordinación (asimétrico). Imaginemos dos esposos que no recuerdan si esa tarde han acordado de salir juntos a ver una función de ópera o a ver un partido de fútbol. Ambos eventos son únicos y deben decidir, de manera simultánea y sin comunicarse, a donde ir. El marido prefiere el fútbol, y su mujer la ópera, pero ambos prefieren salir juntos, por encima a la alternativa de asistir solos, a cualquiera de los dos eventos. La matriz de pagos en este caso es:

		Mujer		
		Ópera	Fútbol	
Marido	Ópera	(1,2)	(0,0)	(A.2)
	Fútbol	(0,0)	(2,1)	

Observamos que existe otro juego diferente, también llamado Batalla de los Sexos en la literatura biológica, cuya estructura es similar al juego de los Peniques Emparejados.

Apéndice B

Juegos Repetidos

Consideremos un juego de un solo turno, G que es repetido T veces a lo largo del tiempo. Designaremos este juego repetido como $G(T)$, distinguiendo los *juegos repetidos finitos*, con $T < \infty$, de los *juegos repetidos infinitos*, con $T = \infty$. Para los juegos repetidos finitos la ganancia total es simplemente la suma de pagos de cada juego de un turno que se juega en cada paso temporal

$$U = \sum_{t=1}^T u_t \quad (\text{B.1})$$

Para el caso de los juegos repetidos infinitos deben introducirse *descuentos* para evitar ganancias infinitas. El descuento es un método de regularización, que no es, sin embargo, una truco matemático puro, sino que refleja factores económicos reales. Por un lado, el descuento puede dar cuenta de la probabilidad p de que la repetición del juego pueda terminar en cualquier instante (en un juego repetido finitas veces, pero con un horizonte infinito e indeterminado de iteraciones). Por otra parte, el descuento puede representar el hecho de que el valor actual de una renta futura es inferior a su valor nominal. Si la tasa de interés del mercado por un período es denotada por el factor r , un *factor de descuento* general, que represente ambos efectos puede estar dado por $\delta = (1 - p)/(1 + r)$ (Gibbons, 1992 [70]). Usando esto, el valor efectivo de la serie de pagos infinita, $u_1, u_2, \dots$, sería:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t. \quad (\text{B.2})$$

En lo siguiente, notaremos un juego repetido finitas veces con base en el juego de un turno G , como $G(T)$, y un juego repetido infinitas veces, como $G(\infty, \delta)$, $0 < \delta < 1$, y consideraremos el valor de U en las ecuaciones (B.1), y (B.2), respectivamente, como la ganancia del juego repetido (superjuego) correspondiente. Otra posibilidad, para definir las utilidades de un juego repetido infinito es tomar el promedio temporal de los pagos. Es importante notar, que los juegos repetidos considerados en esta Tesis, toman como ganancia del juego repetido lo que sería la ganancia del juego repetido infinito con un factor de descuento δ cercano a cero, o sea, la ganancia instantánea de los agentes en cada turno, en lugar de la suma histórica ponderada o promediada de los pagos recibidos por los mismos a lo largo del tiempo. Los juegos repetidos que consideramos, se comportan como que fueran de infinitas repeticiones, porque las acciones de los agentes no suponen un conocimiento de la cantidad de pasos temporales, o sea que los agentes actúan como si el juego se prolongara indefinidamente.

B.0.1. Estrategias como Algoritmos

En juegos estáticos de un solo turno con información completa, como los que hemos considerado en los apartados anteriores, una estrategia es simplemente una acción que un jugador puede elegir en un turno dado. Para los juegos repetidos (y también para otros tipos de juegos dinámicos) el concepto de estrategia se hace más complejo. En estos juegos, *la estrategia de un jugador es un plan completo de actuación, que especifica que acción tomar, en cualquier contingencia en la que el jugador se encuentre*. El número de las posibles contingencias en un juego repetido es el número de historias posibles que el juego podría haber producido hasta un momento dado. Entonces, en este caso, la estrategia es, de hecho, un algoritmo matemático que determina la salida (la acción a tomar en el período t), en función de la entrada (el tiempo actual t y la historia de las acciones de todos los jugadores hasta el instante $t - 1$). En el caso de la racionalidad perfecta no existe un límite en estos algoritmos. Sin embargo, la hipótesis de *racionalidad acotada* puede restringir las estrategias viables a sólo aquellas que no requieran una memoria demasiado larga o algoritmos demasiado complejos.

Para ilustrar la rapidez con que el número de estrategias viables de $G(T)$ aumenta, consideremos un juego de un turno simétrico, de N jugadores de G , con un espacio

de acción $S = \{e_1, e_2, \dots, e_Q\}$. Sea L_M la longitud de la memoria requerida por el algoritmo de estrategia. Si $L_M = 1$, el algoritmo sólo necesita conocer las actuaciones de los jugadores en el último turno, si $L_M = 2$, se requiere el conocimiento de los dos últimos turnos, etc. La longitud máxima de memoria disponible en el paso temporal T es $T - 1$. Dada la memoria del jugador, una estrategia es una función de $Q^{N_{L_M}} \rightarrow Q$. Hay un total de $Q^{Q^{N_{L_M}}}$ estrategias para una memoria de longitud L_M . Notamos, sin embargo, que más allá de ser función de la historia del juego, la estrategia también puede depender del tiempo t en sí mismo. Por ejemplo, las acciones pueden depender de si el turno en cuestión se juega en un día hábil o los fines de semana. Además del comienzo del juego, en los juegos repetidos finitos, el final del juego puede también ser tratado de modo especial, pudiendo las estrategias depender del tiempo restante $T - t$. Como veremos, esta posibilidad puede tener un efecto crucial en el resultado del juego.

A modo de ejemplo, la figura 1.1 ilustra algunas estrategias frecuentemente citadas en relación al Dilema del Prisionero Iterado (o Repetido). Algunas de las mismas, como “Siempre C” ($L_M = 0$), “Tit por Tat” (TFT, $L_M = 1$) o “Pavlov” ($L_M = 1$), son estrategias de memoria finita, otras como “Tit por Tat Arrepentido” (CFTT, Boerlijst et al., 1997 [19]; Panchanathan y Boyd, 2004 [20]) depende como entrada de la historia completa de las acciones. Sin embargo, la necesidad de una memoria a largo plazo a veces puede ser sustituida por la introducción de nuevas variables de estado de los agentes. (Nowak y Sigmund, 2005 [21] ; Panchanathan y Boyd, 2004 [20]). Por ejemplo, una de estas variables puede codificar la “reputación” de los agentes, que puede ser utilizada en la toma de decisiones, especialmente cuando el juego es tal que los opositores se eligen al azar en la población en cada turno. Por supuesto, en este caso, una estrategia deberá incluir una regla para la actualización de estas variables de estado también. A veces, estas estrategias pueden ser convenientemente expresadas como Máquinas de Estados Finitos (Autómatas de Estados Finitos, Binmore y Samuelson, 1992 [22]; Lindgren, 1997 [23]).

La definición de una estrategia también debe prescribir cómo tratar con errores (ruido), si estos tienen una posibilidad no nula de producirse en el sistema. Es habitual distinguir dos tipos de errores: los errores de implementación (“mano temblorosa”) y los errores de percepción. Los primeros se refieren a acciones

“equivocadas” no intencionales, acciones como jugar accidentalmente D en el Dilema del Prisionero, cuando se pretendía jugar C. Estos errores, por lo general, son de conocimiento común de los jugadores. Los errores de percepción, por el contrario, surgen de sucesos donde la acción se hace correctamente según lo planeado, pero uno de los jugadores (por lo general, el oponente) la interpreta como otra acción. En este caso, los jugadores terminan manteniendo registros diferentes de la historia del juego.

B.0.2. Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos

¿Cuál es la predicción de la Teoría de Juegos Racional para el resultado de un juego repetido? Como siempre, el resultado debe corresponder a un equilibrio de Nash: ningún jugador puede tener un incentivo unilateral de cambiar su estrategia (en el sentido del superjuego), ya que esto induciría la inmediata desviación de las estrategias de los agentes con respecto al perfil en cuestión. Sin embargo, no todos los EN son igualmente plausibles en un juego dinámico, como lo es un juego repetido. Hay equilibrios que se basan en “amenazas y promesas no creíbles” (Fudenberg y Tirole, 1991 [71]; Gibbons, 1992 [70]). Es necesario un concepto más fuerte que el de equilibrio de Nash, para excluir estos EN espurios. La *perfección en subjuegos*, introducida por Selten (Selten, 1965 [24]), es un criterio ampliamente aceptado para resolver este problema. Los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos son aquellos que pasan una prueba de credibilidad. Un *subjuego* de un juego repetido es una subserie temporal de la serie completa, que se inicia en el instante $t \geq 1$ y termina en el último instante de la serie completa T . Para cada instante t , hay muchos posibles subjuegos cuyo punto de partida es t , uno para cada posible historia del juego (conjunto) antes de t . Por lo tanto, un subjuego está determinado tanto por el instante en que se inicia t , como por la historia del juego total antes de t . Entonces, cuando un subjuego es alcanzado en el juego completo, los jugadores saben cuál es la historia previa del juego que conduce a ese punto. Por definición, un EN del juego iterado es *perfecto en subjuegos* si es también un EN para todos los posibles subjuegos (Selten, 1965 [24]).

Uno de los resultados clave de la Teoría de Juegos Racional es que no existe cooperación en el Dilema del Prisionero Iterado finitas veces. De hecho, el teorema

es más general y establece que, *si un juego de un turno G tiene un solo EN, luego el único EN perfecto en subjuegos de $G(T)$ es aquel en el que el EN de G se juega en cada instante del juego repetido finito*. La demostración se hace por inducción hacia atrás. En el último turno T de un Dilema del Prisionero Iterado Finito los jugadores racionales no cooperarán (jugarán D), ya que la estructura de incentivos del juego en este caso es la misma que la de G . En el último paso temporal no hay lugar para esperar recompensas futuras de cooperación o castigos futuros por la deserción. Sabiendo que la deserción es esperada en el último período, pasamos a considerar el penúltimo instante $T - 1$, y encontramos que la rentabilidad efectiva de la matriz de pagos en términos de los restantes $T - 1$ pasos temporales es equivalente de Nash a la de G (los pagos esperados en el último turno constituyen un corrimiento constante de matriz de pagos original). La estructura de incentivos sigue siendo similar a la de G , y por lo tanto los agentes desertarán. Consideramos ahora el ante-penúltimo turno y obtenemos resultados similares, etc. El proceso de inducción se puede continuar hacia atrás hasta el instante inicial, lo que demuestra que los jugadores racionales no cooperarán (jugarán D) en todas los turnos del Dilema del Prisionero Iterado Finito.

B.0.3. La Paradoja de la Inducción Hacia Atrás

Existe evidencia sustancial en la economía experimental que ha demostrado que los jugadores cooperan en las interacciones repetidas, especialmente en los períodos iniciales, cuando el final del juego está aún muy lejos. Por otra parte, incluso en situaciones que aparentemente se describen de mejor modo como un juego de un solo turno del Dilema del Prisionero, la cooperación no es infrecuente. La dificultad de la Teoría de Juegos Racional para hacer frente a estos hechos es a veces denominado como *la paradoja de la inducción hacia atrás* (Pettit y Sugden, 1989 [72]).

La Teoría de Juegos ha elaborado una serie de respuestas posibles a estas críticas: los jugadores son racionales, pero el juego real no es lo que parece ser, los jugadores no son totalmente racionales o la racionalidad no es de conocimiento común, etc.

Contrariamente a lo que se predice para un juego repetido finito, los juegos repetidos *infinitamente* pueden comportarse de manera diferente. De hecho, se ha constatado que la cooperación puede ser racional en juegos repetidos infinitamente. La colección de teoremas que formaliza este resultado se refiere generalmente como

el *Teorema Popular* (Folk Theorem)¹. Los resultados generales por Friedman (1971) [73] y más tarde por Fudenberg y Maskin (1986) [74] implican que si el factor de descuento es lo suficientemente cercano a 1, es decir, si los jugadores son lo suficientemente pacientes, el equilibrio de Nash Pareto eficiente, perfecto en subjuegos (entre otros muchos otros equilibrios posibles) se puede alcanzar en un juego repetido infinitamente $G(\infty, \delta)$. En el caso de del Dilema del Prisionero, por ejemplo, esto significa que la cooperación puede ser racional si el juego es infinito y δ es lo suficientemente cercano a 1.

Cuando nos restringimos al Dilema del Prisionero, la prueba se basa en considerar estrategias implacables, como “El Gatillo Inflexible”. El Gatillo Inflexible inicia cooperando, y continúa cooperando hasta recibir una deserción del oponente. A partir de ese punto el agente pasa a jugar D indefinidamente. El perfil de estrategias de ambos oponentes jugando el Gatillo Inflexible es un EN perfecto en subjuegos, siempre que δ sea mayor que una cota inferior bien definida (Gibbons, 1992 [70]). Es evidente que la cooperación, en este caso, se deriva del temor a una fase de castigo infinitamente larga tras la deserción, y la tentación de desertar en un período determinado se suprime por el riesgo acumulado de pérdida asociado a este castigo. Cuando el factor de descuento es pequeño, la amenaza disminuye, y el comportamiento cooperativo se evapora.

Otra forma posible de explicar la cooperación en dilemas sociales finitamente repetidos es suponer que los jugadores no son completamente racionales, o que su racionalidad no es de conocimiento común.

B.1. Racionalidad Acotada

La Teoría de Juegos Clásica (Racional) se basa en una serie de estrictas hipótesis acerca de la estructura de un juego. Algunas de estas hipótesis se fueron sistemáticamente generalizando a lo largo de la historia de la teoría, con el fin de ampliar aún más sus aplicaciones. La Teoría de Juegos supone que los agentes (jugadores) tienen objetivos bien definidos y coherentes, con preferencias que pueden ser descriptas por

¹El nombre de “Teorema Popular” se refiere al hecho de que algunos de estos resultados fueran de conocimiento general ya en la década de 1950, incluso antes que nadie los hubiera publicado. Aunque más tarde teoremas específicos fueron probados y publicados, el nombre quedó.

una función de utilidad. La utilidad es la medida de la satisfacción obtenida por un jugador, que se deriva de un determinado resultado del juego, y la meta de cada jugador, dentro del mismo, es por tanto maximizar su utilidad individual. Los principios de maximización (o minimización) abundan en la Ciencia. Sin embargo, vale la pena aclarar un punto muy importante: el problema de maximización de la Teoría de Juegos difiere fundamentalmente de los de la Física. Mientras que en una Teoría Física la situación típica es tener una sola función (por ejemplo, un Hamiltoniano o un Potencial Termodinámico), cuya condición extremal caracteriza a todo el sistema, en la Teoría de Juegos, el número de funciones a maximizar es normalmente tan grande como el número de agentes que interactúan. Mientras que la Física trata problemas de optimización en un paisaje fijo (aunque eventualmente irregular), los agentes de la Teoría de Juegos continuamente reestructuran el paisaje, ya que cada uno actúa de modo egoísta en busca de su óptimo individual.

Otro supuesto clave en la Teoría Clásica es que los jugadores son perfectamente racionales (hiper-racionales), y a su vez saben que sus oponentes actúan con idéntico criterio, conociendo tanto sus matrices de pagos, como las estrategias posibles de los mismos (lo que se denomina comunmente como *conocimiento común*, en oposición al caso de juegos de información incompleta, llamados Bayesianos, que no trataremos aquí). La racionalidad, sin embargo, parece ser un concepto mal definido. Hay opiniones extremas argumentando que la noción de la racionalidad perfecta no es más que pura tautología: el comportamiento racional es el que cumple con las directrices de la Teoría de Juegos, que a su vez se basa en el supuesto de la racionalidad. Ciertamente, no es por casualidad, que un tema central y recurrente en la historia de la Teoría de Juegos sea cómo definir la racionalidad. De hecho, todas las definiciones de racionalidad son definiciones negativas, no nos dicen lo que los agentes racionales hacen, sino lo que no hacen. Por ejemplo, la definición más usual y breve establece que los jugadores racionales no juegan estrategias estrictamente dominadas (Aumann, 1992 [17]; Gibbons, 1992 [70]). Paradójicamente, la aplicación directa de esta definición parece excluir la cooperación en los juegos que implican dilemas sociales como el Dilema del Prisionero (repetido un número finito de veces), a pesar de que la cooperación se da en situaciones sociales reales. Otro problema es que en muchos juegos, el introducir nociones de bajo nivel de racionalidad habilita varios resultados

posibles del juego desde el punto de vista teórico. Algunos de los mismos resultan obviamente en predicciones más exitosas que otros, respecto a las situaciones de la vida real. La respuesta de la teoría clásica de estas lagunas es afinar el concepto de la racionalidad y equivalentemente ajustar el concepto de equilibrio estratégico.

Otros refinamientos al concepto de equilibrio de Nash, como la perfección de mano temblorosa (equilibrio de Nash cuando se introduce la posibilidad de que los agentes cometan errores, o sea un equilibrio bajo el efecto de perturbaciones del comportamiento de los agentes, en la forma de ruido), siempre dentro del marco clásico, abrieron el camino que comenzó a erosionar el supuesto de racionalidad perfecta. Sin embargo, este punto de vista sólo alcanzó su potencial total a través de la aceptación de la *racionalidad acotada* en el marco de la *Teoría Evolutiva de Juegos*. Y de hecho, hay buenas razones para creer que, hay muchos problemas reales en los que el efecto de la acción de un agente, depende de lo que los otros agentes hacen, que son mucho más complejos de lo que postula la hipótesis de racionalidad perfecta de los jugadores (Conlisk, 1996 [75]).

El razonamiento deductivo usual pierde su sentido cuando los agentes poseen limitaciones cognitivas no desdeñables, hay un costo asociado a recabar información sobre los posibles resultados y recompensas, los agentes no tienen preferencias consistentes, o el conocimiento común de la racionalidad de los jugadores no es mantenido. Una salida posible es el razonamiento inductivo, es decir, un enfoque de ensayo y error, en el que los agentes, de forma continua, formulen hipótesis sobre su entorno, construyan estrategias en consecuencia, observen su desempeño en la práctica, y verifiquen o descarten sus suposiciones, basados en las tasas de éxito empírico. En este enfoque, el resultado (solución) de un problema es determinado por el estado mental evolutivo (representación mental) de los agentes que constituyen el sistema. La mente se convierte necesariamente en una variable endógena dinámica del modelo. Este tipo de racionalidad acotada [76] puede explicar que en muchas situaciones la gente responda instintivamente, jugando de acuerdo con reglas heurísticas y normas sociales en lugar de adoptar las estrategias indicadas por la teoría de juegos racional.

La racionalidad acotada se convierte en un concepto más natural, cuando el objetivo de esta teoría es entender el comportamiento animal, ya que en este caso es el

instinto y no la “racionalidad” en el sentido estricto de la palabra lo que guía su conducta. Los individuos en una población de animales no toman decisiones conscientes acerca de la estrategia, aunque la estructura de incentivos del juego formal subyacente que los mismos “juegan” sea idéntica a la utilizada en el supuesto de racionalidad perfecta en la Teoría de Juegos Clásica. En la mayoría de los casos las estrategias aplicadas están genéticamente codificadas y se mantienen durante todo el ciclo de vida, el espacio de estrategias es limitado (por ejemplo, la posibilidad de estrategias mixtas puede ser excluida), o la adopción de estrategias o su cambio es rigurosamente restringido por reglas biológicamente preestablecidas de aprendizaje o tasas de mutación.

El éxito de una estrategia aplicada es medido por su adaptación biológica, que suele relacionarse con el éxito reproductivo. La Teoría Evolutiva de Juegos es una extensión del paradigma clásico en el sentido de la racionalidad acotada. Existe, sin embargo, otro aspecto de la teoría que se esconde bajo la alfombra en el enfoque clásico, pero que obtiene un énfasis especial en la dinámica de la versión evolutiva. Los aspectos dinámicos fueron despreciados mayormente por la teoría clásica, ya que la hipótesis de racionalidad perfecta los hacía irrelevantes. La racionalidad deductiva completa permite a los jugadores obtener y construir la solución de equilibrio de manera instantánea. En este espíritu, se aplicaron los métodos dinámicos en los juegos ficticios de Brown (Brown, 1951 [77]), siendo los mismos sólo utilizados como una ayuda técnica para obtener el equilibrio. En el caso de la racionalidad acotada, en cambio, el concepto mismo es inseparable de la dinámica. Contrariamente a la racionalidad perfecta, la racionalidad acotada se define siempre de manera positiva, postulando las pautas de conducta de los agentes de racionalidad acotada. Estas normas de comportamiento son reglas dinámicas, que especifican la cantidad de historia anterior del juego que se toma en cuenta (memoria), a que tan largo plazo pueden pensar en el futuro los agentes (miopía), cómo pueden buscar las estrategias disponibles (espacio de búsqueda), cómo pueden cambiar sus estrategias por otras más exitosas (aprendizaje adaptativo), y lo que eso significa a nivel poblacional en términos de las frecuencias de las estrategias.

Como ya dijimos, la idea de racionalidad acotada tiene la más obvia relevancia en la biología. No es demasiado sorprendente que las primeras aplicaciones de las perspec-

tivas evolutivas de la Teoría de Juegos aparecieran en la literatura biológica. Se puede citar a R.A. Fisher y su análisis sobre la igualdad de la proporción de sexos (Fisher, 1930 [78]) como una de las primeras obras con tales ideas, y los primeros artículos de R.C. Lewontin, probablemente fueron los primeros en hacer una conexión formal entre la Evolución y la Teoría de Juegos (Lewontin, 1961 [79]). Sin embargo, el inicio real de la teoría puede fecharse en dos libros fundamentales en la temprana década de 1980: “Evolución y la Teoría de Juegos” de J. Maynard-Smith (Maynard Smith, 1982 [27]), que introdujo el concepto de *estrategia evolutivamente estable*, y “La evolución de la cooperación” de R. Axelrod (Axelrod, 1984 [34]), que abrió el campo para la Economía y las Ciencias Sociales. Considerando que los Biólogos usaron la Teoría de Juegos para comprender y predecir ciertos resultados de la evolución orgánica y el comportamiento animal, la comunidad de Ciencias Sociales acogió con satisfacción el método como una herramienta para entender aprendizaje social y la “evolución cultural”, refiriéndose esta última a los cambios históricos en las creencias humanas, valores, pautas de comportamiento y normas sociales.

Hay una perspectiva *estática* y una perspectiva *dinámica* de la Teoría Evolutiva de Juegos. La definición Maynard Smith sobre la estabilidad evolutiva de un equilibrio de Nash es un concepto estático, que no requiere la solución en función del tiempo de ecuaciones dinámicas. En términos simples, la estabilidad evolutiva de una estrategia significa que un mutante no puede invadir con éxito una población de agentes que adoptaron la misma. La condición para la estabilidad evolutiva se puede comprobar directamente, sin incurrir en complejas cuestiones de dinámica. El punto de vista dinámico, en cambio, opera de forma explícita al postular reglas de actualización. Estas reglas pueden ser prescriptas como reglas deterministas a nivel de las tasas de cambio de las frecuencias de cada estrategia dentro de la población, o como normas microscópicas estocásticas a nivel de agentes interactuantes (dinámicas basadas en agentes). Como la racionalidad acotada puede tener diferentes formas, hay muchas normas dinámicas diferentes que se pueden considerar. La dinámica más apropiada depende de la especificidad del sistema biológico o situación socio-económica en estudio. En aplicaciones biológicas, la dinámica del replicador es la elección más común. La misma se obtiene mediante el supuesto de que los pagos están directamente relacionados con el éxito reproductivo. Las aplicaciones socio-económicas, por

otro lado, pueden requerir otras normas de adaptación o aprendizaje. Tanto el punto de vista estático como el dinámico de la Teoría de Juegos Evolutiva, constituyen una forma para la selección de equilibrios, cuando la forma clásica del juego dispone de múltiples equilibrios de Nash. Una vez que se especifica la dinámica, la principal preocupación es hallar el comportamiento a largo plazo del sistema: sus puntos fijos, ciclos, la estabilidad o no de los mismos, la posibilidad o no de comportamiento caótico, etc, y la conexión entre los conceptos estáticos (el equilibrio de Nash y la estabilidad evolutiva) y las predicciones dinámicas. La conexión entre ambas cosas está lejos de ser trivial, pero al menos para los juegos en forma normal con una amplia clase “razonable” de dinámicas poblacionales, vale el Teorema Popular (Folk Theorem) [80] de la Teoría Evolutiva de Juegos, que afirma que los puntos de equilibrio estables dinámicamente son Equilibrios de Nash. Por otra parte, en los juegos con sólo dos estrategias la estabilidad evolutiva es prácticamente equivalente a la estabilidad dinámica. En general, sin embargo, resulta que un análisis estático, basado en el equilibrio, no es suficiente para proporcionar entendimiento detallado sobre el comportamiento a largo plazo de agentes que buscan la maximización de sus pagos respectivos, evolucionando con una dinámica general de aprendizaje adaptativo (Hofbauer y Sigmund, 2003 [32]). Claramente, las normas dinámicas de la racionalidad acotada no necesariamente deben reproducir los resultados de racionalidad perfecta (y muchas veces no lo hacen).

Tal como sostuvimos anteriormente, la misión de la Teoría Evolutiva de Juegos era remediar tres deficiencias clave de la teoría clásica: (1) la racionalidad acotada, (2) la falta de dinámica, y (3) la selección de equilibrios en el caso de múltiples equilibrios de Nash. Aunque la misma llevó a cabo estos objetivos con bastante éxito, hay una serie de deficiencias que aún persisten. La Teoría Evolutiva de Juegos en su forma temprana consideró la dinámica poblacional en el nivel agregado. Las variables de estado que modificaban su dinámica eran entonces variables promedio sobre la población, como la abundancia relativa de una estrategia (frecuencia). Las reglas de comportamiento, por el contrario, controlan el sistema en el nivel microscópico. La toma de decisiones de los agentes puede ser en muchos casos asincrónica y discreta, y puede contener elementos estocásticos. Además, los agentes pueden tener diferentes

preferencias individuales, pagos, y opciones de estrategia (heterogeneidad en los tipos de agentes) o estar conectados localmente a otros agentes bien definidos (heterogeneidad estructural). En poblaciones grandes, estas fluctuaciones microscópicas por lo general se promedian, de modo de producir un comportamiento macroscópico suave para las cantidades colectivas que determinan el estado macroscópico del sistema. A pesar de que las normas microscópicas subyacentes pueden ser bastante variadas, existe una amplia clase de modelos donde, a partir de una dinámica microscópica, la dinámica del replicador (definida originalmente a nivel macroscópico), de hecho puede ser microscópicamente justificada. En estas situaciones, el análisis de campo medio, suponiendo una población infinita y homogénea, con encuentros arbitrarios al azar entre los agentes, puede proporcionar una buena descripción cualitativa. En otros casos, sin embargo, el comportamiento colectivo emergente fácilmente puede diferir incluso cualitativamente del predicho por el análisis ingenuo de campo medio. Las predicciones de campo medio pueden predecir resultados completamente divergentes con los resultados reales, especialmente cuando la población es de una gran heterogeneidad en los tipos de agente y / o cuando la topología del grafo de interacción no es trivial. A pesar de que la importancia de la heterogeneidad y de las cuestiones estructurales fue reconocida hace mucho tiempo (Föllmer, 1974 [81]), la investigación sistemática de estas cuestiones se encuentra todavía abierta. El reto es complejo, ya que tanto la heterogeneidad en tipos de agentes, como la de la estructura de conexión, rompe la simetría de los agentes, y por tanto requiere un cambio radical de perspectiva de la descripción del sistema, tanto a el nivel global, como a nivel de los agentes. Esto resulta en un enorme incremento en el número de variables relevantes del sistema en cuestión, lo que hace que las técnicas analíticas más usuales, como la operación con ecuaciones diferenciales, puntos fijos, etc, sean en gran parte inaplicables. La única opción que queda en este caso es el *modelado basado en agentes*, lo que significa extensas simulaciones numéricas o técnicas de análisis que vayan más allá del nivel tradicional de campo medio.

Apéndice C

Otras Dinámicas para Juegos Repetidos

En la literatura de Teoría de Juegos, es discutido un gran número de diferentes dinámicas a nivel de poblaciones. Estas pueden ser, o bien derivadas rigurosamente desde el punto de vista microscópico de las reglas de actualización de las estrategias en el límite de grandes poblaciones (dinámicas basadas en agentes), o simplemente postularse como punto de partida de un análisis a nivel agregado (macroscópico respecto a la población), como en el caso de la dinámica del replicador. Nos interesa, en esta sección, profundizar en las dinámicas basadas en agentes.

C.1. Juegos Evolutivos: Dinámica Basada en Agentes

En la sección anterior utilizamos una descripción del estado de una población a nivel macroscópico o agregado. Este enfoque especifica el estado de la población y su evolución dinámica, en términos de un pequeño número de frecuencias de estrategias. Tal descripción macroscópica es la adecuada, si la red social es del tipo de campo medio y el número de agentes es muy grande. Sin embargo, cuando estas premisas no se cumplen, se requiere un análisis más pormenorizado, con un nivel mayor de detalle. Este tipo de enfoque es generalmente denominado “basado en agentes”, ya que en este nivel, las unidades básicas de la teoría son los propios agentes individuales. La dinámica a nivel de los agentes del sistema es definida generalmente por las *reglas de*

actualización de las estrategias, que describen cómo perciben su entorno los agentes, cuál es la información que adquieren, lo que creen y las expectativas que se forman de la experiencia anterior, y cómo todo esto se traduce en cambios de estrategia durante el desarrollo del juego. Estas normas pueden imitar la selección darwiniana codificada genéticamente o el aprendizaje humano de racionalidad acotada, pudiendo ambos ser afectados por posibles errores. Cuando los juegos se juegan sobre una red espacial, las reglas de actualización puede no sólo referirse a un cambio de estrategia, sino también a una reorganización de la estructura topológica de la red local del agente.

Estas reglas de actualización también pueden ser vistas como “meta-estrategias”, ya que representan las estrategias sobre las estrategias. La distinción entre las estrategias y las meta-estrategias es un tanto arbitraria, y sólo se justifica si hay una relación jerárquica entre ellas. Esta suele ser una hipótesis de trabajo, es decir, una regla de actualización determinada se utiliza mucho más raramente en el juego repetido que las estrategias básicas del juego de un turno en cada etapa temporal. Una actualización de estrategia tiene una probabilidad baja durante el juego. Además, si bien los jugadores pueden utilizar diferentes estrategias en cada turno de juego, por lo general se supone que todos los jugadores utilizan las mismas reglas de actualización en toda la población. Notamos que estos supuestos pueden no justificarse en ciertas situaciones. Hay una gran variedad de reglas de actualización microscópicas definidas y aplicadas en la literatura la Teoría de Juegos. No hay ninguna ley general de la naturaleza que dicte estas reglas de comportamiento, a pesar de que llamemos a estas reglas “microscópicas”. De hecho, las mismas emergen como una simplificación de normas fenomenológicas, o como una serie de mecanismos aún más fundamental, que describen el funcionamiento de la psique humana. La elección real de las reglas de actualización depende en gran medida del problema concreto en cuestión.

Las actualizaciones de estrategia en una población sobre un grafo social, pueden ser sincronizadas o secuenciadas o al azar. Algunas de estas reglas son genéricamente estocásticas, y otras son deterministas, a veces con pequeños componentes estocásticos que representan las mutaciones al azar. Por otra parte, existen muchas maneras diferentes de cómo el cambio de estrategia puede ser determinado por el medio ambiente local. En muchos casos, la elección de estrategia para un jugador determinado depende de las diferencias de sus ganancias y las ganancias de sus vecinos. Estas

diferencias pueden ser determinadas por un solo turno del juego entre los jugadores que se enfrentan, o por la suma de los pagos de los juegos individuales con todos sus vecinos, o también por la suma de pagos acumulada en el tiempo con un factor de peso que disminuya con el tiempo transcurrido. Por lo general, las reglas son miopes, es decir que la optimización se basa en el estado actual de la población, sin anticipar posibles alteraciones futuras. Nos centraremos sobre todo en sistemas sin memoria (Markovianos), donde las reglas de evolución están determinadas por las ganancias actuales.

A continuación, consideraremos un sistema formado por jugadores equivalentes distribuidos en los sitios de una red periódica (o en un grafo cualquiera). El jugador en el sitio x sigue una de las Q estrategias puras caracterizadas por un conjunto de vectores unitarios de Q componentes,

$$s_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Las ganancias del jugador x provienen de jugar, el mismo juego de un turno simétrico de dos personas, con cada uno de sus vecinos. En este caso, su ganancia total se puede expresar como:

$$U_x = \sum_{y \in \Omega_x} s_x \cdot A s_y, \quad (\text{C.2})$$

donde la suma recorre los vecinos $y \in \Omega_x$, en la vecindad del agente x , la cual está definida por la estructura de conectividad.

Para cualquier distribución de estrategias $\{s_x\}$, la ganancia total de todo el sistema se calcula como:

$$U = \sum_x U_x = \sum_{x,y \in \Omega_x} s_x \cdot A s_y. \quad (\text{C.3})$$

Observamos que para los juegos potenciales ($A_{ij} = A_{ji}$), esta fórmula es análoga a la energía (negativa) de un modelo del tipo Ising (modelo de Potts). En el caso más simple posible ($Q = 2$), si $A_{ij} = -\delta_{ij}$, entonces U es equivalente al Hamiltoniano del modelo de Ising ferromagnético donde los espines, posicionados en una red periódica,

pueden apuntar hacia arriba o hacia abajo. En el formalismo de gas reticular, los espines hacia arriba y hacia abajo son equivalentes a sitios ocupados y sitios vacíos, respectivamente. Sin embargo, para los demás juegos no potenciales, no es posible hacer este tipo de analogía.

La exploración de las reglas de actualización dinámica posibles ha dado lugar a una variedad muy amplia de modelos, que no pueden ser descriptos por completo. En lo siguiente, centraremos nuestra atención en algunos de los tipos de reglas más relevantes y populares que aparecen en la literatura.

C.1.1. Actualización Sincrónica

Las oportunidades de revisión de estrategia para los agentes, pueden llegar de forma sincrónica o asincrónica. En los modelos espaciales, la diferencia entre los modelos con actualización sincrónica y asincrónica, se ve aumentada, debido a que estos procesos llevan fundamentalmente a patrones espacio-temporales diferentes y comportamientos generales diferentes del sistema (Huberman y Glance, 1993 [82]).

En la actualización sincrónica toda la población se actualiza al mismo tiempo, en pasos temporales discretos, dando lugar a una dinámica de tiempo discreto a nivel macroscópico. Este es el tipo de actualización utilizada en los autómatas celulares. La actualización sincrónica se aplica, por ejemplo, en los modelos biológicos, cuando las generaciones son claramente discernibles en el tiempo, o cuando el efecto de las estaciones sincroniza los procesos metabólicos y reproductivos. La actualización sincrónica puede ser importante para algunos otros sistemas también, donde un tiempo de espera adecuado puede imponer a los jugadores modificar su estrategia en el mismo intervalo de tiempo en que lo hacen sus vecinos.

Los autómatas celulares pueden representar bien estos juegos evolutivos, donde los jugadores se encuentran en los sitios de una red periódica. La generalización a redes arbitrarias (Abramson y Kuperman, 2001 [83]; Duran y Mulet, 2005 [84]; Masuda y Aihara, 2003 [85]) es directa. En cada paso de tiempo discreto ($t = 0, 1, 2, \dots$) todos y cada uno de los jugadores actualizan su estrategia simultáneamente de acuerdo a una regla determinista, dependiendo del estado de su vecindario respectivo. Para los juegos evolutivos, por lo general la regla es determinada por las ganancias obtenidas según la ecuación. (C.2). Por ejemplo, en el modelo propuesto por Nowak y May

(1992) [36], cada jugador adopta la estrategia de uno de sus vecinos (incluido el mismo), que haya alcanzado la ganancia más alta del vecindario en el último turno.

Los patrones espacio-temporales (o conductas) que ocurren en los autómatas celulares pueden ser clasificados en cuatro distintas clases de equivalencia (Wolfram, 1983 [86], 1984 [42], 2002 [43]). En la Clase 1, la evolución conduce siempre exactamente al mismo patrón final uniforme (Este caso es llamado con frecuencia un “punto fijo” o un “estado absorbente”), para casi todas las condiciones iniciales. En la Clase 2, el sistema puede evolucionar a muchos estados diferentes, construidos a partir de un cierto conjunto de sencillas estructuras locales, que pueden, o bien mantenerse sin cambios, o bien pueden repetirse en ciclos de unos pocos pasos temporales (ciclos límite). El comportamiento se vuelve más complicado en la Clase 3, donde los patrones dependientes del tiempo muestran elementos aleatorios. Por último, en la Clase 4, se obtienen patrones dependientes del tiempo de una alta complejidad (mezcla de un poco de orden y aleatoriedad), y ciertas propiedades de estos patrones anidados, exhiben un comportamiento asociado a leyes de potencia. El ejemplo mejor conocido de autómata celular, que pertenece a esta clase de universalidad, es el Juego de la Vida, inventado por John Conway. Este autómata celular bidimensional tiene una gran cantidad de estructuras locales (llamadas animales), que pueden oscilar, moverse, chocar, tomar vida, etc, como se explica en detalle por Gardner (1970) [87] y Sigmund (1993) [88]. Killingback y Doebeli (1998) [89] demostraron que, los autómatas celulares basados en juegos repetidos, introducidos teóricamente por Nowak y May (1992) [36], exhiben una dinámica compleja, con correlaciones de largo alcance entre los estados, tanto en el tiempo, como en el espacio. Este es un rasgo característico de la Clase 4.

Una regla de autómata celular define la nueva estrategia para cada jugador, en función de la distribución de estrategias en su vecindad. Para el modelo de Nowak-May, el comportamiento espacio-temporal sigue siendo cualitativamente el mismo dentro de un rango dado de parámetros asociados al valor de los pagos, mientras que variaciones mayores de estos parámetros pueden modificar sustancialmente el comportamiento, o incluso pueden cambiar el autómata celular de una clase de equivalencia a otra clase.

Las reglas de un autómata celular pueden contener elementos estocásticos. En

este caso, preservando al mismo tiempo la sincronicidad, la regla de actualización define la probabilidad de tomar uno de los posibles estados para cada sitio. Por lo general, las normas estocásticas destruyen los estados pertenecientes a las Clases 2 y 4. Esta extensión también puede causar transiciones de fase fuera del equilibrio (Kinzel, 1985 [90]).

Hay una manera directa de convertir cualquier autómatas celular en estocástico (Mukherji et al., 1996 [91]; Tomochi y Kono, 2002 [92]). Supongamos que la prescripción de la regla determinista local se acepta en cada sitio con probabilidad μ , mientras que el sitio permanece en el estado anterior (sin actualizarse), con una probabilidad $1 - \mu$, siendo el parámetro μ una medida del grado de sincronización en el sistema. Esta regla de actualización reproduce el autómatas celular original para $\mu = 1$, mientras que para $\mu < 1$, conduce a la actualización estocástica. Este tipo de autómatas celulares estocásticos nos permiten estudiar la transición continua, desde un autómatas determinista de actualización sincronizada hasta una evolución secuencial aleatoria (En el límite $\mu \rightarrow 0$).

Los efectos del un ruido débil, $1 - \mu \ll 1$, se han estudiado desde diferentes puntos de vista. Mukherji et al. (1996) [91] y Abramson y Kuperman (2001) [83] demostraron que una pequeña cantidad de ruido puede evitar que el sistema caiga en un estado “congelado”, característico de la Clase 2 de autómatas celulares. Una baja densidad de ocurrencia de “errores” puede ser capaz de iniciar las avalanchas, que transformen el sistema a otro estado meta-estable. Bajo ciertas condiciones, la distribución de tamaños de estas avalanchas exhibe un comportamiento del tipo ley de potencia, por lo menos para algunas regiones del espacio de parámetros, según lo informado por Holme et al. (2003) [93]; Lim et al. (2002) [94].

C.1.2. Actualización Secuencial al Azar

El otro mecanismo de actualización básico es la *actualización asincrónica*. En muchos sistemas sociales reales, los jugadores modifican sus estrategias de forma independiente el uno del otro. Para estos sistemas, la actualización aleatoria secuencial (asincrónica) ofrece una descripción más apropiada. Una posibilidad es que, en cada paso temporal, un agente se seleccione de forma aleatoria en la población, para

actualizar su estado. Así, la probabilidad por unidad de tiempo de actualización de la estrategia de un determinado agente es $\lambda = 1/N$, siendo N el número total de agentes del sistema. Alternativamente, cada agente puede poseer un “reloj de Poisson” independiente, cuya alarma “suene” para determinar el tiempo de actualización, de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa λ . Estos supuestos aseguran que la actualización simultánea de más de un agente tenga probabilidad cero, y por lo tanto, en cada momento el estado macroscópico de la población sólo pueda cambiar un poco. En el límite de población infinita asincrónica, este tipo de actualización nos lleva a una dinámica suave y continua.

En el caso de la actualización secuencial estocástica, el objeto central, a nivel descriptivo, es la *tasa de transición individual*, $w(s \rightarrow s')$, que denota la probabilidad por unidad de tiempo de que un agente, dada la oportunidad, actualice su estrategia del estado s al s' . Claramente, se debe satisfacer la suma

$$\sum_{s'} w(s \rightarrow s') = \lambda, \quad (\text{C.4})$$

donde $s = s'$ está incluido en la suma. En los juegos poblacionales, la tasa de transición sólo depende del estado macroscópico de la población. En los juegos sobre redes, dicha tasa puede depender del estado instantáneo de los otros agentes en la vecindad, incluyendo sus estrategias y ganancias recibidas. En teoría, las probabilidades de transición también podrían depender explícitamente del tiempo (el turno del juego), o de la historia completa del juego, etc., pero por lo general no se toman en cuenta estas posibilidades.

C.2. Reglas de Actualización Microscópicas

En lo siguiente detallaremos algunas de las reglas de actualización microscópicas más representativas, basadas en la replicación, la imitación, y el aprendizaje.

C.2.1. Mutación y Experimentación

El caso más sencillo es cuando la probabilidad de transición es independiente del estado de los otros agentes. El cambio de estrategia se presenta debido a mecanismos

intrínsecos, sin influencia del resto de la población. El ejemplo típico es la *mutación* en la Biología. Un mecanismo similar, utilizado a menudo en los contextos de Economía, se llama la *experimentación*. Es habitual suponer que las probabilidades de mutación son constantes independientes de los pagos,

$$w(s \rightarrow s') = c_{ss'}, \quad (\text{C.5})$$

con valores tales que la suma en la ecuación. (C.4) se cumple.

Si la mutación es el único mecanismo dinámico, sin ninguna otra fuerza selectiva, esta regla conduce a la deriva genética espontánea (paseo aleatorio) en el espacio de estados. Si la población es finita, existe una probabilidad finita de que una estrategia se extinga por pura casualidad (Drossel, 2001 [95]). La deriva por lo general tiene menos importancia en las poblaciones de mayor tamaño, pero la misma se convierte un tema importante en el caso de la aparición de nuevos mutantes. Inicialmente los agentes mutantes son pequeños en número, y aún cuando una mutación sea beneficiosa, la probabilidad de fijación (es decir, de que la mutación llegue a una proporción macroscópica de la población) es menor que uno, porque la mutación puede ser perdida por la deriva al azar.

C.2.2. Imitación

Los procesos de imitación forman una amplia clase de reglas de actualización microscópicas. La esencia de la imitación es que el agente que tiene la oportunidad de revisar su estrategia, copie la estrategia de uno de sus compañeros de juego (que se encuentre en su vecindario) con cierta probabilidad. La estrategia del otro jugador se mantiene intacta, sólo desempeña un papel catalizador. La imitación no puede introducir una nueva estrategia que aún no se haya jugado en la población; esta regla no es innovativa.

Los procesos de imitación pueden diferir entre sí en dos aspectos: a quién imitar y con qué probabilidad. El procedimiento usual es elegir el agente a imitar al azar dentro del vecindario. En el caso de campo medio, esto significa elegir al azar un agente en toda la población. La probabilidad de imitación puede depender de la información disponible por el agente. La regla puede ser diferente si sólo las estrategias utilizadas

por los vecinos se conocen, o si tanto las estrategias como las ganancias obtenidas en el último turno (o la ganancia acumulada) de los vecinos están disponibles para su inspección. En el primer caso, el agente debe decidir sólo conociendo su propia ganancia. Una regla con este espíritu, es la regla de si gano me mantengo, si pierdo cambio, que se discute más adelante.

En el caso de que tanto las estrategias como las ganancias puedan ser tomadas en comparación, una de las reglas más simples de imitación es *imitar si es mejor*. El agente x con estrategia s_x adopta la estrategia de otro agente y , elegido al azar en la vecindad Ω_x de x , si y sólo si la estrategia s_y le ha proporcionado a y mejores ganancias que las obtenidas por x con su estrategia original, s_x , de lo contrario la estrategia original se mantiene. Si denotamos el conjunto de vecinos del agente x que juega con la estrategia s como $\Omega_x(s) \subseteq \Omega_x$, la tasa de transición individual para $s'_x \neq s_x$ puede escribirse como

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \frac{\lambda}{|\Omega_x|} \sum_{y \in \Omega_x(s'_x)} \Theta[U_y - U_x], \quad (\text{C.6})$$

donde Θ es la función escalón de Heaviside, $\lambda > 0$ es una constante arbitraria, y $|\Omega_x|$ es el número de vecinos de x . En el caso de campo medio (juego poblacional), esto se simplifica a

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \lambda \rho_{s'_x} \theta[U(s'_x) - U(s_x)]. \quad (\text{C.7})$$

Las reglas de imitación son más realistas si toman en cuenta las diferencias de pagos entre la estrategia original y las estrategias a imitar. En esta línea, una posible actualización es la *imitación proporcional* de Schlag (Schlag, 1998 [96], 1999 [97]). En este caso, la estrategia de otro agente en la vecindad es imitada, con una probabilidad proporcional a la diferencia de ganancias, siempre que el pago de la nueva estrategia sea más alto que el anterior:

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \frac{\lambda}{|\Omega_x|} \sum_{y \in \Omega_x(s'_x)} \max[U_y - U_x, 0]. \quad (\text{C.8})$$

La imitación sólo se produce si la estrategia de destino tiene más éxito, y en este caso, la tasa depende linealmente con la diferencia de ganancias. Otra vez, en el caso

de campo medio esto se reduce a:

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \lambda \rho_{s'_x} \max[U(s'_x) - U(s_x), 0]. \quad (\text{C.9})$$

La imitación proporcional no permite que una estrategia inferior reemplace a otra de más éxito. Las reglas de actualización que prohíben que esto ocurra se llaman *monótonas respecto a las ganancias*. Sin embargo, la monotonía respecto a las ganancias es rota con frecuencia en el caso de la racionalidad limitada, por lo que en ese caso una estrategia puede ser imitada con cierta probabilidad no nula, incluso si ha producido bajas ganancias en los turnos anteriores. Una posible forma general de *imitación suavizada* es

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \frac{\lambda}{|\Omega_x|} \sum_{y \in \Omega_x(s'_x)} g(U_y - U_x, 0) \quad (\text{C.10})$$

donde g es una función monótonamente creciente de escalón suavizado, como por ejemplo,

$$g(\Delta u) = \frac{1}{1 + \exp(-\Delta u/K)}, \quad (\text{C.11})$$

donde K se puede considerar una medida de la magnitud del ruido en el sistema. Las normas de imitación se pueden generalizar al caso en que todo el vecindario se controle de forma simultánea, y juegue un papel colectivo catalizador. Denotando por $\bar{\Omega}_x = \{x, \Omega_x\}$ a la vecindad que incluye al propio agente x dentro de la misma, una posible forma utilizada por Nowak et al. (1994 [98, 99]) y sus seguidores para el Dilema del Prisionero es

$$w(s_x \rightarrow s'_x) = \lambda \frac{\sum_{y \in \bar{\Omega}_x(s'_x)} g(U_y)}{\sum_{y \in \bar{\Omega}_x} g(U_y)} \quad (\text{C.12})$$

donde de nuevo $g(U)$ es una función escalón suavizada arbitraria positiva, y la suma en el numerador se limita a los agentes en la vecindad que ejerzan la estrategia s'_x de destino. Nowak et al. (1994a, b) utilizaron $g(z) = z^k$ ($z > 0$). Esta opción reproduce la regla determinista de imitar al mejor (en la vecindad) en el límite $k \rightarrow \infty$. La mayoría de sus análisis, sin embargo, se centraron en la versión lineal $k = 1$. Cuando $k < \infty$, esta regla no es monótona en las ganancias, pero, en general, asegura que las

estrategias que funcionan mejor en promedio en la vecindad tengan más posibilidades de ser imitadas.

Todos los tipos de reglas de imitación tienen la posibilidad de llegar a un estado homogéneo, tarde o temprano, cuando el tamaño del sistema es finito. Una vez que el estado homogéneo se alcanza, el sistema permanece allí para siempre, es decir, que se detiene la evolución. Las distribuciones homogéneas de estrategias son estados absorbentes para el comportamiento imitativo. El tiempo necesario para alcanzar estos estados absorbentes, sin embargo, aumenta muy rápidamente con el tamaño del sistema. Con el agregado de una tasa de mutación pequeña, los estados homogéneos dejan de permanecer como estados estacionarios, y el proceso dinámico se convierte en ergódico.

Los resultados de campo medio para el Dilema del Prisionero, tanto para la dinámica del replicador, como para la dinámica de imitación suavizada, son desarrollados en el Apéndice D.

C.2.3. Si Gano, me Mantengo; si Pierdo, Cambio

Cuando los pagos obtenidos por los otros jugadores no son observables, el jugador debe decidir sobre una nueva estrategia con sólo el conocimiento de sus propias ganancias recibidas anteriormente en el juego. El agente puede tener un “nivel de aspiraciones”: cuando su ganancia en el último turno (o ganancias promedio durante un cierto número de turnos) está por debajo de este nivel de aspiraciones, el agente cambia su estrategia por una nueva, de lo contrario, el agente continúa jugando con la estrategia original. La nueva estrategia (destino) puede ser imitada de su vecindad, o elegida al azar en el conjunto de posibles estrategias del propio agente.

Esta es la filosofía detrás de las reglas del tipo, *si gano, me mantengo; si pierdo, cambio*. Estas reglas han sido frecuentemente discutidas en relación con el Dilema del Prisionero, donde hay cuatro pagos posibles, de valores $S < P < R < T$, en el juego de un turno que se juega en cada etapa. Si el nivel de aspiración se establece entre el segundo y tercer valor de las ganancias posibles, y sólo el pago del último turno se considera (sin promediar), obtenemos la llamada “regla de Pavlov” (también llamada “estrategia de Pavlov”, cuando se la considera como una estrategia elemental, en lugar de como una meta-estrategia).

La tasa individual de transición se puede escribir como,

$$w(s_x \rightarrow \bar{s}_x) = \lambda \Theta(a - U_x); \quad P < a < R, \quad (\text{C.13})$$

donde a es el nivel de aspiraciones, $s_x = C, D$ y $\bar{s}_x = D, C$ (el opuesto de s), respectivamente.

Se sabe que como estrategia elemental, Pavlov puede ganarle a Tit por Tat en un ambiente ruidoso (Nowak y Sigmund, 1993 [37]). En las versiones espaciales de la regla de Pavlov que utilizaron Fort y Viola (2005) [100], se observó que la distribución de tamaño de las agrupaciones de agentes jugando la estrategia C (o D) se escala según una ley de potencias.

De la Dinámica Microscópica a la Macroscópica, en Juegos Poblacionales

Las tasas de transición individuales introducidas en la sección anterior pueden ser utilizadas para formular la dinámica en términos de una *Ecuación Maestra*. Esto es especialmente conveniente en el caso de campo medio, es decir, para los juegos poblacionales. Para el caso de la actualización secuencial al azar, en cada intervalo de tiempo infinitesimal, habrá, como mucho, un agente que considera un cambio de estrategia. Cuando el cambio es aceptado, la vieja estrategia i se sustituye por una nueva estrategia j , lo que disminuye en uno el número de jugadores que utilizan la estrategia i , y aumenta en uno el número de jugadores que utilizan la estrategia j en la población. Estos procesos se llaman *procesos de Markov de nacimiento-muerte de tipo Q* (Blume, 1998 [101]; Gardiner, 2004 [102]), donde Q es el número de diferentes estrategias posibles en el juego.

Sea n_i el número de i -estrategas en la población, y

$$n = \{n_1, n_2, \dots, n_Q\}, \quad \sum_i n_i = N, \quad (\text{C.14})$$

la configuración macroscópica del sistema. Introducimos la notación abreviada $n^{(jk)}$ (Helbing, 1996 [103], 1998 [104]) para la configuración

$$n^{(jk)} = \{n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_k + 1, \dots, n_Q\}, \quad (\text{C.15})$$

que difiere de n en el proceso elemental de convertir un j -estratega en un k -estratega. La densidad de probabilidad, dependiente del tiempo sobre las posibles configuraciones, $P(n, t)$, sastiface la Ecuación Maestra,

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = \sum_{n'} [P(n', t)W(n' \rightarrow n) - P(n, t)W(n \rightarrow n')], \quad (\text{C.16})$$

donde $W(n \rightarrow n')$ es la *tasa de transición entre configuraciones*. El primer (segundo) término representa el flujo entrante (saliente) hacia (desde) la configuración n . Esta forma supone que la regla de actualización es un proceso Markoviano sin memoria. Las tasas de transición entre configuraciones pueden ser calculadas a partir de las tasas de transición individuales. Notamos que $W(n \rightarrow n')$ es no nula solamente si $n' = n^{(jk)}$ para algún valor de j y k , y en ese caso, es proporcional al numero de j -estrategas n_j en la población. Entonces, podemos escribir las tasas de transición entre configuraciones como,

$$W(n \rightarrow n') = \sum_{j,k} n_j w(j \rightarrow k; n) \delta_{n', n^{(jk)}}. \quad (\text{C.17})$$

La Ecuación Maestra en (C.16) describe la dinámica de las probabilidades de configuración. Conocer el estado real de la población en un instante dado, significa que la distribución de probabilidades, $P(n, t)$, es extremadamente afilada en ese instante (función delta). Esta densidad de probabilidades inicial se vuelve más y más ancha con el transcurso del tiempo. Cuando la población es grande, este ensanchado es lo suficientemente lento como para que una aproximación determinista nos dé una descripción satisfactoria. En este caso, la trayectoria temporal de las densidades medias de las estrategias, o sea, el vector de estado $\rho \in \Delta_Q$, obedece una ecuación diferencial de primer orden ordinaria determinista y con tiempo continuo (Benaim and Weibull, 2003 [105]; Helbing, 1996 [103], 1998 [104]).

Para probar esto, definimos el promedio (dependiente del tiempo) de una cantidad f como $\langle f \rangle = \sum_n f(n)P(n, t)$. Expresamos entonces la derivada temporal de $\langle n_i \rangle$, utilizando la Ecuación Maestra, como:

$$\frac{d\langle n_i \rangle}{dt} = \sum_{n, n'} (n'_i - n_i) W(n \rightarrow n') P(n, t). \quad (\text{C.18})$$

Usando la ecuación (C.17), obtenemos:

$$\frac{d\langle n_i \rangle}{dt} = \sum_{n,j,k} (n_i^{(jk)} - n_i) n_j w(j \rightarrow k; n) P(n, t) = \sum_{n,j} [n_j w(j \rightarrow i; n) - n_i w(i \rightarrow j; n)] P(n, t), \quad (\text{C.19})$$

donde hemos usado que $n_i^{(jk)} - n_i = \delta_{ik} - \delta_{ij}$. La ecuación (C.19) es exacta. Sin embargo, para obtener una ecuación cerrada, que sólo contenga valores medios, debemos hacer una aproximación. Cuando la distribución de probabilidades es lo suficientemente angosta, podemos escribir,

$$\langle n_i, w(i \rightarrow j; n) \rangle \approx \langle n_i \rangle w(i \rightarrow j; \langle n \rangle). \quad (\text{C.20})$$

Esta aproximación nos lleva a la *ecuación aproximada de valores medios* para las frecuencias de las estrategias, $\rho_i(t) = \langle n_i \rangle / N$ (Benaim and Weibull, 2003 [105]; Helbing, 1996 [103], 1998 [104]; Weidlich, 1991 [106]):

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = \sum_j [\rho_j(t) w(j \rightarrow i; \rho) - \rho_i(t) w(i \rightarrow j; \rho)]. \quad (\text{C.21})$$

Esta ecuación puede ser usada para derivar las ecuaciones dinámicas macroscópicas, a partir de las reglas de actualización microscópicas. Por ejemplo, si consideramos la imitación proporcional definida en (C.9), la ecuación (C.21) nos da

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = \sum_{j \in S_-} \rho_i \rho_j (u_i - u_j) - \sum_{j \in S_+} \rho_i \rho_j (u_j - u_i), \quad (\text{C.22})$$

donde S_+ (S_-) denota el conjunto de estrategias superiores (inferiores) a la estrategia i -ésima. Es fácil verificar que esto nos lleva a:

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = \lambda \rho_i (u_i - \bar{u}), \quad \bar{u} = \sum_j \rho_j u_j, \quad (\text{C.23})$$

donde $\bar{u}$ es el pago promedio de la población. Esta es exactamente la dinámica del replicador en la forma de Taylor-Jonker, que ya habíamos introducido en la ecuación (1.25).

Apéndice D

Resultados de Campo Medio para el Dilema del Prisionero

En este apéndice estudiaremos los resultados de campo medio para el Juego Poblacional del Dilema del Prisionero. Consideraremos una situación donde los jugadores interactúan con un número limitado de oponentes elegidos al azar en una población grande. Por simplicidad, supondremos que una porción ρ de la población sigue la estrategia de cooperación incondicional (Siempre C, que será simplemente denotada como C), y una porción $1 - \rho$ juega incondicionalmente D (Siempre D, simplemente denotada como D). No permitiremos otras estrategias. Este es el límite extremo del caso de jugadores sin memoria del juego.

Las ganancias de cada jugador vienen de los q juegos con oponentes elegidos al azar. Los pagos promedio para los cooperadores y no cooperadores serán entonces, respectivamente,

$$U_C = Rq\rho + Sq(1 - \rho), \quad U_D = Tq\rho + Pq(1 - \rho), \quad (\text{D.1})$$

y el pago promedio de la población será calculado como

$$\bar{U} = \rho U_C + (1 - \rho) U_D. \quad (\text{D.2})$$

Con la dinámica del replicador de la ecuación (1.25), la variación de ρ deberá satisfacer la ecuación diferencial

$$\dot{\rho} = \rho(U_C - \bar{U}) = \rho(1 - \rho)(U_C - U_D). \quad (\text{D.3})$$

Esta forma de la dinámica de campo medio, conduce a tres puntos fijos, el correspondiente a $\rho = 0$, el correspondiente a $\rho = 1$, y el que se obtiene imponiendo $U_C - U_D = 0$, o sea, $\rho = (S - P)/(T + S - P - R)$. Si consideramos el caso genérico de juego de 2×2 , con matriz de pagos normalizada, con $R = 1$ y $P = 0$ fijos, donde S y T son parámetros variables, obtenemos la siguiente clasificación de las situaciones posibles, y la respectiva estabilidad de los puntos de equilibrio en cada caso:

- Para $S < 0$, y $T > 1$, (Dilema del Prisionero propiamente dicho) el único punto de equilibrio estable correspondiente a los resultados del campo medio es $\rho = 0$, que corresponde a que todos los agentes jueguen D.
- Por el contrario, para $S > 0$ y $T < 1$, el único punto de equilibrio estable correspondiente a los resultados del campo medio es $\rho = 1$, que corresponde a que todos los agentes jueguen C.
- Adicionalmente, para $S > 0$ y $T > 1$, el único punto de equilibrio estable correspondiente a los resultados del campo medio es $\rho = (S - P)/(T + S - P - R)$, que corresponde a la coexistencia de agentes que juegan C y agentes que juegan D, estando el valor de la fracción de cooperantes comprendido en el intervalo $(0, 1)$. Los otros dos puntos de equilibrio, $\rho = 0$ y $\rho = 1$ son en este caso inestables. Observamos que si S se halla comprendido entre 0 y 1, esta situación corresponde a Halcón-Paloma (también llamado Gallina),
- Por último, para el rango restante de parámetros, $S < 0$ y $T < 1$, el punto de equilibrio correspondiente a $\rho = (S - P)/(T + S - P - R)$, está nuevamente comprendido en el intervalo $(0, 1)$, pero ahora se ha vuelto inestable. Para cualquier perturbación pequeña en torno al mismo, la evolución dinámica nos llevará, dependiendo de la perturbación, o bien al punto de equilibrio estable correspondiente a $\rho = 1$, o bien al punto de equilibrio estable correspondiente a $\rho = 0$. Por lo tanto, tenemos en este caso una situación de biestabilidad, con dos

puntos de equilibrio estables, cuyas cuencas de atracción se hallan separados por las variedades correspondientes al entorno del punto de equilibrio inestable.

Esta región de interés corresponde, en particular, a la Caza del Ciervo.

En general, a nivel macroscópico, una dinámica deberá verificar la ecuación aproximada de valores medios en la ecuación (C.20), que en este caso queda como

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)w(D \rightarrow C) - \rho w(C \rightarrow D). \quad (\text{D.4})$$

En el caso de la regla de Imitación Suavizada, dada por la ecuación (C.10) en combinación con (C.11), las tasas de transición serán:

$$w(D \rightarrow C) = \frac{(1 - \rho)}{1 + \exp[(U_C - U_D)/K]}, \quad w(C \rightarrow D) = \frac{\rho}{1 + \exp[(U_D - U_C)/K]}, \quad (\text{D.5})$$

y la ecuación dinámica quedará como:

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho) \tanh\left(\frac{U_C - U_D}{2K}\right). \quad (\text{D.6})$$

En este caso, ρ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ pues $U_D > U_C$ para el Dilema del Prisionero propiamente dicho, independientemente del valor de K . (Análogamente a lo que ocurre en el caso de la dinámica del replicador para este juego, como vimos anteriormente.). Esto significa que en el caso de campo medio la cooperación no puede ser sostenida contra los no cooperadores, utilizando reglas de actualización imitativas. Notamos además que, para el caso del Dilema del Prisionero estricto, ambos casos descriptos arriba tienen dos estados absorbentes, $\rho = 0$ y $\rho = 1$, donde $\dot{\rho}$ se anula (En el caso del DP, $\rho = 1$ corresponde para ambas dinámicas a un punto de equilibrio inestable.).

Para las reglas dinámicas definidas arriba, hemos supuesto que los jugadores adoptan una de las estrategias de sus oponentes con una probabilidad que depende de la diferencia en los pagos. El comportamiento es cualitativamente diferente si se introducen reglas de actualización innovativas. La situación predicha por el modelo de campo medio cambia drásticamente cuando los jugadores se encuentran posicionados en una red y sus interacciones se limitan a sus vecinos más cercanos, en cuyo caso sí se pueden obtener resultados con cooperación no nula.

Apéndice E

La Estructura de los Grafos Sociales

En un sistema realista con muchos jugadores, éstos no pueden interactuar todos entre sí, si el número de jugadores tiende a infinito. En estas situaciones, la conectividad entre los jugadores viene dada por un grafo, donde los nodos representan a los jugadores, y los enlaces, que conectan los nodos, nos dan la conexión entre los pares de agentes correspondientes. De ahora en adelante, nuestro análisis se centra en los sistemas donde el peso de los enlaces es la unidad. Los jugadores conectados juegan entre sí para obtener sus ganancias. Adicionalmente, es usual suponer que, tanto los mecanismos asociados a la interacción de juego, como los asociados al aprendizaje (la adopción de estrategias), se basan en la misma red de conectividad. El comportamiento de los juegos evolutivos se encuentra fuertemente afectado por la estructura de la conectividad. La teoría de grafos da una base matemática para el análisis estructural. La investigación de los juegos evolutivos sobre estas estructuras ha llevado a la exploración de nuevos fenómenos y plantea una serie de preguntas interesantes.

La estructura de conectividad puede ser caracterizada por algunas propiedades topológicas pertinentes. En lo siguiente supondremos que el grafo correspondiente está conectado, es decir, que hay al menos un camino a lo largo de los enlaces que une cualquier par de sitios arbitrarios del mismo. En el contexto de la Teoría de Grafos, el grado q de un sitio, se refiere al número de agentes vecinos para un

determinado jugador. La distribución del grado (o número de vecinos), $f(q)$, define la probabilidad de encontrar q vecinos en la vecindad de un jugador cualquiera. El valor dado por $q = |\Omega_x|$ es uniforme para las *estructuras regulares* (por ejemplo, para las redes periódicas)¹, y $f(q) \propto q^{-\gamma}$ (normalmente $2 < \gamma < 3$) para las redes llamadas *libres de escala*, en las que existen sitios con un gran número de vecinos. En las redes libres de escala de tamaño finito, la distribución de grados en forma de ley de potencias tiene un punto de corte natural (o sea, que la ley de potencias sólo se cumple para un cierto rango de valores de q).

A continuación comentaremos brevemente algunas de las estructuras de conectividad, que se han investigado activamente en los últimos años. En primer lugar tenemos que destacar que un comportamiento del tipo de campo medio puede ser realizado para dos estructuras de conectividad drásticamente diferentes en el límite $N \rightarrow \infty$ (ver Figura E.1). Por un lado, el enfoque de campo medio se convierte en exacto para aquellos sistemas en que todas las parejas de agentes se encuentran enlazadas, es decir, el grafo correspondiente es completo. Por otro lado, un comportamiento similar se produce si las ganancias de cada jugador provienen de juegos con sólo q jugadores escogidos al azar en cada paso temporal. En esta situación, no existe una correlación entre los oponentes de un jugador en un turno dado, con los oponentes del mismo en el siguiente turno.

E.1. Redes Periódicas Bidimensionales

Para estos modelos espaciales, la red fija de interacción está determinada por los sitios de la red y los enlaces entre aquellos pares cuya distancia no exceda un valor dado. La estructura más usual es la vecindad de von Neumann (que incluye sólo las cuatro conexiones entre los sitios vecinos más cercanos, $q = 4$) y la vecindad de Moore (que incluye las conexiones con los vecinos más cercanos que estaban en von Neumann, más los siguientes vecinos más cercanos, correspondientes a las diagonales, $q = 8$). Muchas transiciones entre dos comportamientos muy diferentes dependen fuertemente de la dimensionalidad del espacio donde se encuentran los agentes interactuantes, por lo tanto las consideraciones pueden extenderse a las estructuras

¹Un grafo es regular, si el número de enlaces q_i , que salen de cada nodo, es el mismo $q_i = q$ para todo i .

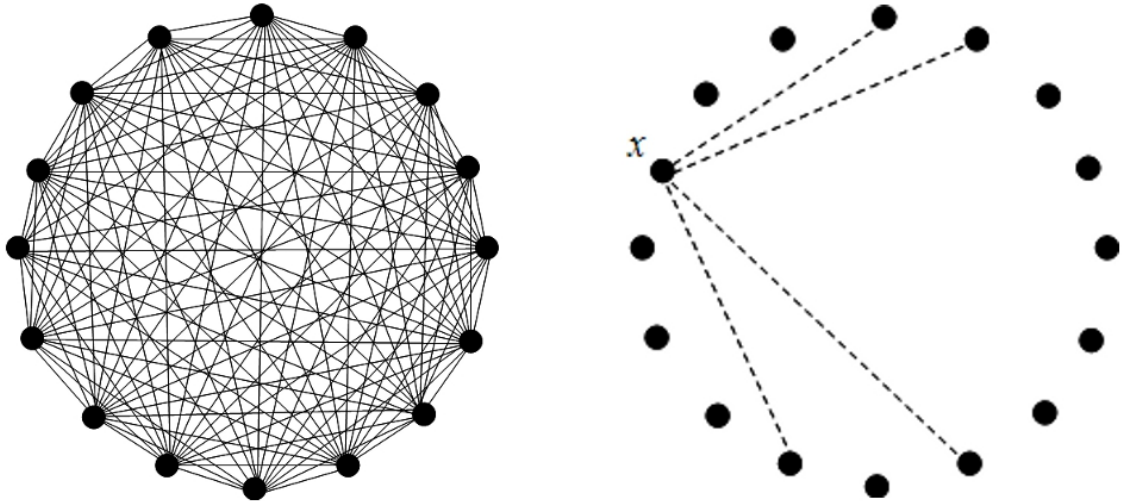


Figura E.1: Estructuras de conectividad para las que el enfoque de campo medio es válido en el límite $N \rightarrow \infty$. En el lado derecho las líneas discontinuas indican las conexiones temporales para las parejas de jugadores elegidas al azar en un instante determinado.

periódicas d -dimensionales hiper-cúbicas también.

Al usar condiciones de frontera periódicas, estos sistemas son invariantes ante traslaciones, y la distribución espacial de las estrategias pueden ser investigada utilizando las herramientas matemáticas desarrolladas en la teoría de estado sólido y la física estadística del equilibrio y del no equilibrio.

En muchos casos, las redes regulares de este tipo sólo proporcionan una primera estructura para la creación de redes sociales más complejas. Por ejemplo, las redes periódicas diluídas (ver Figura E.2) se pueden utilizar para estudiar lo que sucede si una porción z de los jugadores y/o interacciones son removidas, al azar (Nowak et al., 1994 [98]). La estructura de conectividad resultante es no homogénea, por lo que en este caso no podemos usar métodos analíticos que supongan la invariancia por traslación. Un análisis numérico sistemático en el límite $z \rightarrow 0$, sin embargo, puede darnos una imagen sobre el efecto de este tipo de defectos. Para muchas estructuras de conectividad (parcialmente) estocásticas, más de una característica topológica puede cambiar simultáneamente, y los efectos individuales de las mismas aparecen mezclados. La aclaración del rol que juega una cierta característica puede requerir

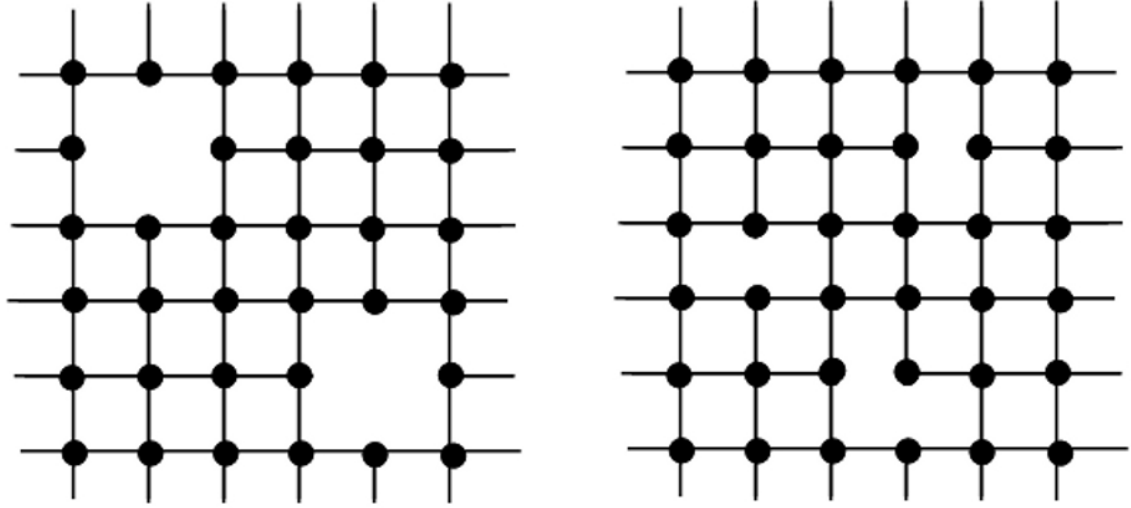


Figura E.2: Dos tipos de redes regulares diluídas. A la izquierda: Se remueven sitios al azar con los correspondientes enlaces. A la derecha: Se remueven enlaces al azar.

la separación y ajuste independiente de la misma. La figura E.3 muestra algunas estructuras de conectividad regulares (para $q = 4$) cuya topología es completamente diferente, pero, para todos los casos, los coeficientes de agrupación (“clustering”, en inglés) son todos nulos (o tienden a cero cuando $N \rightarrow \infty$).

E.2. Mundos Pequeños

En la figura E.3 una *red regular de mundo pequeño* (small world) es creada a partir de una red regular cuadrada, recableando aleatoriamente una fracción z de las conexiones de un modo que conserve el grado de cada nodo. Los enlaces al azar reducen drásticamente la distancia promedio $\bar{l}$ entre un par de nodos elegidos al azar, produciendo el fenómeno de mundo pequeño, característico de las redes sociales (Milgram, 1967 [107]). En el límite de $z \rightarrow 0$ la estructura es equivalente a una red regular cuadrada. Si todas las conexiones son remplazadas ($z = 1$) el proceso de recableado lleva al bien conocido *grafo regular aleatorio* (Wormald, 1999 [108]). Consecuentemente, el conjunto de estas estructuras provee una transición estructural

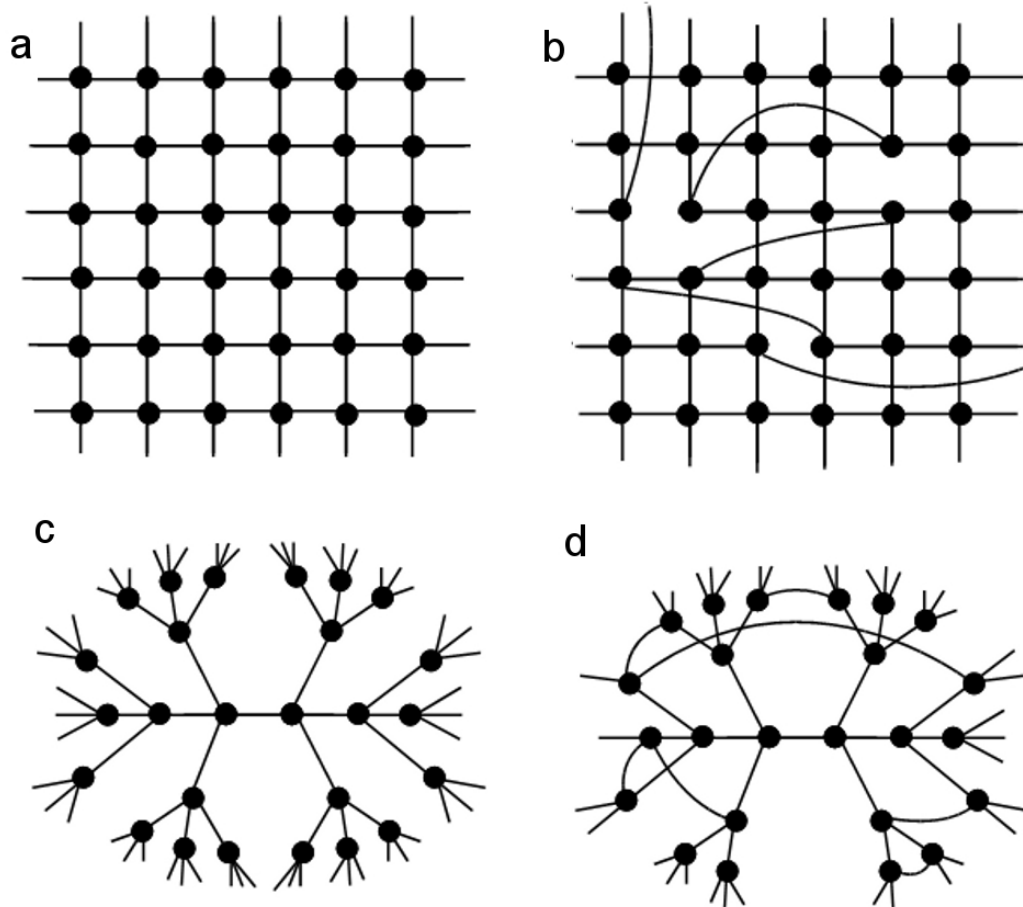


Figura E.3: Diferentes estructuras de conectividad regular en la que cada jugador tiene cuatro vecinos: (a) red cuadrada, (b) red regular de "Mundo Pequeño", (c) Red de Bethe (o estructura de árbol) y (d) grafo regular estocástico.

continua entre las redes regulares cuadradas y los grafos regulares aleatorios. Existe un amplio rango de valores de z para los cuales las dos características principales de las estructuras de mundo pequeño están presentes simultáneamente (Watts y Strogatz, 1998 [109]). Estas propiedades son: (1) el valor pequeño de la distancia media $\bar{l}$ entre dos nodos elegidos al azar, y (2) el alto valor del coeficiente de agrupación (clustering) $\bar{C}$, o sea, una alta densidad de conexiones en la vecindad de un sitio. Evidentemente, la distancia promedio entre pares de nodos crece con N de un modo que depende de la topología. En una red cuadrada regular de dimensión d , $\bar{l} \approx N^{1/d}$; en un grafo completo (completamente conectado) $\bar{l} = 1$; y en los grafos aleatorios $\bar{l} \approx \ln N / \ln \bar{q}$ donde $\bar{q}$ denota el grado (número de enlaces) medio de los nodos de la red. Cuando aplicamos el método de recableado aleatorio a una red regular cuadrada, una distancia media pequeña ($\bar{l} \approx \ln N / \ln \bar{q}$) puede ser alcanzada para una porción sorprendentemente pequeña de enlaces al azar ($z > 0,01$).

E.3. Grafos Libres de Escala

En las redes no homogéneas definidas anteriormente la distribución de grados $f(q)$ tiene un pico afilado alrededor de $\bar{q}$, y la ocurrencia de nodos con $q \gg \bar{q}$ es improbable. Existen, sin embargo, muchas redes reales en la naturaleza (como por ejemplo, internet, las redes sociales de amigos, las redes de colaboraciones, las redes de reacciones metabólicas, y otras muchas redes biológicas), donde la presencia de nodos con valor alto de q es esencial y debida a procesos fundamentales.

En los últimos años, muchos modelos, con el objetivo reproducir las principales características de estas redes, han sido desarrollados. Comentaremos ahora dos procedimientos de formación de redes, que exhiben propiedades del tipo libre de escala. Ambos procedimientos comienzan con k nodos conectados y en cada iteración se agrega un nodo con m enlaces (diferentes) a nodos ya existentes.

En el procedimiento sugerido por Barabási y Albert (1999) [110], en cada iteración se agrega un nodo con m enlaces a nodos pre-existentes, y el nuevo nodo es preferentemente enlazado a aquellos nodos que ya tienen un gran número de enlaces. Para llevar a cabo este fenómeno del tipo “los ricos se vuelven más ricos”, el nuevo nodo es enlazado a un sitio existente x con una probabilidad que depende del grado de x ,

dada por:

$$\Pi_x = \frac{q_x}{\sum_y q_y} \dots \quad (\text{E.1})$$

Luego de n iteraciones, el grafo tiene $N = k + n$ nodos y $k + nm$ enlaces. Para n grande (o N) la distribución de grados exhibe un comportamiento del tipo ley de potencias para un amplio rango de valores de q , o sea $f(q) \approx 2m^2 q^{-\gamma}$ con $\gamma > 0$, porque los nodos más antiguos incrementan su grado a expensa de los más nuevos. La conectividad promedio permanece siempre con el valor $\langle q \rangle = m$.

De hecho, este procedimiento para formar una red con *enlazado preferencial lineal* lleva naturalmente a distribuciones de grado del tipo ley de potencias. Una familia más general de procedimientos iterativos para formar redes de este tipo, puede ser introducida, si la probabilidad de enlace Π_x es modificada como

$$\Pi_x = \frac{g(q_x)}{\sum_y g(q_y)}, \quad (\text{E.2})$$

donde $g(q) > 0$ es una función arbitraria. Sin embargo, Krapivsky et al. (2000) demostraron analíticamente que un *enlace preferencial no lineal* destruye el comportamiento del tipo ley de potencias. La naturaleza libre de escala de las redes creadas por este tipo de procedimiento sólo puede ser alcanzada si la probabilidad de enlace es asintóticamente lineal, o sea $\Pi_x \approx a q_x$ cuando $q \rightarrow \infty$. En este caso el coeficiente γ puede ser ajustado en cualquier valor, entre 2 e ∞ .

En el modelo anterior y sus variantes, el coeficiente de agrupación $\bar{C}$ tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Por el contrario, el mismo permanece con valor finito para muchas redes reales. Dorogovtsev et al. (2001) [111] sugirieron otro procedimiento para crear redes libres de escala, que lleva a coeficientes de agrupación más realistas. En este procedimiento, en cada paso iterativo un nodo es agregado al sistema, estando enlazado el mismo con los dos nodos extremos de un enlace preexistente, elegido al azar. La distribución de grados queda similar a la del modelo de Barabási-Albert. Sin embargo, el modelo de Dorogovtsev crea al menos un triángulo en cada paso temporal, lo cual resulta en un coeficiente de agrupación finito ($\bar{C} \approx 0,5$) para N grande.

Evidentemente, muchos otros modelos de formación de redes han sido desarrollados, y su investigación ya es un área extensa de la física estadística. Hoy en día esa investigación cubre las redes dependientes del tiempo también.

E.4. Redes Evolutivas

La estructura más sencilla en que la conectividad de una red puede ser función del tiempo, es la ilustrada por el diagrama de la derecha en la figura E.1, que sirve como escenario disponible en el que la aproximación de campo medio es válida en el límite $N \rightarrow \infty$. Las estructuras de conectividad parcialmente aleatoria con compañeros de juego temporales son convenientes desde el punto de vista técnico. Por ejemplo, si los jugadores elegidos al azar son sustituidos por una porción z de los vecinos usuales en una red cuadrada (sólo para un turno del juego), entonces, las simetrías espaciales se conservan en escalas de tiempo grandes, y podemos adoptar la técnicas generalizadas de campo medio. El aumento de z puede inducir una transición de un comportamiento espacial a un comportamiento del tipo campo medio como se observa para el dilema del prisionero (Szabó y Vukov, 2004 [112]) y para el juego de Piedra, Papel o Tijeras (Szabó et al., 2004 [113]). Fenómenos similares son esperables cuando a los jugadores se les permite interactuar con jugadores adicionales a los de su vecindad, elegidos al azar en toda la red, en cada paso temporal.

Un área de investigación muy prometedora es la exploración de estructuras de conectividad, cuyo crecimiento (y/o cableado) es controlado por normas basadas en la teoría de juegos evolutiva. Zimmermann et al. (2001 [114], 2000 [115]) consideraron lo que sucede si los eslabones de una estructura de conectividad pueden ser eliminados y/o sustituidos por otros. Ellos supusieron que la distribución de estrategias y la estructura de conectividad evolucionaban al mismo tiempo, a ritmos elegidos para ser diferentes. La cancelación de un enlace, para este modelo, depende del pago total recibido por un par determinado de jugadores. Este modelo se convierte en un interesante Dilema del Prisionero cuando los no cooperadores insatisfechos rompen los enlaces con sus vecinos no cooperadores, con cierta probabilidad, y buscan otros socios elegidos al azar. Este mecanismo conserva el número de enlaces. En otro modelo, propuesto por Biely et al. (2007 [116]), los jugadores insatisfechos tienen la posibilidad de anular enlaces con no cooperadores, y los cooperadores pueden crear nuevos enlaces a uno de sus vecinos en segundo grado (vecinos de vecinos), propuesto por el correspondiente primer vecino.

Para muchos sistemas reales, la migración de los jugadores juega un papel crucial. Usualmente, se supone que, durante el traslado sobre un grafo de un jugador, éste

conserva su estrategia original, pero se enfrenta a una nueva vecindad. Hay varias maneras de cómo este comportamiento puede ser incorporado en los modelos. Si la estructura de conectividad está definida por una red (o grafo), entonces podemos introducir nodos vacíos donde los jugadores puedan moverse entre nodos vecinos. Otra posibilidad es que a dos jugadores (elegidos al azar) se les permita intercambiar sus posiciones. Notamos que estos mecanismos implican cambios adicionales en la distribución de las estrategias.

Bibliografía

- [1] H. Fort and E. Sicardi. Evolutionary markovian strategies in 2×2 spatial games. *Physica A*, 375:323–335, 2007.
- [2] E. Sicardi and H. Fort. Markovian strategies for spatial dilemmas in lattices and networks. *AIP Conference Proceedings*, 913:84, 2007.
- [3] E. Sicardi, H. Fort, M. Vanstein, and J. Arenzon. Random mobility and spatial structure often enhance cooperation. *Journal of Theoretical Biology*, 256:240–246, 2009.
- [4] György Szabó and Gábor Fáth. Evolutionary games on graphs. *Physics Reports*, 446:97–216, 2007.
- [5] W. Weidlich. Physics and social science - the approach of synergetics. *Physics Reports*, 204:1–163, 1991.
- [6] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81:591–646, 2009.
- [7] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *Introduction to Econophysics: Correlations Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] J. von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100:295–320, 1928.
- [9] W. Poundstone. *Prisoner’s Dilemma*. Anchor, 1993.
- [10] W. Liebrand. A classification of social dilemma games. *Simulation & Gaming*, 14:123–138, 1983.

-
- [11] W. Poundstone. *Prisoners Dilemma*. New York: Doubleday, 1992.
- [12] A. Rapoport. *Two-Person Game Theory: The Essential Ideas*. U. Michigan, Ann Arbor, 1966.
- [13] B. Skyrms. *The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure*. Cambridge University Press, 2004.
- [14] J. E. Strassman, Y. Zhu, and D.C. Queller. Altruism and social cheating in the social amoeba *dictyostelium discoideum*. *Nature*, 408:965–967, 2000.
- [15] J. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36:48–49, 1950.
- [16] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [17] R. J. Aumann. *Irrationality in game theory*. En: P. Dasgupta, D. Gale, O. Hart y E. Maskin, (Eds.), *Economic Analysis of Markets and Games: Essays in Honor of Frank Hahn*. Págs. 214–227. MIT Press, Cambridge, MA, 1992.
- [18] A. Rapoport and M. Guyer. A taxonomy of 2×2 games. *Yearbook of the Society for General Systems*, 11:203–214, 1966.
- [19] M. C. Boerlijst, M. A. Nowak, and K. Sigmund. The logic of contrition. *J. Theor. Biol.*, 185:281–293, 1997.
- [20] K. Panchanathan and R. Boyd. Indirect reciprocity can stabilize cooperation without the second-order free rider problem. *Nature*, 432:499–502, 2004.
- [21] M. A. Nowak and K. Sigmund. Evolution of indirect reciprocity. *Nature*, 437:1291–1298, 2005.
- [22] K. G. Binmore and L. Samuelson. Evolutionary stability in repeated games played by finite automata. *J. Econ. Theory*, 57:278–305, 1992.
- [23] K. Lindgren. *Evolutionary dynamics in game-theoretic models*. En: W. B. Arthur, S. Durlauf, y D. A. Lane (Eds.), *The Economy as an Evolving Complex System II*. Santa Fe Institute, Perseus Books, Reading, MA, 1997.

- [24] R. Selten. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfrage-tragheit. *Z. Gesamte Staatswiss*, 121:301–324, 1965.
- [25] J. Maynard-Smith and E. Szathmary. *The Major Transitions in Evolution*. Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [26] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, New Cambridge, 1998.
- [27] J. Maynard-Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [28] J. Weibull. *Evolutionary Game Theory*. MIT Press Books, 1997.
- [29] J. Maynard-Smith and G. Price. The logic of animalconflict. *Nature (London)*, 146:15, 1997.
- [30] R. Cressman. *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. MIT Press, Cambridge, MA, 2003.
- [31] P. Taylor and L. Jonker. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Math. Biosci.*, 40:145–156, 1978.
- [32] J. Hofbauer and K. Sigmund. Evolutionary game dynamics. *Bull. Am. Math. Soc.*, 40:479–519, 2003.
- [33] R. Albert and A. L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97, 2002.
- [34] R. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York, 1984.
- [35] R. Axelrod and W. D. Hamilton. The evolution of cooperation. *Science*, 211: 1390–1396, 1981.
- [36] M.A. Nowak and R. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 359: 826–829, 1992.
- [37] M. A. Nowak and K. Sigmund. A strategy of win–stay, lose–shift that outper-forms tit for tat in prisoner’s dilemma. *Nature*, 364:56–59, 1993.

-
- [38] A. Rapoport and A. M. Chammah. *Prisoner's Dilemma* (pp. 73–44). The University of Michigan Press, 1965.
 - [39] D. Kraines and V. Kraines. Pavlov and the prisoner's dilemma. *Theory Decision*, 26:47–79, 1988.
 - [40] K. Lindgren and M. G. Nordahl. Evolutionary dynamics of spatial games. *Physica D*, 75:826–829, 1994.
 - [41] K. Brauchli, T. Killingback, and M. Doebeli. Evolution of cooperation in spatially structured populations. *J. Theor. Biol.*, 200:405–417, 1999.
 - [42] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10: 15–57, 1984.
 - [43] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
 - [44] C. Hauert. Effects of space in 2×2 games. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 12: 1531–1548, 2002.
 - [45] C. Wedekind and M. Milinski. Human cooperation in the simultaneous and the alternating prisoner's dilemma: Pavlov versus generous tit-for-tat. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93:2686–2689, 1996.
 - [46] M. Milinski and C. Wedekind. Working memory constrains human cooperation in the prisoners dilemma. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 95:13755–13758, 1998.
 - [47] M. G. Zimmermann, V. M. Eguluz, and M. San Miguel. Coevolution of dynamical states and interactions in dynamic networks. *Physical Review E*, 69: 065102(R), 2004.
 - [48] M. G. Zimmermann and V. M. Eguluz. Cooperation, social networks, and the emergence of leadership in a prisoner's dilemma with adaptive local interactions. *Physical Review E*, 72:056118, 2005.
 - [49] D. Ashlock, M. D. Smucker, E. A. Stanley, and L. Tesfatsion. Preferential partner selection in an evolutionary study of prisoners dilemma. *Economic Report Series, Iowa State University*, 35, 1995.

-
- [50] M. H. Vainstein and J. J. J. J. Arenzon. Disordered environments in spatial games. *Phys. Rev. E*, 64:051905, 2001.
- [51] M. H. Vainstein, A. T. C. Silva, and J. J. Arenzon. Does mobility decrease cooperation? *J. Theor. Biol.*, 244:722–728, 2007.
- [52] S. Alizon and P. Taylor. Empty sites can promote altruistic behavior. *Evolution*, 62:1335–1344, 2008.
- [53] L. A. Dugatkin and D. S. Wilson. Rover – a strategy for exploiting cooperators in a patchy environment. *American Naturalist*, 138:687–701, 1991.
- [54] M. Enquist and O. Leimar. The evolution of cooperation in mobile organisms. *Anim. Behav.*, 45:747–757, 1993.
- [55] I. M. Hamilton and M. Taborsky. Contingent movement and cooperation evolve under generalized reciprocity. *Proc. R. Soc. B*, 272:2259–2267, 2005.
- [56] J. C. Koella. The spatial spread of altruism versus the evolutionary response of egoists. *Proc. R. Soc. B*, 267:1979–1985, 2000.
- [57] J. F. Le Galliard, F. Ferrière, and U. Dieckmann. Adaptive evolution of social traits: origin, trajectories, and correlations of altruism and mobility. *Am. Nat.*, 165:206–224, 2005.
- [58] M. van Baalen and D. A. Rand. The unit of selection in viscous populations and the evolution of altruism. *J. Theor. Biol.*, 193:631–648, 1998.
- [59] R. Ferrière and R. E. Michod. Invading wave of cooperation in a spatial iterated prisoners–dilemma. *Proc. R. Soc. B*, 259:77–83, 1995.
- [60] R. Ferrière and R. E. Michod. The evolution of cooperation in spatially heterogeneous populations. *Am. Nat.*, 147:692–717, 1996.
- [61] P. D. Taylor. Altruism in viscous populations – an inclusive fitness model. *Evol. Ecol.*, 6:352–356, 1992.
- [62] D. S. Wilson, G. B. Pollock, and L. A. Dugatkin. Can altruism evolve in purely viscous populations? *Evol. Ecol.*, 6:331–341, 1992.

-
- [63] G. Jian-Yue, W. Zhi-Xi, and W. Ying-Hai. Evolutionary snowdrift game with disordered environments in mobile societies. *Chinese Physics*, 16:3566–3570, 2007.
- [64] C. Hauert and M. Doebeli. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, 428:643–646, 2004.
- [65] C. Hauert. Fundamental clusters in spatial 2×2 games. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 268:761–769, 2001.
- [66] W. Hamilton. The genetical evolution of social behaviour. *J. Theor. Biol.*, 7: 1–16, 1964.
- [67] M. A. Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314:1560–1563, 2006.
- [68] H. Fort. Evolving ecological social dilemmas: A spatial individual-based model for the evolution of cooperation with a minimal number of parameters. *Research Letters in Ecology*, 2007.
- [69] H. Fort. A minimal model for the evolution of cooperation through evolving heterogeneous games. *Europhysics Letters EPL*, 81:48008, 2008.
- [70] R. Gibbons. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [71] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
- [72] P. Pettit and R. Sugden. The backward induction paradox. *J. Philos.*, 86: 169–182, 1989.
- [73] J. Friedman. A non-cooperative equilibrium for supergames. *Review of Economic Studies*, 38:1–12, 1971.
- [74] D. Fudenberg and E. Maskin. The folk theorem in repeated games with discounting and incomplete information. *Econometrica*, 54:533–554, 1986.
- [75] J. Conlisk. Why bounded rationality? *J. Econ. Lit.*, XXXIV:669–700, 1965.

-
- [76] D. Kahneman. Maps of bounded rationality: A perspective on intuitive judgement and choice. *Nobel Prize Lectures*, 2002.
- [77] G. W. Brown. *Iterative solution of games by fictitious play*. En: TC. Koopmans, T.C. (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. Págs. 373-376. Wiley, New York, 1951.
- [78] R. A. Fisher. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Clarendon Press, Oxford, 1930.
- [79] R. C. Lewontin. Evolution and the theory of games. *J. Theor. Biol.*, 1:382–403, 1961.
- [80] M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.
- [81] H. Fölmer. Random economics with noisy interacting agents. *J. Math. Econ.*, 1:51–62, 1974.
- [82] P. Taylor and L. Jonker. Evolutionary games and computer simulations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 90:7716–7718, 1993.
- [83] G. Abramson and M. Kuperman. Social games in a social network. *Phys. Rev. E*, 63:030901(R), 2001.
- [84] O. Duran and R. Mulet. Evolutionary prisoners dilemma in random graphs. *Physica D*, 208:257–265, 2005.
- [85] N. Masuda and K. Aihara. Spatial prisoners dilemma optimally played in small-world networks. *Phys. Lett. A*, 313:55–61, 2003.
- [86] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Rev. Mod. Phys.*, 55: 601–644, 1983.
- [87] M. Gardner. Mathematical games: the fantastic combination of john conway’s new solitary game ‘life’. *Sci. Am.*, 223:120–123, 1970.
- [88] K. Sigmund. *Games of Life: Exploration in Ecology, Evolution and Behavior*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1993.

-
- [89] T. Killingback and M. Doebeli. Self-organized criticality in spatial evolutionary game theory. *J. Theor. Biol.*, 191:335–340, 1998.
- [90] W. Kinzel. Phase transitions of cellular automata. *Z. Phys. B*, 58:229–244, 1985.
- [91] A. Mukherji, V. Rajan, and J. R. Slagle. Robustness of cooperation. *Nature*, 125:125–126, 1996.
- [92] M. Tomochi and M. Kono. Spatial prisoners dilemma games with dynamic payoff matrices. *Phys. Rev. E*, 65:026112, 2002.
- [93] P. Holme, A. Trusina, B. J. Kim, and P. Minnhagen. Prisoners dilemma in real-world acquaintance networks: Spikes and quasiequilibria induced by the interplay between structure and dynamics. *Phys. Rev. E*, 68:030901, 2003.
- [94] Y. M. Lim, K. Chen, and C. Jayaprakash. Scale-invariant behavior in a spatial game of prisoners dilemma. *Phys. Rev. E*, 65:026134, 2002.
- [95] B. Drossel. Biological evolution and statistical physics. *Adv. Phys.*, 50:209–295, 2001.
- [96] K. H. Schlag. Why imitate, and if so, how? a bounded rational approach to multi-armed bandits. *J. Econ. Theory*, 78:130–156, 1998.
- [97] K. H. Schlag. Which one should i imitate? *J. Math. Econ.*, 31:493–522, 1999.
- [98] M. A. Nowak, S. Bonhoeffer, and R. M. May. More spatial games. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 4:33–56, 1994.
- [99] M. A. Nowak, S. Bonhoeffer, and R. M. May. Spatial games and the maintenance of cooperation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 91:4877–4881, 1994.
- [100] H. Fort and S. Viola. Spatial patterns and scale freedom in prisoner’s dilemma cellular automata with pavlovian strategies. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005–01:P01010, 2005.

-
- [101] L. E. Blume. *Population games*. En: W. B. Arthur, D. Lane y S. Durlauf (Eds.), *The Economy as a Complex Adaptive System II*. Addison–Wesley, Reading, MA, 1998.
- [102] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods. 3rd ed.* Springer, Berlin, 2004.
- [103] D. Helbing. A stochastic behavioral model and a microscopic foundation of evolutionary game theory. *Theor. Decis.*, 40:149–179, 1996.
- [104] D. Helbing. *Microscopic foundation of stochastic game dynamical equations*. En: W. Leinfellner y E. Köhler (Eds.), *Game Theory, Experience, Rationality*. Págs. 211-224. Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.
- [105] M. Benaim and J. Weibull. Deterministic approximation of stochastic evolution in games. *Econometrica*, 71:873–903, 2003.
- [106] W. Weidlich. Physics and social science—the approach of synergetics. *Phys. Rep.*, 204:1–163, 1991.
- [107] S. Milgram. The small world problem. *Psychol. Today*, 2:60–67, 1967.
- [108] N.C Wormald. Models of random regular graphs. J. D. Lamb and D.A. Preece (Eds.) *Surveys in Combinatorics, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge*, 267:239–298, 1999.
- [109] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- [110] A. L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [111] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Size-dependent degree distribution of a scale-free growing network. *Phys. Rev. E*, 63:062101, 2001.
- [112] G. Szabó and J. Vukov. Cooperation for volunteering and partially random partnerships. *Phys. Rev. E*, 69:036107, 2004.

-
- [113] G. Szabó, A. Szolnoki, and R. Izsák. Rockscissorspaper game on regular small-world networks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:2599–2609, 2004.
- [114] M. G. Zimmermann, V. M. Eguluz, and M. San Miguel. *Cooperation, adaption and the emergence of leadership*. En: J. B. Zimmermann y A. Kirman(Eds.), *Economics and Heterogeneous Interacting Agents*. Págs. 73-86. Springer, Berlin, 2001.
- [115] M. G. Zimmermann, V. M. Eguluz, M. San Miguel, and A. Spadaro. *Cooperation in adaptive network*. En: G. Ballot y G. Weisbuch (Eds.), *Application of Simulations in Social Sciences*. Págs. 283–297. Hermes Science Publications, Paris, 2000.
- [116] C. Biely, K. Dragosits, and S. Thurner. The prisoners dilemma on co-evolving networks under perfect rationality. *Physica D*, 228:40–48, 2007.