

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY

INSTITUTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**Modelos de relojes reales en mecánica  
cuántica**

AUTOR: JUAN ANDRÉS MUNIZ

SUPERVISOR: DR. RODOLFO GAMBINI

MONTEVIDEO, URUGUAY

Setiembre, 2012



## Resumen

El problema de la medida en mecánica cuántica surge en el formalismo ortodoxo a partir de la necesidad de introducir al colapso de la función de onda cuando se realiza una medición. Complementando las soluciones prácticas como la decoherencia ambiental, Gambini et al han demostrado que la solución al problema de la medida está íntimamente relacionada con el papel que toma el tiempo en la teoría. En particular, el uso del tiempo clásico debe ser dejado de lado en pos del uso de un tiempo físico, expresado por algún grado de libertad del sistema. La evolución en términos de este tiempo físico es no unitaria, ya que el reloj real tiene una dispersión que no puede eliminarse.

Este trabajo apunta a estudiar en detalle el proceso de medición en estos sistemas. Se presentan las ideas generales que surgen de la introducción de un reloj real en el sistema y el mecanismo de interacción que produce una medición. Específicamente, se estudia la medida utilizando el formalismo de von Neumann, donde se modela el proceso de medición mediante el acoplamiento del sistema con un aparato macroscópico o puntero. Este acoplamiento debe expresar que es el reloj real quien coordina la medida.

De esta forma, se intenta construir un modelo y una solución realista, que permita estudiar los efectos que tiene la medición del sistema sobre el reloj real. Para ello, se considera un modelo de reloj real como una partícula libre masiva. Se estudia el caso clásico y cuántico, donde las limitaciones sobre la modificación del estado del reloj se deben a la incertidumbre asociada al puntero.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el primer capítulo se introduce el problema de la medida en mecánica cuántica y en particular se describe el proceso de medida en el formalismo de von Neumann. También se estudian algunos modelos de relojes cuánticos propuestos por A. Peres mediante ejemplos. En el segundo capítulo se intenta explicar las consecuencias que tiene considerar el tiempo físico en la teoría. Este es fundamentalmente un resumen de algunos trabajos realizados por Gambini et al. Finalmente, en el tercer capítulo se estudian los efectos de la medida de la posición del sistema en un instante determinado por el reloj real. El cuarto capítulo se dedica a las conclusiones del trabajo.



# Índice general

<b>1. Medidas ideales y relojes en mecánica cuántica</b>	<b>4</b>
1.1. El problema de la medida . . . . .	4
1.1.1. El proceso de medida . . . . .	4
1.1.2. Medida ideal de Von Neumann . . . . .	5
1.1.3. Modelo de puntero . . . . .	6
1.1.4. Una alternativa práctica al problema de la medida . . . . .	7
1.2. El papel del tiempo en mecánica cuántica . . . . .	9
1.3. Medida del tiempo con relojes cuánticos . . . . .	10
1.3.1. Reloj de Peres . . . . .	10
1.3.2. Medida del tiempo de vuelo . . . . .	13
<b>2. Relojes reales</b>	<b>15</b>
2.1. Problema del tiempo . . . . .	15
2.1.1. Sistemas totalmente vinculados, un ejemplo . . . . .	15
2.1.2. Posibles soluciones al problema del tiempo . . . . .	17
2.2. Mecánica cuántica con relojes reales . . . . .	19
2.2.1. Sistema y reloj no interactuantes . . . . .	20
2.2.2. Limitaciones en la medida del tiempo . . . . .	22
2.2.3. Indecibilidad y la interpretación de Montevideo de la Mecánica Cuántica. . . . .	24
<b>3. Efecto sobre relojes reales</b>	<b>26</b>
3.1. Fenomenología de los relojes reales . . . . .	26
3.2. Modelo clásico . . . . .	28
3.2.1. Precisión de la medida . . . . .	30
3.2.2. Backreaction sobre el reloj I . . . . .	30
3.3. El modelo cuántico . . . . .	31
3.3.1. Imagen de interacción . . . . .	33
3.3.2. Medida del puntero . . . . .	35
3.3.3. Backreaction sobre el reloj II . . . . .	37
3.3.4. Perturbaciones a órdenes superiores . . . . .	38
3.3.5. Validez del modelo y análisis de incertidumbres . . . . .	39
3.4. Extensión del modelo . . . . .	44
3.4.1. Limitaciones del modelo . . . . .	44
3.4.2. Cálculo de probabilidades condicionales. . . . .	44
3.4.3. Camino al propagador . . . . .	46
<b>4. Conclusiones</b>	<b>47</b>



# Capítulo 1

## Medidas ideales y relojes en mecánica cuántica

### 1.1. El problema de la medida

#### 1.1.1. El proceso de medida

Sin duda uno de los puntos más desconcertantes del formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica es el proceso de medida. La mayoría de los estudiantes solemos comprender y aprender a convivir con la formulación axiomática de la mecánica cuántica tal cómo se presenta en la mayoría de los libros de texto de la licenciatura [1]. Sin embargo, en general estos libros abandonan el carácter explicativo y profundo de los axiomas en pos de una formulación matemática consistente y comprensible.

El principal problema conceptual de esta formulación se refiere al postulado del colapso o reducción de la función de onda. Este postulado intenta reconciliar la idea de medición desde el punto de vista práctico con la interpretación conceptual del estado cuántico como un objeto físico. Con ese fin, si se mide cierto observable  $\hat{O}$  con resultado  $o$  el estado del sistema colapsa inmediatamente después de la medida a su proyección ortogonal sobre el subespacio asociado a  $o$ . Por lo tanto se obtiene la deseada repetibilidad de la medida.

El postulado del colapso no solo parece terminar con la evolución unitaria determinada por la ecuación de Schrödinger, sino que también presenta otros problemas fundamentales que serán descriptos mas adelante.

Una forma de entender el colapso del estado, como indica Scholsshauer [2][3], se basa en la descripción cuántica de la interacción del sistema con el aparato de medida, en general asociado a un sistema con características clásicas. En este contexto es dicha interacción la que provoca el colapso de la función de onda. Se espera por lo tanto que su solución esté íntimamente relacionada con la transición clásica-cuántica, sobre la cual la interpretación de Copenhague marca una no tan clara frontera. Es así que se necesita recurrir a mejores explicaciones o interpretaciones de este fenómeno.

### 1.1.2. Medida ideal de Von Neumann

Von Neumann [4] propuso un modelo puramente cuántico de medida donde se introduce un aparato que indicará el valor de la medida. El sistema  $\mathcal{S}$  es descrito por una base  $\{|s_n\rangle\}$  e interactúa con el aparato  $\mathcal{A}$ , cuya base es  $\{|a_m\rangle\}$ . Si se desea que la interacción represente una medida sobre el sistema, se deben correlacionar los distintos estados del sistema con los del aparato, de forma que se puedan distinguir los posibles resultados. Von Neumann sugiere generar estas correlaciones como resultado de la evolución conjunta del sistema-aparato  $\mathcal{SA}$ .

Para medir un cierto observable  $\hat{O}$  se elige la base  $\{|s_n\rangle\}$  como la base de autovectores del observable. Asumiendo que el estado inicial del aparato es  $|a_r\rangle$  la evolución correlacionará los estados de forma tal que se genere una correspondencia biunívoca entre los estados del sistema y del aparato:

$$|s_n\rangle |a_r\rangle \rightarrow |s_n\rangle |a_n\rangle \quad (1.1)$$

Debido a la linealidad de la evolución del estado, si se comienza con una superposición de estados  $|s_n\rangle$  el estado final es un estado enredado:

$$\sum_n c_n |s_n\rangle |a_r\rangle \rightarrow \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle \quad (1.2)$$

Dicha interacción permite realizar el propósito del aparato, ya que si el estado del aparato es  $|a_n\rangle$ , el sistema se mide en el estado  $|s_n\rangle$ . Por esta razón se suele nombrar al aparato como puntero. Generalmente se dice que este formalismo representa una medida ideal ya que esta no cambia el estado del sistema, como muestra la Ec(1.2).

Es importante señalar cómo se describe el estado luego de una medida, ya que de suceder el colapso, este no debe estar representado por una superposición de estados sino que por una mezcla estadística. Trazando una analogía entre el esquema de Von Neumann y la conocida paradoja del gato de Schrödinger, el estado luego de la interacción entre el sistema (el átomo) y aparato (el gato) representa la superposición de alternativas *i)* átomo en estado base y gato muerto *y ii)* átomo excitado y gato vivo. Sin embargo, luego que se determina el estado del átomo hay dos posibilidades: el átomo decayó y el gato está muerto ó el átomo no decayó y el gato está vivo. Este es el denominado *problema de los resultados*.

Se suele decir que este esquema representa una *premedida*, ya que el estado resultante luego de la evolución Ec(1.2) tan sólo indica que el sistema evolucionó y se generó una correlación entre sistema y aparato pero no se determina un valor definitivo para la cantidad medida. Para indicar una posición específica del puntero debe suceder algún otro proceso físico o se debe trabajar dentro del marco de alguna interpretación alternativa, de otra forma se está barriendo el problema debajo de la alfombra. Es aquí donde un aparato macroscópico toma importancia, ya que a pesar que no se indica cómo se mide el puntero, no hay duda como hacerlo en una teoría clásica.

Por otro lado la Ec(1.2) no determina precisamente qué bases deben utilizarse, ya que combinaciones de estados en distintas bases de  $\mathcal{SA}$  expresan el mismo estado. Este es el denominado *problema de la base puntero*. La primera condición que puede imaginarse es la de poder distinguir los resultados de la medida, para esto es necesario que los estados del aparato sean distinguibles. No

solo deben ser distinguibles, sino que también compatibles con la medida que se desee realizar. Por ejemplo, la ambigüedad no puede ser tal que se puedan medir dos observables incompatibles simultáneamente. Luego, la medida debe correlacionar ciertos estados del sistema con algunos estados determinados del aparato.

Un ejemplo fácil de imaginar es considerar un estado cuántico que interactúa con un baño de partículas, por ejemplo polvo o radiación de fondo de microondas [2] [5]. La interacción del sistema con las partículas es tal que éstas cambian su estado de acuerdo a la posición del sistema. Representando al sistema por su matriz densidad en la representación de posición  $\rho(\vec{x}, \vec{x}')$  puede mostrarse que el baño de partículas “mide” la posición del mismo.<sup>1</sup> De esta forma, la interacción que depende de la posición de la partícula termina seleccionando a la base de posición para realizar la medida.

En resumen, el problema de la medida, dividido en el problema de los resultados y el problema de la base puntero, se relaciona íntimamente con la transición cuántico-clásica. En la primera, los estados son descriptos por superposiciones lineales mientras en la contraparte clásica solo algunos estados con características muy bien definidas, como por ejemplo posición y momento, son admitidos [3].

### 1.1.3. Modelo de puntero

Es importante para el desarrollo del resto del trabajo encontrar la forma de describir de forma realista esta interacción. En esta sección se presenta un ejemplo que pretende esclarecer e introducir explícitamente un modelo de puntero como el descrito anteriormente.

Se desea medir un observable físico  $\hat{O}$  sobre un sistema que evoluciona con un Hamiltoniano sin perturbar  $\hat{H}_0$  mediante un puntero que es representado por una partícula libre de masa  $m$ . La intención es preparar al puntero en un estado inicial tal que al encender la interacción con el aparato su posición indique el valor medido de  $\hat{O}$ . Para registrar un cambio en la posición del puntero que refleje el valor medido, el Hamiltoniano de interacción debe *trasladarlo*. El generador de las traslaciones en posición asociado a una partícula descrita por coordenadas  $(Q, P)$  es proporcional al operador momento de la partícula  $\hat{P}$ . Por este motivo se elegirá un Hamiltoniano de interacción proporcional al momento del puntero.

El Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{\hat{P}^2}{2m} + g\hat{O}\hat{P} \quad (1.3)$$

es un candidato para describir el proceso de medida. El último término es el que va a correlacionar la posición del puntero con los posibles valores del observable  $\hat{O}$ . La constante de acoplamiento  $g$  puede indicar cuándo se enciende o apaga la interacción. Si se desea medir la cantidad en determinado instante, el acoplamiento debe expresar localización de la interacción. Por ejemplo, el acoplamiento es una Gaussiana centrada en el momento de la medición.

Vale puntualizar que en el modelo de Von Neumann donde el sistema no sufre cambio alguno se debe pedir que  $[\hat{O}, \hat{H}_0] = 0$ . Una alternativa a esta expresión

<sup>1</sup>La interacción del tipo Von Neumann no solo es útil para estudiar procesos de medidas, sino que también para describir numerosas interacciones.

es que la evolución libre del sistema sea mucho más lenta que la interacción con el puntero. También suele tomarse la masa del puntero suficientemente grande de forma tal que la dispersión del paquete de onda que lo representa no sea muy grande al instante de la medida.

De este modo, el operador de evolución sobre el sistema+aparato debido a dicha interacción es aproximadamente  $\hat{U} \simeq e^{-i\tilde{g}\hat{O}\hat{P}t}$ , siendo  $\tilde{g}$  el valor medio de la función de acoplamiento durante la medida. Como se mencionó anteriormente las bases en las que se representan las interacciones son determinantes para el desarrollo del proceso de medida. En la base  $|s_n\rangle$  de autovectores del operador  $\hat{O}$  el operador  $\hat{U}$  es

$$\hat{U} \simeq \sum_n |s_n\rangle e^{-i\tilde{g}o_n\hat{P}t} \langle s_n| \quad (1.4)$$

El término de evolución del puntero asociado a cada valor propio  $o_n$  es básicamente una traslación sobre la posición del puntero<sup>2</sup> en una magnitud proporcional al valor propio. Si el puntero se encuentra en un estado inicial localizado  $\psi(Q)$ , luego de la interacción se traslada al estado  $\psi(Q - \tilde{g}o_n t)$ . El estado inicial del sistema conjunto

$$\Psi_i = \sum_n a_n |s_n\rangle \psi(Q) \quad (1.5)$$

evolucionará en el estado

$$\Psi_f \simeq \sum_n a_n |s_n\rangle \psi(Q - \tilde{g}o_n t) \quad (1.6)$$

Si la dispersión del paquete del puntero al tiempo  $t$  es menor que la mínima separación de los valores  $\tilde{g}o_n t$  el puntero puede resolver los distintos estados del sistema y una observación del primero prepara un estado del último.

Nótese que el modelo presentado anteriormente es básicamente el experimento de Stern-Gerlach donde una partícula con momento dipolar magnético  $\mu\vec{\sigma}$  se encuentra en un campo magnético inhomogéneo  $B \propto z$  por lo que el Hamiltoniano de interacción es  $\hat{H}_{int} = -\vec{\mu}\vec{B} = -g\hat{z}\hat{\sigma}_z$ . En este caso el puntero está representado por el momento de la partícula y se mide el observable  $\hat{\sigma}_z$  [6].

#### 1.1.4. Una alternativa práctica al problema de la medida

La interacción entre el sistema y el aparato en el modelo de Von Neumann se suele reducir al estudio de la interacción de un sistema macroscópico y uno microscópico. La interpretación ortodoxa de Copenhague pone una frontera entre el mundo macroscópico y microscópico, pero no está clara y definitivamente determinada. Igualmente, la identificación entre un sistema macroscópico y uno clásico no es del todo certera. No solo desde el punto de vista teórico (ver [7]) sino que también en numerosos experimentos donde se pueden observar las características cuánticas de sistemas macroscópicas (ver por ejemplo [8] y sus referencias).

El problema de la medida presentado anteriormente puede ser parcialmente resuelto si se considera la interacción del ambiente con el aparato de medida.

---

<sup>2</sup>El operador de traslación por una cantidad  $a$  es  $e^{-ia\hat{P}}$  ( $\hbar = 1$ )

Este es el denominado programa de la decoherencia, inicialmente estudiado por Zurek, Zeh y Joos y algunos otros entre los 70 y 80s [9]. El efecto de dicha interacción correlaciona al estado del ambiente con los del aparato de forma similar a la presentada anteriormente. En particular, si el ambiente comienza en un estado genérico  $|e_0\rangle$ , la interacción entre el aparato y el ambiente modifica las expresiones anteriores de la siguiente forma:

$$\left( \sum_n c_n |s_n\rangle \right) |a_r\rangle |e_0\rangle \rightarrow \left( \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle \right) |e_0\rangle \rightarrow \sum_n c_n |s_n\rangle |a_n\rangle |e_n\rangle \quad (1.7)$$

Como se observa en este caso, la interacción del aparato con el ambiente no destruye las correlaciones del sistema con el puntero. Este requerimiento especial es el que termina definiendo la base del puntero que es lo suficientemente robusta ante la acción del ambiente<sup>3</sup>.

El estado final del conjunto sistema-aparato-ambiente ( $\mathcal{SAE}$ ) no representa el estado del cual un observador puede extraer información de la medida, ya que generalmente los estados del ambiente son prácticamente inobservables. Consisten de muchos grados de libertad, lo cual dificulta obtener la información completa sobre su estado. Para todos los efectos prácticos, su evolución es prácticamente irreversible. En este caso el observador sólo tiene información del sistema-aparato, representado por el estado luego de realizar la traza parcial sobre los estados del ambiente. Como los estados del ambiente son generalmente cuasiortogonales a medida que el tiempo aumenta ( $\langle e_n | e_m \rangle \approx \delta_{nm}$ ), el estado de  $\mathcal{SA}$  luego de realizar la traza parcial sobre el ambiente es

$$\rho_{SA} \approx \sum_n |c_n|^2 |s_n\rangle |a_n\rangle \langle s_n| \langle a_n| \quad (1.8)$$

representando un estado muy cercano a una mezcla estadística. Esto indica que el sistema-puntero se encuentra con cierta probabilidad en el estado  $|s_n\rangle |a_n\rangle$  pero se desconoce en cual precisamente. El estado Ec(1.8) no presenta términos de interferencia entre los distintos estados.

La forma de esta matriz densidad Ec(1.8) es similar a la esperada si la función de onda colapsara, donde la matriz densidad producto del colapso está representada por una mezcla estadística exacta. Vale la pena cuestionar si estos estados llevan o no, y con que límites, a las mismas predicciones físicas, que es en definitiva el valor del estado cuántico.

Esta diferencia respecto a que sea un estado aproximado indica que la información del estado del ambiente y las correlaciones generadas se encuentran en el sistema más grande que incluye al ambiente. En principio el estado en el espacio de estados del sistema conjunto  $\mathcal{SAE}$  aún es representado por una superposición de estados, donde las coherencias entre ellos aún están presentes. Esto se debe a que la evolución total es completamente unitaria.

En uno de los primeros trabajos sobre decoherencia de Zurek [10] se presenta un modelo de espines interactuantes que muestra el efecto de deslocalización de las coherencias del sistema microscópico en uno macroscópico debido a cierta interacción. Este modelo señala que el sistema se encuentra la mayoría del tiempo en una cuasimezcla estadística, donde los términos de interferencia son

<sup>3</sup>Esta condición se suele denominar regla de superselección y básicamente selecciona la base que satisface la condición  $[|a_n\rangle \langle a_n|, \hat{H}^{\mathcal{AE}}] = 0$  [3]

casi nulos. Pero también muestra que existen tiempos de recurrencia, que pueden ser extremadamente largos dependiendo del sistema y sus condiciones iniciales, donde el sistema exhibe nuevamente las mismas coherencias entre sus estados.

Esta es una de las críticas que recibe la solución del problema de la medida dada por el programa de la decoherencia. Es decir, la información de las coherencias están siempre presentes en el sistema completo. Otra de las críticas se refiere a que el sistema final refleja una superposición de estados como en el proceso de premedida, por lo que no se genera una medición [3].

Una forma de distinguir entre estos estados que aparentan ser una mezcla estadística y una verdadera mezcla estadística producto del colapso, es estudiar los denominados observables globales propuestos por d'Espagnat [11]. Estos observables actúan sobre el sistema y el ambiente. Su valor medio será distinto dependiendo del estado real del sistema, por lo que es posible determinar si el estado se encuentra en una mezcla estadística perfecta o aproximada. La principal desventaja de los observables reales es que no es sencillo encontrarlos, no hay ninguna receta y en general se requiere un conocimiento adecuado del ambiente.

Estas críticas demuestran que la solución del programa de la decoherencia ambiental no puede solucionar los problemas de la medida. Sin embargo ofrece una solución práctica en muchos casos, pero no a escala fundamental.

## 1.2. El papel del tiempo en mecánica cuántica

La importancia del tiempo en la formulación de la mecánica cuántica se remonta a los primeros trabajos que construyeron esta teoría. En un principio la idea de Bohr de “saltos” entre órbitas atómicas fue criticado por Slater y Rutherford ya que no daba ninguna idea del tiempo para estas transiciones y no podía explicar el ensanchamiento de las líneas espectrales observados hasta el momento [12]. Varias propuestas trataron de, enfocados en este aspecto, entender el rol del tiempo en estos procesos. Por ejemplo, Einstein propuso estudiar las transiciones atómicas desde el punto de vista estadístico. Pero Pauli indicó luego que no había un mecanismo claro para indicar los tiempos en la transición.

A medida que la teoría desarrollaba su formalismo quedó claro que cada observable físico debe ser representado como un operador actuando en determinado espacio de funciones. Existen sistemas físicos en los que es de interés preguntar por los tiempos característicos del sistema, por ejemplo, la determinación de la vida media de cierta sustancia. Otra de las particularidades del tiempo reside en su papel en la ecuación de Schrödinger, donde aparece como un parámetro en lugar de un operador, como lo son la posición o el Hamiltoniano del sistema. Con el objetivo de extender la teoría al régimen relativista, es importante saber si se puede de alguna forma colocar al mismo nivel las coordenadas espaciales y la coordenada temporal. Ante estas posibilidades surge inmediatamente la pregunta: *¿Puede representarse el tiempo mediante un cierto operador  $\hat{T}$  que satisfaga los requerimientos de la teoría?*

Fue Pauli en 1933 quien trajo a la luz un aspecto fundamental de este problema [13]. Como plantea Gottfried [14], se puede suponer que existe un observable autoadjunto  $\hat{T}$  cuyos valores propios son tiempos y es el operador

conjugado a la energía, es decir

$$[\hat{H}, \hat{T}] = i\hbar \quad (1.9)$$

Es conocido [1] que si un operador tiene un espectro continuo su operador conjugado también debe tenerlo: dado un autoestado del Hamiltoniano  $|E'\rangle$ , el operador  $\hat{U}_E = \exp(-iE\hat{T}/\hbar)$  traslada dicho autoestado a  $|E' + E\rangle$ . Por lo tanto, el Hamiltoniano tiene un espectro continuo que se extiende en toda la recta real, impidiendo la existencia de un sistema cuyo Hamiltoniano sea acotado. La mayoría de los sistemas que conocidos y que se estudian poseen Hamiltonianos acotados, parcialmente acotados o hasta discretos, por lo que tal operador temporal no puede ser admitido por la teoría. Más adelante se exhibirá un ejemplo en el que el operador tiempo no es continuo, sino discreto.<sup>4</sup>

Esta observación parece arruinar por completo la posibilidad de introducir un operador tiempo en mecánica cuántica. Actualmente, este sigue siendo un tema de investigación fundamentalmente en el marco del denominado problema del *tiempo de arribo* pero también en la interpretación y validez del principio de incertidumbre energía-tiempo y aplicaciones más concretas como los relojes atómicos. Algunas referencias pueden encontrarse en el siguiente ítem bibliográfico [16].

Una posible solución a este problema es introducir una variable dinámica, un puntero, que funcione como reloj para el sistema que desea estudiarse y evitar así cuantizar el tiempo  $t$ . Se incorpora un sistema físico que determina una escala temporal para caracterizar el proceso físico a describir. Pero una vez planteada esta posibilidad surgen más incógnitas. *¿Se introducen errores en la medida del tiempo?, ¿qué significado tienen estos errores y cómo afectan al sistema físico a estudiar?*. Parece claro que si el tiempo es determinado por una variable dinámica, por ejemplo la posición de una partícula libre o de un oscilador, dicha variable puede ser determinada con cierta incertidumbre que no puede eliminarse. *¿Tiene esto alguna influencia sobre el sistema? ¿cuál es el mejor reloj?, ¿puede eliminarse este efecto?*

## 1.3. Medida del tiempo con relojes cuánticos

### 1.3.1. Reloj de Peres

Ante la posibilidad de elegir un sistema como reloj se presentan varias alternativas o modelos de relojes en cuanto a su evolución como a su acoplamiento con el sistema. El primer modelo data de 1958, propuesto por Salecker y Wigner [17] quienes investigaron cómo el uso de un reloj microscópico expresa las limitaciones cuánticas para determinar distancias espacio temporales. Este modelo fue utilizado por otros autores, pero fue Asher Peres quien modificó el modelo ideado por Wigner y Salecker para investigar cómo se afecta al sistema al usar un reloj que interactúa con el mismo [18] [19]. A continuación se presentará el modelo utilizado por Peres y un ejemplo para ilustrar cómo se incorpora el reloj al sistema.

Peres comienza su artículo indicando que un reloj es “un sistema dinámico que pasa por una sucesión de estados a intervalos regulares de tiempo”. Esto

<sup>4</sup>Existen varios detalles matemáticos que pueden alterar la formulación y respuesta del resultado anterior. Por más detalles consultar [15]

indica que el reloj es una variable más del sistema, un puntero al cual se relacionan las otras variables. El ejemplo clásico más directo es un rotor con velocidad angular constante descrito por las variables canónicas  $\{\theta, p_\theta\}$  y Hamiltoniano  $H_\theta = \omega p_\theta$  siendo  $\omega$  constante. Debido a que la coordenada  $\theta$  depende linealmente del tiempo  $t$  es inmediato correlacionar la variable  $\theta$  con el tiempo y utilizar la primera como reloj.

A la hora de cuantizar este modelo, se deben asociar a las variables mencionadas operadores cuánticos. Por lo tanto, la determinación de la variable asociada  $\hat{\theta}$  tendrá determinada incertidumbre. Debe notarse que la coordenada  $\theta$  se define en el intervalo  $[0, 2\pi]$  por lo que el espacio de Hilbert del sistema son funciones de cuadrado integrable y periódicas de periodo  $2\pi$ . Para cuantizar el sistema se toma el Hamiltoniano

$$\hat{H}_\theta = \omega \hat{p}_\theta = -i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial\theta}$$

cuyos estados propios son el conjunto de funciones

$$u_m(\theta) = \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.10)$$

con autovalores  $m\hbar\omega$ . Cualquier función del espacio de Hilbert puede descomponerse en estas autofunciones

$$\psi(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m u_m(\theta) \quad (1.11)$$

Nótese sin embargo que no existe el operador  $\hat{\theta}$ , ya que  $\theta\psi(\theta)$  no es periódica.

La interpretación del operador  $\hat{p}_\theta$  es simplemente la de un momento angular, por lo que resulta natural restringir la suma anterior a valores de  $m$  acotados, es decir  $m = -j, -j+1, \dots, j$ . Los estados del reloj que se desea describir deben ser estados localizados en la variable  $\theta$ , asociados con posiciones bien determinadas del reloj. Para construir estados localizados en la variable  $\theta$  se utilizan estados que deslocalizan máximamente a la variable  $\hat{p}_\theta$ , es decir

$$v_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j u_m(\theta) \quad (1.12)$$

En virtud de la Ec(1.10) la suma geométrica en la Ec(1.12) es

$$v_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \quad (1.13)$$

donde por simplicidad  $N = 2j + 1$ . Pueden construirse otros estados localizados en las restantes  $N - 1$  posiciones:

$$v_\mu(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=-j}^j e^{-i\frac{2\pi\mu m}{N}} u_m(\theta) \quad (1.14)$$

donde puede verificarse que

$$v_\mu(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{\text{sen}\left(\frac{N}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{N}\mu\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\pi}{N}\mu\right)\right)} \quad (1.15)$$

que representan estados idénticos a  $v_0(\theta)$  centrados en las posiciones  $\theta_\mu = \frac{2\pi}{N}\mu$ . Peres nombra a estos estados como estados dial. Estos estados están centrados en  $\theta_\mu$  cuyo ancho es  $\mathcal{O}(1/N)$ , por lo que estados de sistemas con valores grandes de  $j$ , determinarán de forma más precisa el valor de la coordenada  $\theta$ <sup>5</sup>.

La dinámica de éstos estados está determinada por la de los autoestados  $u_m$

$$e^{-i\hat{H}_\theta t/\hbar}u_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im(\theta-\omega t)} = u_m(\theta - \omega t) \quad (1.16)$$

por lo que resulta inmediato verificar que

$$e^{-i\hat{H}_\theta\tau/\hbar}v_\mu = v_{\mu+1} \quad (1.17)$$

donde  $\tau = \frac{2\pi}{N\omega}$ .<sup>6</sup> Esto indica que si el estado inicial del sistema es, digamos,  $v_0$ , el sistema pasa por los distintos estados  $v_\mu$  a intervalos regulares de tiempo  $\tau$ . Este reloj, como indica el título de esta sección, se conoce como el reloj de Peres.

En base a estos resultados, Peres define al operador tiempo del reloj como

$$\hat{T}_R = \tau \sum_{\mu} \mu \hat{P}_\mu \quad (1.18)$$

con  $\hat{P}_\mu$  los proyectores sobre los estados  $v_\mu(\theta)$ . Puede verificarse que este operador no satisface la relación canónica de conmutación con el Hamiltoniano del sistema, es decir  $[\hat{T}_R, \hat{H}_\theta] \neq i\hbar$ , como se espera en vista del espectro acotado de energías.

El reloj de Peres es un objeto puramente no clásico, hace falta usar todos los vectores propios del Hamiltoniano para construir los estados dial. Calculando la incertidumbre del operador  $\hat{T}_R$  sobre los estados dial  $v_\mu(\theta)$  se verifica que  $\langle \hat{H}_\theta \rangle = 0$ , debido a que son una superposición “equilibrada” (es decir  $|a_m| = |a_k|$ ) de los autoestados de energía. Además se cumple que

$$\langle \hat{H}_\theta^2 \rangle = \frac{\hbar^2\omega^2}{N} \sum_{\mu} \mu^2 \simeq \frac{\hbar^2\omega^2 j^2}{3}$$

para valores grandes de  $j$ . El cálculo de la dispersión de la energía del reloj es directo:

$$\Delta \hat{H}_\theta \simeq \frac{j\hbar\omega}{\sqrt{3}} \simeq \hbar/\tau \quad (1.19)$$

En este caso, la dispersión sobre los estados dial es casi tan grande como la máxima energía del reloj. Este resultado es característico de los estados no clásicos. La ventaja de este reloj ciertamente reside en la posibilidad de determinar con cierta precisión valores del “tiempo”, lo que habilita a usarlo cuando se desea “apagar”, “encender” o controlar ciertas interacciones con el sistema.

<sup>5</sup>Si se quiere determinar la incertidumbre  $\Delta\hat{\theta}$  debe redefinirse la expresión  $\theta^n \text{sen}(a\theta)$ . Los detalles se pueden encontrar en [18], donde se demuestra que la varianza de esta variable es un poco más grande a lo esperado, ya que es de orden  $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ .

<sup>6</sup>Debe interpretarse la Ec(1.17) con sumas que son de módulo  $N$

### 1.3.2. Medida del tiempo de vuelo

A continuación se presentará un ejemplo sencillo del formalismo desarrollado antes. Peres describe un modelo muy simple de interacción entre el reloj y el sistema que pretende determinar el tiempo de vuelo de una partícula entre dos posiciones fijas.

Cuando se establece esta interacción, el sistema y el reloj intercambian energía, lo que en principio modifica ambos estados. Es de sumo interés en el curso de este trabajo estudiar fundamentalmente el efecto de este tipo de interacciones en el reloj.

El problema ideado por Peres es estudiar el tiempo que permanece una partícula en una determinada región. Para esto, lo más sencillo el reloj de Peres como cronómetro, es decir que se prenda y apague cuando la partícula entra y sale de dicha región. Se supone que el sistema es una partícula libre con coordenadas  $\{x, p\}$  y que la región de interés es el intervalo  $[0, d]$ . El Hamiltoniano que describe al sistema+reloj es

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_{SR} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + g(\hat{x})\hat{H}_R \quad (1.20)$$

siendo  $\hat{H}_R = \omega\hat{p}_\theta$  como en el reloj de Peres.

La función  $g(x)$  determina el acoplamiento entre el sistema y el reloj. En este caso si se desea utilizar un cronómetro puede tomarse la función anterior como  $g(x) = \text{H}(x)\text{H}(d-x)$  donde  $\text{H}(x)$  es la función escalón de Heaviside. Por otro lado se considera que el reloj se inicia en el estado dial  $v_0$  y el estado del sistema es una onda plana con energía  $E$  y vector de onda asociado  $k$ :

$$e^{ikx}v_0 \quad (1.21)$$

Para cada estado  $u_n$ , el Hamiltoniano de interacción crea una barrera de potencial de altura  $n\hbar\omega$  y ancho  $d$  para el reloj. Fuera de la barrera el vector de onda del sistema  $k$  es  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  donde  $E$  es la energía del sistema. En la barrera el vector de onda  $k'_n$  es  $k'_n = \sqrt{\frac{2m(E-n\hbar\omega)}{\hbar^2}}$ . Por lo que el cambio de fase<sup>7</sup> es

$$\phi_n = (k'_n - k)d \simeq -n\omega d \sqrt{\frac{m}{2E}} \quad (1.22)$$

donde se identifica el factor  $d\sqrt{\frac{m}{2E}}$  como el tiempo de vuelo clásico  $T_{cl}$  de una partícula con energía  $E$ .

Luego, el estado final del sistema

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikx} e^{i\phi_n} u_n \simeq e^{ikx} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{in(\theta - \omega T_{cl})} \quad (1.23)$$

El resultado muestra que la posición del puntero (reloj) se desplaza en una cantidad  $\omega T_{cl}$  por lo que su posición final determina el tiempo de vuelo. La única hipótesis ha sido que la perturbación es pequeña  $E \gg n\hbar\omega$ . La barrera de potencial puede ser a lo sumo del orden de la dispersión de la energía del reloj  $\hbar/\tau$  Ec(1.19), por lo que la condición anterior es  $E \gg \hbar/\tau$ .

<sup>7</sup>Supondremos que la perturbación es pequeña, es decir  $E \gg n\hbar\omega$ . Como consecuencia, el coeficiente de reflexión de la barrera es casi nulo

También es importante señalar que si se desea un reloj que resuelva el tiempo de vuelo, el tiempo total debe ser mucho mayor que la resolución del reloj:  $T_{cl} \gg \tau$ . Junto a la condición de validez del régimen perturbativo, debe satisfacerse que  $d \gg 1/k$ , es decir, la distancia de vuelo debe ser mayor que la longitud de onda de de Broglie de la partícula.

Esto limita la precisión con la que se puede determinar la velocidad del sistema, ya que el intervalo de tiempo mínimo del sistema está acotado por la incertidumbre tiempo-energía.

Otro de los problemas estudiados por Peres incluye la posibilidad de controlar la evolución de un sistema usando sus relojes. En general, la conclusión de Peres es que usar relojes cuánticos perturba al sistema y al reloj [19]. Peres realiza una observación muy interesante. Plantea que en la ecuación de Schrödinger la derivada está relacionada con la resolución del reloj, ya que implica un límite matemático que físicamente no puede realizarse con precisión infinita. Peres concluye reflexionando que la ecuación de Schrödinger es una idealización clásica que operacionalmente está mal definida en general: “el enfoque Hamiltoniano en la mecánica cuántica lleva su propia semilla de desaparición” [19].

## Capítulo 2

# Relojes reales

En esta sección se presentará un resumen de los resultados obtenidos por Gambini, Pullin y Porto (GPP en adelante) en cuanto a la formulación de la mecánica cuántica en términos de relojes reales. Para esto, se comenzará con la formulación del denominado problema del tiempo para luego desarrollar la solución propuesta por GPP que resuelve el problema de la medida de forma fundamental.

### 2.1. Problema del tiempo

#### 2.1.1. Sistemas totalmente vinculados, un ejemplo

A lo largo del capítulo anterior las ideas de medidas ideales y relojes cuánticos fueron presentadas. Pero, ¿cómo se relacionan ellas inmediatamente?. Primero se formulará un problema distinto, el denominado *problema del tiempo* que, en última instancia, requiere de ambas herramientas para entenderlo y encontrar una solución.

¿Qué sucede si se intenta describir un sistema clásico en términos de un reloj cómo los presentados anteriormente?. Es decir, en lugar de utilizar el parámetro tiempo ideal  $t$ , usar otro sistema que de alguna forma lo imite. Se busca un parámetro  $T$ , función de  $t$ , que permita describir la evolución física del sistema de manera equivalente, mediante una transformación entre los parámetros.

El sistema más sencillo para estudiar este caso es una partícula libre de masa  $m$ , aunque los razonamientos son análogos para cualquier sistema genérico [20] [21]. Si la partícula se describe mediante una coordenada  $q$  la acción del sistema escrita en términos de  $T$  está dada por

$$S[q] = \int dT \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{dT} \right)^2 \quad (2.1)$$

Bajo la transformación  $t \rightarrow T(t)$  la acción puede escribirse de la forma

$$S[q, T] = \int dt \dot{T} \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{dt} \frac{dt}{dT} \right)^2 = \int dt \frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{T}} \quad (2.2)$$

donde el punto representa la derivación respecto a  $t$

Se suele decir que la acción es invariante por reparametrizaciones, debido a que cualquier cambio de la forma  $t \rightarrow f(t)$  preserva la estructura de la Ec(2.2).

La acción es ahora una funcional de dos entradas  $T(t)$  y  $q(t)$  que representan las coordenadas en el espacio de configuraciones. Las ecuaciones de Lagrange en este sistema son

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}}{\dot{T}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{\dot{q}}{\dot{T}} \right)^2 \right) &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

y los momentos están definidos por

$$\begin{aligned}p_q &= m \frac{\dot{q}}{\dot{T}} \\ p_T &= -\frac{m}{2} \left( \frac{\dot{q}}{\dot{T}} \right)^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

ambos constantes en vista de las Ec(2.3).

Una característica importante es que una vez extendido el espacio de configuraciones el sistema satisface un vínculo  $\mathcal{C} = 0$  con

$$\mathcal{C}(q, p_q, T, p_T) = p_T + \frac{p_q^2}{2m}\tag{2.5}$$

Este vínculo es característico de los denominados sistemas totalmente vinculados o sistemas totalmente covariantes donde el vínculo asume la forma

$$\mathcal{C}(q, p_q, T, p_T) = p_T + H_0(q, p_q)\tag{2.6}$$

El Hamiltoniano resultante luego de sustituir los momentos hallados anteriormente es

$$H = p_T \dot{T} + p_q \dot{q} - \frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{T}} = 0\tag{2.7}$$

Esta igualdad también es común a todos los sistemas totalmente vinculados. Este parece un ejemplo muy sencillo, pero lo importante es que puede generalizarse a sistemas invariantes por reparametrizaciones. Por ejemplo, en la teoría de la relatividad general los sistemas son invariantes ante transformaciones generales de coordenadas del espacio-tiempo, por lo tanto invariantes ante reparametrizaciones y sujetos a  $H = 0$ .

La Ec(2.7) implica, en principio, que el sistema no evoluciona. Sin embargo, esto no es del todo cierto y debe interpretarse adecuadamente. En esta teoría se puede definir un flujo respecto al vínculo  $\mathcal{C}$  que es una cantidad conservada del sistema y genera una simetría<sup>1</sup>. Por lo tanto no se obtiene una evolución en la coordenada temporal pero si se puede evolucionar respecto a otras coordenadas. Esta es la forma usual de definir la evolución de los observables físicos de un sistema en relatividad general, donde ellos conmutan con los vínculos y son invariantes bajo las simetrías del sistema.

<sup>1</sup>Por más detalles el lector interesado puede recurrir a los textos de Henneaux y Teitelboim [21] o Gambini y Pullin [20]

En el caso de sistemas vinculados, ya que los vínculos son responsables de generar la evolución del sistema, se suele definir el Hamiltoniano total como combinación de los vínculos por multiplicadores de Lagrange. En este caso  $H_{tot} = N(t)\mathcal{C}(q, p_q, T, p_T)$ , que determina las ecuaciones de evolución para el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \{q, H_{tot}\} = N \frac{p_q}{m} & \frac{dp_q}{dt} &= 0 \\ \frac{dT}{dt} &= \{T, H_{tot}\} = N & \frac{dp_T}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Esta discusión tiene una conclusión muy importante. Si un sistema es invariante bajo reparametrizaciones, la elección de la o las coordenadas que tomarán el papel del reloj es arbitraria. Por lo tanto, las preguntas o predicciones que pueden formularse deben ser relacionales, es decir, deben hacer referencia a un cierto reloj. Por ejemplo, “¿cuántos átomos están presentes en determinado volumen cuando  $T = 2,22ms$ ?”.

### 2.1.2. Posibles soluciones al problema del tiempo

El problema mencionado anteriormente es el denominado *problema del tiempo*. El Hamiltoniano de un sistema está dado por una combinación de los vínculos, lo que genera que el sistema no evolucione respecto al tiempo ideal.

Cuando se cuantiza un sistema vinculado, se deben tener ciertas precauciones. Ahora no solo habrán cantidades, operadores, sino que también habrán estados. Los estados del sistema que están bien definidos son aquellos que son anulados por los vínculos. Estos estados definen el denominado espacio de estados físicos. Cuando se aplica un operador sobre los estados, los nuevos estados deben pertenecer al estado físico también. Como consecuencia, los únicos operadores que satisfacen esta condición son aquellos que conmutan con los vínculos y por lo tanto son constantes del movimiento. El problema del tiempo también se manifiesta en mecánica cuántica.

A continuación se presentarán dos posibles salidas para este problema, basado en el desarrollo presentado en el artículo de Gambini et al [22]. A partir de las críticas que recaen sobre estas propuestas, se resume la propuesta realizada por GPP que reúne características de ambas soluciones anteriores.

#### Constantes que evolucionan

El formalismo de las constantes que evolucionan finalmente desarrollado por Rovelli [23] se basa en seguir considerando al parámetro no físico  $t$  para definir una familia de observables que simulan la evolución de las coordenadas. Dado un sistema con coordenadas  $(q_i, p_i)$  se construyen ciertos observables que reproducen el valor de las coordenadas cuando una de ellas, elegida previamente, adopta el valor del parámetro  $t$ . En otras palabras, se construyen las cantidades, denominados observables de Dirac,  $Q_i(t, q_1, p_1, q_2, p_2, \dots)$  que satisfacen<sup>2</sup>:

1.  $Q_i(t = q_1) = q_i$
2.  $\{Q_i, \mathcal{C}\} = 0$

---

<sup>2</sup>Los  $Q_i$  pueden referirse a momentos del sistema con algunas exigencias adicionales

Estas parecen evolucionar de alguna forma en función de  $q_1$ .

A partir del ejemplo discutido en la sección anterior se puede avanzar en la estrategia para determinar las constantes que evolucionan en ese ejemplo bajo el vínculo Ec(2.5). Los observables asociados a las condiciones iniciales son  $q - \frac{p_q T}{m}$  y  $p_q$ . Ambos observables tienen corchete de Poisson nulo con el vínculo. La constante que evoluciona se define a partir de las condiciones iniciales, por ejemplo

$$Q_1(t) = q - \frac{p_q T}{m} + \frac{p_q t}{m} \quad (2.9)$$

De esta forma si se elige la variable  $T$  representando al reloj se obtiene  $Q_1(t = T) = q$

Las críticas importantes a esta propuesta se basan en el papel que cumple el parámetro  $t$ . La teoría todavía sigue necesitando de la observación de  $t$ . Si se cuantiza la teoría también existen problemas ya que se impone la condición  $t = q_1$ , donde  $q_1$  ahora representa un operador cuántico y  $t$  un parámetro clásico.

### Probabilidades condicionales

Otra alternativa es expresar las posibles preguntas que pueden realizarse en forma de probabilidades condicionales. Para esto Page y Wootters [24] propusieron promover todos los operadores a operadores cuánticos y elegir una de ellas como el reloj. Una vez realizada la elección, es posible determinar las probabilidades condicionales de que una variable tome cierto valor si la variable del reloj toma otro. Dado un observable  $\hat{Q}$  y un estado físico  $|\psi\rangle$  la probabilidad condicional de encontrar cierto valor  $Q_0$  cuando el valor de  $\hat{T}$  es  $T_0$  está dado por

$$P(Q = Q_0 | T = T_0) = \frac{\langle \psi | \hat{P}_{Q_0} \hat{P}_{T_0} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{P}_{T_0} | \psi \rangle} \quad (2.10)$$

donde los operadores  $\hat{P}$  representan proyectores sobre subespacios propios. Cabe señalar que los estados anteriores deben ser estados físicos.

El principal problema de este enfoque es que no puede elegirse ningún observable sobre el espacio físico que conmute con los vínculos y pueda representar un reloj, pues el operador no evolucionará. Los autores propusieron utilizar otro tipo de observables que no conmuten con los vínculos y a partir de los cuales se puedan establecer relaciones invariantes. Sin embargo estos cambios no son suficientes ya que el espacio físico no será invariante bajo la acción de estos operadores. Paradójicamente, se ha demostrado que los resultados obtenidos no son correctos, por ejemplo para una partícula el propagador es estático, indicando que la partícula no se propaga. Estos problemas técnicos dificultan el uso de este método para resolver el problema del tiempo.

### Una nueva solución

El problema del tiempo parece estar restringido a sistemas totalmente vinculados. Sin embargo, estos son sistemas frecuentes en la naturaleza. Sin ir más lejos, el universo como sistema es uno de ellos. Por lo tanto, encontrar una solución consistente al problema del tiempo es fundamental.

La solución a este problema está vinculada con la naturaleza del reloj dentro de la teoría, ya que en estos sistemas solo tiene sentido preguntarse por la

evolución de ciertos observables en función de otros, es decir de forma *relacional*. Las dos soluciones planteadas anteriormente tienen sus falencias y no permiten dar una respuesta cabal al problema. Pero tienen algunas características que son por demás deseadas. La solución propuesta por Gambini, Porto y Pullin ([25] [26] y sus referencias) combina las dos soluciones anteriores: calcular probabilidades condicionales para constantes que evolucionan.

## 2.2. Mecánica cuántica con relojes reales

En el primer capítulo de este trabajo se discutió el papel clásico del tiempo en la mecánica cuántica. Estudiando el problema del tiempo se planteó la posibilidad de tomar el tiempo del sistema representado por un grado de libertad del mismo. Pero esta situación requiere más estudio, debido a que si se cuantiza la teoría este grado de libertad estará asociado a una variable con fluctuaciones, que afectará y será afectada por el sistema y que eventualmente cambiará la forma de la evolución del mismo.

El problema comienza considerando un sistema  $\mathcal{S}$  y algún subconjunto de variables del sistema  $T(q, p)$  que funcionarán como reloj del mismo, imitando de alguna forma al parámetro temporal  $t$ . Por ejemplo, si se tratara de la proyección de una película,  $T$  puede representar qué cuadro se está proyectando en ese momento, si es un oscilador,  $T$  representa un número natural  $n$  y una fase  $\phi$  que indican la posición  $\phi$  en el ciclo  $n$ , o puede ser la posición de una partícula pesada que no se disperse demasiado.

El siguiente paso es cuantizar el sistema, promoviendo a las variables del sistema a operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert del sistema  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ . Por ahora toda la física del sistema sigue siendo expresada por el tiempo clásico  $t$ , pero a partir de ahora se intentará expresar su evolución en términos del operador  $\hat{T}$ .

Una vez identificados los observables que se desean estudiar  $O(q, p)$  se deben expresar las probabilidades condicionales del sistema en términos del reloj. Para esto debemos definir los proyectores del sistema. El proyector asociado a medir la variable  $\hat{T}$  en el intervalo  $I_{T_0, \Delta T} = [T_0 - \Delta T, T_0 + \Delta T]$  se define como<sup>3</sup>

$$\hat{P}_{T_0} = \int_{I_{T_0, \Delta T}} dT \sum_k |T, k, t\rangle \langle T, k, t| \quad (2.11)$$

donde  $k$  denota los valores propios de los operadores que forman el conjunto completo de observables junto a  $\hat{T}$ . Análogamente, la probabilidad de medir al observable  $\hat{O}$  en el intervalo  $I_{O_0, \Delta O} = [O_0 - \Delta O, O_0 + \Delta O]$  es

$$\hat{P}_{O_0} = \int_{I_{O_0, \Delta O}} dO \sum_j |O, j, t\rangle \langle O, j, t| \quad (2.12)$$

Es hora de encontrar una expresión para las probabilidades condicionales. En este caso se desea expresar la probabilidad de medir cierto valor  $O_0$  para el observable  $\hat{O}$  cuando el observable del reloj  $\hat{T}$  indique  $T_0$ . La definición de esta probabilidad debe ser aplicable y operacional. Debe ser posible ir a un laboratorio, realizar un conjunto de medidas e inferir estadísticamente

---

<sup>3</sup>Se asume un espectro continuo tanto para  $\hat{T}$  como para  $\hat{O}$

las probabilidades. Construyendo un ensamble de sistemas, copias del sistema original, se puede someter a cada uno de ellos a la misma interacción. Luego, se miden los valores de  $\hat{O}$  y  $\hat{T}$  para distintos valores del parámetro  $t$ . Los valores medidos para cada realización se computan y se registran aquellos que pertenecen a los intervalos  $I_{T_0, \Delta T}$  e  $I_{O_0, \Delta O}$ .

La distribución de probabilidades queda entonces definida como el número de estados contados en esos intervalos dividido por el número total de sistemas en el ensamble. Una expresión natural para esta cantidad debe seleccionar los intervalos, proyectando el estado en ellos por ejemplo, y deben considerar todos los posibles valores del parámetro  $t$  ya que se ignora la relación entre  $\hat{T}$  y  $t$ . La expresión propuesta por GPP<sup>4</sup> es

$$P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{O_0}(t) P_{T_0}(t) \rho_{SR} P_{T_0}(t))}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{T_0}(t) \rho_{SR})} \quad (2.13)$$

donde  $\rho_{SR}$  es el estado del sistema. La ventaja de esta expresión es que no depende del parámetro  $t$ , debido a que se integra sobre él por lo que no tiene ninguna relevancia medir  $t$ .

### 2.2.1. Sistema y reloj no interactuantes

La expresión anterior es la más general que puede derivarse en este formalismo. Para seguir avanzando es necesario realizar ahora alguna hipótesis adicional respecto al comportamiento del reloj y del sistema. Si se utiliza el reloj propuesto por Peres, estudiado en el capítulo anterior Sec(1.3), cualquier interacción con el sistema cambiará drásticamente su comportamiento y no será un reloj útil después, debido a que son estados puramente cuánticos y no son robustos. Por lo tanto, el reloj debe ser lo suficientemente robusto para no afectarse demasiado frente a una eventual medición. También, en principio, GPP optaron por un reloj que no interactuara con el sistema. El observador tiene acceso tanto al reloj como al sistema, por lo que en principio podría medir ambos.

Estos comentarios inducen a pensar en algún reloj semiclásico, cuyas fluctuaciones sean pequeñas para asemejarse al tiempo  $t$ . De esta forma el reloj sigue siendo bueno y los efectos sobre el sistema, si se describe en función del reloj  $T$ , serán pequeños, aunque significativos.

Se considera entonces que el sistema y el reloj no interactúan, por lo que puede tomarse el estado conjunto como el producto tensorial de ambos:  $\rho_{SR} = \rho_S \otimes \rho_R$ . También el operador de evolución del sistema conjunto puede escribirse como  $\hat{U}_{SR}(t) = \hat{U}_S(t) \otimes \hat{U}_R(t)$ . La Ec(2.13) reescrita bajo estas hipótesis es

$$P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr}_S (P_{O_0} \rho_S(t)) \text{Tr}_R (P_{T_0} \rho_R(t))}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr}_R (P_{T_0} \rho_R(t)) \text{Tr}_S (\rho_S(t))} \quad (2.14)$$

donde el subíndice en la operación traza corresponde a tomar en cuenta solo los grados de libertad del sistema considerado. Nótese que la dependencia en el parámetro  $t$  pasó al estado del sistema conjunto, utilizando las expresiones de evolución de observables y estados en la imagen de Heisenberg.

<sup>4</sup>Se trabajará en la representación de Heisenberg

La Ec(2.14) muestra que las probabilidades condicionales pueden factorizarse. Entre los términos se identifica la probabilidad de que el reloj indique  $T$  cuando el valor del parámetro es  $t$ :

$$P_t(T) = \frac{\text{Tr}_R(P_{T_0}\rho_R(t))}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr}_R(P_{T_0}\rho_R(t))} \quad (2.15)$$

Este término actúa como una probabilidad efectiva, que correlaciona los valores del parámetro  $t$  con los valores del observable  $\hat{T}$ . La probabilidad condicional queda expresada como

$$P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr}_S(P_{O_0}\rho_S(t)) P_t(T) \quad (2.16)$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr}_S(P_{O_0}P_t(T)\rho_S(t)) \\ &= \text{Tr}_S\left(P_{O_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt P_t(T)\rho_S(t)\right)\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta ecuación indica que todas las predicciones que pueden realizarse en base a las probabilidades condicionales dependen de una matriz densidad efectiva del sistema que considera a la variable del reloj como el tiempo físico del sistema:

$$\rho(T) = \int_{-\infty}^{\infty} dt P_t(T)\rho_S(t) \quad (2.18)$$

La interpretación de esta matriz densidad es inmediata. Al asumir un tiempo físico determinado por un reloj real, los valores del parámetro  $t$  se traducen en valores para el tiempo  $T$ . Debido a que el reloj es un sistema cuántico, posee cierta dispersión, que está asociada a la distribución  $P_t(T)$ .

Un reloj ideal permanecerá calibrado continuamente. Este es un reloj clásico, que no es afectado por nada. En ese caso es de esperar que la distribución de probabilidad satisfaga  $P_t(T) = \delta(T - t)$  y la evolución obtenida es unitaria. La evolución observada en sistemas microscópicos convenientemente aislados es unitaria, al menos con muy buena proximidad. Si un buen reloj real debe preservar una evolución cercana a la unitaria, la distribución  $P_t(T)$  debe ser muy cercana a la del caso ideal. Tiene sentido entonces considerar para los relojes semiclásicos una probabilidad de la forma

$$P_t(T) \approx n(T)\delta(T - t) - a(T)\delta'(T - t) + b(T)\delta''(T - t) + \dots \quad (2.19)$$

Los coeficientes arbitrarios se eligen para que representen una distribución de probabilidad con las características deseadas. Por ejemplo,  $n(T) = 1$  para que esté normalizada,  $a(T)$  indica la asimetría de la distribución por lo que si la sobrestimación es igual a la subestación del parámetro  $t$  se puede tomar  $a(T) = 0$ . El coeficiente  $b(T)$  se asocia al ancho de la distribución. Es natural pensar que las fluctuaciones del reloj deben aumentar este ancho, entonces  $b(T) > 0$ . Utilizando esta expresión en la Ec(2.18) y recordando que  $\delta^n(T - t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}$  evaluada en  $T$  se obtiene<sup>5</sup>

$$\rho(T) \approx \rho_S(T) - b(T) [H_S, [H_S, \rho_S(T)]] \quad (2.20)$$

<sup>5</sup>También señalar que en la representación de Heisenberg  $\frac{d}{dt} = i[H, \ ]$

Por lo tanto la evolución de la matriz efectiva  $\rho(T)$  en términos del parámetro  $T$  se obtiene derivando la ecuación anterior respecto a  $T$ :

$$\frac{\partial \rho(T)}{\partial T} = i [\rho(T), H_S] - \sigma(T) [H_S, [\rho(T), H_S]] \quad (2.21)$$

donde se define  $\sigma(T) = \frac{\partial b(T)}{\partial T}$ .

Esta ecuación es del tipo ecuación de Lindblad que suele aparecer también en la evolución de un sistema acoplado a un ambiente derivada del programa de decoherencia, entre otras aplicaciones [2] [5]. Sin duda, la Ec(2.21) refleja que como consecuencia de expresar la evolución del sistema en términos del reloj  $T$  su evolución no es unitaria en general, producto del doble conmutador. Nótese que el primer término corresponde a la componente unitaria de la evolución.

Considérese un sistema con niveles de energía discretos, caracterizados por frecuencias de Bohr  $\omega_{nm}$  y un reloj tal que su distribución de tiempos  $P_t(T)$  es monótona y depende linealmente del tiempo  $T$ , de forma tal que  $\sigma(T)$  es constante. Entonces, los elementos de matriz entre autoestados del sistema correspondientes a energías  $E_n$  y  $E_m$  evolucionan según:

$$\rho_{nm}(T) = \rho_{nm}(0) e^{-i\omega_{nm}T} e^{-\sigma\omega_{nm}^2 T} \quad (2.22)$$

Este sencillo ejemplo muestra que los términos de interferencia del sistema desaparecen y que no pueden revivir como consecuencia de la dispersión del reloj. Este proceso es más severo que la decoherencia ambiental para el sistema, siendo los revivals completamente eliminados.

Inmediatamente surge la comparación entre este fenómeno y otros efectos que cancelen las coherencias del sistema, como lo es la decoherencia ambiental. En principio, los efectos ambientales pueden disminuirse razonablemente aislando al sistema. Por ejemplo, en recientes experimentos se ha observado la escala de tiempo correspondiente a la decoherencia ambiental en un estado mesoscópico del campo eléctrico en una cavidad superconductora del orden de decenas de milisegundos [8]. Los avances tecnológicos han desplazado los límites experimentales llegando a crear sistemas físicos realmente aislados por algún tiempo.

Sin embargo, el efecto presentado antes es más fundamental que la decoherencia ambiental. Ninguna interacción entre el sistema y el reloj fue necesaria, ni introducir ningún ambiente. Es un efecto que depende de la dispersión del reloj físico que se elija. Por lo tanto pueden existir buenos y malos relojes que realicen una evolución más o menos cercana a una unitaria. Elegir los buenos relojes y estudiar sus limitaciones es una tarea que fue estudiada en primera instancia por Salecker y Wigner en 1958 [17] y retomada por Ng y van Dam [27].

### 2.2.2. Limitaciones en la medida del tiempo

Salecker y Wigner se propusieron estudiar las limitaciones que la mecánica cuántica impone a la medida de distancias espacio-temporales entre dos eventos [17]. Para esto decidieron usar relojes y evitar utilizar aparatos macroscópicos como pueden ser reglas. Esta medida es básicamente la misma que se discute en los cursos de relatividad especial.

Se colocan dos espejos paralelos y un fotón rebota entre ellos. El tiempo de vuelo entre los dos espejos es  $T = d/c$ . De esta forma el tiempo físico está asociado con el observable distancia entre los dos espejos, lo que implica que las fluctuaciones en las posiciones de los espejos se traducen en fluctuaciones en el tiempo físico.

Se pueden considerar diferentes estados para estos espejos, de forma tal que su dispersión varíe de distinta forma con el tiempo. Esencialmente estos espejos son partículas libres de cierta masa  $M$ . Un buen reloj es aquel cuya dispersión no sea demasiado grande, al menos durante un cierto intervalo de tiempo.

Se conoce que un estado de mínima incertidumbre (inicial) de una partícula libre puede ser representado por un paquete Gaussiano, cuya dispersión aumenta en el tiempo [1]. Si la dispersión en la posición del estado al inicio es  $\Delta/2$ , al evolucionar la dispersión es

$$\Delta x(t) = \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \Delta^2}} \quad (2.23)$$

Si se estudia el problema a un tiempo  $T$ , se puede optimizar el ancho inicial de forma tal de minimizar la dispersión  $\Delta x(T)$ . El valor del parámetro inicial debe ser  $\Delta^2 = \frac{2\hbar T}{M}$  por lo que  $\Delta x(T) = \sqrt{\frac{\hbar T}{M}}$  y la incertidumbre en el reloj, es decir en el tiempo de vuelo del fotón es

$$\Delta T_{fluct} = \sqrt{\frac{\hbar T}{Mc^2}} \quad (2.24)$$

Ng y van Dam observaron que, a pesar de este resultado que indica que la masa de los espejos debe ser muy grande de modo de reducir la dispersión del reloj, existe un límite fundamental a la masa que se puede acumular en una región del espacio [27]. Este límite viene dado por la existencia de un agujero negro. Por lo tanto ambos resultados muestran que debe existir un compromiso por el cual los relojes buenos deben ser masivos, pero no demasiado como para crear un agujero negro.

El efecto estudiado por los autores señala que el tiempo se perturba debido a la gravedad del objeto según

$$\Delta T_{grav} \approx \frac{GM}{c^3} \quad (2.25)$$

Minimizando el error total  $\Delta T_{grav} + \Delta T_{fluc}$  respecto a la masa del sistema, se obtiene un valor del error total

$$\Delta T \approx \left( \frac{G\hbar T}{c^5} \right)^{1/3} \approx T_P^{2/3} T^{1/3} \quad (2.26)$$

donde  $T_P$  es el tiempo de Planck ( $T_P \approx 10^{-44} s$ ). Esta escala de tiempo es muy pequeña para las escalas de tiempo que pueden encontrarse en un laboratorio en las experiencias físicas conocidas [26]. Por lo tanto, este efecto es muy pequeño.<sup>6</sup>

Lo importante de la expresión anterior Ec(2.26), más allá de posibles diferencias encontradas por otros autores, es que el error acumulado aumenta

<sup>6</sup>Sin embargo, es prematuro decir que no es un efecto observable.

con el tiempo transcurrido. Es decir, el reloj se vuelve cada vez peor. Por lo tanto, el efecto estudiado antes no puede ser eliminado por mejores relojes.

Básicamente, el error  $\Delta T$  permite determinar la dispersión  $b(T)$  estudiada en secciones anteriores. El factor  $\sigma(T)$  fue estimado por GPP, quienes concluyeron que los elementos de matriz del sistema en la base de energías son

$$\rho_{nm}(T) = \rho_{nm}(0)e^{-i\omega_{nm}T}e^{-\omega_{nm}^2 T_P^{4/3} T^{2/3}} \quad (2.27)$$

Por un análisis de la posibilidad de observar este efecto en sistemas experimentales se puede recurrir a [28] y sus referencias. En principio, dado que la escala de tiempo determinada por el tiempo de Planck es extremadamente pequeña, se requieren sistemas cuánticos con ciertas propiedades clásicas ya que involucran energías muy altas. Estados que son candidatos a ser susceptibles a este efecto son estados tipo gato de Schrödinger.

Existen algunos trabajos respecto a cuáles son las condiciones para optimizar relojes cuánticos más similares al reloj de Peres, donde el problema se enfoca desde una perspectiva más cercana a la información cuántica [29]. También existen otros ejemplos, experimentales inclusive, donde se estudian relojes malos y sus consecuencias sobre el sistema [30].

### 2.2.3. Indecibilidad y la interpretación de Montevideo de la Mecánica Cuántica.

Como se acaba de resumir anteriormente, el efecto de estudiar la evolución de un sistema en términos de un reloj real, y eventualmente acoplado a un ambiente, lleva inexorablemente a la pérdida de coherencias entre el sistema, el aparato de medida y ambiente. Al pasar el tiempo, ningún experimento sobre el sistema puede distinguir si el estado colapsó o evolucionó unitariamente. Cuando se alcanza esta situación el sistema es *indecible*.

Como señalan Gambini y Pullin estas situaciones pueden ser muy disímiles [28]. Por un lado, si el sistema conjunto evoluciona unitariamente el estado está determinado desde un principio especificando las condiciones iniciales. Existen limitaciones, gravitacionales y cuánticas, que impiden despreciar las incertezas asociadas a los observables físicos, en particular al tiempo físico asociado al reloj real. En este caso es imposible acceder a todas las variables del sistema conjunto, por lo que la evolución del sistema únicamente no parece unitaria. Por otro lado, si el sistema colapsa su estado es representado por una mezcla estadística que expresa probabilísticamente los posibles resultados de la medida.

La indecibilidad se ubica como el criterio determinante para la ocurrencia de un evento. Formalmente un evento generaliza el concepto de medida ortodoxo, asociado al colapso, a cualquier fenómeno observable que permite definir las propiedades del sistema [31]. La ocurrencia de eventos determinada por la indecibilidad que alcanza el sistema es de carácter fundamental, no práctica como la decoherencia. Por lo tanto no se puede decidir si ocurrió colapso ó no y ambas alternativas deben ser aceptadas.

Estas ideas fueron formalizadas bajo el nombre de interpretación de Montevideo de la mecánica cuántica. La indecibilidad toma el rol central y permite desarrollar una solución al problema de la medida que se sobrepone a los problemas que presenta una solución práctica como la decoherencia ambiental.

Con respecto a las críticas que recibe el programa de la decoherencia, es importante determinar cómo la interpretación de Montevideo soluciona estos problemas. Primero, no hay posibilidad de observar los revivals típicos de la decoherencia ambiental. Los revivals son una manifestación de que el sistema conjunto contiene las coherencias iniciales, ya que su evolución es unitaria. Esta información en principio puede ser recuperada observando el sistema conjunto, como indica d'Espagnat [11]. Pero utilizar relojes reales aniquila esta posibilidad ya que al esperar más tiempo lo único que se obtiene es una mayor supresión de las coherencias. Esto es claro en la Ec(2.27) donde se observa el estado del sistema en la base de energías.

En segundo lugar, luego de la interacción con un aparato el sistema conjunto se representa como una superposición de estados. Esto no expresa lo que se espera como resultado de una medida. Muchas de las interpretaciones asumen que este problema se resuelve modificando el estado del sistema. Sin embargo, la solución propuesta aquí se basa en un proceso físico: la indecibilidad, donde no puede distinguirse entre las alternativas proveniente de la evolución unitaria o de la ocurrencia del colapso. Cuando se alcanza este punto, las predicciones de ambas posibilidades son equivalentes.

## Capítulo 3

# Efecto sobre relojes reales

En esta sección se presentarán los avances referentes al estudio de los relojes reales como parte del paradigma desarrollado anteriormente. La idea fundamental es avanzar sobre el comportamiento del reloj y su interacción con el sistema desde una perspectiva puramente realista.

Primero se ahondará en la fenomenología de los relojes reales, para comenzar a estudiar un modelo en particular. El objetivo es incorporar un aparato a las medidas que se mencionaron anteriormente. Este aparato se acoplará a grados de libertad del reloj y del sistema de forma tal que la medición del puntero revelará información sobre el sistema. Por otro lado, esta interacción afectará al sistema y al reloj. En particular, se encontrarán cuantitativamente los efectos de la medida sobre el reloj. Primero se resuelve el problema clásicamente y luego se plantea la solución cuántica donde se aprecia la interacción entre los distintos sistemas y los efectos causados en ellos.

### 3.1. Fenomenología de los relojes reales

A pesar de que anteriormente se introdujeron las consecuencias más notables de la solución propuesta al problema del tiempo en términos de relojes reales, es conveniente describir fenomenológicamente que tipo de sistemas pueden ser considerados reloj.

En el primer capítulo Sec(1.3), se presentó el reloj de Peres y mediante ejemplos sencillos se mostró que tipo de estados del sistema pueden ser útiles como relojes. Para ser concretos, el reloj de Peres es lo más parecido a cuantizar un reloj de agujas típico. Se obtienen ciertos estados dial contruidos a partir de la superposición de autoestados de un Hamiltoniano de la forma  $\hat{H}_R = \omega \hat{p}_\theta$ . Sin embargo, la dispersión de la energía sobre estos estados es casi tan grande como la energía máxima del sistema. Esto indica que es un estado no clásico, en cuanto es una superposición coherente con propiedades dispersas. Si se mide la energía, se puede obtener cualquier valor con prácticamente las mismas probabilidades.

Este no es el mejor reloj con el que se puede estudiar un sistema. Básicamente, si este reloj interactúa con un sistema se verá fuertemente afectado, debido a que no es para nada robusto [19].

Como se mencionó en el capítulo anterior Sec(2.2), los relojes que reflejarán una evolución muy cercana a la unitaria son aquellos cuya distribución de

probabilidades  $P_t(T)$  no se aparte demasiado de una distribución ideal dada por una delta  $P_t(T) = \delta(T - t)$ .

Los relojes ideales por lo tanto permanecen correlacionados siempre con el parámetro  $t$ . Entonces, bajo las hipótesis de no interacción entre el sistema y reloj, la función de onda que describe al sistema conjunto debe factorizarse

$$\Psi(q, T, t) = \delta(T(t) - t)\psi_S(q, t) \quad (3.1)$$

Puede imaginarse que este tipo de solución para el estado del reloj es una autofunción de cierto Hamiltoniano  $\hat{H}_R$  dado según la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}_R \delta(T(t) - t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta(T(t) - t) = -i\hbar \frac{dT}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \delta(T(t) - t) \quad (3.2)$$

por lo tanto  $\hat{H}_R = \dot{T} \hat{p}_T$ . Nótese la similitud entre este Hamiltoniano y el utilizado en el modelo de Peres.

Como se discutió en las primeras secciones del trabajo Sec(1.2), este Hamiltoniano, no acotado inferiormente, presenta serios problemas. Es imperioso estudiar casos donde el reloj no sea ideal y este gobernado por un Hamiltoniano más realista, por ejemplo, aplicable experimentalmente.

Desde el punto de vista de la distribución de tiempos  $P_t(T)$ , los mejores relojes serán aquellos que durante cierto intervalo se asemejan mucho a un reloj ideal. Éste es el motivo por el cual los relojes escogidos para estudiar la evolución del sistema generan una distribución de tiempos como la descrita en la Ec(2.19). La función de onda, suponiendo que el reloj y el sistema no interactúan debe factorizarse como:

$$\Psi(q, T, t) = \psi_R(T, t)\psi(q, t) \quad (3.3)$$

donde la función  $\psi_R(T, t)$  representa un estado del reloj centrado en  $T(t)$  y con cierto ancho  $\Delta_R$ , que eventualmente puede depender de  $t$ . Es decir,  $\psi_R(T, t) \approx f_{\Delta_R}(T(t) - t)$ . Este reloj por lo tanto será capaz de distinguir tiempos separados por intervalos mayores a  $\Delta_R$ , que es la precisión del reloj. Por lo menos, durante un intervalo de tiempo.

El ejemplo más sencillo de un sistema que tiene una solución como la descrita anteriormente es una partícula libre de masa  $m$ , cuyo Hamiltoniano es  $\hat{H}_R = \frac{\hat{p}_R^2}{2m}$ . El grado de libertad asociado con el reloj real es básicamente la posición del mismo  $\hat{T} = \hat{q}_R^1$ . Desde el punto de vista clásico,  $T(t)$  es un parámetro creciente para todos los valores de  $t$ .

Por otro lado, el problema cuántico depende fuertemente del estado inicial del sistema. Para un paquete de onda genérico, se desea que éste siga la trayectoria clásica de la partícula. Sin ningún potencial que acote el movimiento del sistema, el paquete asociado a la partícula se dispersará. Por lo tanto, el reloj será un buen reloj, con precisión casi constante y acotada, durante un cierto intervalo de tiempo. Por ejemplo, para un estado Gaussiano de la partícula libre con ancho inicial  $\Delta_R$  la dispersión a tiempo  $t$  es

$$(\Delta_{q_R}(t))^2 = (\Delta_R)^2 + \left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2 \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Puede “normalizarse” esta expresión por la velocidad de la partícula

Incluso sin interacción entre el sistema y el reloj, la precisión derivada de usar  $T$  como reloj físico una partícula libre se degrada con el tiempo. Como se mencionó anteriormente cuanto más masivo el reloj, durante más tiempo el reloj será útil, aunque siempre se presentará la limitante encontrada anteriormente Sec(2.2.2).

### 3.2. Modelo clásico

Los cálculos de probabilidades condicionales requieren la medida de un observable. Se tratará entonces de describir el mecanismo físico que realiza esta medición.

Se pretende estudiar la medición de cierto observable de un sistema cuando la variable del reloj real tome cierto valor  $T$ . Dentro del contexto del formalismo de von Neumann, realizar una medida implica acoplar el observable que se desea medir con algún grado de libertad del puntero.

Para estudiar el modelo completo desde el punto de vista cuántico, primero es conveniente estudiar el problema desde el punto de vista clásico. Un posible Hamiltoniano que describe esta situación debe considerar la evolución libre del reloj  $(T, p_T)$ , del sistema  $(q, p)$  y del puntero  $(z, p_z)$ , así como la interacción mencionada. Como antes, la situación más sencilla es representar a los tres subsistemas como partículas libres más el término de interacción, que puede acoplar la cantidad  $O(q, p)$  del sistema con la posición del puntero. Por ejemplo,

$$\mathcal{H} = \frac{p_T^2}{2m_T} + \frac{p^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m_P} + \lambda g(T)zO(q, p) \quad (3.5)$$

donde  $\lambda$  es una constante de acoplamiento que regula la magnitud de la interacción.

La función  $g(T)$  es una función normalizada, centrada alrededor de  $\bar{T}$  con ancho  $\Delta$ . Representa una interacción localizada en términos del parámetro  $T$ . También se considerará que el puntero es muy pesado, por lo que su Hamiltoniano libre tiende a cero:  $\frac{p_z^2}{2m_P} \approx 0$ .

Las ecuaciones de movimiento para el puntero son

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ \dot{p}_z &= -\lambda g(T)O \end{aligned} \quad (3.6)$$

y para el reloj se satisface

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \frac{p_T}{m_T} \\ \dot{p}_T &= -\lambda \frac{dg}{dT}(T)Oz \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde el punto indica derivación respecto al parámetro temporal  $t$ .

El puntero experimenta una fuerza de magnitud proporcional al valor de la cantidad  $O$  en el momento de la medición. Esto implica que se puede registrar el valor de la cantidad observada  $O$  en el cambio del momento del puntero. Esto es justamente lo que se espera de un puntero, como se discutió en las secciones anteriores Sec(1.1). El objetivo de este trabajo es estudiar también

cómo evoluciona el sistema y el puntero en términos del reloj, por ejemplo obteniendo  $p_z(T)$ .

La primera observación es que la posición del puntero es constante  $z = z^0$ , debido a que su masa es muy grande. Para el reloj se cumple aproximadamente que

$$\ddot{T} = \frac{\dot{p}_T}{m_T} \approx -\lambda \frac{\bar{O}z^0}{m_T} \frac{dg}{dT}(T)$$

ya que la función  $g(T)$  es localizada y se puede aproximar a la cantidad  $O$  por su valor cuando la coordenada del reloj es  $T = \bar{T}$ ,  $\bar{O}$ , que es el valor esperado de la medición.

Por lo que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{T}^2) = -\lambda \frac{\bar{O}z^0}{m_T} \frac{dg}{dT} \frac{dT}{dt}$$

Resolviendo para  $T$ ,

$$\frac{dT}{dt} = \pm \sqrt{k - \frac{\lambda 2\bar{O}z^0 g(T)}{m_T}}$$

donde  $k$  es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales del reloj y del puntero. Se puede probar que, básicamente,  $k$  es la velocidad inicial del reloj al cuadrado:  $k = \dot{T}^2(0)$

Por lo tanto, el cambio del momento del puntero en función de la coordenada del reloj es

$$\frac{dp_z}{dT} = \frac{\dot{p}_z}{\dot{T}} = \frac{-\lambda g(T)\bar{O}}{\sqrt{k - \frac{\lambda 2\bar{O}z^0 g(T)}{m_T}}} \quad (3.8)$$

Nótese que el parámetro relevante para el cambio del momento del puntero está determinado por el cociente  $\frac{\lambda z^0 g(T)}{m_T}$ . Es de esperarse que el reloj sea más pesado que el sistema, fundamentándonos en secciones anteriores y teniendo en cuenta que el sistema puede ser una pequeña partícula. Mientras  $g(T)$  debe ser de orden  $1/\Delta$  con el fin de normalizarla, el valor de la constante de acoplamiento  $\lambda$  puede ajustarse para que el término de interacción del Hamiltoniano sea pequeño.

Si se ajusta el valor de  $z^0$ , que es clásico y por lo tanto puede tomarse nulo o muy pequeño, la Ec(3.8) puede desarrollarse:

$$\frac{dp_z}{dT} \approx \frac{-\lambda g(T)\bar{O}}{\sqrt{k}} \left( 1 + \frac{\lambda \bar{O}z^0 g(T)}{m_T k} + \frac{3(\lambda \bar{O}z^0 g(T))^2}{8(m_T k)^2} + \dots \right) \quad (3.9)$$

A primer orden, el cambio en el momento del puntero es

$$p_z(T) - p_z(0) \approx -\lambda \frac{\bar{O}}{\sqrt{k}} \text{H}(T - \bar{T}) \quad (3.10)$$

donde  $\text{H}(x)$  es la función escalón de Heaviside. La expresión anterior es una aproximación en el límite donde  $\Delta \rightarrow 0$ , ya que la función  $g(T)$  es localizada alrededor de  $\bar{T}$ .

Es claro que el cambio en el momento del puntero registra el valor de la cantidad  $O$  en el instante de la medida.

A órdenes superiores, el cambio es

$$p_z(T) - p_z(0) \approx -\frac{\lambda \bar{O}}{\sqrt{k}} \text{H}(T - \bar{T}) \left( 1 + \frac{\lambda \bar{O}z^0}{m_T k \Delta} \right) \quad (3.11)$$

### 3.2.1. Precisión de la medida

Una buena medida debe registrar el valor del observable de modo que sea posible distinguir el resultado. Esto implica que el segundo término en la Ec(3.9) debe ser mucho menor que el primero. Es decir

$$\frac{\lambda \bar{O} z^0}{m_T k \Delta} \ll 1 \quad (3.12)$$

De esta forma el puntero indicará el valor del observable sin mayores fluctuaciones.

Si se repite el experimento muchas veces, los valores de posición y momento del puntero presentarán ciertas fluctuaciones. Estas fluctuaciones se traducirán a la incerteza con la que puede determinarse el valor de la cantidad  $O$ . Asumiendo que el valor de la posición del puntero puede ser muy cercano a cero, su valor representará aproximadamente su fluctuación  $z \approx z^0 + \Delta z \approx \Delta z$ . Por otro lado, a primer orden el cambio en el momento del puntero es proporcional a la incertidumbre con la que se determina  $O$ , es decir  $\Delta p_z \approx \lambda \frac{\Delta O}{\sqrt{k}}$ . Por lo tanto, bajo las condiciones de buena medida Ec(3.12) se cumple que

$$\Delta z \Delta p_z \approx \lambda \frac{\Delta O}{\sqrt{k}} \Delta z \ll \frac{\Delta O}{\sqrt{k}} \frac{m_T k \Delta}{O} \quad (3.13)$$

Finalmente se obtiene

$$\Delta z \Delta p_z \ll \frac{\Delta O}{O} m_T \Delta \sqrt{k} \quad (3.14)$$

Clásicamente el producto de las incertezas no está acotado, ya que puede determinarse de forma precisa las condiciones iniciales del puntero. Sin embargo, desde el punto de vista estadístico, si se realiza un gran conjunto de medidas donde la posición inicial del puntero tiene cierta fluctuación, su posición y momento final también fluctuará. Estas fluctuaciones imponen restricciones a la precisión con la que puede medirse un observable arbitrario.

La precisión del reloj también juega su rol en las expresiones anteriores. Por ejemplo, a lo largo de este análisis se aproximó el valor de la cantidad  $O(q, p)$  por el valor correspondiente cuando el reloj toma el valor  $\bar{T}$ . Debido a la precisión del reloj, esta aproximación es correcta a orden cero en  $\Delta$ . Por lo tanto la precisión del reloj determina que el valor  $\bar{O}$  deba ser sustituido a órdenes superiores por  $\bar{O} + \Delta \left. \frac{dO}{dT} \right|_{\bar{T}}$ .

### 3.2.2. Backreaction sobre el reloj I

Anteriormente se analizó cómo el sistema puede describir desde el punto de vista clásico una medida de cierta cantidad  $O(q, p)$  en un cierto instante determinado por el reloj real  $T$ . Pero otro objetivo de este ejemplo es determinar como se ve afectado el reloj como consecuencia de la medida. En este caso el reloj, partícula libre, mantendrá su velocidad constante mientras el término de interacción sea nulo y luego de la descarga del reloj en  $\bar{T}$  su velocidad cambiará. Éste es el denominado efecto de backreaction sobre el reloj.

Utilizando las Ec(3.7), el momento del puntero  $p_T$  en función de la coordenada del reloj  $T$  puede inferirse a partir de la relación

$$\frac{dp_T}{dT} = \frac{\dot{p}_T}{\dot{T}} = -\lambda z^0 O \frac{m_T}{p_T} \frac{dg}{dT} \quad (3.15)$$

por lo tanto

$$p_T^2(T) - p_T^2(0) = -2\lambda z^0 m_T \int_0^T O \frac{dg}{dT} dT \quad (3.16)$$

Si se observa el sistema mucho tiempo después de efectuada la medición, el momento del reloj satisface

$$p_T(T) \approx \sqrt{p_T^2(0) + 2\lambda z^0 m_T \left. \frac{dO}{dT} \right|_{\bar{T}}} \quad (3.17)$$

Bajo las hipótesis de buena medida Ec(3.12), la perturbación sobre el momento del puntero se puede expandir como:

$$p_T(T) \approx p_T(0) + \lambda \frac{z^0}{m_T} \frac{m_T^2}{p_T(0)} \frac{\Delta O}{\Delta} \quad (3.18)$$

donde  $\Delta O$  representa nuevamente las fluctuaciones de la cantidad a medir en torno al valor en el tiempo  $T$ , aproximándose  $\left. \frac{dO}{dT} \right|_{\bar{T}} \approx \frac{\Delta O}{\Delta}$

Por lo tanto, la velocidad del reloj cambia luego de la interacción. En el caso clásico, se puede elegir  $z^0$  arbitrariamente pequeño, por lo tanto la perturbación puede ser pequeña.

### 3.3. El modelo cuántico

El caso clásico indica claramente lo que puede esperarse si se estudia el sistema bajo el formalismo de la mecánica cuántica. En este caso, por ejemplo, no puede asociarse a la posición del puntero un valor constante, sin incertidumbre. Las incertidumbres de los observables permiten estudiar la esencia del reloj real, que no marca el tiempo clásico exactamente, induciendo la pérdida de unitariedad vista anteriormente.

Es interesante estudiar este modelo desde esta perspectiva, teniendo en cuenta qué características son deseadas tanto para el reloj como para el puntero. Nuevamente se considera el Hamiltoniano Ec(3.5) pero especificando el observable a medir.

En mecánica cuántica, la evolución de un sistema cerrado se describe mediante la ecuación de Schrödinger. Equivalentemente, si se conoce la amplitud de probabilidad de que una partícula que a tiempo  $t$  se encontraba en la posición  $q$  se encuentre en la posición  $q'$  a tiempo  $t'$ , es decir el propagador  $K(q', t'; q, t)$ , se puede reformular completamente la teoría. Este es el caso, por ejemplo, de la formulación de integrales de caminos, donde se expresa el propagador en términos de la contribución de todos los caminos posibles que unen las dos posiciones  $q$  y  $q'$  en el espacio de configuraciones [14].

Para tener acceso al propagador de la teoría el observable en cuestión es la posición del sistema. Los propagadores expresan las correlaciones del sistema, por lo tanto el formalismo de probabilidades condicionales se debe adaptar correctamente en este caso. En términos del reloj real, Gambini et al [22] estudiaron detalladamente la probabilidad de encontrar un sistema en cierta posición  $q'$  cuando el reloj se observa en posición  $T'$  si en  $T$  el sistema se observó en  $q$ . En este caso se demostró que para un sistema de dos partículas libres no interactuantes donde una describe al reloj y la otra al sistema, se

recupera el propagador clásico de la teoría a orden dominante en función del tiempo físico indicado por el reloj:

$$P(q', T' | q, T) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \int_{-\tau}^{\tau} dt' \text{Tr} (P_{q', T'}(t) P_{q, T}(t') \rho_{SR} P_{q, T}(t'))}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \int_{-\tau}^{\tau} dt' \text{Tr} (P_{T'}(t) P_{q, T}(t') \rho_{SR} P_{q, T}(t'))}$$

donde se asume que luego de la primer medida el estado es proyectado en el subespacio asociado a la pareja  $(q, T)$ . Con algunas aproximaciones que se detallarán más adelante, asumiendo estados iniciales descriptos por paquetes Gaussianos se puede obtener que el propagador toma la forma

$$P(q', T' | q, T) \approx \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} dt |\langle q', t | q, t_c(T) \rangle|^2 P_t(T) \Delta q' \quad (3.19)$$

con  $P_t(T)$  la distribución de probabilidad usada anteriormente Ec(2.15) para los tiempos del reloj,  $t_c(T)$  el tiempo “clásico” asociado a una partícula libre y  $\Delta q'$  la incertidumbre asociada a la precisión con la que se puede medir la variable  $q$ , es decir el ancho del proyector.

Por lo tanto, si se desea calcular qué forma toma la teoría cuando se introduce un puntero, es conveniente centrarse en la medida de la posición del sistema. Para la medida de la posición cuando la variable del reloj vale  $\bar{T}$  el Hamiltoniano del sistema es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_T^2}{2m_T} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda g(\hat{T}) \hat{z} \hat{q} \quad (3.20)$$

para un puntero muy pesado. La función  $g(T)$  es una función regular centrada en un valor  $\bar{T}$  con ancho  $\Delta$ , de forma tal que si  $\Delta \rightarrow 0$ , entonces  $g(T) \rightarrow \delta(T - \bar{T})$ . Ejemplos de estas funciones son

$$g(T) = \frac{1}{2\Delta \cosh^2\left(\frac{T-\bar{T}}{\Delta}\right)}$$

ó

$$g(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{(T-\bar{T})^2}{\Delta^2}\right) \quad (3.21)$$

Un caso similar fue estudiado por Aharonov y Reznik [32] cuyo objetivo fue el problema de la medida de la energía de un sistema aislado. Utilizando como reloj otro grado de libertad del sistema, los autores acoplan al puntero la energía del sistema, es decir el Hamiltoniano. El principal interés de su trabajo es estudiar las consecuencias del llamado principio de incertidumbre energía-tiempo cuando el tiempo es indicado por un parámetro interno del sistema.

A la hora de resolver el modelo propuesto se pueden utilizar distintos métodos. En este caso, trabajamos estudiando la evolución de los valores medios de los observables de interés en el marco de la teoría de perturbaciones<sup>2</sup>. La ventaja principal es que se podrán realizar los cálculos con el estado del sistema sin interactuar, donde los estados evolucionen con el Hamiltoniano libre. Estudiar estados genéricos que presenten enredo no es sencillo. Existen otras técnicas, como la denominada aproximación de Born-Oppenheimer y otros

<sup>2</sup>Esto requiere tomar algunas condiciones de validez para los resultados obtenidos, propia de la teoría de perturbaciones

métodos semiclásicos para enfrentar el problema, que son por demás interesantes de considerar.

También este modelo simplifica un puntero real o al menos fácilmente accesible experimentalmente. En general, se considera que los aparatos de medida están formados por muchos grados de libertad, muchos más que los del sistema de estudio. En este caso se considera un puntero unidimensional y mucho más masivo que el sistema. Este puntero pertenece a la misma categoría que el puntero descrito al principio Sec(1.1.3).

Con respecto a la notación, se denotará  $\hat{H}_0$  al Hamiltoniano libre del sistema, sin interacción. También se tomará  $c = 1$  y  $\hbar = 1$ , por lo que la masa tiene unidades del inverso del tiempo o inverso de longitud.

### 3.3.1. Imagen de interacción

En la imagen de interacción el Hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_{int}(t) = \lambda \hat{z}(t) \hat{q}(t) g(\hat{T}(t))$$

y el operador de evolución es

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathcal{T}} \left[ \exp -i \left( \int_{t_0}^t \hat{H}_{int}(t') dt' \right) \right] \quad (3.22)$$

siendo  $\hat{\mathcal{T}}$  es el operador de ordenación temporal.

Dividiendo el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$  en  $N$  intervalos iguales de ancho  $\epsilon$  el operador de evolución puede escribirse<sup>3</sup>

$$\hat{U}(t) = \prod_{i=1}^N \left( 1 - i\epsilon \hat{H}_{int}(t_i) \right) \quad (3.23)$$

donde los operadores  $\hat{T}(t)$  y  $\hat{q}(t)$  son los que se obtienen de la evolución libre del sistema, es decir sin considerar la interacción. Para partículas libres

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= \hat{T}_0 + \frac{\hat{p}_{T0} t}{m_T} \\ \hat{q}(t) &= \hat{q}_0 + \frac{\hat{p}_0 t}{m} \end{aligned} \quad (3.24)$$

En este caso las condiciones iniciales (subíndice 0) son operadores, como en la imagen de Heisenberg. También se desea hacer notar que  $\hat{z}$  es una constante del movimiento, por lo que  $z(\hat{t}) = \hat{z}$ .

Para un operador  $\hat{O}(t)$  dependiente de las variables canónicas del sistema el valor medio en la imagen de interacción es

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \int dQ \Psi_{int}^*(Q, t) \hat{O}_{int}(t) \Psi_{int}(Q, t) = \int dQ \Psi_0^*(Q) \hat{U}^\dagger(t) \hat{O}_{int}(t) \hat{U}(t) \Psi_0(Q)$$

con  $Q$  representando al conjunto de las variables canónicas del sistema conjunto,  $\hat{O}_{int}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O}(t) e^{-i\hat{H}_0 t}$  es el operador  $\hat{O}(t)$  en la imagen de interacción y  $\Psi_0(Q)$  es el estado inicial del sistema conjunto. Genéricamente, el estado inicial

<sup>3</sup>En el límite  $N \rightarrow \infty$

se puede tomar no enredado ya que la interacción ocurrirá tiempo después de preparado el sistema. También se asumirá que cada estado es representado por paquetes de onda Gaussianos. Luego, el estado inicial del sistema, puntero y reloj se representan por  $\Psi_0(Q) = \psi_z^0(z)\psi^0(q)\psi_T^0(T)$  siendo

$$\begin{aligned}\psi_z^0(z) &= \frac{N_P}{\Delta_z} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{\Delta_z^2} + ip_{z_0}z} \\ \psi^0(q) &= \frac{N_S}{\Delta_S} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{\Delta_S^2} + ip_0q} \\ \psi_T^0(T) &= \frac{N_T}{\Delta_T} e^{-\frac{(T-T_0)^2}{\Delta_T^2} + ip_{T_0}T}\end{aligned}\tag{3.25}$$

En este caso cada paquete de onda está centrado en determinada posición y con cierto momento en general no nulo. Las constantes  $N_i$  son de normalización y las  $\Delta_i$  los anchos de cada paquete.

El operador evolución a segundo orden en los Hamiltonianos de interacción a tiempos distintos puede escribirse como

$$\hat{U}(t) \simeq 1 - \sum_{i=1}^N i\epsilon \hat{H}_{int}(t_i) - \sum_{t_i < t_j} \epsilon^2 \hat{H}_{int}(t_i) \hat{H}_{int}(t_j) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Para calcular el valor esperado del operador  $\hat{O}(t)$  se deben desarrollar los términos anteriores, obteniendo que

$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(t) \hat{O}_{int}(t) \hat{U}(t) &\simeq \left( 1 + \sum_{t_i} i\epsilon \hat{H}_{int}(t_i) - \sum_{t_i < t_j} \epsilon^2 \hat{H}_{int}(t_j) \hat{H}_{int}(t_i) \right) \hat{O}_{int}(t) \left( 1 - \sum_{t_j} i\epsilon \hat{H}_{int}(t_j) - \sum_{t_l < t_k} \epsilon^2 \hat{H}_{int}(t_l) \hat{H}_{int}(t_k) \right) \\ &\simeq \hat{O}_{int}(t) + \sum_i i\epsilon \left[ \hat{H}_{int}(t_i), \hat{O}_{int}(t) \right] - \\ &\sum_{t_l < t_k} \epsilon^2 \left\{ \hat{O}_{int}(t) \hat{H}_{int}(t_l) \hat{H}_{int}(t_k) + \hat{H}_{int}(t_k) \hat{H}_{int}(t_l) \hat{O}_{int}(t) \right\} + \sum_{t_i, t_j} \epsilon^2 \hat{H}_{int}(t_i) \hat{O}_{int}(t) \hat{H}_{int}(t_j) + \hat{O}(\epsilon^3)\end{aligned}$$

El último término puede reducirse notando el orden de los índices de las sumas y escribiéndolo en función de los conmutadores:

$$\hat{U}^\dagger(t) \hat{O}_{int}(t) \hat{U}(t) \simeq \hat{O}_{int}(t) + \sum_{t_i} i\epsilon \left[ \hat{H}_{int}(t_i), \hat{O}_{int}(t) \right] - \sum_{t_i < t_j} \epsilon^2 \left[ \left[ \hat{O}_{int}(t), \hat{H}_{int}(t_i) \right], \hat{H}_{int}(t_j) \right]$$

Realizando el pasaje al continuo, el valor medio de cualquier operador puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\langle \hat{O}(t) \rangle &= \int dQ \Psi_{int}^*(Q, t) \hat{O}_{int}(t) \Psi_{int}(Q, t) = \int dQ \Psi_0^*(Q) \hat{U}^\dagger(t) \hat{O}_{int}(t) \hat{U}(t) \Psi_0(Q) \\ \langle \hat{O}(t) \rangle &\simeq \langle \hat{O}_{int}(t) \rangle_0 + i \int_{t_0}^t dt' \langle \left[ \hat{H}_{int}(t'), \hat{O}_{int}(t) \right] \rangle_0 \\ &\quad - \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle \left[ \left[ \hat{O}_{int}(t), \hat{H}_{int}(t'') \right], \mathcal{H}_{int}(t') \right] \rangle_0\end{aligned}\tag{3.26}$$

donde el subíndice 0 indica valor medio sobre los estados evolucionados únicamente con el Hamiltoniano libre.

Esta es la expresión con la que se calcularán los distintos valores medios que son de interés.

### 3.3.2. Medida del puntero

En el caso clásico se estudió que el momento del puntero cambia luego de la medida, con un desplazamiento proporcional al valor de la cantidad observada en el instante de descarga del reloj  $\bar{T}$ . El comportamiento a nivel cuántico es muy similar considerando el paquete de onda del puntero. En el caso del momento del puntero  $\hat{p}_{z,int}(t) = \hat{p}_z$ . El conmutador de la Ec(3.26) en este caso es

$$\left[ \hat{H}_{int}(t'), \hat{p}_{z,int}(t) \right] = i\lambda \hat{q}(t') g(\hat{T}(t'))$$

por lo que a primer orden en  $\lambda$  el momento del puntero es

$$\langle \hat{p}_z(t) \rangle = \int dq \Psi_0^*(q) \left[ \hat{p}_z - \int_{t_0}^t dt' \lambda g(\hat{T}(t')) \hat{q}(t') \right] \Psi_0(q) \quad (3.27)$$

La segunda integral que aparece en la ecuación anterior se analiza a continuación.

Por un lado, para la variable del reloj los términos se pueden reducir usando la evolución libre del sistema

$$\begin{aligned} \int dT \psi_T^{0*}(T) g(\hat{T}(t')) \psi_T^0(T) &= \int dT \psi_T^{0*}(T) e^{i\hat{H}_0 t'} g(\hat{T}) e^{-i\hat{H}_0 t'} \psi_T^0(T) \\ &= \int dT \psi_T^{0*}(T, t') g(\hat{T}) \psi_T^0(T, t') \end{aligned}$$

donde  $\psi_T^0(T, t)$  representa el estado inicial evolucionado en el tiempo  $t$  por el Hamiltoniano sin perturbar  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_T^2}{2m_T}$ . La solución es bien conocida y muestra que la evolución del paquete sigue la trayectoria clásica con cierto ancho que aumenta con el tiempo [1]

$$\psi_T^0(T, t) = \frac{N_T e^{i\phi(t)}}{\left( \Delta_T^4 + \left( \frac{2t}{m_T} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}} e^{ip_{T0}T} e^{-\frac{(T-T^c(t))^2}{\left( \Delta_T^2 + \frac{2it}{m_T} \right)}} \quad (3.28)$$

siendo  $\phi(t)$  es una fase real y  $T^c(t)$  la trayectoria clásica de la partícula en función de las condiciones iniciales del reloj Ec(3.26):

$$T^c(t) = T_0 + \frac{p_{T0}t}{m_T}$$

Lo mismo sucede para la variable de la partícula microscópica, donde se debe calcular la siguiente integral

$$\int dq \psi^{0*}(q) \hat{q}(t) \psi^0(q) = \int dq \psi^{0*}(q, t) \hat{q} \psi^0(q, t) = \langle \hat{q}(t) \rangle_0 \quad (3.29)$$

### Aproximaciones: Buen reloj

El ancho del paquete en posición  $\sigma_T$  crece en función del tiempo como

$$\sigma_T^2(t) = \left( \Delta_T^4 + \left( \frac{2t}{m_T} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Usualmente se desea que el reloj puede reutilizarse y que la medida e interacción no destruya su estado. Si esto no sucede, eventualmente la pérdida de coherencia del sistema será más rápida. La medida ocurre cuando el reloj se acerca a  $\bar{T}$ , por lo que si es suficientemente masivo, el ancho del paquete en ese momento puede ser muy parecido al inicial si el tiempo es suficientemente corto. Alternativamente, se desea que el ancho en el instante de la interacción no sea mucho más grande que la ventana de interacción  $\Delta$ . De otra forma el paquete de onda se difractará al pasar por la ventana de interacción. Ambas condiciones se resumen en las ecuaciones

$$\sigma_T^2(t) \approx \Delta_T^2 \quad (3.30)$$

$$\Delta \gg \Delta_T \quad (3.31)$$

En este caso, se asume que el paquete no se dispersa demasiado. Alternativamente se puede asumir como en la Sec(2.2.2) que el reloj se dispersa de forma controlada. Esta situación es un tanto más complicada para analizar el problema pero en principio debería ser equivalente si la interacción es localizada y se cumple  $\sigma_T \ll \Delta$ .

Adicionalmente, sobre el sistema se mide el observable  $\hat{q}$  con cierta incertidumbre  $\Delta_q$  asociada al espectro continuo del operador. Este es el mismo ancho asociado al intervalo que se describió anteriormente en la Sec(2.2). Si el sistema es de carácter cuántico ( $m \ll m_T$ ), usualmente se tiene

$$\Delta_q \ll \Delta_S \quad (3.32)$$

Retomando el cálculo del valor medio del momento del puntero se utilizan las aproximaciones descritas anteriormente. Se obtiene que el cambio del momento del puntero suponiendo una función de acoplamiento Gaussiana como en la Ec(3.21) es:

$$\langle \hat{p}_z(t) \rangle = \langle \hat{p}_z(t) \rangle_0 - \lambda \int_{t_0}^t dt' \langle \hat{q}(t') \rangle_0 \left\langle g(\hat{T}(t')) \right\rangle_0 \quad (3.33)$$

$$\langle \hat{p}_z(t) \rangle = \langle \hat{p}_z(t) \rangle_0 - \lambda \int_{t_0}^t dt' q^c(t') g(T^c(t')) \left( 1 + \frac{\Delta_T^2}{\Delta^4} \bar{T} \left( \frac{\bar{T}}{2} - T^c(t') \right) \right)$$

Resta calcular la integral de una Gaussiana por un polinomio. Básicamente, la Gaussiana filtra el valor del parámetro  $t$  donde está centrada ( $T^c(t^*) = \bar{T}$ ) y evalúa el polinomio en ese tiempo. Por lo tanto, la corrección al momento del puntero se comporta como un escalón, centrado en el tiempo en el que la trayectoria clásica coincide con  $\bar{T}$  y asintóticamente tiende a un valor proporcional a la posición clásica de la partícula microscópica en  $t^*$ :

$$\langle \hat{p}_z(t) \rangle \approx \langle \hat{p}_z(t) \rangle_0 - \lambda H(T^c(t) - \bar{T}) \bar{g} T_{\Delta} q^c(t^*) \quad (3.34)$$

donde  $T_\Delta$  representa el tiempo que demora en pasar el reloj por la ventana de medida de ancho  $\Delta$ , es decir  $T_\Delta \simeq \frac{m_1 \Delta}{p_{T0}}$ . El parámetro  $\bar{g}$  representa el valor medio de  $g(T)$  durante la interacción,  $\bar{g} \sim \frac{1}{\Delta}$  ya que está normalizada. También  $\langle \hat{p}_z(t) \rangle_0 = p_{z0}$  despreciando el Hamiltoniano propio del puntero.

Éste es exactamente el mismo resultado obtenido en el sistema clásico Ec(3.10). Existen en el caso cuántico correcciones proporcionales a  $\lambda \frac{\Delta^2}{\Delta^2}$ .

Sin embargo, para comenzar a observar efectos cuánticos, asociados con las fluctuaciones de las variables se necesita ir a órdenes superiores.

### 3.3.3. Backreaction sobre el reloj II

Como se estudió en el caso clásico, una vez realizada la medida, el reloj altera su velocidad. En el caso cuántico varios efectos distintos aparecerán, especialmente a órdenes superiores. Estos vincularán el ritmo con el que el reloj marca el tiempo con la fluctuación asociada a la posición del puntero.

La posición del reloj se ve afectada por la medida. Nuevamente, el cambio en el valor medio de su posición se calcula de acuerdo a la Ec(3.26):

$$\langle \hat{T}(t) \rangle = \langle \hat{T}(t) \rangle_0 + i \int_{t_0}^t dt' \int dQ \Psi_0^*(Q) \left[ \hat{H}_{int}(t'), \hat{T}(t) \right] \Psi_0(Q) \quad (3.35)$$

donde  $\hat{T}(t)$  representa el operador  $\hat{T}$  en la imagen de interacción Ec(3.24). El conmutador actúa sobre la función de acoplamiento  $g(\hat{T}(t'))$ , derivándola respecto al momento conjugado  $p_T$  y a la coordenada  $T$ . De esta forma, el conmutador es

$$\left[ \hat{H}_{int}(t'), \hat{T}(t) \right] = \lambda \hat{z}(t') \hat{q}(t') \left[ g(\hat{T}(t')), \hat{T}(t) \right] \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \hat{z} \hat{q}(t') \left[ -i \frac{t'}{m_T} g'(\hat{T}(t')) + i \frac{t}{m_T} g'(\hat{T}(t')) \right] \quad (3.37) \\ &= \lambda \hat{z} \hat{q}(t') \frac{i(t-t')}{m_T} g'(\hat{T}(t')) \end{aligned}$$

Utilizando la expresión de la función de acoplamiento en términos de las exponenciales y realizando la derivada correspondiente se obtiene la corrección a primer orden en  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(t) \rangle &= \langle \hat{T}(t) \rangle_0 - \lambda \int_{t_0}^t dt' \langle \hat{z}(t') \rangle_0 \langle \hat{q}(t') \rangle_0 \frac{(t-t')}{m_T} \int dT \psi_T^{0*}(T, t') g'(\hat{T}) \psi_T^0(T, t) \\ \langle \hat{T}(t) \rangle &= \langle \hat{T}(t) \rangle_0 - \lambda \int_{t_0}^t dt' \langle \hat{z}(t') \rangle_0 \langle \hat{q}(t') \rangle_0 \frac{(t-t')}{m_T} \langle g'(\hat{T}(t')) \rangle_0 \\ \langle \hat{T}(t) \rangle &= \langle \hat{T}(t) \rangle_0 - \lambda \langle \hat{z} \rangle_0 \int_{t_0}^t dt \frac{(t-t')}{m_T} q^c(t') g'(T^c(t')) \left( 1 - \frac{\Delta_T^2}{4\Delta^2} \right) \quad (3.38) \end{aligned}$$

ya que puede calcularse  $\langle g'(\hat{T}(t)) \rangle_0 \simeq g'(T^c(t)) \left( 1 - \frac{\Delta_T^2}{4\Delta^2} \right)$ .

Realizando la integral resulta

$$\langle \hat{T}(t) \rangle = \langle \hat{T}(t) \rangle_0 + \text{H}(T^c(t) - \bar{T}) \lambda \frac{z_0 m_T p_0}{m p_{T0}^2} \left( 1 - \frac{\Delta_T^2}{4\Delta^2} \right) t \quad (3.39)$$

Nuevamente, luego de la interacción, la velocidad del reloj cambia. En particular, relojes masivos y rápidos perturbarán poco al reloj.

Finalmente, se observa también que el cambio de la velocidad del reloj debido a la interacción con el puntero y la partícula microscópica es proporcional al valor medio de la posición del puntero  $\langle \hat{z} \rangle_0$ . Como este valor es un valor medio que se fija al preparar el estado inicial del puntero, es completamente arbitrario y puede tomarse nulo sin ningún inconveniente. Luego, el efecto de backreaction puramente cuántico no es generado por este término ya que puede cancelarse. Algo similar sucede con la corrección a segundo orden en  $\lambda$  del momento del puntero que también es proporcional al valor medio  $\langle \hat{z} \rangle_0$ .

Otros efectos resultan del segundo término del desarrollo en conmutadores Ec(3.26), proporcional en este caso al  $\langle \hat{z}^2 \rangle_0$ , que no puede anularse debido a la incertidumbre en la posición del puntero. Son estos tipos de términos los que diferencian los modelos cuánticos de los clásicos.

### 3.3.4. Perturbaciones a órdenes superiores

Las expresiones anteriores para el desplazamiento del momento del puntero y el cambio en la velocidad del reloj son los cambios derivados de la Ec(3.26) a primer orden en  $\lambda$ . Para el reloj, el cambio de su velocidad es proporcional al valor medio de  $\hat{z}$  que puede elegirse nulo. Para obtener una corrección no nula, se debe calcular el segundo orden derivado de la Ec(3.26).

En base a esta ecuación la corrección a segundo orden en  $\lambda$  es

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(t) \rangle_2 &= \\ &= - \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^{t'} dt'' \int dQ \Psi_0^*(Q) \left[ \left[ \hat{T}(t), \lambda \hat{z}(t'') \hat{q}(t'') g(\hat{T}(t'')) \right], \lambda \hat{z}(t') \hat{q}(t') g(\hat{T}(t')) \right] \Psi_0(Q) \end{aligned} \quad (3.40)$$

El doble conmutador es

$$\begin{aligned} &\left[ \left[ \hat{T}(t), \lambda \hat{z}(t'') \hat{q}(t'') g(\hat{T}(t'')) \right], \lambda \hat{z}(t') \hat{q}(t') g(\hat{T}(t')) \right] \\ &= \lambda^2 \frac{\hat{z}^2 i(t'' - t)}{m_T} \left\{ \hat{q}(t'') \hat{q}(t') \left[ g'(\hat{T}(t'')), g(\hat{T}(t')) \right] + g'(\hat{T}(t'')) g(\hat{T}(t')) [\hat{q}(t''), \hat{q}(t')] \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para calcular algunos de los conmutadores y valores esperados se pueden realizar simplificaciones basadas en la localización de la función  $g(T)$ . Por ejemplo, el valor medio del producto de dos funciones  $g(\hat{T}(t))$  es no nulo si los tiempos son muy cercanos

$$\langle g(\hat{T}(t'')) g(\hat{T}(t')) \rangle_0 \simeq (g(T^c(t'')))^2 \Theta_{\Delta, t^*}(t', t'') \quad (3.42)$$

donde  $\Theta_{\Delta, t^*}(t, t')$  representa una función escalón de ancho  $\Delta$  (en posición), centrada en  $T = T^c(t^*)$ . Esta función filtra los valores  $(t, t')$  muy distintos al valor  $t^*$ . Estos resultados concuerdan con pruebas numéricas realizadas.

Otros valores medios pueden simplificarse de maneras similares

$$\langle \hat{q}(t') \hat{q}(t) \rangle_0 \simeq (q^c(t))^2 + \frac{1}{4} \left( \Delta_S^2 + \left( \frac{2t'}{\Delta_S m} \right)^2 \right) \quad (3.43)$$

si  $t$  y  $t'$  son cercanos a  $t^*$ ,

O en el caso del conmutador encontrado en la Ec(3.42)

$$\begin{aligned} \left[ g'(\hat{T}(t')), g(\hat{T}(t)) \right] &\simeq \left[ g'(\hat{T}(t')), g(\hat{T}(t')) + g'(\hat{T}(t'))(\hat{T}(t) - \hat{T}(t')) \right] \Theta_{\Delta, t^*}(t, t') = \\ g'(\hat{T}(t')) \left[ g'(\hat{T}(t')), \hat{T}(t') \right] \Theta_{\Delta, t^*}(t, t') &= i \frac{(t' - t)}{m_T} g'(\hat{T}(t)) g''(\hat{T}(t')) \Theta_{\Delta, t^*}(t, t') \end{aligned} \quad (3.44)$$

Se pueden desarrollar las relaciones anteriores para obtener finalmente

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(t) \rangle_2 &\simeq \lambda^2 \langle \hat{z}^2 \rangle_0 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \frac{i(t'' - t)}{m_T} \Theta_{\Delta, t^*}(t', t'') \\ &\quad \left\{ \left( (q^c(t'))^2 + \frac{1}{4} \left( \Delta_S^2 + \left( \frac{2t''}{\Delta_S m} \right)^2 \right) \right) \langle [g'(\hat{T}(t'')), g(\hat{T}(t'))] \rangle_0 + \right. \\ &\quad \left. \frac{i(t'' - t)}{m} g(T^c(t'')) g'(T^c(t'')) \left( 1 - \frac{\Delta_T^2}{2\Delta^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

El término más importantes de esta expresión es el término de fluctuación asociado a la posición del puntero  $\langle \hat{z}^2 \rangle_0$ .

Una cuidadosa estimación de los términos de la Ec(3.45) muestra que el cambio asintótico en la velocidad del puntero depende de las masas del sistema y reloj y del momento del reloj. En particular, luego de la interacción el término dominante en la corrección de segundo orden es

$$\langle \hat{T}(t) \rangle_2 \simeq \lambda^2 \langle \hat{z}^2 \rangle_0 \frac{m_T^2}{m p_{T0}^3} t \quad (3.46)$$

Esta ecuación muestra que al igual que la corrección de primer orden, relojes masivos y rápidos experimentan un menor efecto luego de la interacción. Pero fundamentalmente muestra que existe una cota al momento infligido al reloj por la medición como consecuencia de la dispersión en la posición del puntero.

### 3.3.5. Validez del modelo y análisis de incertidumbres

A continuación se intentará explicar cuáles son las limitaciones de este modelo y de la solución encontrada, basándose en el cálculo de valores esperados realizado anteriormente.

#### Condiciones del modelo

El sistema estudiado debe determinar claramente la posición del sistema al tiempo de descarga del reloj  $\bar{T}$ . Con este motivo se debe prepara al sistema, puntero y reloj para que el modelo cumpla su misión.

Para realizar la medición, el desplazamiento en el momento del puntero debe ser mayor al ancho en su distribución de momentos, de otra forma no será posible distinguir el cambio del mismo. Esto queda claro observando la Fig(3.1) donde se aprecia cómo se desliza el paquete de onda asociado al momento del puntero por efecto de la medida.

El orden dominante en el ancho de la distribución de momentos del puntero es el término correspondiente al orden cero en  $\lambda$ , es decir  $(\Delta \hat{p}_z)_0$ . No hay contribuciones a primer orden bajo la condición  $z_0 = 0$ . Asintóticamente el

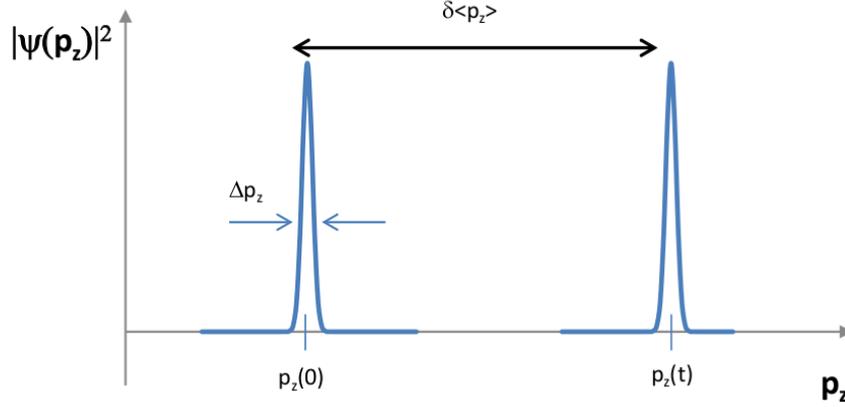


Figura 3.1: Desplazamiento del paquete de onda del puntero  $\delta \langle \hat{p}_z \rangle$  luego de la medida. Se compara el paquete de ondas antes y después de la medida.

puntero registra un desplazamiento  $\delta \langle \hat{p}_z \rangle = \lambda T_{\Delta} \bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle = \lambda \frac{\langle \hat{q}(t^*) \rangle m_T}{p_{T0}}$  según la Ec(3.34), por lo tanto debe satisfacerse:

$$\delta \langle \hat{p}_z \rangle = \lambda T_{\Delta} \bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle \gg (\Delta \hat{p}_z)_0$$

De acuerdo al principio de incertidumbre aplicado a las variables conjugadas del puntero  $(\Delta \hat{p}_z)_0 \gtrsim \frac{1}{(\Delta \hat{z})_0}$  (trabajamos con  $\hbar = c = 1$ ), puede escribirse:

$$\lambda T_{\Delta} (\Delta \hat{z})_0 \bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle \gg 1 \quad (3.47)$$

Por otro lado, en este caso se estudió el problema en el régimen perturbativo. Por lo tanto, la interacción debe ser pequeña respecto a los términos libres del reloj y de la partícula microscópica. El Hamiltoniano libre del sistema  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_T^2}{2m_T} + \frac{\hat{p}^2}{2m}$  es dominado por la energía del reloj  $E_T$ . La segunda condición exige que se cumpla

$$E_T \gg \lambda (\Delta \hat{z})_0 \bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle \quad (3.48)$$

donde se considera que el orden de la energía de interacción es  $\lambda (\Delta \hat{z})_0 \bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle$ .

Para que se satisfagan ambas condiciones simultáneamente Ec(3.47) y Ec(3.48) debe suceder:

$$\frac{1}{\langle \hat{q}(t^*) \rangle \bar{g} T_{\Delta}} \ll \frac{E_T}{\langle \hat{q}(t^*) \rangle \bar{g}} \Rightarrow E_T T_{\Delta} \gg 1 \quad (3.49)$$

Un sistema suficientemente masivo y veloz satisface esta condición. Además es independiente de las variables a medir y de las variables del puntero, sólo depende del reloj: su masa, su velocidad y la precisión de la medida. Esto restringe, nuevamente, la precisión con la que funciona el reloj físico.

Con respecto al valor que puede tomar la constante de acoplamiento  $\lambda$ , ambas ecuaciones restringen sus valores ya que debe satisfacerse

$$\frac{E_T}{\bar{g}} \gg \lambda \langle \hat{q}(t^*) \rangle (\Delta \hat{z})_0 \gg \frac{1}{T_{\Delta} \bar{g}} \quad (3.50)$$

## Perturbaciones del sistema

Una condición aún más estricta requiere que el término de interacción sea más pequeño que la energía del sistema microscópico. Este sistema se verá afectado notoriamente por la interacción. En este caso, si la energía del sistema  $E_S$  es mayor que el término de interacción se tiene

$$E_S \gg \lambda(\Delta\hat{z})_0\bar{g} \langle \hat{q}(t^*) \rangle \quad (3.51)$$

La hipótesis referente al puntero, el desplazamiento de su momento y su incertidumbre en momento sigue vigente. Las ecuaciones anteriores se modifican sustituyendo  $E_T$  por  $E_S$ . Por lo tanto, el modelo y la validez de las predicciones realizadas valen si  $E_S T_\Delta \gg 1$ . Que se satisfaga esta condición no es inmediato, ya que refiere a sistemas diferentes. El sistema cumple que  $E_2 T_\Delta^S \gtrsim 1$ , donde el tiempo  $T_\Delta^S$  es el tiempo que demora la partícula microscópica en recorrer una distancia  $\Delta$ . Por lo tanto, si la partícula microscópica tiene una velocidad menor que el reloj se cumple que  $T_\Delta \gg T_\Delta^S$ , entonces en estos casos  $E_S T_\Delta \gg E_S T_\Delta^S \gtrsim 1$ , y se satisface la condición de validez del modelo  $E_S T_\Delta \gg 1$ .

Esta condición es similar a la considerada al comienzo del trabajo cuando se estudió el modelo del puntero. En este caso la dinámica del sistema es más lenta que la del reloj, por lo que durante la medida el sistema parece estático. También se utilizó esta relación en el análisis clásico para tomar como constante el valor del observable durante la medida.

En este caso, las cotas para la constante de acoplamiento  $\lambda$  deben ser:

$$\frac{E_2}{\bar{g}} \gg \lambda \langle \hat{q}(t^*) \rangle (\Delta\hat{z})_0 \gg \frac{1}{T_\Delta \bar{g}} \quad (3.52)$$

Se debe mencionar que estos resultados se basan en aproximaciones. El sistema preparado en un estado Gaussiano comenzará a dispersarse al transcurrir el tiempo, tanto en momento como en posición. En particular, los valores que pueden asignarse a  $T_\Delta^S$  deben ser tomados con precaución, debido a que el momento se dispersará por lo que distintas componentes del paquete de onda tendrán asignado distintos tiempos de vuelo en la ventana de ancho  $\Delta$ .

## Precisión de la medida

El cambio asintótico del puntero Ec(3.34) establece que el desplazamiento medio en su momento es

$$\delta \langle \hat{p}_z \rangle = \lambda \bar{g} T_\Delta \langle \hat{q}(t^*) \rangle \quad (3.53)$$

Un error en el desplazamiento del momento medio del puntero  $\Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle)$  representa un error en la determinación de la posición de la partícula  $\Delta \langle \hat{q} \rangle$ , de forma tal que:

$$\Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle) \approx \lambda \bar{g} \Delta(\langle \hat{q}(t^*) \rangle) T_\Delta \quad (3.54)$$

Esta situación se muestra en la Fig(3.2) donde se analizan dos posibles tiradas del experimento. El paquete de onda se desplazará cantidades ligeramente distintas, asociadas con el error con el que puede determinarse el valor del observable.

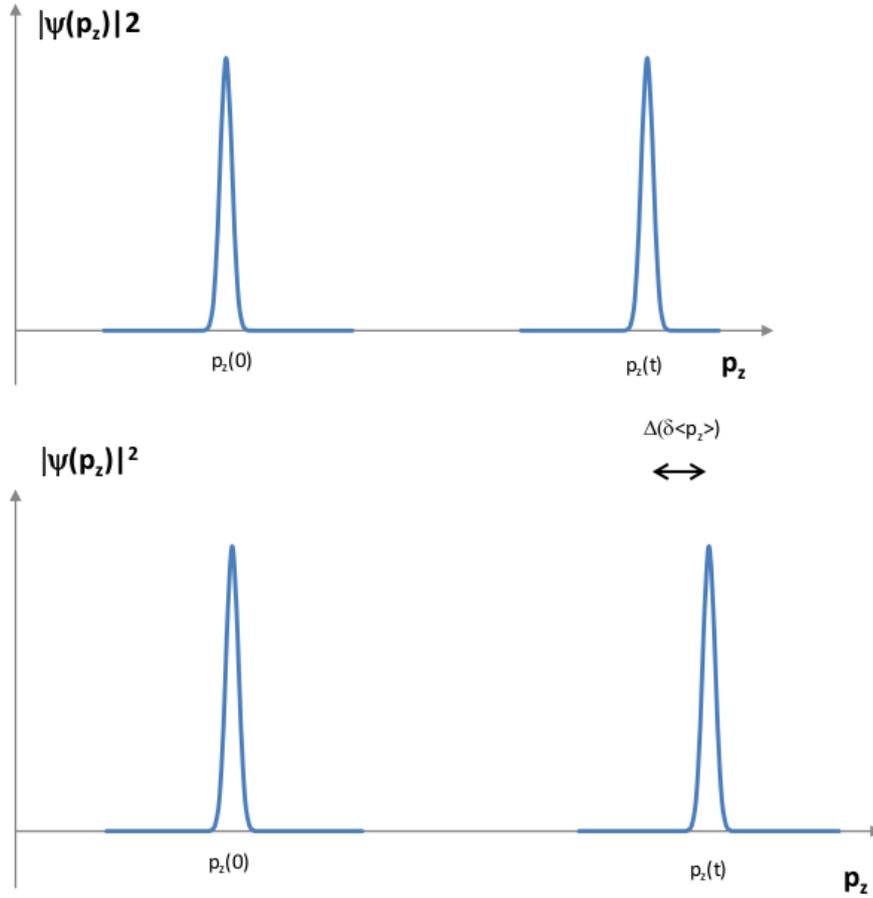


Figura 3.2: Error en la determinación del desplazamiento del puntero  $\Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle)$ . Se muestran dos posibles desplazamientos del paquete de ondas del puntero luego de la medición. Notar que se exagera ligeramente el valor de  $\Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle)$  en comparación al ancho del paquete de onda.

Confiando en el análisis perturbativo realizado anteriormente, pueden determinarse las cotas existentes para la precisión de la medida del observable del sistema, como se hizo en el caso clásico.

Partiendo de la Ec(3.48) para la validez del uso de teoría de perturbaciones y de la Ec(3.54) para la relación entre errores del observable y del momento del puntero, se obtiene que

$$\Delta(\langle \hat{z} \rangle)_0 \Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle) \approx \Delta(\langle \hat{z} \rangle)_0 \lambda \bar{g} \Delta(\langle \hat{q}(t^*) \rangle) T_\Delta \ll \frac{E_T \lambda \bar{g} \Delta(\langle \hat{q}(t^*) \rangle) T_\Delta}{\bar{g} \lambda \langle \hat{q}(t^*) \rangle} \quad (3.55)$$

Como se espera que sea una buena medida, el puntero debe fluctuar poco. Por lo tanto, la incertidumbre del desplazamiento del momento del puntero  $\Delta(\delta \langle \hat{p}_z \rangle)$  es aproximadamente del orden del ancho del paquete de onda  $\Delta \hat{p}_z$ .

Esto implica que

$$\Delta(\langle \hat{z} \rangle)_0 \Delta \hat{p}_z \ll \frac{\Delta(\langle \hat{q}(t^*) \rangle)}{\langle \hat{q}(t^*) \rangle} E_T T_\Delta \quad (3.56)$$

Usando el principio de incertidumbre para el estado del puntero, se obtiene una cota para la precisión con la que se puede medir el observable del sistema

$$\frac{1}{E_T T_\Delta} \ll \frac{\Delta(\langle \hat{q}(t^*) \rangle)}{\langle \hat{q}(t^*) \rangle} \quad (3.57)$$

Esta ecuación determina una cota que para relojes semiclásicos prácticamente no afecta al sistema, ya que el producto  $E_T T_\Delta$  es muy grande. Cabe señalar que este es el mismo resultado que se obtuvo clásicamente Ec(3.14).

### Efecto sobre el reloj

Sobre el reloj, el efecto de la interacción cambia la velocidad con la que se desplaza. En particular se estableció que este cambio está vinculado con la incertidumbre de la posición del puntero Ec(3.46). Por lo tanto,

$$\langle \hat{T}(t) \rangle \approx \langle \hat{T}(t) \rangle_0 + t \lambda^2 (\Delta \hat{z})_0^2 \frac{m_T^2}{m p_{T0}^3} \quad (3.58)$$

Para que la medición permita distinguir el valor de la posición del sistema debe satisfacerse la Ec(3.47), por lo que el momento adicional  $p_{Tb}$  ganado por el reloj es como mínimo

$$p_{Tb} \gg \frac{m_T}{m} \frac{1}{(\langle \hat{q}^* \rangle)^2 p_{T0}} \quad (3.59)$$

Relojes masivos y rápidos se ven menos afectados por la interacción.

Por otro lado, los sistemas con masa  $m$  menor son más propensos a perturbar el estado del reloj. Esto se debe a que la interacción, que representa intercambio de energía entre el sistema, puntero y reloj, es más sencilla si el sistema es menos masivo, afectando más al reloj. Esto se representa en la dependencia del reloj en función del inverso de la masa  $m$ .

Este resultado permite definir cómo construir el estado inicial del reloj de forma que la medida no imponga una perturbación muy grande. Por ejemplo, se desea usar el reloj para una medida posterior y estudiar las correlaciones en la medida de la posición y la variable del reloj.

Es también importante entender que sucede con la distribución de probabilidad del reloj luego de la medida. Por ejemplo, entender cómo cambia el ancho de la distribución de posiciones del reloj. Hemos estudiado este efecto calculando la variación del ancho  $\langle \Delta \hat{T}(t) \rangle = \sqrt{\langle \hat{T}^2(t) \rangle - \langle \hat{T}(t) \rangle^2}$ . El cálculo exacto de esta cantidad es difícil, porque fundamentalmente son los efectos de segundo orden los que interesan. Estos efectos dependen del ancho en posición del puntero. Podemos decir entonces que el incremento en el ancho de la distribución de tiempos producto de la medida es de la forma  $\langle \Delta \hat{T}(t) \rangle - \langle \Delta \hat{T}(t) \rangle_0 \propto \lambda \Delta \hat{z}_0$ .

## 3.4. Extensión del modelo

### 3.4.1. Limitaciones del modelo

Si un reloj, representado por una partícula libre, se mueve lo suficientemente rápido y es pesado, resultará más difícil cambiar su velocidad actuando solamente en una estrecha ventana de acción  $\Delta$ . Pero estas conclusiones deben ser tomadas con precaución. Además de las limitaciones producto de la aplicabilidad de la teoría de la perturbaciones existen otras limitaciones que deben destacarse y que son más fundamentales que las anteriores.

En primer lugar, como se observó anteriormente, la masa del reloj está acotada por efectos gravitatorios. Estos efectos impiden que la masa del reloj sea demasiado grande como para formar un agujero negro es su extensión espacial.

Por otro lado, la velocidad del reloj será limitada por la velocidad de la luz dentro del contexto de la relatividad especial. Esta condición limitará tanto la perturbación sobre el reloj como sobre el sistema, por ejemplo la precisión con la que se puede determinar un observable  $E_c(3.57)$ . Sin embargo, a priori, las expresiones encontradas recientemente no serán necesariamente válidas en el límite relativista. Esta es una desventaja de la solución encontrada, ya que en principio toda la formulación en términos de relojes reales fue independiente de cualquier límite relativista. En última instancia, es necesario revisar qué tipos de estados pueden representar buenos relojes en éstos límites y verificar la validez y limitaciones de la forma de la distribución de probabilidades  $P_t(T)$  de la  $E_c(2.19)$ .

Otra de las modificaciones que deben considerarse se refiere a sincronizar el reloj. Son necesarias dos descargas, una para la medida y una anterior para comenzar el experimento y preparar el estado. Esta descarga determina cuanto avanzó la partícula microscópica y permite determinar la magnitud de la interacción. También controla eventualmente cuánto se dispersó el paquete del reloj. Esta sincronización inicial tendrá consecuencias sobre los errores en la determinación del tiempo físico y en la preparación de los estado iniciales, por lo que la evolución del sistema sufrirá de efectos de decoherencia adicionales.

Finalmente, otra de la variable que es importante tener en cuenta es el cambio en las varianzas de los estados. Estas representarán cómo crece el ancho del paquete de onda luego de la medida. Se puede escribir el efecto de la medición sobre las varianzas, bajo la condición  $z_0 = 0$ . En este caso la variable del reloj y puntero tiene contribuciones a los ensanchamientos a segundo orden en  $\lambda$ , por lo que su efecto será pequeño. Un análisis más detallado requiere considerar este efecto.

### 3.4.2. Cálculo de probabilidades condicionales.

Se puede estudiar este sistema en base al formalismo de probabilidades condicionales, como se presentó en el capítulo 2. Lamentablemente, los resultados no son muy alentadores. Es un problema difícil pero que en principio debería arrojar resultados similares. El principal objetivo es obtener la modificación de la distribución de probabilidad  $P_t(T)$ .

En este caso se puede comenzar de forma similar al desarrollo de GPP, pero expresando las probabilidades condicionales en la imagen de interacción.

Cuando se escriba un operador en la imagen de interacción se coloca un superíndice  $I$  para indicarlo. De esta forma, la Ec(2.13) se modifica de acuerdo a

$$P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) \rho^I P_{T_0}^I(t))}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{T_0}^I(t) \rho_{SR}^I)} \quad (3.60)$$

Utilizando las propiedades de la traza y la definición anterior, con  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{int}$ , es inmediato mostrar la equivalencia entre la Ec(2.13) y la Ec(3.60).

La evolución de la matriz densidad en la imagen de interacción en términos del operador de evolución  $\hat{U}^I(t)$  verifica:

$$i \frac{d\hat{\rho}^I(t)}{dt} = [\hat{H}_{int}^I(t), \hat{\rho}^I(t)]$$

y por lo tanto

$$\hat{\rho}^I(t) = \hat{U}^I(t) \hat{\rho}^I(0) \hat{U}^{I\dagger}(t)$$

con  $\hat{U}^I(t) = \hat{\mathcal{T}} \left[ e^{-i \int_0^t \hat{H}_{int}^I(t') dt'} \right]$  como se estudió antes en la Sec(3.3.1).

Es necesario recurrir a alguna hipótesis adicional respecto al Hamiltoniano de interacción. En particular se supondrá que es pequeño, dominado por el valor de  $\lambda$  como en el ejemplo anterior. Luego, a primer orden en  $\lambda$  y para tiempos cortos vale

$$\hat{U}^I(t) \simeq \hat{I} - i \int_0^t \hat{H}_{int}^I(t') dt' \quad (3.61)$$

Por lo que la matriz densidad es aproximadamente

$$\hat{\rho}^I(t) \simeq \hat{\rho}^I(0) - i \int_0^t [\hat{H}_{int}^I(t'), \hat{\rho}^I(0)] dt' = \hat{\rho}^I(0) - i \int_0^t [\hat{H}_{int}^I(t'), \hat{\rho}^I(0)] dt' \quad (3.62)$$

Volviendo a la Ec(3.60) se puede expresar su numerador como

$$\text{Tr} (P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) \rho^I(t) P_{T_0}^I(t)) \simeq \text{Tr} \left( P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) \left( \hat{\rho}^I(0) - i \int_0^t [\hat{H}_{int}^I(t'), \hat{\rho}^I(0)] dt' \right) P_{T_0}^I(t) \right)$$

que muestra la corrección producto de la interacción entre el sistema, el reloj y el aparato

$$\text{Tr} (P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) \hat{\rho}^I(0) P_{T_0}^I(t)) - i \int_0^t dt' \text{Tr} \left( P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) [\hat{H}_{int}^I(t'), \hat{\rho}^I(0)] P_{T_0}^I(t) \right)$$

Utilizando la evolución libre de los estados y operadores se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr} (P_{O_0}^I(t) P_{T_0}^I(t) \rho^I(t) P_{T_0}^I(t)) &\simeq \text{Tr} (P_{O_0} P_{T_0} \hat{\rho}^0(t) P_{T_0}) \\ &- i \int_0^t dt' \text{Tr} \left( P_{O_0} P_{T_0} [\hat{H}_{int}^I(t' - t), \hat{\rho}^0(t)] P_{T_0} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde el superíndice 0 representa un objeto evolucionado únicamente con el Hamiltoniano libre.

Se puede proceder con el denominador de forma análoga. Finalmente se puede desarrollar la probabilidad condicional a primer orden en el Hamiltoniano de interacción:

$$\begin{aligned}
P(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) &\simeq P_{GPP}(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) & (3.64) \\
&+ iP_{GPP}(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T}) \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \int_0^t dt' \text{Tr} \left( P_{T_0} \left[ \hat{H}_{int}^I(t' - t), \hat{\rho}^0(t) \right] \right)}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{T_0} \hat{\rho}^0(t))} \\
&- i \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} dt \int_0^t dt' \text{Tr} \left( P_{O_0} P_{T_0} \left[ \hat{H}_{int}^I(t' - t), \hat{\rho}^0(t) \right] P_{T_0} \right)}{\int_{-\tau}^{\tau} dt \text{Tr} (P_{T_0} \hat{\rho}^0(t))}
\end{aligned}$$

siendo  $P_{GPP}(O \in I_{O_0, \Delta O} | T \in I_{T_0, \Delta T})$  la probabilidad condicional encontrada por Gambini, Porto y Pullin.

Se puede verificar que esta expresión está normalizada y es positiva. Sin embargo, la principal dificultad en este caso es la evolución del Hamiltoniano de interacción ya aparecerán contribuciones proporcionales al propagador de una partícula libre.

### 3.4.3. Camino al propagador

Uno de los principales objetivos del trabajo es encontrar una expresión para el propagador utilizando las herramientas adquiridas a lo largo del mismo. En particular, obtener una expresión similar a la obtenida por Gambini et al [22] pero utilizando la información accesible mediante el puntero y el reloj real.

En el mencionado artículo se estudia la probabilidad condicional de encontrar al sistema en la posición  $q'$  cuando el reloj se mide en  $T'$  si estaba en  $q$  cuando el reloj se encuentra en  $T$ :  $P(q', T' | q, T)$ . Esta cantidad está asociada al propagador de la teoría. Ahora el objetivo es expresar esta probabilidad en términos del puntero, ya que el momento del puntero se correlaciona con el valor de la posición del sistema. De esta forma se busca obtener una expresión lo más realista posible.

Por lo tanto, se busca obtener una expresión para la probabilidad condicional  $P(p'_z, T' | p_z, T)$ , que puede ser calculada aplicando la Ec(3.19) en un desarrollo similar al anterior. La idea es proceder en las condiciones donde el reloj siga siendo funcional. Es decir, no debe pasar mucho tiempo entre las dos medidas de forma tal de evitar una mayor dispersión del reloj y realizar la segunda medida en condiciones similares a la primera. También para la segunda medida debe tomarse en cuenta el error asociado al cambio de velocidad del reloj.

Por último, considerar un nuevo Hamiltoniano que indique una doble descarga del reloj en posiciones  $\bar{T}_1$  y  $\bar{T}_2$ . Esto se logra cambiando la función de acoplamiento  $g(\hat{T})$ .

## Capítulo 4

# Conclusiones

Este trabajo tiene como objetivo fundamental estudiar detalladamente los efectos que tienen las medidas sobre los sistemas de interés cuando se incluye un reloj real. Estos sistemas seleccionan algunos grados de libertad especiales que indican el tiempo físico. Las preguntas que tienen sentido en estos sistemas se refieren al tiempo físico  $\hat{T}$ .

Estas ideas han sido formalizadas dentro del contexto de la denominada interpretación de Montevideo de la mecánica cuántica. Una de las primeras consecuencias es que la evolución del sistema en términos del tiempo físico deja de ser unitaria debido a la dispersión asociada al observable del reloj real  $\hat{T}$ . Este efecto aniquila las coherencias del sistema siempre, debido a que no existen relojes perfectos. Esta limitación es de carácter fundamental y complementaria a los efectos de la decoherencia ambiental.

Por otro lado, esta interpretación cuenta con el noción de indecibilidad para definir la realización de una medida (o evento en general). Este concepto es capaz de resolver el problema de la medida y cierra por lo tanto con algunos de los problemas más fundamentales de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica.

En esta monografía se busca contribuir a uno de los aspectos prácticos de la interpretación: *¿cómo se realiza una medida descrita por un puntero?* y *¿qué efectos tiene éstas sobre el sistema y el reloj?*.

En base al esquema de von Neumann para medidas cuánticas se acopla un puntero al sistema para medir un cierto observable del mismo cuando el reloj real indique cierto valor. Este es un problema importante ya que es el paso previo a la determinación de los propagadores de la teoría.

El problema se abordó desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones. En este modelo el desplazamiento del momento del puntero es proporcional al valor del observable medido por el sistema. De esta forma es necesario observar al puntero para saber el valor del observable en el momento de la descarga del reloj real.

Bajo las hipótesis de validez de la solución se determinó que luego de la medida el puntero registra efectivamente la posición del sistema. También se encontró que la velocidad del reloj cambia de forma proporcional al ancho del paquete de onda del puntero. La conclusión general para tener relojes robustos es que deben ser partículas masivas y rápidas, aunque es de esperarse cotas fundamentales para estas cantidades.

Con respecto a problemas de interés que deben estudiarse a futuro en este modelo se pueden destacar algunas ideas:

- Encontrar las correcciones a la distribución de probabilidades  $P_t(T)$  de tiempos del reloj bajo la hipótesis de interacción.
- Encontrar expresiones para la modificación del propagador en el caso de la utilización de un puntero.
- Encontrar cotas fundamentales a los efectos de la medida sobre el reloj

Algunos de estos puntos se mencionaron sobre el final del capítulo 3.

También hay otros puntos de interés que escapan directamente al modelo estudiado:

- Efectos experimentales: los sistemas que parecen demostrar ser más propensos a estos efectos son aquellos que se acoplan a ambientes, con frecuencias de Bohr grandes y meso-o-macroscópicos. Experimentos que permitan estudiar estos efectos son muy complejos ya que requieren estados cuánticos de sistemas con muchos grados de libertad preservados durante tiempos relativamente largos. Diseñar experimentos que permitan observar estos efectos sería un gran avance.
- Extender estos efectos a sistemas fundamentales, por ejemplo, modelos cosmológicos y relojes atómicos, con el fin de estudiar sus consecuencias experimentales.

# Bibliografía

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, “Quantum Mechanics”, *John Wiley and Sons*, New York (1977)
- [2] M. Scholssbauer, Decoherence and the quantum-to-classical transition, *Springer Verlag-The Frontiers Collection-Springer*, Berlin Heidelberg (2007)
- [3] M. Scholssbauer, Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2005)
- [4] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, *Princeton University Press*, Princeton, (1955)
- [5] E. Joos, Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory, *Springer Verlag*, Berlin Heidelberg (2003)
- [6] J. Preskill, Lecture notes in Quantum Computation and Information, *California Institute of Technology* (1998). <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>
- [7] W. H. Zurek, Decoherence and the transition from quantum to classical, *Phys. Today* **44**, 36 (1991)
- [8] J-M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, Reversible decoherence of a mesoscopic superposition of field states, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1964 (1997); J-M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001)
- [9] H. D. Zeh, On the interpretation of measurement in quantum theory, *Found. Phys.* **1**, 69 (1970); W. H. Zurek, Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982); W. G. Unruh, W. H. Zurek, Reduction of a wave packet in quantum Brownian motion, *Phys. Rev. D* **40**, 1071 (1989); R. Omnés, The interpretation of Quantum Mechanics *Princeton University Press*, Princeton, NJ, (1994); E. Joos, H. D. Zeh, The emergence of classical properties through interaction with the environment, *Z. Phys. D* **59**, 223 (1985).

- [10] W. H. Zurek, Environment-induced superselection rules, *Phys. Rev. D* **26**, 1862–1880 (1982)
- [11] B. d’Espagnat, Veiled reality, *Addison Wesley*, New York (1995)
- [12] J. Hilgevoord, Time in quantum mechanics, *Am. J. of Phy.* **70-3**, 301 (2002)
- [13] W. Pauli, Encyclopedia of Physics, Ed- S. Flugge, *Springer Verlag*, Berlin Heidelberg (1958)
- [14] K. Gottfried, T-M. Yan, Quantum Mechanics: Fundamentals, *Springer*, New York, (2003)
- [15] G. Muga, R. Sala Mayato, I. Egusquiza, Time in Quantum Mechanics, *Springer-Lecture Notes in Physics*, **734**, Berlin Heidelberg (2008)
- [16] A. Andre, A. S. Sorensen, M. D. Lukin, Stability of atomic clocks based on entangled atoms, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230801 (2004); Y. Aharonov, J. Oppenheim, S. Popescu, B. Reznik, W. G. Unruh, Measurement of time of arrival in quantum mechanics, *Phys. Rev. A* **57**, 4130 (1998); Y. Aharonov, D. Bohm, Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy, *Phys. Rev.* **122**, 1649 (1961)
- [17] H. Salecker, E.P Wigner, Quantum Limitations of the Measurement of Space-Time Distances, *Phys. Rev.* **109**, 571 (1958)
- [18] A. Peres, Quantum theory: Concepts and Methods, *Kluwer Academic Publishers-Fundamentals Theories of Physics*, New York (1993)
- [19] A. Peres, Measurement of time with quantum clocks, *Am. J. Phys.* **48**, 552 (1980)
- [20] R. Gambini, J. Pullin, A First Course in Loop Quantum Gravity, *Oxford University Press*, New York (2011)
- [21] M. Henneaux, C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems, *Princeton University Press*, Princeton (1992)
- [22] R. Gambini, R.A. Porto, J. Pullin, S. Torterolo, Conditional probabilities with Dirac observables and the problem of time in quantum gravity, *Phys. Rev. D* **79** 041501(R) (2009)
- [23] C. Rovelli, Time in quantum gravity: An hypothesis, *Phys. Rev. D* **43**, 442 (1991)
- [24] D.N. Page, W.K. Wootters, *Phys. Rev. D* **43**, 2885 (1983)
- [25] R. Gambini, R.A. Porto, J. Pullin, Fundamental decoherence from quantum gravity: a pedagogical review, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 1143 (2007) [arXiv:gr-qc/0603090]

- [26] R. Gambini, R.A. Porto, J. Pullin, Relational physics with real rods and clocks and the measurement problem of quantum mechanics, *Found. of Phys.* **37-7**, 1074 (2007) [arXiv:quant-ph/0608243]
- [27] Y.J Ng, H. Van Dam, Limitations to Quantum measurement of distances, *Annals N.Y. Acad. Sci.* **755** 579 (1995)
- [28] R. Gambini, J. Pullin, Free will, undecidability, and the problem of time in quantum gravity, *FQXi The Nature of Time Essay Contest* (2008) [arXiv:quant-ph/0903.1859]
- [29] V. Bužek, R. Derka, S. Massar, Optimal Quantum Clocks, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2207–2210 (1999) [arXiv:quant-ph/9808042]
- [30] R. Bonifacio, S. Olivares, P. Tombesi, D. Vitali, Model-independent approach to nondissipative decoherence, *Phys. Rev. A* **61**, 053802 (2000)
- [31] R. Gambini, L. P. Garcia-Pintos, J. Pullin, An axiomatic formulation of the Montevideo interpretation of quantum mechanics, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, **42**, 256-263 (2011) [arXiv:quant-ph/1002.4209]
- [32] Y. Aharonov, B. Reznik, “Weighing” a Closed System and the Time-Energy Uncertainty Principle, *Phys. Rev. Lett.* **84** 1368, (2000)