

Generación de ondas de Lamb. Funciones de Green y su aplicación en los procesos de Inversión Temporal Acústica.

Ismael Núñez

Instituto de Física. Facultad de Ciencias. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay
Laboratoire Ondes et Acoustique. Université Paris 7.
ESPCI. Paris. France

Profesores Directores de Tesis:

Dr. Carlos Negreira Dr. Mathias Fink

Profesor colaborador: Dr. Ros K. Ing

Diciembre 2000

Capítulo 1

Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

1.1 Relaciones de dispersión.

Las ondas de Lamb son ondas mecánicas de propagación en placas infinitas delgadas (del orden de algunas longitudes de onda de espesor) con ambas superficies libres [5]. Se caracterizan por ser dispersivas y por la existencia de un conjunto discreto de modos de propagación, debido a que las componentes de los vectores de onda normales a la placa deben satisfacer las condiciones de frontera libre.

Estas ondas son detectadas por los desplazamientos normales que originan en las caras de la placa. Por tal motivo interesan solamente los estados de polarización L (longitudinal) y SV (shear vertical), que son los únicos que originan desplazamientos normales a las superficies de frontera 1-1. Los vectores $\mathbf{u}_L$ y $\mathbf{u}_T$ son los vectores de desplazamiento del medio para las ondas longitudinales y transversales respectivamente. Los vectores $\mathbf{k}_L$ y $\mathbf{k}_T$ son los respectivos vectores de propagación.

A causa de la conversión de modos en la reflexión, cada uno de estos estados de polarización genera dos ondas con ambas polarizaciones que se reflejan en diferentes direcciones, toda vez que las ondas alcanzan las superficies superior e inferior de la placa.

Una forma eficaz de resolver el problema es plantearlo en términos de los potenciales escalar φ y vectorial Ψ de desplazamiento, con las condiciones de frontera libre en las superficies de la placa[1], (Apéndice I). Esto conduce a dos ecuaciones independientes para el número de onda k de las ondas de Lamb propagándose en la dirección x de la figura 1-1, ecuaciones I.23 y I.24, que reproducimos acá como las ecuaciones (1.1) y (1.2).

$$(k^2 - s^2)^2 \sin qd \cos sd + 4k^2 qs \sin sd \cos qd = 0, \quad (1.1)$$

$$(k^2 - s^2)^2 \sin sd \cos qd + 4k^2 qs \sin qd \cos sd = 0, \quad (1.2)$$

donde

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - k^2, \quad s^2 = \left(\frac{\omega}{v_T}\right)^2 - k^2, \quad (1.3)$$

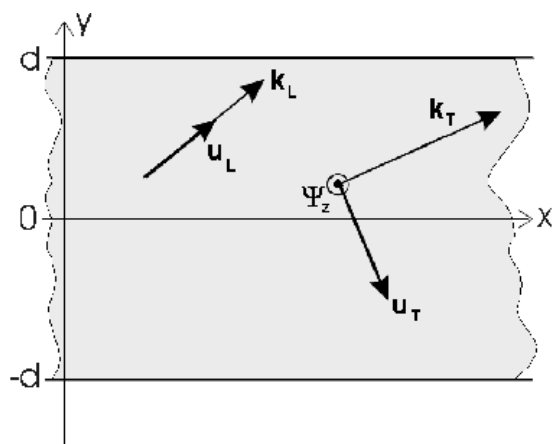


Figura 1- 1. Placa con ondas transversales (polarización SV) y longitudinales (polarización L).

1.2 Modos de propagación de ondas en la placa.

1.2.1 Ondas de propagación

Las soluciones reales $k_A(\omega)$ de (1.1) y (1.3) constituyen una serie de curvas llamadas *modos antisimétricos* de propagación de las ondas de Lamb, porque al calcular con ella los desplazamientos del medio (ecuación 1.28) resulta que las componentes normales a la placa tienen igual sentido sobre las fronteras.

Las soluciones reales $k_S(\omega)$ de (1.2) y (1.3) constituyen otra serie llamada de *modos simétricos*, porque los desplazamientos (ecuación 1.29) resultan de sentidos opuestos sobre las superficies de frontera.

Los perfiles de desplazamientos instantáneos para ambos modos de propagación se muestran en la figura 1- 2. Las ecuaciones 1.28 y 1.29 para los desplazamientos se reproducen en las (1.4) y (1.5).

$$\begin{aligned} u_{Ax} &= kB \left[\sin q_A y + \frac{2s_A q_A \cos q_A d}{(k_A^2 - s_A^2) \cos s_A d} \sin s_A y \right] \exp \left(i k_A x + i \frac{\pi}{2} \right), \\ u_{Ay} &= qB \left[\cos q_A y - \frac{2k_A^2 \cos q_A d}{(k_A^2 - s_A^2) \cos s_A d} \cos s_A y \right] \exp (i k_A x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} u_{Sx} &= kA \left[\cos q_S y + \frac{2q_S s_S \sin q_S d}{(k_S^2 - s_S^2) \sin s_S d} \cos s_S y \right] \exp \left(i k_S x + i \frac{\pi}{2} \right), \\ u_{Sy} &= qA \left[-\sin q_S y + \frac{2k_S^2 \sin q_S d}{(k_S^2 - s_S^2) \sin s_S d} \sin s_S y \right] \exp (i k_S x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de (1.4) corresponden a las componentes de desplazamientos para los modos antisimétricos, identificado por el subíndice A en todos los parámetros que dependen del modo.

Las ecuaciones de (1.5) corresponden a las componentes de desplazamientos para los modos simétricos, identificado por el subíndice S en todos los parámetros que dependen del modo.

Mediante cálculo numérico, se pueden resolver las relaciones de dispersión $k_S(\omega)$ de (1.2) y (1.3) para los modos simétricos de propagación de las ondas de Lamb, así como las relaciones $k_A(\omega)$ de (1.1) y (1.3) para los modos antisimétricos de propagación.

Los cálculos fueron hechos para el aluminio, donde las velocidades de ondas longitudinal y transversal son, respectivamente

$$v_L = 6.42 \text{ mm}/\mu\text{s}, \quad v_T = 3.04 \text{ mm}/\mu\text{s}. \quad (1.6)$$

Con estos valores, se obtuvieron las gráficas de la figura 1- 3 para los modos simétricos, y de la figura 1- 4 para los antisimétricos.[8]

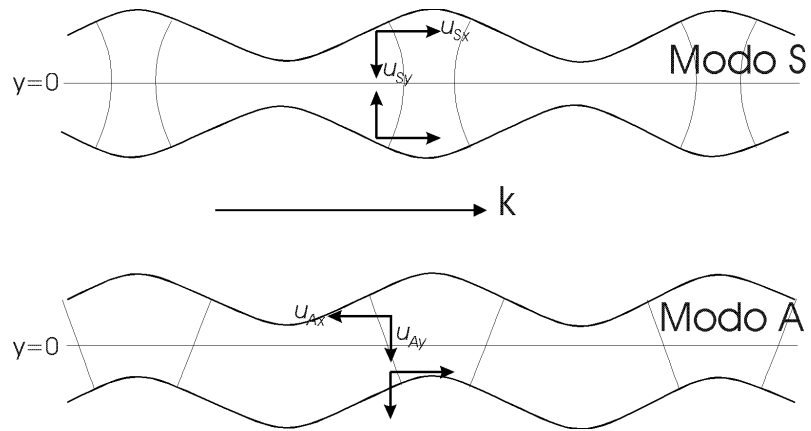


Figura 1- 2. Modo simétrico (S) y antisimétrico (A) de propagación de ondas de Lamb

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

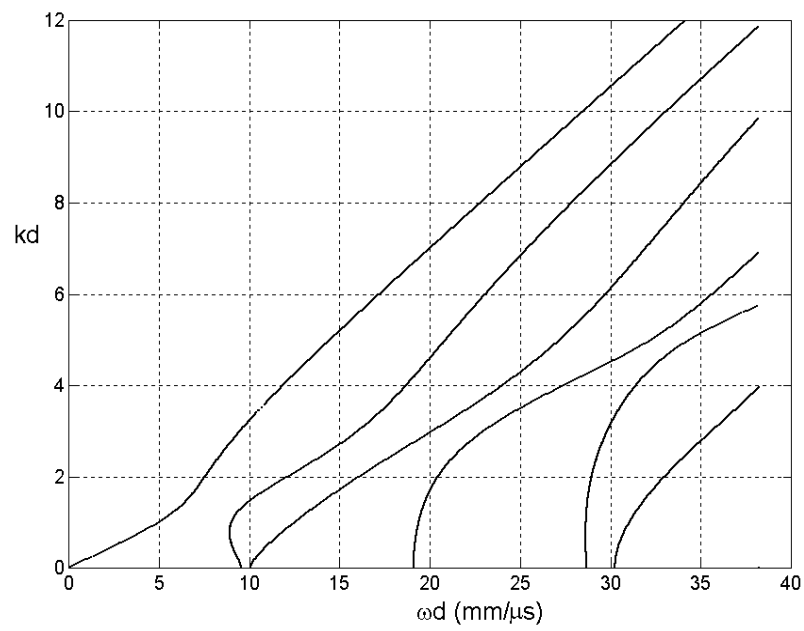


Figura 1- 3. Relaciones de dispersión para modos simétricos de ondas de Lamb en una placa de espesor $2d$

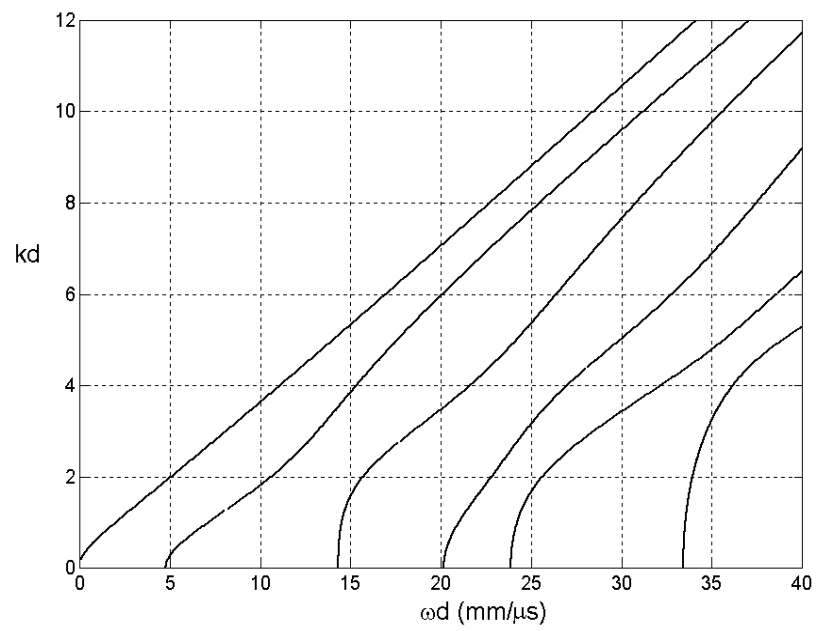


Figura 1- 4. Relaciones de dispersión para modos antisimétricos de ondas de Lamb en una placa de espesor $2d$

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

En las figuras 1- 3 y 1- 4 se observa que, a medida que la frecuencia aumenta, empiezan a aparecer nuevos modos de propagación. Los valores mínimos de frecuencias en que aparecen los nuevos modos es fácilmente calculable de las ecuaciones (1.2) y (1.3) para los modos simétricos (figura 1- 3), así como de las ecuaciones (1.1) y (1.3) para los antisimétricos (figura 1- 4).

Haciendo $k = 0$ en las relaciones de dispersión para modos simétricos, (1.2)) y (1.3), obtenemos que las ecuaciones se satisfacen para los valores de frecuencia tales que

$$\omega d = n\pi v_T, \quad \text{ó bien } \omega d = (2n + 1)\frac{\pi}{2}v_L, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Considerando que $v_L > 2v_T$ según (1.6), estas frecuencias en que aparecen nuevos modos simétricos puede ordenarse en una serie creciente de valores

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = \pi \frac{v_T}{d}, \omega_2 = \pi \frac{v_L}{2d}, \omega_3 = 2\pi \frac{v_T}{d}, \omega_4 = 3\pi \frac{v_T}{d}, \omega_5 = 3\pi \frac{v_L}{2d}, \dots \quad (1.8)$$

que indican los puntos de origen de las diferentes curvas de la figura 1- 3.

Cada modo simétrico se identifica con estos subíndices. Así, la primera curva de la figura 1- 3 corresponde al modo S_0 (simétrico de orden cero), la curva siguiente corresponde al modo S_1 , etc.

De igual forma, haciendo $k = 0$ en las relaciones de dispersión para modos antisimétricos, (1.1) y (1.3), obtenemos los valores de frecuencia

$$\omega d = n\pi v_L, \quad \text{ó bien } \omega d = (2n + 1)\frac{\pi}{2}v_T, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Éstos corresponden a la serie creciente de valores

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = \pi \frac{v_T}{2d}, \omega_2 = 3\pi \frac{v_T}{2d}, \omega_3 = \pi \frac{v_L}{d}, \omega_4 = 5\pi \frac{v_T}{2d}, \omega_5 = 7\pi \frac{v_T}{2d}, \dots \quad (1.10)$$

que indican los puntos de origen de las diferentes curvas de la figura 1- 4, modos A_0, A_1, A_2 , etc.

De estas consideraciones deducimos que, para placas muy delgadas, sólo los modos S_0 y A_0 estarán presentes, aún para frecuencias razonablemente elevadas (p. ej., valores de $\omega d < 5 \text{ mm}/\mu\text{s}$ en las figuras 1- 3 y 1- 4).

Las velocidades de fase para los modos simétricos y antisimétricos aparecen, en función de la frecuencia, en las figuras 1- 5 y 1- 6. Obsérvese que el modo S_0 es relativamente poco dispersivo para frecuencias y espesores de placa tales que $\omega d < 5 \text{ mm}/\mu\text{s}$ y $\omega d > 10 \text{ mm}/\mu\text{s}$. Por el contrario, el modo A_0 es altamente dispersivo para $\omega d < 5 \text{ mm}/\mu\text{s}$.

Cuando se excita la placa con una señal pulsada de corta duración, es interesante observar las velocidades de grupo de los diversos modos en función de la frecuencia. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras 1- 7 y 1- 8. Obsérvese que para bajas frecuencias ($\omega d < 5 \text{ mm}/\mu\text{s}$) la velocidad de grupo del paquete correspondiente al modo S_0 es mayor

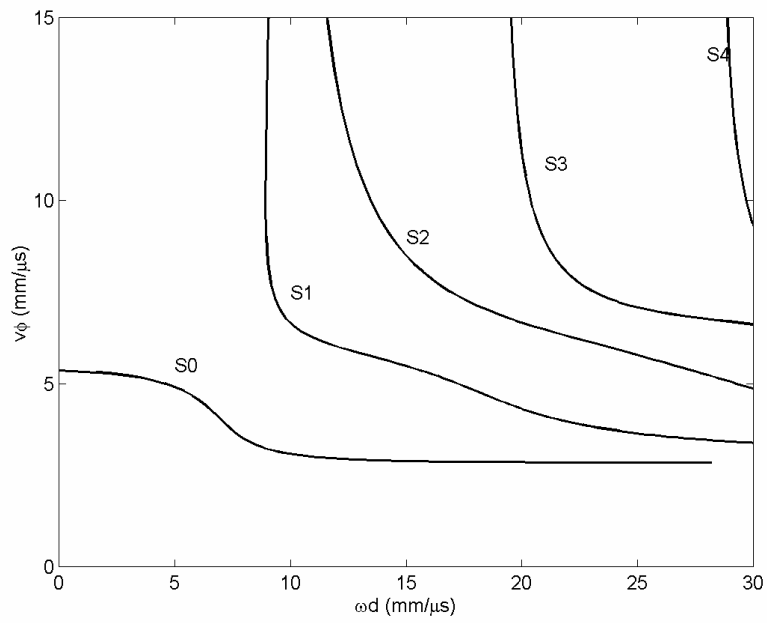


Figura 1- 5. Velocidades de fase para los modos simétricos

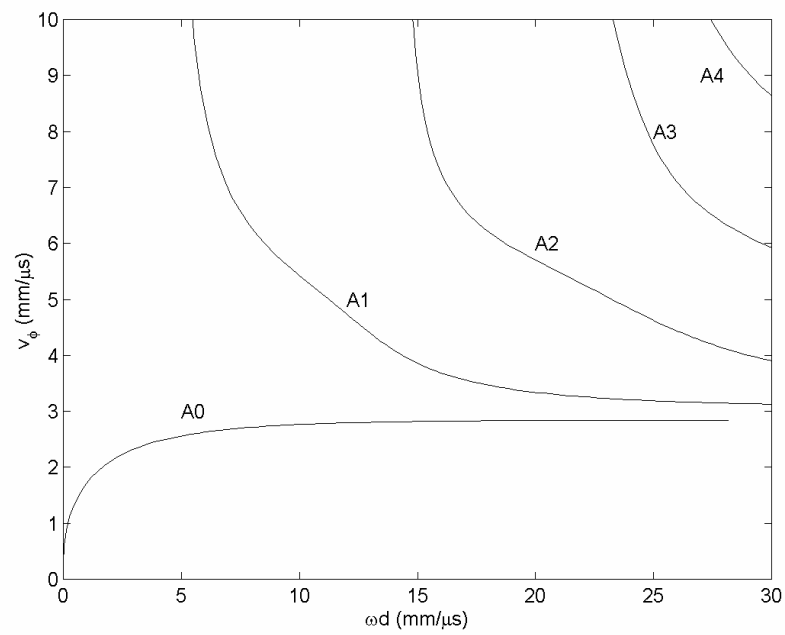


Figura 1- 6. Velocidades de fase para los modos antisimétricos

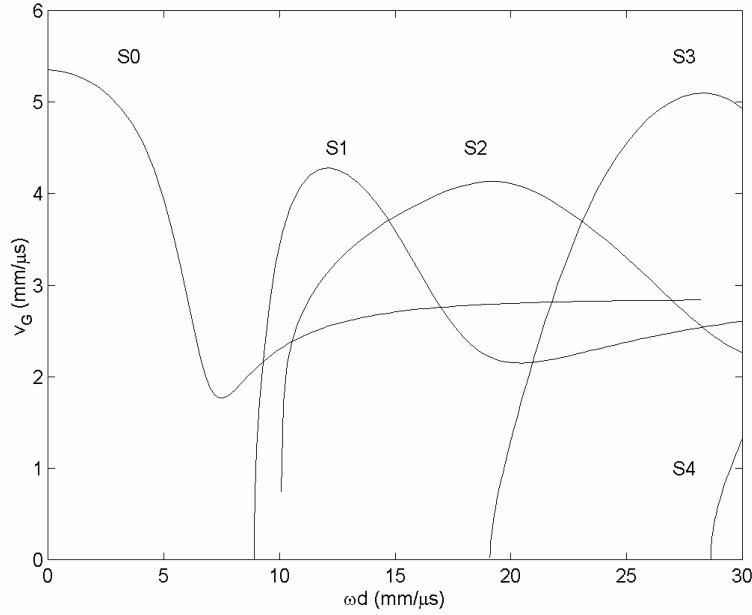


Figura 1- 7. Velocidades de grupo para los modos simétricos.

que la del paquete del modo A_0 . Esto determina la paulatina separación de ambos modos a medida que viajan en la placa. La baja dispersión del modo S_0 a bajas frecuencias también hace que el paquete de ondas que lo forma se mantenga relativamente estrecho durante su viaje. El modo A_0 , por el contrario, se expande considerablemente.

Sobre una placa de aluminio de 1.1 mm de espesor, se generan ondas de Lamb mediante un impacto láser de 15 ns de duración en régimen de ablación. La señal detectada por un transductor sobre una cuña de Plexiglás a 260 mm de la fuente se muestra en la figura 1-9[9]. El origen del tiempo coincide con el impacto del láser.

En la figura 1- 9 se observa un primer paquete, poco dispersado, que llega primero (antes de los 40 μs). Luego otro paquete bien disperso entre 40 y 120 μs . De acuerdo a lo dicho más arriba, el primer paquete correspondería principalmente al modo S_0 , en tanto que el segundo al modo A_0 .

1.2.2 Ondas evanescentes

Las relaciones de dispersión (1.1) y (1.2), conjuntamente con las igualdades de (1.3), también tienen raíces complejas para los números de onda k_A y k_S respectivamente.

Para obtener expresamente estas soluciones, sustituimos en dichas ecuaciones

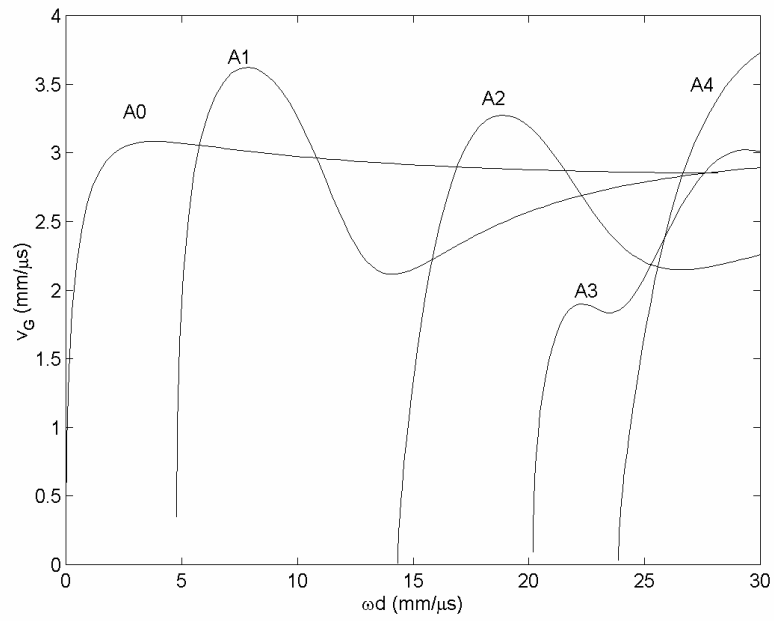


Figura 1- 8. Velocidad de grupo para los modos antisimétricos.

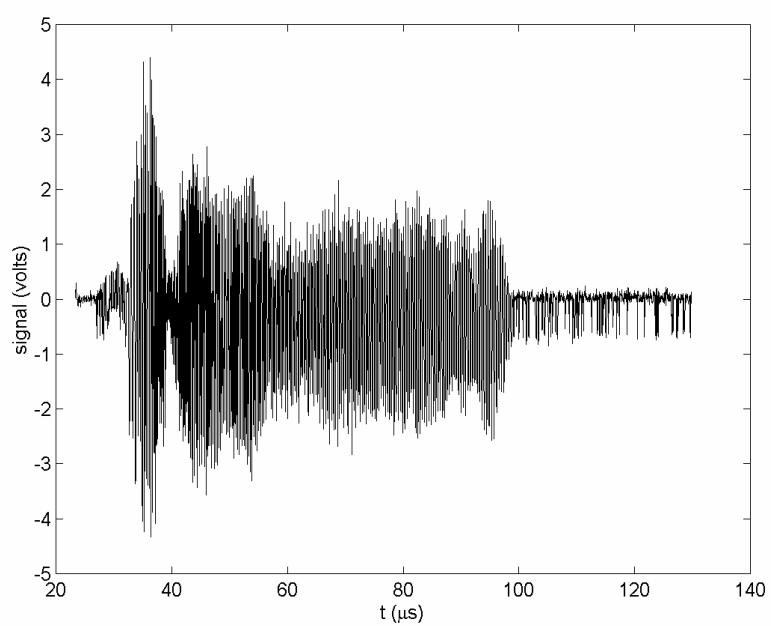


Figura 1- 9. Señal detectada a 260 mm del impacto láser de 15 ns de duración.

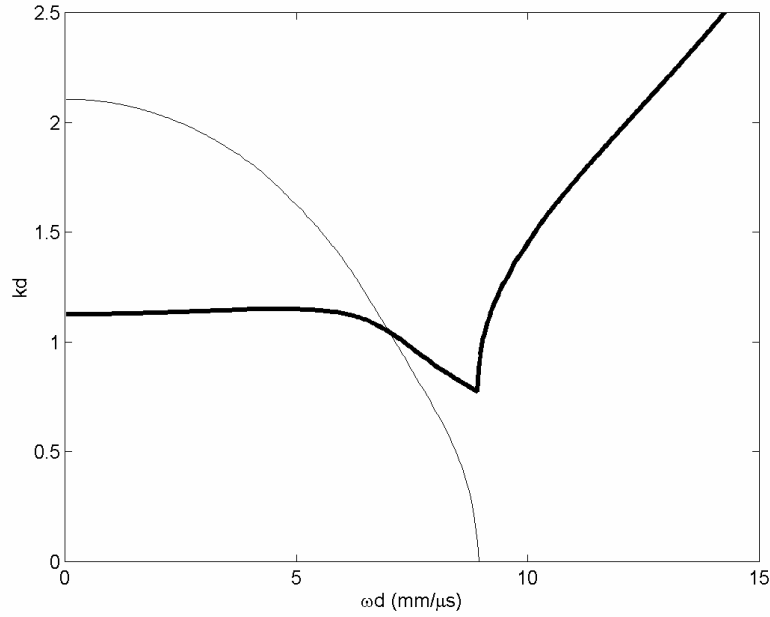


Figura 1- 10. Partes real (línea gruesa) e imaginaria (línea delgada) del modo S_1 propagándose en la dirección $+x$.

$$k = \beta + i\kappa, \quad (1.11)$$

donde β es real y κ es real y positivo. El factor exponencial de propagación de las ondas en la dirección del eje $+x$ de las ecuaciones de los desplazamientos 1.28 y 1.29 resulta entonces $\exp(ikx) = \exp(i\beta x) \exp(-\kappa x)$, lo que indica que las ondas se atenúan exponencialmente a medida que se propagan. Tales ondas se llaman *evanescentes* y sólo pueden ser apreciadas en la vecindad de la fuente.

A excepción de los modos S_0 y A_0 , todos los demás tienen parte imaginaria. En las figuras 1- 10, 1- 11, 1- 12 y 1- 13 se muestran las curvas complejas de dispersión para los modos S_1 , S_2 , A_1 y A_2 respectivamente, propagándose en la dirección $+x$. Se ha representado la región de las bajas frecuencias, que es la de mayor interés para la observación de los modos complejos.

Más allá de las frecuencias de origen de los modos de propagación (ecuaciones (1.8) para modos simétricos y (1.10) para antisimétricos), las partes imaginarias de los números de onda son nulas. Pero para frecuencias menores que ellas los modos también existen aunque

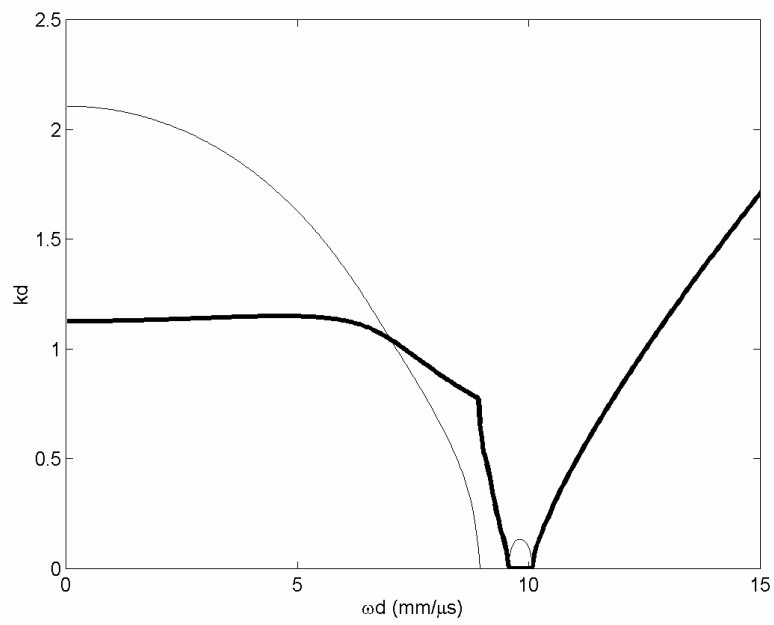


Figura 1- 11. Partes real (línea gruesa) e imaginaria (línea delgada) del modo S_2 propagándose en la dirección $+x$.

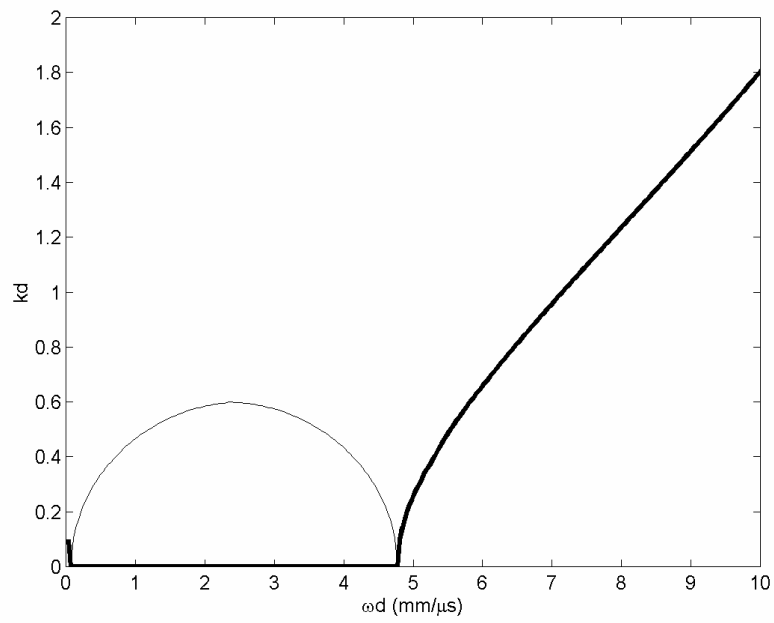


Figura 1- 12. Partes real (línea gruesa) e imaginaria (línea delgada) del modo A_1 propagándose en la dirección $+x$.

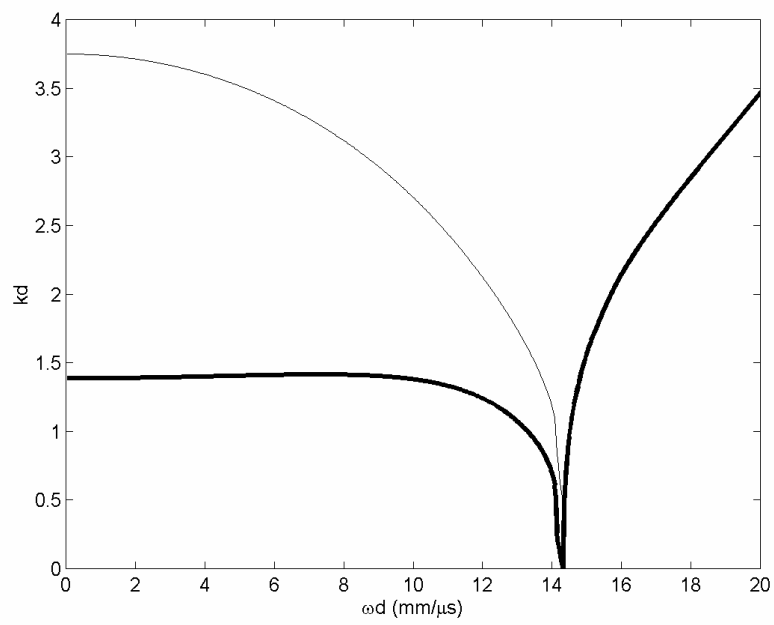


Figura 1- 13. Partes real (línea gruesa) e imaginaria (línea delgada) del modo A_2 propagándose en la dirección $+x$.

con número de onda complejo. Los valores positivos de las partes imaginarias generan exponenciales decrecientes para $x > 0$, cuando la onda se expresa como $\exp(ikx)$.

Para algunos modos, como el A_1 en la figura 1- 12, la respuesta a bajas frecuencias es imaginaria pura. Esto significa que la dependencia espacial del modo a esas frecuencias es una exponencial decreciente pura y no hay onda propagada.

Para los otros modos mostrados, en cambio, existe parte real a bajas frecuencias. Esto significa que hay una onda de propagación aunque su amplitud se va extinguiendo exponencialmente con la distancia.

En cualquier caso, a distancias suficientemente grandes de las fuentes de ondas de Lamb, solamente los modos con valores puramente reales de número de onda serán detectados (figuras 1- 3 y 1- 4).

1.3 Detección de ondas de Lamb

La detección más usual para las ondas de Lamb en placas consiste en la medida de los desplazamientos normales a la placa en su superficie. Esto corresponde a los desplazamientos u_{Ay} y u_{Sy} en los esquemas de la figura 1- 2.

Los métodos de detección utilizados pueden ser electromecánicos u ópticos. Los métodos electromecánicos utilizan un sistema de transducción de las vibraciones normales de la placa a señales eléctricas. Siempre implican alguna perturbación de las propias ondas que se pretenden medir. Los métodos ópticos utilizan usualmente un proceso interferométrico para la observación de las vibraciones normales de la superficie. Son prácticamente no intrusivos.

1.3.1 Métodos electromecánicos

Uno de los métodos menos intrusivos de este tipo consiste en la utilización de un hidrófono muy delgado (de "aguja") y sensible, acoplado a la superficie de la placa con una pequeña gota de líquido.

Tanto el diámetro del hidrófono como el espesor del acoplante líquido es de algunas décimas de milímetro. Esto determina que la perturbación producida sea mínima, y que la región de detección sea relativamente pequeña como para suponer que estamos relevando la señal en un "punto" de la placa.

El voltaje de la señal eléctrica proporcionada por el hidrófono es proporcional a la presión acústica ejercida sobre su membrana. Por otra parte, la pequeñez de la zona de detección nos permite considerar que los desplazamientos de los diferentes puntos de la placa son prácticamente los mismos en toda dicha región. De forma que la onda generada en el fluido acoplante, y que transporta la información hacia la membrana del hidrófono, es prácticamente una onda plana. De esta forma, la velocidad de las partículas del fluido es proporcional a la presión acústica en todo punto e instante. Esto es,

$$p(\mathbf{r}, t) = Zv(\mathbf{r}, t), \quad (1.12)$$

donde $Z = \rho c$ es la impedancia acústica del fluido para ondas planas, siendo ρ la densidad

del fluido y c la velocidad de propagación de las ondas en él.

La pequeña distancia entre la membrana del hidrófono y la superficie de la placa (menor que la longitud de onda dominante) permite que consideremos que la velocidad del fluido en la membrana detectora sea la misma que la velocidad normal de la superficie de la placa. La expresión (1.12) determina entonces que la señal obtenida a la salida del hidrófono (proporcional a la presión) sea proporcional a la velocidad normal de la superficie de la placa. La figura 1- 25 muestra una señal de ondas de Lamb tomada con un hidrófono.

1.3.2 Métodos ópticos

Los métodos ópticos de detección son completamente no intrusivos, pueden medir directamente los desplazamientos de la superficie desde valores sub-angstroms y se pueden calibrar con precisión. Su inconveniente fundamental es su alta sensibilidad a todo tipo de vibraciones ambientales, por lo que requieren un buen montaje óptico y usualmente un filtrado electrónico de la señal.

Diferenciaremos dos tipos de métodos ópticos: los interferométricos puntuales y los de gran campo.

1.3.2.1 Interferometría puntual La interferometría puntual utiliza alguna variedad de interferómetro clásico, cuyo haz de señal se focaliza con una lente en una zona casi puntual de la placa. De la interferencia de este haz de señal con el haz de referencia se obtiene el desplazamiento instantáneo del punto de la placa bajo observación.

Debido a su gran estabilidad y eficacia para la filtración de los ruidos, mencionaremos acá la variedad de interferómetro heterodino, que utiliza el haz de señal o de referencia modulado a una frecuencia mucho mayor que las frecuencias contenidas en la vibración a analizar (varias decenas de MHz contra algunos MHz).

La figura 1- 14 representa en forma esquemática el funcionamiento de un interferómetro heterodino tipo Mach-Zender. Este método fue especialmente desarrollado por D. Royer y E. Dieulesaint[20],[21] en el Laboratoire Ondes et Acoustique de la Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris (ESPCI).

En la figura 1- 14, un láser continuo L emite un haz que es separado por el cubo divisor de haz C1 en un haz que será el de referencia (R) y otro que será el de señal (S).

El haz S pasa por el modulador acusto-óptico M que le introduce una modulación en amplitud con una frecuencia fija entre 60 y 80 MHz. Se refleja en la muestra T y es modulado en fase por las vibraciones que en ella se producen.

Los haces de referencia R y de señal S se vuelven a reunir e interfieren sobre la superficie del fotodiodo PH. El sistema E es la electrónica de detección que recupera la señal eléctrica proporcional al desplazamiento instantáneo en la superficie de T.

En el Apéndice V se deducen las expresiones que conducen a la señal de salida a partir de la interferencia de ambos haces.

En la figura 1- 15 se muestra una señal de ondas de Lamb en una placa de aluminio de 0.75 mm de espesor, registrada con un interferómetro heterodino como el de la figura 1- 14. La excitación fue producida con un impacto láser de potencia en el instante $t = 0$ de la figura.

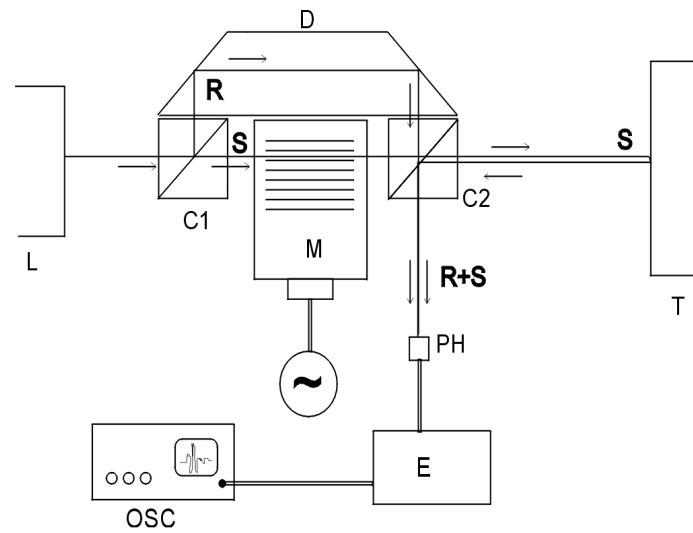


Figura 1- 14. Esquema de un interferómetro heterodino tipo Mach-Zender

Seccion 1.3 Detección de ondas de Lamb

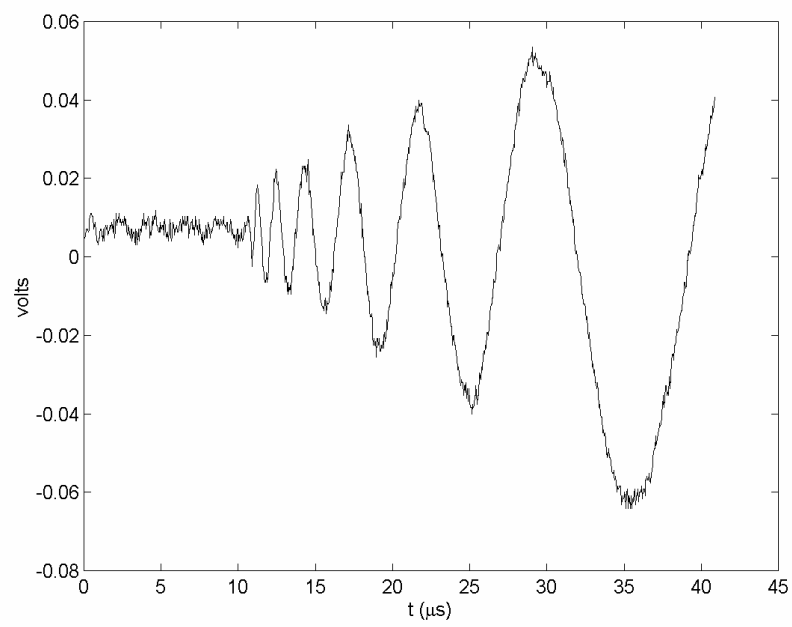


Figura 1- 15. Ondas de Lamb en una placa de 0.75 mm de espesor relevadas con un interfer-
ómetro heterodyno.

1.3.2.2 Métodos ópticos de gran campo Los métodos ópticos de campo grande para detectar las vibraciones acústicas se caracterizan por la posibilidad de observar el estado de vibraciones en una región relativamente extensa del medio (algunas decenas de centímetros cuadrados de área iluminada).

Entre éstos, el llamado método *schlieren* o de campo oscuro ha sido aplicado con diversas modificaciones desde la época de Foucault para observar variaciones de fase estáticas en la luz que se refleja en superficies especulares no planas, o atraviesa medios transparentes aberrantes (llamados objetos "de fase", porque producen modificaciones en la fase luminosa y no en su amplitud).

En el Apéndice VI se deducen las expresiones que vinculan la intensidad luminosa en el campo extenso con las variaciones de fase que experimenta la luz reflejada en una superficie especular pero deformada por ondas mecánicas.

En el Laboratorio de Acústica Ultrasonora del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias de Montevideo, hemos utilizado este método para la observación de campos acústicos monocromáticos de alta frecuencia producidos en el seno del agua[22],[23], y para la observación de la presión de radiación acústica proveniente desde el interior sobre la membrana superficial del agua[24],[25].

Considerando, para simplificar, que el factor de magnificación M del sistema óptico es la unidad, la expresión VI.10 del Apéndice determina que la intensidad luminosa en un punto $-x, -y$ de la imagen es

$$I(-x, -y) = I_0 \left\langle [\varphi(x, y, t)]^2 \right\rangle_t, \quad (1.13)$$

donde φ es la variación de fase luminosa producida por las vibraciones de la superficie que refleja la luz. Si el campo de desplazamientos sobre la misma es $u(x, y, t)$, tendremos que

$$\varphi(x, y, t) = 2ku(x, y, t). \quad (1.14)$$

Substituyendo esta expresión en (1.13) resulta

$$I(-x, -y) = 4k^2 I_0 \left\langle [u(x, y, t)]^2 \right\rangle_t. \quad (1.15)$$

Si la vibración de la superficie es alguna forma de onda estacionaria $u(x, y, t) = U(x, y) \sin(\omega t + \alpha)$ o una onda de propagación monocromática $u(x, y, t) = U(x, y) \sin(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$, entonces la media temporal de su módulo al cuadrado en (1.15) arroja en ambos casos el mismo resultado

$$I(-x, -y) = 2k^2 I_0 |U(x, y)|^2. \quad (1.16)$$

La expresión (1.16) determina que la intensidad luminosa de cada punto en la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal acústica, o sea, a la propia intensidad acústica. Esto hace que el método proporcione buenos resultados en estos casos[22],[23],[24],[25].

No obstante, para regímenes pulsados, la media temporal de (1.15) resulta afectada por

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

la razón entre la duración del pulso τ y el intervalo entre pulsos T , de forma que el resultado (1.16) se convierte en

$$I(-x, -y) = \frac{\tau}{T} 2k^2 I_0 |U(x, y)|^2. \quad (1.17)$$

Como siempre es $\tau/T \ll 1$, asociado al hecho de que las amplitudes U son de por sí muy pequeñas, la intensidad luminosa I no resulta apreciable en la pantalla, y el método no es eficaz.

Una forma de adaptarlo al regimen pulsado sería no utilizar una iluminación continua. En su lugar se puede utilizar una iluminación periódica e intensa pero de corta duración, sincronizada con la emisión de los pulsos. Esto hace que la media temporal en (1.15) se extienda solamente al tiempo de duración del destello luminoso, que si es suficientemente breve nos daría el valor instantáneo de desplazamiento, en la forma

$$I(-x, -y, t) = 4k^2 I_0 [u(x, y, t)]^2. \quad (1.18)$$

Una dificultad adicional a la aplicación de este método para la observación de ondas de superficie en sólidos, es la calidad óptica exigida a la superficie del material. Debido a su sensibilidad para detectar deformaciones estáticas del frente luminoso con respecto al plano, el pulido de la superficie metálica debe de ser, como máximo, a nivel de algunas longitudes de onda. Esto introduce una dificultad práctica considerable, sobre todo para áreas de observación de varios cm^2 . Una posible forma de resolver este problema es la utilización de un conjugador de fase óptico que corrija las aberraciones introducidas por las deformaciones estáticas de la superficie.

1.4 Generación de ondas de Lamb

Cualquier tipo de excitación local o extendida sobre la frontera o en el interior de la placa generará ondas de Lamb. Nosotros nos restringiremos a excitaciones sobre una de las caras de la placa. Estudiaremos excitaciones muy localizadas, como las producidas por el impacto de un haz láser de potencia focalizado sobre la superficie, y excitaciones relativamente extendidas, como las provocadas por un transductor sobre una cuña de acrílico acoplada a la superficie de la placa.

En todo caso utilizamos excitaciones pulsadas, con una banda relativamente ancha de frecuencias, lo que nos permite generar una superposición de modos simétricos y antisimétricos que se van dispersando con el tiempo.

Describiremos muy someramente otros métodos que no utilizaremos, pero que son conocidos y útiles para la generación de ondas de Lamb y otras ondas de superficie en sólidos, como los transductores interdigitales y los EMAT (electromagnetic-acoustic transducers).

1.4.1 Transductores interdigitales

Un estudio bastante exhaustivo de los transductores interdigitales se encuentra en la obra

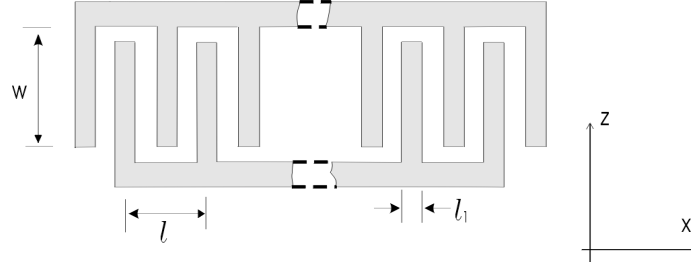


Figura 1- 16. Esquema del transductor interdigital sobre la placa en $y = 0$ para generar ondas de superficie en las direcciones $\pm x$.

de D. Royer y E. Dieulesaint[14]. También están tratados en forma más resumida en G.S. Kino[3] y en B.A. Auld[2].

El transductor consiste en un par de electrodos metálicos con forma de peines invertidos uno con respecto al otro, como se muestra en la figura 1- 16. La distancia l entre los "dedos" de cada peine es constante, así como la separación $l/2$ entre los dedos de uno y otro electrodo. El espesor de cada dedo se indica con l_1 en la figura.

Estos electrodos metálicos se deben depositar sobre un sustrato piezo-eléctrico, por lo que este método de generación es particularmente apto para producir ondas de superficie en placas piezo-eléctricas. Al aplicarse un voltaje variable entre ambos electrodos, se generan campos eléctricos entre cada pareja de dedos consecutivos del dispositivo, a causa de las cargas instantáneas Q y $-Q$ producidas sobre ellos por el generador. Estos campos eléctricos tienen, en cada instante, sentidos alternativamente opuestos en cada espacio "interdigital" del dispositivo, y su intensidad es proporcional al valor de la carga Q en ese instante.

A causa del efecto piezo-eléctrico, los campos eléctricos producirán una deformación mecánica sobre la superficie, que también tendrá, en cada instante, sentidos alternativamente opuestos en cada espacio interdigital (dilataciones y compresiones del sustrato). Dentro de los límites de la linealidad de los procesos, estas deformaciones de la superficie serán proporcionales al campo eléctrico y, por consiguiente, a la carga Q en cada dedo del transductor.

Si el voltaje aplicado varía en forma alterna con una frecuencia ω , se generará una onda de superficie con esa frecuencia, que viajará parte hacia un lado ($x < 0$) y parte hacia el otro ($x > 0$) fuera de los límites del transductor. Si la velocidad de la onda de superficie es v , entonces tendrá un número de onda $k = \omega/v$.

El aporte hecho por el elemento interdigital número n a la amplitud de las ondas generadas en el punto x más allá de los límites del transductor, se puede poner como

$$A_n(x, x_i, \omega) = \alpha Q_n(\omega) \exp[ik(x - x_n)], \quad (1.19)$$

donde α es una constante de acoplamiento electro-mecánico y $Q_n(\omega)$ es la amplitud de

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

carga a la frecuencia ω en el elemento interdigital n , cuya posición media es x_n .

Podemos definir una densidad lineal de carga por unidad de longitud en la dirección x del transductor. En la posición del elemento n -ésimo esta densidad será

$$\sigma_n = \frac{Q_n}{l_1}, \quad (1.20)$$

donde l_1 es el ancho de los dedos del transductor (figura 1- 16).

A los efectos del cálculo, es más práctico considerar como un continuo la sucesión de dedos del transductor, de forma que el ancho l_1 lo podemos expresar como dx' , y la posición x_n del n -ésimo elemento como x' . En estas condiciones, y substituyendo la (1.20) en (1.19), el aporte a la amplitud de la onda debido al elemento generador ubicado en $x_n = x'$ resulta

$$dA(x, x', \omega) = \alpha \sigma(x', \omega) dx' \exp[ik(x - x')]. \quad (1.21)$$

La amplitud total de la onda en el punto x (fuera de los límites del transductor), debida a la superposición de todos los aportes de los elementos interdigitales del dispositivo, que supongamos se extiende desde $x' = 0$ hasta $x' = L$, será

$$A(x, \omega) = \alpha \int_0^L \sigma(x', \omega) \exp[ik(x - x')] dx'. \quad (1.22)$$

Como la densidad de carga σ es nula para $x' < 0$ y para $x' > L$ (fuera de los límites del transductor), la integral de (1.22) se puede extender a todo el eje. Esto es

$$A(x, \omega) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x', \omega) \exp[ik(x - x')] dx'. \quad (1.23)$$

Entonces la amplitud de salida, como función de la frecuencia, es proporcional a la transformada espacial de Fourier de la densidad lineal de carga producida sobre el transductor interdigital.

En el caso más sencillo en el que los elementos del dispositivo tienen una periodicidad espacial l , y asumiendo que todos se cargan con la misma densidad máxima $\sigma_0(\omega)$, podemos representar la función de densidad de carga como

$$\begin{aligned} \sigma(x', \omega) &= \sigma_0(\omega) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right), & \text{si } 0 \leq x' \leq L, \\ \sigma(x', \omega) &= 0, & \text{en otro caso.} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Introduciendo las funciones de (1.24) en (1.23), y haciendo la integración, obtenemos el resultado

$$A(x, \omega) = \alpha \sigma_0(\omega) \exp[ik(\omega)x] [A_+(\omega) + A_-(\omega)], \quad (1.25)$$

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

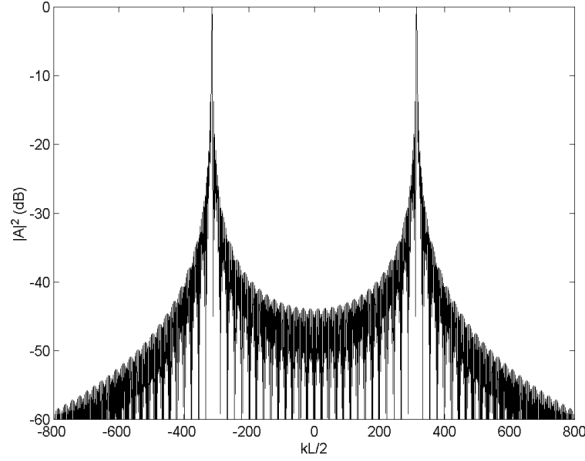


Figura 1- 17. Espectro de respuesta de un transductor interdigital en el que $L/l = 100$.

donde

$$A_{\pm}(\omega) = \pm i \frac{L}{2} \exp \left[-i \left(k(\omega) \pm \frac{2\pi}{l} \right) \frac{L}{2} \right] \frac{\sin \left[\left(k(\omega) \pm \frac{2\pi}{l} \right) \frac{L}{2} \right]}{\left(k(\omega) \pm \frac{2\pi}{l} \right) \frac{L}{2}}. \quad (1.26)$$

En (1.25) y (1.26) se ha explicitado el hecho de que el número de onda k depende de la frecuencia.

La gráfica de la respuesta $|A(x, \omega)|^2$ en función de la cantidad adimensional $kL/2$ se muestran en la figura 1- 17 para el valor $L/l = 100$. Como la variable x aparece en (1.25) solamente en el factor exponencial complejo, el resultado es independiente de x .

Obsérvese que el sistema es un filtro de paso de banda bastante eficaz. Las respuestas son máximas en los valores en que

$$k = \pm 2\pi/l, \quad (1.27)$$

esto es, cuando la longitud de onda λ de la onda de superficie es igual a la periodicidad l del transductor.

En lo que respecta a la multiplicidad de modos de las ondas de Lamb, para una determinada frecuencia ω el sistema seleccionará solamente aquel modo (simétrico o antisimétrico) cuyo número de onda verifique (1.27). El transductor interdigital es entonces eficaz en la generación de un sólo modo de Lamb en régimen de excitación continua (una sola frecuencia).

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

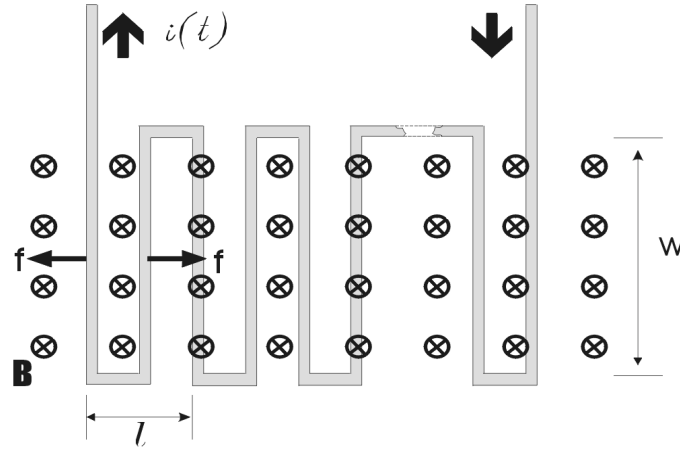


Figura 1- 18. Generador de ondas de superficie EMAT (electromagnético-acústico)

1.4.2 Transductores electromagnéticos-acústicos (EMAT)

Los transductores electromagnéticos-acústicos (EMAT) son tratados en profundidad en la obra de V.M. Ristic[27]. Su fundamento radica en la fuerza electromagnética de Laplace que experimenta un elemento de corriente dentro de un campo magnético constante.

Si el material de la placa es no metálico, se deposita de manera fija sobre él un serpentín de hilo conductor, como se muestra en la figura 1- 18. Este serpentín que se encuentra sobre la superficie de la placa, tiene una periodicidad espacial l y se encuentra perpendicularmente a un intenso campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$.

Cuando se hace circular una corriente alterna $i(t)$ de frecuencia ω por el serpentín, los elementos adyacentes del conductor experimentan fuerzas opuestas de magnitud $f(t) = wBi(t)$, donde w es el ancho del serpentín. Como el conductor está fijo al material, estas fuerzas producen tensiones que lo deforman, generando así las ondas de superficie.

Como se observa comparando las figuras 1- 18 y 1- 16, los resultados de ambos métodos son muy similares.

Si la placa fuera metálica, no se puede depositar el circuito sobre ella. En este caso se mantiene el serpentín eléctricamente aislado de la superficie, y se aprovechan las corrientes de Foucault inducidas sobre la placa para producir el mismo efecto.

1.4.3 Método del transductor y la cuña

El método más tradicional y mejor estudiado para la generación de ondas de Lamb es el del transductor y la cuña, como se muestra en la figura 1- 19[10],[11],[12],[13].

El material de la cuña debe de ser tal que la velocidad de fase v_c de las ondas acústicas dentro de la misma sea menor que en la placa metálica. Esto permite, seleccionando el

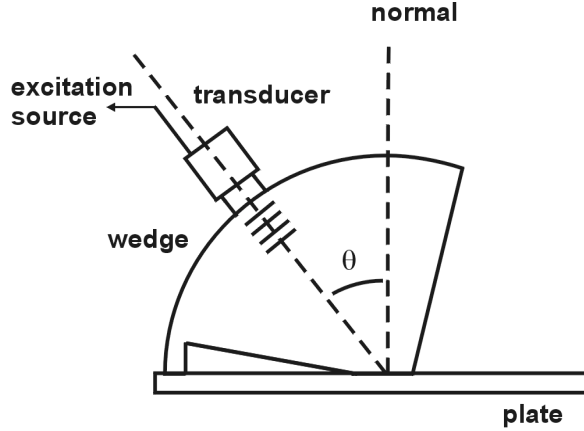


Figura 1- 19. Método del transductor y la cuña para la generación de ondas de Lamb.

ángulo de incidencia θ , que las ondas emergentes puedan salir paralelamente a la superficie de la placa.

Si las ondas emitidas por el transductor fuesen rigurosamente planas y monocromáticas, se podría generar un único modo de Lamb eligiendo el ángulo de incidencia adecuado. Si la velocidad de fase del modo n seleccionado a la frecuencia utilizada es $v_n(\omega)$ (ver figuras 1- 5 y 1- 6), obtendremos únicamente ese modo viajando según la superficie de la placa, mediante la ley de Snell de la refracción

$$\sin \theta = \frac{v_c}{v_n(\omega)}. \quad (1.28)$$

Variando el ángulo de incidencia θ se pueden generar diversos modos de Lamb aplicando la (1.28).

En los hechos, la difracción del campo acústico que llega a la superficie de la placa a causa de la abertura finita del transductor, determina rayos incidentes con diversos ángulos. Esto conduce a la generación de varios modos de Lamb simultáneamente, aún trabajando en régimen monocromático, aunque el modo más fuertemente excitado corresponderá al ángulo de incidencia que forma el eje del transductor.

Cuando interesa fundamentalmente la generación multimodal, la utilización de un transductor focalizado sobre la superficie de la placa (o un array de transductores pequeños) es una buena opción[8],[9].

1.4.4 Método del impacto láser

El método óptimo para obtener el mayor espectro de modos de ondas de Lamb se basa en aplicar una excitación sobre un área lo menor posible y de muy corta duración. Esto es una

Sección 1.4 Generación de ondas de Lamb

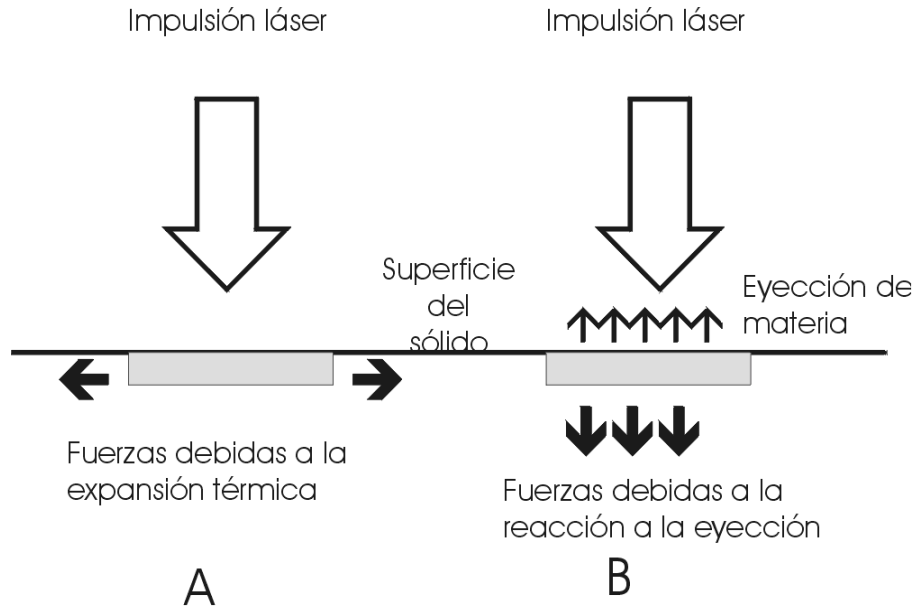


Figura 1- 20. Excitación de ondas mecánicas por impacto láser en régimen termoelástico (A) y de ablación (B)[14]

aproximación experimental a un δ de Dirac espacial y temporal sobre la placa.

En la descomposición de Fourier de esta señal, su estrecha localización espacial conduce a un gran ancho de banda de los valores de número de onda k , y su corta duración conduce a un gran ancho de banda en frecuencias. Esto cubriría la mayor área posible en las gráficas de las figuras 1- 3 y 1- 4, generándose, por tanto, una gran pluralidad de modos.

El impacto de un láser de potencia pulsado y focalizado sobre la placa impone estas condiciones a la generación, llamada generación fototérmica[14].

A potencias no muy altas, el impacto del láser produce una brusca dilatación local sobre la superficie de la placa, lo que origina ondas mecánicas que viajan en todas direcciones (figura 1- 20A). A potencias mayores, el impacto produce la fusión local del metal de la placa que es eyectado. Las fuerzas de reacción excitan las ondas elásticas (figura 1- 20B).

Una importante diferencia entre ambos regímenes, es que en el régimen termoelástico (figura 1- 20A), se excitan fundamentalmente las ondas mecánicas con polarización paralela a la superficie de la placa (desplazamientos u_x en las ecuaciones I.29). En cambio en el régimen de ablación (figura 1- 20B), se excitan fundamentalmente las ondas con polarización normal (desplazamientos u_y en las ecuaciones I.29).

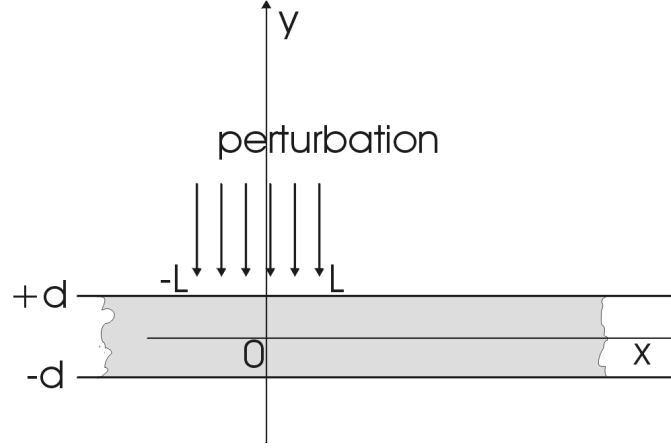


Figura 1- 21. Excitación de ondas de Lamb mediante una perturbación de extensión finita.

1.4.5 Teoría del desarrollo en modos normales

La teoría del desarrollo en modos normales de un paquete de ondas de Lamb de forma arbitraria fue presentada por Auld y Kino para los transductores digitales[15], y aplicada a las ondas de Lamb por varios autores[2],[12],[16]. En el Apéndice II se efectúa una deducción de la teoría y sus condiciones de validez, así como la aplicación de la misma a la generación de ondas de Lamb.

En la figura 1- 21 se muestran las condiciones más usuales de excitación de ondas de Lamb. La perturbación es una tensión exterior que se ejerce sobre una porción limitada de una de las superficies de la placa.

Si identificamos los modos (simétricos y antisimétricos) mediante un índice variable n , los dos conjuntos de ecuaciones (1.4) y (1.5) pueden resumirse en una sola, de la forma

$$u_i^{(n)}(x, y) = \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \exp(ik_n x), \quad (1.29)$$

donde el subíndice i es x o y , según la componente de que se trate. Las amplitudes de desplazamiento $\mathcal{U}_i^{(n)}(y)$ son conocidas de las ecuaciones (1.4) y (1.5).

De igual forma se conocen los velocidades del medio para cada modo. De la relación general para ondas armónicas $\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{u}$, podemos escribir la velocidad para el modo n como

$$v_i^{(n)}(x, y) = \mathcal{V}_i^{(n)}(y) \exp(ik_n x), \quad (1.30)$$

donde

$$\mathcal{V}_i^{(n)}(y) = -i\omega\mathcal{U}_i^{(n)}(y). \quad (1.31)$$

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

Finalmente, también el campo de tensiones para los modos puros se pueden derivar de (1.4) y (1.5), haciendo uso de las ecuaciones I.2 del Apéndice. También pueden escribirse como

$$T_{ij}^{(n)}(x, y) = T_{ij}^{(n)}(y) \exp(ik_n x). \quad (1.32)$$

La teoría asume la completitud del conjunto de las funciones propias de los modos[17]. Cualquier onda de Lamb con cierta frecuencia, que viaje por la placa con condiciones de frontera libre, se puede expresar como una superposición de los modos normales. Por ejemplo, un campo de velocidades arbitrario con estas condiciones de frontera, se expresa como

$$v_i(x, y) = \sum_n C_n \mathcal{V}_i^{(n)}(y) \exp(ik_n x), \quad (1.33)$$

donde las amplitudes constantes C_n determinan el peso de cada modo en el desarrollo, y dependen de las condiciones iniciales. Similares expresiones a la (1.33) se pueden escribir para los campos de desplazamientos y tensiones.

La teoría del desarrollo en modos normales, parte de una expresión más general para (1.33), escribiéndola de la forma

$$v_i(x, y) = \sum_n A_n(x) \mathcal{V}_i^{(n)}(y), \quad (1.34)$$

y se plantea una ecuación que permita determinar $A_n(x)$ en función de las condiciones iniciales y de excitación de la placa. Esta ecuación es utilizada extensamente en la aplicación del método del desarrollo en modos normales[2](Vol. II),[12],[13],[16]. Es deducida en el Apéndice (ecuación II.58) para condiciones de excitación de las ondas de Lamb solamente en la superficie superior ($y = d$) y ondas que viajan hacia la dirección $x > 0$,

$$\frac{dA_n}{dx} - ik_n A_n(x) = \frac{1}{4p_n} T_{yj}(x, d) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d), \quad (1.35)$$

donde p_n es el flujo de potencia por unidad de longitud a lo largo del eje z (figura 1- 21), obtenido en la expresión II.26 del Apéndice,

$$p_n = -\frac{1}{4} \int_{-d}^d \left[T_{xj}^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(y) + T_{xj}^{(n)*}(y) \mathcal{V}_j^{(n)}(y) \right] dy. \quad (1.36)$$

La magnitud $T_{yj}(x, d)$ es la componente j (x o y) de la tensión aplicada sobre la superficie superior de la placa. La repetición del índice j en (1.36) indica, como es usual, la suma

$$T_{yj}(x, d) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d) = T_{yx}(x, d) \mathcal{V}_x^{(n)*}(d) + T_{yy}(x, d) \mathcal{V}_y^{(n)*}(d).$$

Suponiendo que la carga $T_{yj}(x, d)$ ocurre para $x \geq 0$, la ecuación (1.36) puede ser

inmediatamente integrada, obteniéndose

$$A_n(x) = \frac{1}{4p_n} \exp(ik_n x) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d) \int_0^x T_{yj}(\xi, d) \exp(-ik_n \xi) d\xi. \quad (1.37)$$

En (1.37) se ha puesto la condición inicial $A_n(x)$ para $x \leq 0$, debido a que se trata de ondas que se encuentran solamente en el semieje positivo.

1.4.6 Función de Green y función de transferencia

La función de Green $G(x, t)$ es una función de caracterización de los medios lineales con respecto a la transmisión de señales, que permite obtener la señal de salida $s(x, t)$ a partir de la entrada $e(x, t)$ mediante la doble convolución

$$s(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t - \tau) e(\xi, \tau) d\xi d\tau = G(x, t) \otimes_x \otimes_t e(x, t). \quad (1.38)$$

La doble transformada de Fourier de (1.38) en el espacio y el tiempo convierte la doble convolución en un producto. De acuerdo a las notaciones definidas en las expresiones III.1 y III.2 del Apéndice, tenemos

$$\tilde{s}(\omega, k) = (2\pi)^2 \tilde{G}(\omega, k) \cdot \tilde{e}(\omega, k). \quad (1.39)$$

La doble transformada de Fourier de la función de Green define la llamada *función de transferencia del sistema*, que denotaremos como

$$H(\omega, k) = (2\pi)^2 \tilde{G}(\omega, k). \quad (1.40)$$

La importancia de encontrar una función de Green para las ondas de Lamb, reside en la posibilidad de relacionar directamente la excitación (función de entrada) con la respuesta (función de salida). La respuesta puede ser el campo de desplazamientos $u_i(x, y)$ en cualquier punto de la placa, o el campo de velocidades o de tensiones.

La expresión de la solución general de ondas de Lamb mediante el desarrollo en modos normales es particularmente útil para encontrar la función de Green[13]. Como la excitación es un tensor de rango 2, y las respuestas son vectores o tensores de rango 2, la función de Green es de carácter tensorial.

En el Apéndice III se desarrolla la deducción de las funciones de Green para ondas de Lamb. Considerando como entrada la tensión de excitación $T_{yj}(x, d, t)$ sobre la superficie de la placa, y como salida los desplazamientos $u_i(x, y, t)$ en cualquier punto de la placa, tenemos

$$u_i(x, y, t) = GU_{ij}(x, y, t) \otimes_x \otimes_t T_{yj}(x, d, t), \quad (1.41)$$

Sección 1.4 Generación de ondas de Lamb

donde GU_{ij} es la función tensorial de Green para los desplazamientos y se deduce en la expresión III.15 del Apéndice,

$$GU_{ij}(x, y, t) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{p_n} \exp(ik_n x - i\omega t) d\omega. \quad (1.42)$$

Utilizando la función de transferencia (1.40), expresamos la (1.41) como un producto en el dominio de frecuencias espaciales y temporales

$$\tilde{u}_i(\omega, k, y) = HU_{ij}(\omega, k, y) \cdot \tilde{T}_{yj}(\omega, k, d). \quad (1.43)$$

La función de transferencia de desplazamiento HU_{ij} resulta de aplicar la doble transformada de Fourier a (1.42). Aplicando (1.40), tenemos

$$HU_{ij}(\omega, k, y) = (2\pi)^2 \widetilde{GU}_{ij}(\omega, k, y) = \frac{i\pi}{2} \sum_n \frac{\omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{p_n} \delta(k_n - k), \quad (1.44)$$

donde δ es el delta de Dirac.

El flujo de potencia p_n para el modo n se calcula más fácilmente con la expresión II.51 deducida en el Apéndice en función de las amplitudes de velocidad de los modos normales,

$$p_n(\omega) = \frac{1}{2} \rho v_g^{(n)}(\omega) \int_{-d}^d \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy, \quad (1.45)$$

donde $v_g^{(n)}(\omega)$ es la velocidad de grupo del modo n a la frecuencia ω , y ρ es la densidad del material.

Esta expresión también se puede poner en función de las amplitudes de desplazamiento $\mathcal{U}_j^{(n)}(y)$ de los modos, usando la relación $\mathcal{V}_j^{(n)} = -i\omega \mathcal{U}_j^{(n)}$. Entonces la (1.45) resulta

$$p_n(\omega) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v_g^{(n)}(\omega) \int_{-d}^d \mathcal{U}_j^{(n)} \mathcal{U}_j^{(n)*} dy. \quad (1.46)$$

El resultado (1.44) revela una situación interesante: la función de transferencia es distinta de cero solamente para valores de la frecuencia espacial k pertenecientes a las curvas de dispersión $k_n(\omega)$ de los diferentes modos (figuras 1- 3 y 1- 4). Esto determina que $\tilde{u}_i(\omega, k, y)$ en (1.43) tampoco es nula solamente si $k = k_n(\omega)$, independientemente de la función de excitación. Si uno mide las señales $u_i(x, y, t)$ en una sucesión de puntos x sobre la placa ($y = d$), y luego realiza numéricamente las transformadas dobles de Fourier para obtener $\tilde{u}_i(\omega, k, y)$, entonces los valores no nulos obtenidos permiten construir experimentalmente las curvas de dispersión. Esto permite identificar los modos presentes

en una señal de ondas de Lamb. Esta idea fue introducida por Alleyne y Cawley[18], y utilizada por varios autores para observar los modos de Lamb presentes en señales experimentales[8],[9],[13].

Un resultado inmediato que se puede obtener de (1.43), es que si la excitación consiste en un δ de Dirac espacial y temporal, su doble transformada de Fourier $\widehat{\widehat{T}}_{yj}$ es una constante. Esto lleva a que la doble transformada de Fourier de la respuesta en desplazamiento (1.43) sea

$$\widetilde{u}_i(\omega, k, y) = \begin{cases} C \sum_n \frac{\omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{p_n} & \text{si } k = k_n(\omega) \\ 0 & \text{si } k \neq k_n(\omega) \end{cases} \quad (1.47)$$

donde C es una constante que depende de la intensidad de la excitación. Por consiguiente, con este método de excitación se obtiene directamente la función de transferencia por vía experimental. La mejor aproximación a este método es el impacto de un haz láser focalizado, como se vió en 1.4.4.

1.4.7 Comparación con el método de los potenciales

Siguiendo a Viktorov[1], usaremos el método de los potenciales elásticos escalar φ y vectorial Ψ para obtener una función de transferencia $\mathbf{HU} = (HU_x, HU_y)$ para los desplazamientos de las ondas de Lamb. Las condiciones de generación serán las mostradas en la figura 1- 21, donde nos limitaremos además a una tensión normal $T_{yy}(x, d, t)$ ejercida sobre una porción limitada de la superficie superior de la placa.

Viktorov[1] efectúa sus cálculos aplicados exclusivamente a la generación por el método de la cuña y con excitación monocromática. Nuestra deducción es más general en el sentido en que será válida para cualquier fuente excitación y para régimen no monocromático.

Probaremos que se llega a una expresión notoriamente más compleja que la obtenida por el método del desarrollo en modos normales para la función de transferencia, (1.44).

En el Apéndice IV se deducen las respuestas en desplazamientos para ondas de Lamb en base a los potenciales elásticos. Éstas están expresadas en las funciones de transferencia IV.24 y IV.25 que reproducimos a continuación

$$\begin{aligned} HU_x(\omega, k, y) = & -2\pi \sum_A \frac{2kqs \cos qd \sin sy + k(k^2 - s^2) \cos sd \sin qy}{\mu \Delta'_a} \delta(k_A - k) - \\ & -2\pi \sum_S \frac{2kqs \sin qd \cos sy + k(k^2 - s^2) \sin sd \cos qy}{\mu \Delta'_s} \delta(k_S - k). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Sección 1.4 Generación de ondas de Lamb

y

$$\begin{aligned}
 HU_y(\omega, k, y) = & 2\pi i \sum_A \frac{q(k^2 - s^2) \cos sd \cos qy - 2k^2 q \cos qd \cos sy}{\mu \Delta'_a} \delta(k_A - k) + \\
 & + 2\pi i \sum_S \frac{2k^2 q \sin qd \sin sy - q(k^2 - s^2) \sin sd \sin qy}{\mu \Delta'_s} \delta(k_S - k). \quad (1.49)
 \end{aligned}$$

Los valores de q y s son los ya definidos en (1.3), y los de Δ'_a y Δ'_s son las derivadas respecto de k de las magnitudes

$$\Delta_a(\omega, k) = (k^2 - s^2)^2 \sin qd \cos sd + 4k^2 qs \sin sd \cos qd, \quad (1.50)$$

y

$$\Delta_s(\omega, k) = (k^2 - s^2)^2 \sin sd \cos qd + 4k^2 qs \sin qd \cos sd. \quad (1.51)$$

Los valores $k_A(\omega)$ son los modos antisimétricos, raíces de (1.50) y los valores $k_S(\omega)$ son los modos simétricos, raíces de (1.51).

Compárese la complejidad de las expresiones (1.48) y (1.49) con la expresión (1.44) de la función de transferencia obtenida por el método del desarrollo en modos normales. Todavía hay que subrayar el hecho de que la (1.44) es válida para tensiones normales y tangenciales sobre la superficie de la placa, en tanto que las (1.48) y (1.49) se aplican solamente a una excitación normal. Tampoco resulta muy evidente la posibilidad de reunir las dos expresiones (1.48) y (1.49) en una sola que permita calcular tanto el desplazamiento u_x como el u_y , como lo hace la función de transferencia de características tensoriales obtenida en (1.44).

A efectos de verificar las deducciones hechas por ambos métodos, se ha efectuado un cálculo numérico para comparar los resultados de (1.44) y de las funciones obtenidas con el método de los potenciales (1.48) y (1.49).

Para ello definimos la función de transferencia para un sólo modo n (simétrico o antisimétrico) como el término que le corresponde en la sumatoria (1.44). Esto es

$$HU_{ij}^{(n)}(\omega, k_n(\omega), y) = \frac{i\pi \omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{2 p_n(\omega)}. \quad (1.52)$$

En especial, consideremos los desplazamientos normales a la placa en la figura 1-21 (eje y) y sobre su superficie superior ($y = d$). La (1.52) resulta entonces

$$HU_{yy}^{(n)}(\omega, k_n(\omega), d) = \frac{i\pi \omega \mathcal{U}_y^{(n)}(d) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{2 p_n(\omega)}. \quad (1.53)$$

Finalmente, como las expresiones deducidas por el método de los potenciales (1.48) y (1.49) son válidas solamente para excitación normal, restringiremos aún la (1.53) a esta

situación ($j = y$), resultando

$$HU_{yy}^{(n)}(\omega, k_n(\omega), d) = \frac{i\pi \omega \mathcal{U}_y^{(n)}(d) \mathcal{U}_y^{(n)*}(d)}{2 p_n(\omega)} = \frac{i\pi \omega \left| \mathcal{U}_y^{(n)}(d) \right|^2}{2 p_n(\omega)}. \quad (1.54)$$

Hacemos lo mismo con las expresiones (1.48) y (1.49) para las funciones de transferencia obtenidas por el método de los potenciales. La componente y para el desplazamiento del modo n queda definida como el término correspondiente a ese modo en la sumatoria de (1.49). Esto es,

$$HU_y^{(n)}(\omega, k_n(\omega), y) = \begin{cases} 2\pi i q_n \frac{(k_n^2 - s_n^2) \cos s_n y \cos q_n d - 2k_n^2 \cos q_n y \cos s_n d}{\mu \Delta'_n} & \text{modo antisim.} \\ -2\pi i q_n \frac{(k_n^2 - s_n^2) \sin s_n d \sin q_n y - 2k_n^2 \sin q_n d \sin s_n y}{\mu \Delta'_n} & \text{modo simétrico,} \end{cases} \quad (1.55)$$

donde Δ'_n es $\Delta'_a(k_A)$ para los modos antisimétricos o $\Delta'_s(k_S)$ para los simétricos.

Aplicando la (1.55) a la situación $y = d$ y utilizando el hecho de que $k_n^2 + s_n^2 = \left(\frac{\omega}{v_T}\right)^2$, resulta

$$HU_y^{(n)}(\omega, k_n(\omega), d) = \begin{cases} -\frac{2\pi i \omega^2 q_n}{\mu v_T^2 \Delta'_n} \cos s_n d \cos q_n d & \text{modo antisim.} \\ \frac{2\pi i \omega^2 q_n}{\mu v_T^2 \Delta'_n} \sin s_n d \sin q_n d & \text{modo simétrico.} \end{cases} \quad (1.56)$$

Para no agregar más notaciones, indicaremos la función de transferencia obtenida con el método del desarrollo en modos normales (1.54) con el doble yy . A la función obtenida con el método de los potenciales (1.55) la indicaremos con un solo subíndice y .

Los resultados del cálculo numérico de comparación entre (1.54) y (1.56) se muestran en la figura 1- 22 para los modos simétricos 0, 1, y 2, y en la figura 1- 23 para los modos antisimétricos 0, 1 y 2. Las curvas continuas corresponden a la función de transferencia obtenida por el método del desarrollo en modos normales (1.54). Los puntos indicados con "+" corresponden a la función obtenida mediante los potenciales elásticos (extensión de las deducciones de Viktorov[1]), ecuación (1.56).

En el eje de ordenadas de las figuras 1- 22 y 1- 23 se presenta la parte imaginaria de la función de transferencia (la parte real es nula) en unidades arbitrarias. En el eje de abscisas aparece la cantidad adimensionalizada $\omega d/v_t$, donde ω es la frecuencia, d es el semiespesor de la placa, y v_t es la velocidad de las ondas tangenciales de volumen en el material.

La muy buena concordancia entre ambas funciones era de esperar. No refleja otra cosa que la corrección de las deducciones hechas, con puntos de partida diferentes, para llegar tanto a la expresión (1.54) como a la (1.56).

1.4.8 Resultados experimentales

La figura 1- 24 muestra el arreglo experimental utilizado para emitir y detectar ondas de Lamb en una placa de aluminio.

El ángulo θ puede ser elegido para reforzar algunos modos de Lamb respecto a otros. De

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

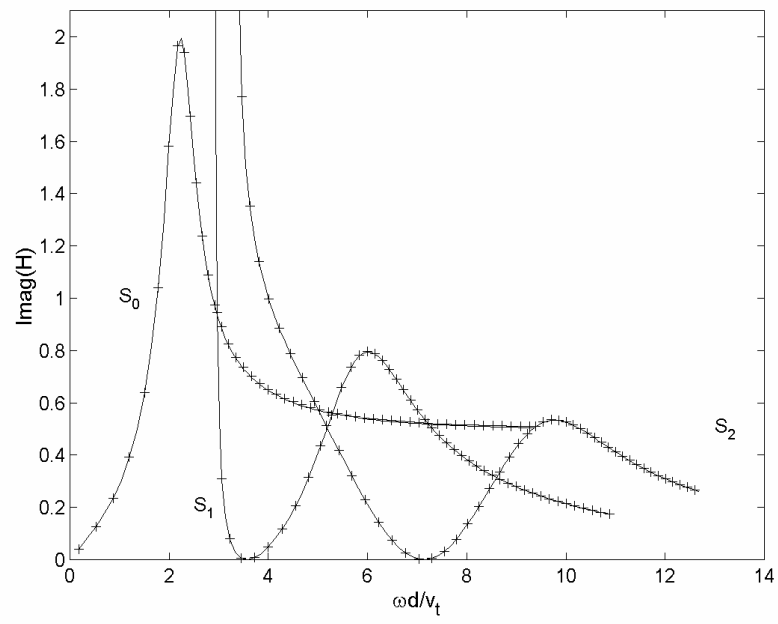


Figura 1- 22. Modos simétricos. Comparación entre las funciones de transferencia obtenidas mediante la función de Green (curva continua) y los potenciales (curva +)

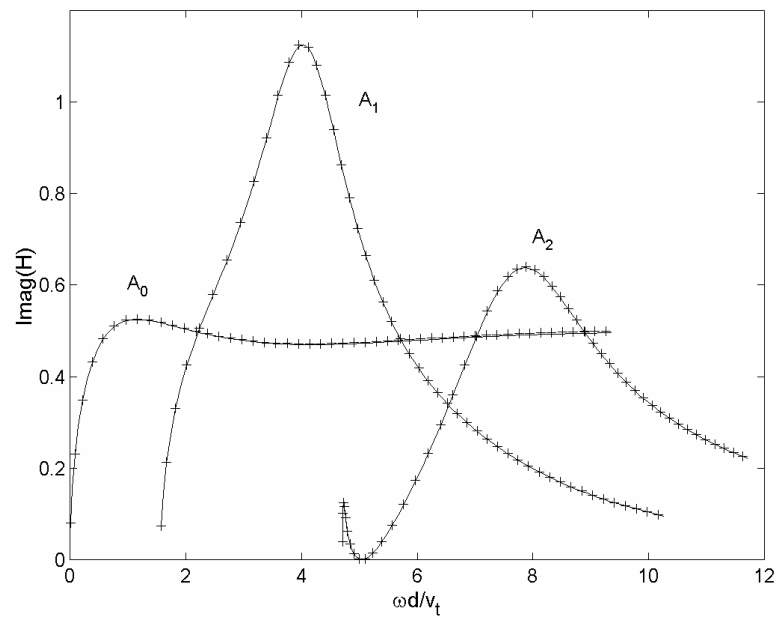


Figura 1- 23. Modos antisimétricos. Comparación entre las funciones de transferencia obtenidas mediante la función de Green (curva continua) y los potenciales (curva +)

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

acuerdo a la expresión (1.28), si una onda plana monocromática viene desde el transductor, la ley de Snell para la refracción establece que la velocidad de fase v_φ de una onda de superficie en la dirección x es

$$v_\varphi = \frac{v_p}{\sin \theta}, \quad (1.57)$$

siendo v_p la velocidad de las ondas longitudinales en la cuña de Plexiglás.

A una frecuencia dada ω cada modo n tiene una velocidad de fase diferente $v_\varphi^{(n)}$. Si elegimos un ángulo de incidencia $\theta^{(n)}$ tal que verifique (1.57) entonces solamente excitaríamos ese modo sobre la placa.

Realmente, no tenemos ondas planas incidiendo sobre la placa a causa de los efectos de difracción. Tampoco emitimos ondas monocromáticas, sino que trabajamos en régimen pulsado. Entonces tendremos un ancho de banda finito, tanto en frecuencia como en número de onda.

Conociendo la frecuencia central ω_0 del paquete y su ancho de banda $\Delta\omega$, podemos obtener $v_\varphi^{(n)}(\omega_0)$ y los respectivos anchos $\Delta v_\varphi^{(n)}$ para cada modo, utilizando las gráficas de las figuras 1- 5 y 1- 6. Aplicando (1.57) obtenemos los ángulos de incidencia necesarios $\theta^{(n)}(\omega_0)$ para generar los diversos modos a esa frecuencia, así como sus márgenes de tolerancia $\Delta\theta^{(n)}$,

$$\sin \left[\theta^{(n)}(\omega_0) \right] = \frac{v_p}{v_\varphi^{(n)}(\omega_0)}, \quad \Delta\theta^{(n)} \cos \theta^{(n)} = \frac{v_p}{\left(v_\varphi^{(n)} \right)^2} \Delta v_\varphi^{(n)}. \quad (1.58)$$

Eligiendo un ángulo de incidencia θ cualquiera, todos los modos simétricos y antisimétricos para los cuales $\theta^{(n)} - \Delta\theta^{(n)} < \theta < \theta^{(n)} + \Delta\theta^{(n)}$ serían generados en la placa si las ondas incidentes fuesen rigurosamente planas[11],[12],[13].

Sin embargo, los efectos de la difracción en el viaje desde el transductor a la superficie de la placa restringen aún más la selección de modos. Si llamamos $k_p = \frac{\omega_0}{v_p}$ al número de onda de las ondas longitudinales de volumen en el Plexiglás a la frecuencia ω_0 , el número de onda de las ondas sobre la superficie de la placa será

$$k_0 = k_p \sin \theta, \quad (1.59)$$

donde θ es el ángulo de incidencia, mostrado en la figura 1- 24.

La dispersión Δk en k_0 proviene de la dispersión en k_p de la expresión (1.59) debido al ancho de banda $\Delta\omega$, y de la dispersión en el ángulo θ debido a los efectos de difracción, esto es

$$\Delta k = \Delta k_p \sin \theta + k_p \Delta\theta_{diff} \cos \theta. \quad (1.60)$$

Como resultado final, dado un ángulo θ que forma el eje del transductor con la normal a la placa (figura 1- 24) y una frecuencia central de emisión ω_0 con ancho $\Delta\omega$, tendremos una generación de ondas de Lamb con número de onda central k_0 dada por (1.59) y ancho Δk

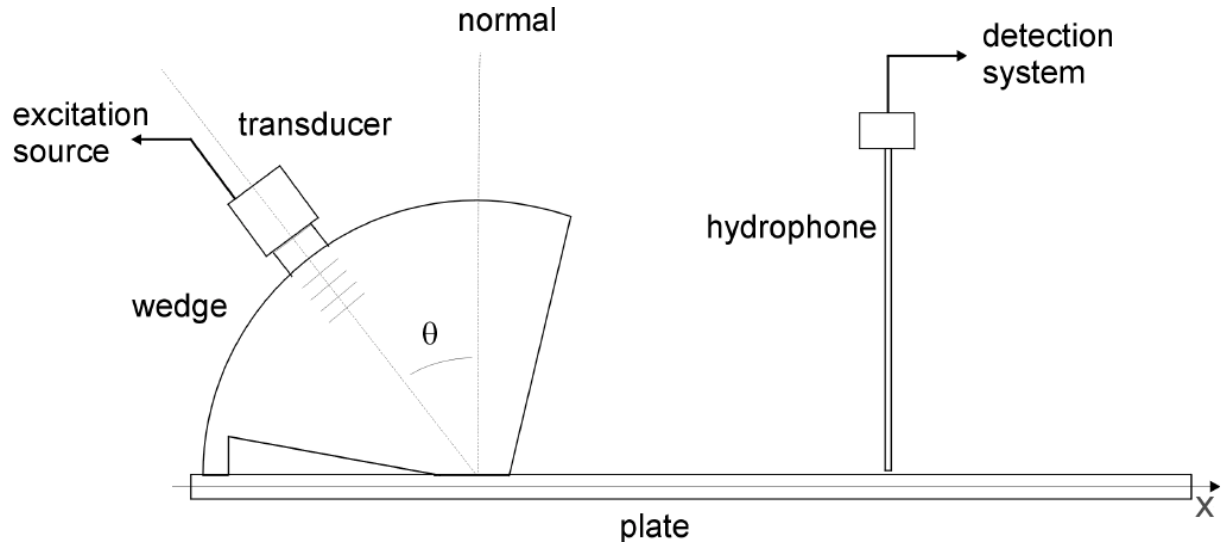


Figura 1- 24. Sistema para generación y detección de ondas de Lamb.

dada por (1.60). Esto restringe los modos de Lamb generados a los que están contenidos en un área $\omega_0 \pm \Delta\omega, k_0 \pm \Delta k$ en las relaciones de dispersión mostradas en las 1- 3 y 1- 4.

Como fuente pulsada se utilizó un equipo Sonic FTS Mark IV Ultrasonic Tester. El detector es un hidrófono de aguja NP1000 PVDF, cuya variación en la respuesta es de 2 dB entre 1 MHz hasta 20MHz.

El primer experimento fue hecho con una placa de aluminio de 3.0 mm de espesor. El transductor utilizado es un Aerotech E18975 de 2.5 cm de diámetro, 2.25 MHz de frecuencia central y 1.5 MHz de ancho de banda. El ángulo de incidencia θ mostrado en la figura 1- 24 era de 30°.

El sistema de adquisición levanta señales de 500 puntos con 50 μs de duración. Se hicieron medidas espaciadas 1 mm a lo largo de 108 mm en la dirección x . En la figura 1- 25 se muestra, a modo de ejemplo, una señal obtenida a medio camino.

El voltaje de la señal del hidrófono es proporcional a la presión. A través del acoplante líquido entre el detector y la placa, esta presión corresponde a la tensión normal generada por las ondas de Lamb en la superficie de la placa. Esto es debido a la condición de continuidad de las fuerzas normales en la interface sólido-líquido.

El cuadrado del módulo de la doble transformada de Fourier (en espacio y tiempo) de las señales medidas por el hidrófono corresponde a una matriz de intensidades $I(\omega, k)$ de dichas señales. La figura 1- 26 muestra esta matriz resultante en escalas de gris. Los valores de máxima intensidad (gris oscuro) siguen las curvas de dispersión de los diversos modos, figuras 1- 3 y 1- 4.

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

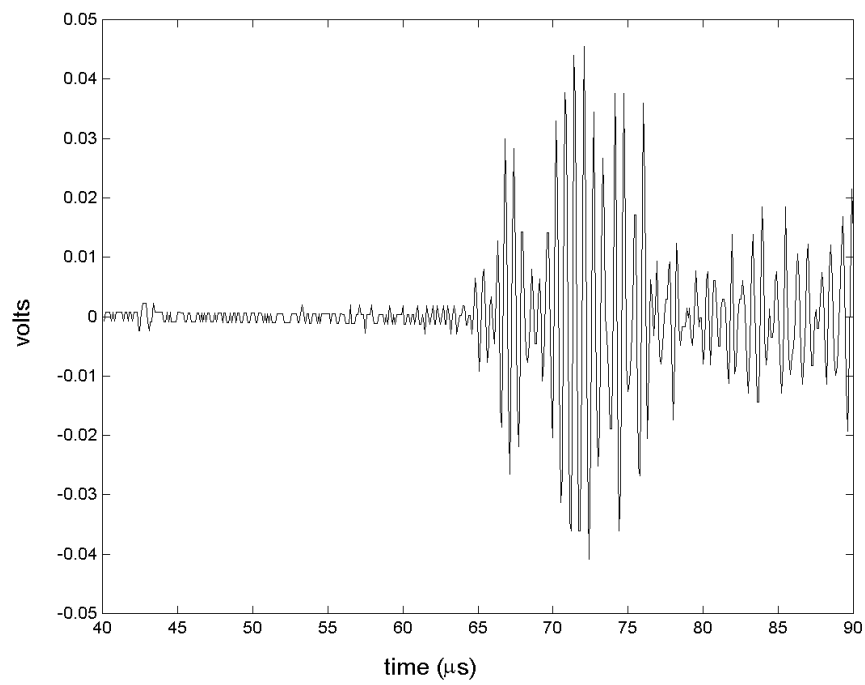


Figura 1- 25. Señal típica de ondas de Lamb obtenida por el hidrófono.

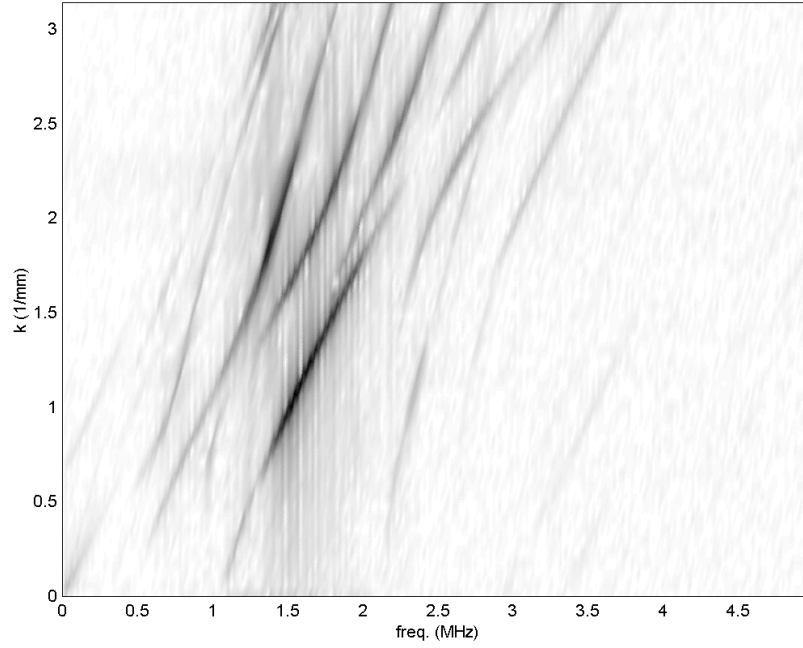


Figura 1- 26. Doble transformada de Fourier de las señales detectadas sobre la placa de 3 mm.

Para identificar los varios modos presentes, la figura 1- 27 muestra la superposición de los datos experimentales de la figura 1- 26 con las curvas teóricas de dispersión (líneas continuas). Se observan claramente los modos simétricos S_0, S_1, S_2 y los antisimétricos A_1, A_2 para la placa de aluminio de 3 mm.

Se observa en la figura 1- 26 que el modo S_1 de Lamb casi desaparece en la vecindad de 1.2 MHz. El mismo fenómeno ocurre para el modo S_2 en la vecindad de 2.3 MHz. Si se observa el comportamiento de las funciones de transferencia H_{yy} con la frecuencia (figura 1- 22), podemos apreciar que el modo S_1 tiene un mínimo muy pronunciado en la abscisa $\frac{\omega d}{v_T} \sim 3.5$, en tanto que el S_2 lo tiene para $\frac{\omega d}{v_T} \sim 7$. Considerando que el espesor de la placa es de 3 mm ($d = 1.5$ mm) y que la velocidad de las ondas transversales en el aluminio es $v_T \sim 3.04$ mm/ μ s, obtenemos precisamente los valores de frecuencia en donde se deben extinguir dichos modos.

En la figura 1- 28 representamos el cuadrado del módulo de las funciones de transferencia H_{yy} para los modos simétricos S_1 y S_2 , en escala logarítmica y con un nivel de referencia

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

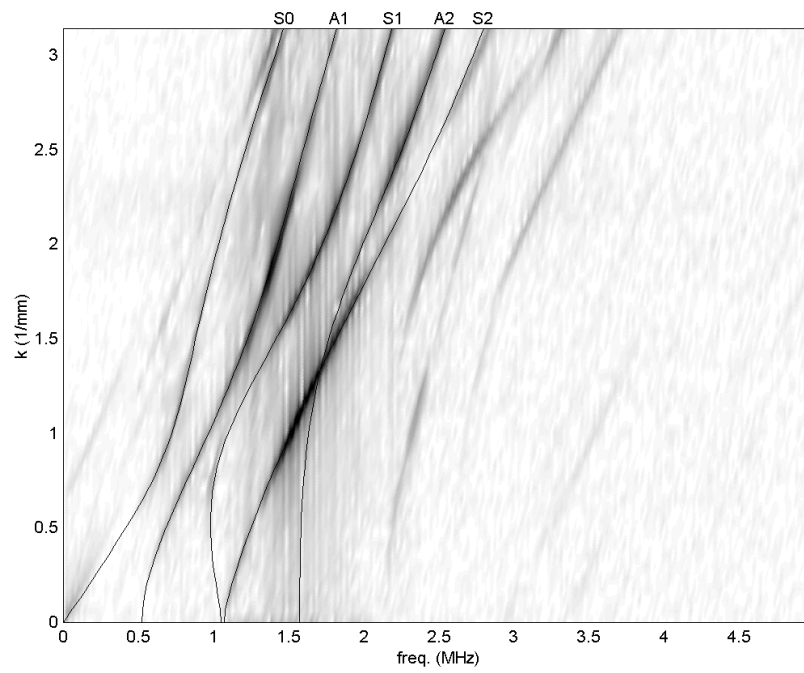


Figura 1- 27. Identificación de los modos simétricos (S) y antisimétricos (A) presentes en la placa de 3 mm.

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

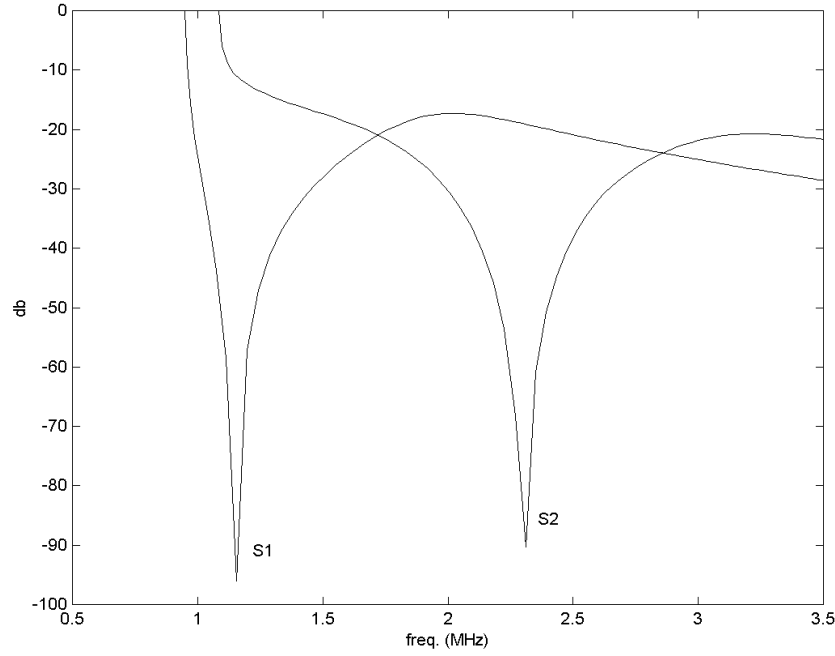


Figura 1- 28. Función de transferencia $10 \log |H_{yy}|^2$ para la placa de aluminio de 3 mm de espesor.

arbitrario, aplicados especialmente a la placa de aluminio de 3 mm de espesor. Se observan las fuertes atenuaciones de los dos modos en torno a las frecuencias experimentalmente obtenidas.

Para hacer una evaluación de estas observaciones, debemos calcular experimentalmente las funciones de transferencia, aplicando la ecuación (1.43). Las intensidades de las señales obtenidas experimentalmente y graficadas en tonos de gris en las figuras 1- 26 y 1- 27, son intensidades de presión acústica detectadas por el hidrófono. A frecuencia fija, son proporcionales a la amplitud de desplazamiento $\left| \hat{u}_y(\omega, k, d) \right|^2$. Para obtener la función de transferencia, debemos medir también la excitación T_{yy} sobre la placa producida por el

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

transductor y la cuña, y utilizar la (1.43) para obtener

$$|HU_{ij}(\omega, k_n, d)|^2 = \frac{|\tilde{u}_y(\omega, k_n, d)|^2}{|\tilde{T}_{yy}(\omega, k_n, d)|^2}, \quad (1.61)$$

donde los valores de k en el segundo miembro se deben evaluar sobre la curva de dispersión $k = k_n(\omega)$ correspondiente al modo que interesa.

Explorando la señal directamente sobre la base libre de la cuña, podemos obtener una evaluación aproximada de la tensión normal de excitación $T_{yy}(x, t)$, la cual es la tensión que realmente existe cuando la cuña se acopla sobre la placa de aluminio. Estamos despreciando las diferencias existentes entre la tensión medida con la cuña libre y la acoplada a la placa.

Las tensiones sobre la base de la cuña se miden con el mismo hidrófono, en pasos de 0.5 mm sobre una línea paralela a la dirección de propagación de las ondas de Lamb (dirección x). Haciendo la doble transformada de Fourier de estas señales, obtenemos el diagrama de fases (ω, k) de las tensiones normales de excitación. La distribución de intensidades $|\tilde{T}_{yy}(\omega, k, d)|^2$ se muestra en la figura 1- 29 en escala de grises (negro=intensidad máxima).

Para extraer los particulares valores de $|\tilde{T}_{yy}(\omega, k, d)|^2$ restringidos a las curvas de dispersión $k = k_n(\omega)$, se deben medir los valores de intensidad a lo largo de las curvas de dispersión para los modos S_1 y S_2 , también representados en la figura 1- 29.

Las tensiones normales de excitación a lo largo de estas curvas de dispersión se muestran en la figura 1- 30 para el modo S_1 y en la figura 1- 31 para el S_2 . Ambas gráficas están normalizadas al máximo valor de la tensión normal de excitación del modo S_1 , y se presentan en escala logarítmica.

La figura 1- 30 muestra que la intensidad de excitación del modo S_1 a 1.2 MHz y 1.8 MHz es aproximadamente igual (~ -7 dB). Sin embargo, la figura 1- 26 muestra que este modo presenta una fuerte respuesta a 1.8 MHz, en tanto que casi desaparece a 1.2 MHz.

El mismo fenómeno ocurre para el modo S_2 (figura 1- 31). En las frecuencias de 1.3, 2.4 y 2.6 MHz las intensidades de excitación de este modo son aproximadamente iguales (~ -17 dB). Sin embargo, la figura 1- 26 muestra que el modo S_2 tiene una buena respuesta a 1.3 y 2.6 MHz, pero desaparece entre 2.3 y 2.4 MHz.

Estos comportamientos son debido a la atenuación que presentan las funciones de transferencia para ambos modos a esas frecuencias, como se observa en la figura 1- 28.

Para calcular efectivamente la función de transferencia por vía experimental debemos aplicar la ecuación (1.61). Para ello debemos obtener la amplitud de los desplazamientos $\tilde{u}_y(\omega, k_n, d)$ de la señal, cuando el hidrófono mide presiones acústicas.

Asumiendo que el hidrófono está muy próximo a la superficie, podemos suponer que hay una onda acústica plana que viaja desde la superficie de la placa hasta la membrana del hidrófono, a través del líquido acoplante. La amplitud de presión es entonces proporcional a la amplitud de velocidad del fluido, la cual es la misma que la amplitud de la componente de

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

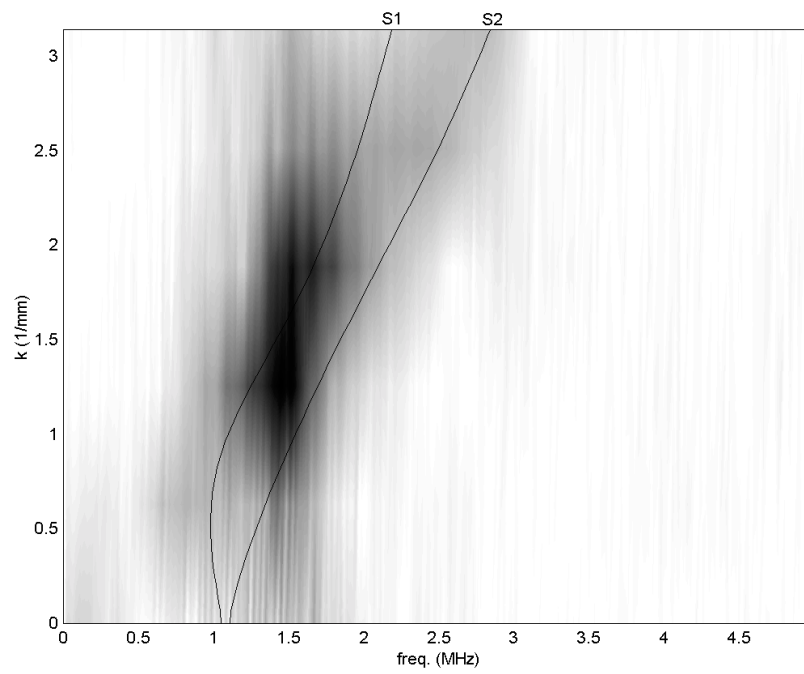


Figura 1- 29. Campo de intensidades de la tensión de excitación sobre la base de la cuña.

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

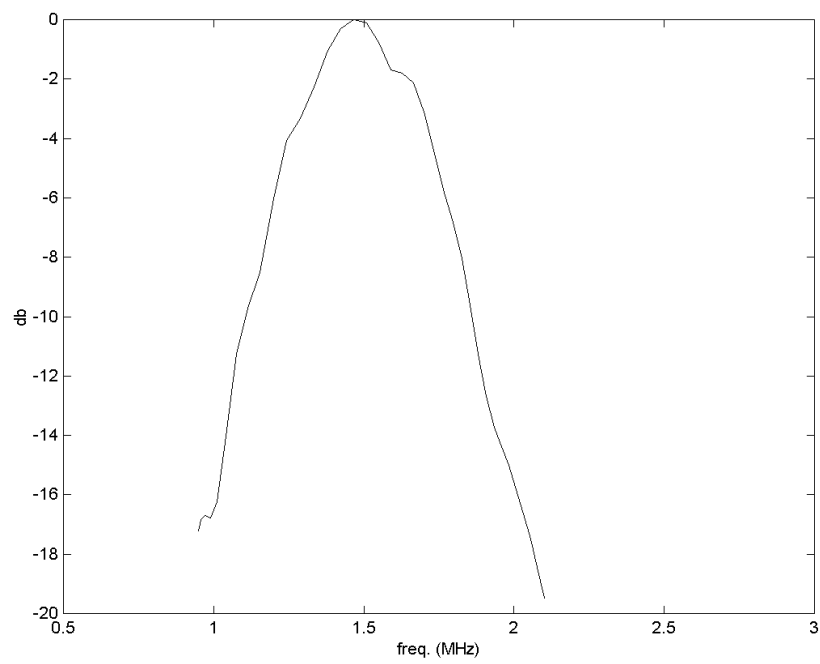


Figura 1- 30. Intensidad de la tensión de excitación del modo S_1 .

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

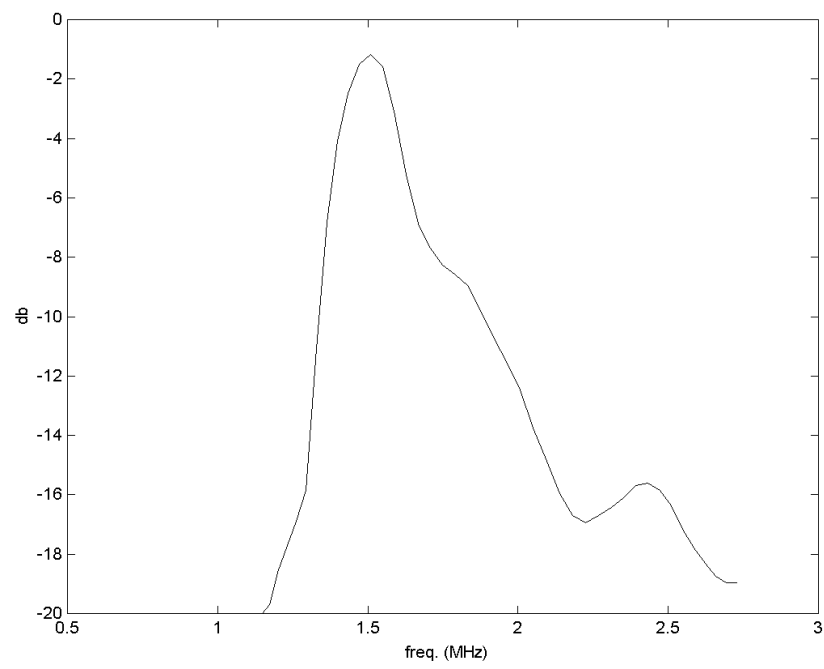


Figura 1- 31. Intensidad de la tensión de excitación del modo S_2 .

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

velocidad normal sobre la placa. Esta componente a su vez está relacionada con la amplitud de desplazamiento normal, en la forma $v_y = i\omega u_y$. De forma que la amplitud de presión $\tilde{p}$ leída por el hidrófono, tiene una dependencia de la amplitud de desplazamiento normal $\tilde{u}_y$ de la forma

$$\tilde{p}(\omega, k) = C\omega\tilde{u}_y(\omega, k), \quad (1.62)$$

donde C es una constante independiente de la frecuencia. Substituyendo este resultado en (1.61), obtenemos

$$\left|\tilde{p}(\omega, k_n, d)\right|^2 = |C|^2 \omega^2 |HU_{yy}(\omega, k_n, d)|^2 \left|\tilde{T}_{yy}(\omega, k_n, d)\right|^2. \quad (1.63)$$

La expresión (1.63) permite calcular los valores de $\left|\tilde{p}\right|^2$ utilizando los valores teóricos de las funciones de transferencia para ambos modos en estudio (figura 1- 28) y los valores experimentales para $\left|\tilde{T}_{yy}\right|^2$ mostrados en las figuras 1- 30 y 1- 31. Estos resultados se muestran en la curva continua de la figura 1- 32 para el modo S_1 y de la figura 1- 33 para el S_2 .

Los valores de $\left|\tilde{p}\right|^2$ experimentales se obtienen directamente evaluando las intensidades de las señales registradas a lo largo de las curvas de dispersión (figura 1- 27). Estos resultados también se muestran usando signos "+" en las figuras 1- 32 para el modo S_1 y 1- 33 para el S_2 .

El acuerdo es relativamente bueno. No es mejor a causa de que el espesor de la placa no es exactamente 3.0 mm en toda su extensión, y porque la tensión medida sobre la base de la cuña libre es diferente de la que realmente ocurre cuando la cuña es aplicada sobre la placa.

En un segundo experimento, elegimos una placa de aluminio de 4.0 mm de espesor, un transductor de 2.5 cm de diámetro, 2.4 MHz de frecuencia central y 1.5 MHz de ancho de banda. El ángulo de incidencia θ en la figura 1- 24 era de 25° .

Con este nuevo arreglo, tratamos de ubicar la región central de fuerte excitación de la fuente justo en la región de fuerte atenuación prevista del modo S_2 . La función de transferencia teóricamente calculada $|HU_{yy}|^2$ para este modo en la nueva placa es graficada en la figura 1- 34. Vemos que el pico de atenuación se prevé ahora en torno a 1.7 MHz.

El cuadrado del módulo de la tensión normal de excitación en la base de la cuña, a lo largo de la curva de dispersión del modo S_2 , se grafica en la figura 1- 35. Notamos que la región de fuerte excitación coincide con el pico de atenuación mostrado en la figura 1- 34.

Nuevamente medimos con el hidrófono las respuestas sobre la placa a lo largo de 108 mm en pasos de 1 mm. Haciendo la doble transformada de Fourier de las señales obtenidas, tenemos las intensidades de presión $\left|\tilde{p}(\omega, k_n, d)\right|^2$, que son evaluadas sobre la curva de dispersión del modo S_2 y graficadas en la figura 1- 36. Podemos apreciar que, a pesar de la fuerte excitación en torno a 1.7 MHz, el modo S_2 de Lamb no está presente en esa región.

La figura 1- 37 muestra la comparación entre las respuestas experimentales $\left|\tilde{p}(\omega, k_n, d)\right|^2$

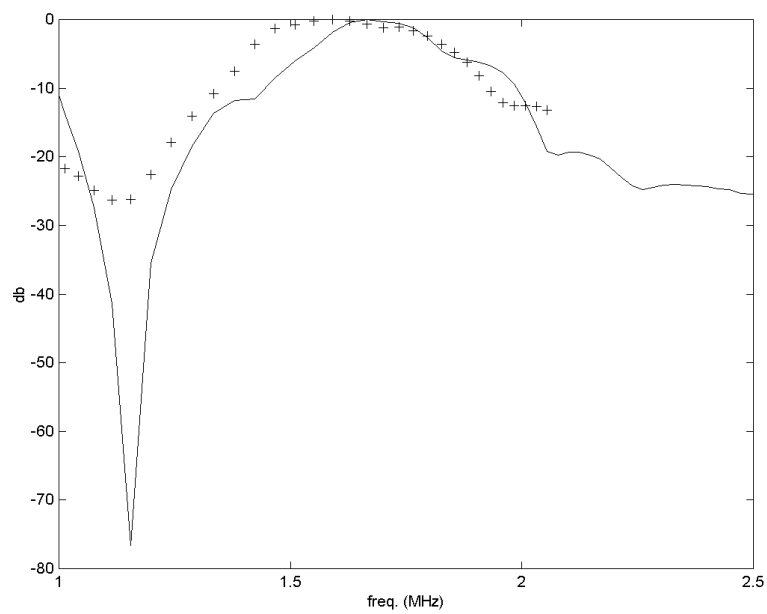


Figura 1- 32. Respuesta teórica (línea continua) y experimental (+) para el modo S_1 en la placa de 3 mm

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

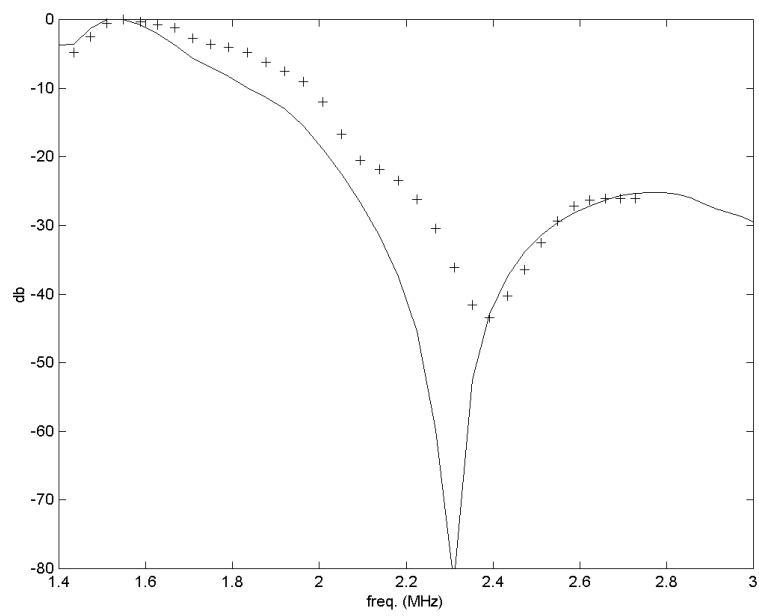


Figura 1- 33. Respuesta teórica (línea continua) y experimental (+) para el modo S_2 en la placa de 3 mm

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

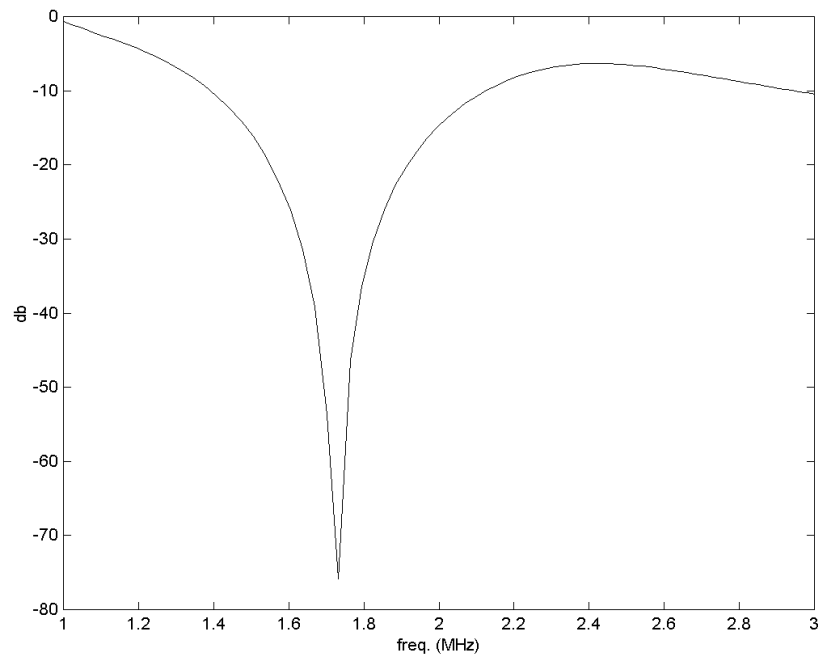


Figura 1- 34. Función de transferencia $10 \log |H_{yy}|^2$ para el modo S_2 en la placa de aluminio de 4 mm.

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

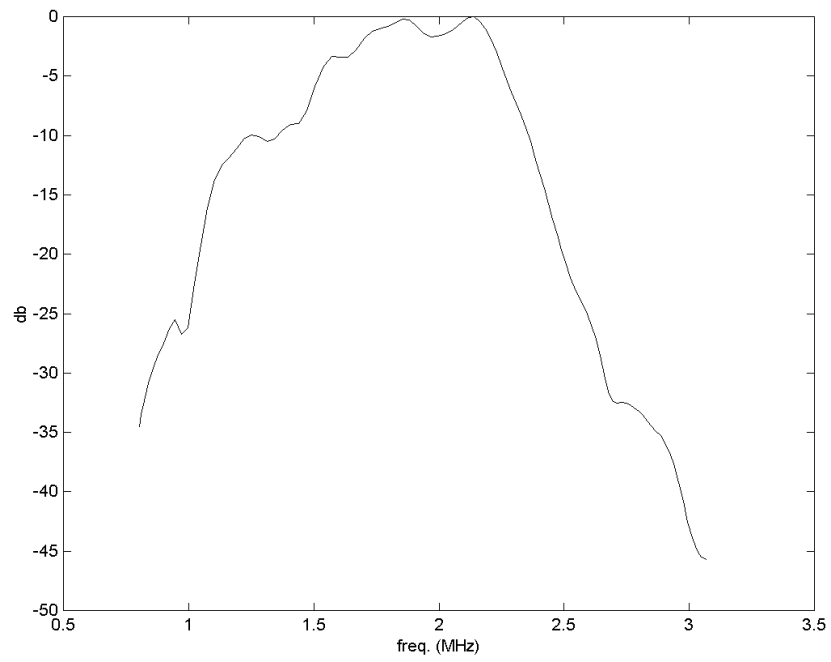


Figura 1- 35. Tensión de excitación $10 \log |T_{yy}|^2$ para el modo S_2 sobre la base de la cuña.

Capítulo 1 Ondas de Lamb en sólidos isotrópicos.

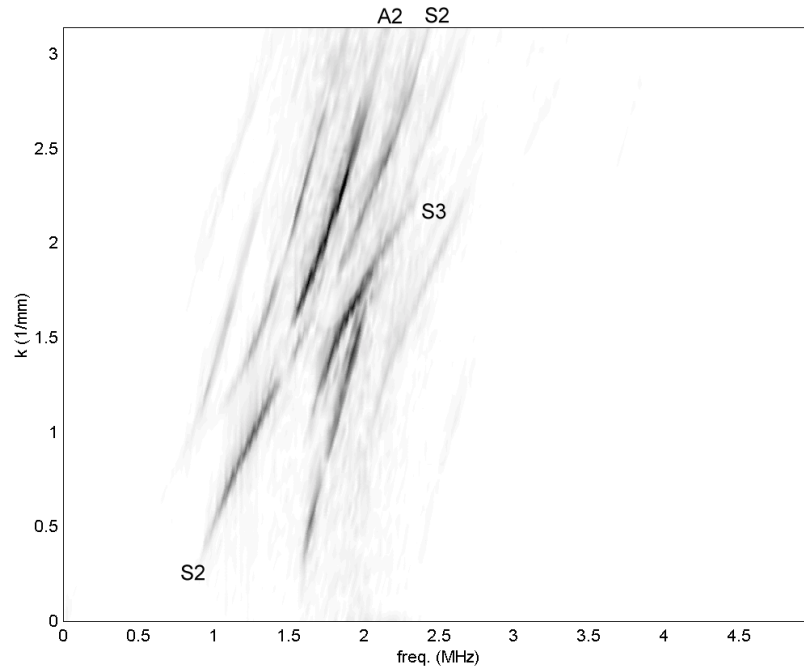


Figura 1- 36. Relaciones de dispersión experimentales para las ondas de Lamb en una placa de aluminio de 4 mm de espesor

para el modo S_2 (puntos +) y los cálculos teóricos hechos con el segundo miembro de la ecuación (1.63) (línea continua). Vemos nuevamente que el acuerdo es bueno.

Seccion 1.4 Generación de ondas de Lamb

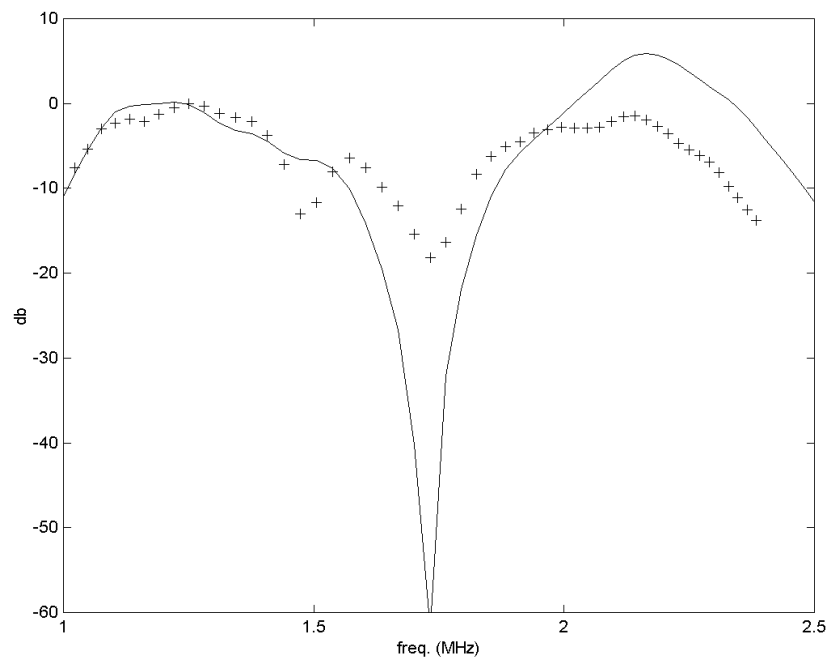


Figura 1- 37. Respuesta teórica (línea continua) y experimental (+) para el modo S_2 en la placa de 4 mm

Capítulo 2

Inversión Temporal

2.1 Teoría del proceso de RT

2.1.1 Introducción

La inversión temporal de un proceso físico significa la posibilidad de repetir dicho proceso pero en sucesión temporal invertida. Esto significa que si una magnitud Ψ evoluciona en el tiempo mediante alguna función $\Psi = \Psi(t)$, entonces es posible obtener la magnitud evolucionando en la forma $\Psi'(t) = \Psi(-t)$.

La posibilidad física de la inversión temporal depende de las características de la ecuación que determina la ley de evolución de la magnitud. En particular, es siempre posible toda vez que la ecuación no contenga más que la derivada segunda de la magnitud respecto al tiempo.

El ejemplo más simple es el de la mecánica. Como la ley de Newton contiene la derivada segunda de la posición respecto del tiempo, $F(x) = md^2x/dt^2$, entonces tanto $x(t)$ como $x(-t)$ son posibles soluciones de la ecuación. En los sistemas de muchas partículas, esta reversibilidad no es posible (o es casi imposible) a causa de las propias leyes que introduce la Mecánica Estadística.

Sin embargo, hay magnitudes características de los sistemas macroscópicos que son regidas por ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto al tiempo. En particular, las ecuaciones de ondas elásticas a que obedecen todas las magnitudes mecánicas en la teoría de los medios continuos sin disipación. Para un medio continuo no disipativo y generalmente anisótropico, el vector desplazamiento $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ obedece a las ecuaciones del Apéndice II.1, II.2 y a la ley de Newton II.4, que combinadas dan una ecuación tensorial para las componentes del desplazamiento

$$\frac{1}{2}c_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde, como siempre, los índices repetidos indican sumatoria de 1 a 3.

Debido a la simetría $c_{ijk} = c_{ikj}$ de los coeficientes de rigidez, la ecuación (2.1) se puede poner más sencillamente como

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

La existencia de únicamente la derivada segunda respecto al tiempo en (2.2), nos asegura

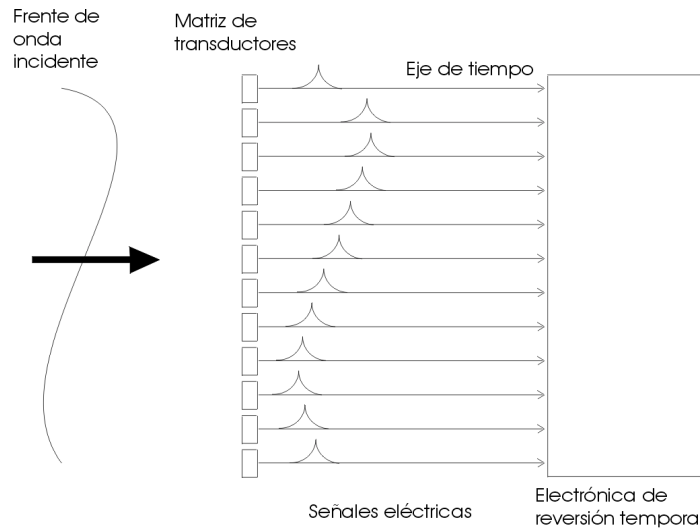


Figura 2- 1. Recepción de un pulso de ondas por una matriz de transductores independientes.

que si $u(x_1, x_2, x_3, t)$ es solución de la misma, también lo será $u(x_1, x_2, x_3, -t)$.

La teoría de la inversión temporal en fluidos y sus enormes posibilidades de aplicación, fueron extensamente estudiadas y desarrolladas por Mathias Fink y sus colaboradores en el *Laboratoire Ondes et Acoustique* de la *École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de la Ville de Paris*[28],[29],[30],[31].

La técnica de la Inversión Temporal radica en la mejor realización experimental para generar el campo invertido $u(x_1, x_2, x_3, -t)$ a partir de la medición de $u(x_1, x_2, x_3, t)$.

La forma más usual es disponer una serie de transductores pequeños e independientes sobre una superficie de forma arbitraria (normalmente un plano), como se muestra en el esquema de la figura 2- 1. Un pulso de onda de duración finita es captado por esta matriz de transductores. La señal es digitalizada e invertida (de forma que lo primero en llegar sea lo último en salir), y luego reenviada a los transductores. Éstos generarán entonces un pulso de onda espacialmente extenso, que es el temporalmente invertido del original (figura 2- 2).

La utilización fundamental de la Inversión Temporal radica en la posibilidad de focalización de una señal acústica, aún en un medio altamente aberrante (toda vez que la absorción sea despreciable).

La figura 2- 3 ilustra la situación en la cual se irradia con un transductor plano a través de un medio que produce distorsión en los frentes de onda. En el interior de ese medio existe un objeto pequeño de diferente impedancia acústica que se desea identificar para caracterizar o destruir. Este objeto dispersará ondas aproximadamente esféricas, que al atravesar el medio aberrante los frentes de onda se apartarán considerablemente de los esféricos. Esto hace extremadamente difícil la identificación del objeto con la lectura primaria de las ondas

Capítulo 2 Inversión Temporal

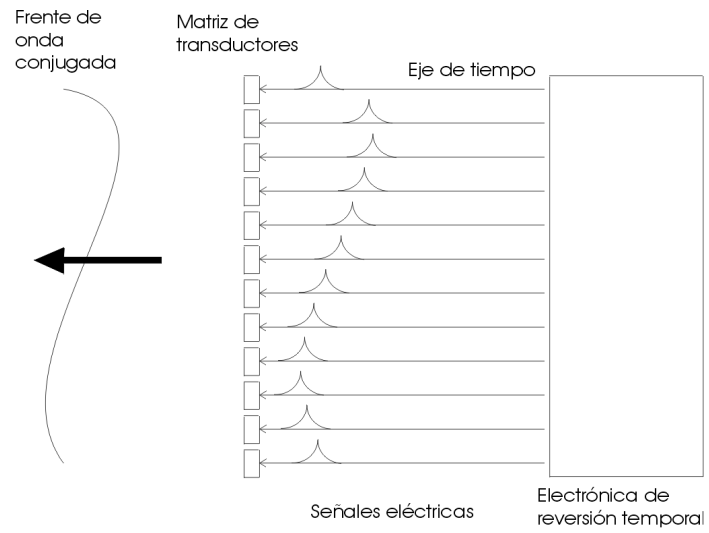


Figura 2- 2. Emisión del pulso de ondas temporalmente revertido.

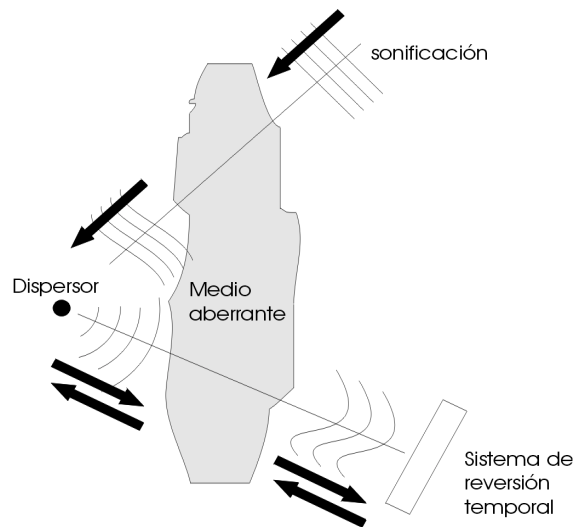


Figura 2- 3. Utilización de la reversión temporal para la identificación de un dispersor en un medio aberrante.

dispersadas.

No obstante, el sistema de Inversión temporal invierte los frentes de onda incidentes, que reconstituirán los frentes esféricos originales en la vecindad del objeto, focalizándose en él. Las ondas reenviadas se volverán a dispersar en el objeto y llegarán de nuevo al sistema de Inversión temporal. Este proceso se puede hacer iterativo, con amplificación electrónica de la señal en cada etapa, hasta lograr una potencia suficiente como para la destrucción del objeto, si es necesario. La utilidad de este proceso es evidente en la litotricia médica, donde el medio aberrante está constituido por los tejidos del cuerpo, y el objeto es un cálculo formada en el interior de un órgano.

2.1.2 Función de transferencia de la Inversión Temporal

Un planteo teórico muy completo de la cavidad cerrada como sistema de Inversión temporal, así como su comparación con una superficie abierta como sistema de Inversión temporal ("espejo de RT") se encuentran en los artículos de D. Cassereau y M. Fink[31],[32]. Acá se presentará un enfoque matemático alternativo de la teoría, que será fácilmente aplicable a la Inversión temporal de las ondas de Lamb.

Considerando las ondas en la teoría de los sistemas lineales, una señal función del tiempo $e(\mathbf{r}_0, t)$ (la entrada) emitida en el punto $\mathbf{r}_0$, es detectada en otro punto $\mathbf{r}$ como la señal $s(\mathbf{r}, t)$ (la salida). Si la ecuación de ondas que regula la propagación es lineal, existe un operador $h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t)$ (la respuesta impulsional del sistema) que convolucionado en el tiempo con la

Capítulo 2 Inversión Temporal

entrada nos proporciona la salida. Esto es

$$s(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t) \otimes e(\mathbf{r}_0, t). \quad (2.3)$$

Si se desplaza el espacio en un vector $\boldsymbol{\delta}$, la señal emitida en el punto $\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}$ tendrá salida en el punto $\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}$, tal que

$$s(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}, t) = h(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}, t) \otimes e(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}, t). \quad (2.4)$$

Si hacemos que la señal emitida en el punto $\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}$ de la ecuación (2.4) sea la misma que emitimos en el punto $\mathbf{r}_0$ de la ecuación (2.3), tendremos que $e(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}, t) = e(\mathbf{r}_0, t)$. Pero si el espacio en que se propaga la onda es homogéneo, la salida en el punto $\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}$ también será igual a la obtenida en el punto $\mathbf{r}$, esto es $s(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}, t) = s(\mathbf{r}, t)$. Por lo tanto, comparando las expresiones (2.3) y (2.4), obtenemos que debe de ser

$$h(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}, t) = h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t),$$

con lo que la respuesta impulsional h será función de la diferencia de posiciones de los puntos emisor y receptor,

$$h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

de manera que la expresión (2.3) puede ponerse como

$$s(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, t) \otimes e(\mathbf{r}_0, t). \quad (2.6)$$

Por otra parte, si emitimos la señal e en el punto $\mathbf{r}$ (en lugar de $\mathbf{r}_0$), y la recibimos en $\mathbf{r}_0$ (en lugar de $\mathbf{r}$), la expresión (2.6) resulta

$$s(\mathbf{r}_0, t) = h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t) \otimes e(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Si el espacio en que se propagan las ondas es isotrópico, a una misma señal emitida debe corresponder una misma señal de salida, independientemente de la dirección de propagación. Por tal motivo, de (2.6) y (2.7) obtenemos que

$$h(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t),$$

de manera que la respuesta impulsional h debe depender de la distancia absoluta entre los puntos inicial y final, esto es

$$h = h(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, t). \quad (2.8)$$

De esta forma, la convolución (2.6) se puede poner como

$$s(\mathbf{r}, t) = h(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, t) \otimes e(\mathbf{r}_0, t). \quad (2.9)$$

En el dominio de las frecuencias ω , la relación (2.9) se expresa con sus respectivas transformadas de Fourier

$$S(\mathbf{r}, \omega) = H(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, \omega) E(\mathbf{r}_0, \omega). \quad (2.10)$$

El proceso de Inversión temporal en un punto $\mathbf{r}$, consiste en capturar una señal $s(\mathbf{r}, t)$ y emitir otra $e_{tr}(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$e_{tr}(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, \tau - t), \quad (2.11)$$

donde el tiempo τ se introduce por razones causales, para evitar que la diferencia $\tau - t$ sea negativa. La señal s que se detecta en $\mathbf{r}$ fue emitida en alguna región del espacio, y es de duración finita, de forma que $s(\mathbf{r}, t) = 0 \forall t \leq 0$. Entonces el intervalo de tiempo τ debe de ser suficientemente largo como para cubrir el intervalo durante el cual se emite la señal, más el tiempo que emplea en viajar desde la fuente hasta el punto de detección $\mathbf{r}$.

Tomando las transformadas de Fourier de (2.11), y considerando que las señales son reales, se obtiene la relación

$$E_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = \exp(j\omega\tau) S^*(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.12)$$

done S^* es el complejo conjugado de S .

La expresión (2.12) muestra que, en el dominio de frecuencias, la señal invertida temporalmente es la compleja conjugada de la señal original, por el factor exponencial que contiene el intervalo de tiempo de retardo τ .

Para aplicar estos resultados al proceso de Inversión temporal, consideremos una única fuente puntual ubicada en el origen del sistema de coordenadas de la figura 2- 4. Esta fuente emite una señal $e(t)$ de duración finita, de forma que $e(t) = 0 \forall t \leq 0$ y $\forall t \geq T_0$. Sea además $E(\omega)$ la transformada de Fourier de esta señal.

Supongamos que tenemos un sistema discreto de N transductores, cada uno de área muy pequeña δS_i , ubicados en los puntos $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$, como se muestra en la figura 2- 4. Sea $\mathbf{n}_i$ la normal del i - ésimo transductor, que convenimos en elegirla apuntando hacia la región donde se encuentra la fuente original. Aplicando la ecuación (2.10), tenemos que cada uno de ellos registra una señal

$$S(\mathbf{r}_i, \omega) = H(|\mathbf{r}_i|, \omega) E(\omega). \quad (2.13)$$

Cada transductor efectúa el proceso de Inversión temporal al cabo de un tiempo τ común para todos. Para asegurarnos de que ninguna de las señales que llegan desde el origen hasta los transductores sea truncada, debemos elegir este tiempo τ suficientemente largo, tal que

$$\tau > T_0 + \frac{1}{c} \max \{|\mathbf{r}_i|\}, \quad (2.14)$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas en el medio, o la mínima velocidad de propagación de las ondas presentes en el paquete si el medio es dispersivo. Obsérvese que quedan excluidas las ondas evanescentes, ya que tienen una velocidad de propagación nula.

Aplicando (2.12) obtenemos la señal temporalmente invertida emitida por cada transductor. Substituyendo (2.13) en (2.12) obtenemos

$$E_{tr}(\mathbf{r}_i, \omega) = \exp(j\omega\tau) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega) E^*(\omega). \quad (2.15)$$

Sea $\mathbf{r}$ otro punto arbitrario en el espacio (figura 2- 4), que por nuestro interés lo

Capitulo 2 Inversión Temporal

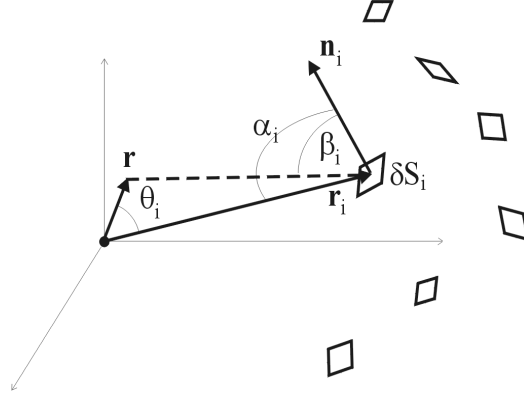


Figura 2- 4. Conjunto de transductores puntuales para producir el retorno temporal de una señal emitida en el origen.

elegiremos próximo al origen donde estaba la fuente original. El i – ésimo transductor producirá en ese punto una señal S_{tr}^i , dada nuevamente por la aplicación de (2.10) a la emisión proporcionada por (2.15). No obstante, debido a que el transductor no es puntual, su función de transferencia de difracción dependerá también de su orientación $\mathbf{n}_i$ en el espacio. Designaremos como $H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega)$ la transferencia de la señal que sale del transductor i ubicado en $\mathbf{r}_i$ hasta el punto $\mathbf{r}$. Multiplicando esta función de transferencia por la señal (2.15) emitida por el transductor, obtendremos su aporte a la señal en el punto $\mathbf{r}$. Esto es

$$S_{tr}^i(\mathbf{r}, \omega) = \exp(j\omega\tau) H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega) E^*(\omega). \quad (2.16)$$

Dada la linealidad del sistema, la señal total producida por los N transductores en el punto $\mathbf{r}$ será

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega) E^*(\omega). \quad (2.17)$$

Al operador definido como

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega), \quad (2.18)$$

lo llamaremos *operador de Inversión temporal*, de forma que podemos expresar la (2.17) como

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) E^*(\omega). \quad (2.19)$$

El operador de Inversión temporal definido en (2.18) y utilizado en (2.19) nos permite

obtener inmediatamente la forma de la señal temporalmente invertida S_{tr} en función de la posición, correspondiente a la señal emitida E en el origen. Esto es particularmente útil para analizar la eficacia de la focalización espacial en el proceso de Inversión temporal.

El espectro de potencia de las señales se obtiene multiplicando (2.19) por su compleja conjugada. Esto da

$$|S_{tr}(\mathbf{r}, \omega)|^2 = |H_{tr}(\mathbf{r}, \omega)|^2 |E(\omega)|^2. \quad (2.20)$$

El operador de Inversión temporal H_{tr} definido en (2.18) contiene la función de transferencia para la propagación de la onda de un foco puntual $H(|\mathbf{r}_i|, \omega)$ desde el origen hasta $\mathbf{r}_i$, y la función de transferencia para la propagación de la onda generada por un transductor $H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega)$ desde el punto $\mathbf{r}_i$ hasta el punto $\mathbf{r}$. Antes de continuar debemos especificar la forma de estas funciones de transferencia.

La función $H(|\mathbf{r}_i|, \omega)$ es la transformada de Fourier de la función de Green para un foco puntual en el espacio ilimitado. Esto es, para ondas tridimensionales

$$H(|\mathbf{r}_i|, \omega) = \Theta(\omega) \frac{\exp[jk(\omega)|\mathbf{r}_i|]}{|\mathbf{r}_i|}, \quad (2.21)$$

donde se incluyó un factor $\Theta(\omega)$ para tomar en cuenta un posible filtrado en frecuencias que pueda introducir el medio.

Para ondas bidimensionales, la transformada de Fourier de la función de Green para un foco puntual en el plano ilimitado es una función de Hankel, que no tiene expresión elemental. Sin embargo, si la menor de las distancias $|\mathbf{r}_i|$ entre el origen y los transductores es mucho mayor que la mayor de las longitudes de onda involucradas en el paquete, esto es, si $k|\mathbf{r}_i| \gg 1$, entonces se puede utilizar la forma asintótica de la función de Hankel, que tiene la forma

$$H(|\mathbf{r}_i|, \omega) = \Theta(\omega) \frac{\exp[jk(\omega)|\mathbf{r}_i|]}{\sqrt{k(\omega)|\mathbf{r}_i|}}. \quad (2.22)$$

En este caso el factor de filtrado $\Theta(\omega)$ se aplica, por ejemplo, a las ondas de Lamb en placas delgadas, donde el espesor finito de la placa introduce un factor de selección privilegiando unas frecuencias sobre otras.

Veremos ahora la forma de la función de transferencia $H_T(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \mathbf{n}', \omega)$ en la propagación de la señal que sale de un transductor de área finita $\delta S'$, ubicado en $\mathbf{r}'$ y orientado según $\mathbf{n}'$, hasta el punto de observación $\mathbf{r}$.

El teorema de Green aplicado en el dominio de las frecuencias, establece que el campo $\Phi(\mathbf{r}, \omega)$ está relacionado con el campo $\Phi(\mathbf{r}', \omega)$ sobre la superficie cerrada S' en la forma

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \oint_{S'} \left[\Phi(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial H(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n'} - H(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}', \omega)}{\partial n'} \right] dS', \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{r}' \in S'$, la normal $\mathbf{n}'$ del elemento de área dS' ha sido elegida hacia adentro de la superficie, $\partial/\partial n'$ indican derivadas en el sentido de la normal, y $H(|\mathbf{r}'|, \omega)$ es la función de transferencia para un foco puntual en el espacio ilimitado (2.21).

Capítulo 2 Inversión Temporal

Si hacemos que el campo $\Phi(\mathbf{r}', \omega)$ sobre la superficie sea generado por un transductor (o un conjunto "continuo" de transductores) que ocupan una superficie abierta S' , podemos imponer que $\Phi(\mathbf{r}', \omega)$ y su derivada normal sean nulas para $\mathbf{r}' \notin S'$. De esta forma limitamos la integral de (2.23) a la superficie abierta S' ,

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{S'} \left[\Phi(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial H(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n'} - H(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}', \omega)}{\partial n'} \right] dS'. \quad (2.24)$$

La señal aportada en el punto $\mathbf{r}$ por un sólo transductor elemental de área δS_i , ubicado en $\mathbf{r}_i$ y orientado según $\mathbf{n}_i$ se puede poner como un elemento de la integral (2.24), en la forma

$$\delta \Phi(\mathbf{r}, \omega) = \delta S_i \left[\Phi(\mathbf{r}_i, \omega) \frac{\partial H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n_i} - H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_i, \omega)}{\partial n_i} \right], \quad (2.25)$$

que se puede escribir como

$$\delta \Phi(\mathbf{r}, \omega) = \delta S_i \left[\frac{\partial H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n_i} - H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \frac{\partial}{\partial n_i} \right] \Phi(\mathbf{r}_i, \omega). \quad (2.26)$$

El operador que resulta definido en (2.26) como

$$H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega) = \delta S_i \left[\frac{\partial H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n_i} - H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \frac{\partial}{\partial n_i} \right], \quad (2.27)$$

es la función de transferencia que buscábamos, que transfiere la señal originada en el transductor ubicado en $\mathbf{r}_i$ hasta el punto $\mathbf{r}$. Tiene en cuenta además el área y la orientación del transductor.

Es importante resaltar que el teorema de Green (2.23) también vale para campos bidimensionales. En este caso los vectores de posición depende solamente de las dos coordenadas del plano, la superficie cerrada se convierte en una curva plana cerrada y el elemento dS' es una longitud de arco elemental. Un transductor, o conjunto "continuo" de transductores para ondas bidimensionales se representa por una curva plana arbitraria.

Todas las deducciones que llevaron a la ecuación (2.27) se mantienen válidas para ondas en dos dimensiones. Al aplicar (2.27) en estos casos, hay que tener en cuenta que la función H es entonces la (2.22), y el elemento δS_i es la longitud del transductor lineal i -ésimo.

Para ondas de volumen, sustituimos en (2.27) la expresión (2.21) para H . La derivada normal de

$$H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) = \Theta(\omega) \frac{\exp[jk(\omega)|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|]}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|},$$

es

$$\frac{\partial H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n_i} = \mathbf{n}_i \cdot \nabla_i H = -\cos \beta_i \left(jk - \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \right) H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega), \quad (2.28)$$

donde β_i es el ángulo que se muestra en la figura 2-4.

Para estudiar las propiedades de focalización, nos interesan los puntos de observación $\mathbf{r}$ próximos al origen, que es la ubicación de la fuente puntual original. Como ya se optó por la aproximación $k \gg 1/|\mathbf{r}_i|$, también será $k \gg 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$, por lo que una buena aproximación de (2.28) es

$$\frac{\partial H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega)}{\partial n_i} \approx -jkH(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \cos \beta_i. \quad (2.29)$$

De esta forma, substituyendo (2.29) en (2.27), resulta

$$H_T(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \mathbf{n}_i, \omega) = -\delta S_i H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \left(jk \cos \beta_i + \frac{\partial}{\partial n_i} \right). \quad (2.30)$$

Ahora ya estamos en condiciones de expresar el operador de retorno temporal H_{tr} definido en (2.18). Substituyendo allí la expresión (2.30), obtenemos

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -\exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) \left(jk \cos \beta_i + \frac{\partial}{\partial n_i} \right) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega). \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta nuevamente la derivada normal (ver figura 2-4),

$$\frac{\partial H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega)}{\partial n_i} = \mathbf{n}_i \cdot \nabla_i H^* = \cos \alpha_i \left(jk + \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \right) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega) \approx jk H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega) \cos \alpha_i, \quad (2.32)$$

introducimos este resultado en (2.31), que resulta

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i (\cos \alpha_i + \cos \beta_i) H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega). \quad (2.33)$$

El factor

$$q(\alpha_i, \beta_i) = \cos \alpha_i + \cos \beta_i, \quad (2.34)$$

se conoce en óptica y acústica como *factor de oblicuidad* del elemento de área δS_i , puesto que relaciona la orientación del elemento de área con las direcciones a la fuente original y al punto de observación. Como las normales a los elementos apuntan siempre hacia la región en que está la fuente inicial (el origen) y también el punto de observación, tendremos la condición $q(\alpha_i, \beta_i) \geq 0$.

Poniendo esta definición en (2.33) tenemos

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i q(\alpha_i, \beta_i) H(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \omega) H^*(|\mathbf{r}_i|, \omega). \quad (2.35)$$

La expresión (2.35) proporciona la función de transferencia para el retorno temporal producido por un conjunto discreto de transductores. Las funciones H son las de (2.21) y los elementos δS_i son las áreas de los transductores elementales. Para la mayoría de los fines

Capítulo 2 Inversión Temporal

prácticos se considera una densidad grande de transductores muy pequeños, y la sumatoria en (2.35) se substituye por una integral de superficie sobre la matriz de transductores.

Para el caso bidimensional, se debe substituir la expresión (2.22) en (2.27). Con la misma aproximación $k \gg 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$ se llega a una expresión idéntica a (2.29). De allí en adelante, los pasos son los mismos que conducen a la (2.35), con la salvedad de que la función H es la expresada por (2.22), y los elementos δS_i son las longitudes de los transductores elementales lineales. La sumatoria de (2.35) se extiende sobre la curva plana arbitraria formada por los transductores lineales.

2.1.3 La focalización en los procesos de Inversión temporal

2.1.3.1 Propiedades generales de la focalización de un pulso de ondas Consideremos un pulso de ondas en el espacio. El campo de vibraciones en un punto $\mathbf{r}$ y en un instante t se puede poner como

$$s(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{r}, \omega) \exp(-j\omega t) d\omega. \quad (2.36)$$

Explicitando $S(\mathbf{r}, \omega)$ en función de su módulo y su fase, tenemos que

$$S(\mathbf{r}, \omega) = |S(\mathbf{r}, \omega)| \exp j\varphi(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.37)$$

con lo que la señal (2.36) se puede poner como

$$s(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\mathbf{r}, \omega)| \exp j[\varphi(\mathbf{r}, \omega) - \omega t] d\omega. \quad (2.38)$$

Sea ω_0 la frecuencia central del paquete, donde $|S(\mathbf{r}, \omega)|$ tiene su máximo. Multiplicando y dividiendo la expresión (2.38) por el factor $\exp j[\varphi(\mathbf{r}, \omega_0) - \omega_0 t]$, resulta

$$s(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp j[\varphi(\mathbf{r}, \omega_0) - \omega_0 t], \quad (2.39)$$

donde

$$a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\mathbf{r}, \omega)| \exp j[\varphi(\mathbf{r}, \omega) - \varphi(\mathbf{r}, \omega_0) - (\omega - \omega_0)t] d\omega. \quad (2.40)$$

De esta forma, la expresión (2.39) expresa la señal $s(\mathbf{r}, t)$ como una vibración de frecuencia ω_0 , que tiene una amplitud modulada más lentamente $a(\mathbf{r}, t)$ dada por (2.40).

Considerando que la fase φ varía con relativa suavidad con la frecuencia, podemos desarrollarla hasta el segundo orden alrededor de la frecuencia central, como se suele hacer

en el análisis de los paquetes de ondas. Resulta

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) \approx \varphi(\mathbf{r}, \omega_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2. \quad (2.41)$$

Par simplificar la notación, pongamos

$$\alpha(\mathbf{r}, \omega_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}, \quad \beta(\mathbf{r}, \omega_0) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}, \quad \Omega = \omega - \omega_0, \quad (2.42)$$

en (2.41), que resulta

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) \approx \varphi(\mathbf{r}, \omega_0) + \alpha\Omega + \frac{1}{2}\beta\Omega^2.$$

Substituyendo esta última expresión en (2.40) obtenemos

$$a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\mathbf{r}, \omega)| \exp\left(\frac{j}{2}\beta\Omega^2\right) \exp[j(\alpha - t)\Omega] d\Omega. \quad (2.43)$$

El espectro $|S(\mathbf{r}, \omega)|$ se puede aproximar en torno a su máximo $|S(\mathbf{r}, \omega_0)|$ en forma de una curva gaussiana

$$|S(\mathbf{r}, \omega)| \approx |S(\mathbf{r}, \omega_0)| \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\delta\omega)^2}\right], \quad (2.44)$$

donde $\delta\omega$ es el semi-ancho de banda del paquete.

Introduciendo (2.44) en (2.43) para la amplitud modulada, resulta

$$a(\mathbf{r}, t) = |S(\mathbf{r}, \omega_0)| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\delta\omega)^2} - j\beta\right)\Omega^2\right] \exp[j(\alpha - t)\Omega] d\Omega. \quad (2.45)$$

La amplitud $a(\mathbf{r}, t)$ en la expresión (2.45) está formada por una superposición de ondas de diferentes frecuencias Ω , cada una con su fase $[\alpha(\mathbf{r}, \omega_0) - t]\Omega$. Dado un punto $\mathbf{r}$, existe un instante $t(\mathbf{r})$ en el que todas las componentes se superponen en fase. Esto es, cuando $\alpha(\mathbf{r}, \omega_0) - t(\mathbf{r}) = 0$. En ese instante obtendremos el máximo valor de amplitud del paquete, el cual depende solamente de la posición. La máxima amplitud de la señal en función de la posición será entonces

$$a_m(\mathbf{r}) = |S(\mathbf{r}, \omega_0)| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\delta\omega)^2} - j\beta\right)\Omega^2\right] d\Omega. \quad (2.46)$$

El valor de la integral en (2.46) es conocido. Tomando el módulo de la amplitud máxima,

Capítulo 2 Inversión Temporal

obtenemos el resultado

$$|a_m(\mathbf{r})| = \sqrt{2\pi} \frac{(\delta\omega)^2 |S(\mathbf{r}, \omega_0)|}{\left[1 + (\delta\omega)^4 \beta^2\right]^{1/4}}. \quad (2.47)$$

Utilizando el valor de β de (2.42), tenemos, para la amplitud máxima del paquete en función de la posición, la expresión

$$|a_m(\mathbf{r})| = \sqrt{2\pi} \frac{(\delta\omega)^2 |S(\mathbf{r}, \omega_0)|}{\left[1 + (\delta\omega)^4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}^2\right]^{1/4}}. \quad (2.48)$$

En el resultado (2.48) existen, en general, dos dependencias de la posición $\mathbf{r}$ que afectan el valor de la amplitud máxima.

Una proviene del valor del espectro $|S(\mathbf{r}, \omega_0)|$ de la señal, evaluado en el centro ω_0 del paquete. Esta contribución es consecuencia de la conservación de la energía, puesto que la intensidad de la señal en un punto $\mathbf{r}$ del espacio está dada por

$$w(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega \approx |S(\mathbf{r}, \omega_0)|^2 \delta\omega. \quad (2.49)$$

Cuando las ondas no son planas, la intensidad $w(\mathbf{r})$ de las ondas depende de la posición. En el punto en el cual la intensidad es máxima, la amplitud también lo es, y constituye un *foco espacial* del pulso de ondas.

La otra contribución al valor de la máxima amplitud en (2.48) proviene de la derivada segunda respecto a la frecuencia en la fase $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ de la transformada de Fourier $S(\mathbf{r}, \omega)$ de la señal, que depende de la posición se existe dispersión en el medio. En este caso, puede existir una variación de la amplitud con la posición aún para ondas planas, para las cuales $|S|$ no depende de $\mathbf{r}$ (intensidad constante). En estos puntos en que existe un máximo de amplitud como consecuencia de la dispersividad del medio, hablamos de la *focalización temporal* de la señal.

2.1.3.2 Aplicación a la inversión temporal de ondas tridimensionales Para ondas de volumen utilizamos la expresión (2.21) para el foco puntual. Tenemos que

$$H_i = \Theta(\omega) \frac{\exp[jk(\omega) r_i]}{r_i}, \quad (2.50)$$

por lo que el operador de inversión temporal (2.35) resulta

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i q(\alpha_i, \beta_i) |\Theta|^2 \frac{\exp[jk(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| - |\mathbf{r}_i|)]}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_i|}. \quad (2.51)$$

Para poder analizar las propiedades de focalización del sistema de transductores de

Inversión temporal, es útil simplificar (2.51) aplicándola a puntos en la vecindad del origen.

De acuerdo con la figura 2- 4 tenemos

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| = \sqrt{r_i^2 + r^2 - 2r_i r \cos \theta_i}, \quad (2.52)$$

donde θ_i es el ángulo entre los vectores de posición del i – *ésimo* transductor y el punto de observación, $r_i = |\mathbf{r}_i|$, $r = |\mathbf{r}|$,

Imponiendo la condición de que $r \ll r_i$, podemos aproximar (2.52) como

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| \approx r_i - r \cos \theta_i, \quad (2.53)$$

y además

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_i|} \approx \frac{1}{r_i^2}. \quad (2.54)$$

Substituyendo (2.53) y (2.54) en (2.51), obtenemos

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i q(\alpha_i, \beta_i) |\Theta|^2 \frac{\exp(-jkr \cos \theta_i)}{r_i^2}. \quad (2.55)$$

Si suponemos una situación como la de la figura 2- 5, en la cual los transductores elementales son suficientemente pequeños como para constituir una superficie continua, podemos expresar la (2.55) como una integral a toda la superficie S del transductor. Esto es

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \int_S q(\alpha_i, \beta_i) \frac{\exp(-jkr \cos \theta_i)}{r_i^2} \delta S_i. \quad (2.56)$$

El factor de oblicuidad $q(\alpha, \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ que aparece en (2.56), contiene los ángulos α formados por la normal al elemento de área δS y la dirección de $\mathbf{r}_i$, y los ángulos β formados por la normal al elemento de área y la dirección de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. En las condiciones de proximidad del origen que estamos suponiendo, tendremos que $\alpha \approx \beta$, por lo que el factor de oblicuidad se puede aproximar como

$$q(\alpha, \beta) \approx 2 \cos \alpha. \quad (2.57)$$

Substituyendo este valor en (2.56), la función de transferencia para la inversión temporal resulta

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2jk \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \int_S \exp(-jkr \cos \theta_i) \frac{\cos \alpha_i}{r_i^2} \delta S_i. \quad (2.58)$$

De la observación de la figura 2- 5, vemos que

$$\frac{\cos \alpha_i}{r_i^2} \delta S_i = d\Omega, \quad (2.59)$$

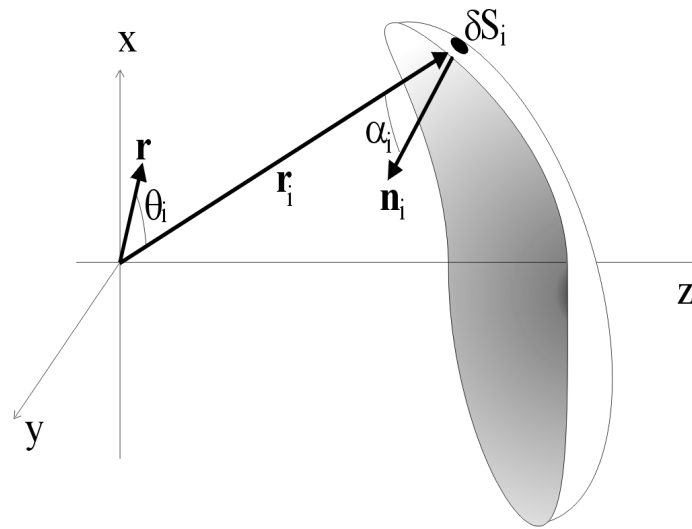


Figura 2- 5. Reversión temporal tridimensional: sistema de transductores elementales planos que forman una superficie arbitraria en el espacio.

donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido sustentado por el elemento de área δS desde el origen. Esto determina que podamos escribir (2.58) como

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2jk \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \int_{\Omega} \exp(-jkr \cos \theta) d\Omega, \quad (2.60)$$

donde Ω es el ángulo sólido total sustentado por la superficie del transductor respecto al origen.

Una aplicación inmediata de (2.60) es el cálculo de la función de transferencia de una cavidad tridimensional cerrada de inversión temporal, que encierra al foco en el origen y al punto de observación $\mathbf{r}$. Como el ángulo sólido, en este caso, cubre todo el espacio, podemos comenzar a medirlo desde la propia dirección de $\mathbf{r}$ en la figura 2- 5.

En estas condiciones, tenemos que un elemento cónico de ángulo sólido con eje en la dirección de $\mathbf{r}$ y que forma un ángulo θ con el eje, se expresa como

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.61)$$

donde θ varía entre 0 y π y el ángulo sólido total sustentado por la cavidad es $\Omega = 4\pi$.

Entonces la expresión (2.60) resulta

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi jk \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \int_0^\pi \exp(-jkr \cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.62)$$

lo que da como resultado

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -8\pi jk \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \frac{\sin kr}{kr}. \quad (2.63)$$

La transformada de Fourier $S_{tr}(\mathbf{r}, \omega)$ de la señal temporalmente invertida se obtiene de la expresión (2.19), conociendo el espectro $E(\omega)$ de la señal originalmente emitida, y la función de transferencia $H_{tr}(\mathbf{r}, \omega)$, de forma que

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) E^*(\omega). \quad (2.64)$$

Substituyendo (2.63) en (2.64) y simplificando el valor de k que aparece en el numerador y el denominador, tenemos

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -j8\pi \exp(j\omega\tau) E^*(\omega) |\Theta(\omega)|^2 \frac{\sin k(\omega)r}{r}. \quad (2.65)$$

Utilizando en (2.65) las expresiones $-j = \exp(-j\pi/2)$, y $E(\omega) = |E(\omega)| \exp[j\varepsilon(\omega)]$, la podemos reescribir como

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = 8\pi |E(\omega)| |\Theta(\omega)|^2 \frac{\sin [k(\omega)r]}{r} \exp[j(\omega\tau - \varepsilon(\omega) - \pi/2)]. \quad (2.66)$$

Capítulo 2 Inversión Temporal

Si identificamos los factores de (2.66) con el módulo y la fase de la función $S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = |S_{tr}(\mathbf{r}, \omega)| \exp[j\varphi(\mathbf{r}, \omega)]$, tendremos que

$$\begin{aligned} |S_{tr}(\mathbf{r}, \omega)| &= 8\pi |E(\omega)| |\Theta(\omega)|^2 \frac{\sin[k(\omega)r]}{r}, \\ \varphi(\mathbf{r}, \omega) &= \omega\tau - \varepsilon(\omega) - \pi/2 = \varphi(\omega). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Si suponemos que el pulso de ondas emitido en el origen tiene una frecuencia central ω_0 y un semiancho de banda $\delta\omega$, podemos aproximarlos mediante una gaussiana en torno a su frecuencia central, de forma que

$$|E(\omega)| \approx |E(\omega_0)| \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\delta\omega)^2}\right]. \quad (2.68)$$

En estas condiciones, podemos aplicar el resultado (2.48) para obtener la máxima amplitud del pulso de ondas, en función de su distancia al origen donde se encontraba el emisor inicial. Resulta

$$|a_m(\mathbf{r})| = \frac{\sqrt{2\pi} 8\pi (\delta\omega)^2 |E(\omega_0)| |\Theta(\omega_0)|^2 \left| \frac{\sin[k(\omega_0)r]}{r} \right|}{\left[1 + (\delta\omega)^4 (\varepsilon''(\omega_0))^2\right]^{1/4}}, \quad (2.69)$$

donde $\varepsilon''(\omega_0) = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}$, de acuerdo con la segunda igualdad de (2.67).

La única dependencia de la amplitud máxima con la posición en (2.69) proviene de la focalización espacial a través del módulo de S_{tr} . Evidentemente, tiene un foco en el origen donde la amplitud tiene su valor máximo $|a_m(\mathbf{0})|$. Utilizando este valor, se puede escribir (2.69) como

$$|a_m(\mathbf{r})| = |a_m(\mathbf{0})| \left| \frac{\sin[k(\omega_0)r]}{k(\omega_0)r} \right|. \quad (2.70)$$

D. Cassereau y M. Fink[31] han calculado el campo temporalmente invertido por una cavidad cerrada tridimensional de transductores. Supusieron un foco puntual en el origen, que irradia una señal de duración finita $\phi(t)$, tal que $\phi(t) = 0$ si $t < 0$ o $t > T_\phi$.

Si el medio interior de la cavidad es un fluido elástico homogéneo, y el tiempo τ de lectura de los transductores es suficientemente largo como para no truncar la señal, entonces, Cassereau y Fink encontraron que el campo de presiones retornado temporalmente a una distancia $r = |\mathbf{r}|$ de la fuente original es

$$p_{rt}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \phi\left(\tau - t + \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r} \phi\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right), \quad (2.71)$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas en el medio, independiente de la frecuencia.

Tomando la transformada de Fourier de (2.71) obtenemos el resultado

$$P_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{j}{2\pi} \Phi^*(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{\sin[k(\omega)r]}{r}, \quad (2.72)$$

donde $\Phi(\omega)$ es la transformada de Fourier de la emisión $\phi(t)$.

Poniendo en (2.72) que $-j = \exp(-j\pi/2)$, y $\Phi(\omega) = |\Phi(\omega)| \exp[j\varepsilon(\omega)]$ obtenemos la expresión

$$P_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(\omega)| \frac{\sin[k(\omega)r]}{r} \exp[j(\omega\tau - \varepsilon(\omega) - \pi/2)]. \quad (2.73)$$

Para comparar esta ecuación con (2.66), observemos que el medio es un fluido homogéneo que no introduce ningún factor de filtro en la propagación, con lo que $|\Theta(\omega)|^2 = K$ es una constante positiva. Además el espectro de emisión es $|\Phi(\omega)| = |E(\omega)|$, por lo que (2.73) es igual a (2.66), a menos de un factor de normalización.

2.1.3.3 Aplicación a ondas bidimensionales Partimos de que la ecuación (2.35) es válida también para ondas de superficie, toda vez que los elementos δS_i sean las longitudes elementales de los transductores lineales y la función de transferencia esté dada por (2.22). Esto es

$$H_i = \Theta \frac{\exp(jk|\mathbf{r}_i|)}{\sqrt{k|\mathbf{r}_i|}}. \quad (2.74)$$

Substituyendo (2.74) en (2.35), resulta

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \exp(j\omega\tau) \sum_{i=1}^N \delta S_i q(\alpha_i, \beta_i) |\Theta|^2 \frac{\exp[jk(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| - |\mathbf{r}_i|)]}{k\sqrt{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}||\mathbf{r}_i|}}. \quad (2.75)$$

Consideremos la situación de la figura 2- 6, donde un foco puntual en 0 genera ondas que se propagan por el plano xy . El vector $\mathbf{r}$ indica la posición del punto de observación de las ondas temporalmente retornadas.

Un conjunto de transductores lineales, de longitudes δS_i , se disponen uno a continuación del otro formando una curva arbitraria (abierta o cerrada) sobre el plano. En caso de que la curva sea cerrada, debe encerrar al origen 0. Las normales $\mathbf{n}_i$ de los transductores lineales elementales apuntan hacia la región de la fuente original y del punto de observación.

Con las mismas aproximaciones (2.53), (2.54) y (2.57) hechas para el caso tridimensional, la expresión (2.75) se convierte en una integral de línea sobre la curva C formada por un arreglo continuo de transductores lineales. Esto es

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2j \exp(j\omega\tau) |\Theta|^2 \int_C \exp(-jkr \cos \theta_i) \frac{\cos \alpha_i}{r_i} \delta S_i. \quad (2.76)$$

En la figura 2- 7 se observa que el producto $dS \cos \alpha$ da el elemento de arco $dS_\perp$ con

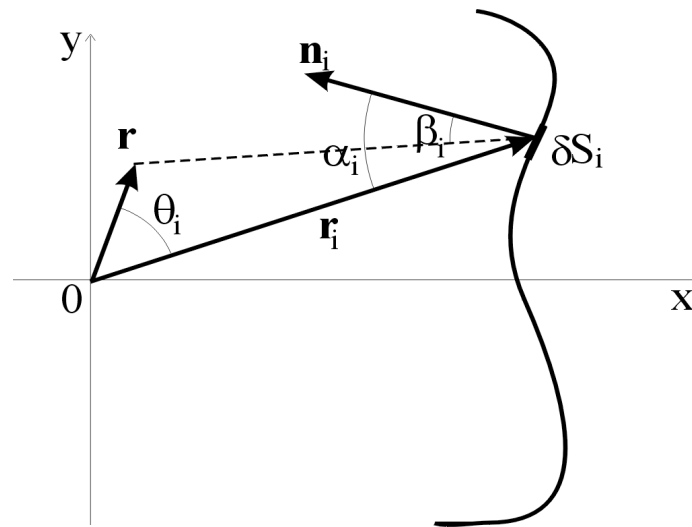


Figura 2- 6. Reversión temporal bidimensional: sistema de transductores lineales que forman una curva arbitraria en el plano.

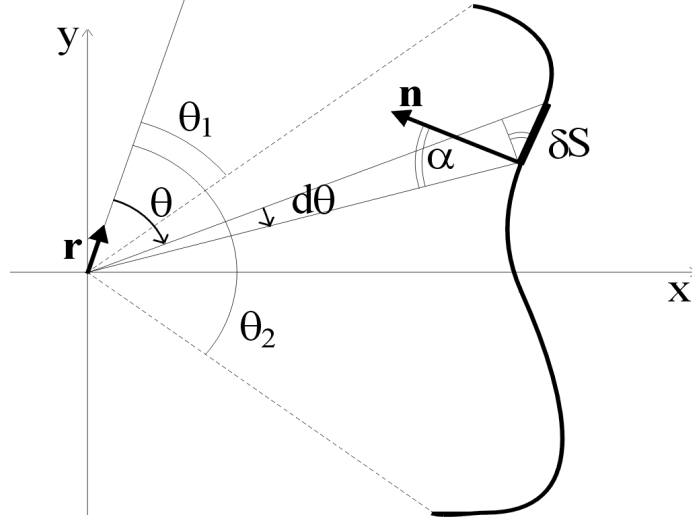


Figura 2- 7. Sistema de transductores de la figura anterior, con los parámetros utilizados para el cálculo de la eficacia de focalización.

centro en el origen, por lo que

$$\int_C \exp(-jkr \cos \theta_i) \frac{\cos \alpha_i}{r_i} \delta S_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(-jkr \cos \theta) d\theta, \quad (2.77)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos límites de la curva de transductores con respecto al origen, medidos a partir de la dirección r del punto de observación y en sentido horario en la figura 2- 7.

Substituyendo (2.77) en (2.76) obtenemos una expresión para el operador de inversión temporal de ondas bidimensionales, en la forma

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2j \exp(j\omega\tau) |\Theta(\omega)|^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp[-jk(\omega) r \cos \theta] d\theta. \quad (2.78)$$

La integral de (2.78) tiene una expresión simple si se trata de una cavidad bidimensional cerrada de transductores. En este caso tendremos que los ángulos límites son $\theta_1 = 0$, y $\theta_2 = 2\pi$, con lo cual

$$\int_0^{2\pi} \exp(-jkr \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(kr), \quad (2.79)$$

Capitulo 2 Inversión Temporal

siendo J_0 la función de Bessel de orden cero.

El operador de inversión temporal para una cavidad cerrada bidimensional, resulta substituyendo (2.79) en (2.78),

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi j \exp(j\omega\tau) |\Theta(\omega)|^2 J_0[k(\omega)r]. \quad (2.80)$$

Siguiendo los mismos pasos que los efectuados para la cavidad tridimensional, desde la ecuación (2.64) a la (2.69), obtenemos para la máxima amplitud de la señal temporalmente invertida en la vecindad del origen, la expresión

$$|a_m(\mathbf{r})| = |a_m(\mathbf{0})| |J_0[k(\omega_0)r]|. \quad (2.81)$$

Comparando la expresión (2.81) para ondas bidimensionales con la (2.70) para ondas tridimensionales, se obtiene la conclusión de que el proceso de inversión temporal focaliza mejor ondas bidimensionales que tridimensionales, puesto que $|J_0(x)| < |(\sin x)/x|$ si $x > 0$.

Si el sistema de transductores de inversión temporal no forman una cavidad cerrada, podemos desarrollar el integrando de (2.77) en potencias de kr en la vecindad del origen, por ejemplo hasta el segundo orden,

$$\exp(-jkr \cos \theta) \approx 1 - jkr \cos \theta - \frac{1}{2} k^2 r^2 \cos^2 \theta. \quad (2.82)$$

De forma que el resultado de la integral (2.77) resulta

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(-jkr \cos \theta) d\theta \approx \gamma - jkr (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - \frac{k^2 r^2}{4} \left(\gamma + \frac{\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1}{2} \right), \quad (2.83)$$

donde se ha puesto $\gamma = \theta_2 - \theta_1$, que es el ángulo de abertura total del espejo desde el origen.

Es conveniente expresar el resultado (2.83) mediante un cambio de coordenadas, tomando como eje de referencia la bisectriz del ángulo γ de abertura del espejo, como indica la figura 2- 8. Sea θ_0 el ángulo de la dirección de observación $\mathbf{r}$ medido desde la bisectriz de γ (positivo en la figura) entonces tenemos que

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{\gamma}{2}, \quad \theta_1 = \theta_0 - \frac{\gamma}{2}. \quad (2.84)$$

Substituyendo estos dos valores en (2.83), obtenemos

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(-jkr \cos \theta) d\theta \approx \gamma - \frac{k^2 r^2}{4} (\gamma + \sin \gamma \cos 2\theta_0) - j2kr \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_0. \quad (2.85)$$

La expresión (2.85) se puede poner como

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(-jkr \cos \theta) d\theta \approx M \exp(j\psi), \quad (2.86)$$

donde

$$\begin{aligned} M(\mathbf{r}, \omega) &= \sqrt{\left[\gamma - \frac{k^2 r^2}{4} (\gamma + \sin \gamma \cos 2\theta_0) \right]^2 + 4k^2 r^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \theta_0}, \\ \tan \psi(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{2kr \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_0}{\gamma - \frac{k^2 r^2}{4} (\gamma + \sin \gamma \cos 2\theta_0)}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Considerando que estamos trabajando con valores pequeños de kr , las ecuaciones (2.87) resultan aproximadamente

$$\begin{aligned} M(\mathbf{r}, \omega) &\approx \sqrt{\gamma^2 - \frac{k^2 r^2}{2} (\gamma^2 + \gamma \sin \gamma \cos 2\theta_0 - 8 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \theta_0)}, \\ \psi(\mathbf{r}, \omega) &\approx -\frac{2kr \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta_0}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

La substitución de (2.86) en (2.78) nos da una expresión para el operador de inversión temporal,

$$\begin{aligned} H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) &= -2j \exp(j\omega\tau) |\Theta(\omega)|^2 M \exp(j\psi) = \\ &= 2 |\Theta(\omega)|^2 M \exp \left[j \left(\psi + \omega\tau - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

El espectro S_{tr} de la señal temporalmente invertida en el punto $\mathbf{r}$ resultará de multiplicar (2.89) por el espectro de emisión $E^*(\omega)$ de la señal. Entonces

$$S_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = 2 |\Theta(\omega)|^2 |E(\omega)| M(\mathbf{r}, \omega) \exp \left[j \left(\psi + \omega\tau - \varepsilon(\omega) - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (2.90)$$

donde $\varepsilon(\omega)$ es la fase de la emisión $E(\omega)$.

Con el resultado expresado en la forma de (2.90), podemos aplicar la ecuación (2.48) para calcular la amplitud máxima de la señal temporalmente invertida en función de la posición. Resulta

$$|a_m(\mathbf{r})| = \sqrt{2\pi} \frac{2(\delta\omega)^2 |\Theta(\omega_0)|^2 |E(\omega_0)| M(\mathbf{r}, \omega_0)}{\left[1 + (\delta\omega)^4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}^2 \right]^{1/4}}, \quad (2.91)$$

donde ω_0 es la frecuencia central del paquete, $\delta\omega$ es su semiancho de banda, y φ es la fase

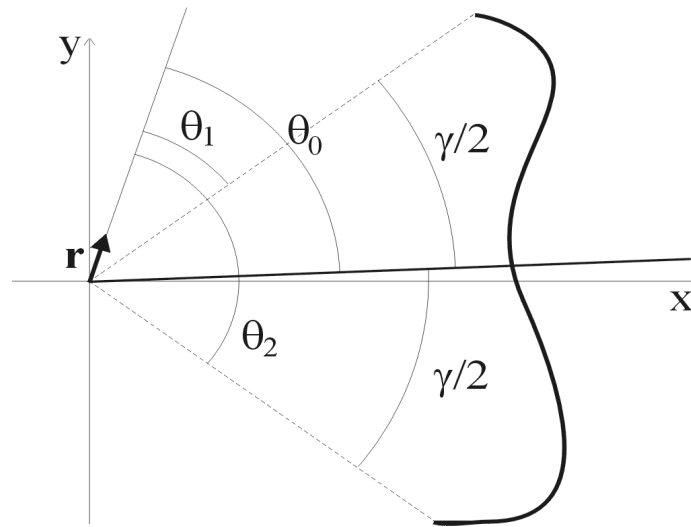


Figura 2- 8. Espejo de inversión temporal de ondas bidimensionales emitidas en el origen de coordenadas.

total de la señal en (2.90). Esto es

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \psi(\mathbf{r}, \omega) + \omega\tau - \varepsilon(\omega) - \frac{\pi}{2}. \quad (2.92)$$

La fase $\varepsilon(\omega)$ de la señal emitida se puede aproximar linealmente en torno a la frecuencia central ω_0 , con lo que su derivada segunda puede omitirse en (2.91). Tomando la derivada segunda respecto a ω en (2.92), tenemos

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}. \quad (2.93)$$

Utilizando el resultado de (2.88) para ψ en (2.93) tenemos

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} = -k''(\omega_0) r \frac{\sin(\gamma/2)}{\gamma/2} \cos \theta_0. \quad (2.94)$$

El valor de M de (2.88) en $\omega = \omega_0$ puede ponerse como

$$M(\mathbf{r}, \omega_0) = \gamma \sqrt{1 - \frac{k(\omega_0)^2 r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos 2\theta_0 - 2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2} \cos^2 \theta_0\right)}. \quad (2.95)$$

Definimos las cantidades

$$\sigma_e^2 = \frac{[k(\omega_0)]^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos 2\theta_0 - 2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2} \cos^2 \theta_0\right), \quad (2.96)$$

$$\sigma_t^2 = (\delta\omega)^4 \left[k''(\omega_0)\right]^2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2} \cos^2 \theta_0, \quad (2.97)$$

con lo que (2.94) y (2.95) pueden ponerse respectivamente como

$$\begin{aligned} (\delta\omega)^4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}^2 &= \sigma_t^2 r^2, \\ M(\mathbf{r}, \omega_0) &= \gamma \sqrt{1 - \sigma_e^2 r^2}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Substituyendo los resultados (2.98) en (2.91), tenemos

$$|a_m(\mathbf{r})| = |a_m(\mathbf{0})| \frac{\sqrt{1 - \sigma_e^2 r^2}}{(1 + \sigma_t^2 r^2)^{1/4}}, \quad (2.99)$$

donde se ha designado como $|a_m(\mathbf{0})|$ a la amplitud de la señal retornada en el origen, que tiene el máximo valor igual a

$$|a_m(\mathbf{0})| = 2\sqrt{2\pi} (\delta\omega)^2 |\Theta(\omega_0)|^2 |E(\omega_0)| \gamma. \quad (2.100)$$

Capitulo 2 Inversión Temporal

La magnitud σ_e definida en (2.96) será llamada *eficacia de focalización espacial* del espejo de inversión temporal. A la magnitud σ_t definida en (2.97) la llamaremos *eficacia de focalización temporal* del espejo de inversión temporal. Estos nombres se deben a que cuanto mayores sean los valores de estas magnitudes, más rápidamente cae el pico de amplitud máxima en función de la distancia al foco, y por consiguiente, más eficaz es el proceso de focalización.

Obsérvese que si las ondas no son dispersivas, es $k''(\omega_0) = 0$, por lo que $\sigma_t = 0$ en (2.97) y solamente existirá focalización espacial.

Las eficacias de focalización dependen de la dirección del vector $\mathbf{r}$ al punto de observación, a través del ángulo θ_0 en la figura 2- 8. Este ángulo es el formado por el vector $\mathbf{r}$ y la bisectriz del ángulo de sustentación del espejo con respecto al foco. Como usualmente el espejo lineal de transductores es un segmento recto, esta bisectriz es la mediatriz del espejo.

Dos casos importantes son ilustrativos cuando se utiliza un espejo recto. Estos son, la focalización longitudinal (cuando $\theta_0 = 0$) y la focalización transversal (cuando $\theta_0 = \pi/2$). Poniendo estos valores de θ_0 en (2.96) y (2.97) tenemos, para las eficacias espacial y temporal de la focalización longitudinal

$$\sigma_{eL}^2 = \frac{[k(\omega_0)]^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} - 2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2} \right), \quad (2.101)$$

$$\sigma_{tL}^2 = (\delta\omega)^4 [k''(\omega_0)]^2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2}. \quad (2.102)$$

Para las eficacias espacial y temporal de focalización transversal ($\theta_0 = \pi/2$), tenemos de (2.96) y (2.97) los resultados

$$\sigma_{eT}^2 = \frac{[k(\omega_0)]^2}{2} \left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right), \quad (2.103)$$

$$\sigma_{tT}^2 = 0. \quad (2.104)$$

Comparando (2.101) con (2.103), así como (2.102) con (2.104), vemos que siempre será $\sigma_{eL}^2 > \sigma_{eT}^2$, y $\sigma_{tL}^2 > \sigma_{tT}^2$, con lo cual el sistema de inversión temporal focaliza siempre mejor en la dirección normal al espejo (focalización longitudinal). Este resultado fue corroborado experimentalmente con ondas de superficie por R.K. Ing y M. Fink[8],[9].

En particular, la eficacia de focalización temporal transversal es nula de acuerdo con (2.104). De forma que la posibilidad de focalización transversal dependerá exclusivamente de la parte espacial ??, que está relacionada fundamentalmente con la abertura γ del espejo.

Si la abertura del espejo es pequeña como para aproximar $(\sin \gamma) / \gamma \approx 1$, entonces las cuatro expresiones (2.101), (2.102), (2.103) y (2.104), se reducen a

$$\begin{aligned} \sigma_{eL}^2 &= 0, & \sigma_{tL}^2 &= (\delta\omega)^4 [k''(\omega_0)]^2, \\ \sigma_{eT}^2 &= 0, & \sigma_{tT}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

De los resultados (2.105) se deduce que la focalización transversal no es posible en este caso. La focalización longitudinal depende exclusivamente de que el medio sea dispersivo para las ondas $(k''(\omega) \neq 0)$. Este es el caso de las ondas unidimensionales, que se propagan por una guía de ondas.

Capítulo 3

Optimización del proceso de inversión temporal para ondas de Lamb

3.1 Modelización del proceso de RT para ondas de Lamb

3.1.1 Focalización por RT de ondas bidimensionales y unidimensionales multimodales.

Para la propagación de ondas de Lamb debemos de considerar que la función de transferencia es una superposición de modos normales. Por lo que la expresión (2.22) se debe generalizar a la forma

$$H(|\mathbf{r}_i|, \omega) = \sum_n \Theta_n(\omega) \frac{\exp[jk_n(\omega)|\mathbf{r}_i|]}{\sqrt{k_n(\omega)|\mathbf{r}_i|}}. \quad (3.1)$$

donde la sumatoria se extiende sobre todos los modos n existentes.

Debido a la independencia en la propagación de los diferentes modos, la expresión del operador de retorno temporal (2.78) obtenido para ondas bidimensionales se aplica a cada modo. Esto es, para el modo n – *ésimo*,

$$H_{tr}^{(n)}(\mathbf{r}, \omega) = -2j \exp(j\omega\tau) |\Theta_n(\omega)|^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp[-jk_n(\omega)r \cos \theta] d\theta, \quad (3.2)$$

El operador de inversión temporal para la propagación en multimodos se obtiene sumando (3.2) sobre todos los modos existentes. Entonces

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2j \exp(j\omega\tau) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_n |\Theta_n(\omega)|^2 \exp[-jk_n(\omega)r \cos \theta] d\theta. \quad (3.3)$$

Expresemos el número complejo resultado de la sumatoria en (3.3) como

$$\sum_n |\Theta_n(\omega)|^2 \exp[-jk_n(\omega)r \cos \theta] = Q(r, \theta, \omega) \exp[j\psi(r, \theta, \omega)], \quad (3.4)$$

que puede expresarse igualando partes reales e imaginarias en la forma

$$\begin{aligned}\sum_n |\Theta_n|^2 \cos(k_n r \cos \theta) &= Q \cos \psi, \\ -\sum_n |\Theta_n|^2 \sin(k_n r \cos \theta) &= Q \sin \psi.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Considerando valores pequeños de $k_n r$, obtenemos para (3.5) las aproximaciones

$$\sum_n |\Theta_n(\omega)|^2 \approx Q = Q(\omega), \quad (3.6)$$

$$-r \cos \theta \sum_n |\Theta_n(\omega)|^2 k_n(\omega) \approx Q \psi. \quad (3.7)$$

Las expresiones (3.6) y (3.7) nos permiten definir el valor medio k de los k_n entre todos los modos presentes, con los factores de peso $|\Theta_n(\omega)|^2$. Esto es

$$k(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \sum_n k_n(\omega) |\Theta_n(\omega)|^2. \quad (3.8)$$

Substituyendo esta expresión en (3.7) resulta

$$\psi(r, \theta, \omega) = -k(\omega) r \cos \theta, \quad (3.9)$$

de forma que la expresión (3.4) para la suma sobre todos los modos queda

$$\sum_n |\Theta_n(\omega)|^2 \exp[-jk_n(\omega) r \cos \theta] \approx Q(\omega) \exp[-jk(\omega) r \cos \theta]. \quad (3.10)$$

El operador (3.3) para el retorno temporal de una propagación multimodo se expresa entonces como

$$H_{tr}(\mathbf{r}, \omega) = -2j \exp(j\omega\tau) Q(\omega) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp[-jk(\omega) r \cos \theta] d\theta, \quad (3.11)$$

con el valor Q definido en (3.6) y el valor medio $k(\omega)$ definido en (3.8).

La expresión (3.11) tiene la misma forma general de (2.78) para propagación monomodo. Por consiguiente llegaremos al mismo resultado final (2.99) para la amplitud máxima en función de la posición, con los valores de las eficacias de focalización espacial y temporal definidos en (2.96) y (2.97).

La diferencia fundamental entre la inversión temporal de ondas en propagación multimodos y propagación monomodo, es que el valor del número de ondas $k(\omega)$ en la propagación multimodos es el valor medio entre los valores de los números de onda de los diferentes modos.

Capítulo 3 Optimización del proceso de inversión temporal para ondas de Lamb

Para el caso unidimensional, como es el caso de ondas de las ondas de Lamb estudiadas en el capítulo 2, obtenemos una buena aproximación considerando el ángulo de abertura $\gamma = 0$ del espejo de inversión temporal.

Esta situación ya fue discutida al final de la sección anterior, y obtuvimos los valores de (2.105) para las eficacias de focalización. Como es de esperar, no existe posibilidad de focalización transversal, y la focalización longitudinal es solamente temporal (depende de la dispersión). Substituyendo el único resultado no nulo de (2.105) en (2.99) obtenemos, para los valores de máxima amplitud en función de la posición,

$$|a_m(x)| = \frac{|a_m(0)|}{(1 + \sigma_{tL}^2 x^2)^{1/4}}, \quad \sigma_{tL}^2 = (\delta\omega)^4 \left[k''(\omega_0) \right]^2 \quad (3.12)$$

donde se ha expresado la coordenada de posición como x , que es el eje de propagación de las ondas unidimensionales. La fuente "lineal" excitadora se encuentra a la largo del eje z (o y) en $x = 0$, donde (3.12) presenta su máximo $|a_m(0)|$. Como antes, ω_0 es la frecuencia central del paquete y $\delta\omega$ su semiancho de banda.

Dada la definición del número de onda medio k de la propagación multimodos, ecuación (3.8), tenemos que

$$k''(\omega_0) = \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\frac{1}{Q(\omega)} \sum_n k_n(\omega) |\Theta_n(\omega)|^2 \right]_{\omega_0}, \quad Q(\omega) = \sum_n |\Theta_n(\omega)|^2. \quad (3.13)$$

donde $k_n(\omega)$ son los números de onda de cada modo en la frecuencia ω .

Del valor de la eficacia de focalización dada en (3.12), vemos que ésta será tanto mayor cuanto mayor sea el ancho de banda de la señal, y mayores sean las dispersiones de los diversos modos a la frecuencia central del paquete. Esto es, en las frecuencias a las cuales las velocidades de grupo de los modos tengan mayores variaciones, mejor será la focalización del proceso de inversión temporal.

3.1.2 Resultados del cálculo numérico

En la sección 1.4, subsección 1.4.6, se obtuvo una función de transferencia para la propagación multimodal de las ondas de Lamb, basada en el desarrollo en modos normales[13].

Esta función transfiere las tensiones aplicadas sobre la superficie superior ($y = +d$) de la placa de espesor $2d$ en las direcciones x (de propagación) e y (normal a la placa) a los vectores desplazamiento $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ de los puntos interiores y de frontera de la placa. La función de transferencia hallada es un tensor dado por la ecuación (1.44), que reproducimos acá,

$$HU_{ij}(\omega, k, y) = \frac{i\pi}{2} \sum_n \frac{\omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{p_n} \delta(k_n - k). \quad (3.14)$$

Recordemos que en la expresión (3.14), la sumatoria se extiende sobre todos los modos

excitados, los subíndices ij del tensor indican las cuatro componentes xx, xy, yx, yy del mismo, los coeficientes $\mathcal{U}_i^{(n)}$ son las amplitudes de desplazamiento del modo normal n en la posición y (eje normal a la placa) dados en las expresiones (1.4) y (1.5), y p_n indica el flujo de potencia transmitida por el modo n (expresión (1.46)). Tanto las amplitudes de desplazamiento $\mathcal{U}_i^{(n)}$ como el flujo de potencia p_n son funciones de la frecuencia ω .

La función expresada en (3.14) es la transformada espacial de Fourier (en x) de la función de transferencia en frecuencia para ondas unidimensionales

$$H_{ij}(\omega, x, y) = \sum_n \Theta_{ij}^{(n)}(\omega, y) \exp[ik_n(\omega)x]. \quad (3.15)$$

Multiplicando (3.14) por $\exp(ikx)$ e integrando en k , obtenemos la expresión (3.15), con lo cual identificamos el coeficiente de filtrado en la propagación

$$\Theta_{ij}^{(n)}(\omega, y) = \frac{i\pi\omega\mathcal{U}_i^{(n)}(\omega, y)\mathcal{U}_j^{(n)*}(\omega, d)}{2p_n(\omega)}. \quad (3.16)$$

Si sólo nos interesa la respuesta en la superficie superior de la placa, tenemos $y = d$ en (3.16). Además, por los métodos de excitación y detección que utilizamos, nos interesan solamente los desplazamientos y tensiones normales a la placa, con lo que $i = j = y$ en (3.16). En estas condiciones escribimos la (3.16) omitiendo los subíndices $ij = yy$ y la dependencia en la variable y en el primer miembro, resultando

$$\Theta_n(\omega) = \frac{i\pi\omega\left|\mathcal{U}_y^{(n)}(\omega, d)\right|^2}{2p_n(\omega)}. \quad (3.17)$$

Este resultado ya se obtuvo en el Capítulo 1, ecuación (1.54). Los módulos de (3.17) se graficaron en curvas continuas en la figura 1- 22 para los modos simétricos 0, 1 y 2, y en la figura 1- 23 para los modos antisimétricos 0,1 y 2.

Poniendo (3.17) en las expresiones (3.13), conjuntamente con la evaluación numérica de $k_n''(\omega)$ a partir de las curvas de dispersión $k_n(\omega)$ para cada modo, se puede calcular la eficacia de focalización $\sigma_{tL}^2(\omega)$ utilizando (3.12) para cada frecuencia ω .

Primero calculamos $Q(\omega) = \sum_n |\Theta_n(\omega)|^2$ sumando los cuadrados de los módulos de (3.17) para los 10 primeros modos simétricos y los 10 primeros antisimétricos. Luego obtenemos el valor medio $k(\omega)$ con la ecuación (3.8). Este resultado (multiplicado por el semiespesor de la placa) se representan en la gráfica de la figura 3- 1 en función de la variable adimensionada $\omega d/v_T$, donde d es el semiespesor de la placa y v_T es la velocidad tangencial de las ondas de volumen.

A pesar de la aparente linealidad de la gráfica de la figura 3- 1, su derivada segunda tiene valores muy pronunciados principalmente en torno a los valores de frecuencia en que se originan los diversos modos. En estos valores de frecuencias críticas, las velocidades de grupo son nulas, como se observa en las figuras 1- 7, y 1- 8.

Suponiendo un emisor con semiancho de banda (gaussiano) de 0.5 MHz, hemos aplicado

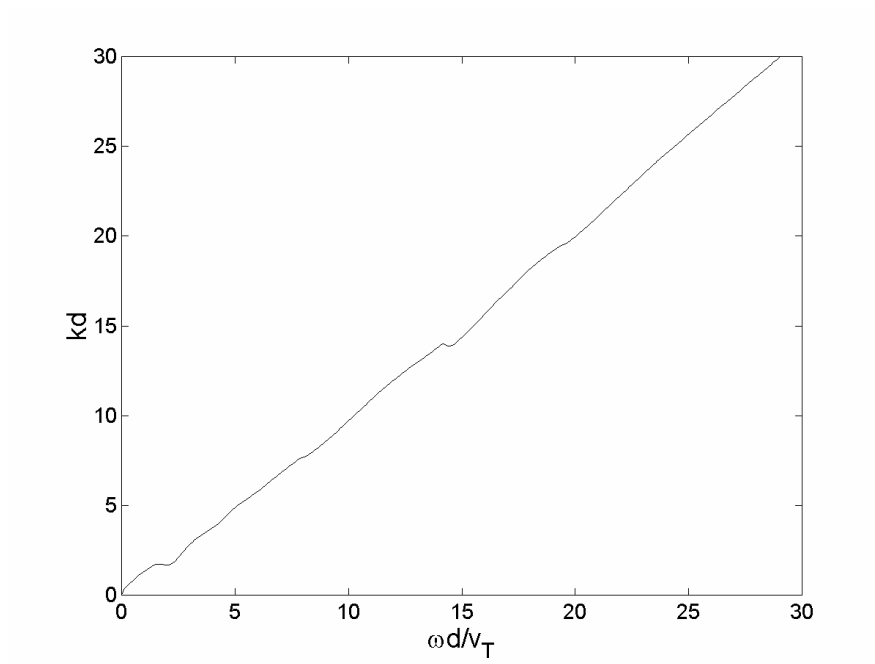


Figura 3- 1. Valor medio del número de onda k en función de la frecuencia para los 10 primeros modos simétricos y los 10 antisimétricos

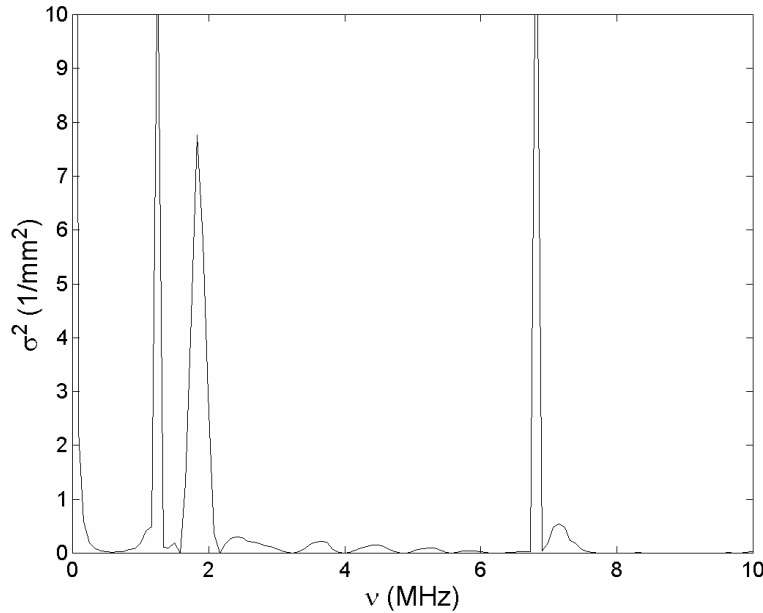


Figura 3- 2. Eficacia de focalización en la inversión temporal para ondas de Lamb en una placa de aluminio de 1.10 mm de espesor. (Semiancho de banda del emisor=0.5MHz).

la segunda de las ecuaciones (3.12) para calcular las eficacias de focalización de ondas de Lamb con la inversión temporal, para una placa de aluminio de 1.10 mm de espesor (figura 3- 2) y para otra placa de aluminio de 2.90 mm de espesor (figura 3- 3)

De estas figuras se deduce que la eficacia de focalización en la inversión temporal con ondas de Lamb para un paquete de ondas con cierta frecuencia central, depende fuertemente del espesor de la placa. Por ejemplo, un pulso con frecuencia central de alrededor de 2 MHz, que sería eficazmente focalizado en la placa de 1.10 mm de la figura 3- 2, parece ser mucho menos focalizable en la placa de 2.90 mm de la figura 3- 3.

La figura 3- 4 se muestran los resultados del cálculo de la máxima amplitud de una señal temporalmente invertida en una placa de aluminio de 1.10 mm de espesor, para un pulso de emisión gaussiano de 4 MHz de frecuencia central y 1 MHz de semiancho de banda, producido en $x = 0$. La curva suave es el resultado obtenido con la expresión aproximada (3.12). La curva irregular es el resultado obtenido con el operador de inversión temporal H_{tr} sin aproximaciones, como se obtuvo en la ecuación (2.35) y aplicado al caso unidimensional ($\alpha = \beta = 0$), con las funciones para los modos de Lamb dadas por (3.17). Como era de esperar, los resultados son coincidentes fundamentalmente en la vecindad del foco $x = 0$.

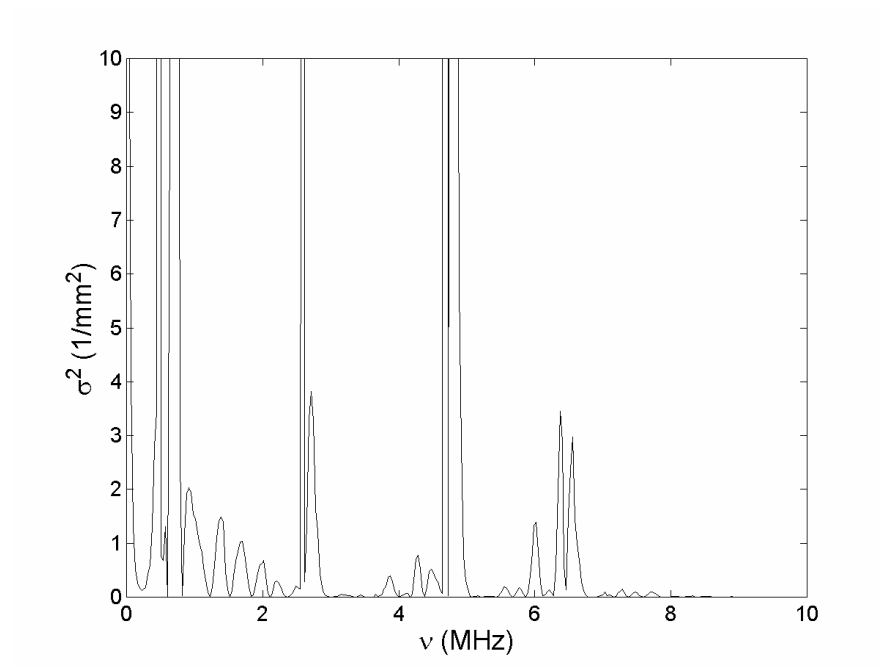


Figura 3- 3. Eficacia de focalización en la inversión temporal para ondas de Lamb en una placa de aluminio de 2.90 mm de espesor. (Semiancho de banda del emisor=0.5MHz).

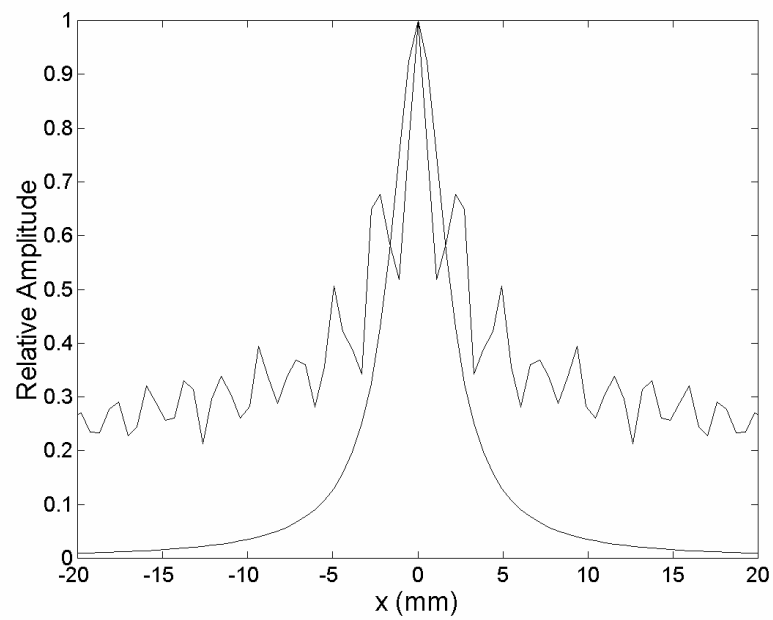


Figura 3- 4. Comparación entre el cálculo exacto de la máxima amplitud de la señal temporalmente invertida (línea irregular) y el cálculo aproximado (línea suave) en función de la distancia al foco.

3.1.3 Resultados experimentales

A efectos de comparar los resultados teóricos de la sección anterior con resultados experimentales, hemos efectuado la inversión temporal mediante cálculo numérico de las ondas de Lamb generadas por un impacto láser de potencia, sobre una placa de aluminio de 1.10 mm de espesor.

Las medidas utilizadas fueron hechas por Ros K. Ing[9] en el Laboratoire Ondes et Acoustique de la Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles (ESPCI) de Paris, y proporcionadas gentilmente por el autor.

Para seguir la evolución del pulso con la posición, fueron tomadas 128 lecturas cada 0.25 mm sobre una misma recta que también contiene el punto del impacto. El punto de lectura más lejano se encuentra a 292 mm del impacto del láser generador.

El principio utilizado para producir la inversión temporal por cálculo numérico con señales reales se ilustra en la figura 3- 5. Su aplicación es posible cuando se tiene no solamente el registro de la señal en el tiempo, sino también su evolución espacial, esto es, varios registros a lo largo del eje de propagación.

Sea $x = 0$ el punto en donde se emite la señal (el impacto láser), cuya transformada de Fourier es $E(\omega)$. Sea $R(\omega, L)$ la transformada de Fourier de las ondas de Lamb producidas por el impacto y registradas a una distancia L del mismo sobre la placa, como se ilustra en la parte A de la figura 3- 5. Sea $H(\omega, L)$ la función de transferencia para las ondas de Lamb desde el origen hasta el punto L . Entonces

$$R(\omega, L) = H(\omega, L) E(\omega). \quad (3.18)$$

La señal $R(\omega, L)$ se invierte temporalmente y se introduce en el mismo punto L . Esto es, tendremos en ese punto la señal de excitación $R^*(\omega, L)$ (omitiendo el factor de retardo temporal, que no es relevante en este caso). En cierto punto x se obtiene entonces la transformada de Fourier $S(\omega, x)$ de la señal invertida, como se ilustra en la parte B de la figura 3- 5. Por lo tanto,

$$S(\omega, x) = H(\omega, L - x) R^*(\omega, L). \quad (3.19)$$

Pero debido a la homogeneidad del medio (la placa), la función de transferencia H que aparece en (3.19) es la misma que transfiere la señal de emisión E en el origen hasta la recepción $R(L - x)$, como se ilustra en la parte C de la figura 3- 5. Esto es, de acuerdo con la expresión (3.18),

$$R(\omega, L - x) = H(\omega, L - x) E(\omega). \quad (3.20)$$

Despejando H de (3.20) y substituyéndola en (3.19) obtenemos, para la señal temporalmente invertida en el punto x , el resultado

$$S(\omega, x) = \frac{R(\omega, L - x) R^*(\omega, L)}{E(\omega)}. \quad (3.21)$$

Si consideramos que el ancho de banda del impacto láser es suficientemente grande para

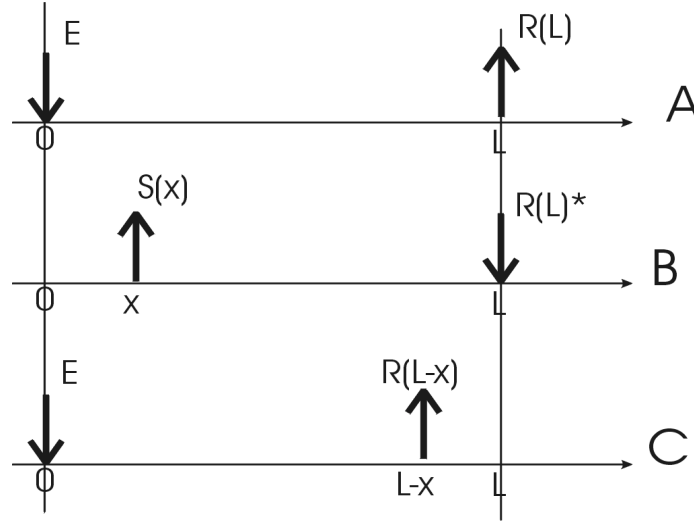


Figura 3- 5. A) Emisión E y recepción R(L) de ondas de Lamb. B) Inversión temporal de R(L) y recepción de la señal invertida S(x). C) La función de transferencia para B, es la misma que transfiere la señal E a R(L-x)

las frecuencias de nuestro interés, podemos considerar $E(\omega) \approx \text{conste.} = 1/C$. Por lo que la expresión (3.21) se puede poner

$$S(\omega, x) = C R(\omega, L - x) R^*(\omega, L). \quad (3.22)$$

El resultado (3.22) nos indica que, solamente con las señales R registradas en los puntos L y $L - x$ se puede obtener la señal temporalmente invertida a la distancia x del origen.

Para obtener valores positivos y negativos de x , hemos elegido como punto L al correspondiente a la posición de la señal número 64 de las 128 registradas sobre la placa. Tomamos las transformadas de Fourier de las señales temporales registradas y efectuamos la operación indicada en (3.22). Luego calculamos las transformadas de Fourier inversas de S y obtuvimos las señales temporalmente invertidas en 64 puntos a la derecha y 63 puntos a la izquierda del origen (y la propia señal retornada en el origen). La máxima amplitud de cada una de estas señales temporales, se representa en función de la distancia x al origen en la figura 3- 6.

Obsérvese la focalización que se produce en $x = 0$. Estos resultados experimentales concuerdan bastante bien con los resultados teóricos calculados para una placa del mismo espesor, y mostrados en la figura 3- 4.

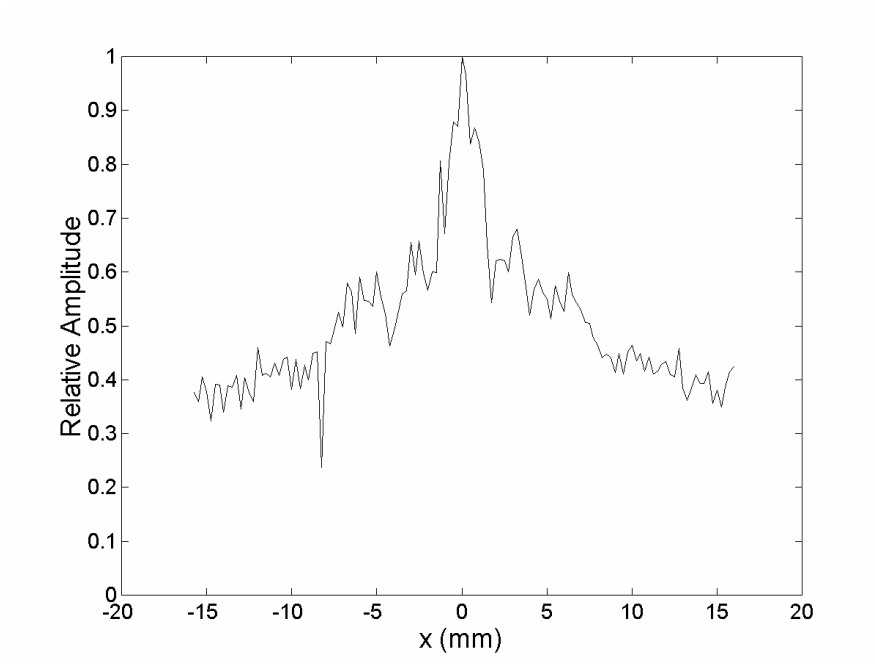


Figura 3- 6. Máxima amplitud de la señal obtenida por RT de ondas de Lamb generadas en una placa de aluminio 1.10 mm de espesor, mediante un impacto láser en $x = 0$.

Sección 3.2 Aplicación de la función de Green para ondas de Lamb en el proceso de inversión temporal

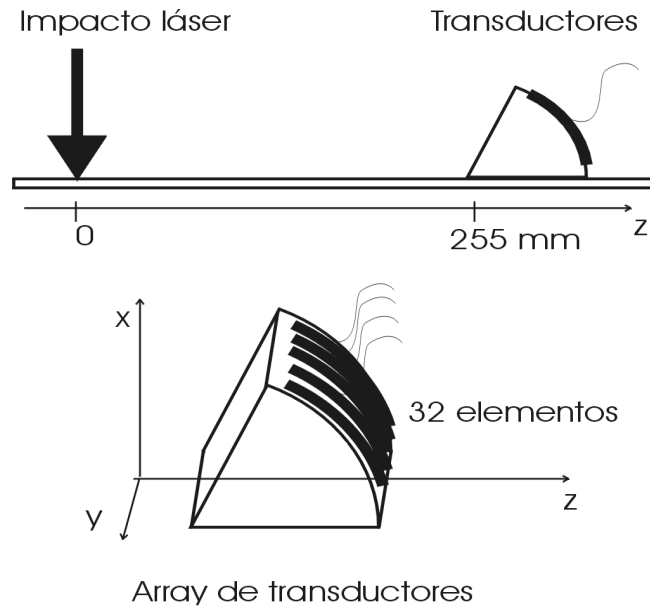


Figura 3- 7. Array de 32 transductores utilizados para efectuar la detección y la inversión temporal de las ondas de Lamb generadas por el impacto del láser.

3.2 Aplicación de la función de Green para ondas de Lamb en el proceso de inversión temporal

3.2.1 Resultados experimentales

En la presente sección utilizaremos un conjunto de resultados experimentales obtenidos por Ros K. Ing[8],[9] en el Laboratoire Ondes et Acoustique de la Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de la Ville de Paris.

Estas ondas de Lamb fueron generadas por impactos de un láser de potencia en régimen de ablación, y registradas por el transductor elemental central de un array de 32 transductores de 10 mm de altura y 1.085 mm de ancho, acoplados a una cuña de plexiglás, como se ilustra en la figura 3- 7.

Las ondas se produjeron sobre una placa de aluminio de 1.10 mm de espesor, y dimensiones suficientemente grandes (600x600 mm) como para despreciar los efectos de bordes durante la corta duración de las señales.

La señal registrada por el transductor central del array a 255 mm del impacto del láser se muestra en la figura 3- 8. La duración del impacto del láser es del orden de los 15 ns, por lo que la gran extensión temporal de la señal detectada se debe a la fuerte dispersión de los

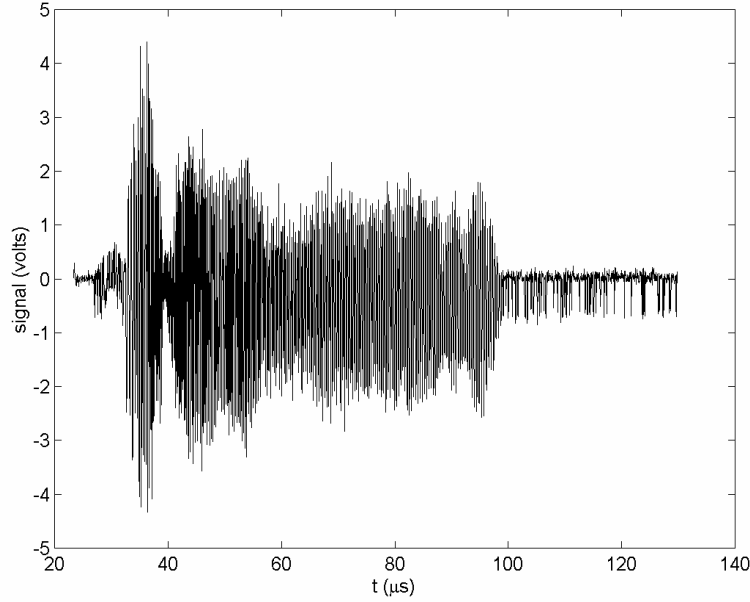


Figura 3- 8. Señal detectada por el elemento central de transductores del array, a 255 mm del punto de impacto del láser.

diferentes modos de Lamb generados.

El array de transductores se encuentra conectado a la máquina de inversión temporal ideada y construida en el Laboratoire Ondes et Acoustique. Con ella se invierte temporalmente la señal de la figura 3- 8 y se la reenvía utilizando los 32 transductores del array.

Con el interferómetro heterodyno del LOA[34] se registran los desplazamientos de la placa en la vecindad del foco (el punto de impacto del láser), para estudiar la focalización de la señal temporalmente invertida. En la figura 3- 9 se muestran los valores de la máxima amplitud de cada una de las señales temporales, en función de la posición longitudinal (eje z en la figura 3- 7). Las ordenadas se presentan como las desviaciones en torno al punto impacto original $z = 0$. Se observa la focalización obtenida por inversión temporal en el punto de impacto del láser generador de las ondas.

3.2.2 Aplicación de la función de Green para propagar la señal temporalmente invertida

Para utilizar la función de Green o la función de transferencia de las ondas de Lamb,

Seccion 3.2 Aplicación de la función de Green para ondas de Lamb en el proceso de inversión temporal

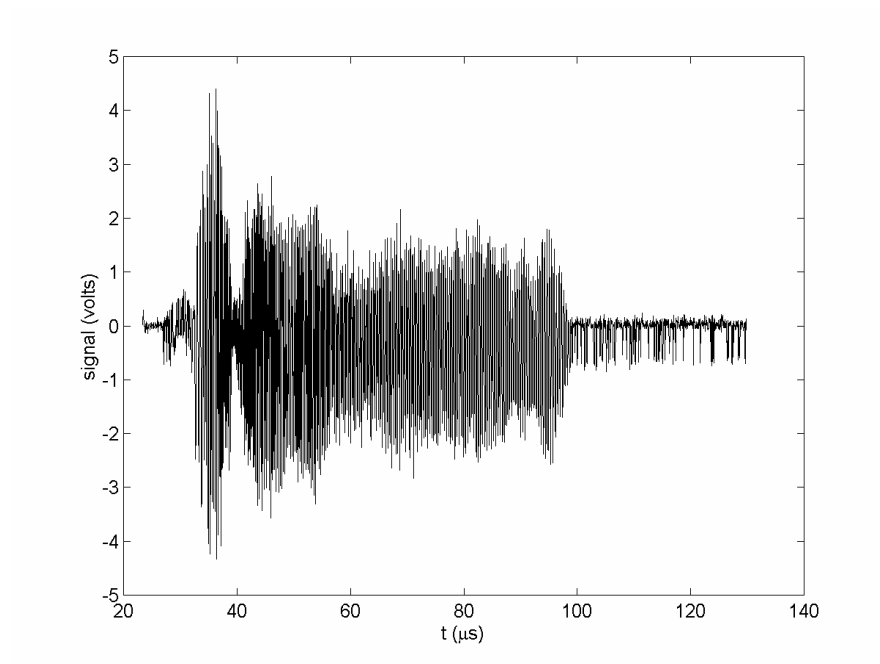


Figura 3- 9. Máximas amplitudes de las señales temporales temporalmente invertidas, en la vecindad del foco $z = 0$ del eje longitudinal.

tomamos los datos memorizados de la señal detectada por la cuña y el elemento central del transductor (figura 3- 8) a 255 mm de distancia del impacto del láser.

Conociendo la respuesta impulsional o la función de transferencia propia del sistema detector (cuña y transductores), se puede invertir temporalmente el voltaje de la señal de la figura 3- 8, y obtener los desplazamientos producidos en la base emisora de la cuña.

Asumiendo que estos desplazamientos son los mismos que actúan sobre la placa de aluminio para generar la señal temporalmente invertida, se pueden obtener numéricamente los desplazamientos de excitación sobre la superficie de la placa en torno a la coordenada $z = 255$ mm.

Aplicando luego la función de Green (o de transferencia) para las ondas de Lamb sobre la placa de trabajo (aluminio de 1.10 mm de espesor), se puede propagar teóricamente dicha señal y obtener los desplazamientos de la placa en los puntos de la vecindad de $z = 0$. Estos resultados teóricos deberían reconstruir lo más precisamente posible los datos experimentales del proceso de focalización temporal mostrados en la figura 3- 9.

Para obtener la respuesta impulsional del sistema detector-emisor (3- 7), hemos aplicado un pulso de voltaje conocido al transductor central del array. Con el interferómetro heterodino del LOA[34] registramos los desplazamientos de varios puntos de la base de la cuña de plexiglás, en la dirección longitudinal (eje z).

Encontramos las transformadas temporales de Fourier de las señales registradas, que al dividir las entre las transformadas temporales de Fourier del pulso aplicado, obtenemos las funciones de transferencia del sistema detector-emisor para diferentes puntos de la base de la cuña, en la dirección longitudinal.

Los espectros obtenidos para los distintos puntos de la base de la cuña tienen las mismas componentes espectrales en las mismas proporciones relativas. Variando solamente la altura total del espectro en un factor de escala, según nos vamos alejando del punto de excitación central (el centro de curvatura de los transductores cilíndricos en la figura 3- 7).

La forma cilíndrica de los transductores del array focaliza lo suficientemente bien, como para que podamos considerar que los desplazamientos de la base de la cuña están prácticamente confinados a una línea perpendicular al eje de propagación z .

El espectro de la función de transferencia así obtenida para el sistema cuña-transductores se muestra en la figura 3- 10, hasta la frecuencia de 18 MHz.

La inversión temporal de la señal mostrada en la figura 3- 8 se puede efectuar tomando la conjugada V^* de la transformada de Fourier $V(\omega)$ de dicha señal.

Si denotamos como $HS(\omega)$ la función de transferencia del sistema cuña-transductores, cuyo espectro se muestra en la figura 3- 10, entonces la señal E de desplazamiento que se aplica sobre la placa de aluminio en la coordenada $z_0 = 255$ mm es

$$E(\omega) = HS(\omega) V^*(\omega). \quad (3.23)$$

Si llamamos $HL(z_0, z, \omega)$ a la función de transferencia para ondas de Lamb desde el punto z_0 hasta el punto z , la señal de desplazamiento $r(z, t)$ de la superficie de la placa tendrá una transformada temporal de Fourier $R(z, \omega)$ tal que

$$R(z, \omega) = HL(z_0, z, \omega) E(\omega) = HL(z_0, z, \omega) HS(\omega) V^*(\omega). \quad (3.24)$$

Sección 3.2 Aplicación de la función de Green para ondas de Lamb en el proceso de inversión temporal

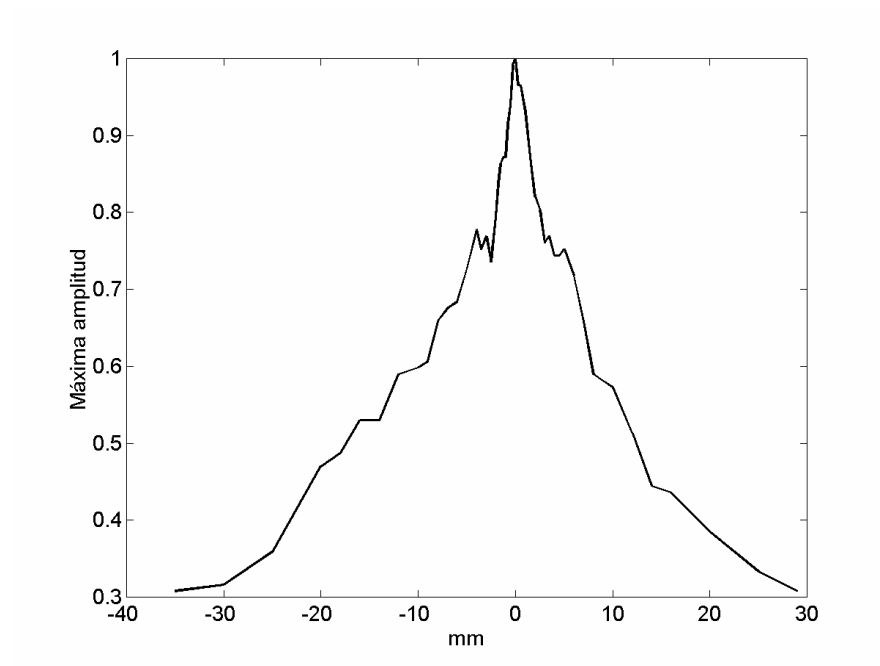


Figura 3- 10. Función de transferencia del sistema cuña-transductores utilizado para la inversión temporal

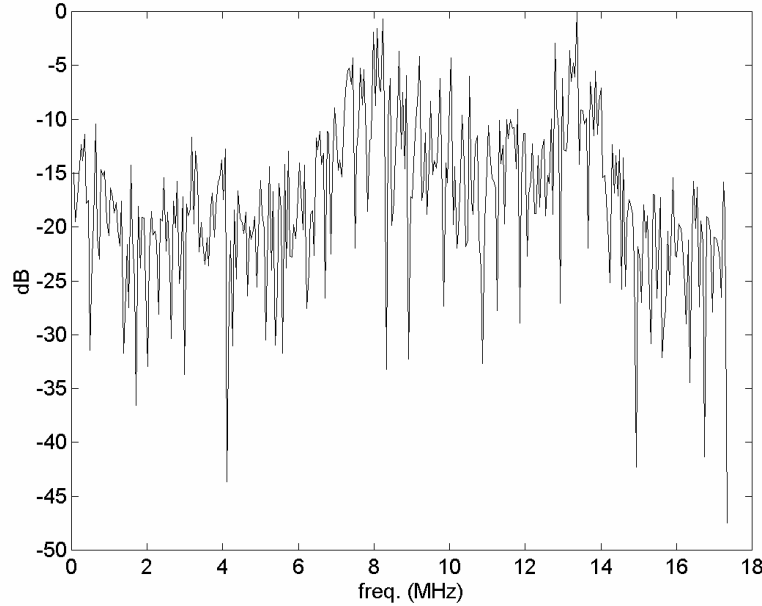


Figura 3- 11. Línea gruesa: inversión temporal experimental. Línea fina: inversión temporal teórica utilizando función de Green unidimensional.

La señal $r(z, t)$ obtenida como transformada de Fourier inversa de (3.24), es la señal temporalmente invertida y calculada numéricamente.

El cálculo de $HL(z_0, z, \omega)$ fue efectuado, en primera instancia, con la expresión de la función de transferencia para ondas de Lamb unidimensionales dada por la ecuación (3.15),

$$HL(z_0, z, \omega) = \sum_n \Theta_n(\omega) \exp[ik_n(\omega)|z - z_0|], \quad (3.25)$$

con los valores de $\Theta_n(\omega)$ dados por la (3.17).

En estas condiciones se desprecian completamente los efectos de la focalización espacial, a que da lugar un transductor de abertura finita.

La aplicación de (3.25) en (3.24), la realización de la transformada de Fourier inversa, y la obtención del máximo valor de $r(z, t)$ para cada punto z , nos dan los valores de máxima amplitud de la señal temporalmente invertida, en función de la posición.

Estos resultados se muestran en la curva con línea fina de la figura 3- 11, a la que se le superpuso la curva experimental de la figura 3- 9 (línea gruesa). La coincidencia es buena en un entorno de ± 5 mm alrededor del foco.

Seccion 3.2 Aplicación de la función de Green para ondas de Lamb en el proceso de inversión temporal

Más allá de este intervalo, la abertura finita del sistema de transductores se vuelve un factor no despreciable. Para corregir estos resultados y aplicarlos a una vecindad mayor entorno al origen, acudimos a la expresión (2.99) pero introduciendo solamente la eficacia de focalización espacial longitudinal σ_{eL}^2 definido en (2.101). Esto es

$$|a_m(z)| = |a_m(0)| \sqrt{1 - \sigma_{eL}^2 z^2}, \quad (3.26)$$

con

$$\sigma_{eL}^2 = \frac{[k(\omega_0)]^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} - 2 \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2} \right). \quad (3.27)$$

La eficacia de focalización temporal ya fue tomada en cuenta al sumar sobre todos los modos en (3.25).

En (3.26), $|a_m(z)|$ es la amplitud máxima en función de la posición. En (3.27), γ es la abertura angular del sistema de transductores respecto al origen (el foco), ω_0 es la frecuencia central del paquete y $k(\omega_0)$ es el valor medio de los números de onda dados por la expresión (3.8),

$$k(\omega) = \frac{1}{\sum_n |\Theta_n(\omega)|^2} \sum_n k_n(\omega) |\Theta_n(\omega)|^2. \quad (3.28)$$

Sabiendo que la frecuencia central de emisión del array de transductores es de $\omega_0/2\pi \approx 4$ MHz, el valor de $k(\omega_0)$ es estimado de la gráfica de la figura 3- 1, cuyos datos se calcularon para la placa de aluminio de espesor $2d = 1.10$ mm. Poniendo la velocidad transversal para el aluminio $v_T \approx 3.04$ mm/ μ s, la abscisa correspondiente en la gráfica de la figura 3- 1 es $\omega_0 d/v_T \approx 5$. Esto proporciona en dicha gráfica una ordenada $kd \approx 5$, de donde $k(\omega_0) \approx 10$ mm⁻¹.

Considerando que el array de transductores tiene aproximadamente 50 mm de longitud transversal a la propagación, y opera a unos 250 mm del foco, tenemos una abertura angular de $\gamma \approx 0.2$.

Poniendo estos resultados en (3.27) obtenemos una eficacia de focalización del orden de $\sigma_{eL}^2 \approx 10^{-3}$ mm⁻². Modulando las amplitudes máximas obtenidas para la gráfica de la figura 3- 11 por el factor $\sqrt{1 - \sigma_{eL}^2 z^2}$, obtenemos un nuevo ajuste que representamos en la figura 3- 12 en trazo fino. Nuevamente la curva experimental se sobrepone en trazo grueso a efectos de comparación.

Obsérvese que ahora la concordancia se extiende hasta un entorno de casi ± 10 mm alrededor del foco.

APÉNDICES

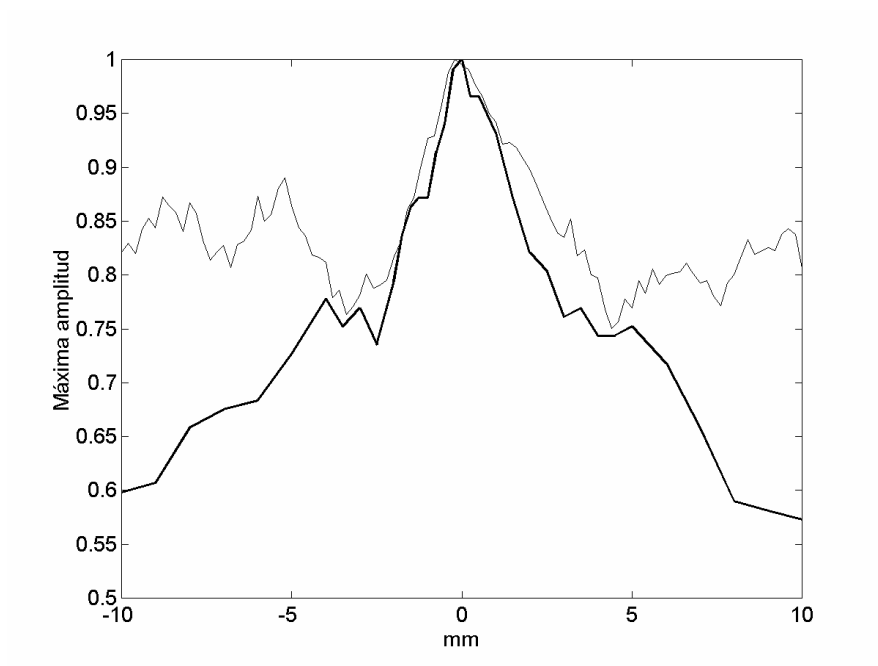


Figura 3- 12. Línea gruesa: inversión temporal experimental. Línea fina: inversión temporal teórica utilizando función de Green unidimensional modulada por el efecto de focalización espacial (ondas bidimensionales).

Apéndice I

Relaciones de dispersión

Sea una placa de un sólido elástico isotrópico (p. ej. de metal) de espesor $2d$ cuyo plano medio paralelo a las caras coincide con el plano $y = 0$, como se muestra en la figura 1-1. Los vectores $\mathbf{k}_L$ y $\mathbf{k}_T$ son, respectivamente, los vectores de onda longitudinal y transversal. Los vectores $\mathbf{u}_L$ y $\mathbf{u}_T$ son los correspondientes desplazamientos de las partículas del medio.

Los desplazamientos $\mathbf{u}$ y las tensiones T_{ij} en el sólido isotrópico son derivadas de los potenciales mecánicos escalar φ y vectorial Ψ a través de las conocidas relaciones [2],[3]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T, \quad \mathbf{u}_L = \nabla \varphi, \quad \mathbf{u}_T = \nabla \times \Psi, \quad (\text{I.1})$$

para los desplazamientos y

$$T_{ii} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i \neq j) \quad (\text{I.2})$$

para las tensiones, siendo λ, μ las constantes de Lamé.

Al tratarse de ondas planas que viajan en el plano xy , la única componente no nula del potencial vector Ψ es Ψ_z .

La constricción de las ondas entre las superficies $y = -d, y = d$ exige el planteo de una solución de ondas estacionarias en la dirección del eje y , y viajeras en la dirección $+x$. Esto significa que los potenciales son de la forma

$$\begin{aligned} \varphi &= (A \cos k_{Ly}y + B \sin k_{Ly}y) \exp(ik_{Lx}x), \\ \Psi_z &= (C \cos k_{Ty}y + D \sin k_{Ty}y) \exp(ik_{Tx}x), \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

donde

$$k_{Lx}^2 + k_{Ly}^2 = k_L^2, \quad k_{Tx}^2 + k_{Ty}^2 = k_T^2. \quad (\text{I.4})$$

Es inmediato que las expresiones I.3 verifican las ecuaciones de onda para los potenciales a una frecuencia dada ω .

Tomando el gradiente y el rotor respectivamente de los potenciales definidos en I.3 y utilizando las expresiones I.1, obtenemos las componentes de los desplazamientos sobre los ejes. Esto es

Apendice I Relaciones de dispersión

$$\begin{aligned}
 u_x &= ik_{Lx} (A \cos k_{Ly}y + B \sin k_{Ly}y) \exp(ik_{Lx}x) + \\
 &\quad + k_{Ty} (-C \sin k_{Ty}y + D \cos k_{Ty}y) \exp(ik_{Tx}x), \\
 u_y &= k_{Ly} (-A \sin k_{Ly}y + B \cos k_{Ly}y) \exp(ik_{Lx}x) + \\
 &\quad - ik_{Tx} (C \cos k_{Ty}y + D \sin k_{Ty}y) \exp(ik_{Tx}x).
 \end{aligned} \tag{I.5}$$

Utilizando las ecuaciones I.2, la anulaci3n de las tensiones normales a la placa en $y = \pm d$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \quad \forall x \text{ en } y = \pm d. \tag{I.6}$$

De acuerdo a las expresiones I.5, las condiciones de frontera I.6 para todo x exigen que

$$k_{Lx} = k_{Tx}. \tag{I.7}$$

Para abreviar la notaci3n definimos

$$k = k_{Lx} = k_{Tx}, \quad q = k_{Ly}, \quad s = k_{Ty}. \tag{I.8}$$

De forma que las componentes de los desplazamientos I.5 resultan

$$\begin{aligned}
 u_x &= (ikA \cos qy + ikB \sin qy - sC \sin sy + sD \cos sy) \exp(ikx), \\
 u_y &= (-qA \sin qy + qB \cos qy - ikC \cos sy - ikD \sin sy) \exp(ikx).
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

La substituci3n de I.9 en las condiciones de frontera I.6, con $y = \pm d$, dan, respectivamente

$$\begin{aligned}
 -[\lambda(k^2 + q^2) + 2\mu q^2] A \cos qd - [\lambda(k^2 + q^2) + 2\mu q^2] B \sin(\pm qd) + \\
 + 2i\mu k s C \sin(\pm sd) - 2i\mu k s D \cos sd = 0,
 \end{aligned} \tag{I.10}$$

y

$$\begin{aligned}
 -2ikqA \sin(\pm qd) + 2ikqB \cos qd + \\
 + (k^2 - s^2) C \cos sd + (k^2 - s^2) D \sin(\pm sd) = 0.
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

Las expresiones entre par3ntesis recto de I.10 se pueden simplificar. De acuerdo con la primera igualdad de I.4 y la segunda de I.8, tenemos que

$$k^2 + q^2 = k_L^2 = \frac{\omega^2}{v_L^2}. \tag{I.12}$$

Substituyendo en ésta la frecuencia por su dependencia de la velocidad transversal $\omega = k_T v_T$, resulta

$$k^2 + q^2 = k_T^2 \left(\frac{v_T}{v_L} \right)^2. \quad (\text{I.13})$$

El cociente entre las velocidades transversal y longitudinal se puede expresar en función de las constantes de Lamé [5], por lo cual

$$k^2 + q^2 = k_T^2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (\text{I.14})$$

De acuerdo a la segunda igualdad de I.4 y la tercera de I.8 podemos poner el número de onda transversal como

$$k_T^2 = k^2 + s^2. \quad (\text{I.15})$$

Substituyendo ésta en I.14, resulta

$$k^2 + q^2 = (k^2 + s^2) \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (\text{I.16})$$

Multiplicando ésta última por $\lambda + 2\mu$ y trasponiendo términos, obtenemos, para la expresión entre paréntesis rectos de I.10,

$$\lambda (k^2 + q^2) + 2\mu q^2 = -\mu (k^2 - s^2). \quad (\text{I.17})$$

Esta última igualdad nos permite reescribir I.10 como

$$(k^2 - s^2) A \cos qd + (k^2 - s^2) B \sin(\pm qd) + 2iksC \sin(\pm sd) - 2iksD \cos sd = 0. \quad (\text{I.18})$$

Las ecuaciones I.11 y I.18 constituyen un sistema de cuatro ecuaciones (una para cada signo de la función seno) en las cuatro amplitudes A, B, C, D [6].

Si sumamos y restamos las dos ecuaciones determinadas por I.11 obtenemos dos nuevas ecuaciones

$$2ikqB \cos qd + (k^2 - s^2) C \cos sd = 0, \quad (\text{I.19})$$

y

$$-2ikqA \sin qd + (k^2 - s^2) D \sin sd = 0. \quad (\text{I.20})$$

Haciendo lo propio con las dos ecuaciones definidas en I.18, obtenemos,

Apendice I Relaciones de dispersión

$$(k^2 - s^2) A \cos qd - 2iksD \cos sd = 0, \quad (\text{I.21})$$

y

$$(k^2 - s^2) B \sin qd + 2iksC \sin sd = 0. \quad (\text{I.22})$$

Las I.19 y I.22 forman un sistema en B, C . Para la existencia de soluciones no triviales debe de ser nulo el determinante

$$(k^2 - s^2)^2 \sin qd \cos sd + 4k^2 qs \sin sd \cos qd = 0. \quad (\text{I.23})$$

Lo mismo vale para el sistema en A, D formado por I.20 y I.21,

$$(k^2 - s^2)^2 \sin sd \cos qd + 4k^2 qs \sin qd \cos sd = 0. \quad (\text{I.24})$$

Las relaciones I.23 y I.24, conjuntamente con

$$q^2 + k^2 = \left(\frac{\omega}{v_L} \right)^2, \quad s^2 + k^2 = \left(\frac{\omega}{v_T} \right)^2, \quad (\text{I.25})$$

permiten eliminar s y q conformando dos relaciones de dispersión independientes, digamos $k_A(\omega)$ y $k_S(\omega)$ respectivamente. Esto define dos grupos de ondas que pueden propagarse independientemente por una placa de sólido isotrópico de espesor d .

La relación de dispersión $k_A(\omega)$ obtenida de I.23 y I.25 relaciona los coeficientes C, B en la forma

$$\frac{C}{B} = - \frac{2ik_A q_A \cos q_A d}{(k_A^2 - s_A^2) \cos s_A d}, \quad (\text{I.26})$$

donde k_A, q_A, s_A son las raíces reales en k, q, s del sistema I.23 y I.25 para una dada ω .

En tanto, la relación de dispersión $k_S(\omega)$ obtenida de I.24 y I.25 relaciona los coeficientes D, A de la forma

$$\frac{D}{A} = \frac{2iks q_S \sin q_S d}{(k_S^2 - s_S^2) \sin s_S d}, \quad (\text{I.27})$$

donde k_S, q_S, s_S son las raíces reales en k, q, s del sistema I.24 y I.25 para una dada ω .

Utilizando estos resultados en las expresiones I.9 para los desplazamientos obtenemos [7], para las ondas con relación de dispersión $k_A(\omega)$, los desplazamientos

$$\begin{aligned}
u_{Ax} &= kB \left[\sin q_A y + \frac{2s_A q_A \cos q_A d}{(k_A^2 - s_A^2) \cos s_A d} \sin s_A y \right] \exp \left(i k_A x + i \frac{\pi}{2} \right), \\
u_{Ay} &= qB \left[\cos q_A y - \frac{2k_A^2 \cos q_A d}{(k_A^2 - s_A^2) \cos s_A d} \cos s_A y \right] \exp (i k_A x).
\end{aligned} \tag{I.28}$$

Para las ondas con la relación de dispersión $k_S(\omega)$, resultan los desplazamientos

$$\begin{aligned}
u_{Sx} &= kA \left[\cos q_S y + \frac{2q_S s_S \sin q_S d}{(k_S^2 - s_S^2) \sin s_S d} \cos s_S y \right] \exp \left(i k_S x + i \frac{\pi}{2} \right), \\
u_{Sy} &= qA \left[-\sin q_S y + \frac{2k_S^2 \sin q_S d}{(k_S^2 - s_S^2) \sin s_S d} \sin s_S y \right] \exp (i k_S x).
\end{aligned} \tag{I.29}$$

Las componentes de los desplazamientos totales se podrán expresar entonces como

$$u_x = u_{Ax} + u_{Sx}, \quad u_y = u_{Ay} + u_{Sy}. \tag{I.30}$$

De las expresiones I.28 y I.29 vemos que las componentes de los desplazamientos de ambos tipos de ondas verifican

$$\begin{aligned}
u_{Ax}(y) &= -u_{Ax}(-y), & u_{Ay}(y) &= u_{Ay}(-y), \\
u_{Sx}(y) &= u_{Sx}(-y), & u_{Sy}(y) &= -u_{Sy}(-y).
\end{aligned} \tag{I.31}$$

Esto significa que, para las ondas con relación de dispersión $k_A(\omega)$, los desplazamientos según x son opuestos a cada lado del plano medio $y = 0$, en tanto que los desplazamientos según y son del mismo sentido a ambos lados de este plano. Por este motivo, a tales ondas se las llama *antisimétricas*.

Para las ondas con relación de dispersión $k_S(\omega)$, los desplazamientos según x son de igual sentido a ambos lados del plano medio $y = 0$, en tanto que los desplazamientos según y son de sentidos opuestos. A estas ondas se las llama *simétricas*.

Apendice II

Teoría del desarrollo en modos normales

II.1 Relaciones de reciprocidad acústica

Sean (x_1, x_2, x_3) las coordenadas cartesianas de un medio elástico, (u_1, u_2, u_3) las componentes del vector desplazamiento de un punto del medio y (v_1, v_2, v_3) las componentes de su velocidad. El tensor de deformaciones es entonces

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{II.1})$$

Sea c_{ijkl} el tensor de rigidez del material. El tensor de tensiones T_{ij} verifica entonces la ley de Hooke

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.2})$$

donde los índices repetidos en el mismo miembro indican una sumatoria, como es convencional.

Utilizando el tensor inverso del de rigidez (tensor de elasticidad s_{ijkl}) se puede escribir la expresión inversa de II.2 como

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2s_{ijkl} T_{kl}. \quad (\text{II.3})$$

Si la densidad volumétrica de masa en equilibrio del medio es ρ , la ecuación linealizada de movimiento es

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_j}{\partial t}. \quad (\text{II.4})$$

Sean $\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}$ y $\mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}$ dos parejas de soluciones de la ecuación de movimiento II.4. Sean $\mathbf{T}^*$ y $\mathbf{v}^*$ las complejas conjugadas de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{v}$ respectivamente. Definimos una magnitud vectorial F_i obtenida como una combinación de ambas soluciones en la forma

$$F_i = T_{ij}^{(1)} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(2)*} v_j^{(1)}, \quad (\text{II.5})$$

donde la repetición del índice j indica el producto interno $T_{ij}v_j = T_{i1}v_1 + T_{i2}v_2 + T_{i3}v_3$.

Calcularemos la magnitud escalar formada por la divergencia del vector II.5

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}^{(1)} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(2)*} v_j^{(1)} \right). \quad (\text{II.6})$$

La derivación con respecto a x_i en el segundo miembro de II.6 da

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{ij}^{(1)}}{\partial x_i} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}^{(2)*}}{\partial x_i} v_j^{(1)} + T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}. \quad (\text{II.7})$$

Substituyendo II.4 en II.7, tenemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial t} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial t} v_j^{(1)} + T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}. \quad (\text{II.8})$$

Reuniendo las derivadas temporales en II.8 podemos escribir

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_j^{(1)} v_j^{(2)*} \right) + T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial x_i} + T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}. \quad (\text{II.9})$$

Derivando respecto al tiempo la expresión II.3 obtenemos una relación entre las derivadas espaciales de las componentes de la velocidad y las tensiones.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 2s_{ijkl} \frac{\partial T_{kl}}{\partial t}. \quad (\text{II.10})$$

Si aplicamos II.10 a la solución (2) conjugada y la multiplicamos tensorialmente por $T_{ij}^{(1)}$ obtenemos el escalar

$$T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_i^{(2)*}}{\partial x_j} + T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial x_i} = 2s_{ijkl} T_{ij}^{(1)} \frac{\partial T_{kl}^{(2)*}}{\partial t}. \quad (\text{II.11})$$

Como los índices i, j del primer miembro de II.11 están ambos sumando, se puede cambiar el orden sin alterar el resultado en cualquiera de los dos términos. Esto conduce a que los dos términos del primer miembro son iguales, por la que la II.11 se puede poner

$$T_{ij}^{(1)} \frac{\partial v_j^{(2)*}}{\partial x_i} = s_{ijkl} T_{ij}^{(1)} \frac{\partial T_{kl}^{(2)*}}{\partial t}, \quad (\text{II.12})$$

con una expresión similar para las soluciones cambiadas y conjugadas

$$T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} = s_{ijkl} T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial T_{kl}^{(1)}}{\partial t}. \quad (\text{II.13})$$

Apéndice II Teoría del desarrollo en modos normales

Sumando II.12 con II.13 y substituyendo en II.9 obtenemos para la divergencia del vector $\mathbf{F}$ la expresión

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_j^{(1)} v_j^{(2)*} \right) + s_{ijkl} T_{ij}^{(1)} \frac{\partial T_{kl}^{(2)*}}{\partial t} + s_{ijkl} T_{ij}^{(2)*} \frac{\partial T_{kl}^{(1)}}{\partial t}, \quad (\text{II.14})$$

que se puede escribir, substituyendo la definición II.5 para el vector $\mathbf{F}$, como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}^{(1)} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(2)*} v_j^{(1)} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_j^{(1)} v_j^{(2)*} + s_{ijkl} T_{ij}^{(1)} T_{kl}^{(2)*} \right). \quad (\text{II.15})$$

El resultado II.15 se conoce como *relación de reciprocidad acústica*[19]. Es una relación válida para dos soluciones arbitrarias de la ecuación de ondas en un mismo medio elástico y no disipativo.

En el caso particular en que ambas soluciones sean armónicas con igual frecuencia, esto es

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) &= T_{ij}^{(1)}(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, & v_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) &= v_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, \\ T_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t) &= T_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, & v_i^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t) &= v_i^{(2)}(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

entonces la magnitud entre paréntesis del segundo miembro de II.15 es independiente del tiempo. De esta forma la relación de reciprocidad da el resultado

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}^{(1)} v_j^{(2)*} + T_{ij}^{(2)*} v_j^{(1)} \right) = 0, \quad (\text{II.16})$$

donde ahora las cantidades T_{ij}, v_j son las amplitudes de los campos y dependen solamente de la posición.

Esta forma particular de la relación se llama *relación de ortogonalidad* entre dos soluciones de igual frecuencia para la ecuación de ondas en un mismo medio.

II.2 Ortogonalidad de los modos normales de Lamb

Para aplicar la relación de ortogonalidad II.16 a las ondas de Lamb, consideremos una placa de espesor $2d$ con su plano medio coincidiendo con $z = 0$. Las ondas de Lamb se propagan en la dirección x (figura 1- 21).

Debido a la situación de guía de ondas planas, todas las magnitudes son funciones solamente de las coordenadas x e y . Volviendo a introducir el vector $\mathbf{F}$ definido en II.5, la relación de ortogonalidad II.16 se escribe explícitamente

$$\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (\text{II.17})$$

Integrando la expresión II.17 solamente en la coordenada y todo a lo ancho de la guía

Seccion II.2 Ortogonalidad de los modos normales de Lamb

(desde $-d$ hasta d) obtenemos el resultado

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d F_x(x, y) dy + F_y(x, d) - F_y(x, -d) = 0. \quad (\text{II.18})$$

De acuerdo con II.5 las componentes del vector $\mathbf{F}$ en involucradas en II.18 son

$$\begin{aligned} F_x &= T_{xj}^{(1)}(x, y) v_j^{(2)*}(x, y) + T_{xj}^{(2)*}(x, y) v_j^{(1)}(x, y), \\ F_y &= T_{yj}^{(1)}(x, d) v_j^{(2)*}(x, d) + T_{yj}^{(2)*}(x, d) v_j^{(1)}(x, d), \end{aligned}$$

por lo que la expresión II.18 queda

$$\begin{aligned} & T_{yj}^{(1)}(x, d) v_j^{(2)*}(x, d) + T_{yj}^{(2)*}(x, d) v_j^{(1)}(x, d) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d \left[T_{xj}^{(1)}(x, y) v_j^{(2)*}(x, y) + T_{xj}^{(2)*}(x, y) v_j^{(1)}(x, y) \right] dy = \quad (\text{II.19}) \\ & T_{yj}^{(1)}(x, -d) v_j^{(2)*}(x, -d) + T_{yj}^{(2)*}(x, -d) v_j^{(1)}(x, -d). \end{aligned}$$

Supongamos que la solución numerada como (1) en II.19 sea un modo normal de propagación de ondas de Lamb con fronteras libres, que identificaremos como *modo m*. En tanto, la otra solución numerada como (2) corresponda a otro modo con las mismas condiciones, que identificaremos como *modo n*.

Las condiciones de fronteras libres exigen que $T_{ij}^{(n,m)}(x, \pm d) = 0$, con lo cual la expresión II.19 se simplifica, resultando

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d \left[T_{xj}^{(m)}(x, y) v_j^{(n)*}(x, y) + T_{xj}^{(n)*}(x, y) v_j^{(m)}(x, y) \right] dy = 0 \quad (\text{II.20})$$

La expresión II.20 establece que la integral es una constante independiente de x a lo largo de la guía.

De acuerdo a las expresiones I.28 y I.29 para los desplazamientos, la dependencia de todas las magnitudes correspondientes a un modo normal n tienen una dependencia de x solamente a través de una exponencial compleja. Su amplitud depende de la otra coordenada y . Podemos poner entonces

$$T_{xj}^{(n)}(x, y) = \mathcal{T}_{xj}^{(n)}(y) \exp(ik_n x), \quad v_j^{(n)}(x, y) = \mathcal{V}_j^{(n)}(y) \exp(ik_n x), \quad (\text{II.21})$$

donde $k_n(\omega)$ es el número de onda (real) para el modo n .

Substituyendo II.21, y sus similares para el modo m , en II.20 llegamos al resultado

Apendice II Teoría del desarrollo en modos normales

$$(k_m - k_n) \int_{-d}^d \left[\mathcal{T}_{xj}^{(m)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(y) + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*}(y) \mathcal{V}_j^{(m)}(y) \right] dy = 0, \quad (\text{II.22})$$

de donde resulta que si se trata de modos diferentes es $k_m \neq k_n$, por lo que

$$\int_{-d}^d \left[\mathcal{T}_{xj}^{(m)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(y) + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*}(y) \mathcal{V}_j^{(m)}(y) \right] dy = 0 \quad \text{si } m \neq n. \quad (\text{II.23})$$

Esta expresión es la *relación de ortogonalidad* entre los modos de propagación de las ondas de Lamb.

Si $m = n$ debemos retomar la expresión II.20 en la forma

$$\int_{-d}^d \left[T_{xj}^{(n)}(x, y) v_j^{(n)*}(x, y) + T_{xj}^{(n)*}(x, y) v_j^{(n)}(x, y) \right] dy = \text{const.} \quad (\text{II.24})$$

De la definición del vector de Poynting (potencia media transmitida por unidad de área) para un campo acústico monocromático de la forma $F(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ en la dirección x_i [2],

$$\frac{dP}{dS_i} = -\frac{1}{4} (T_{ij} v_j^* + T_{ij}^* v_j),$$

tenemos que la II.24 expresa el flujo de potencia p_n transmitido por el modo n por unidad de longitud de la coordenada z . Esto es

$$\int_{-d}^d \left[T_{xj}^{(n)}(x, y) v_j^{(n)*}(x, y) + T_{xj}^{(n)*}(x, y) v_j^{(n)}(x, y) \right] dy = -4p_n. \quad (\text{II.25})$$

Substituyendo las expresiones II.21 en II.25, resulta

$$\int_{-d}^d \left[\mathcal{T}_{xj}^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(y) + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*}(y) \mathcal{V}_j^{(n)}(y) \right] dy = -4p_n. \quad (\text{II.26})$$

Las expresiones II.23 y II.26 completan las relaciones de ortogonalidad entre los modos de propagación de las ondas de Lamb.

II.3 Cálculo del flujo de potencia

La expresión II.26 para el flujo de potencia por unidad de longitud es poco manejable porque involucra el conocimiento del complejo campo de tensiones a lo ancho de la guía. Auld[2](Vol. II) ha desarrollado un procedimiento que utiliza las relaciones de reciprocidad II.15. Involucra las velocidades de grupo de los modos y los campos de velocidades $\mathcal{V}_j^{(n)}(y)$, que son fácilmente obtenibles de los campos de amplitudes I.28 y I.29. Desarrollaremos acá el cálculo, prescindiendo de los efectos electromagnéticos del material.

Para simplificar la notación utilizaremos el vector $\mathbf{F}$ definido en II.5, en el primer miembro de II.15. Para el segundo miembro, definimos la función escalar

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = \rho v_j^{(1)} v_j^{(2)*} + s_{ijkl} T_{ij}^{(1)} T_{kl}^{(2)*}. \quad (\text{II.27})$$

Con estas notaciones, la relación de reciprocidad II.15 resulta más compacta

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (\text{II.28})$$

Por otra parte, en una guía plana de ondas, como es nuestro caso, las únicas componentes vectoriales están en el plano x, y , así como todas las funciones involucradas son respecto a estas dos variables. Entonces la II.28 resulta

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (\text{II.29})$$

Si integramos la expresión II.29 en la coordenada y entre ambas superficies de la placa, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d F_x(x, y, t) dy + F_y(x, d, t) - F_y(x, -d, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^d g(x, y, t) dy. \quad (\text{II.30})$$

Considerando que tratamos con una guía de onda de fronteras libres, tenemos que las tensiones deben de ser nulas en $y = \pm d$, los valores de F_y se anulan en las fronteras. La expresión II.30 resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d F_x(x, y, t) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^d g(x, y, t) dy. \quad (\text{II.31})$$

De esta forma, la única componente del vector $\mathbf{F}$ involucrada en los cálculos es

$$F_x = T_{xj}^{(1)} v_j^{(2)*} + T_{xj}^{(2)*} v_j^{(1)}. \quad (\text{II.32})$$

En la expresión II.32 consideraremos que la solución (1) corresponde a un modo normal n , a la frecuencia ω . La solución (2), en tanto, la hacemos corresponder al mismo modo n

Apendice II Teoría del desarrollo en modos normales

pero a una frecuencia ligeramente diferente $\omega + \delta\omega$. Esto es,

$$\begin{aligned} v_j^{(1)} &= \mathcal{V}_j^{(n)}(y) \exp(ik_n x - i\omega t), & T_{xj}^{(1)} &= \mathcal{T}_{xj}^{(n)}(y) \exp(ik_n x - i\omega t), \\ v_j^{(2)} &= \left[\mathcal{V}_j^{(n)} + \delta\mathcal{V}_j^{(n)} \right] \exp[i(k_n + \delta k_n)x - i(\omega + \delta\omega)t], \\ T_{xj}^{(2)} &= \left[\mathcal{T}_{xj}^{(n)} + \delta\mathcal{T}_{xj}^{(n)} \right] \exp[i(k_n + \delta k_n)x - i(\omega + \delta\omega)t]. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

En este caso, tenemos para la componente F_x definida en II.32,

$$F_x = \left[\mathcal{T}_{xj}^{(n)} (\mathcal{V}_j^{(n)*} + \delta\mathcal{V}_j^{(n)*}) + (\mathcal{T}_{xj}^{(n)*} + \delta\mathcal{T}_{xj}^{(n)*}) \mathcal{V}_j^{(n)} \right] \exp(-i\delta k_n x + i\delta\omega t). \quad (\text{II.34})$$

Para la función g definida en II.27 tendremos

$$g = \left[\rho\mathcal{V}_j^{(n)} (\mathcal{V}_j^{(n)*} + \delta\mathcal{V}_j^{(n)*}) + s_{ijkl} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} (\mathcal{T}_{kl}^{(n)*} + \delta\mathcal{T}_{kl}^{(n)*}) \right] \exp(-i\delta k_n x + i\delta\omega t). \quad (\text{II.35})$$

Tanto en II.34 como en II.35 podemos despreciar los infinitésimos de primer orden en relación al orden cero presente en la suma. De esta forma obtenemos las relaciones

$$F_x = \left(\mathcal{T}_{xj}^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*} \mathcal{V}_j^{(n)} \right) \exp(-i\delta k_n x + i\delta\omega t), \quad (\text{II.36})$$

y

$$g = \left(\rho\mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} + s_{ijkl} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} \mathcal{T}_{kl}^{(n)*} \right) \exp(-i\delta k_n x + i\delta\omega t). \quad (\text{II.37})$$

Para aplicar la relación de reciprocidad en la forma II.31, derivamos II.36 respecto de x , derivamos la II.37 respecto al tiempo, e igualamos ambos resultados integrados en y . Obtenemos

$$-\delta k_n \int_{-d}^d \left(\mathcal{T}_{xj}^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*} \mathcal{V}_j^{(n)} \right) dy = \delta\omega \int_{-d}^d \left(\rho\mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} + s_{ijkl} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} \mathcal{T}_{kl}^{(n)*} \right) dy. \quad (\text{II.38})$$

Comparando II.38 con II.26, vemos que la integral del primer miembro de II.38 es menos cuatro veces el flujo de potencia por unidad de longitud p_n . Por otra parte, también introducimos la definición de velocidad de grupo del modo n a la frecuencia ω ,

$$v_g^{(n)}(\omega) = \frac{\delta\omega}{\delta k_n}. \quad (\text{II.39})$$

Con estas dos substituciones, la II.38 queda

$$4p_n = v_g^{(n)} \int_{-d}^d \left(\rho\mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} + s_{ijkl} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} \mathcal{T}_{kl}^{(n)*} \right) dy. \quad (\text{II.40})$$

Seccion II.3 Cálculo del flujo de potencia

La ecuación II.40 contiene un término en las tensiones para los modos normales. Para poder substituirlo multipliquemos escalarmente la compleja conjugada de la ecuación de movimiento II.4 por la velocidad

$$v_j \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial x_i} = \rho v_j \frac{\partial v_j^*}{\partial t}. \quad (\text{II.41})$$

Tomemos la derivada temporal del tensor de deformación II.1

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

y lo multiplicamos tensorialmente por el complejo conjugado del tensor de tensiones,

$$T_{ij}^* \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(T_{ij}^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + T_{ij}^* \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{II.42})$$

En ambos términos del segundo miembro de II.42 aparecen los índices i, j sumados. Por tal motivo, se puede cambiar su orden en uno de los términos sin alterar el resultado. Además, de la simetría del tensor $T_{ij} = T_{ji}$, resulta que los dos términos del segundo miembro son iguales. Entonces podemos escribir la II.42 como

$$T_{ij}^* \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = T_{ij}^* \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (\text{II.43})$$

Sumando II.43 a II.41 obtenemos

$$v_j \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial x_i} + T_{ij}^* \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho v_j \frac{\partial v_j^*}{\partial t} + T_{ij}^* \frac{\partial S_{ij}}{\partial t},$$

que podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ij}^* v_j) = \rho v_j \frac{\partial v_j^*}{\partial t} + T_{ij}^* \frac{\partial S_{ij}}{\partial t}. \quad (\text{II.44})$$

Supongamos que los campos de tensión y velocidad que aparecen en II.44 se refieren a un modo normal n de ondas de Lamb a la frecuencia ω . Entonces

$$\begin{aligned} v_j &= \mathcal{V}_j^{(n)}(y) \exp(ik_n x - i\omega t), & T_{ij} &= \mathcal{T}_{ij}^{(n)}(y) \exp(ik_n x - i\omega t), \\ S_{ij} &= \mathcal{S}_{ij}^{(n)}(y) \exp(ik_n x - i\omega t). \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Substituyendo II.45 en II.44 y efectuando las derivadas temporales, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{V}_j^{(n)} \right) = i\omega \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} - i\omega \mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{S}_{ij}^{(n)}. \quad (\text{II.46})$$

La magnitud entre paréntesis del primer miembro de II.46 depende solamente de la

Apendice II Teoría del desarrollo en modos normales

coordenada y . Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{V}_j^{(n)} \right) = i\omega \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} - i\omega \mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{S}_{ij}^{(n)}. \quad (\text{II.47})$$

Integrando la II.47 en y a lo ancho de la placa, tenemos

$$\mathcal{T}_{ij}^{(n)*}(d) \mathcal{V}_j^{(n)}(d) - \mathcal{T}_{ij}^{(n)*}(-d) \mathcal{V}_j^{(n)}(-d) = i\omega \int_{-d}^d \left(\rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} - \mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{S}_{ij}^{(n)} \right) dy. \quad (\text{II.48})$$

Pero con las condiciones de frontera libre, es $\mathcal{T}_{ij}^{(n)*}(d) = \mathcal{T}_{ij}^{(n)*}(-d) = 0$, por lo que la II.48 resulta

$$\int_{-d}^d \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy = \int_{-d}^d \mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{S}_{ij}^{(n)} dy. \quad (\text{II.49})$$

Utilizando finalmente la relación $\mathcal{S}_{ij}^{(n)} = s_{ijkl} \mathcal{T}_{kl}^{(n)}$ la igualdad II.49 se expresa

$$\int_{-d}^d \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy = \int_{-d}^d s_{ijkl} \mathcal{T}_{ij}^{(n)*} \mathcal{T}_{kl}^{(n)} dy. \quad (\text{II.50})$$

En II.50 se pueden permutar las parejas de índices ij y kl . Como además es $s_{ijkl} = s_{kl ij}$, esta expresión se puede escribir como

$$\int_{-d}^d \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy = \int_{-d}^d s_{ijkl} \mathcal{T}_{kl}^{(n)*} \mathcal{T}_{ij}^{(n)} dy,$$

que al compararla con la expresión II.40 para la potencia, podemos poner ésta como

$$2p_n = v_g^{(n)} \int_{-d}^d \rho \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy.$$

De donde resulta para el flujo de potencia una expresión más manejable que II.26,

$$p_n(\omega) = \frac{1}{2} \rho v_g^{(n)}(\omega) \int_{-d}^d \mathcal{V}_j^{(n)} \mathcal{V}_j^{(n)*} dy. \quad (\text{II.51})$$

II.4 Desarrollo en modos normales

Auld asume la completitud de las funciones de tensión y velocidad para los modos normales[17]. Esto es, cualquier campo de tensiones arbitrario $T_{ij}(x, y)$ o de velocidades $v_j(x, y)$ se puede expresar como desarrollo en una base de las funciones para los modos normales,

$$T_{ij}(x, y) = \sum_m A_m(x) T_{ij}^{(m)}(y), \quad v_j(x, y) = \sum_m A_m(x) \mathcal{V}_j^{(m)}(y), \quad (\text{II.52})$$

donde las funciones $A_m(x)$ dependen de las condiciones iniciales y de frontera.

En particular, si las fronteras son libres en toda la extensión del eje x , entonces

$$A_m(x) = A_{0m} \exp(ik_m x), \quad (\text{II.53})$$

y los campos de II.52 son simplemente sumas de los modos normales de frontera libre, con amplitudes A_{0m} que solamente dependen de las condiciones iniciales. Esto es

$$T_{ij}(x, y) = \sum_m A_{0m} T_{ij}^{(m)}(x, y), \quad v_j(x, y) = \sum_m A_{0m} v_j^{(m)}(x, y). \quad (\text{II.54})$$

Si se produce una excitación sobre parte de la superficie de la placa, entonces las funciones $A_m(x)$ pueden ser calculadas en función de la excitación conocida.

Para ello consideremos que una de las soluciones, por ejemplo la número 1, sea un campo de ondas arbitrario. La indicaremos como $T_{ij}^{(1)} = T_{ij}$, $v_j^{(1)} = v_j$.

Hagamos que la otra solución (la número 2) sea específicamente un modo normal (simétrico o antisimétrico) de propagación de ondas de Lamb, con condiciones de fronteras libres. La indicaremos como $T_{ij}^{(2)} = T_{ij}^{(n)}$, $v_j^{(2)} = v_j^{(n)}$, donde el superíndice n identifica el modo. La expresión II.19, con la condición $T_{ij}^{(n)}(x, \pm d) = 0$, resulta

$$T_{yj}(x, d) v_j^{(n)*}(x, d) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d \left[T_{xj}(x, y) v_j^{(n)*}(x, y) + T_{xj}^{(n)*}(x, y) v_j(x, y) \right] dy = T_{yj}(x, -d) v_j^{(n)*}(x, -d). \quad (\text{II.55})$$

Supongamos que la excitación se efectúa sobre la cara superior de la placa, como se muestra en la figura 1- 21, de forma que la cara inferior permanece libre. Esto da $T_{yj}(x, -d) = 0$ en II.55, por lo que

Apendice II Teoría del desarrollo en modos normales

$$T_{yj}(x, d) v_j^{(n)*}(x, d) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^d \left[T_{xj}(x, y) v_j^{(n)*}(x, y) + T_{xj}^{(n)*}(x, y) v_j(x, y) \right] dy = 0. \quad (\text{II.56})$$

El campo de tensiones $T_{yj}(x, d)$ en el primer término de II.56 puede ser distinto de cero solamente en la porción de la superficie que está en contacto con una carga o con el elemento excitador. Asumimos que esta función es conocida. Substituimos en II.56 los campos de tensiones T_{xj} y velocidades v_j por las expresiones II.52, y los correspondientes al modo normal n por las II.21. Entonces esta expresión se reduce a

$$T_{yj}(x, d) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d) \exp(-ik_n x) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_m A_m(x) \exp(-ik_n x) \int_{-d}^d \left[\mathcal{T}_{xj}^{(m)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(y) + \mathcal{T}_{xj}^{(n)*}(y) \mathcal{V}_j^{(m)}(y) \right] dy \right\} = 0. \quad (\text{II.57})$$

Pero la integral de II.57 obedece a las relaciones de ortogonalidad II.23 y II.26. Entonces la expresión II.57 resulta

$$T_{yj}(x, d) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d) \exp(-ik_n x) = 4p_n \frac{\partial}{\partial x} [A_n(x) \exp(-ik_n x)],$$

que haciendo la derivada respecto de x conduce a la ecuación

$$\frac{dA_n}{dx} - ik_n A_n(x) = \frac{1}{4p_n} T_{yj}(x, d) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d). \quad (\text{II.58})$$

Las componentes $\mathcal{V}_x^{(n)}, \mathcal{V}_y^{(n)}$ en la superficie son conocidas para todo modo n a partir de las expresiones para los desplazamientos I.28 y I.29. La tensión de excitación o de carga de la placa $T_{yj}(x, d)$ es una función de x arbitraria pero también conocida. Entonces la ecuación II.58 permite obtener las funciones de amplitud para cada modo, que al insertarlas en II.52 permite obtener los campos de tensión y velocidad para las ondas de Lamb generadas por dicha excitación.

Apéndice III

Funciones de Green para las ondas de Lamb

Establezcamos primero las convenciones sobre signos y nomenclatura que utilizaremos para las transformadas de Fourier directa e inversa.

Para las transformadas directa e inversa en los dominios de tiempo y frecuencia temporal tenemos

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad \tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (\text{III.1})$$

Para las transformadas directa e inversa en los dominios de espacio y frecuencia espacial tenemos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k) \exp(ikx) dk, \quad \hat{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(-ikx) dx. \quad (\text{III.2})$$

Para encontrar las funciones de Green para las ondas de Lamb, supongamos que la tensión de excitación T_{yj} en la ecuación (1.37) está localizada a una región finita de la superficie de la placa. Esta es la situación usual en la generación de ondas de Lamb.

En estas condiciones, los límites de integración en (1.37) se pueden extender a todo el eje x . Podemos poner entonces (1.37) como

$$A_n(x) = \frac{1}{4p_n} \exp(ik_n x) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d) \int_{-\infty}^{\infty} T_{yj}(\xi, d) \exp(-ik_n \xi) d\xi, \quad (\text{III.3})$$

que escribiremos reuniendo ambos factores exponenciales,

$$A_n(x) = \frac{\mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{4p_n} \int_{-\infty}^{\infty} T_{yj}(\xi, d) \exp[ik_n(x - \xi)] d\xi. \quad (\text{III.4})$$

Substituyendo la III.4 en el desarrollo (1.34), obtenemos

$$v_i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{4p_n} T_{yj}(\xi, d) \exp[ik_n(x - \xi)] d\xi. \quad (\text{III.5})$$

Apéndice III Funciones de Green para las ondas de Lamb

Debido a que hemos hecho todas las deducciones a frecuencia constante, tanto el campo de amplitudes de velocidad $v_i(x, y)$ como el campo de amplitudes de tensiones de excitación $T_{yj}(x, d)$, son las transformadas temporales de Fourier de campos de velocidad $v_i(x, y, t)$ y de tensiones $T_{yj}(x, d, t)$ arbitrariamente variables en el tiempo. En rigor deberíamos escribir, utilizando la notación de III.1,

$$v_i(x, y) = \tilde{v}_i(\omega, x, y), \quad T_{yj}(x, d) = \tilde{T}_{yj}(\omega, x, d).$$

Substituyendo estas expresiones en III.5, resulta

$$\tilde{v}_i(\omega, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{4p_n} \tilde{T}_{yj}(\omega, \xi, d) \exp[ik_n(x - \xi)] d\xi. \quad (\text{III.6})$$

Para obtener la señal de respuesta dependiente del tiempo, hacemos la transformada temporal de Fourier de III.6. Multiplicando por $\exp(-i\omega t)$ e integrando en ω resulta

$$v_i(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{4p_n} \tilde{T}_{yj}(\omega, \xi, d) \exp[ik_n(x - \xi)] \exp(-i\omega t) d\xi d\omega. \quad (\text{III.7})$$

La magnitud $\tilde{T}_{yj}$ que aparece en III.7 es a su vez la transformada inversa de Fourier de la función temporal de excitación $T_{yj}(\xi, d, t)$ sobre la superficie superior de la placa. La sustituimos entonces por la expresión

$$\tilde{T}_{yj}(\omega, \xi, d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{yj}(\xi, d, \tau) \exp(i\omega \tau) d\tau,$$

obteniendo

$$v_i(x, y, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{8\pi p_n} e^{i[k_n(x - \xi) - \omega(t - \tau)]} d\omega \right] T_{yj}(\xi, d, \tau) d\xi d\tau. \quad (\text{III.8})$$

En III.8 se ha puesto entre paréntesis rectos la integral en la frecuencia de todas las magnitudes que dependen de ella. Comparando esta expresión con (1.38), vemos inmediatamente que hemos encontrado una función tensorial de Green para el campo de velocidades de las ondas de Lamb, la que llamaremos $\mathbf{GV}$, tal que

$$GV_{ij}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{8\pi p_n} \exp(ik_n x - i\omega t) d\omega. \quad (\text{III.9})$$

Con esta definición, la III.8 puede escribirse en forma más compacta como la doble

convolución

$$v_i(x, y, t) = GV_{ij}(x, y, t) \otimes_x \otimes_t T_{yj}(x, d, t). \quad (\text{III.10})$$

La obtención de una función tensorial de Green para los desplazamientos de las ondas de Lamb, a la que llamaremos **GU**, es inmediata. Su expresión formal deberá ser

$$u_i(x, y, t) = GU_{ij}(x, y, t) \otimes_x \otimes_t T_{yj}(x, d, t), \quad (\text{III.11})$$

de donde

$$v_i(x, y, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} GU_{ij}(x, y, t) \otimes_x \otimes_t T_{yj}(x, d, t). \quad (\text{III.12})$$

Comparando III.12 con III.10 tenemos que

$$GV_{ij}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} GU_{ij}(x, y, t). \quad (\text{III.13})$$

Aplicando en III.13 la expresión III.9 obtenemos

$$GU_{ij}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n i \frac{\mathcal{V}_i^{(n)}(y) \mathcal{V}_j^{(n)*}(d)}{8\pi\omega p_n} \exp(ik_n x - i\omega t) d\omega. \quad (\text{III.14})$$

Es más cómodo expresar la función de Green para los desplazamientos III.14 en función de las amplitudes de desplazamiento $\mathcal{U}_i^{(n)}$ en lugar de las de velocidad $\mathcal{V}_i^{(n)}$.

Para ello utilizamos la relación $-i\omega \mathcal{U}_i^{(n)} = \mathcal{V}_i^{(n)}$ en III.14, resultando

$$GU_{ij}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n i \frac{\omega \mathcal{U}_i^{(n)}(y) \mathcal{U}_j^{(n)*}(d)}{8\pi p_n} \exp(ik_n x - i\omega t) d\omega. \quad (\text{III.15})$$

Apendice IV

Método de los potenciales elásticos

Una solución a frecuencia fija ω para los desplazamientos que sea arbitraria en la coordenada x , pero manteniendo las condiciones de frontera en y correspondientes a la guía de ondas, será (ver I.9)

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ikA \cos qy + ikB \sin qy - sC \sin sy + sD \cos sy) \exp(ikx) dk, \\ u_y(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-qA \sin qy + qB \cos qy - ikC \cos sy - ikD \sin sy) \exp(ikx) dq, \end{aligned} \quad (IV.1)$$

con las expresiones para q y s dependiendo de k y ω según I.25,

$$q = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - k^2}, \quad s = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_T}\right)^2 - k^2}. \quad (IV.2)$$

Se ha omitido el factor $\exp(-i\omega t)$ común a ambos miembros de IV.1 y IV.2.

En IV.1 y IV.2 las amplitudes A, B, C, D son también funciones de k . Las expresiones entre paréntesis en los segundos miembros son las transformadas espaciales de Fourier $\hat{u}_x(k, y), \hat{u}_y(k, y)$ de las amplitudes, esto es

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(k, y) &= ikA \cos qy + ikB \sin qy - sC \sin sy + sD \cos sy, \\ \hat{u}_y(k, y) &= -qA \sin qy + qB \cos qy - ikC \cos sy - ikD \sin sy. \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Las condiciones de frontera I.2 para la sola existencia de tensiones de excitación T_{yy} en la frontera, resultan

$$\begin{aligned} T_{yy}(x, \pm d) &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_{y=\pm d} + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_{y=\pm d}, \\ \frac{T_{xy}(x, \pm d)}{\mu} &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{y=\pm d} = 0. \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Haciendo la transformada de Fourier en x en las expresiones IV.4, evaluadas en $\pm d$, resulta

$$\begin{aligned} \hat{T}_{yy}(k, \pm d) &= i\lambda k \hat{u}_x(k, \pm d) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right)_{y=\pm d} \\ \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} \right)_{y=\pm d} &+ ik \hat{u}_y(k, y) = 0. \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Utilizando las expresiones IV.3 podemos efectuar las derivadas respecto a y en IV.5, con

pasos similares a los efectuados desde la ecuación I.10 hasta I.18. Para la primera igualdad nos da

$$(k^2 - s^2) A \cos qd + (k^2 - s^2) B \sin(\pm qd) + 2iksC \sin(\pm sd) - 2iksD \cos sd = \frac{\hat{T}_{yy}(k, \pm d)}{\mu}. \quad (\text{IV.6})$$

Para la segunda igualdad de IV.5 resulta

$$-2ikkA \sin(\pm qd) + 2ikkB \cos qd + (k^2 - s^2) C \cos sd + (k^2 - s^2) D \sin(\pm sd) = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Cada una de estas dos igualdades tiene dos soluciones debido al doble signo. Sumando y luego restando ambas soluciones de IV.6 obtenemos dos ecuaciones, donde además utilizamos la no existencia de tensiones sobre la cara inferior de la placa $\hat{T}_{yy}(k, -d) = 0$,

$$(k^2 - s^2) A \cos qd - 2iksD \cos sd = \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu}, \quad (\text{IV.8})$$

y

$$(k^2 - s^2) B \sin qd + 2iksC \sin sd = \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu}. \quad (\text{IV.9})$$

Haciendo lo propio con ambas soluciones de IV.7 obtenemos

$$2ikkB \cos qd + (k^2 - s^2) C \cos sd = 0, \quad (\text{IV.10})$$

y

$$-2ikkA \sin qd + (k^2 - s^2) D \sin sd = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Las ecuaciones IV.8 y IV.11 forman un sistema en A, D , en tanto que las IV.9 y IV.10 forman otro sistema en B, C . Resolviendo ambos, tenemos

$$A(k) = \frac{1}{\Delta_s} \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu} (k^2 - s^2) \sin sd, \quad (\text{IV.12})$$

$$B(k) = \frac{1}{\Delta_a} \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu} (k^2 - s^2) \cos sd, \quad (\text{IV.13})$$

$$C(k) = -\frac{1}{\Delta_a} \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu} 2ikk \cos qd, \quad (\text{IV.14})$$

$$D(k) = \frac{1}{\Delta_s} \frac{\hat{T}_{yy}(k, d)}{\mu} 2ikk \sin qd, \quad (\text{IV.15})$$

Apendice IV Método de los potenciales elásticos

donde se han representado el determinante de IV.8 y IV.11 por

$$\Delta_s = (k^2 - s^2)^2 \sin sd \cos qd + 4k^2 qs \sin qd \cos sd \quad (\text{IV.16})$$

y el determinante de IV.9 y IV.10 por

$$\Delta_a = (k^2 - s^2)^2 \sin qd \cos sd + 4k^2 qs \sin sd \cos qd. \quad (\text{IV.17})$$

Los desplazamientos en IV.3 son también función de la frecuencia, por lo que son las amplitudes de las componentes de Fourier de la señal temporal. Para mantener la notación usada en el texto, las reescribimos como $\hat{u}_i(k, y) = \hat{\tilde{u}}_i(\omega, k, y)$. Lo mismo vale para las tensiones, esto es, $\hat{T}_{ij}(k, y) = \hat{\tilde{T}}_{ij}(\omega, k, y)$.

La sustitución de los coeficientes IV.12 a IV.15 en IV.3 permite encontrar las transformadas espaciales de Fourier en los desplazamientos, que expresaremos como

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{u}}_x(\omega, k, y) &= HU_x(\omega, k, y) \hat{\tilde{T}}_{yy}(\omega, k, y), \\ \hat{\tilde{u}}_y(\omega, k, y) &= HU_y(\omega, k, y) \hat{\tilde{T}}_{yy}(\omega, k, y), \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

siendo

$$\begin{aligned} HU_x(\omega, k, y) &= \frac{ik(k^2 - s^2) \cos sd \sin qy + 2ikqs \cos qd \sin sy}{\mu \Delta_a} + \\ &+ \frac{ik(k^2 - s^2) \sin sd \cos qy + 2ikqs \sin qd \cos sy}{\mu \Delta_s}, \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

y

$$\begin{aligned} HU_y(\omega, k, y) &= \frac{q(k^2 - s^2) \cos sd \cos qy - 2k^2 q \cos qd \cos sy}{\mu \Delta_a} + \\ &+ \frac{2k^2 q \sin qd \sin sy - q(k^2 - s^2) \sin sd \sin qy}{\mu \Delta_s}. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Las expresiones IV.19 y IV.20 son las funciones de transferencia para ambas componentes de los desplazamientos de ondas de Lamb, generadas por una tensión normal a la placa en su superficie superior.

Estas funciones contienen singularidades cuando k adopta los valores de la curva de dispersión de los modos $k_n(\omega)$. Estos valores son las raíces de los determinantes Δ que aparecen en los denominadores de IV.19 y IV.20, de Δ_a para los modos antisimétricos y de Δ_s para los simétricos.

Para comparar apropiadamente estos resultados con la función de transferencia (1.44) obtenida con el método del desarrollo en modos normales, debemos transformar las singularidades de IV.19 y IV.20 en productos por el delta de Dirac $\delta(k_n - k)$. Esto se puede hacer con ayuda de la teoría de variable compleja.

Cuando tenemos una integral de la forma

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{g(k)} \exp(ikx) dk, \quad (\text{IV.21})$$

donde el denominador tiene un conjunto de raíces $g(k_n) = 0$, la función integrando de IV.21 tiene polos en el plano complejo $z = k + i\xi$.

La integral de contorno en el plano complejo es igual a la suma de los residuos dentro de la curva cerrada. Se puede elegir un contorno formado por un segmento en el eje real y un semicírculo que lo cierra en el semiplano positivo del plano complejo z . Extendiendo el radio del semicírculo al infinito, se anula la integral de arco si nos restringimos a valores de $x > 0$ en IV.21.

Si además los polos de la función integrando son simples (existe $\lim_{k \rightarrow k_n} \frac{f(k)}{g'(k)} (k - k_n)$), entonces se prueba que la integral IV.21 da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{g(k)} \exp(ikx) dk = 2\pi i \sum_n \frac{f(k_n)}{g'(k_n)} \exp(ik_n x), \quad (\text{IV.22})$$

donde $g'(k) = \frac{dg}{dk}$ y la suma se extiende a todas las raíces de $g(k)$.

Utilizando las propiedades del delta de Dirac en el segundo miembro de IV.22, ésta se puede poner como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{g(k)} \exp(ikx) dk = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{f(k)}{g'(k)} \exp(ikx) \delta(k_n - k) dk,$$

de donde resulta que

$$\frac{f(k)}{g(k)} = 2\pi i \sum_n \frac{f(k)}{g'(k)} \delta(k_n - k). \quad (\text{IV.23})$$

Utilizando IV.23 en IV.19 tenemos que

$$\begin{aligned} HU_x(\omega, k, y) = & -2\pi \sum_A \frac{2kqs \cos qd \sin sy + k(k^2 - s^2) \cos sd \sin qy}{\mu \Delta'_a} \delta(k_A - k) - \\ & -2\pi \sum_S \frac{2kqs \sin qd \cos sy + k(k^2 - s^2) \sin sd \cos qy}{\mu \Delta'_s} \delta(k_S - k). \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Las sumatorias sobre A se refiere a las raíces k_A de Δ_a (modos antisimétricos), en tanto que la sumatoria sobre S se refiere a las raíces k_S de Δ_s (modos simétricos).

Apendice IV Método de los potenciales elásticos

De igual forma, utilizando IV.23 en IV.20 resulta

$$\begin{aligned}
 HU_y(\omega, k, y) = & 2\pi i \sum_A \frac{q(k^2 - s^2) \cos sd \cos qy - 2k^2 q \cos qd \cos sy}{\mu \Delta'_a} \delta(k_A - k) + \\
 & + 2\pi i \sum_S \frac{2k^2 q \sin qd \sin sy - q(k^2 - s^2) \sin sd \sin qy}{\mu \Delta'_s} \delta(k_S - k). \quad (\text{IV.25})
 \end{aligned}$$

Apéndice V

Sonda interferométrica heterodyna

El haz del láser L de la figura 1- 14 se divide mediante el cubo divisor C1 en un haz de referencia R y un haz de señal S.

El haz de referencia R viaja por el prisma de Dove D y va directo al fotodiodo PH, dando lugar a un campo óptico de la forma

$$E_R(t) = E_0 \exp(i\omega_L t + i\varphi_R), \quad (\text{V.1})$$

donde ω_L es la frecuencia de la luz y φ_R es la variación de fase del haz de referencia a causa del camino recorrido.

El haz de señal S pasa por el modulador acusto-óptico M, que le impone una modulación de amplitud con frecuencia Ω . Se refleja en la placa a estudio T y se deflecta por el divisor de haz C2 para juntarse con el haz de referencia en el fotodiodo PH. La placa T presenta una vibración mecánica que le produce una variación de fase dinámica $\varphi(t)$ al haz reflejado.

El campo óptico del haz de señal sobre el fotodiodo PH será

$$E_S(t) = E_0 \exp[i(\omega_L + \Omega)t + i\varphi(t) + i\varphi_S], \quad (\text{V.2})$$

donde φ_S es la variación de fase del haz de señal debido a su recorrido. Para simplificar los cálculos hemos supuesto que las amplitudes de ambos haces son iguales en V.1 y V.2.

La suma de V.1 y V.2 da el campo óptico de interferencia sobre el fotodiodo

$$E(t) = E_R(t) + E_S(t) = E_0 \exp(i\omega_L t) [\exp(i\varphi_R) + \exp(i\Omega t + i\varphi(t) + i\varphi_S)]. \quad (\text{V.3})$$

Poniendo $\Delta\varphi_{RS} = \varphi_S - \varphi_R$ en V.3, resulta

$$E(t) = E_0 \exp(i\omega_L t + i\varphi_R) [1 + \exp(i\Omega t + i\varphi(t) + i\Delta\varphi_{RS})]. \quad (\text{V.4})$$

Tomando el cuadrado del módulo de V.4 obtenemos la intensidad luminosa resultante en el fotodiodo,

$$I(t) = 2I_0 [1 + \cos(\Omega t + \varphi(t) + \Delta\varphi_{RS})]. \quad (\text{V.5})$$

La variación de fase $\Delta\varphi_{RS}$ entre ambos haces depende de la diferencia de caminos. Las vibraciones del ambiente hacen que esta diferencia no sea constante, sino que introducen un elemento de ruido que definiremos como $\Delta\varphi_{RS} = \rho(t)$.

Por otra parte, la intensidad de corriente eléctrica total $i_T(t)$ en el fotodiodo será

Apendice V Sonda interferométrica heterodyna

proporcional a la intensidad luminosa en V.5. Esto es

$$i_T(t) \propto 2I_0 + 2I_0 \cos [\Omega t + \varphi(t) + \rho(t)]. \quad (\text{V.6})$$

La corriente en V.6 tiene una componente de cc que se elimina con un filtro, quedando solamente la componente variable

$$i(t) = i_0 \cos [\Omega t + \varphi(t) + \rho(t)]. \quad (\text{V.7})$$

El objetivo del proceso de desheterodinación es la obtención de la señal $\varphi(t)$ presente en V.7, eliminando la frecuencia Ω de la portadora y el ruido $\rho(t)$. La corriente V.7 es la entrada al sistema electrónico de detección E de la figura 1- 14. En tanto que la salida debe de ser proporcional a la señal $\varphi(t)$, que es observada y/o registrada en el osciloscopio OSC de la misma figura.

V.1 Detección de banda angosta

Supongamos que el punto analizado en la placa T de la figura 1- 14 vibra armónicamente, con amplitud u_0 , frecuencia ω_S y fase δ . Esto es

$$u(t) = u_0 \sin(\omega_S t + \delta). \quad (\text{V.8})$$

Si $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda de la luz, la variación de fase producida en la reflexión sobre la superficie de T que se desplaza según la V.8 será

$$\varphi(t) = 2ku(t) = 2ku_0 \sin(\omega_S t + \delta). \quad (\text{V.9})$$

Substituyendo V.9 en V.7 y definiendo, para simplificar

$$\alpha(t) = \Omega t + \rho(t), \quad \beta(t) = \omega_S t + \delta, \quad (\text{V.10})$$

encontramos una señal eléctrica de entrada al sistema de detección E de la figura 1- 14 proporcional a

$$e(t) = \frac{i(t)}{i_0} = \cos(\alpha + 2ku_0 \sin \beta). \quad (\text{V.11})$$

Utilizando el desarrollo en serie

$$\cos(\alpha + A \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(A) \cos(\alpha + n\beta), \quad (\text{V.12})$$

donde J_n es la función de Bessel de primera especie y de orden n , la señal de entrada V.11 resulta

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2ku_0) \cos(\alpha + n\beta). \quad (\text{V.13})$$

Seccion V.1 Detección de banda angosta

Las amplitudes u_0 de los desplazamientos en la superficie de la placa ordinariamente no superan los 100 Angströms, por lo que, con un láser de He-Ne, el argumento de las funciones de Bessel es $2ku_0 < 0.2$. En estas condiciones podemos aplicar las aproximaciones

$$J_0(2ku_0) \simeq 1, \quad J_{\pm 1}(2ku_0) \simeq \pm ku_0, \quad J_n(2ku_0) \simeq 0 \quad \forall |n| > 1. \quad (\text{V.14})$$

En estas condiciones, la sumatoria de V.13 se reduce a tres términos

$$e(t) = \cos \alpha + ku_0 \cos(\alpha + \beta) - ku_0 \cos(\alpha - \beta). \quad (\text{V.15})$$

Substituyendo los valores de α y β según V.10, podemos poner la señal de entrada como

$$e(t) = e_0(t) + e_+(t) + e_-(t), \quad (\text{V.16})$$

siendo

$$\begin{aligned} e_0(t) &= \cos[\Omega t + \rho(t)], \\ e_+(t) &= ku_0 \cos[(\Omega + \omega_S)t + \rho(t) + \delta], \\ e_-(t) &= -ku_0 \cos[(\Omega - \omega_S)t + \rho(t) - \delta]. \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

El espectro de cada una de estas tres componentes de la señal de entrada contiene al ruido $\rho(t)$, pero están centradas en diferentes frecuencias.

El espectro del ruido de las vibraciones ambientales se encuentra centrado en cero y tiene un ancho de bando que no supera generalmente los 2 kHz. Esto es $\Delta f_\rho < 2kHz$. Por otra parte, la frecuencia Ω de modulación está entre 60 y 80 MHz, y la frecuencia ω_S de excitación ultrasonora sobre la placa es del orden de pocos MHz.

En estas condiciones, los espectros de las tres señales V.17 no se superponen, como se muestra en la figura V- 1. Esto nos permite hacer una derivación de la señal $e(t)$ hacia un filtro de paso de banda (BPF), con frecuencia centrada en Ω y ancho de banda mayor que el ruido pero menor que ω_S . Extraemos así solamente la componente $e_0(t)$ de la señal V.16, como se indica a la salida del filtro pasa banda BPF en la figura V- 2

La componente $e_0(t)$ de V.17 obtenida a la salida del filtro de paso de banda BPF de la figura V- 2 es derivada electrónicamente. Se obtiene la señal

$$e'_0(t) = - \left[\Omega + \frac{d\rho}{dt} \right] \sin[\Omega t + \rho(t)]. \quad (\text{V.18})$$

Debido a que las frecuencias presentes en el ruido no superan los 2 kHz, en tanto que la frecuencia de modulación Ω es superior a 60 Mhz, una muy buena aproximación de V.18 es

$$e'_0(t) \simeq -\Omega \sin[\Omega t + \rho(t)], \quad (\text{V.19})$$

lo que significa que el derivador d/dt de la figura V- 2 produce un desfase de $\pi/2$ en la entrada.

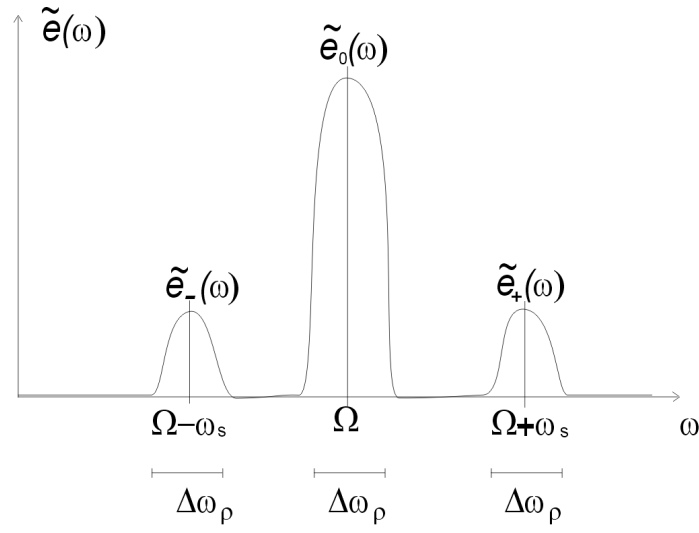


Figura V- 1. Espectros de las tres componentes de la señal de entrada, ensanchadas por el espectro del ruido.

Seccion V.2 Detección de banda ancha

Volviendo a las notaciones introducidas en V.10 para simplificar, la señal derivada V.19 puede expresarse como

$$e'_0(t) \simeq -\Omega \sin \alpha. \quad (V.20)$$

La etapa siguiente en el tratamiento de la señal es un multiplicador $\otimes$ que hace el producto de la señal original de entrada $e(t)$ dada en V.15 por la V.20, obteniéndose una señal proporcional a

$$\frac{e'_0(t) e(t)}{\Omega} = -\sin \alpha \cos \alpha + ku_0 \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha - ku_0 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha. \quad (V.21)$$

Utilizando la igualdad trigonométrica

$$\sin \alpha [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \sin \beta + \frac{1}{2} \cos(2\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(2\alpha + \beta), \quad (V.22)$$

podemos expresar la señal V.21 obtenida a la salida del multiplicador como la suma de cuatro componentes

$$\frac{e'_0(t) e(t)}{\Omega} = s(t) + s_0(t) + s_+(t) + s_-(t), \quad (V.23)$$

donde

$$\begin{aligned} s(t) &= ku_0 \sin \beta = ku_0 \sin(\omega_S t + \delta), \\ s_0(t) &= -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sin 2\alpha}{2} = -\frac{\sin[2\Omega t + 2\rho(t)]}{2}, \\ s_+(t) &= -\frac{ku_0}{2} \cos(2\alpha + \beta) = -\frac{ku_0}{2} \cos[(2\Omega + \omega_S)t + 2\rho(t) + \delta], \\ s_-(t) &= \frac{ku_0}{2} \cos(2\alpha - \beta) = \frac{ku_0}{2} \cos[(2\Omega - \omega_S)t + 2\rho(t) - \delta]. \end{aligned} \quad (V.24)$$

Los espectros de las tres últimas señales de V.24 se encuentran muy alejados del espectro de la primera señal componente $s(t)$, puesto que aquéllos se encuentran centrados, respectivamente, en las altas frecuencias 2Ω , $2\Omega - \omega_S$, y $2\Omega + \omega_S$, como se observa en la figura V- 3.

Por consiguiente, con un filtro pasabajos (LPF en la figura V- 2) de frecuencia de corte mayor que ω_S , aislamos completamente la componente $s(t)$, que recupera completamente la vibración original de la placa como se ve en la primera de las expresiones de V.24.

V.2 Detección de banda ancha

Usualmente, la vibración de la placa T de la figura 1- 14 no es armónica con frecuencia única ω_S como se supuso en la expresión V.8. Tendrá normalmente una frecuencia central o dominante ω_S y un ancho de banda finito $\Delta\omega_S$.

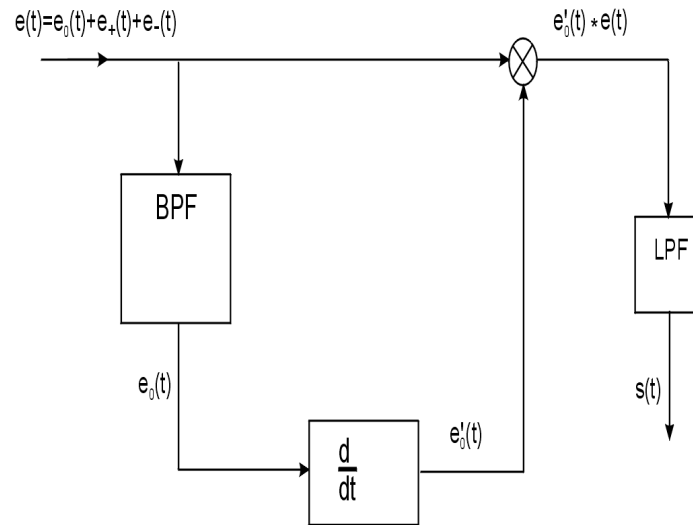


Figura V- 2. Esquema del sistema desheterodinación.

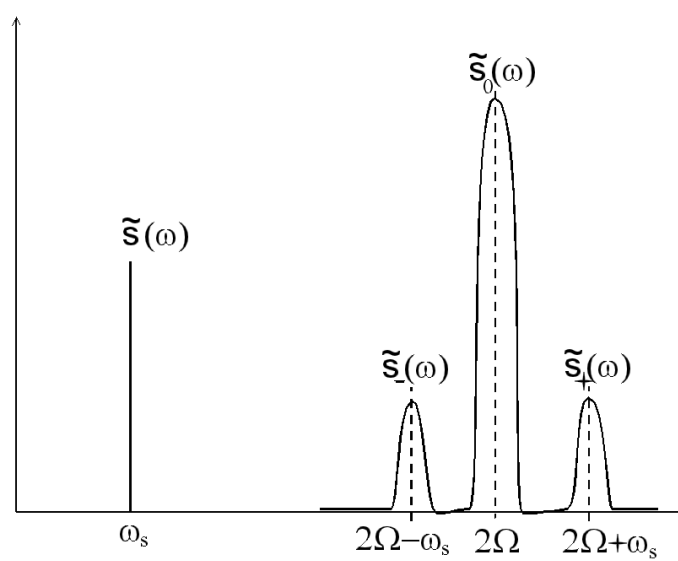


Figura V- 3. Espectro de la señal de salida del multiplicador $\otimes$.

Apendice V Sonda interferométrica heterodyna

Esto trae como consecuencia que los espectros de las señales de entrada dibujados en la figura V- 1 tengan un ancho de banda mayor, en el que se suman los anchos del ruido y de la señal $\Delta\omega_S + \Delta\omega_\rho$.

No obstante, si consideramos la situación usual en que $\Delta\omega_S < \omega_S$, los espectros de las diferentes componentes de la señal de entrada de la figura V- 1 tampoco llegan a superponerse. Esto habilita a la aplicación del filtro de paso de banda BPF como se hizo antes para la detección de banda angosta, así como toda la deducción posterior. La salvedad es que ahora el filtro BPF debe tener un ancho de banda pasante mayor que $\Delta\omega_S + \Delta\omega_\rho$.

Se obtiene en este caso un espectro de la señal de salida similar al representado en la figura V- 3, con la diferencia de que todos los picos de la gráfica experimentan un ensanchamiento adicional en la cantidad $\Delta\omega_S$. El filtro pasabajos final nuevamente aislará la señal correspondiente a la vibración original, centrada en la frecuencia ω_S y con su ancho de banda $\Delta\omega_S$, toda vez que su frecuencia de corte sea ahora mayor que $\omega_S + \Delta\omega_S$.

En conclusión, podemos decir que, cualquiera sea la forma de la vibración $u(t)$ del punto de la placa en estudio, el sistema interferométrico heterodyno obtiene una señal eléctrica a la salida $s(t)$ que es directamente proporcional al desplazamiento $u(t)$.

Apéndice VI

Método del campo oscuro

En la figura VI- 1 se presenta el esquema experimental para el método del campo oscuro.

Un haz de luz láser de gran abertura (obtenida mediante un sistema telescópico) se hace incidir sobre el divisor de haz BS a 45° de la placa T. La luz reflejada por el divisor de haz incide sobre la superficie de la placa en el plano xy . Esta superficie se encuentra bajo un campo de desplazamiento dinámico $u(x, y, t)$, por ejemplo, de ondas de superficie.

Si la superficie es un espejo plano "perfecto", con excepción de las modulaciones de desplazamiento $u(x, y, t)$, la luz reflejada por ella en $z = 0$ estará modulada solamente en fase, de la forma

$$E(x, y, t) = E_0 \exp[i\varphi(x, y, t)], \quad (\text{VI.1})$$

donde

$$\varphi(x, y, t) = 2ku(x, y, t). \quad (\text{VI.2})$$

En VI.2 $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda de la luz. En VI.1 se ha omitido el factor $\exp(i\omega t)$ ya que es irrelevante en toda la deducción.

Esta luz reflejada por la placa atraviesa ahora el divisor de haz BS y es enfocada por la lente L1 en el punto BP. Si cuidamos que la distancia focal f de la lente L1 sea igual a la distancia entre la lente y la placa T, entonces el campo óptico en el plano focal que pasa por BP es la transformada espacial de Fourier del campo óptico VI.1 en $z = 0$ [26]. Esto es (despreciando la abertura finita de la lente L1),

$$E'(x', y', t) = \frac{\exp(i2kf)}{i\lambda f} E_0 \mathcal{F}\{\exp[i\varphi(x, y, t)]\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}}, \quad (\text{VI.3})$$

donde x', y' son las coordenadas de la imagen en el plano que pasa por el punto BP ($z = 2f$).

La notación utilizada en VI.3 para la transformada espacial doble de Fourier de una función $g(x, y)$ es

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp\left[2\pi i \left(\frac{xx'}{\lambda f} + \frac{yy'}{\lambda f}\right)\right] dx dy. \quad (\text{VI.4})$$

Las variaciones de fase φ que experimenta la luz que se refleja en la placa T están dadas por VI.2. Si los valores absolutos de los desplazamientos u son menores que $\lambda/4\pi \sim 50$ nm (para el láser He-Ne), la expresión VI.2 da $|\varphi| < 1$. En estas condiciones podemos aproximar $\exp(i\varphi) \sim 1 + i\varphi$.

Apendice VI Método del campo oscuro

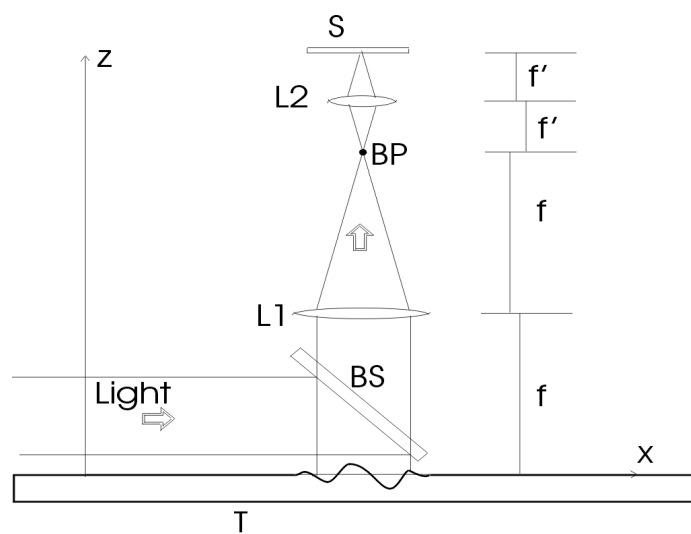


Figura VI- 1. Montaje del método de campo oscuro para observar ondas de superficie.

Poniendo este resultado en VI.3 obtenemos

$$E'(x', y', t) = \frac{\exp(i2kf)}{i\lambda f} E_0 \left[\mathcal{F}\{1\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}} + i\mathcal{F}\{\varphi(x, y, t)\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}} \right], \quad (\text{VI.5})$$

que efectuando la transformada de Fourier de la unidad nos da

$$E'(x', y', t) = \frac{\exp(i2kf)}{i} E_0 \delta(x', y') + \frac{\exp(i2kf)}{\lambda f} E_0 \mathcal{F}\{\varphi(x, y, t)\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}}. \quad (\text{VI.6})$$

El primer término del segundo miembro de VI.6 nos dice que en el foco ($x' = y' = 0$) de la lente L1 incide el orden cero de la luz difractada por la lente, la cual no aporta información alguna de las modulaciones en la fase. En cambio, el segundo término no es nulo solamente si $\varphi \neq 0$, y es el que trae información de las variaciones en la fase.

La esencia del método del campo oscuro reside en eliminar el orden cero en el plano focal $z = 2f$ de la lente L1 de la figura VI- 1, dejando pasar sólo el segundo término del segundo miembro de la ecuación VI.6. Esto se logra introduciendo un punto opaco BP en el foco de la lente, de diámetro apenas suficiente como para eliminar el círculo principal de difracción producido por la abertura finita de L1.

El campo óptico inmediatamente a continuación de este punto opaco será entonces

$$E'_2(x', y', t) = \frac{\exp(i2kf)}{\lambda f} E_0 \mathcal{F}\{\varphi(x, y, t)\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}}. \quad (\text{VI.7})$$

Una segunda lente L2, de distancia focal f' , se ubica en la figura VI- 1 para formar una imagen sobre la pantalla S. Si nuevamente cuidamos que el plano focal primario de L2 coincida con el plano $z = 2f$ y el secundario con la pantalla S, obtendremos que el campo óptico sobre esta pantalla será proporcional a la transformada de Fourier del campo de entrada VI.7. Esto es

$$E''(x'', y'', t) = \frac{\exp(i2kf)}{\lambda f} \frac{\exp(i2kf')}{\lambda f'} E_0 \mathcal{F}\left\{ \mathcal{F}\{\varphi(x, y, t)\}_{\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}} \right\}_{\frac{x''}{\lambda f'}, \frac{y''}{\lambda f'}}, \quad (\text{VI.8})$$

donde x'', y'' son las coordenadas de la imagen en el plano de la pantalla S.

Efectuando ambas transformadas de Fourier en VI.8, en aplicación de la definición VI.4, obtenemos el resultado final

$$E''(x'', y'', t) = \frac{f}{f'} \exp[i2k(f + f')] E_0 \varphi\left(-\frac{f}{f'} x'', -\frac{f}{f'} y'', t\right). \quad (\text{VI.9})$$

El cociente $f/f' = M$ es el factor de magnificación del sistema óptico, y los signos negativos indican que la imagen final resulta invertida respecto a la inicial.

Finalmente, como la pantalla o el sensor que esté en su lugar es sensible a la intensidad luminosa, tomamos el cuadrado del módulo de VI.9 promediado en el tiempo, obteniendo

$$I(x'', y'') = M^2 I_0 \left\langle [\varphi(-Mx'', -My'', t)]^2 \right\rangle_t. \quad (\text{VI.10})$$

Apendice VI Método del campo oscuro

La conclusión a que se llega con la expresión VI.10 es que, en cada punto x'', y'' de la imagen sobre S, se obtiene una intensidad luminosa proporcional a la media temporal del cuadrado de la variación de fase que experimenta la luz en el punto $x = -Mx'', y = -My''$ en el plano $z = 0$ sobre la superficie de la placa de la figura VI- 1.

Bibliografia

- [1] L.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum-Press, N.Y. (1970)
- [2] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vols. I y II*. Krieger Publishing Company, 2nd. Edition (1990).
- [3] G. S. Kino, *Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*. Prentice-Hall,(1987).
- [4] G. S. Kino, *Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*. Prentice-Hall,(1987), p.89, ec. 2.2.23.
- [5] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. II*. Krieger Publishing Company, 2nd. Edition (1990), Chap. 10, pp.63-93.
- [6] L.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum-Press, N.Y. (1970), p. 68, Eqs. II.2, II.3.
- [7] L.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum-Press, N.Y. (1970), p. 69, Eqs. II.8, II.9.
- [8] Ros K. Ing and Mathias Fink, "Time recompression of dispersive Lamb waves using a time reversal mirror", 1996 IEEE Ultrasonic Symposium Proceedings.
- [9] Ros K. Ing and Mathias Fink, "Time-Reversed Lamb Waves", IEEE Transactions on UFFC, vol. 45, No. 4, July 1998.
- [10] L.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum-Press, N.Y. (1970), pp. 83-92.
- [11] D.N. Alleyne and P. Cawley, "Optimization of Lamb wave inspection techniques", NDT & E International, Vol. 25 No. 1, 1992.
- [12] J. J. Ditri and J. L. Rose, "Excitation of Guided Waves in Generally Anisotropic Layers Using Finite Sources", Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, June 1994, pp. 330-338.
- [13] I. Núñez, R. K. Ing, C. Negreira and M. Fink, "Transfer and Green functions based in modal analysis for Lamb waves generation", J.A.S.A., May 2000, Vol. 107, Issue 5, pp. 2370-2378.
- [14] D. Royer, E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides*. Tomo 2. Masson, Paris 1999, pp. 193-208.
- [15] B. A. Auld and G.S. Kino, "Normal Mode Theory for Acoustic Waves and its Application to the Interdigital Transducer", IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. ED-18, No. 10, October 1971, pp.898-908.
- [16] X. Jia, "Modal Analysis of Lamb wave generation in elastic plates by liquid wedge transducers", J. Acoust. Soc. Am. 101, pp., 834-842, 1997.
- [17] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. II*. Krieger Publishing Company, 2nd. Edition (1990), p. 161, ec. 10.132.
- [18] D.N. Alleyne and P. Cawley, "A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 89, pp. 1159-1168, 1991.
- [19] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. II*. Krieger Publishing Company, 2nd. Edition (1990), p. 155, ec. 10.113.

Apendice VI Método del campo oscuro

- [20] D. Royer and E. Dieulesaint, "Optical detection of sub-Angstrom transient mechanical displacements", 1986 Ultrasonics Symposium, pp. 527-530.
- [21] D. Royer and E. Dieulesaint, "Mesures optiques de déplacements d'amplitude 10^{-4} à 10^2 Angström. Application aux ondes élastiques", Revue de Physique Appliquée, No. 24, 1989, pp. 833-846.
- [22] I. Núñez and C. Negreira, "Avoiding diffraction grid effects en 1-3 PZT polymer transducers", IEEE Transactions on UFFC, Vol. 46, No. 2, March 1999, pp. 595-598.
- [23] H. Gomez, C. Negreira, N. Pérez, I. Núñez, J. Eiras, "Lateral Modes and Diffracted Field Behaviour in Non-Periodical 1-3 Piezocomposite Transducers", 1998 IEEE International Ultrasonic Symposium Proceedings.
- [24] I. Núñez and C. Negreira, "Optical Detetction of Evanescent Ultrasound Waves in Water", IEEE Transactions on UFFC. Vol. 45, No.2, March 1998, pp. 511-519.
- [25] I. Núñez, C. Negreira and J. Ferrari, "Acoustic Field Imaging by Light Reflection at the Free Surface of a Liquid", Ultrasonics, Vol. 35 (1998), pp. 595-598.
- [26] K. Iizuka, *Engineering Optics*, Springer-Verlag, 2nd. Edition, 1987
- [27] V. M. Ristic, *Principles of Acoustic Devices*, Wiley, New York, 1983.
- [28] M. Fink, "Time Reversed Acoustics", Physics Today, Vol. 50, No.3, March 1997, pp. 34-40.
- [29] M. Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part I: Basic Principles", IEEE Transactions on UFFC. Vol. 39, No.5, September 1992, pp. 555-566.
- [30] F. Wu, J-L. Thomas, and M. Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part II: Experimental Results", IEEE Transactions on UFFC. Vol. 39, No.5, September 1992, pp. 567-578.
- [31] D. Cassereau and M. Fink, "Time Reversal of Ultrasonic Fields - Part III: Theory of the Closed Time-Reversal Cavity", IEEE Transactions on UFFC. Vol. 39, No.5, September 1992, pp. 579-592.
- [32] D. Cassereau and M. Fink, "Focusing with plane time-reversal mirrors: An efficient alternative to closed cavities", J. Acoust. Soc. Am. 94 (4), October 1993, pp. 2373-2386.
- [33] L.A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum-Press, N.Y. (1970), Cap. 2, Párrafo 8, pp. 103-109.
- [34] B.F. Pouet, R.K. Ing, S. Krishnaswamy, D. Rpyer, "Heterodyne interferometre with two-wave mixing in photorefractive crystals for ultrasound detection on rough surfaces." Appl. Phys. Lett. 69 (1996), pp. 3782-