Tesis de la Maestría en Física

Ecuaciones de Campo del Modelo gauged Wess-Zumino-Witten y Posibles Soluciones en Dos Dimensiones

Pablo S. Pais

30 de septiembre de 2011

Orientador: Dr. Pablo Mora Merigo

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

Por varias razones, entre ellas la búsqueda de una teoría cuántica consistente de la gravitación y la posible resolución de los problemas de la Energía Oscura y de la Materia Oscura, se han estudiado durante los últimos años modelos de gravedad clásica modificada. Las gravedades construidas con acciones que son formas de Chern-Simons y de transgresión entran dentro de esta categoría y tienen propiedades interesantes como ser invariantes gauge bajo un cierto grupo, una característica bienvenida para su cuantización. Una de las principales desventajas de estas teorías es que están definidas en dimensiones impares. Los modelos gauged Wess-Zumino-Witten pueden verse como un caso particular de acciones de transgresión y permiten obtener una teoría de gravedad en dimensiones pares. En este trabajo, se obtienen las ecuaciones de campo genéricas de estas teorías y se estudia como primer acercamiento el caso de $1+1$ dimensiones y grupo de simetría $SO(2,1)$ con soluciones de agujero negro.

Agradecimientos

Son muchas las personas que me ayudaron a concluir este trabajo, y quizás no esté siendo del todo justo con todas al plasmar los agradecimientos en palabras. Primero que nada quiero agradecer a Pablo Mora, que además de ser mi orientador y haberme tenido toda la paciencia para contestar mis dudas (que no fueron pocas), lo considero un amigo. También tengo que agradecer a Steven Willison por haber sido parte muy importante en el desarrollo del trabajo con todas las conversaciones y cuentas delante del pizarrón en mi viaje a Valdivia y en sus viajes a Montevideo. Le debo toda mi gratitud a Jorge Zanelli por valiosos comentarios tanto en mi estadía en Valdivia como electrónicamente. Quiero agradecer también a Rodolfo Gambini, Michael Reisenberger y Miguel Paternain por haber integrado el tribunal y hacerme preguntas y comentarios sobre el trabajo.

A Marcela por ayudarme y bancarme en momentos complicados como todo trabajo de tesis tiene, ya sea en alguna cena, alguna merienda o alguna salida. A Sofía por todas las clases que me cubrió y que todavía no pude pagárselas y por los intercambios de opiniones de nuestras respectivas tesis incluso aguantando alguna de mis explicaciones de parte de la Física que no es de su interés. A Magdalena por todos los momentos compartidos, por discusiones de la vida que son muy disfrutables. A Luis Pedro por todas las conversaciones delirantes como compañeros de oficina. A César, Saeed y Sebastián por esas charlas en la merienda. A Lucía por las horas de estudio compartidas para cursos no fáciles. A Ana por todos los videos musicales intercambiados y brindarnos fiestas de distracción.

Por último, y no menos importante, quiero agradecer a mi familia que siempre me dieron su apoyo para que siguiera haciendo lo que más me gusta. A mi mamá y mi papá, a mis hermanos Germán y Santiago.

Quiero también agradecer a la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) por el apoyo económico brindado para concluir esta Tesis de Maestría.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El tener un marco teórico en el cual puedan conciliarse las cuatro interacciones fundamentales conocidas hasta este momento es uno de los desafíos más importantes que se propuso lo Física Teórica en estos tiempos[1]. Tres de estas cuatro interacciones, la interacción electromagnética y la nuclear fuerte y débil, pueden describirse dentro de un marco teórico más o menos probado: el Modelo Estándar[2]. El modelo Estándar está descripto dentro de la Mecánica Cuántica y la interacción de la gravedad lo está por la Relatividad General. De hecho, en Relatividad General, la gravedad no es realmente una fuerza sino una consecuencia de la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de energía como se verá en el capítulo 3. Tanto la Mecánica Cuántica como la Relatividad General nacieron a principios del siglo XX y cambiaron en profundidad la forma en la que el ser humano comprende al Universo. Ambas teorías están probadas con un grado espectacular de exactitud en diferentes experimentos llevados a cabo a lo largo de décadas. La Mecánica Cuántica en lo que refiere a procesos del microcosmos como física atómica y de partículas, mientras que la Relatividad General en lo que refiere al macrocosmos, es decir el Sistema Solar, centro de galaxias o estrellas de neutrones. Sin embargo, a pesar de existir algunos candidatos como algunas Teorías de Supercuerdas [1, 2] y la Teoría Cuántica de Lazos [3, 4], no existe hasta el momento una teoría que contenga de manera consistente la Relatividad General, que describe los fenómenos gravitatorios, con la Mecánica Cuántica, el marco que describe el Modelo Estándar y, por lo tanto, las otras tres interacciones.

El Modelo Estándar es un caso particular de una teoría invariante gauge. Éste se construye a partir de una acción de Yang-Mills, es decir, a partir de una estructura de fibrado invariante bajo un cierto grupo de simetría local, ver capítulo 4. El que una teoría sea invariante gauge, limita la cantidad de posibles acciones candidatas

[1]Este objetivo no es nuevo en realidad ya que desde que Einstein publicó sus ecuaciones para describir los fenómenos gravitatorios en 1915, ya se había intentado unificar de manera clásica esta teoría con las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

[2]Si bien todavía queda por descubrir el bosón de Higgs, que es uno de los objetivos del Gran Colisionador de Hadrones, LHC con sus siglas en inglés.

para describir la misma, ya que los términos del lagrangiano deben tener una forma predeterminada. Esto hace la vida más fácil a la hora de corroborar las acciones que puedan pasar el test experimental. Además de tener esa ventaja, las teorías gauge permiten evadir infinitos mediante la renormalización, es decir, redefiniendo los parámetros y la normalización de los campos que aparecen en el lagrangiano, para ´absorver´ los infinitos, de modo que los procesos calculados dan un resultado finito al orden deseado en la teoría de perturbaciones. Esta consistencia es una de las razones principales del éxito alcanzado por el Modelo Estándar, además de su poder predictivo y su precisión corroborada en los colisionadores de partículas.

Relatividad General parece ser la única teoría de gravedad consistente con el principio de que la física debe ser insensible a cambios de observadores, lo que se traduce a que es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Éstas son transformaciones locales pero no son transformaciones gauge. A decir verdad, la gravedad no ha podido de descripta por una acción de Yang-Mills por lo que es susceptible a que ocurran problemas de infinitos cuando uno calcula procesos que involucran gravitones[3]. Es frustrante que una de las cuatro interacciones que se considera fundamental no pueda describirse desde un punto de vista cuántico y es por esto una de las motivaciones para encontrar una Teoría Cuántica de la Gravedad. Además de esta motivación más fundamental, existen otras más aplicadas. Se necesitaría tener una Teoría Cuántica de la Gravedad para saber qué sucedió al comienzo del Universo o tener una descripción detallada de qué sucede en la singularidad de un agujero negro.

La razón fundamental por la que la Relatividad General no es una teoría con simetría gauge es que al variar la acción bajo traslaciones espacio-temporales, que es generalizar el grupo de Lorentz al grupo de Poincaré[4] ésta cambia por un término que se anula solamente cuando valen las ecuaciones de campo, es decir es una simetría *on-shell*. Ya que la Mecánica Cuántica no respeta ecuaciones de campo en general, es difícil que esta simetría resista al proceso de cuantización. Existe, sin embargo, una excepción en donde puede describirse una teoría de gravedad como una teoría con simetría gauge. Este es el caso de un espacio-tiempo de dimensión $2 + 1$ (dos dimensiones espaciales y una dimensión temporal) en donde las traslaciones sí pueden verse como una simetría gauge, ver sección 5.2.2.

Este 'accidente' en dimensión $D = 3$ puede generalizarse para dimensiones impares solamente. Esto es porque en estas dimensiones puede construirse una acción, a partir de una forma de Chern-Simons por ejemplo [5], cuya variación bajo un grupo de simetría local que contiene las traslaciones (grupo de-Sitter o anti-de-Sitter) es localmente una derivada total, como se verá en la sección 5.2.3. Si el lagrangiano se construye a partir de una forma de transgresión, que es una generalización de una forma de Chern-Simons, la acción es estrictamente invariante gauge. Esto permite tener un principio variacional bien definido, de modo que la acción es un extremo

[3]Un gravitón es la hipotética partícula mediadora de la interacción gravitatoria que resultaría del proceso de cuantización.

[4]que es el grupo estándar de simetría en Física de Partículas.

cuando valen las ecuaciones de campo, y una buena definición de las cargas conservadas, lo que lleva, a su vez, a una buena definición de las variables termodinámicas de un agujero negro [6, 7]. Más allá de que Teorías de Supercuerdas postulan un espacio-tiempo de dimensión $D = 10$ o $D = 11$ [1], actualmente se tiene evidencia de solamente cuatro dimensiones, por lo que sería conveniente tener algún proceso de reducción dimensional que pueda conservar estas simetrías de las dimensiones impares originales.

Un proceso de reducción dimensional alternativo al convencional de Kaluza-Klein [8, 9] es utilizar un modelo llamado gauged-Wess-Zumino-Witten (gWZW)[10, 11], postulado originalmente en el contexto de anomalías en Teoría Cuántica de Campos. El modelo fue explorado para utilizarse como teoría gravitatoria utilizando grupos de simetría espacio-temporales [12, 13]. Básicamente, puede pensarse como una acción a partir de una transgresión donde las dos conexiones 1-formas $\mathcal{A}$ y $\bar{\mathcal{A}}$ que la definen están relacionadas vía una transformación de un grupo espacio-temporal, como el $SO(4,2)$ por ejemplo. Con este grupo, partiendo de una variedad de dimensión seis o cinco (dependiendo el contexto) y utilizando unos ansatz particulares, puede reducirse dimensionalmente a una teoría en cuatro dimensiones dando como resultado Relatividad General más otros términos.

En este trabajo, se pretende investigar un poco más el modelo gWZW desde el punto de vista de sus ecuaciones de campo. Por esto, además de mostrarse las ecuaciones de campo para el modelo gWZW en dimensión arbitraria en la sección 6.2, se deducen las ecuaciones de campo explícitamente para dos grupos de simetría: el grupo $SU(2)$ y el grupo espacio-temporal $SO(2,1)$ en las secciones 6.3.1 y 6.3.2, respectivamente. Ya se ha estudiado la posibilidad de reducción dimensional para tener una teoría en $D = 2$ como modelo de juguete [13], y aquí se muestra un ansatz particular que pueda simplificar la resolución de las ecuaciones de campo. Dentro de éstas soluciones particulares para el caso del grupo $SO(2,1)$, se encuentra que una tiene una interpretación de agujero negro en dimensión $1 + 1$.

La termodinámica de un agujero negro ha mostrado ser de gran importancia tanto para entender la física de un modelo de gravedad como para entender temas más fundamentales como la Teoría de la Información. Es por esto que se calcula, mediante la aproximación del punto de silla, en la sección 7.3 la temperatura, entropía y masa de la solución de agujero negro, siendo la masa calculada también por teorema de Noether en la sección 7.2. Sorprendentemente, al menos en principio, tanto la masa como la entropía dan nulas con los métodos utilizados aquí. Este resultado tendría una explicación, no definitiva por cierto, en la propia acción del modelo gWZW y en el tipo de soluciones particular que representa este agujero negro mostrado.

El plan de trabajo empieza en el capítulo 2 donde se introducirán los conceptos de variedades y formas diferenciales. Luego en capítulo 3 se hace una introducción a la Relatividad General de Einstein y se muestra una solución de agujero negro en dimensión cuatro. En el capítulo 4 se introduce la noción física de teorías gauge y el fundamento matemático da las mismas a partir de fibrados. Estos tres primeros capítulos, si bien no intentan ser exhaustivos en los temas tratados por cada uno, son bastante extensos por dos razones: la primera para introducir y justificar la notación utilizada en el resto del trabajo, y la segunda para la comprensión del texto para quienes no han tenido un curso introductorio en estos temas. En el capítulo 5 se muestra cómo puede generalizarse la teoría de gravedad de Einstein a dimensiones arbitrarias a partir de las acciones de Lanczos-Lovelock. Allí se ve también cómo puede verse la gravedad en $D = 3$ como una teoría gauge y cómo puede generalizarse esto a dimensiones impares utilizando acciones a partir de formas de Chern-Simons y formas de transgresión. En el capítulo 6 se muestra el modelo gWZW como un caso particular de una acción a partir de una forma de transgresión y cómo define una teoría en dimensión par. Allí se deducen las ecuaciones de campo para dimensión genérica y se estudian en detalle las ecuaciones para el caso de grupo de simetría $SU(2)$ y, sobre todo, $SO(2,1)$. El capítulo 7 estudia una solución particular del modelo gWZW en $D = 2$ con grupo de simetría $SO(2,1)$. Se calcula allí, después de describir brevemente el método de aproximación del punto de silla, la masa, temperatura y entropía del agujero negro por este método. Como se mencionó arriba, los resultados de masa y entropía nula son sorprendentes en un principio por lo que al final de este capítulo hay una discusión para justificar este resultado. Las conclusiones y los posibles trabajos a futuro se encuentran en el capítulo 8. Los apéndices A-E muestran cálculos o descripciones más detalladas de ciertos resultados utilizados en el texto.

Capítulo 2

Geometría de Variedades y Formas Diferenciales

En este capítulo se van a introducir los conceptos y nomenclaturas básicas referentes a variedades y formas diferenciales que serán utilizados en el resto del trabajo. El mismo no pretende ser ni exhaustivo ni riguroso ya que existe numerosa y muy buena bibliografía, algunas de las cuales serán citadas en el transcurso del capítulo. La estructura más general con la que se va a trabajar es el *espacio topológico*. Se suele pensar que los espacios más generales en los cuales trabajan los físicos son espacios métricos pero esto no es así. De hecho, los espacios métricos son un caso particular de las *variedades* y éstas, a su vez, son un caso particular de los espacios topológicos. Existe abundante bibliografía acerca de topología[1] como [14], [15] y [16], sólo por mencionar algunos.

2.1. Variedades Diferenciables

En esta sección se expondrán nociones básicas referentes a *variedades diferenciables*. El contenido de esta sección sigue principalmente [16] y [17]. Desde un punto de vista intuitivo, podemos decir que una variedad diferencial es un espacio topológico *localmente homeomorfo*[2] a $\mathbb{R}^m$. Es importante la aclaración que el homeomorfismo es local ya que puede suceder que dos variedades sean localmente homeomorfas y, sin embargo, no lo sean globalmente. Un ejemplo de esto es la esfera S^2 inmersa en $\mathbb{R}^3$, que es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^2$ pero no globalmente ya que S^2 es compacto y $\mathbb{R}^2$ no lo es. Este homeomorfismo local entre una variedad y $\mathbb{R}^m$ permite asignar a cada punto de la variedad un conjunto de m números llamados *coordenadas locales*.

[1] La Topología es la rama de la matemática que se encarga del estudio de los espacios topológicos y las propiedades topológicas (propiedades que no cambian por *homeomorfismos*).

[2] Sean dos espacios topológicos X e Y. Una función $f : X \to Y$ se dice que es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y con inversa continua. Si existe un homeomorfismo entre X e Y, entonces los espacios son homeomorfos. El homeomorfismo $f : X \to Y$ es local cuando $\forall x \in X$, $\exists U$ abierto tal que $x \in U$ y $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo entre U y $f(U)$.

Si la variedad no es globalmente homeomorfa a $\mathbb{R}^m$, entonces se deberán introducir varias coordenadas locales. Por lo tanto, es posible que a un punto de la variedad le correspondan varias coordenadas locales. Se requiere que la transición de una coordenada a otra sea *suave*.

Definición **2.1** M es una **variedad diferenciable m-dimensional** si [16]

(I) M es un espacio topológico

(II) M tiene una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$, donde $\{U_i\}$ es una familia de abiertos que cubren M, o sea, $\bigcup_i U_i = M$. φ_i es un homeomorfismo de U_i a un abierto de U_i' de $\mathbb{R}^m$

(III) Dados U_i y U_j tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es C^∞ (infinitamente diferenciable).

Al par (U_i, φ_i) se llama **carta** mientras que toda la familia $\{U_i, \varphi_i)$ se llama **atlas**. A los abiertos U_i se los denominan **entorno coordenado**, mientras que a las funciones φ_i se las denomina **función de las coordenadas** o simplemente **coordenadas**. Las φ_i son representadas por m funciones $\{x^1(p), \ldots, x^m(p)\}$ y a esta familia también se la denomina **coordenada** del punto p. Generalmente se denomina x para referir al punto cuyas coordenadas son $\{x^1, \ldots, x^m\}$ a menos que se usen varios sistemas de coordenadas. De (II) de la definición 2.1, se puede decir que M es localmente euclídea. En cada entorno de coordenadas U_i, M se ve como un abierto de $\mathbb{R}^m$ cuyos elementos son $\{x^1, \ldots, x^m\}$.

Si U_i y U_j son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces dos sistemas de coordenadas son asignados a un punto $p \in U_i \cap U_j$, entonces (III) de la definición 2.1 asegura que la transición de un sistema de coordenadas a otro es suave (C^∞). El mapa φ_i asigna m valores $x^\mu (1 \leqslant \mu \leqslant m)$ a un punto $p \in U_i \cap U_j$, mientras φ_j asigna $y^\mu (1 \leqslant \mu \leqslant m)$ al mismo punto p y siendo la transición de x a y como $x^\mu = x^\mu(y)$, dada por m funciones de m variables. La transformación de coordenadas $x^\mu = x^\mu(y)$ es la forma explícita del mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$. Entonces, la diferenciabilidad queda definida en el sentido usual de cálculo en $\mathbb{R}^m$: la transformación de coordenadas es diferenciable si cada función $x^\mu(y)$ es diferenciable respecto a cada variable y^ν. De esta manera, se han asignado a M coordenadas de manera tal que si uno se mueve sobre M de manera arbitraria, las coordenadas usadas variarán de manera suave.
Si la unión de dos atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(U_j, \phi_j)\}$ es otra vez un atlas, entonces esos dos atlas se dicen que son **compatibles**. La compatibilidad es una relación de equivalencia y estas clases de equivalencia reciben el nombre de **estructura diferenciable**. Se dice también que dos atlas mutuamente compatibles definen la misma estructura diferenciable en M.
Se puede considerar también variedades con borde. Si un espacio topológico M puede ser cubierto por una familia de abiertos U_i, siendo cada U_i homeomorfo a a un abierto del conjunto $\mathbb{H}^m = \{(x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m | x^m \geqslant 0\}$, M se dice que es una **variedad con borde**.

2.1.1. Vectores y Tensores en Variedades

Sea $f : M \to N$ un mapa de una variedad M de dimensión m a otra variedad N de dimensión n. Si se toma en $p \in M$, una carta (U, φ) y sobre N la carta (V, ϕ) tal que $p \in U$ y $f(p) \in V$, entonces se obtendrá la siguiente representación de coordenadas

$$\phi f \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Si se escribe $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ y $\phi(f(p)) = \{y^\nu\}$, $y = \phi\ f\varphi^{-1}$ es una función vector-valuada de m variables. Si $y = \phi f \varphi^{-1}(x)$, o simplemente $y^\nu = f^\nu(x^\mu)$, es C^∞ respecto a cada x^μ se dice que f es **diferenciable** en p o en $x = \varphi(p)$. Uno puede probar, usando la definición 2.1, que la diferenciabilidad de f es independiente del sistema de coordenadas escogido tanto para la variedad M como para la variedad N.

Definición **2.2** Si $\phi f \varphi^{-1}$ es C^∞, invertible y su inversa también C^∞ entonces f es un **difeomorfismo** y se dice que M es difeomorfa a N y viceversa, denotado por $M \cong N$. f se dice que es un **difeomorfismo local** si $\forall p \in M$, $\exists\ U, V$ abiertos tales que $p \in U \subset M$ y $f(p) \in V \subset N$ con $f : U \to V$ un difeomorfismo.

De las definiciones 2.1 y 2.2 se puede observar que una variedad diferenciable m-dimensional es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^m$. El conjunto de difeomorfismos $f : M \to M$ es un grupo denotado por $Dif(M)$. Si se toma un punto p en una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) = x^\mu(p)$ y bajo $f \in Dif(M)$, p se mapea a $f(p) \in U$ cuyas coordenadas serán $\varphi(f(p)) = y^\mu(f(p))$ entonces y es una función diferenciable de x. Este es el llamado punto de vista *activo* de una transformación de coordenadas. Si, por otro lado, (U, φ) y (V, ϕ) son cartas que se solapan y $p \in U \cap V$ entonces el mapa $x \mapsto y$ es diferenciable por III de la definición 2.1; este es el llamado punto de vista *pasivo* de la transformación de coordenadas. Se definirá ahora dos mapas especiales que son la *curva* y la *función*.

Definición **2.3** Sea M una variedad diferenciable m-dimensional

(1) Una **curva abierta** es un mapa $c : (a, b) \to M$, donde $(a, b) \in \mathbb{R}$ es un intervalo abierto tal que $a < 0 < b$, donde se ha incluido el 0 por conveniencia y a (b) puede ser $-\infty$ ($+\infty$). En una carta (U, φ), una curva $c(t)$, $t \in (a, b)$ tiene una representación en coordenadas como $x = \varphi c : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}^m$. Si el mapa es $c : S^1 \to M$ se dice que es una **curva cerrada**.

(2) Una **función** f es un mapa $f : M \to \mathbb{R}$, donde en una carta (U, φ) la representación coordenada de f está dada por $f\varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la cual es una función real de m variables. El conjunto de funciones suaves en M se denota por $\mathcal{F}(M)$.

Habiendo definido curva y función en una variedad M, se puede definir el concepto de vectores tangentes en dicha variedad. Sea una curva $c : (a, b) \to M$ con

$a < 0 < b$ y una función $f : M \to \mathbb{R}$. La tasa de cambio de $f(c(t))$ en $t = 0$ a lo largo de la curva es

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \tag{2.1}$$

En términos de coordenadas locales, esto es

$$\left.(\partial f/\partial x^\mu)(dx^\mu(c(t))/dt)\right|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Por lo tanto, $df(c(t))/dt$ en $t = 0$ se obtiene aplicando el operador diferencial X a f, donde

$$X = X^\mu(\partial/\partial x^\mu), \quad \text{con} \quad X^\mu = \left.\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right|_{t=0} \tag{2.3}$$

Entonces,

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = X^\mu(\partial f/\partial x^\mu) \equiv X[f]. \tag{2.4}$$

Definimos a $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ como **vector tangente** a M en $p = c(0)$ en la dirección dada por la curva $c(t)$. En realidad, lo que se hace es definir una relación equivalencia de curvas en M de la forma

(I) $c_1(0) = c_2(0) = p$

(II) $\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt}|_{t=0}$

y, entonces, curvas que se encuentran en la misma clase de equivalencia definen el mismo operador diferencial X.

Todas las clases de esta relación de equivalencia de curvas en $p \in M$, es decir todos los vectores tangentes en p, forman un espacio vectorial llamado **espacio tangente** de M en el punto p, denotado por T_pM y siendo $e_\mu = \{\partial/\partial x^\mu\}$ una base de este espacio vectorial llamada **base coordenada**. Un vector $V \in T_pM$ se escribe $V = V^\mu e_\mu$ y es independiente del sistema de coordenadas elegido. Esta independencia permite encontrar la transformación de las componentes del vector. Sea $p \in U_i \cap U_j$, $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$. Así se tiene para $X \in T_pM$,

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \widetilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

Esto muestra, usando la regla de la cadena, que

$$\widetilde{X}^\mu = X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{2.5}$$

Por supuesto que la base de T_pM no tiene por qué ser e_μ, sino que puede ser cualquier combinación $f_i = A_i^\mu e_\mu$, donde $A = A_i^\mu$ es una matriz invertible, o sea $A \in GL(m, \mathbb{R})$. A las bases tipo $\{f_i\}$ se las llama **bases no-coordenadas**.

Ahora, siendo T_pM un espacio vectorial uno puede considerar su espacio dual, es decir el espacio de las funcionales[3], que los físicos llaman **espacio cotangente** en p, denotado por T_p^*M. A un elemento $\omega \in T_p^*M$ se le llama **vector dual**, **vector cotangente** o **uno-forma**. Un ejemplo de una uno-forma es la diferencial de una función $f \in \mathcal{F}(M)$. La acción de un vector V en f es $V[f] = V^\mu(\partial f/\partial x^\mu) \in \mathbb{R}$, entonces la acción de $df \in T_p^*M$ sobre $V \in T_pM$ es

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}.$$

En las coordenadas $x = \varphi(p)$, se tiene una expresión para df como $df = (\partial f/\partial x^\mu)dx^\mu$. Por lo tanto, es natural tomar $\{dx^\mu\}$ como una base de T_p^*M, teniendo

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Una uno-forma ω arbitraria se puede escribir como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu,$$

siendo ω_μ las componentes de ω. Al igual que se hizo para los vectores, se pueden deducir las transformaciones de componentes de ω de un sistema de coordenadas a otro. Para un punto $p \in U_i \cap U_j$,

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \widetilde{\omega}_\nu dy^\nu,$$

con $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$. Utilizando el cambio $dx^\mu = (\partial x^\mu)/\partial y^\nu)dy^\nu$ se tiene

$$\widetilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \tag{2.6}$$

Con esto, uno puede definir un producto interno $\langle,\rangle : T_p^*M \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ definido como

$$\langle \omega, V\rangle = \omega_\mu V^\mu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\rangle = \omega_\mu V^\mu. \tag{2.7}$$

Hay que notar que este producto interno está definido entre un vector y un vector dual y no entre dos vectores. Para definir un producto entre dos vectores se necesita introducir una métrica a la variedad, cosa que se hará en la sección 2.3.

Así como el producto interno es un objeto bilineal que asigna a una uno-forma y a un vector un real, se pueden pensar objetos multilineales que asignen a q elementos de T_p^*M y a r elementos de T_pM un real. Estos objetos se llaman **tensores** de tipo (q, r) y el conjunto de los tensores de tipo (q, r) en $p \in M$ se denotan como $\mathcal{T}^q_{r,p}$. Tomando las bases $\{dx^\mu\}$ para T_pM y $\{\partial/\partial x^\mu\}$ para T_pM, un elemento de $\mathcal{T}^q_{r,p}(M)$ se escribe como

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \ldots dx^{\nu_r}, \tag{2.8}$$

[3]Dado un espacio vectorial V, a las funciones $f : V \to \mathbb{R}$ se las llama funcionales de V y uno puede demostrar que este espacio es, a su vez, un espacio vectorial.

siendo $T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}$ las componentes de T en esta base.

Si se define una función $X : M \to T_pM$ que asigne a cada punto $p \in M$ un vector $X \in T_pM$ y si a esa función uno le asigna suavidad sobre cada punto p, es decir las coordenadas de $X^\mu(p)$ varían suavemente al variar el punto p, entonces esto define un **campo vectorial** sobre M. Esto es, $V : M \to T_pM$ es un campo vectorial en M si $V[f] \in \mathcal{F}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$. Se puede definir de manera análoga un **campo tensorial** sobre M pidiendo que las componentes de $T \in \mathcal{T}^q_{r,p}(M)$ varíen suavemente al variar el punto p, y al conjunto de campos tensoriales de tipo (q, r) sobre M se los denota como $\mathcal{T}^q_r(M)$. Así, un campo vectorial dual se denota $\mathcal{T}^0_1(M)$ y se cumple también que $\mathcal{T}^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$.

2.1.2. Mapa Diferencial y Pullback

Un mapa $f : M \to N$ induce naturalmente un mapa $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ llamado **mapa diferencial** y se puede definir de la siguiente manera [16]. Si $g \in \mathcal{F}(N)$, entonces $gf \in \mathcal{F}(M)$ y un vector $V \in T_p(M)$ actúa sobre gf para dar un número $V[gf]$. Se define $f_*V \in T_{f(p)}N$ por

$$(f_*V)[g] \equiv V[gf].$$

En términos de cartas (U, φ) en M y (V, ϕ) en N,

$$(f_*V)[g\phi^{-1}(y)] \equiv V[gf\varphi^{-1}(x)], \tag{2.9}$$

donde $x = \varphi(p)$ e $y = \phi(f(p))$. Sea $V = V^\mu\partial/\partial x^\mu$ y $f_*V = W^\nu\partial/\partial y^\nu$. Entonces (2.9) dice

$$W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}[g\phi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[gf\varphi^{-1}(x)].$$

Si se toma $g = y^\nu$, se tiene

$$W^\nu = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\nu(x) \tag{2.10}$$

El mapa diferencial se puede extender naturalmente a tensores de tipo $(q, 0)$. El mapa $f : M \to N$ también induce un mapa $f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$, llamado **pullback**. Sean $V \in T_p(M)$ y $\omega \in T^*_{f(p)}N$, el pullback f^* de ω es

$$\langle f^*\omega, V\rangle = \langle \omega, f_*V\rangle.$$

Si $\omega = \omega_\nu dy^\nu \in T^*_{f(p)}N$ y $f^*\omega = \xi_\mu dx^\mu \in T^*_pM$ es

$$\xi_\mu = \omega_\nu\partial y^\nu/\partial x^\mu. \tag{2.11}$$

El pullback se puede extender a tensores de tipo $(0, r)$ de manera natural.

Habiendo introducido el mapa diferencial uno puede definir formalmente la noción de una variedad inmersa en otra variedad.

Definición **2.4** Sean M y N variedades diferenciables con $dim(M) \leq dim(N)$. Un mapa diferenciable $f : M \to N$ se dice que es una **inmersión** si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$. Si, además, f es un homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$ entonces f es un **embedding**. Si f es un embedding, a la imagen $f(M)$ se la llama **sub-variedad** de N.

2.2. Formas Diferenciales

Las formas diferenciales es la herramienta utilizada para desarrollar el **cálculo exterior**. Éste, es un formalismo matemático potente que permite no solamente escribir los tensores con una menor cantidad de índices, sino que hace más explicita la independencia de ciertos objetos respecto a un cambio general de coordenadas, ya que en este formalismo se trabaja con independencia de un sistema de coordenadas particular. Estas características son compatibles con la Relatividad General y, por ello, no es de extrañar que el cálculo exterior resulte de gran utilidad para describirla.

Dado un elemento $\omega \in \mathcal{T}^0_r$, se puede definir una operación sobre ω de la siguiente manera

$$P\omega(V_1, \ldots, V_r) = \omega V_{P(1)}, \ldots, V_{P(r)},$$

donde $V_i \in T_pM$, $P \in S_r$, el **grupo de simetría** de orden r[4]. Se dice que ω es **totalmente anti-simétrico** si $P\omega = Sg(P)\omega$, donde $Sg(P)$ es el signo de la permutación P ($+1$ si ésta es par y -1 si es impar). Se dice también que ω es **totalmente simétrico** cuando $P\omega = \omega$. Ahora se puede definir una forma diferencial

Definición **2.5** Una **forma diferencial** o una r-forma es un tensor de tipo $(0, r)$ totalmente anti-simétrico.

Se puede definir el **producto cuña** de r uno-formas como el producto tensorial totalmente anti-simétrico de la forma

$$dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \ldots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}. \tag{2.12}$$

Se puede ver que $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$ es lineal en cada entrada, que $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si uno de los índices μ_i aparece al menos dos veces y que $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = sg(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$. El espacio vectorial de formas de orden r en $p \in M$ se denota por $\Omega^r_p(M)$ y el conjunto de r-formas (2.12) forman una base de $\Omega^r_p(M)$. Un elemento $\omega \in \Omega^r_p(M)$ se puede escribir como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r},$$

donde las componentes $\omega_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ son totalmente anti-simétricas.

[4]Para el cometido de esta sección, se puede pensar el grupo de simetría de orden r, S_r, como las permutaciones de una colección ordenada r elementos.

Al igual que los tensores en general, se pueden considerar r-formas suaves en una variedad M, formando un **campo de r-formas**, denotado por $\Omega^r(M)$.

Como se vio anteriormente, $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si se repite algún índice μ_i, entonces uno tiene $\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$ maneras de elegir bases no nulas, por lo tanto $\binom{m}{r}$ es la dimensión del espacio vectorial $\Omega^r_p(M)$. La igualdad $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ hace que $\dim\Omega^r_p(M) = \dim\Omega^{m-r}_p(M)$ y, como son espacios vectoriales de dimensión finita, $\Omega^r_p(M)$ es isomorfo a $\Omega^{m-r}_p(M)$.

Definición **2.6** Sean $\omega \in \Omega^q_p(M)$ y $\xi \in \Omega^r_p(M)$. El **producto exterior** $\wedge : \Omega^q_p(M) \times \Omega^r_p(M) \to \Omega^{q+r}_p(M)$ está definido por

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \ldots, V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \subset S_{q+r}} Sg(P)\omega(V_{P(1)}, \ldots, V_{P(q)})\xi(V_{P(q+1)}, \ldots, V_{P(r)}),$$

donde $V_i \in T_pM$.

El producto exterior tiene una serie de propiedades que conviene destacar

Propiedad **2.1** Sean $\xi \in \Omega^q(M)$, $\eta \in \Omega^r(M)$ y $\omega \in \Omega^s(M)$. Se cumple entonces

(i) $\xi \wedge \xi = 0$ si q es impar

(ii) $\xi \wedge \eta = (-1)^{qr}\eta \wedge \xi$

(iii) $(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \omega)$ (asociatividad).

La diferenciabilidad es otra operación importante en lo que respecta a formas diferenciales, es por eso que conviene introducir ahora dicha operación.

Definición **2.7** Sea $\omega \in \Omega^r(M)$ que se expresa en la base de r-formas como $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$. La **derivada exterior** d_r es un mapa $d_r : \Omega^r \to \Omega^{r+1}$ que se define como

$$d_r\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}. \qquad (2.13)$$

Utilizando el lenguaje de formas diferenciales, uno puede escribir las operaciones usuales del cálculo vectorial [16]. Si tomamos las formas diferenciales definidas en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$

(i) $\omega_0 = f(x, y, z)$

(ii) $\omega_1 = \omega_x(x, y, z)dx + \omega_y(x, y, z)dy + \omega_z(x, y, z)dz$

(iii) $\omega_2 = \omega_{xy}(x, y, z)dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z)dy \wedge dz + \omega_{yz}(x, y, z)dy \wedge dz$

(iv) $\omega_3 = \omega_{xyz}(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz.$

Sus derivadas exteriores correspondientes serían

(I) $d\omega_0 = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial z)dz$

(II) $d\omega_1 = (\partial\omega_y/\partial x - \partial\omega_x/\partial y)\, dx\wedge dy + (\partial\omega_z/\partial y - \partial\omega_y/\partial z)\, dy\wedge dz + (\partial\omega_x/\partial z - \partial\omega_z/\partial x)\, dz\wedge dx$

(III) $d\omega_2 = (\partial\omega_{yz}/\partial x + \partial\omega_{zx}/\partial y + \partial\omega_{xy}/\partial z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$

(IV) $d\omega_3 = 0$

La acción de d sobre ω_0 resulta ser el *gradiente*, sobre ω_1 es el *rotor* y sobre ω_2 es la *divergencia*.

Hay dos propiedades importantes de la derivada exterior que se enunciarán a continuación. La primera tiene que ver con la regla de Leibniz pero modificada apropiadamente.

Propiedad **2.2** Sean $\xi \in \Omega^q(M)$ y $\omega \in \Omega^r(M)$, entonces

$$d(\xi \wedge \omega) = (d\xi) \wedge \omega + (-1)^q \xi \wedge (d\omega). \tag{2.14}$$

La definición 2.2 hace la derivación compatible con (II) de la propiedad 2.1. La otra propiedad muy importante es la nilpotencia de la derivada exterior.

Propiedad **2.3** Sea $\omega \in \Omega^r(M)$, escrita en la base de r-formas como $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$. Entonces se cumple que $d_{r+1} d_r \omega = 0$.

Esta propiedad resulta directamente de la definición 2.7 y de la conmutatividad de las derivadas parciales. En efecto, la derivada parcial $(\partial^2 \omega_{\mu_1\ldots\mu_r}/\partial x^\alpha \partial x^\beta)$ es simétrica en lo índices α y β pero $dx^\alpha \wedge dx^\beta$ es anti-simétrica en estos índices, produciendo un resultado nulo.

2.2.1. Integración de Formas Diferenciales

Las formas fueron creadas para la integración pero ¿qué es lo que hace de las formas integrandos apropiados? Quizás la respuesta sea su propiedad fundamental que hace que transforman correctamente cuando las coordenadas son cambiadas [18]. Ya que la acción se construye a través de una integral, la integración de formas diferenciales, por lo tanto, será importante para poder construir una acción que cumpla con las propiedades de invariancia local Lorentz. Es por eso que se explicará brevemente esta operación en este apartado.

La integración de una variedad diferencial M está definida solamente cuando la variedad es *orientable*. La orientabilidad posibilita que exista una m-forma en la variedad que no se anule en ningún punto quedando bien definido el concepto de integrar sobre la variedad.

Definición **2.8** Sea M una variedad conexa y sea $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto[5] de M. Se dirá que M es **orientable** si $\forall\ U_i, U_j$ con $U_i \cap U_j \neq 0$, $\exists$ coordenadas locales $\{x^\mu\}$ para U_i e $\{y^\nu\}$ para U_j, tales que el jacobiano $J = det(\partial x^\mu / \partial y^\nu) > 0$.

Un ejemplo típico de variedad no-orientable es la *cinta de Möbius*. La orientabilidad permite la posibilidad que exista una m-forma ω la cual no es anula en ningún punto, que juega el papel de medida cuando integramos una función $f \in \mathcal{F}(M)$ sobre M. A esta m-forma se llama **elemento de volumen**. Se dice que dos elementos de volumen ω y ω' son *equivalentes* si existe una función estrictamente positiva $h \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\omega = h\omega^{'}$. Una función definida negativa $h^{'} \in \mathcal{F}(M)$ da una orientación a M no equivalente a la anterior. Por lo tanto, una variedad admite dos orientaciones no equivalentes. Entonces, si M es una variedad de dimensión m y si se define una m-forma

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m, \tag{2.15}$$

con $h(p)$ definido positivo en una carta (U, φ) y $x = \varphi(p)$, se podrá extender ω a través de M de tal manera que h es definida positiva en cualquier carta U_i. Se puede tomar la m-forma (2.15) como elemento de volumen. Hay que notar que la positividad de h es independiente del sistema de coordenadas elegido.

Se puede definir ahora la integración de una función $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad orientable M. Tomando un elemento de volumen ω, en un entorno coordenado U_i con coordenadas x, se define la integración de una m-forma $f\omega$ por

$$\int_{U_i} f\omega = \int_{\varphi_i(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x)) h(\varphi_i^{-1}(x)) dx^1 \ldots dx^m. \tag{2.16}$$

A partir de la integral de f sobre U_i se puede obtener la integral sobre todo M utilizando la *partición de la unidad.*

Definición **2.9** Sea M una variedad paracompacta[6] y sea $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto de M. Una familia de funciones diferenciables $\epsilon_i(p)$ se llama **partición de la unidad** subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ si satisface las siguientes condiciones

(I) $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1$

(II) $\epsilon_i(p) = 0$ si $p \notin U_i$

(III) $\sum_i \epsilon_i(p) = 1$ para cualquier punto $p \in M$.

[5]Dado un conjunto X, una familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i, A_i \subset X\}$ es un **cubrimiento** si $\bigcup_i A_i = X$. Si los elementos de la familia $\mathcal{A}$ son abiertos entonces se dice un **cubrimiento abierto** [15].

[6]Sea $\mathfrak{A}$ es una colección de subconjuntos de un espacio X. Una colección de abiertos $\mathfrak{B}$ es un **refinamiento abierto** de $\mathfrak{A}$ si $\forall B \in \mathfrak{B}$, $\exists A \subset \mathfrak{A}$ tal que $B \subset A$. Un espacio X es **paracompacto** si todo cubrimiento abierto $\{U_i\}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.

De la última condición, se puede ver que

$$f(p) = \sum_i f(p)\epsilon_i(p) = \sum_i f_i(p),$$

donde $f_i(p) \equiv f(p)\epsilon_i(p)$ se anula fuera de U_i por la segunda condición. La paracompacidad asegura que sólo hay términos finitos en la suma de arriba. Como para cada $f_i(p)$ se puede definir la integral sobre $\{U_i\}$ por (2.16), la integral de f sobre toda la variedad M está dada por

$$\int_M f\omega = \sum_i \int_{U_i} f\omega. \tag{2.17}$$

Es conveniente introducir aquí el teorema de Stokes, que permite calcular la integral de la derivada exterior de una $(m-1)$-forma ω_{m-1} en una variedad M de dimensión m a partir de la integral de ω_{m-1} en la frontera de la variedad ∂M. Para ser más precisos se enunciará el teorema [20].

Teorema **2.1 (Teorema de Stokes)** Si M es una variedad m-dimensional con borde no vacío ∂M y ω_{m-1} una $(m-1)$-forma, entonces se cumple que

$$\int_M d\omega_{m-1} = \int_{\partial M} \omega_{m-1} \tag{2.18}$$

Si ∂M está compuesta de varias partes entonces el lado derecho de (2.18) es una suma orientada. Por ejemplo, si $m = 1$ y M es un segmento de a hasta b se obtiene la regla de Barrow

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a).$$

Si $\omega = A_i dx^i$ es una 1-forma y la variedad M es una superficie bidimensional inmersa en $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega,$$

donde en este caso ∂M son las líneas delimitantes de la superficie M. Este último resultado resulta ser el teorema de Stokes del cálculo vectorial de $\mathcal{R}^3$. Si $m = 3$ y se toma $\omega = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}E_k dx^i \wedge dx^j$, entonces $d\omega = (\nabla \cdot \mathbf{E})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ y el teorema de Stokes se vuelve

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_{volumen} d\omega = \int_{superficie} \omega = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

siendo este resultado el teorema de Gauss. Entonces, el lenguaje de formas permite englobar el teorema de Barrow, de Stokes y de Gauss de una forma compacta y mucho más general.

2.3. Variedades Riemannianas

Como se había mencionado al principio de este capítulo, los espacios métricos son un caso particular de variedades diferenciables. Lo que le falta a una variedad diferenciable para ser un espacio métrico es una *métrica*. No a todo espacio topológico uno puede asignarle una métrica (ver por ejemplo [14], [15]) pero, con las variedades que aquí se trabajarán, sí se puede. La métrica permite definir la importante noción de distancia en una variedad. Existen diferentes métricas que pueden introducirse en una variedad pero en esta sección se tratarán las *métricas riemannianas*. A una variedad diferenciable dotada con una métrica riemanniana se la denomina **variedad riemanniana**.

En una variedad riemanniana se puede construir, además de la métrica, el concepto de *conexión afín* que permite comparar vectores pertenecientes a espacios tangentes de puntos diferentes. Es por eso que la conexión da una idea de como transportar en una variedad M un vector $V \in T_pM$ a otro punto $q \in M$, o sea, cómo realizar un *transporte paralelo* en la variedad (en el espacio euclídeo es equivalente a cómo hacer una recta s que sea paralela a una recta r dada en un punto p tal que $p \notin r$). Uno puede construir una conexión afín a partir de una métrica y, en particular, a partir de una métrica riemanniana (se la conoce como *conexión de Levi-Civita*). Esto, como se verá en esta sección, resulta bastante natural pero también se verá en los siguientes capítulos que el concepto de conexión es independiente de una métrica elegida y uno puede construir una conexión sin tener en cuenta la métrica utilizada, incluso sin definir métrica alguna en la variedad. Esto es equivalente a afirmar que la noción de paralelismo es independiente de la noción de distancia aunque en la construcción de la geometría euclídea una defina la primera a partir de la segunda[7].

2.3.1. Métricas Riemannianas

Cuando a una variedad se la dota con una métrica, ésta permite dar una noción de distancia entre dos puntos próximos de la misma. Se puede construir la distancia entre dos puntos próximos a partir de considerarla como la norma derivada de un producto interno. Según se vio en la sección 2.1.1 existe un producto interno en variedades diferenciables pero no es un producto entre un vector y otro como el que se necesita aquí sino entre un vector y una uno-forma. Una métrica riemanniana permite este producto.

Definición **2.10** Sea M una variedad diferenciable. Una **métrica riemanniana** g en M es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ en M (ver sección 2.1.1) el cual satisface las siguientes condiciones en cada punto $p \in M$:

(I) $g_p(U, V) = g_p(V, U)$ (simetricidad),

[7] Una muy ilustrativa explicación de cómo construir una noción de paralelismo sin apelar a una noción de distancia se da en [5].

(II) $g_p(U,U) \geq 0$ donde si se cumple la igualdad solamente cuando $U = O$,

donde $U, V \in T_pM$.
Si g cumple (I) y en vez de (II) cumple

(II') $g_p(U,V) = 0$ para cualquier $U \in T_pM$ implica $V = 0$,

se dice que g es una **métrica pseudo-riemanniana**.

La métrica permite una correspondencia entre el espacio tangente T_pM y el espacio de uno-formas T_p^*M. En efecto, se puede asignarle a un vector $U \in T_pM$ una uno-forma $g_p(U,\,) : T_pM \to \mathbb{R}$ que asigna a cada $V \in T_pM$ un real $g_p(U,V)$. La correspondencia es biunívoca ya que a cada $\omega \in T_p^*M$ se le puede asignar un vector $U_\omega \in T_pM$. En efecto, dado un $V \in T_pM$ se halla $U_\omega \in T_pM$ como el vector tal que $g_p(U_\omega, V) = \langle \omega, V \rangle$. De esta manera, queda definido un isomorfismo entre T_pM y T_p^*M. Dicho isomorfismo se puede escribir de manera explícita usando la métrica. En efecto, la métrica al ser un tensor de tipo $(0,2)$ se puede escribir como $g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu dx^\nu$ (uno puede comprobar que $g_{\mu\nu}(p) = g_p(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu) = g_{\nu\mu}(p)$), entonces si $U = U^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ y $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, sus componentes se relacionan por

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu \qquad\qquad U^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu, \tag{2.19}$$

donde $(g^{\mu\nu})$ es la inversa de la matriz[8] $(g_{\mu\nu})$.

Se puede recuperar ahora la noción de distancia infinitesimal. Tomando un desplazamiento infinitesimal $dx^\mu\partial/\partial x^\mu \in T_pM$ y aplicándole g se ve

$$ds^2 \equiv g(dx^\mu\partial/\partial x^\mu, dx^\nu\partial/\partial x^\nu) = dx^\mu dx^\nu g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{2.20}$$

Como $(g_{\mu\nu})$ es simétrica, todos sus autovalores son reales. Si la métrica g tiene todos sus autovalores positivos, al par (M,g) se le llama **variedad riemanniana**. Si la métrica es pseudo-riemanniana tendrá algunos autovalores positivos y otros negativos, si hay i autovalores positivos y j autovalores negativos entonces se dice que la métrica tiene índice (i,j) o también que es $i+j$ y al par (M,g) se le llama **variedad pseudo-riemanniana**. Si la métrica tiene $j=1$ se la llama **métrica de Lorentz** y al par (M,g) se le llama **variedad lorentziana**.

El ejemplo típico de variedad riemanniana es $\mathbb{R}^n$ con métrica $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, es decir el espacio euclídeo de n-dimensiones. Un ejemplo de variedad lorentziana es $\mathbb{R}^n$ con la métrica de Minkowski, es decir $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+)$.

2.3.2. Conexión Afín

Como se mencionó al principio de la sección, se necesita agregarle más estructura a la variedad para poder comparar dos vectores definidos en espacios tangentes de puntos diferentes de la misma. En un espacio euclídeo de n-dimensiones $(\mathbb{R}^n, \delta)$, para poder derivar un campo vectorial $V = V^\mu e_\mu$ en un determinado punto x, lo que se

[8] Al ser simétrica la matriz $(g_{\mu\nu})$, es invertible.

hace es transportar un vector de un punto $x + \Delta x$ hasta x y después se hace la diferencia. Es decir, si se quiere derivar la componente V^μ respecto a la coordenada x^ν

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{V^\mu(\ldots, x^\nu + \Delta x^\nu, \ldots) - V^\mu(\ldots, x^\nu, \ldots)}{\Delta x^\nu}$$

Si bien la componente $V^\mu(\ldots, x^\nu + \Delta x^\nu, \ldots)$ está evaluada en $x + \Delta x$, se la dejó incambiada para compararla con $V^\mu(\ldots, x^\nu, \ldots)$. Es decir, para hacer un *transporte paralelo* en $(\mathbb{R}^n, \delta)$ lo único que se hace es dejar las mismas componentes del vector por más que esté definido en otro punto.

Esto no puede hacerse en una variedad en general con una métrica genérica ya que los vectores viven en espacios vectoriales correspondientes a puntos diferentes y, por lo tanto, la diferencia de estos vectores no está bien definida. Si se denota por $\tilde{V}\big|_{x+\Delta x}$ al vector $\tilde{V}\big|_x$ paralelamente transportado al punto $x + \Delta x$, se quiere que se cumplan las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) &\propto \Delta x \\ (\widetilde{V}^\mu + \widetilde{W}^\mu)(x + \Delta x) &= \widetilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \widetilde{W}^\mu(x + \Delta x) \end{aligned}$$

Estas condiciones se satisfacen si se toma

$$\widetilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\Delta x^\nu$$

Ahora se puede hacer la derivada de $V = V^\mu e_\mu$ respecto a x^ν

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \widetilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Esta cantidad es necesariamente un vector ya que es la diferencia de dos vectores definidos en el mismo punto $x + \Delta x$ y se la llama **derivada covariante** del vector V. Los coeficientes $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ reciben el nombre de **coeficientes de conexión**. Estos coeficientes nos dicen cómo varía cada componente de un vector al transportarlo de un punto x a otro punto próximo $x + \Delta x$. Los mismos son las componentes de la *conexión afín*.

Definición **2.11** Una **conexión afín** ∇ es un mapa $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ que satisface las siguientes condiciones

(I) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$

(II) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(III) $\nabla_X fY = X[f]Y + f \nabla_X Y$,

donde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

A partir de la definición 2.11, se puede relacionar la conexión aplicada a dos vectores e^μ de la base de T_pM con los coeficientes de conexión $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ como

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e_\lambda. \tag{2.21}$$

Una vez que se sabe cómo actúa ∇ sobre los vectores de la base, se sabe cómo actúa sobre cualquier vector. En efecto, sean $V = V^\mu e_\mu$ y $W = W^\mu e_\mu$ dos vectores de T_pM. Entonces, usando la definición 2.11 y (2.21), se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_V W &= \nabla_{V^\mu e_\mu} W^\nu e_\nu = V^\mu \nabla_{e_\mu} W^\nu e_\nu = V^\mu \left(e_\mu[W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu\right)\\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) e_\lambda \equiv V^\mu \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda.\end{aligned}$$

La manera cómo transforman los coeficientes $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ puede verse a partir de la transformación de los $\{e_\mu\}$. En efecto, se suponen dos cartas locales (U,φ) y (V,ϕ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$ con $p \in U \cap V$ y $x = \varphi(p)$ e $y = \phi(p)$, con $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$ y $\{f_\mu = \partial/\partial y^\mu\}$ las bases en las coordenadas de U y V respectivamente. Sean $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ y $\widetilde{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}$ las componentes de la conexión en las bases $\{e_\mu\}$ y $\{f_\mu\}$, respectivamente. Entonces

$$\nabla_{f_\beta} f_\gamma = \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} f_\alpha, \tag{2.22}$$

y si utiliza el cambio de coordenadas $f_\alpha = \partial x^\mu/\partial y^\alpha e_\mu$ se podrá escribir el lado izquierdo de (2.22) como

$$\begin{aligned}\nabla_{f_\beta} f_\gamma &= \nabla_{f_\beta} \partial x^\mu/\partial y^\gamma e_\mu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} e_\mu + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\gamma} \nabla_{e_\nu} e_\mu\\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} e_\mu + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\gamma}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} e_\lambda = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} f_\alpha + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\gamma}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda} f_\alpha.\end{aligned}$$

Al final, igualando esto con el lado derecho de (2.22) se tiene

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \tag{2.23}$$

En este punto puede verse claramente que las componentes de la conexión afín $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ no transforman como las componentes de un tensor tipo $(1,2)$ sino que transforman de una manera particular. Lo hacen de tal manera que $\nabla_X Y$ sea un vector y a la vez cumpla con las propiedades de una derivada (reglas de la suma y Leibniz). Incluso se puede definir una conexión afín como aquel objeto que por un cambio de coordenadas transforme según (2.23) y después ver que con esa definición la derivada covariante queda bien definida. A su vez, puede verse de (2.23) que $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ sí es la componente de un tensor tipo $(1,2)$ llamado **tensor de torsión** y será importante como se verá más adelante.

Se puede dar ahora una definición precisa de transporte paralelo a partir de la definición de la conexión afín.

Definición **2.12** Sea una variedad M y $c : (a, b) \to M$ una curva y se supone que la imagen de c es cubierta por una carta (U, φ) con $x = \varphi(p)$. Sea $V = d/dt = dx^\mu(c(t))/dt) e_\mu$ el vector tangente a la curva $c(t)$. Si X es un campo vectorial definido en $c(t)$ que satisface

$$\nabla_V X = 0, \tag{2.24}$$

se dice que X es un **transporte paralelo** a lo largo de la curva $c(t)$.

La condición (2.24) se puede escribir en coordenadas como

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0.$$

Si el vector V es paralelamente transportado a sí mismo, es decir

$$\nabla_V V = 0, \tag{2.25}$$

entonces $c(t)$ es una **geodésica**. Si $\{x^\mu\}$ son las coordenadas de $c(t)$, la condición (2.25) se escribe como

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \tag{2.26}$$

Uno podría ser menos restrictivo en la definición de geodésica y definirla como las curvas cuyos vectores tangentes V cumplen

$$\nabla_V V = fV.$$

Sin embargo, se puede probar que por un cambio de coordenadas se puede reparametrizar la curva para que la condición anterior resulte igual a la condición (2.25).

Hasta ahora, se ha definido la conexión afín sin hacer uso de la métrica en ningún momento. Como se mencionó al principio de esta sección, se puede definir una conexión a partir de la métrica y se va a dar ahora una a partir de una métrica riemanniana. Para hacer manifiesta esa relación entre la conexión y la métrica, uno puede exigir a la conexión que el transporte paralelo (relacionado con la conexión) de dos vectores deje incambiado el producto interno entre ellos (relacionado con la métrica). Esta exigencia se puede escribir explícitamente, si se toma V un vector tangente a una curva arbitraria y dos campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se tiene

$$\nabla_V g(X, Y) = 0 \Longrightarrow V^\lambda \left((\nabla_\lambda g)(X, Y) + g(\nabla_\lambda X, Y) + g(\nabla_{X,\lambda} Y) \right) = 0.$$

Notando que se si se está haciendo un transporte paralelo de X e Y se tiene $\nabla_\lambda X = \nabla_\lambda Y = 0$, resultando

$$V^\lambda (\nabla_\lambda g)(X, Y) = 0 \Longrightarrow V^\lambda X^\mu Y^\nu (\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = 0$$

Dada la arbitrariedad de V, X e Y se tiene

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = 0 \tag{2.27}$$

Si la conexión es tal que cumple (2.27), se dice que es **compatible con la métrica** o **conexión métrica**. La ecuación (2.27) se puede expresar en un sistema coordenado como

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0. \tag{2.28}$$

Se puede escribir otras dos ecuaciones equivalentes a (2.28) en permutaciones cíclicas de (λ, μ, ν) dando

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} &= 0, \\ \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} &= 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Si ahora se calcula (2.28)−(2.29) se tiene

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}\left(T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \right), \tag{2.30}$$

donde $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ son los **símbolos de Christoffel**[9], definidos como

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right),$$

y $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ es el **tensor de torsión**, que ya se mencionó arriba.

Uno le puede exigir otra propiedad a la conexión además de ser compatible con una métrica riemanniana. Esta propiedad es la simetría de las componentes de la conexión, es decir $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$. Una conexión que cumple con esta propiedad se llama **conexión simétrica**. Es evidente de la definición de tensor de torsión que si una conexión es simétrica entonces $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0$. El siguiente teorema, que no se probará, permite construir una única conexión simétrica y compatible con una métrica riemanniana.

Teorema **2.2 (Levi-Civita)** Dada una variedad riemanniana (M, g) existe una única conexión afín ∇ en M que satisface las condiciones:

(a) ∇ es simétrica

(b) ∇ es compatible con la métrica g.

[9] Algunos autores lo llaman símbolos de Christoffel de segunda especie, para distinguirlos de los de primera especie, definidos como $[\mu\nu, \lambda] = g_{\lambda\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ (ver [19]).

Una conexión dada por el teorema 2.2 recibe el nombre de **conexión riemanniana** o **conexión de Levi-Civita**. Aunque no se mostrará la prueba, uno puede adivinar que la conexión riemanniana se halla a partir de (2.30), la definición de los símbolos de Christoffel y con la condición ${T^\lambda}_{\mu\nu} = 0$, resultando

$$ {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right). \tag{2.31} $$

Teniendo una conexión afín en una variedad riemanniana, uno puede considerar un sistema de coordenadas particular a partir de las coordenadas de los vectores de la base del espacio tangente en un punto. Para esto hay que hacer algunas definiciones.

Sea (M, g) una variedad riemanniana con una conexión ∇. Sea un punto $p \in M$, si tomamos un vector $X \in T_pM$ podemos hallar una geodésica $c(t)$ tal que $c(0) = p$ y $\frac{d}{dt}\big|_p = X$. Esto permite definir un entorno coordenado alrededor de p de la siguiente forma: si tomamos q cercano a p, se puede probar que existe una única geodésica $c_q(t)$ y un único vector $X_q \in T_pM$ tales que $c(0) = p$, $c(1) = q$ y $\frac{d}{dt}\big|_p = X_q = X_q^\mu e_\mu$. Se puede ver que $\varphi : q \mapsto X_q^\mu$ representa un buen sistema de coordenadas en un entorno de p. Este sistema de coordenadas se llama **sistema de coordenadas normal** basado en p con base $\{e_\mu\}$. Se define el **mapa exponencial** como $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ tal que $\mathrm{Exp}_p(X) = c(1)$ donde $c(t)$ es la geodésica tal que $c(0) = p$ y $\frac{d}{dt}\big|_p = X$. Se puede ver, a partir de la ecuación (2.26), que en un sistema de coordenadas normal, la conexión afín se anula en el punto p, es decir ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}(p) = 0$. Sin embargo, esto no implica que la conexión se anule en todo punto de la variedad riemanniana, ni siquiera en un entorno del punto p como se verá en la siguiente sección.

El concepto de geodésica respecto a una conexión riemanniana está relacionado con el concepto de curva tal que su longitud respecto de dos puntos es mínima (comparado con la longitud de cualquier otra curva entre esos dos puntos). Uno puede definir una distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ entre dos puntos p y q como $d(p, q)$ =ínfimo de las longitudes de curvas que unen p y q. Con esta distancia, el teorema de Hopf-Rinow afirma, entre otras cosas, que si el mapa exponencial $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ está definido para todo vector[10] $X \in T_pM$, entonces existe una geodésica tal que su longitud es igual a $d(p, q)$. Demostrar el teorema requiere entrar en algunos detalles que exceden a este trabajo pero una demostración rigurosa se da en [17]. Como de geometría elemental uno tiene la noción (no definición, por cierto) de que el segmento de recta es la mínima distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$, se dice entonces que las geodésicas son la generalización natural de una recta para una variedad riemanniana.

2.3.3. Curvatura y Torsión

En la ecuación (2.23) uno puede ver que si las componentes de la conexión son nulas en un sistema de coordenadas no tienen por qué serlo en otro sistema. Esto también es consecuencia de que la conexión no es un tensor. Por lo tanto, uno quiere

[10] Si esto ocurre se dice que la variedad riemanniana (M, g) es **geodésicamente completa**.

una característica intrínseca de la variedad, es decir no dependiente del sistema de coordenadas, que diga cuan cerca está la geometría de una variedad respecto a la geometría euclídea usual. Esas características intrínsecas deben ser tensores ya que se quiere que sean independientes del sistema de coordenadas. En esta sección, veremos dos tensores que cumplen con esta finalidad: el **tensor de curvatura** y el **tensor de torsión**.

Definición **2.13** Sea (M, g) una variedad riemanniana con conexión ∇ (no necesariamente una conexión riemanniana).

(a) El **tensor de curvatura** $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ se define como $R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$.

(b) El **tensor de torsión** $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ se define como $T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.

Uno puede probar que la definición 2.13 hace que tanto R como T sean tensores de tipo $(1, 3)$ y $(1, 2)$ respectivamente. Esto quiere decir que, por ejemplo, ambos son lineales en cada entrada, es decir $R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$ y $T(fX, gY) = fgT(X, Y)$ para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$.

Al ser tensores, las operaciones de R y T sobre vectores y uno-formas quedan determinadas si se conocen sus operaciones sobre elementos de la base. Las componentes del tensor de curvatura $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$ según las bases $\{e_\mu\}$ y $\{dx^\mu\}$ se pueden hallar como

$$\begin{aligned}
R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle \\
&= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} e_\eta - \nabla_\nu \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} e_\eta \rangle \\
&= \langle dx^\kappa, \frac{\partial \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} e_\eta - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} \Gamma^{\xi}{}_{\mu\eta} e_\xi - \frac{\partial \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} e_\eta - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} \Gamma^{\xi}{}_{\nu\eta} e_\xi \rangle \\
&= \frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta} \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Análogamente, se pueden hallar las componentes del tensor de torsión $T^{\kappa}{}_{\mu\nu}$ en las bases $\{e_\mu\}$ y $\{dx^\mu\}$ como

$$\begin{aligned}
T^{\kappa}{}_{\mu\nu} &= \langle dx^\kappa, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\
&= \langle dx^\kappa, \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} e_\eta - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu} e_\eta \rangle = \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Conviene detenerse en este punto para examinar el significado geométrico de los tensores de curvatura y de torsión. El primero de ellos, está relacionado con la diferencia entre el transporte paralelo de un vector de un punto a otro por curvas diferentes. Un ejemplo de esto es la diferencia del transporte de un vector V de un punto p a un punto q por un circulo máximo[11] C y por otro círculo máximo C' en una esfera.

[11]Un círculo máximo es la intersección de la esfera con un plano que contiene al centro de la misma.

Es más, en una variedad riemanniana genérica, el vector resultante de un transporte paralelo de un vector por una curva cerrada hasta el punto de partida es diferente del vector original. Para ver esto más explícitamente, sea (M, g) una variedad riemanniana con conexión ∇ y $pqrs$ un paralelogramo cuyas coordenadas son $\{x^\mu\}$, $\{x^\mu + \epsilon^\mu\}$, $\{x^\mu + \epsilon^\mu + \delta^\mu\}$, $\{x^\mu + \delta^\mu\}$, donde ϵ^μ y δ^μ son infinitesimales. Si se transporta paralelamente el vector $V_0 \in T_pM$ por la curva $C = pqr$ se obtiene el vector $V_C(r)$. Para obtener las componentes $V_C(q)$ se hace

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\epsilon^\nu.$$

Si se quieren ahora hallar las componentes de $V_C(r)$ se tiene

$$\begin{aligned}
V_C^\mu(r) &= V_C^\mu(q) - V_C(q)^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(q)\delta^\nu \\
&\simeq V_0^\mu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\epsilon^\nu - \left(V_0^\lambda - V_0^\eta \Gamma^\lambda{}_{\theta\eta}(p)\epsilon^\theta\right)\left(\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p) + \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)}{\partial x^\theta}\epsilon^\theta\right)\delta^\nu \\
&\simeq V_0^\mu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\epsilon^\nu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\delta^\nu \\
&\quad - V_0^\lambda \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)}{\partial x^\theta}\epsilon^\theta\delta^\nu + V_0^\eta \Gamma^\lambda{}_{\theta\eta}(p)\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\epsilon^\theta\delta^\nu,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se hizo un desarrollo de $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(q)$ alrededor de p (por la proximidad de p y q) y en la tercera igualdad se conservaron términos hasta segundo orden en ϵ y δ. De forma similar al cálculo anterior, se pueden calcular las componentes de $V_{C'}(r)$, dando como resultado

$$\begin{aligned}
V_{C'}^\mu(r) &= V_{C'}^\mu(q) - V_{C'}(s)^\lambda \Gamma^\mu{}_{\theta\lambda}(s)\epsilon^\theta \\
&\simeq V_0^\mu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\delta^\nu - V_0^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\epsilon^\nu \\
&\quad - V_0^\lambda \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\theta\lambda}(p)}{\partial x^\nu}\delta^\nu\epsilon^\theta + V_0^\eta \Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}(p)\Gamma^\mu{}_{\theta\lambda}(p)\delta^\nu\epsilon^\theta.
\end{aligned}$$

Restando ambos resultados, se tiene

$$\begin{aligned}
V_{C'}^\mu(r) - V_C^\mu(r) &\simeq V_0^\eta\left(\frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\nu\eta}(p)}{\partial x^\theta} - \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\theta\eta}(p)}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}(p)\Gamma^\mu{}_{\theta\lambda}(p) - \Gamma^\lambda{}_{\theta\eta}(p)\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(p)\right)\epsilon^\theta\delta^\nu \\
&= V_0^\eta R^\mu{}_{\eta\theta\nu}\epsilon^\theta\delta^\nu. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Además de ver la interpretación de las componentes del tensor de curvatura como el coeficiente de proporcionalidad a V_0 para la diferencia $V_C(r) - V_{C'}$, se ve que esta diferencia es de segundo orden en ϵ y δ.

Para la interpretación geométrica del tensor de torsión, se considera en un punto p de coordenadas $\{x^\mu\}$ de la misma variedad riemanniana (M, g) dos vectores infinitesimales de coordenadas $X = X^\mu e_\mu \in T_pM$ e $Y = Y^\mu e_\mu \in T_pM$. Si son pensados como pequeños desplazamientos, estos vectores definen dos puntos próximos r y s, próximos a p de coordenadas $\{x^\mu + \epsilon^\mu\}$ y $\{x^\mu + \delta^\mu\}$, respectivamente (los puntos q y s son los que definen las coordenadas normales en p, ver sección 2.3.2). Si se transporta paralelamente X a lo largo de pr se obtiene el vector sr_1 de componentes $\epsilon^\mu - \epsilon^\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\delta\nu$. Las componentes del vector de desplazamiento que conecta p con r_1 es

$$pr_1 = ps + sr_1 = \delta^\mu + \epsilon^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\epsilon^\lambda \delta\nu.$$

Análogamente, qr_2 es el vector que se obtiene transportando Y a lo largo de ps. componentes del vector de desplazamiento que conecta p con r_2 es

$$pr_2 = pq + qr_2 = \epsilon^\mu + \delta^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\epsilon^\nu \delta^\lambda.$$

La diferencia entre estos vectores es

$$r_2 r_1 = pr_2 - pr_1 = (\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu})\epsilon^\lambda \delta^\nu = T^\mu{}_{\nu\lambda}\,\epsilon^\lambda \delta^\nu. \tag{2.35}$$

Se ve que el tensor de torsión mide qué tan grande es la diferencia en la clausura de un paralelogramo infinitesimal. Aquí se ve también que la diferencia es de segundo orden.

En resumen, si se hubiera considerado la variedad riemanniana (M, g) a primer orden, habría un resultado nulo tanto para la cuenta (2.34) como para la (2.35). O sea, la curvatura es el orden más bajo (orden dominante) que tiene en cuenta cuánto se aparta el transporte paralelo de un vector por caminos diferentes respecto a la geometría riemanniana. Análogamente, la torsión es el orden dominante de la diferencia con respecto a la geometría euclídea de la clausura de un paralelogramo infinitesimal.

Propiedades del Tensor de Curvatura

Las componentes del tensor de curvatura tienen ciertas propiedades de simetría importantes.

Propiedad **2.4** Sean $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\eta}R^\eta{}_{\lambda\mu\nu}$ las componentes del tensor de curvatura de una conexión riemanniana. Éstas cumplen las siguientes propiedades de simetría:

(a) $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$

(b) $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$

(c) $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\mu\nu\lambda\kappa}$

Siendo el tensor de curvatura definido a partir de una métrica riemanniana, también se cumplen las siguientes propiedades

Propiedad **2.5 (Identidades de Bianchi)** Sean $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ las componentes del tensor de curvatura de una conexión riemanniana. Se cumple:

(a) $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} + R^\kappa{}_{\mu\nu\lambda} + R^\kappa{}_{\nu\lambda\mu} = 0$ (**primera identidad de Bianchi**)

(b) $(\nabla_\kappa R)^\eta{}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\mu R)^\eta{}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_\nu R)^\eta{}_{\lambda\kappa\mu} = 0$ (**segunda identidad de Bianchi**).

Se pueden definir otros tensores a partir de la contracción de índices de las componentes del tensor de curvatura. Éstos son muy importantes para la Relatividad General.

Definición **2.14** Sea (M, g) una variedad riemanniana con conexión ∇ y componentes del tensor de curvatura $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$.

(I) El **tensor de Ricci** es un tensor tipo $(0,2)$ definido por $\mathrm{Ric}_{\mu\nu}(X,Y) \equiv \langle dx^{\mu}, R(e_{\mu}, X)Y\rangle$ cuyas componentes son $\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = \mathrm{Ric}(e_{\mu}, e_{\nu}) = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$.

(II) El **escalar de curvatura** $\mathcal{R}$ se define como $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$.

A partir de la definición 2.14 y de la propiedad 2.5 se obtiene el importante resultado

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0, \tag{2.36}$$

donde $G^{\mu\nu} \equiv \mathrm{Ric}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu}$ es el **tensor de Einstein**. Este tensor tiene la propiedad de, además de (2.36), ser simétrico ($G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}$). Como se verá en el capítulo 3 estas dos propiedades son las que inspiraron a Einstein para utilizar este tensor en la Relatividad General.

2.4. Bases No-Coordenadas

Las bases de coordenadas utilizadas hasta ahora para describir los espacios T_pM y T_p^*M fueron $\{\partial/\partial x^{\mu}\}$ y $\{dx^{\mu}\}$, respectivamente. Éstas no son las únicas bases y se verá en esta sección que uno tiene cierta libertad para elegirlas una vez que a la variedad se le asigna una métrica. La notación presentada aquí se utilizará mucho en el resto del trabajo ya que la misma es más práctica en muchos aspectos, tanto de cálculo como de concepto, como veremos en el capítulo 3. Una buena descripción de lo tratado en esta sección se encuentra en [20] y [16].

Sea la combinación lineal,

$$E_a = E_a{}^{\mu}\partial/\partial x^{\mu} \qquad\qquad \{E_a{}^{\mu}\} \in GL(m, \mathbb{R}), \tag{2.37}$$

donde $GL(m, \mathbb{R})$ son el espacio de matrices invertibles de $m \times m$ y $\det(E_a{}^{\mu}) > 0$. $\{E_a\}$ son vectores base obtenidos por una transformación que preserva la orientación. Se puede requerir que la base $\{E_a\}$ sea ortonormal, es decir

$$g(E_a, E_b) = E_a{}^{\mu}E_b{}^{\nu}g_{\mu\nu} = \delta_{ab}$$

Se puede invertir la ecuación anterior para que dar

$$g_{\mu\nu} = E^a{}_{\mu}E^b{}_{\nu}\delta_{ab}, \tag{2.38}$$

donde $E^a{}_{\mu}$ es la inversa de $E_a{}^{\mu}$. Si se introduce ahora una base $\{e^a\}$ de T_p^*M tal que $\langle e^a, E_b\rangle = \delta^a{}_b$, esta base queda dada por

$$e^a = E^a{}_{\mu}dx^{\mu}.$$

Se ve entonces que ${E^a}_\mu$ es una matriz que transforma la base coordenada $\{dx^\mu\}$ de T_p^*M a una base ortonormal $\{e^a\}$. Hay que notar que mientras $\partial/\partial x^\mu$ y $\partial/\partial x^\nu$ conmutan, E_a no tiene por qué conmutar con E_b. En efecto,

$$[E_a, E_b]|_p = {c_{ab}}^d(p)E_d|_p,$$

donde

$${c_{ab}}^d(p) = E^d{}_\nu \left({E_a}^\mu \frac{\partial {E_b}^\nu}{\partial x^\mu} - {E_b}^\mu \frac{\partial {E_a}^\nu}{\partial x^\mu} \right) \bigg|_p .$$

Las bases $\{E_a\}$ y $\{e^a\}$ se llaman **bases no-coordenadas**. Los coeficientes ${E^a}_\mu$ se llaman **vierbeins** si el espacio es cuadridimensional y **vielbeins** si es de cualquier dimensión. Notar que se utilizaron índices diferentes para describir la base no-coordenada $\{e^a\}$ que para describir la base coordenada $\{dx^\mu\}$. Para la primera se utilizan índices latinos $a, b, \ldots$ y para la segunda índices griegos $\mu\nu \ldots$. Los índices latinos indican índices internos del espacio tangente, diferentes a los índices griegos que indican los índices del sistema de coordenadas del atlas de la variedad. En este contexto, los índices latinos se llaman índices planos. Como se verá más adelante, en un contexto general de espacios fibrados, estos índices viven en la fibra de la variedad.

Si la variedad es lorentziana entonces hay que reemplazar δ_{ab} por η_{ab} en las ecuaciones. De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, supondremos que la variedad es lorentziana. Es por la relación $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}{E^a}_\mu {E^b}_\nu$ que ${E^a}_\mu$ es una especie de 'raíz cuadrada' de la métrica.

Se pueden definir los coeficientes de la conexión Γ^c_{ab} con respecto a la base $\{E_a\}$ por

$$\nabla_a E_b \equiv \nabla_{E_a} E_b = \Gamma^c_{ab} E_c.$$

Es a partir de esta definición que las componentes de la conexión $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ y Γ^c_{ab} se relacionan mediante

$$\Gamma^c_{ab} = E^c{}_\lambda {E_a}^\mu \left(\frac{\partial {E_b}^\lambda}{\partial x^\mu} + {E_b}^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) = E^c{}_\lambda {E_a}^\mu \nabla_\mu {E_b}^\lambda.$$

Se introduce ahora la **uno-forma de conexión** como

$$\omega^a{}_b \equiv \Gamma^a{}_{cb} e^c. \tag{2.39}$$

La uno-forma de conexión $\omega^a{}_b$ es una uno-forma evaluada en el espacio de matrices (como indican sus índices), es decir sus coeficientes son componentes de una matriz y como veremos más abajo, al igual que las componentes de la conexión, $\omega^a{}_b$ tampoco es un tensor. $\omega^a{}_b$ es importante para presentar las ecuaciones de estructura de Cartan.

Teorema **2.3 (Ecuaciones de Estructura de Cartan)** La uno-forma de conexión satisface las siguientes ecuaciones:

(I) $de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = T^a$

(II) $d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = R^a{}_b$,

donde se han introducido la **torsión dos-forma** $T^a \equiv \frac{1}{2}T^a{}_{bc}e^b \wedge e^c$ y la **curvatura dos-forma** $R^a{}_b \equiv \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}e^c \wedge e^d$.

Tomando la derivada exterior de las ecuaciones de estructura se tienen las identidades de Bianchi

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b$$
$$dR^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0.$$

Estas son las mismas ecuaciones (a) y (b) de la propiedad 2.5, respectivamente, pero en una base no-coordenada. Estas ecuaciones se pueden escribir más compactamente si se define la **derivada covariante de una p-forma** $V^a_{\ b}$ como

$$DV^a_{\ b} = dV^a_{\ b} + \omega^a{}_c \wedge V^c_{\ b} - (-1)^p V^a_{\ c} \wedge \omega^c{}_b. \tag{2.40}$$

Entonces, las identidades de Bianchi se escriben con la sencilla simbología

$$\begin{aligned} DT^a &= R^a{}_b \wedge e^b, \\ DR^a{}_b &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Se puede expresar el tensor de curvatura como el resultado de aplicar dos veces la derivada covariante a un vector de Lorentz ϕ^a. En efecto, usando que $d^2\phi^a = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} DD\phi^a &= D(d\phi^a + \omega^a{}_b\phi^b) = d(d\phi^a + \omega^a{}_b\phi^b) + \omega^a{}_b(d\phi^b + \omega^b{}_c\phi^c) \\ &= (d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\omega^c{}_b)\phi^b = R^a{}_b\phi^b, \end{aligned}$$

donde se usó la propiedad (2.14) para la derivación de 1-formas y el teorema 2.3.

Como se mencionó al comienzo de la sección, existe cierta libertad de elegir el sistema no-coordenado y conviene detenerse ahora en este punto. Los grados de libertad de la métrica[12] $g_{\mu\nu}$ son $m(m+1)/2$, mientras que el vielbein $E^a{}_\mu$ tiene m^2 grados de libertad. Entonces, se pueden elegir varias bases no-coordenadas pasando de una a la otra mediante una 'rotación'

$$\begin{aligned} e^a &\rightarrow e'^a = \Lambda^a{}_b e^b \\ E_a &\rightarrow E'{}_a = E_b(\Lambda^{-1})^b{}_a \end{aligned} \tag{2.42}$$

en cada punto p. El vielbein transforma como

$$E^a{}_\mu \rightarrow E'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(p)E^b{}_\mu \tag{2.43}$$

[12]Como $g_{\mu\nu}$ es simétrico, si se lo piensa como una matriz, al elegir el triángulo superior que incluye la diagonal queda determinado el resto. Los grados de libertad del triángulo superior que incluye la diagonal son los mismos que la suma de los primeros m naturales que es $m(m+1)/2$.

La invariancia del tensor métrico hace que

$$\Lambda^a{}_b \eta_{ac} \Lambda^c{}_d = \eta_{ad}.$$

Esto implica que $\Lambda^a{}_b(p) \in SO(m-1,1)$, por lo tanto es una rotación ortogonal en el espacio tangente T_pM. La dimensión del grupo $SO(m-1,1)$ es $m(m-1)/2 = m^2 - m(m-1)/2$ que es justo la diferencia que hay entre los grados de libertad del vielbein y de la métrica.

Los índices latinos $a, b, \ldots$ entonces transforman bajo elementos de $SO(m-1, m)$ y quedan incambiados bajo cambios de coordenadas, mientras que los índices griegos $\mu, \nu, \ldots$ sí transforman ante cambios de coordenadas. Aquí vuelve la idea de que los índices latinos son índices internos cuyos cambios en el espacio tangente en cada punto son gobernados por elementos de $SO(m-1, m)$ y no por cambios de coordenadas en la variedad.

Se puede deducir cómo transforman las componentes de un tensor en una base no-coordenada. Sea $t = t^\mu{}_\nu \partial/\partial x^\mu \otimes dx^\nu$ un tensor tipo $(1,1)$. En las bases no-coordenadas $\{E_a\}$ y $\{e^a\}$ el tensor se escribe $t = t^a{}_b E_a \otimes e^b$, donde $t^a{}_b = t^\mu{}_\nu E^a{}_\mu E_b{}^\nu$. Si se hace una rotación a unas bases $\{E'_a\} = \{E_b (\Lambda^{-1})^b{}_a\}$ y $\{e'^a\} = \{\Lambda^a{}_b e^b\}$, se tiene

$$t = t'^a{}_b E'_a \otimes e'^b = t'^a{}_b E_c (\Lambda^{-1})^c{}_a \otimes \Lambda^b{}_d e^d,$$

dando la regla de transformación

$$t^a{}_b \to t'^a{}_b = \Lambda^a{}_c t^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b.$$

O sea, los supra-índices latinos se rotan con Λ mientras los subíndices latinos se rotan con Λ^{-1}. El pasaje de bases coordenadas a bases no-coordenadas se hace con los vielbeins. Así, el tensor de torsión y el tensor de curvatura transforman como

$$\begin{aligned} T'^a &= \Lambda^a{}_b T^b, \\ R'^a{}_b &= \Lambda^a{}_c R^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b. \end{aligned}$$

Uno puede deducir también la regla de transformación de la uno-forma de conexión $\omega^a{}_b$. Sabiendo que la torsión dos-forma $T'^a = de'^a + \omega'^a{}_b \wedge e'^b$ transforma como $T'^a = \Lambda^a{}_b T^b$ se llega a

$$\omega'^a{}_b = \Lambda^a{}_c \omega^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b - \Lambda^a{}_c (d\Lambda^{-1})^c{}_b. \tag{2.44}$$

Aquí se ve, como se mencionó más arriba, que la uno-forma de conexión $\omega^a{}_b$ no transforma como un tensor sino de una manera particular. Sin embargo, de las ecuaciones (2.42) se deduce que la base no-coordenada de uno-formas $\{e^a\}$ sí transforma como un vector de Lorentz en el espacio tangente. También la derivada covariante de un vector de Lorentz $D\phi^a$ transforma como vector de Lorentz, es decir bajo Λ.

Si la conexión ∇ es de Levi-Civita las condiciones de compatibilidad con la métrica (2.30) y simetría se escriben, respectivamente

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= -\omega_{ba} \\ T^a &= 0 \end{aligned}$$

Para terminar la sección, se mostrará cómo se puede encontrar un elemento de volumen para poder integrar en la variedad. Si (M, g) es una variedad riemanniana de dimensión m, existe un elemento de volumen invariante

$$\Omega_M = \sqrt{|g|} dx^1 \ldots dx^m,$$

donde $g = det(g_{\mu\nu})$ y x^μ son las coordenadas de la carta (U, φ). Uno puede demostrar que Ω_M se puede escribir en una base no-coordenada como

$$\Omega_M = e^1 \ldots e^m. \tag{2.45}$$

Así, una integral de $f \in \mathcal{F}(M)$ se puede escribir como

$$\int_M f\Omega_M = \int_M f\sqrt{|g|} dx^1 \ldots dx^m = \int_M f e^1 \ldots e^m. \tag{2.46}$$

Estas propiedades serán de ayuda en el capítulo 3 para construir una acción invariante Lorentz a partir de e y R en la formulación de Cartan para la Relatividad General.

Capítulo 3

Relatividad General

En este capítulo se presentará de forma conceptual Relatividad General. Habiendo introducido en el capítulo 2 las nociones matemáticas necesarias para esta teoría, se introducirá la motivación física que llevó a Einstein a obtener las ecuaciones de campo para la gravitación. Estas ecuaciones implican que la geometría del espacio-tiempo está determinada por su distribución de energía. Localmente, la física es descripta por la Relatividad Especial y la geometría es de Minkowski vía el *principio de equivalencia*. Esto lleva a que el espacio-tiempo se pueda describir localmente por coordenadas en $\mathbb{R}^4$ y, entonces, coincidir con la definición de una variedad diferenciable de dimensión cuatro. La física descripta no debe ser cambiada por los diferentes cambios de coordenadas de la variedad espacio-tiempo por lo que debe ser descripta por entes que no dependan de las coordenadas locales, es decir vectores, tensores y formas diferenciales. Además de introducir una métrica a la variedad, se debe tener una conexión para poder hacer cálculos con estos entes (hacer las derivadas covariantes, por ejemplo). Esta conexión puede hallarse a partir de la métrica y es la conexión de Levi-Civita cuyas componentes están dadas por los símbolos de Christoffel, como se vio en la sección 2.3.2. Esto es la Relatividad General en el formalismo de Einstein y la primera parte de este capítulo está dedica a ella de forma descriptiva y heurística ya que existe abundante bibliografía para tratar este tema con el mayor detalle [21], [22], [23], [24], [25].

Como se mencionó al principio de la sección 2.3, uno puede asumir una variedad con una conexión de Levi-Civita o una conexión más general. El punto de vista de Einstein asume que la conexión de la variedad espacio-tiempo es de Levi-Civita, o sea, se puede hallar directamente a partir de la métrica. El punto de vista de Cartan, por otro lado, aboga en no hacer esa suposición y permitir a la variedad tener una conexión independiente de la métrica. Hacer esta suposición lleva a unas ecuaciones de campo un poco diferentes ya que uno debe asumir que la conexión y la métrica son campos independientes a la hora de variar la acción cuando se hace el principio variacional. El punto de vista de Cartan se tratará en la segunda parte de este capítulo y es el que se utilizará en el resto de los capítulos. Tiene una mayor cantidad de variables dinámicas que el punto de vista de Einstein pero tiene menos asunciones a priori. Este no es el único motivo por el que se trabajará con el formalismo de Cartan, resulta además ser más transparente para analizar las diferencias y similitudes entre teorías gauge y gravedad [5]. Una de las razones para esto es, como se verá más adelante, que el punto de vista de Cartan hace explícita la distinción entre la variedad base M de un fibrado y la fibra, que es el espacio tangente T_pM en cada punto p donde viven los tensores de Lorentz. Ya que los fibrados son los lenguajes naturales para describir las teorías de gauge, es natural que este punto de vista permita una mejor comparación entre teorías gauge y gravitación.

3.1. Relatividad General de Einstein

En esta sección se tratará la Relatividad General desde el punto de vista de Einstein. Ésta teoría no sólo describe el comportamiento de cuerpos y campos afectados por fenómenos gravitatorios sino que explica la naturaleza de la gravedad a partir de la geometría intrínseca del espacio-tiempo. Es por eso que en su formulación original de 1915, Einstein interpreta el espacio-tiempo como una variedad diferenciable y los fenómenos gravitatorios a partir de la geometría de riemanniana. La clave de todo esto está en el *principio de equivalencia.*

3.1.1. La Relatividad Especial y el Principio de Equivalencia

La Relatividad Especial [27], [28] se considera como una de las primeras revoluciones Física del siglo XX (junto con la Mecánica Cuántica) y se consolidó en 1905 con un artículo titulado *Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento* de Albert Einstein [26]. Esta teoría permitió resolver un problema bastante preocupante en la Física de aquella época que era la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Antes, se asumía que existía un medio, que se le dio el nombre de *eter*, que inundaba todo el espacio y por el cual podían propagarse las ondas electromagnéticas (así como las ondas de sonido utilizan el aire para propagarse o las ondas de un estanque utilizan el agua). Cuando se quiso saber con qué velocidad se propagaba la Tierra respecto al éter en un experimento, conocido como el experimento de Michelson y Morley, el resultado no fue el esperado. La conclusión de Einstein fue que la luz se movía siempre a la misma velocidad sin importar la velocidad de la fuente. Einstein también introdujo el principio de relatividad que dice *las leyes de la mecánica y los fenómenos electromagnéticos son los mismos en todos los marcos de referencia inerciales* [27]. Este principio pretendía poner fin a otro problema de la Física de ese tiempo que era que las ecuaciones de de la mecánica Newton no eran compatibles con las ecuaciones de Maxwell para describir el electromagnetismo respecto a una transformación galileana. Estos principios conducen a una ley de transformación de marcos inerciales diferente a las transformaciones de Galileo, llamadas transformaciones de Lorentz[1], y a abandonar la existencia del

[1]Llevan el nombre de transformaciones de Lorentz porque fueron postuladas por Hendrik A. Lorentz para resolver el problema del experimento de Michelson y Morley pero con postulados

éter.

La Relatividad Especial tiene consecuencias que resultaron impactantes para su época, como la relatividad de la simultaneidad, la dilatación del tiempo y la contracción de Lorentz [27], [28]. El matemático Hermann Minkowski postuló en 1907 que las transformaciones de Lorentz podían introducirse naturalmente si se piensa al espacio y tiempo no como entidades separadas sino como un solo espacio-tiempo de cuatro dimensiones con una geometría diferente a la euclídea, llamada desde entonces geometría minkowskiana. Las transformaciones de Lorentz son, en este contexto, transformaciones que conservan el producto interno en ese espacio. Todos los experimentos realizados posteriormente no hicieron más que afirmar la Relatividad Especial a pesar de que se tardó un poco en aceptar sus ideas radicales para la época.

Si bien la comunidad científica todavía estaba intentando entender la Relatividad Especial, ya en 1907 Einstein se dio cuenta que esta teoría no era compatible con la Gravitación Universal de Newton. En [21], [22] se muestran ilustrativos ejemplos de por qué son incompatibles estas teorías, pero se puede mencionar que la Gravitación Universal implica una acción a distancia instantánea entre objetos masivos mientras la Relatividad Especial no permite que la información pueda viajar a una velocidad mayor a la luz. Pero Einstein sacó jugo a algo que se conocía hacía tiempo que era que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria, es decir, la masa inercial es la fuente del campo gravitatorio[2]. Es por esto que, por ejemplo, si se sueltan dos objetos en la superficie de la Tierra adquieren la misma aceleración independientemente de la masa que tengan los mismos. Einstein se dio cuenta, basado en esto, que el efecto de la gravedad podía ser neutralizado *localmente* en una caída libre, o sea, en un laboratorio en caída libre el efecto gravitatorio podía ser eliminado. La neutralización es local ya que el laboratorio debe ser suficientemente pequeño y los experimentos deberán ser suficientemente cortos temporalmente también. En estas condiciones, los experimentos serán indistinguibles a aquellos hechos en ausencia de gravedad y los resultados de estos experimentos deberán ser compatibles con la Relatividad Especial [5]. A este postulado se le dio el nombre de **principio de equivalencia**: *En todo marco localmente inercial, todas las leyes de la Física deben obedecer a la Relatividad Especial.* [21]. Entonces, según el principio de equivalencia y lo postulado por Minkowski, las leyes en estos laboratorios en caída libre son aquellas que sean válidas en el espacio de Minkowski, o sea, las que sean invariantes por transformaciones de Lorentz. Es decir, para regiones suficientemente pequeñas y tiempos suficientemente cortos se puede elegir un sistema de coordenadas tal que las leyes puedan describirse según la Relatividad Especial.

La equivalencia entre la gravedad y un marco en caída libre es solamente local y no global. Un marco en caída libre solamente puede simular un campo uniforme y en una dirección. Por ejemplo, el marco de referencia escogido en un laboratorio

diferentes a los de Einstein.

[2]Esto ya era sospechado desde la época de Galileo pero no se hizo una medida precisa hasta alrededor de 1885 por Loránd Eötvös.

en caída libre a cierta altura de Montevideo no podrá explicar según la Relatividad Especial lo que ocurre en un laboratorio en caída libre a cierta altura de Pekín, ya que su dirección de campo gravitatorio es diametralmente opuesta. Es por eso que solamente se puede 'emparchar' el espacio-tiempo por coordenadas de $\mathbb{R}^4$ con geometría de Minkowski solamente en una región limitada del mismo. El qué tan grande será esa región depende de que tan exacto se quieran la concordancia del experimento con la teoría. En todo caso, según el principio de equivalencia, en cada punto del espacio-tiempo p se puede describir un entorno del mismo según la geometría de Minkowski en $\mathbb{R}^4$ con métrica $\eta_{ab} = (-,+,+,+)$. Esto es justamente la definición de una variedad lorentziana según lo visto en la sección 2.3. Esta variedad tendrá una cierta métrica g y Einstein apeló a la conexión de Levi-Civita, que se deduce directamente de g por la ecuación (2.31). Una vez que uno cuenta con la métrica del espacio-tiempo y la conexión, el espacio T_pM es una buena aproximación en un entorno del espacio-tiempo, matemáticamente a través de las coordenadas normales definidas en la sección 2.3.2. Por el principio de equivalencia, y gracias a la métrica g (ya que g induce un isomorfismo entre T_pM y T_p^*M), los tensores necesarios para la cinemática y dinámica (velocidades, momentos angulares, tensor energía-momento, etc.) actúan en T_pM. La base natural para el espacio T_pM es $\{\partial/\partial x^\mu\}$ y con la métrica g se tiene $g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu) = g_{\mu\nu}$ como se vio en la sección 2.3.1. Como se verá más adelante no hay por qué inclinarse por la conexión de Levi-Civita salvo el hecho que introduce una menor cantidad de campos dinámicos, es decir la conexión de Levi-Civita no es independiente de la métrica.

Al tener el espacio-tiempo estructura de variedad diferenciable y los tensores actuar en el espacio tangente, la física es independiente de un cambio general de coordenadas ya que los tensores son independientes de dichos cambios como se vio en el capitulo 2. Esto elimina la distinción que existía en la Relatividad Especial donde las leyes físicas se describían en marcos de referencia inerciales, dotando a éstos de cierta preferencia respecto a los no-inerciales [22]. La Relatividad General democratiza esto y también fue una de las razones que incentivó de Einstein para desarrollar esta teoría. A esto también se lo conoce como **principio de covariancia general**.

3.1.2. Ecuaciones de Einstein

Según la Relatividad General, el movimiento de las partículas afectadas por un campo gravitatorio, que en la Gravitación Universal de Newton se atribuía a la acción a distancia con un objeto masivo, se debe a la geometría que adquiere el espacio-tiempo por la presencia de energía en el mismo. Como localmente el espacio sigue las reglas de la Relatividad Especial, localmente un objeto de prueba libre de fuerzas[3] seguirá una línea recta según Relatividad Especial. La trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo será entonces una geodésica (ver sección 2.3.2). En

[3]No se considera la fuerza gravitatoria ya que localmente podemos anular la gravedad vía el principio de equivalencia.

efecto, sea M la variedad espacio-tiempo y una partícula ubicada en el punto p de la misma siendo (U, φ) las coordenadas normales en torno a p. Si la partícula está libre su ecuación de movimiento según Relatividad Especial será

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0,$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula. En coordenadas normales en torno a p se tiene ${\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}(p) = 0$ y entonces por la ecuación (2.26) se tiene

$$\frac{D^2x}{d\tau^2} = 0,$$

donde $\frac{D}{d\tau}$ es la derivada covariante. Según el principio de equivalencia, este es el comportamiento de la partícula en el entorno de p. Como $\frac{D^2x}{d\tau^2}$ es un vector, si es nulo en un sistema de coordenadas lo será en cualquiera. Como la ecuación anterior es la ecuación de una geodésica, el movimiento de la partícula será tal que describirá una geodésica en la variedad M.

Las geodésicas se determinan a partir de la conexión afín con la ecuación (2.26) y la conexión, a su vez, es determinada por la métrica (suponiendo que la conexión es de Levi-Civita). Por lo tanto, el movimiento de la partícula se determina por la geometría del espacio-tiempo. Einstein estaba convencido que, a su vez, la energía que contenía el espacio-tiempo[4] era la responsable de alterar su geometría [22], [21]. Para cumplir con el principio de equivalencia y el principio de covariancia general el objeto que describa la energía contenida en el espacio-tiempo debe ser un tensor de cierto orden. Por ejemplo, para un continuo de partículas idénticas que no interactúan entre ellas, se puede ver (por ejemplo en [22]) que un tensor que cumple con estas características es el **tensor energía-momento** dado por

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} En & Env^1/c & Env^2/c & Env^2/c \\ cp^1n & p^1nv^1 & p^1nv^2 & p^1nv^3 \\ cp^2n & p^2nv^1 & p^2nv^2 & p^2nv^3 \\ cp^1n & p^3nv^1 & p^2nv^3 & p^3nv^3 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde p^i son las componentes espaciales del cuadri-momento $\mathbb{P} = (E/c, p^1, p^2, p^3)$ y nv^i las componentes espaciales del cuadri-vector densidad de partículas $\mathbb{N} = (nc, nv^1, nv^2, nv^3)$. Como $\mathbb{P}$ y $\mathbb{N}$ son cuadri-vectores, es decir tensores de orden $(1, 0)$, entonces las $T^{\mu\nu}$ definidas según (3.1) son las componentes de un tensor de orden $(2, 0)$. El tensor energía-momento contiene la información sobre la energía del continuo de partículas T^{00}, su flujo respecto a las tres direcciones espaciales T^{0i}, y su flujo de momentos en cada dirección T^{ij} (por ejemplo T^{12} es el flujo en la dirección x de la componente y del momento). Si bien la materia y energía pueden adquirir formas más complicadas que un continuo de partículas idénticas sin interacción, uno puede encontrar igual un tensor T tipo $(2, 0)$ que representa de manera covariante

[4]Esto incluye a la masa también ya que la masa es energía en reposo.

la materia y energía en un punto dado del espacio-tiempo [22]. Por ejemplo, para el caso de cuerpos macroscópicos se tiene que [23] $T^{\mu\nu} = (p + \rho)v^\mu v^\nu - pg^{\mu\nu}$ con p la presión, ρ la densidad y v^i la componente de la velocidad en la dirección i.

El tensor T que describe la energía y el momento del espacio-tiempo cumple que es simétrico, es decir $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ [22]. También sus componentes cumplen que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + {\Gamma^\mu}_{\mu\eta} T^{\eta\nu} + {\Gamma^\nu}_{\mu\eta} T^{\mu\eta} = 0, \tag{3.2}$$

La ecuación (3.2) es equivalente a decir que el tensor energía-momento se conserva localmente.

¿Cómo se manifiesta la gravedad en la geometría del espacio-tiempo? O, mejor dicho, ¿qué propiedad del espacio-tiempo se debe observar para inferir que éste está afectado por gravedad? La respuesta a esta pregunta es la curvatura. Ya se ha mencionado que el principio de equivalencia se aplica solamente un una región infinitesimal y por un intervalo de tiempo también pequeño. Si se imagina que en un laboratorio en caída libre se ponen dos pelotas de tenis, en un instante pequeño de tiempo para una persona dentro del laboratorio las partículas estarán en reposo. Pero a medida que el laboratorio se acerca al centro de la Tierra, la persona verá que las pelotas se acercan la una a la otra. Este efecto es el **efecto de marea**[5] y hace que trayectorias en principio 'paralelas' se acerquen [29]. Este efecto es equivalente al producido por la curvatura de una superficie de dos dimensiones, por ejemplo. Se puede decir que la gravedad induce curvatura en el espacio-tiempo. Esta curvatura no es solamente espacial, también lo es temporal como el caso del red-shift gravitatorio [22]. Entonces se podría decir que la masa y la energía son las responsables modificar el espacio-tiempo produciendo curvatura.

Ahora, la curvatura del espacio está caracterizada por un tensor de cuatro índices ${R^\eta}_{\mu\nu\lambda}$ como se vio en la sección 2.3.3. Sin embargo, el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ tiene dos índices solamente. Se podría reducir el tensor de curvatura a un tensor de dos índices y debido a las propiedades 2.4 de simetría de ${R^\eta}_{\mu\nu\lambda}$ este tensor, a menos de un un signo es el tensor de Ricci $\mathrm{Ric}^{\mu\nu}$ dado por (i) de la definición 2.14. El tensor $\mathrm{Ric}^{\mu\nu}$ es simétrico como $T_{\mu\nu}$ pero su divergencia no es cero. Sin embargo, como se vio al final de la sección 2.3.3 el tensor de Einstein $G^{\mu\nu} = \mathrm{Ric}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu}$ cumple que su divergencia es nula. Esto fue lo que llevó a Einstein a escribir sus ecuaciones de movimiento

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu},$$

donde κ es una constante a determinar. Esta constante debe ser tal que para masas y energías no muy grandes, así como velocidades mucho menores a la de la luz, la ecuación reproduzca la Gravitación Universal de Newton. Resulta ser que $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ y además, debido a que $g^{\mu\nu}$ es simétrico y con divergencia nula, se le puede agregar al miembro izquierdo de la ecuación el término $\Lambda g^{\mu\nu}$, con Λ una constante

[5]Este efecto es el responsable de las mareas que ocurren en la Tierra debido a la gravedad ejercida por la Luna.

llamada **constante cosmológica** por razones históricas. Entonces, las ecuaciones de Relatividad General que Einstein presentó en 1915 son

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Son diez ecuaciones en derivadas parciales de orden dos en la métrica y no son lineales, por lo que se conocen hasta ahora muy pocas soluciones exactas. Las ecuaciones (3.3) muestran el acoplamiento existente entre la energía y la geometría del espacio-tiempo. El espacio-tiempo actúa sobre la materia y le dice cómo moverse, mediante las geodésicas, y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse [21]. Hay que observar, sin embargo, que las ecuaciones (3.3) no determinan por completo la distribución y movimiento de la materia. En efecto, dichas ecuaciones no incluyen las ecuaciones de estado de la materia, por ejemplo la ecuación que relaciona la presión con la densidad si $T^{\mu\nu} = (p+\rho)v^\mu v^\nu - p g^{\mu\nu}$ (caso de cuerpos macroscópicos) [23].

Si se toma una región del espacio-tiempo donde no hay materia alguna se tiene $T^{\mu\nu} = 0$ y las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 0 \rightarrow \mathrm{Ric}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.4}$$

Esto no significa que el espacio-tiempo sea plano en este caso, para ello deben cumplirse las condiciones más fuertes ${R^\eta}_{\mu\nu\lambda} = 0$.

3.1.3. Ecuaciones de Einstein por Principio Variacional

Las ecuaciones de Einstein (3.3) se pueden deducir también a partir de un principio de mínima acción [23]. Para esto, primero hay que hallar la acción S del sistema. En 1915, casi simultáneamente al artículo definitivo de Einstein sobre la Relatividad General, el matemático Albert Hilbert concurrió a una charla en la que Einstein bosquejaba las ideas de su nueva teoría y dedujo cuál debía ser la acción más sencilla que cumpliera con los postulados de la Relatividad General, es decir covariancia universal y principio de equivalencia. Es por eso que a esta acción se la conoce como **acción de Einstein-Hilbert**[6] y se escribe

$$S_{EH} = \int \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{3.5}$$

Aquí la integral es efectuada en todo el espacio-tiempo, $\mathcal{R}$ es el escalar de curvatura y g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ cuyo signo de menos es porque el determinante es negativo en una variedad lorentziana. $\sqrt{-g}$ es elemento de volumen invariante de la variedad espacio-tiempo que se vio en la sección 2.4. Se mostrará cómo se

[6]Aunque el artículo de Hilbert salió publicado algunos días antes que el definitivo de Einstein sobre Relatividad General, la acción se llamó de Einstein-Hilbert ya que el primero confesó que la idea fue de Einstein y no suya.

deducen las ecuaciones de Einstein en el vacío a partir de esta acción. La derivación de la ecuación con materia (3.3) está por ejemplo en [23].

El campo independiente en la acción (3.5) es la métrica $g_{\mu\nu}$, por lo que para aplicar el principio de mínima acción hay que hacer variaciones de (3.5) respecto a $g_{\mu\nu}$. Entonces

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \delta \int g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int (\mathrm{Ric}_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta\mathrm{Ric}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g})d^4x.\end{aligned}$$

Por un lado se tiene

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g.$$

Se tiene que $\delta g = \partial g/\partial g_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Además $\partial g/\partial g_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$ donde $C_{\nu\mu}$ es el cofactor del elemento $g_{\mu\nu}$ y puede probarse que los $C_{\nu\mu} = gg^{\mu\nu}$, ver por ejemplo [30]. Entonces, $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ (ya que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$ implica que $\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$). Se puede escribir todo esto como

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu};$$

y sustituyendo en la variación de la acción se encuentra

$$\delta \int g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int (\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R})\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x.$$

Para calcular $g^{\mu\nu}\delta\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$ se adoptará un sistema de coordenadas localmente geodésico, es decir en un punto p se tiene ${\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}(p) = 0$. Hay que notar que $\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$ es la componente de un tensor ya que se vio en la sección 2.3.2 que la diferencia de dos conexiones es un tensor. Utilizando la definición del tensor de Ricci, entonces, se tiene que

$$g^{\mu\nu}\delta\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\delta {R^{\lambda}}_{\mu\lambda\nu} = g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\nu\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\lambda\mu}\right).$$

Recordando (2.28) y que se está en un sistema geodésico $\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\lambda} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta\mathrm{Ric}_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta{\Gamma^{\nu}}_{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(g^{\mu\nu}\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta{\Gamma^{\nu}}_{\nu\mu}\right) \\ &= \frac{\partial w^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}},\end{aligned}$$

donde $w^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta{\Gamma^{\nu}}_{\nu\mu}$. Como w^{λ} es la componente de un vector ($\delta{\Gamma^{\lambda}}_{\mu\nu}$ es la componente de un tensor) y se está en un sistema geodésico, en un sistema general de coordenadas debe valer

$$g^{\mu\nu}\delta\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}w^{\lambda}.$$

De la ecuación (2.31) se tiene ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}$. Si se recuerda ahora que $dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ y, por otro lado, $dg = \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ entonces $g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda}$. Todo esto lleva a que ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}$ y entonces

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda w^\lambda &= \frac{\partial w^\lambda}{\partial x^\lambda} + {\Gamma^\lambda}_{\lambda\nu} w^\nu = \frac{\partial w^\lambda}{\partial x^\lambda} + w^\nu \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{(\partial \sqrt{-g} w^\lambda)}{\partial x^\lambda}. \end{aligned}$$

En resumen, la parte de la acción en que se varía el tensor de Ricci queda

$$\int g^{\mu\nu} \delta \mathrm{Ric}_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x = \int \frac{(\partial \sqrt{-g} w^\lambda)}{\partial x^\lambda} d^4 x,$$

y según el teorema de Gauss se puede transformar a la integral w^λ extendida en una hipersuperficie que rodee al volumen cuadridimensional. Dado que las variaciones del campo son nulas en los límites de integración, este término es igual a cero. Así la variación δS_{EH} es

$$\delta S_{EH} = \int \left(\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4. \tag{3.6}$$

Dada la arbitrariedad de $\delta g^{\mu\nu}$, se llega a

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0,$$

que son las ecuaciones de Einstein en el vacío (3.4).

Se mostró aquí cómo obtener las ecuaciones de Einstein por principio de mínima acción ya que las ecuaciones de campo que aparecerán en este trabajo se deducirán por dicho principio.

3.2. Relatividad General en el Formalismo de Cartan

En varias correspondencias que mantuvo Einstein con el matemático Élie Cartan entre 1929 y 1932 se discutían sobre algunos supuestos en los que se basaba la Relatividad General. Cartan insistía que metricidad y paralelismo debían ser considerados como independientes mientras que Einstein replicaba que si el espacio en que vivimos poseía una métrica, era más económico suponer que la conexión podía ser derivada a partir de esa métrica [5].

Si bien para dimensiones menores o iguales a cuatro los resultados de los dos formalismos son idénticos, no ocurre lo mismo en dimensiones mayores. Además, el punto de vista adoptado por Cartan permite hacer mayor contacto con la Teoría de Fibrados, la cual se presentará en el capítulo 4. Los fibrados son el marco natural para desarrollar las teorías de Yang-Mills, que permiten describir tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, es decir la fuerte, débil y electromagnética. En estas teorías, las conexiones juegan un papel diferente al que juega la métrica. La métrica aparece como la encargada de la dinámica de los campos fermiónicos, mientras la conexión aparece como el responsable del acoplamiento entre los campos fermiónicos y la geometría del espacio-tiempo [5]. Adoptar el formalismo de Cartan permite, entonces, darle a la conexión y a la métrica la independencia que requiere una teoría de Yang-Mills. Por lo tanto, este formalismo puede arrojar luz sobre cómo pensar la gravedad como una teoría de gauge y mantener la esperanza de poder hallar un marco teórico común con las otras tres interacciones, si bien esto tiene bastantes complicaciones como se verá más adelante.

Si se piensa que la conexión es independiente de la métrica, en cada punto p del espacio-tiempo los tensores actuarán sobre el espacio tangente T_pM y su dual T_p^*M y su relación con el espacio de tensores en la variedad espacio-tiempo se hace a través del vielbein e_μ^a (ver sección 2.4). Esto le da a los vectores del espacio tangente independencia respecto a la variedad base, siempre y cuando los vielbeins cumplan con la condición (2.38) (ver sección 2.4)

$$g_{\mu\nu} = E^a{}_\mu E^b{}_\nu \eta_{ab}.$$

Debido a esto, la métrica queda determinada por los vielbeins. Sin embargo, se vio que dada una métrica $g_{\mu\nu}$ existen infinitos vielbeins $E^a{}_\mu$ que conducen a la misma métrica. Esto se debe a las diferentes elecciones de bases ortonormales que uno puede hacer en un espacio tangente. Si uno hace una 'rotación' Λ del vielbein $E^a{}_\mu$ tal que ésta cumpla

$$\Lambda^a{}_b \eta_{ac} \Lambda^c{}_d = \eta_{ad},$$

la métrica queda incambiada por la 'rotación' y esta condición implica que $\Lambda \in SO(m-1,1)$ llamado grupo de Lorentz. Se vio también en la sección 2.4 que $e^a = E^a{}_\mu dx^\mu$ transforma como un vector de Lorentz (o sea que $e'^a = (\Lambda)^a{}_b e^b$) y que la conexión 1-forma $\omega^a{}_b$ hace que si ϕ^a es un vector de Lorentz entonces $D\phi^a$ también es un vector de Lorentz, donde $D\phi^a = d\phi^a + \omega^a{}_b \phi^b$. Para esto, es necesario que $\omega^a{}_b$ transforme según (2.44). Conviene notar que con la base $\{e^a\}$, con la conexión 1-forma $\omega^a{}_b$ y sus productos y derivadas exteriores, pueden expresarse la propiedades geométricas de la variedad M. Además ellos son escalares respecto a transformaciones de coordenadas en la variedad, o sea difeomorfismos, ya que no tienen índices griegos $\mu\nu\lambda\ldots$. Precisamente por ser 1-formas, son invariantes ante transformaciones generales de coordenadas por eso son objetos naturales para tratar teorías que sean invariantes de coordenadas como la Relatividad General. Además, una teoría de gravedad de primer orden, es decir una acción que contenga derivadas de los campos independientes no mayor al segundo, solamente puede construirse con $e^a, \omega^a{}_b, R^a{}_b, T^a$ [5]. Esto se ve porque si uno hace derivadas covariantes de estos objetos siempre puede escribirlos por combinaciones de ellos mismos ya que, por ejemplo, $DR^a{}_b = 0$ o también $DT^a = R^a{}_b \wedge e^b$, por las identidades de Bianchi (2.41). Se tratará ahora de construir una acción compatible con la Relatividad General a partir de e^a y $\omega^a{}_b$ para la variedad espacio-tiempo, es decir una variedad lorentziana de dimensión cuatro. Una acción así construida será invariante frente a un difeomorfismo como se mencionó anteriormente. Desde el punto de vista de Cartan, la métrica y la conexión son campos independientes por lo que para obtener las ecuaciones de campo a partir de la acción habrá que hacer variaciones respecto a estos dos campos. Por el principio de equivalencia, la acción deberá ser invariante Lorentz también y para ello deberá también tener contraídos los índices latinos $a, b, c, \ldots$. Para contraer estos índices se necesita un tensor invariante Lorentz anti-simétrico como el tensor de Levi-Civita ϵ_{abcd}, definido como

$$\epsilon_{abcd} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad (abcd) \quad \text{es una permutación par de} \quad (0123), \\ -1 & \text{si} \quad (abcd) \quad \text{es una permutación impar de} \quad (0123), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Se puede mostrar la acción de Einstein-Hilbert escrita en el formalismo de Cartan como

$$S_{EH} = \int \epsilon_{abcd}(\alpha R^{ab} e^c e^d + \beta e^a e^b e^c e^d), \tag{3.8}$$

donde se ha omitido el símbolo $\wedge$ para denotar producto exterior de formas como se hará en el resto del trabajo.

Antes que nada, se puede escribir la ecuación (3.8) como

$$S_{EH} = \int \epsilon_{abcd}(\alpha R^{ab}{}_{fg} e^f e^g e^c e^d + \beta e^a e^b e^c e^d) = \int (\alpha \epsilon_{fgcd} R^{fg}{}_{ab} + \beta \epsilon_{abcd}) e^a e^b e^c e^d,$$

mostrando de forma explícita que se esta integrando sobre el elemento de volumen invariante de la forma mostrada en (2.46). Esta acción es compatible con la Relatividad General cumpliendo con el principio de equivalencia (por ser invariante Lorentz en cada espacio tangente) y covariancia universal (por ser escrito con formas libre de índices griegos $\mu, \nu, \lambda, \ldots$).

Conviene en este punto mostrar que la acción (3.8) conduce a las ecuaciones de Einstein en el vacío (3.4). Haciendo uso de los vielbeins, el primer término de (3.8) puede escribirse como

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \epsilon_{abcd} R^{ab}{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu e^c e^d = \epsilon_{abcd} E^a{}_\gamma E^b{}_\theta E^c{}_\alpha E^d{}_\beta R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta$$

Hay que notar que

$$\epsilon_{abcd} E^a{}_\gamma E^b{}_\theta E^c{}_\alpha E^d{}_\beta = \epsilon_{\gamma\theta\alpha\beta} \det(E) \tag{3.9}$$

Además, tomando determinante a ambos lados de (2.38) se tiene que $\det(E) = \sqrt{-g}$. La anti-simetría del producto de 1-formas hace que $dx^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \epsilon \mu\nu\alpha\beta d^4x$. Entonces

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\theta\alpha\beta} R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x.$$

Podemos usar ahora las propiedades de contracción de ϵ (ver apéndice A) de donde se obtiene $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\theta\alpha\beta} = -2(\delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\theta - \delta^\mu{}_\theta\delta^\nu{}_\theta)$, por lo que

$$\epsilon_{abcd}R^{ab}e^ce^d = -2(\delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\theta - \delta^\mu{}_\theta\delta^\nu{}_\theta)R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 2(R^{\nu\mu}{}_{\mu\nu} - R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x.$$

Recordando la definición de escalar de curvatura $\mathcal{R}$, se tiene

$$\epsilon_{abcd}R^{ab}e^ce^d = -4\mathcal{R}\sqrt{-g}d^4x,$$

y la constante α se encarga de que sea igual a la acción de (3.5). Para el término con $e^ae^be^ce^d$ se tiene

$$\epsilon_{abcd}e^ae^be^ce^d = \epsilon_{abcd}E^a{}_\mu E^b{}_\nu E^c{}_\alpha E^d{}_\beta = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sqrt{-g}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}d^4x = -24\sqrt{-g}d^4x.$$

La constante β hace que este término se transforme en término de la constante cosmológica de las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, la acción (3.8) es totalmente equivalente a la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica.

Hay que mostrar ahora que las las ecuaciones de campo obtenidas al variar la acción son equivalentes a las ecuaciones de Einstein en el vacío. La métrica y la conexión variarán de forma independiente, es decir habrá que tomar variaciones respecto a e^a y respecto a $\omega^a{}_b$. Variando la acción (3.8) se tiene

$$\delta S = \int \epsilon_{abcd}(\alpha\delta R^{ab}e^ce^d + 2\alpha R^{ab}e^c\delta e^d + 4\beta e^ae^be^c\delta e^d).$$

Se puede escribir δR^{ab} como

$$\begin{aligned} \delta R^{ab} &= \delta(d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb}) = d\delta\omega^{ab} + \delta\omega^a{}_c\omega^{cb} + \omega^a{}_c\delta\omega^{cb} \\ &= d\delta\omega^{ab} - \omega^{cb}\delta\omega^a{}_c + \omega^a{}_c\delta\omega^{cb} = d\delta\omega^{ab} + \omega^b{}_c\delta\omega^{ac} + \omega^a{}_c\delta\omega^{cb} \\ &= D(\delta\omega^{ab}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Se puede usar la regla de derivación de formas (2.14) para escribir

$$\begin{aligned} d(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^ce^d) &= D(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^ce^d) \\ &= \epsilon_{abcd}D(\delta\omega^{ab})e^ce^d - \epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}De^ce^d + \epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^cDe^d \\ &= \epsilon_{abcd}D(\delta\omega^{ab})e^ce^d + \epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^cT^d, \end{aligned}$$

usando la definición de torsión y en la primera igualdad se usó que $\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^ce^d$ es invariante Lorentz y, por lo tanto, coincide su derivada covariante con su derivada ordinaria. Al final se tiene

$$\delta S = \int d(\alpha\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^ce^d) + \int(2\alpha\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c + 4\beta e^ae^be^c)\delta e^d - \int 2\alpha\epsilon_{abcd}e^aT^b\delta\omega^{cd},$$

donde el primer término por el teorema de Stokes es igual a la integral en el borde de $\alpha\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^ce^d$ y esta se anula si o bien la variación de ω^{ab} se anula en el borde o bien la variedad no tiene borde. Como ω^{ab} y e^a son campos independientes, para que δS se anule debe cumplirse simultáneamente

$$\begin{aligned} 2\alpha\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c + 4\beta e^a e^b e^c &= 0, \\ 2\alpha\epsilon_{abcd}e^a T^b &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

La primera de las ecuaciones (3.11) es la ecuación de Einstein con constante cosmológica. En efecto,

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd}R^{ab}e^c &= \epsilon_{abcd}E^a{}_\gamma E^b{}_\theta E^c{}_\lambda R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu dx^\lambda \\ \epsilon_{abcd}e^a e^b e^c &= \epsilon_{abcd}E^a{}_\mu E^b{}_\nu E^c{}_\lambda dx^\mu dx^\nu dx^\lambda. \end{aligned}$$

Dado la ecuación (3.9), se puede ver que

$$\epsilon_{abcd}E^a{}_\mu E^b{}_\nu E^c{}_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}E_d{}^\alpha \det(E).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd}R^{ab}e^c &= \epsilon_{\gamma\theta\lambda\alpha}E_d{}^\alpha \det(E)R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu dx^\lambda \\ \epsilon_{abcd}e^a e^b e^c &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}E_d{}^\alpha \det(E)dx^\mu dx^\nu dx^\lambda. \end{aligned}$$

Podemos multiplicar por dx^β la primera ecuación (3.11) y se obtendrá

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\epsilon_{\gamma\theta\lambda\alpha}R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu} + 2\beta\epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha})E_d{}^\alpha \det(E)dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\beta \\ &= (\alpha\epsilon_{\gamma\theta\lambda\alpha}R^{\gamma\theta}{}_{\mu\nu} + 2\beta\epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha})E_d{}^\alpha \det(E)\epsilon^{\mu\nu\lambda\beta}d^4x. \end{aligned}$$

Utilizando las contracciones de ϵ del apéndice A se tiene que

$$\begin{aligned} \epsilon_{\gamma\theta\lambda\alpha}\epsilon^{\mu\nu\lambda\beta} = -12 \quad \times &\quad (\delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\theta\delta^\beta{}_\alpha - \delta^\mu{}_\theta\delta^\nu{}_\gamma\delta^\beta{}_\alpha - \delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\alpha\delta^\beta{}_\theta \\ &\quad +\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\gamma\delta^\beta{}_\theta + \delta^\mu{}_\theta\delta^\nu{}_\alpha\delta^\beta{}_\gamma - \delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\theta\delta^\beta{}_\gamma) \\ \epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\epsilon^{\mu\nu\lambda\beta} &= -6\delta^\beta{}_\alpha. \end{aligned}$$

Haciendo las contracciones queda

$$\mathrm{Ric}^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2}\mathcal{R}\delta^\beta{}_\alpha + \frac{\beta}{4\alpha}\delta^\beta{}_\alpha = 0.$$

O bajando índices

$$\mathrm{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\alpha\beta} + \frac{\beta}{4\alpha}g_{\alpha\beta} = 0,$$

que es la ecuación de Einstein con constante cosmológica y tensor energía-momento nulo. No confundir las constantes α y β con los índices del mismo nombre.

Resta por ver qué significado tiene la segunda ecuación de (3.11). Si se asume la constante α no nula, como el vielbein es invertible, e^a no serán nulos por lo tanto se debe cumplir que $T^a = 0$. Escribiéndolo en índices griegos, es decir en el sistema coordenado, se tiene

$$\frac{1}{2} E^b{}_\gamma T^\gamma{}_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu = 0,$$

implicando que $T^\gamma{}_{\mu\nu} = 0$ o, en otras palabras, que la conexión es simétrica (ver sección 2.3.3). Es interesante observar que se obtuvo la condición de torsión nula en dimensión cuatro sin tener que imponer esa condición a priori como en el punto de vista adoptado por Einstein. Se verá más adelante, sin embargo, que si la dimensión es mayor a cuatro se pueden obtener ecuaciones de movimiento para la gravedad con torsión no nula.

3.3. Soluciones de Agujeros Negros

En esta sección se va a tratar una solución particular de las ecuaciones de Einstein que juega un papel medular en este trabajo, la solución de agujero negro. Al principio se tomaron solamente como una solución particular pero, hoy en día, la comunidad astronómica los toma como objetos factibles en la naturaleza. A grandes rasgos, desde el punto de vista astrofísico, una estrella de masa M tiene tres posibles finales los cuales quedan determinados por dos masas críticas, la masa de Chandrasekhar[7] $M_{Ch} \approx 1.44 M_\odot$ y la masa de Oppenheimer-Volkov $M_{OK} \approx 1.5 - 3M_\odot$ [60]. Mientras la estrella quema combustible, la estabilidad de la misma se mantiene debido al equilibrio entre la presión por radiación y la fuerza de gravedad. Llegado el momento en que la estrella agota su combustible, no hay presión para oponerse a la fuerza de gravedad y comienza el colapso, aumentando la densidad de la estrella. Si $M < M_{Ch}$, el colapso continúa hasta que la densidad es suficientemente grande para que el material sea considerado como un gas de electrones degenerado [61, 62] resistiendo la fuerza de gravedad, y volviéndose la estrella estable. De esta forma, la estrella se convierte en una **enana blanca** y seguirá radiando energía hasta enfriarse totalmente[8]. Si $M_{Ch} < M < M_{OK}$, entonces la densidad de gas de electrones degenerado no podrá retener la fuerza de gravedad y la estrella seguirá colapsando hasta llegar a formarse un gas de neutrones degenerado. En este caso la estrella es una **estrella de neutrones** y se estabiliza ya que la densidad de neutrones degenerados evita el colapso gravitacional. Finalmente, si $M > M_{OK}$ ya no habrá degeneración de materia posible que evite el colapso total y es cuando se forma un **agujero negro**. Actualmente, la existencia de agujeros negros puede inferirse por la acreción del material que está a su alrededor, ya sea en el caso de material de una estrella

[7] El símbolo $M_\odot$ representa la masa solar que es en unidades del Sistema Internacional aproximadamente 1.99×10^{30} Kg [63].

[8] Se dice que una enana blanca después de enfriarse totalmente, es decir cuando no emite más radiación, se transforma en una **enana negra**. Como el tiempo de enfriamiento estimado de una enana negra es superior a la edad actual estimada del Universo, no se espera que existan todavía enanas negras.

compañera para el caso de agujero negro ordinario o material galáctico para el caso de agujeros negros supermasivos.

Un agujero negro es un objeto tan denso que su campo gravitatorio es suficientemente grande para que en sus proximidades ni siquiera la luz pueda escapar y, por lo tanto, es completamente negro. Ya a finales del siglo XVIII, John Mitchell y Pierre de Laplace conjeturaron que la teoría newtoniana permitía que existieran objetos con un campo gravitatorio tan fuerte como para que la luz no pudiera escapar de su superficie [29, 60]. De acuerdo a esta teoría, la velocidad de escape v_e de un objeto de radio R y masa M es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Esta velocidad es mayor que la velocidad de la luz c si el radio es menor que el radio crítico R_c

$$R_c = \frac{2GM}{c^2}. \tag{3.12}$$

En 1916, al poco tiempo que Einstein publicara sus ecuaciones de campo de Relatividad General, Karl Schwarzschild presentó una solución no trivial a dichas ecuaciones que tenían simetría esférica. El resultado es conocido como **métrica de Schwarzschild** y es una generalización de las coordenadas esféricas planas que describe la geometría exterior a un objeto de masa M sin rotación localizado en el origen. El cuadrado de elemento de línea ds^2 a través de la métrica de Schwarzschild se puede escribir como [21]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{3.13}$$

donde t es la coordenada temporal y (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas usuales. En 1923, Birkoff demostró un importante teorema que afirma que una región del espacio que tenga simetría esférica y cumpla las ecuaciones de Einstein debe ser una solución de Schwarzschild. Por lo tanto, la métrica de Schwarzschild es la solución más general de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y puede describir la geometría exterior de cualquier objeto central que no rote, incluyendo un agujero negro para $r > 2M$.

La métrica (3.13) tiene un comportamiento particular en $r = 2M$. Para una partícula viajera en caída libre, este punto es un punto de no-retorno es decir la partícula no puede salir una vez ingresa a la zona $r < 2M$ ya que no es posible para una partícula de luz 'avanzar' hacia $r > M$ [29]. Este radio de valor $r = 2M$ recibe el nombre de **radio de Schwarzschild** y se puede ver que en unidades $[G] = [c] = 1$ es igual al radio crítico (3.12). La métrica (3.13) parece que tuviera una singularidad en $r = 2M$, ya que en ese caso $g_{tt} = 0$ y g_{rr} se vuelve infinito. Sin embargo, uno no puede estar seguro si este mal comportamiento de la métrica se debe a una singularidad física o a una mala elección del sistema de coordenadas. En el caso de $r = 2M$ ocurre lo segundo, como puede verse hallando el tensor de curvatura en ese punto [21], donde hay una singularidad solamente en $r = 0$. Vimos más arriba que $r = 2M$ es el punto de no-retorno pero no es una singularidad[9]. Para solucionar esto, se debe construir un nuevo sistema coordenado que no presente problemas en $r = 0$. Una posible solución es utilizar la **métrica de Kruskal-Szekeres**, la cual tiene un buen comportamiento en $r = 2M$. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres u y v pueden escribirse a partir de las coordenadas de Schwarzschild como [21]

$$
\begin{aligned}
u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), & r > 2M,\\
v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), & r > 2M,\\
u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), & r < 2M,\\
v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), & r < 2M.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

De esta manera, se puede escribir también r implícitamente en función de u y v como

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp^{\frac{r}{2M}} = u^2 - v^2.$$

Se ve aquí que en el sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres, la singularidad en $r = 0$ está localizada en $v^2 - u^2 = 1$. En realidad hay dos singularidades

$$v = +\sqrt{1 + u^2} \qquad \text{y} \qquad v = -\sqrt{1 + u^2},$$

ambas correspondientes a $r = 0$.

El cuerpo central puede tener además de masa M una carga eléctrica Q diferente de cero asociada. En 1918, Hans Reissner y Gunnar Nordström encontraron una solución de las ecuaciones de Einstein para un cuerpo con carga no nula [21]. Cuando el cuerpo central de masa M rota ya no hay simetría esférica y la solución a las ecuaciones de Einstein son un poco más complicadas. En 1963, Roy Kerr encontró una solución para un objeto con momento angular no nulo y en 1965 Ezra Newman halló la generalización a un objeto con momento angular y cargas no nulas. Esta última solución es conocida como la **métrica de Kerr-Newman**. En el caso de objetos rotantes, el punto de no-retorno u horizonte de eventos, es decir el punto donde ni siquiera la luz puede escapar, ya no coincide con el radio de Schwarzschild [29].

Los agujeros negros son interesantes, no solamente astrofísicamente, por ser objetos bastante comunes en el Universo [29] o porque pueden ser descriptos por soluciones exactas relativamente sencillas de las ecuaciones de Einstein. Debido a los teoremas 'no hair' (sin pelos), los agujeros negros son en esencia objetos físicamente simples en el sentido que pueden ser descriptos solamente con su masa, momento angular y, eventualmente, su carga. Esto hace que casi cualquier teoría de gravedad

[9] Se puede pensar que la métrica de Schwarzschild 'esconde' la geometría existente en $r < 2M$.

tenga soluciones de tipo agujero negro y es por eso que son objetos teóricos importantes para poder testear el comportamiento de nuevas teorías de gravedad que generalicen las ecuaciones de Einstein. Además, los agujeros negros tienen propiedades termodinámicas que pueden tenerse en cuenta para arrojar luz sobre el problema de cuantización de la gravedad [52]. Es por esta razón que para el modelo de gravedad g-WZW (ver capítulo 6), que se estudia en este trabajo, se van a analizar las soluciones de agujeros negros y sus propiedades termodinámicas (ver capítulo 7).

Capítulo 4

Teorías Gauge y Fibrados

En el capítulo 3 se vio cómo se puede escribir Relatividad General en el formalismo de Cartan. Este formalismo permite deducir las ecuaciones de Einstein en el lenguaje de formas diferenciales, haciendo que sea naturalmente invariante por difeomorfismos, siendo esto compatible con el principio de covariancia general de la teoría. Además de esto, en el formalismo de Cartan la acción es construida de manera tal que sea invariante por transformaciones de Lorentz en el espacio tangente en cada punto de la variedad espacio-tiempo. Esto último, hace explícita la diferencia entre la variedad y el espacio tangente y permite una descripción en lo que se denomina matemáticamente como **fibrados tangentes**. Por otro lado, las tres fuerzas restantes de la naturaleza (interacción electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil) son teorías gauge y éstas son descriptas matemáticamente por la Teoría de Fibrados. Ya que los fibrados tangentes son un caso particular de esta teoría, el formalismo de Cartan de la Relatividad General hace más transparente la comparación entre teorías gauge y gravitación.

Después de una introducción básica a teorías gauge clásicas , en este capitulo se mostrará el formalismo matemático adecuado para su descripción que, como se dijo más arriba, son los fibrados. Esto va a permitir un mejor marco para generalizar la gravedad a dimensiones mayores de manera que ésta sea invariante bajo ciertas simetrías.

4.1. Teorías Gauge

A grandes rasgos, una teoría gauge[1] es una teoría de campos en donde la acción construida tiene una cierta simetría que depende de cada punto del espacio-tiempo. A esta simetría se la llama **simetría gauge** y es descripta por un cierto **grupo de simetría**. En esta sección se va a explicitar qué quiere decir esto. La herramienta matemática que permite lidiar con simetrías continuas como las que aquí se tratarán

[1]Su nombre en español sería 'teorías de calibre' o 'teorías de contraste' pero en este trabajo se la seguirá llamando teoría gauge.

son los **grupos de Lie** con sus respectivas **álgebras de Lie** que, por referencias, se recomienda consultar [34], [35], [36].

La primera teoría gauge conocida es el electromagnetismo, donde el grupo de simetría es el grupo $U(1)$. En 1954, Chen Ning Yang y Robert Mills generalizaron la simetría de la teoría electromagnética para simetrías descriptas por grupos no-conmutativos buscando una explicación a las interacciones nucleares fuertes, que de forma indirecta es la responsable de mantener unidos a los protones y neutrones en el núcleo atómico. A estos modelos se los llama teorías gauge no-abelianas y, si bien no fueron satisfactorias en su formulación original, fueron revividas por Sheldon Glashow, Steven Weinberg y Abdus Salam para describir las interacciones nucleares débiles y unificarlas con la teoría electromagnética por un mecanismo de ruptura espontánea de simetría [33], [31].

Si bien las teorías gauge surgieron desde un punto de vista de Teoría Cuántica de Campos, se puede introducirlas y hacerles un tratamiento totalmente clásico o semi-clásico [31]. En esta sección se seguirá esta línea ya que sólo se pretende introducir el concepto de teoría gauge y, por lo tanto, se omitirán todos los éxitos que estas teorías han tenido en la renormalización de los campos, por ejemplo. Se mostrará un caso sencillo de teoría gauge abeliana (con grupo conmutativo) y luego un ejemplo para el caso no-abeliano.

4.1.1. Ejemplo de Teoría Gauge Abeliana: Grupo $U(1)$

Para ilustrar el concepto de teoría gauge, se mostrará un ejemplo sencillo de una teoría con simetría $U(1)$ conocida como electrodinámica escalar [31]. Por ahora, se asumirá que $U(1)$ es el conjunto de complejos de norma unidad[2] que pueden caracterizarse como $e^{i\alpha(x)}$, cuya operación de multiplicación es conmutativa y por eso se dice que $U(1)$ es un grupo abeliano. La electrodinámica escalar consiste de una acción de un campo escalar complejo[3] acoplado con el campo electromagnético. Concentrándose primero en la parte del campo escalar φ, ya que es invariante por transformaciones de Lorentz, si tiene una masa m la acción se puede escribir como

$$S = \int \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*\right) d^4x,$$

donde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Las ecuaciones de campo se deducen a partir de la acción anterior haciendo variaciones respecto a los campos φ y φ^*, donde dichas variaciones se

[2]Este grupo deja invariante la norma de los números complejos y, por lo tanto, sólo produce rotaciones en el plano complejo.

[3]Escalar se refiere a que es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

considerarán independientes. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \left(\partial_\mu\varphi\delta\partial^\mu\varphi^* + \partial^\mu\varphi^*\delta\partial_\mu\varphi - m^2\varphi\delta\varphi^* - m^2\varphi^*\delta\varphi\right) d^4x \\
&= \int \left(\partial^\mu(\partial_\mu\varphi\delta\varphi^*) - \partial^\mu\partial_\mu\varphi\delta\varphi^* + \partial_\mu(\partial^\mu\varphi^*\delta\varphi) - \partial_\mu\partial^\mu\varphi^*\delta\varphi\right. \\
&\quad \left. -m^2\varphi\delta\varphi^* - m^2\varphi^*\delta\varphi\right) d^4x \\
&= \int \left(\partial^\mu(\partial_\mu\varphi\delta\varphi^* + \partial_\mu\varphi^*\delta\varphi) - (\partial^\mu\partial_\mu\varphi + m^2\varphi)\delta\varphi^* - (\partial_\mu\partial^\mu\varphi^* + m^2\varphi^*)\delta\varphi\right) d^4x,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se integró por partes y se utilizó la linealidad de δ para $\delta\partial = \partial\delta$. La primera integral es una derivada total y asumiendo la condiciones de borde $\delta\varphi = \delta\varphi^* = 0$ se anulará. Si los campos φ y φ^* son independientes se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\partial\mu\varphi + m^2\varphi &= 0 \\
\partial^\mu\partial\mu\varphi^* + m^2\varphi^* &= 0,
\end{aligned}$$

donde una es la complejo conjugada de la otra. Estas son las ecuaciones de un campo con masa. Si se considera ahora la interacción de este campo escalar complejo con un campo electromagnético, según la electrodinámica, la ecuación del campo electromagnético A^μ debe ser

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu,$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, e es la constante de acoplamiento. La corriente debe construirse a partir del campo escalar complejo y debe conservarse, es decir

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

La acción, que por variaciones sobre A^μ, φ y φ^* lleva a estas ecuaciones de campo, sería (teniendo en cuenta la dinámica y masa del campo escalar complejo)

$$S = \int \left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej^\mu A_\mu\right) d^4x. \tag{4.1}$$

¿Cómo encontrar la corriente conservada j^μ a partir del campo escalar complejo? Para esto, se pondrá el requerimiento que la acción (4.1) sea invariante por transformaciones *locales* de la forma

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\to \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \\
\varphi^*(x) &\to \varphi'^*(x) = e^{-i\alpha(x)}\varphi^*(x) \\
A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

La transformación es local porque α depende de cada punto de la variedad espacio-tiempo. La acción del electromagnetismo libre es invariante frente a estas transformaciones. Sin embargo, la parte del campo escalar complejo en la acción (4.1) no lo es, ya que

$$\partial_\mu\varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu\varphi(x) + i\varphi\partial_\mu\alpha(x)).$$

Para solucionar este problema, se introduce la **derivada covariante** $D_\mu\varphi$ de manera que pueda reducirse a $\partial_\mu\varphi$ en el límite de que el campo sea débil y que transforme uniformemente bajo las transformaciones (4.2), es decir

$$(D_\mu\varphi)' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\varphi.$$

Puede verse de las transformaciones (4.2) que si se define

$$D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi(x) - ieA_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi,$$

entonces se cumplen esos requisitos.

Se puede escribir ahora la acción invariante por transformaciones (4.2) como

$$S = \int \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^* D^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi\right) d^4x,$$

Hay que notar que, como el campo φ^* se tomó independiente de φ, su derivada covariante se define $D_\mu\varphi^* \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*$ de forma que transforme uniformemente como $(D_\mu\varphi^*)' = e^{-i\alpha}D_\mu\varphi^*$. Se ve entonces que $D_\mu\varphi^* = (D_\mu\varphi)^*$. Comparando esta acción con la (4.1) uno obtiene j_μ como

$$j_\mu = -i(\varphi^* D_\mu\varphi - D_\mu\varphi^*\varphi). \tag{4.3}$$

Tomando variaciones respecto a la acción se tiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu, \\ D_\mu D^\mu\varphi + m^2\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

La densidad de corriente (4.3) se conserva. En efecto, se tiene

$$\partial_\mu j^\mu = -i(\partial_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + \varphi^*\partial_\mu D^\mu\varphi - (D_\mu\varphi)^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu D^\mu\varphi^*\varphi).$$

Se pueden reescribir los dos primeros términos del lado derecho como

$$\begin{aligned} \partial_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + \varphi^*\partial_\mu D^\mu\varphi &= \partial_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + ieA_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + \varphi^*\partial_\mu D^\mu\varphi - ie\varphi^* A_\mu D^\mu\varphi \\ &= D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi + \varphi^* D_\mu D^\mu\varphi. \end{aligned}$$

Esto y la ecuación análoga para los dos últimos términos da como resultado

$$\partial_\mu j^\mu = -i(\varphi^* D_\mu D^\mu\varphi - \varphi D_\mu D^\mu\varphi^*) = 0,$$

donde en la segunda igualdad se hizo uso de las ecuaciones de campo (4.4). Esto hace consistente las ecuaciones de campo, ya que ahora

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0,$$

como lo requiere la anti-simetría de $F^{\mu\nu}$.

Por lo tanto, el requerimiento de la invariancia de la acción respecto a las transformaciones (4.2) condujo a unas ecuaciones que acoplan el electromagnetismo con un campo escalar complejo de manera consistente, con corriente conservada y también invariantes por (4.2). Para cumplir el requerimiento de invariancia frente a las transformaciones (4.2) hubo que reemplazar las derivadas comunes por derivadas covariantes. La derivada covariante dada aquí no es exactamente igual a que se vio en el capítulo 2 ya que, por ejemplo, la derivada covariante dada en el capítulo 2 permitía comparar dos vectores en diferentes puntos de la variedad mientras que la mostrada aquí no cambia el punto en donde se evalúa el campo. Sin embargo, existe cierta relación entre las dos definiciones y esto se verá mejor en la sección 4.2.

4.1.2. Ejemplo de Teoría Gauge No-Abeliana: Grupo $SU(2)$

En la sección 4.1.1 se mostró un ejemplo de teoría gauge abeliana con el grupo $U(1)$. Ahora se va a extender el concepto para aplicarlo a una teoría con simetría dada por un grupo no-abeliano. Para ver bien esta generalización se dará el ejemplo de una acción invariante por el grupo $SU(2)$ [31]. Para este caso, el grupo $SU(2)$ se puede pensar como el conjunto de matrices unitarias complejas 2×2 de determinante unidad y, por lo tanto, que deja invariante la norma de un vector complejo de dos entradas.

Para empezar, se considerará una teoría con dos escalares complejos y se hará que formen un vector complejo de dos entradas

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

La densidad lagrangiana[4] de esta teoría será

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2.$$

Se puede ver que $\mathcal{L}$ es invariante por transformaciones del grupo $SU(2)$,

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \omega \varphi'(x), \qquad\qquad \omega \in SU(2),$$

donde ω no depende del punto de la variedad espacio-tiempo.

Ahora, se buscará modificar $\mathcal{L}$ para que sea invariante por transformaciones $SU(2)$ *locales*, es decir que ω dependa del punto de la variedad espacio-tiempo

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \omega(x)\varphi(x), \qquad\qquad \omega(x) \in SU(2). \tag{4.5}$$

Los dos últimos términos de la lagrangiana $\mathcal{L}$ son invariantes por (4.5) pero no así el término cinético, ya que

$$\partial_\mu \varphi'(x) = \varphi(x)\partial_\mu \omega(x) + \omega(x)\partial_\mu \varphi(x),$$

[4] En este trabajo se utilizará indistintamente el término densidad lagrangiana como lagrangiana ya que el contexto no da lugar a confusiones.

y, por lo tanto, $\mathcal{L}(\varphi')$ ahora contiene términos con $\partial_\mu\omega$ que no se cancelan. Para poder escribir un lagrangiano invariante por (4.5) se reemplazará la derivada convencional por la derivada covariante, como se hizo en la sección 4.1.1, de manera que transforme

$$(D_\mu\varphi)' = \omega D_\mu\varphi.$$

Esto se puede hacer introduciendo un campo vectorial $A_\mu(x)$ y escribiendo

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + A_\mu\varphi.$$

Hay que encontrar ahora la estructura del campo $A_\mu(x)$ y para esto se va a determinar primero cómo debe transformar bajo las transformaciones (4.5). Para esto vemos que, por un lado

$$(D_\mu\varphi)' = \partial_\mu\varphi' + A'_\mu\varphi' = \omega\partial_\mu\varphi + \partial_\mu\omega\varphi + A'_\mu\omega\varphi,$$

mientras que por otro lado (por la exigencia de cómo debe transformar la derivada covariante)

$$(D_\mu\varphi)' = \omega D_\mu\varphi = \omega\partial_\mu\varphi + \omega A_\mu\varphi.$$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta que φ es una matriz columna cualquiera, se tiene

$$A_\mu \to A'_\mu = \omega A_\mu\omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1}, \tag{4.6}$$

donde se usó que $\omega\omega^{-1} = 1$ y entonces $\omega\partial_\mu\omega^{-1} = -\partial_\mu\omega\cdot\omega$. Para saber el rango de valores que puede tomar el campo A_μ, se considera una transformación gauge infinitesimal, es decir una transformación como (4.6) con $\omega(x) = 1 + \epsilon(x)$, donde $\epsilon(x)$ toma valores en el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$. Se ve entonces que, a orden más bajo en ϵ,

$$\omega\partial_\mu\omega^{-1} = -\partial_\mu\epsilon(x),$$

mostrando que el segundo término de (4.6) toma valores en el álgebra de Lie. Por lo tanto, el álgebra de Lie debe estar contenido en el rango de valores que toma A_μ. Se puede probar que A_μ toma valores en el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$.

Al campo $A_\mu(x)$, que toma valores en el álgebra de Lie del grupo gauge, se lo llama **campo gauge** o **campo de Yang-Mills**. Las reglas de transformación para el campo escalar y el campo gauge según (4.5) y (4.6) es

$$\begin{aligned} A_\mu &\to A'_\mu = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \omega(x)\partial_\mu\omega^{-1} \\ \varphi(x) &\to \varphi'(x) = \omega(x)\varphi(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

El lagrangiano del campo escalar invariante bajo transformaciones gauge (4.7) es

$$\mathcal{L} = (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2.$$

Si se quiere darle dinámica al campo $A_\mu(x)$ habrá que agregarle a este lagrangiano un término escalar que contenga derivadas del campo gauge. Un candidato es

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

con g constante y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{4.8}$$

$F_{\mu\nu}$ toma valores en el álgebra de Lie y $\mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es un producto interno en el álgebra conocido como **forma de Killing** que es definido negativo [36], [34]. Ya que se puede probar que $F_{\mu\nu}$ transforma por (4.6) como

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x)F_{\mu\nu}(x)\omega(x)^{-1},$$

entonces $\mathcal{L}_A$ es definido positivo e invariante por (4.7). Se tiene ahora el lagrangiano del campo escalar acoplado con un campo gauge

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2, \tag{4.9}$$

invariante por (4.6).

Ya que A_μ y $F_{\mu\nu}$ toman valores en el álgebra de Lie, en este caso del grupo $SU(2)$, se pueden descomponer en los generadores del álgebra de Lie como

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= -i\frac{g}{2}\sigma^a A^a_\mu \\ F_{\mu\nu}(x) &= -i\frac{g}{2}\sigma^a F^a_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde $a = 1, 2, 3$, σ^a son las matrices de Pauli (que generan el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$) y $A^a_\mu(x)$, $F^a_{\mu\nu}(x)$ son campos reales. De la definición (4.8) de $F_{\mu\nu}$ se tiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= -i\frac{g}{2}\sigma^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) + (ig)^2 A^a_\mu A^b_\nu [\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}] \\ &= -i\frac{g}{2}\sigma^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) - g^2 A^a_\mu A^b_\nu i\epsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2} \\ &= -i\frac{g}{2}\sigma^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu. \end{aligned}$$

El tensor de Levi-Civita ϵ^{abc} viene como resultado de las reglas de conmutación de los generadores $\sigma^a/2$, es decir son las constantes de estructura del álgebra de $SU(2)$. Por lo tanto, las componentes reales $F^a_{\mu\nu}$ se escriben como

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu.$$

Se puede escribir el término lagrangiano que contiene la dinámica de A_μ como

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g}\mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2g}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}(-ig)^2\mathrm{Tr}\frac{\sigma^a}{2}\frac{\sigma^b}{2} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a},$$

Haciendo variaciones de la acción (4.9) respecto a los campos gauge y campos escalares, se obtienen las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} (D_\mu F^{\mu\nu})^a &= gj^{\mu a} \\ D_\mu D^\mu\varphi + m^2\varphi + 2\lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $J^a_\nu = -i(\varphi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} D_\nu \varphi - D_\nu \varphi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \varphi)$.

El tratamiento hacho en esta sección se puede generalizar a otros grupos no-abelianos. Solamente hay que sustituir los generadores $\sigma^a/2$ del grupo $SU(2)$ por los generadores del álgebra de Lie que quiera considerarse y las constantes ϵ^{abc} por las constantes de estructura correspondientes. Existen casos donde los campos escalares en vez de representarse como aquí (representación fundamental) pueden tomar valores en el álgebra de Lie del grupo gauge (representación adjunta), que en el caso del grupo $SU(2)$ sería un vector columna formado por tres campos reales [31].

Con estos dos ejemplos se pretendió mostrar como al imponer una invariancia en el lagrangiano bajo un cierto grupo se puede construir una teoría coherente de campos de materia acoplados con campos de interacción (campos gauge). En la sección 4.2 se va a mostrar la teoría matemática adecuada para estudiar las teorías gauge y poder analizar algunas de sus características fundamentales.

4.2. Teoría de Fibrados

En la sección anterior se vio cómo se podía extender el concepto de derivada, al de derivada covariante, para poder hacer una teoría que sea invariante frente a un grupo de simetría. Esta derivada covariante tiene una teoría matemática adecuada para ser descripta que son los fibrados.

En esta sección se van mostrar algunas nociones de fibrados, no solamente como generalización de lo visto en la sección anterior, sino para entender además las clases características y en particular las clases de Chern, las cuales dan un marco teórico adecuado a las formas de Chern-Simons y transgresiones. Las referencias importantes en la sección son [16] y [20].

Antes de pasar a dar una definición formal de los fibrados principales, conviene dar una motivación física para la misma. Para ello se tomará como ejemplo la mecánica ondulatoria [37]. Si M es el espacio-tiempo, una partícula en esta teoría puede ser descripta por la función de onda $\psi : M \to V$, donde V es un espacio vectorial (típicamente el conjunto los números complejos $\mathbb{C}$). Se escoge una base en V que corresponde a ciertos estados de la partícula. Implícito en $\psi(x)$ es la elección de un marco de referencia en x, donde por marco de referencia no quiere decir necesariamente una elección de los ejes espacio-temporales sino que también puede querer decir la elección del ángulo de fase cero, por ejemplo. Sea P_x el espacio de todos los posibles marcos de referencia en x. Dos marcos de referencia están relacionados por un elemento de un grupo de transformaciones G (por ejemplo, las rotaciones del ángulo de fase), es decir si $p \in P_x$ y $g \in G$ entonces pg denota el marco transformado. Esto produce una transformación en V también de la forma $w \mapsto g \cdot w$, con $w \in V$. Si $\psi(p)$ es el valor de ψ relativo a $p \in P_x$, entonces $\psi(pg) = g^{-1} \cdot \psi(p)$ es el valor de ψ relativo a pg. Una concatenación suave P de los P_x a lo largo de $x \in M$ se llama **fibrado principal** con grupo G; P_x es la fibra sobre x. Si se elige $p \in P_x$, entonces el mapa $p \mapsto pg$ muestra una equivalencia topológica entre G y P_x, pero en general

P no es equivalente a $M \times G$ debido a que puede estar 'enrollado' sobre M.

Si U es un entorno de M, entonces el mapa $\sigma_U : U \to P$ tal que $\sigma_U(y) \in P_y$, $\forall y \in U$ es una elección de gauge (es una elección continua del marco de referencia). Ya se vio que ψ se puede pensar como un mapa $\psi : P \to V$ tal que $\psi(pg) = g^{-1} \cdot \psi(p)$. Sin embargo, dada una elección de gauge $\sigma_U : U \to P$, podemos 'bajar' ψ al entorno $U \subset M$ para obtener una función de onda local $\psi_U : U \to V$ dada por $\psi_U(y) = \psi(\sigma_U(y))$, para $y \in U$. Si $\sigma_W : W \to P$ es otro gauge, se puede escribir $\sigma_W(y) = \sigma_U(y) g_{UW}(y)$ donde $g_{UW} : U \cap W \to G$. Por lo tanto, se tiene $\psi_W(y) = \psi(\sigma_W(y)) = \psi(\sigma_U(y) g_{UW}(y)) = g_{UW}(y)^{-1} \cdot \psi_U(y)$, que dice cómo transforma las funciones de onda locales cuando se cambia el gauge.

Las cantidades físicas deben ser independientes de la elección de gauge, al contrario de las funciones de onda. Por eso, se construye una acción que tenga la función de onda y sus derivadas pero que sea independiente de gauge. Como se vio en la sección anterior, esto se logra utilizando derivadas covariantes de la función en vez de derivadas ordinarias. Para esto, uno debe introducir el potencial gauge A que vive en P y transforma de una manera particular.

Se pasará ahora a formalizar un poco lo esbozado en los párrafos anteriores a través de algunas definiciones [16].

Definición **4.1** Un **fibrado diferenciable** (E, π, M, F, G) consiste de los siguientes elementos:

(i) Una variedad diferenciable E llamada el **espacio total**.

(ii) Una variedad diferenciable M llamada el **espacio base**.

(iii) Una variedad diferenciable F llamada la **fibra**.

(iv) Un mapa sobreyectivo $\pi : E \to M$ llamado **proyección**. A la imagen inversa $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ se la llama fibra en p.

(v) Un grupo de Lie G llamado **grupo de estructura**, que actúa sobre F por la izquierda.

(vi) Un cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de M con un difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi\phi(p, f) = p$. Al mapa ϕ_i se lo llama trivialización local.

(vii) Si se escribe $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, el mapa $\phi_{i,p} : F \to F_p$ es un difeomorfismo. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se requiere que $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \to F$ sea un elemento de G. Por lo tanto, ϕ_i y ϕ_j están relacionados por un mapa continuo $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ como $\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p) f)$. A las $\{t_{ij}\}$ se las llama **funciones de transición**.

Para simplificar la notación, se utilizará E para denotar el fibrado $(E, \pi, M, F, G,)$.

Estrictamente hablando, la definición de fibrado debe ser independiente del cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de M. Matemáticamente la definición 4.1 se utiliza para definir un **fibrado coordenado** $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$. Dos fibrados coordenados $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ y $(E, \pi, M, F, G, \{V_i\}, \{\varphi_i\})$ se dice que son **equivalentes** si $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\} \cup \{V_i\}, \{\phi_i\} \cup \{\varphi_i\})$ es de nuevo un fibrado coordenado. Un fibrado es definido como una clase de equivalencia de fibrados coordenados.

Si todas las funciones de transición de la definición 4.1 son la identidad, entonces el fibrado se llama **fibrado trivial**. Un fibrado trivial E es un producto directo $M \times F$.

Dado un fibrado E, una **sección** $s : M \to E$ es un mapa suave que satisface $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Se tiene que $s(p)$ es un elemento de $F_p = \pi^{-1}(p)$. Al conjunto de secciones en M se lo denota como $\Gamma(M, E)$. Una sección que es definida en un entorno U de M es llamada **sección local** y $\Gamma(M, U)$ denota el conjunto de secciones locales en U. Un **fibrado principal** es un fibrado E cuya fibra F es idéntica al grupo de estructura G. Un fibrado principal se denota como $P(M, G)$ y puede definirse la acción del grupo G por la derecha de la siguiente manera. Dada una trivialización local $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ por $\phi^{-1}(u) = (p, g_i)$, con $u \in \pi^{-1}(U_i)$ y $p = \pi(u)$, la acción por la derecha de G sobre $\pi^{-1}(U_i)$ está definida por

$$ua = \phi_i(p, g_i a) \equiv R_a u,$$

para cualquier $a \in G$ y $u \in \pi^{-1}(p)$. Esta acción por la derecha se puede probar que es independiente de la trivialización local. Si $P(M, G)$ es un fibrado principal, hay una correspondencia natural entre una sección local s_i y una trivialización local ϕ_i mediante $s_i(p) = \phi_i(p, e)$, donde e es el elemento neutro del grupo G. Si $p \in U_i \cap U_j$, las secciones $s_i(p)$ y $s_j(p)$ se pueden relacionar de la forma

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p).$$

Un **fibrado vector** E es un fibrado cuya fibra F es un espacio vectorial. Si F es $\mathbb{R}^k$, las funciones de transición pertenecen a $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, ya que este grupo mapea $\mathbb{R}^k$ en sí mismo de manera isomorfa. Análogamente, si F fuera $\mathbb{C}^k$ entonces el grupo de estructura sería $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. El ejemplo más importante de fibrado vector es el fibrado tangente, el cual se define como la colección de espacios tangentes de una variedad diferenciable. Si E es un fibrado vector con fibra $\mathbb{R}^k$ (o $\mathbb{C}^k$), en una carta local U_i se tiene que $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$, pudiendo escoger k secciones locales linealmente independientes $\{e_1(p), \ldots, e_k(p)\}$ sobre U_i. A estas secciones se las llama **marcos de referencia** sobre U_i. Dado un marco de referencia, se tiene un mapa $F_p \to F$ dado por

$$V = V^a e_a(p) \mapsto \{V^a\} \in F,$$

donde se pusieron índices latinos $a, b, \ldots$ para mostrar que no tienen por qué estar vinculados con las coordenadas como sí lo están los índices griegos $\mu, \nu, \ldots$. Dadas dos cartas locales U_i y U_j no disjuntas y sus marcos de referencia respectivos $\{e_1(p), \ldots, e_k(p)\}$ y $\{\tilde{e_1}(p), \ldots, \widetilde{e_k(p)}\}$ con $p \in U_i \cap U_j$, entonces se puede expresar $\tilde{e_b}(p)$ como

$$\tilde{e_b} = e_a G(p)^a_b,$$

con $G(p)^a_b \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ o $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$. Como $V = V^a e_a = \tilde{V}^a \tilde{e}_a$ entonces

$$\tilde{V}^b = G^{-1}(p)^b_a V^a,$$

donde $G^{-1}(p)^b_a G(p)^a_c = G(p)^b_a G^{-1}(p)^a_c = \delta^b_c$. Por lo tanto, las funciones de transición están dadas por la matriz $G^{-1}(p)$.

Dado un fibrado principal $P(M,G)$, se puede construir un **fibrado vector asociado**. Para esto, si V es un espacio vectorial de dimensión k donde G actúa, ρ es la representación k-dimensional de G, entonces el fibrado vector asociado $P \times_\rho V$ está definido identificando los puntos (u,v) con $(ug, \rho(g)^{-1}v)$ de $P \times V$ donde $u \in P$, $g \in G$ y $v \in V$. Así se tiene, por ejemplo, asociado a $P(M, \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}))$ el fibrado vector sobre M con fibra $\mathbb{R}^k$. La estructura del fibrado asociado $E = P \times_\rho V$ está dada a través de la proyección $\pi_E(u,v) = \pi(u)$, la trivialización local $\varphi_i : U_i \times V \to \pi_E^{-1}(U_i)$ y las funciones de transición $\rho(t_{ij}(p))$, donde $t_{ij}(p)$ son las funciones de transición de P.

4.2.1. Conexiones y Curvatura en Fibrados

La conexión es una uno-forma que vive en el álgebra de Lie del grupo de estructura G del fibrado principal. La derivada covariante obtenida a partir de esta conexión es tal que transforma uniformemente con una transformación de marco de referencia, como se vio en la sección 4.1. Existen varias definiciones de conexión en un fibrado principal, todas ellas equivalentes [37]. Aquí se dará la más geométrica y se seguirá lo expuesto en [16].

Sea u un elemento de un fibrado principal $P(M,G)$, sea $p = \pi(u)$ y G_p la fibra en p y T_uP el espacio tangente a P en p. Si se denota por $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, sea $A \in \mathfrak{g}$ y, por lo tanto, $\exp(tA)$ es una curva en G. Por acción a la derecha se puede definir una curva en $u = \pi^{-1}(p)$ de la forma $u\exp(tA)$, donde t es el parámetro de la curva. Como $\pi(u) = \pi(u\exp(tA)) = p$, la curva está contenida en G_p. Si se considera una función suave $f : P \to \mathbb{R}$, se puede definir el vector $A^\sharp$ de la forma

$$A^\sharp f(u) = \frac{d}{dt} f(u\exp(tA))|_{t=0}.$$

Al conjunto de vectores $A^\sharp$ se lo denomina **espacio vertical**, se lo denota por V_uP y es un subconjunto de T_uP.

Definición **4.2** Una **uno-forma de conexión** $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ es una uno-forma que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que cumple

(I) $\omega(A^\sharp) = A, \qquad A \in \mathfrak{g}$

(II) $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega = g^{-1}\omega g.$

Se define el **espacio horizontal** H_uP, sub-espacio de T_uP, como

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP, \quad \text{tal que} \quad \omega(X) = 0\}.$$

Propiedad **4.1** Los sub-espacios V_uP y H_uP cumplen con las siguientes propiedades:

(I) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$.

(II) Todo campo vectorial X en P se separa en $X = X^H + X^V$, con $X^H \in H_uP$ y $X^V \in V_uP$.

(III) $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ para $u \in P$ y $g \in G$ arbitrarios.

A grandes rasgos, la última condición hace que el espacio horizontal H_uP pueda ser 'arrastrado' de u hasta ug por el mapa diferencial de la acción a la derecha R_{g*}. Esto hace que H_uP pueda generar todos los espacios horizontales a partir una sola fibra G_p de un punto p.

Dado un cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de M y una sección σ_i, se puede definir ahora formalmente el **potencial gauge** $\mathcal{A}_i$ como

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i).$$

Es decir, $\mathcal{A}_i$ es el pullback σ_i^* de la uno-forma de conexión ω. Es como ´proyectar‘ la uno-forma de conexión ω, es decir, bajando a la variedad base M la manera en que uno hace la separación de T_uP en componentes verticales V_uP y horizontales H_uP. Hay un teorema [16] que afirma que dada una sección $\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ y un potencial gauge $\mathcal{A}_i$, se puede definir *localmente* una conexión ω en U_i tal que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$.

Desde el punto de vista de la geometría del fibrado, uno querría que la separación de los espacios horizontales H_uP y verticales V_uP tal que $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ sea *unívoca*. Es decir, dados dos entornos coordenados U_i y U_j y sea $p \in U_i \cap U_j$ entonces $\omega_i(p) = \omega_j(p)$. Esto haría una separación coherente de T_uP en componentes horizontales y verticales. Se va a mostrar ahora cómo debe transformar el potencial gauge $\mathcal{A}_i$ definido en U_i cuando pasa a U_j. El siguiente teorema [16] ayudará a ver esto.

Teorema **4.1** Sean $P(M, G)$ un fibrado principal, σ_i y σ_j dos secciones locales definidas en U_i y U_j, respectivamente. Si $p \in U_i \cap U_j$, entonces para $X \in T_pM$ las secciones σ_i y σ_j satisfacen

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X))^\sharp, \tag{4.11}$$

donde $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ es la función de transición.

Se puede ver ahora cómo transforman los potenciales gauge aplicando la uno-forma de conexión ω a la ecuación (4.11). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_j^*\omega(X) &= \omega(\sigma_{j*}X) = \omega(R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X)) + \omega(t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X)^\sharp) \\
&= R_{t_{ij}}^*\omega(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X)) = t_{ij}^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X),
\end{aligned}$$

donde se utilizó la definición de pullback y las propiedades de la definición 4.2 de uno-forma de conexión. Como esta igualdad vale para cualquier vector $X \in T_pM$, recordando que $\mathcal{A}_i = \sigma^*\omega$, esto se reduce a

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \tag{4.12}$$

La ecuación (4.12) recibe el nombre de **condición de compatibilidad** en la teoría matemática de fibrados.

Se puede observar también, utilizando argumentos similares al caso anterior, que dado un fibrado principal $P(M, G)$, un entorno coordenado local U y dos secciones σ y $\sigma^{'}$ sobre U tales que $\sigma^{'}(p) = \sigma(p)g(p)$, con $p \in U$ y $g \in G$, entonces los correspondientes potenciales gauge $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{'}$ están relacionados por

$$\mathcal{A}^{'} = g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg, \tag{4.13}$$

o en componentes

$$\mathcal{A}_{\mu}^{'}(p) = g^{-1}(p)\mathcal{A}_{\mu}(p)g(p) + g^{-1}(p)\partial_{\mu}g$$

que no es otra cosa que la transformación de gauge (4.6).

En el potencial gauge está la información sobre la geometría del fibrado, es decir la separación del espacio T_uP en componentes horizontal H_uP y vertical V_uP. Esta información está confinada localmente en la variedad, para tener información global es necesario conocer la uno-forma de conexión ω que sí se define globalmente. El potencial gauge debe transformar como (4.6) para poder obtener una uno-forma de conexión unívocamente definida, es decir, una separación en componentes vertical y horizontal de T_uP. Ya que se puede definir un campo de materia como una sección del fibrado, se puede ver que la transformación bajo un cambio de marcos de referencia (que es equivalente a una transformación de sección $\sigma_i^{'} = \sigma(p)g(p)$), y que deja el punto p fijo, es una transformación gauge del campo $\varphi(p)$ de la sección 4.1. Se ve ahora que la transformación de gauge (4.6) está motivada físicamente para poder construir una acción invariante (construir una derivada covariante) y matemáticamente para poder asignar una separación geométrica global del fibrado $P(M, G)$ en cada punto p de M en una componente horizontal ´tangencial´ a la variedad base M y otra componente ´normal´ a la misma, es decir en la dirección de la fibra G_p.

Antes de definir la curvatura en un fibrado, conviene definir la **derivada covariante** de una r-forma vector valuada $\phi : TP \otimes \ldots \otimes TP \to V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión k como $D\phi(X_1, \ldots, X_{r+1}) \equiv d_P(X_1^H, \ldots, X_{r+1}^H)$, $X_1, \ldots X_{r+1} \in T_uP$. Entonces, la **curvatura dos-forma** se define como $\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$. Se puede probar directamente [16] que la curvatura dos-forma satisface $R_a^* = a^{-1}\Omega a$.

Sea una p-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\zeta = \zeta^a \otimes T_a$ y una q-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\xi = \xi^a \otimes T_a$ donde $\zeta^a \in \Omega^p(M)$, $\xi^a \in \Omega^q(M)$ y $\{T_a\}$ es una base del álgebra $\mathfrak{g}$. Se define el conmutador de ζ y ξ como

$$\begin{aligned}[\zeta,\xi] &\equiv \zeta\wedge\xi-(-1)^{pq}\zeta\wedge\xi\\ &= T_aT_b\zeta^a\wedge\xi^b-(-1)^{pq}T_bT_a\xi^b\wedge\zeta^a\\ &= [T_a,T_b]\otimes\zeta^a\wedge\xi^b = f_{ab}{}^cT_c\otimes\zeta^a\wedge\xi^b.\end{aligned}$$

El siguiente teorema, cuya demostración es bastante directa, permite hallar la curvatura de dos vectores X, $Y\in T_uP$.

Teorema **4.2** Ω y ω satisface la **ecuación de estructura de Cartan**

$$\Omega(X,Y)=d_P\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)], \tag{4.14}$$

que suele escribirse como

$$\Omega=d_p\omega+\omega\wedge\omega. \tag{4.15}$$

Dado un fibrado principal $P(M,G)$ y una curva en M $\gamma:[0,1]\to M$, se define un **levantamiento horizontal** de γ como una curva $\tilde{\gamma}:[0,1]\to P$ tal que $\pi\tilde{\gamma}=\gamma$ y el vector tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ siempre está en $H_{\tilde{\gamma}}P$. Con estas consideraciones, se puede ver ahora el significado de la curvatura en un fibrado similar al significado se le dio en la sección 2.3 a la curvatura de una variedad riemanniana. Si se considera un paralelogramo infinitesimal γ, la curvatura mide cuánto falla la clausura de un paralelogramo cuando este es levantado horizontalmente [16].

La forma local de la curvatura $\mathcal{F}$ está definida como $\mathcal{F}=\sigma^*\Omega$, donde σ es una sección local definida en una carta U de M. $\mathcal{F}$ se puede expresar en términos del potencial gauge $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{F}=d\mathcal{A}+\mathcal{A}\wedge\mathcal{A},$$

donde d es la derivada exterior en M. A $\mathcal{F}$ se lo llama **tensor de campo de Yang-Mills**. Si $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\mu dx^\mu$ ($\mathcal{A}_\mu\in\mathfrak{g}$) es el potencial gauge y se escribe $\mathcal{F}=\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu].$$

Ya que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{A}_\mu$ son funciones $\mathfrak{g}$-valuadas, se pueden expandir en la base de $\{T_a\}$ de $\mathfrak{g}$ como $\mathcal{F}_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}T_a$ y $\mathcal{A}_\mu=A^a_\mu T_a$. Si además se tienen en cuenta las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{g}$, se obtiene

$$F_{\mu\nu}{}^a=\partial_\mu A_\nu{}^a-\partial_\nu A_\mu{}^a+f^{abc}A_\mu{}^bA_\nu{}^c,$$

con f^{abc} las constantes de estructura del álgebra $\mathfrak{g}$. Esta última, es la misma relación de componentes del tensor de Yang-Mills y potencial gauge de la teoría $SU(2)$ obtenida en la sección 4.1.2.

Por demostración directa, uno puede probar que si U_i y U_j son dos cartas no disjuntas de M y $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{F}_j$ son los campos de las respectivas cartas, entonces

$$\mathcal{F}_j=t_{ij}^{-1}\mathcal{F}_it_{ij},$$

donde t_{ij} es la función de transición en $U_i \cap U_j$. También es directo probar que si el potencial gauge $\mathcal{A}$ es **puro gauge**, es decir $\mathcal{A} = g^{-1}dg$, entonces el tensor de Yang-Mills se anula.

Se va a mostrar ahora la **identidad de Bianchi** para fibrados, análoga a la vista en la sección 2.3 para curvatura en variedades riemannianas. Si se escribe ω y Ω como $\omega = \omega^a T_a$ y $\Omega = \Omega^a T_a$ entonces de la definición de curvatura se tiene

$$\Omega^a = d_P\omega^a + f^{abc}\omega^b \wedge \omega^c.$$

Si se aplica la derivada exterior d_P a este resultado se obtiene

$$d_P\Omega^a = f^{abc}d_P\omega^b \wedge \omega^c + f^{abc}\omega^b \wedge d_P\omega^c.$$

Ya que $\omega(X) = 0$ si X es un vector horizontal, entonces

$$D\Omega(X, Y, Z) = d_P(X^H, Y^H, Z^H) = 0,$$

donde $X, Y, Z \in T_uP$. Queda probada la identidad de Bianchi

$$D\Omega = 0. \tag{4.16}$$

Si se hace actuar σ^* sobre $d_P\Omega$ se obtiene por un lado $\sigma^* d_P\Omega = d\sigma{*}\Omega = d\mathcal{F}$ y por otro lado

$$\begin{aligned}
\sigma^*(d_p\omega \wedge \omega - \omega \wedge d_P\omega) &= d\sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega - \sigma^*\omega \wedge d\sigma^*\omega \\
&= d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtuvo

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0,$$

donde se definió $\mathcal{D}$ actuando en una p-forma $\mathfrak{g}$-valuada ξ en M como

$$\mathcal{D}\xi = d\xi + [\mathcal{A}, \xi].$$

4.2.2. Clases Características

Hay ciertos objetos construidos a partir de la curvatura Ω de un fibrado principal $P(M, G)$ que resultan ser inherentes al mismo y son independientes de la elección específica de Ω. Son, por lo tanto, objetos característicos del fibrado, siendo preservados por difeomorfismos y definen invariantes topológicos asociados con ellos [38]. Un ejemplo de estos objetos son las **clases características**, que son subconjuntos de las clases de cohomología del espacio base y miden la no-trivialidad o 'enrollamiento' de un fibrado. En esta sección se tratarán las clases características y, en especial, las clases de Chern que darán el formalismo adecuado para entender las formas de Chern-Simons y las formas de transgresión. Estas dos últimas serán de importancia fundamental en el resto del trabajo. Antes que nada, conviene repasar algunos elementos del grupo de cohomología de Rham [16]. Si M es una variedad m-dimensional, una r-forma $\omega \in \Omega^r(M)$ es **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si $\omega = d\xi$ para algún $\xi \in \Omega^{r-1}(M)$. El conjunto de r-formas cerradas se denota por $Z^r(M)$ y el de r-formas exactas por $B^r(M)$. Ya que $d^2 = 0$, se cumple que $B^r(M) \subset Z^r(M)$. Se define el **grupo de cohomología de Rham** $H^r(M)$ como

$$H^r(M) \equiv \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}.$$

En $H^r(M)$ dos r-formas cerradas ω_1 y ω_2 están identificadas si $\omega_2 = \omega_1 + d\xi$ con $\xi \in \Omega^{r-1}(M)$. La suma

$$H^*(M) \equiv H^0(M) + H^1(M) + \ldots + H^m(M)$$

es el anillo de cohomología con el producto $\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \to H^*(M)$ inducido por el producto cuña $\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M)$.

Sea $M(k, \mathbb{C})$ el conjunto de matrices de entradas complejas de dimensión $k \times k$. Si se consideran las funciones $\tilde{P}$ que son r-lineales, $\mathbb{C}$-evaluadas y simétricas

$$\tilde{P} : \bigotimes^r M(k, \mathbb{C}) \to \mathbb{C},$$

de forma tal que $\tilde{P}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_r) = \tilde{P}(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_r)$, con $a_l \in M(k, \mathbb{C})$, entonces se considerará $S^r(M)$ como el conjunto de estas funciones que forma, a su vez, un espacio vectorial con la suma y el producto usuales de funciones. Sea $S^*(M(k, \mathbb{C})) \equiv \bigoplus_{r=0}^{+\infty} S^r(M(k, \mathbb{C}))$ la suma formal de funciones simétricas multilineales $\mathbb{C}$-valuadas. Se le puede dar a $S(M(k, \mathbb{C}))$ una estructura de anillo definiendo el producto de dos funciones. Sean $\tilde{P} \in S^p(M(k, \mathbb{C}))$ y $\tilde{Q} \in S^q(M(k, \mathbb{C}))$ se define el producto de estas funciones como

$$\tilde{P}\tilde{Q}(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_P \tilde{P}(X_{P(1)}, \ldots, X_{P(p)}) \tilde{Q}(X_{P(p+1)}, \ldots, X_{P(p+q)}), \tag{4.17}$$

donde $X_i \in M(k, \mathbb{C})$ y P es la permutación de $(1, \ldots, p+q)$.

Si G es un un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie, los argumentos $M(k, \mathbb{C})$ de S^* serán, en general, las representaciones del álgebra $\mathfrak{g}$. $\tilde{P} \in S^r(\mathfrak{g})$ se dice que es **invariante** si, para cualesquiera $g \in G$ y $A_i \in \mathfrak{g}$, satisface

$$\tilde{P}(\mathrm{Ad}_g A_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g A_r) = \tilde{P}(A_1, \ldots, A_r),$$

donde $\mathrm{Ad}_g A_i = g^{-1} A_i g$. Un ejemplo importante es el siguiente

$$\tilde{P}(A_1, \ldots, A_r) = \mathrm{str}(A_1, \ldots, A_r) \equiv \frac{1}{r!} \sum_P \mathrm{tr}(A_{P(1)}, \ldots, A_{P(r)}). \tag{4.18}$$

En (4.18) $\tilde{P}$ es simétrico, r-lineal e invariante y por 'str' se entiende la **traza simetrizada**, que está definida en la última igualdad. El conjunto de elementos de $S^r(\mathfrak{g})$, que es G-invariante, se denota por $I^r(G)$. El producto definido en (4.17) induce una multiplicación $I^p(G) \otimes I^q(G) \to I^{p+q}(G)$, y también se define $I^*(G) \equiv \bigotimes_{r>0} I^r(G)$, formando una estructura de anillo con el producto anterior.

Sea $\tilde{P} \in I^r(G)$, se utiliza la notación

$$P(A) \equiv \tilde{P}(\underbrace{A, ..., A}_{r}), \qquad A \in \mathfrak{g}. \tag{4.19}$$

P se dice que es un **polinomio invariante**. Un polinomio invariante P define una función $\tilde{P} \in I^r(G)$ expandiendo $P(t_1 A_1 + \ldots + t_r A_r)$ como un polinomio en t_i. Haciendo esta construcción, $\frac{1}{r!}$ veces el coeficiente de $t_1 \ldots t_r$ es simétrico y se llama **polarización** de P.

Sea $P(M, G)$ un fibrado principal. Se puede extender el dominio de los polinomios invariantes definidos en (4.19) de $\mathfrak{g}$ a p-formas $\mathfrak{g}$-valuadas en M. Si se toma una p-forma $\mathfrak{g}$-valuada $A_i \xi_i$, con $A_i \in \mathfrak{g}$ y $\xi_i \in \Omega^{p_i}(M)$ $(1 \leq i \leq r)$, se define

$$\tilde{P}(A_1 \xi_1, \ldots, A_r \xi_r) = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_r \tilde{P}(A_1, \ldots, A_r).$$

La importancia de los polinomios invariantes aparece cuando utilizamos como argumento de los mismos la forma local $\mathcal{F}$ de la curvatura Ω y se manifiesta en el siguiente teorema cuya prueba está en [16] y [38].

Teorema **4.3 (Chern-Weil)** Sean E un fibrado principal y P un polinomio invariante. Entonces $P(\mathcal{F})$ satisface:

(a) $dP(\mathcal{F}) = 0$.

(b) Sean $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ dos curvaturas locales correspondientes a dos conexiones distintas $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ en E. Entonces la diferencia $P(\mathcal{F}) - P(\overline{\mathcal{F}})$ es exacta.

Por este teorema, un polinomio invariante es cerrado y, en general, no trivial. Por la parte (b) del mismo, dos polinomios invariantes provenientes de diferentes conexiones están en el misma clase de cohomología de M. Es esta clase, por lo tanto, independiente de la conexión escogida siendo inherente al fibrado. La clase de cohomología así definida se llama **clase característica**.

Sea $P_n(\mathcal{F})$ una $2n$-forma clase característica. Ya que por la parte (a) del teorema 4.3 se cumple que $P_n(\mathcal{F})$ es cerrada, puede escribirse *localmente* como una forma exacta debido al lema de Poincaré [16]. Entonces se tiene

$$P_n(\mathcal{F}) = d\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}), \tag{4.20}$$

donde $\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^{2n-1}(M)$. $\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ recibe el nombre de **forma de Chern-Simons** de $P_n(\mathcal{F})$.

Por la parte (b) del teorema 4.3 , se tiene

$$P_n(\overline{\mathcal{F}}) - P_n(\mathcal{F}) = d\mathcal{T}_{2n-1},$$

y la demostración de esta parte del teorema da como resultado

$$\mathcal{T}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}},\mathcal{A}) \equiv n\int_0^1 dt\tilde{P}_n(\underbrace{\overline{\mathcal{A}}-\mathcal{A},\mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t}_{n}), \tag{4.21}$$

donde se utiliza la interpolación de dos potenciales gauge $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &\equiv \mathcal{A} + t(\overline{\mathcal{A}}-\mathcal{A}), \quad 0\le t\le 1 \\ \mathcal{F}_t &\equiv d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t\wedge\mathcal{A}_t = \mathcal{F} + t\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}}-\mathcal{A}) + t^2(\overline{\mathcal{A}}-\mathcal{A})^2, \end{aligned}$$

donde se definió $\mathcal{D} \equiv d + [\mathcal{A},\ \ ]$. A la forma $\mathcal{T}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}},\mathcal{A})$ se le da el nombre de **transgresión** que por la definición (4.20) se puede escribir como

$$\mathcal{T}_{2n-1}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}) = \mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}}) - dB_{2n-2}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}), \tag{4.22}$$

donde $B_{2n-2}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}})$ es una $2n-2$-forma que depende de $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$. La parte (b) del teorema 4.3 muestra también que la integral de $P_n(\mathcal{F})$ en una variedad $2n$-dimensional sin borde es un invariante topológico, es decir, depende solamente de la topología del fibrado.

Una vez vista su definición formal, se expondrá una visión más intuitiva de cómo calcular formas de Chern-Simons seguida por [39]. Se representa una uno-forma de conexión de un fibrado $P(M,G)$ como $\mathcal{A} = -iA^a_\mu\tau_a dx^\mu$ donde $\{\tau_a\}$ son los generadores del grupo G. De esta forma, como $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$, se puede representar también $\mathcal{F} = -i\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\tau_a dx^\mu \wedge dx^{nu}$. Considerando ahora el polinomio invariante $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$, donde Tr se entiende por la traza y se asume el producto cuña. Se puede ver

$$d\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 = \mathrm{Tr}(d\mathcal{F}\mathcal{F} + \mathcal{F}d\mathcal{F}) = 2\mathrm{Tr}d\mathcal{F}\mathcal{F},$$

donde en la primera igualdad se utilizó la linealidad de la traza y en la segunda que $\mathcal{F}$ es una dos-forma y conmuta con $d\mathcal{F}$. Si se observa que $2\mathrm{Tr}[\mathcal{A},\mathcal{F}]\mathcal{F} = 0$ por la ciclicidad de la traza, podemos sumárselo al lado derecho de la ecuación anterior, dando

$$d\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 = 2\mathrm{Tr}D\mathcal{F}\mathcal{F} = 0,$$

donde se utilizó la identidad de Bianchi en la última igualdad. Por el lema de Poincaré se puede inferir que localmente $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$ es la derivada total de una 3-forma. A su vez, esta será una forma de Chern-Simons ya que $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$ es un polinomio invariante de la forma local de la curvatura $\mathcal{F}$. Para poder hallar esta 3-forma, se verá la variación de $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$ cuando se varía el potencial de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}+\delta\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \\ \delta\mathcal{F} &= d\delta\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\mathcal{A} + \mathcal{A}\delta\mathcal{A} = \mathcal{D}(\delta\mathcal{A}) \\ \delta\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 &= 2\mathrm{Tr}\delta\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\mathrm{Tr}D(\delta\mathcal{A})\mathcal{F} \\ &= 2\mathcal{D}\mathrm{Tr}\delta\mathcal{A}\mathcal{F} = 2d\mathrm{Tr}\delta\mathcal{A}\mathcal{F}, \end{aligned}$$

donde se usó la identidad de Bianchi y que $\mathrm{Tr}\delta\mathcal{A}\mathcal{F}$ es un escalar. Se va a introducir ahora la variación de $\mathcal{A}$ vía un parámetro t de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t &= t\mathcal{A}\\ \mathcal{F}_t &= d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2 = t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2.\end{aligned}$$

En este caso se toma $\delta = \delta t \frac{\partial}{\partial t}$ donde δt es un diferencial ordinario. Entonces

$$\delta \mathrm{Tr}\mathcal{F}_t^2 = 2d\mathrm{Tr}\delta\mathcal{A}_t\mathcal{F}_t,$$

e integrando

$$\int_0^1 \delta t \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}\mathcal{F}_t^2 = 2d\int_0^1 \delta t \mathrm{Tr}\mathcal{A}\mathcal{F}_t.$$

Esto hace que

$$\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 = 2d\int_0^1 \delta t\mathrm{Tr}\mathcal{A}(t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2) = d\mathcal{Q}_3,$$

donde $\mathcal{Q}_3$ es la 3-forma de Chern-Simons que se estaba buscando. Así

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_3 &= 2\int_0^1 \delta t\mathrm{Tr}\mathcal{A}(t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2) = \mathrm{Tr}(\mathcal{A}\mathcal{F} - \frac{1}{3}\mathcal{A}^3)\\ &= \mathrm{Tr}(\mathcal{A}d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3).\end{aligned}$$

Este procedimiento se puede hacer general para hallar una $2n-1$-forma de Chern-Simons $\mathcal{Q}_{2n-1}$ si se observa que

$$d\mathrm{Tr}\mathcal{F}^n = n\mathrm{Tr}d\mathcal{F}\mathcal{F}^{n-1} = n\mathrm{Tr}\mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{F}^{n-1} = 0.$$

Entonces

$$\mathrm{Tr}\mathcal{F}^n = d\mathcal{Q}_{2n-1},$$

pudiéndose escribir la $2n-1$-forma de Chern-Simons Q_{2n-1} como

$$\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = n\mathrm{Tr}\int_0^1 \delta t\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-1}. \tag{4.23}$$

La cantidad $\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}\mathcal{F}^n$ recibe el nombre de **n-ésimo carácter de Chern**[5]. Así, se puede escribir también la 5-forma de Chern-Simons Q_5 como

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\mathcal{F}^3 &= dQ_5\\ Q_5 &= 3\mathrm{Tr}\int_0^1 \delta t\mathcal{A}(t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A})^2\\ &= \mathrm{Tr}(\mathcal{A}d\mathcal{A} + \frac{3}{5}\mathcal{A}^5 + \frac{3}{2}\mathcal{A}^3 d\mathcal{A}).\end{aligned}$$

[5]En realidad, el **carácter de Chern total** es la cantidad $\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \equiv \mathrm{Tr}(\exp(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})) = \sum_{n=1} \frac{1}{n!}\mathrm{Tr}(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi})^n$.

En este punto, conviene mostrar cómo transforma una forma de Chern-Simons frente a una transformación gauge, ya que será de utilidad más adelante. Para esto, es necesario introducir el **operador de homotopía de Cartan** k que tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} dk + kd &= 1, \\ k^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si se tiene en cuenta que

$$(dk + kd)\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 = \mathrm{Tr}\mathcal{F}^2,$$

y, como $d\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2 = 0$, esto implica

$$d(k\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2) = \mathrm{Tr}\mathcal{F}^2.$$

Entonces, si se conoce cómo actúa k sobre $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$, se puede obtener la 3-forma de Chern-Simons $Q_3 = k\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$. Para hallar k, se consideran los polinomios construidos a partir de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{A}$ que se anulan cuando $\mathcal{F} = 0$ y $\mathcal{A} = 0$. Se definen en ellos dos operadores d y l. El primero de ellos es la diferenciación ordinaria de formas

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \mathcal{F} - \mathcal{A}^2, \\ d\mathcal{F} &= \mathcal{F}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{F}, \end{aligned}$$

que es anti-derivativa (conmuta con $\mathcal{F}$, anti-conmuta con $\mathcal{A}$ y es lineal). El otro operador l actúa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} l\mathcal{A} &= 0, \\ l\mathcal{F} &= \delta\mathcal{A}, \end{aligned}$$

donde $\delta = \delta t \frac{\partial}{\partial t}$ es una variación pequeña en $\mathcal{A}$ y l es anti-derivativa también. Con estas reglas, se puede verificar la anti-conmutación

$$ld + dl = \delta.$$

Estas definiciones se pueden extender cuando se aplican a polinomios de $\mathcal{F}_t$ y $\mathcal{A}_t$, es decir dependientes de un parámetro t:

$$\begin{aligned} l_t\mathcal{A}_t &= 0, \\ l_t\mathcal{F}_t &= \delta\mathcal{A}_t \equiv \delta t \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t}, \end{aligned}$$

con $\mathcal{A}_0 = 0$ y $\mathcal{F}_0 = 0$. La regla de anti-conmutación se vuelve

$$l_t d + dl_t = \delta = \delta t \frac{\partial}{\partial t},$$

y observando que si se define

$$k \equiv \int_0^1 l_t, \tag{4.25}$$

se obtiene la primera propiedad de (4.24). Si se toma ahora una transformación gauge finita $g(x) \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^g &= g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg \\ \mathcal{F}^g &= g^{-1}\mathcal{F}g\end{aligned}$$

Bajo estas transformaciones, $\mathrm{Tr}\mathcal{F}^2$ es invariante pero $\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F})$ no tiene por qué serlo y, de hecho, no lo es. $\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F})$ va a cambiar por un término $d\alpha_{2n-2}$ con α_{2n-2} una $2n-2$-forma y un término cerrado pero no exacto. La $2n-1$-forma de Chern-Simons evaluada en $\mathcal{A}_g$ y $\mathcal{F}_g$ se va a poder escribir

$$\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}^g,\mathcal{F}^g) = \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) + d\alpha_{2n-2} + Q^0_{2n-1}(g^{-1}dg, 0), \tag{4.26}$$

donde $d\mathcal{Q}^0_{2n-1}(g^{-1}dg,0) = 0$ y se introdujo el supra-índice 0 por conveniencia. A la forma cerrada $\mathcal{Q}(g^{-1}dg)$ se la denomina **forma de Wess-Zumino-Witten**. Para ver que (4.26) es efectivamente la transformación, primero se escribe el transformado de gauge $\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}^g,\mathcal{F}^g)$ como

$$\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}^g,\mathcal{F}^g) = \mathcal{Q}^0_{2n-1}(g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg, g^{-1}\mathcal{F}g) = \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F}),$$

con $\mathcal{V} = dgg^{-1}$, donde se utilizó que $\mathcal{Q}^0_{2n-1}$ es una traza. Para hallar $\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}^g,\mathcal{F}^g)$ se usará el operador de homotopía k. Hay que tener en cuenta que este operador no puede utilizarse directamente ya que $\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F}) \neq 0$ si $\mathcal{A}=\mathcal{F}=0$. Por lo tanto, es conveniente utilizar la cantidad

$$\Omega(\mathcal{A},\mathcal{F}) \equiv \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F}) - \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0) - \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}),$$

que sí se anula cuando $\mathcal{A}=0$ y $\mathcal{F}=0$. Utilizando que

$$\begin{aligned}d\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F}) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{F}^n), \\ d\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0) = 0&, \\ d\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{F}^n)&,\end{aligned}$$

se observa que

$$d\Omega(\mathcal{A},\mathcal{F}) = 0.$$

Teniendo en cuenta esto último y la primera propiedad de (4.24) se ve que

$$(dk+kd)\Omega = \Omega \quad \Rightarrow \quad d(k\Omega) = \Omega.$$

De esta manera, se puede hallar la diferencial total $d\alpha_{2n-2}$ que se buscaba:

$$\alpha_{2n-2} = k(\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F}) - \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0) - \mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F})).$$

Usando la segunda propiedad de (4.24), que $\mathcal{Q}^0_{2n-1} = k\mathrm{Tr}(\mathcal{F}^n)$ y que $k\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0) = 0$, se llega a

$$\alpha_{2n-2} = k(\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{A}+\mathcal{V},\mathcal{F})).$$

Se puede observar también que $\mathcal{Q}^0_{2n-1}(dgg^{-1},0) = \mathcal{Q}^0_{2n-1}(g^{-1}dg,0)$ y, por lo tanto, se obtiene el resultado (4.26).

Se pueden usar estos resultados para calcular explícitamente las variaciones bajo transformaciones finitas de formas de Chern-Simons para $n = 2$ y $n = 3$. En el primer caso se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^0_3(\mathcal{A}_g,\mathcal{F}_g) &= \mathcal{Q}^0_3(\mathcal{A},\mathcal{F}) + d\alpha_2 - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3, \\
\alpha_2 &= -\mathrm{Tr}(\mathcal{V}\mathcal{A}), \qquad \mathcal{V} = dgg^{-1}.
\end{aligned}$$

Mientras que para el caso $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^0_5(\mathcal{A}_g,\mathcal{F}_g) &= \mathcal{Q}^0_5(\mathcal{A},\mathcal{F}) + d\alpha_4 + \frac{1}{10}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^5, \\
\alpha_4 &= -\mathrm{Tr}(-\frac{1}{2}\mathcal{V}(\mathcal{A}d\mathcal{A} + d\mathcal{A}\mathcal{A}) - \frac{1}{2}\mathcal{V}\mathcal{A}^3 + \frac{1}{4}\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{V}^3\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Ya que $d\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0) = 0$, por el lema de Poincaré *localmente* $\mathcal{Q}^0_{2n-1}(\mathcal{V},0)$ es una derivada de algo. Por lo tanto, se puede deducir que, bajo una transformación gauge infinitesimal, una forma de Chern-Simons varía como una derivada total

$$\delta\mathcal{Q}^0_{2n-1} = d\mathcal{Q}^1_{2n-2}. \tag{4.27}$$

La forma explícita de $\mathcal{Q}^1_{2n-2}$ se deduce en [39].

De las definiciones (4.20) y (4.21), las formas de Chern-Simons son casos particulares de las formas de transgresión haciendo, por ejemplo, $\overline{\mathcal{A}} = 0$ en (4.21). Se puede hacer un análisis parecido al anterior para deducir la variación general de las transgresiones $\delta\mathcal{T}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}},\mathcal{A})$ y mostrar de ahí que son invariantes frente a transformaciones gauge. Esta deducción está el el apéndice B y el resultado es

$$\delta\mathcal{T}_{2n-1} = n < \mathcal{F}_1^{n-1}\delta\mathcal{A}_1 > -n < \mathcal{F}_0^{n-1}\delta\mathcal{A}_0 > -n(n-1)d\int_0^1 dt < \mathcal{J}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t > . \tag{4.28}$$

Luego que Shiing-Shen Chern y James Simons mostraran en 1974 que las formas que llevan su nombre son cuasi-invariantes[6] [40], comenzaron a utilizarse en Física. Éstas aparecen naturalmente en Teoría Cuántica de Campos cuando se estudian *anomalías*. En pocas palabras, las anomalías son simetrías que aparecen en una teoría clásica pero no se conservan cuando se hace la cuantización. Si bien las anomalías fueron la primera motivación para aplicar las formas de Chern-Simons en Física, en los años ochenta Achúcarro y Townsend por un lado [41], y Witten [42] por otro, utilizaron estas formas como modelo de Gravedad y Supergravedad en tres dimensiones. La utilización de formas de Chern-Simons para gravedad en tres dimensiones se mostrará en la sección 5.2.2. Más tarde, Chamseddine [43, 44], Zanelli

[6] Como la forma de Chern-Simons cambia por una derivada total por transformaciones gauge, ésta no es invariante sino que se la llama **cuasi-invariante**.

con colaboradores como Bañados, Bunster, Troncoso entre ellos [45, 46] extendieron estos conceptos trabajando con gravedades y supergravedades en dimensiones mayores. Se va a seguir lo presentado por ellos para gravedades en dimensiones impares genéricas en la sección 5.2.3.

Ya que la variación infinitesimal de una forma de Chern-Simons es igual a la derivada total de algo, pueden utilizarse como acciones invariantes gauge bajo un cierto grupo de transformaciones. Esto posee muchas ventajas pero, el no ser completamente invariante, puede traer algunas complicaciones en definir las cargas conservadas por el teorema de Noether [6]. Por otro lado, las formas de transgresión sí son genuinamente invariantes gauge, como se ve en su definición (4.21), ya que involucran objetos covariantes de gauge (la cantidad $\mathcal{J} = (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{A})$ es covariante) y, por lo tanto, el polinomio invariante convierte a la transgresión en invariante gauge. Se discutirá brevemente en la sección 5.2.5 las transgresiones como densidad lagrangiana para teorías de gravedad.

Capítulo 5

Gravitación en D-dimensiones

En el capítulo 4 se vio cómo construir una teoría invariante gauge bajo un cierto grupo de simetría local de manera clásica. Estas simetrías tuvieron enorme éxito en Teoría Cuántica de Campos ya que, además de ser importantes para restringir los posibles lagrangianos para describir las interacciones fuertes y electrodébiles, permitieron hacer la teoría renormalizable[1] [47], [33]. Una consecuencia de este éxito es el enorme poder predictivo que tiene el Modelo Estándar de partículas. Este modelo es una teoría gauge con simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (el $SU(3)$ es por la simetría de color de las interacciones fuertes) que es espontáneamente rota (se rompen solamente tres generadores de la simetría $SU(2) \times U(1)$). Ya que un lagrangiano con términos de masa para los bosones no es invariante bajo la simetría original, el rompimiento parcial de la simetría $SU(2) \times U(1)$ permite producir los bosones cargados masivos W^+ y W^-, el bosón masivo neutro Z y el bosón sin masa asociado al electromagnetismo A.

La interacción fundamental restante no incluida en el Modelo Estándar, la Gravedad, a pesar de que en los fenómenos a gran escala está muy bien descripta por la teoría de Einstein mostrada en el capítulo 3, no ha podido unificarse hasta ahora con las otras tres interacciones en un marco único ya que no puede describirse de manera consistente como una Teoría Cuántica de Campos. Una de las razones por la que la teoría de Einstein no puede describirse en forma cuántica es que no tiene ningún término de interacción renormalizable. Una forma de darse cuenta de esto es que si se divide el lagrangiano gravitacional en un término cinético y otro de interacción, la constante de acoplamiento entre gravitones es la constante de Newton G, que en el sistema natural de unidades[2] tiene dimensión $[M]^{-2}$. Esto significa que cuando se calcula perturbativamente una cantidad físicamente observable, los diagramas con mayor cantidad de vértices requieren mayor cantidad de potencias en los momentos para compensar las dimensiones. Esto hace que uno espere divergencias ultraviole-

[1] Sucintamente, una teoría de campos es **renormalizable** si pueden redefinirse los campos y los parámetros necesarios para que el cálculo de cantidades físicas observables (por ejemplo, secciones eficaces y tiempos de decaimiento) no diverjan.

[2] Se tomará en este trabajo el sistema natural de unidades de la forma $[\hbar] = [c] = 1$.

tas de potencias cada vez mayores cuando se avanza en el orden de la expansión perturbativa [5].

En la sección 3.2 se mostró cómo poder escribir la teoría de Einstein de la gravedad en un formalismo donde es manifiestamente invariante por difeomorfismos y por transformaciones de Lorentz locales en el espacio tangente. Se vio que la uno-forma de conexión de Lorentz ω^{ab} se comportaba de manera similar a una 1-forma local de un potencial $\mathcal{A}_\mu$, vista en el capítulo 4. Dada esta similitud, uno podría tener la esperanza que la teoría de Einstein de la gravedad pudiera describirse como una teoría gauge como las otras tres fuerzas y poder usar esta característica para su eventual renormalización. Desafortunadamente, la teoría de Einstein no clasifica como teoría gauge. El problema es cuando se intenta describir en forma de teoría gauge la simetría por traslaciones, es decir cuando se pide invariancia no solamente por transformaciones de Lorentz sino por el grupo de Poincaré. La única y remarcable excepción a esto es el caso en el cual la dimensión de la variedad espacio-tiempo es $2+1$. En esta dimensión, se puede observar que una acción de Chern-Simons (CS) transforma bajo el grupo de Poincaré como una derivada total haciendo que, si la variedad no tiene borde, la teoría sea invariante bajo este grupo [40]. Se verá en este capítulo que esto puede generalizarse a dimensiones mayores pero solamente a dimensiones espacio-temporales impares [43, 43, 45, 46], ya que las formas de CS son impares. También se puede ver que la única constante que aparece en el lagrangiano puede cuantizarse por argumentos topológicos en forma similar a la cuantización de Dirac del monopolo magnético [48]. Esta propiedad de las acciones de CS es bienvenida ya que habría esperanzas que la teoría fuera renormalizable. A su vez, las formas de transgresión, además de tener las ventajas anteriores de las formas de CS, al ser invariantes gauge y no solamente cuasi-invariantes, permiten una mejor definición de las cargas conservadas por el teorema de Noether [6].

En cuanto a la motivación para el estudio de gravedad en dimensiones diferentes a $D=4$, se podría mencionar que en los años 70, se observó que las teorías llamadas de Supergravedad (SUGRA) podrían dar lugar a que no haya divergencias en las correcciones a un loop de cantidades observables. Las SUGRA introducen una supersimetría (SUSI)[3] y para esto es necesario aumentar la dimensión de la variedad para que haya consistencia en el álgebra de la SUSI, también llamada superálgebra. Otra motivación para estudiar teorías de gravedad de dimensión arbitraria proviene de la Teoría de Cuerdas, que podría contener a la gravedad y las otras fuerzas fundamentales en el límite de bajas energías, y para ser consistentes necesitan expresarse en $D=26$ y $D=11$ dimensiones para Cuerdas Bosónicas y Supercuerdas, respectivamente [1].

Más allá de que si la Teoría de Cuerdas o la SUGRA puedan funcionar como una teoría cuántica consistente de la Gravedad, las acciones de CS y las de transgresión son interesantes en sí mismas. Brindan un formalismo para describir ciertas anomalías en Teorías Cuánticas de Campos [39], estando relacionadas con

[3] A groso modo, una supersimetría es una simetría que mezcla campos fermiónicos con campos bosónicos.

invariantes topológicos como se mostró en la sección 4.2.2. Es por esta razón que se dedicará este capítulo a la generalización de la gravedades de CS y transgresiones en D dimensiones.

5.1. Lagrangianos de Lanczos-Lovelock

En la sección 3.2 se vio cómo se puede construir la teoría de Einstein en dimensión $D = 4$ a partir de el vielbein e^a, la uno-forma de conexión ω^a_b y la curvatura 2-forma R^a_b (formada a su vez a partir de e^a, ω^a_b y sus derivadas exteriores). Se puede ver que los objetos con los que se puede construir una teoría de gravedad son estos tres objetos, y eventualmente la torsión 2-forma T^a, para que el lagrangiano sea invariante Lorentz y se tengan ecuaciones de movimiento con derivadas segundas como máximo [5].

Para dimensión arbitraria D, el teorema Lovelock [49, 50] afirma que la acción más general sin torsión que se puede construir que lleve a ecuaciones de movimiento de segundo orden está dado por la forma

$$S_{LL} = \kappa \int\limits_M \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)}, \tag{5.1}$$

donde $[x]$ se entiende por parte entera de x, κ es una constante y

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 \ldots a_D} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \ldots e^{a_D}. \tag{5.2}$$

A partir de este momento y en lo que sigue de este trabajo, se omitirá el símbolo producto cuña $\wedge$ para facilitar la notación. Se ve entonces que la acción de Lanczos-Lovelock S_{LL} es un polinomio de grado $[D/2]$ en la curvatura. En general, cada $L^{(p)}$ es la continuación a D dimensiones de la densidad de Euler de dimensión $p \leq D$. Las α_p son, en principio, constantes arbitrarias de dicho polinomio pero, como se verá más abajo, pueden elegirse convenientemente. Variando la acción S_{LL} respecto a los campos independientes e^a y ω^a_b se obtienen las ecuaciones de campo. Para esto, se procede de manera similar a cuando se dedujeron las ecuaciones de Einstein en el formalismo de Cartan en la sección 3.2. Primero, la variación de $L^{(p)}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta L^{(p)} &= p\epsilon_{a_1 \ldots a_D} \delta R^{ab} R^{c_3 c_4} \ldots R^{c_{2p-1} c_{2p}} e^{c_{2p+1}} \ldots e^{c_D} + \\ &\quad (D-2p)\epsilon_{a b_1 \ldots b_{D-1}} \delta e^a R^{b_1 b_2} \ldots R^{b_{2p-1} b_{2p}} e^{b_{2p+1}} \ldots e^{b_{D-1}}. \end{aligned}$$

Después, usando el resultado $\delta R^{ab} = D(\delta\omega^{ab})$ (ver ecuación (3.10)) y la identidad de Bianchi (2.41) se tiene[4]

$$\begin{aligned} d(p\epsilon_{abc_3 \ldots c_D} \delta\omega^{ab} R^{c_3 c_4} \ldots R^{c_{2p-1} c_{2p}} e^{c_{2p+1}} \ldots e^{c_D}) &= p\epsilon_{abc_3 \ldots a_D} \delta R^{ab} R^{c_3 c_4} \ldots R^{c_{2p-1} c_{2p}} e^{c_{2p+1}} \ldots e^{c_D} + \\ &\quad p(D-2p)\epsilon_{a_1 \ldots a_D} \delta\omega^{ab} R^{c_3 c_4} \ldots R^{c_{2p-1} c_{2p}} D(e^{c_{2p+1}}) \ldots e^{c_D}. \end{aligned}$$

[4] No confundir el número D correspondiente a la dimensión de la variedad con el operador de derivada covariante escrito entre paréntesis $D(\ldots)$.

Usando el teorema de Stokes y que $De^a = T^a$, se tiene que para una variedad sin borde

$$\delta S_{LL} = \kappa \int \left(\delta e^a \sum_{p=0}^{[\frac{d-1}{2}]} \alpha_p (D-2p) \mathcal{E}_a^p - \delta\omega^{ab} \sum_{p=1}^{[\frac{d-1}{2}]} \alpha_p p (D-2p) \mathcal{E}_{ab}^p \right),$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a^p &\equiv \epsilon_{ab_1 \ldots b_{D-1}} R^{b_1 b_2} \ldots R^{b_{2p-1} b_{2p}} e^{b_{2p+1}} \ldots e^{b_{D-1}}, \\ \mathcal{E}_{ab}^p &\equiv \epsilon_{abc_3 \ldots c_D} R^{c_3 c_4} \ldots R^{c_{2p-1} c_{2p}} T^{c_{2p+1}} e^{c_{2p+2}} \ldots e^{c_D}. \end{aligned}$$

Ya que la variación en los campos ω^{ab} y e^a se toman como independientes, se pueden escribir las ecuaciones de campo para los lagrangianos de Lanczos-Lovelock como

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_p (D-2p) \mathcal{E}_a^p &= 0, \\ \sum_{p=1}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_p p (D-2p) \mathcal{E}_{ab}^p &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hay que notar de (5.2) que el término que contiene $L^{(D/2)}$ tiene solamente curvaturas, por lo tanto, no aporta a ninguna de las ecuaciones de campo. Además, debido a que el término que contiene $L^{(0)}$ no tiene curvatura, tampoco aporta a la segunda ecuación de (5.3). Se puede observar directamente que en $D = 4$ los primeros dos términos de (5.1) son la constante cosmológica y la acción de Einstein-Hilbert, respectivamente. Por lo tanto, la Relatividad General está contenida como un caso particular en la acción S_{LL}. Parecería que los términos de orden superior a uno en la curvatura llevaría a ecuaciones de campo de orden superior al segundo en la métrica. Esto sería un problema ya que derivadas de orden superior al segundo para la métrica querrían decir que las condiciones iniciales requeridas para saber la evolución temporal no son las de Relatividad General, complicando la evolución causal de la teoría. No solo eso, si uno quisiera cuantizar la teoría, los propagadores tendrían polos en energías imaginarias, o sea tendrían *ghosts* y violarían la unitariedad de la teoría [52, 5]. Sin embargo, si los términos en el lagrangiano son continuaciones de densidades de Euler, como el caso de los lagrangianos de Lanczos-Lovelock, la teoría no tiene ghosts [53, 50].

La elección arbitraria de los coeficientes α_p en dimensiones $D > 4$ tiene también algunos problemas. Uno de éstos es el pasaje de la formulación lagrangiana a la formulación hamiltoniana cuando se tienen términos de orden superior en curvaturas [51]. Esto se puede resolver requiriendo que los coeficientes α_p adquieran ciertos valores particulares [52]. Una forma de elegirlos es pedir que las teorías tengan una única constante cosmológica, obteniendo de esta manera un conjunto de teorías etiquetadas por un entero k, las cuales conducen a configuraciones bien definidas de agujeros negros. Para ver esto, se reescribe la primera ecuación de campo (5.3) en función de la cantidad de raíces del polinomio

$$\sum_{p=0}^{[\frac{d-1}{2}]}(D-2p)\alpha_p x^p = \beta_0 \prod_{i=1}^{i=k}(x-\beta_i).$$

De esta manera la primera ecuación (5.3) queda escrita de la forma

$$\epsilon_{ab_1\ldots b_{D-1}}\beta_0 \overline{R}^{b_1b_2}_{\beta_1}\ldots\overline{R}^{b_{2k-1}b_{2k}}_{\beta_k}e^{2k+1}\ldots e^{D-1}=0,$$

en donde se definió $\overline{R}^{ab}_{\beta_i}\equiv R^{ab}+\beta_i e^a e^b$. Entonces, si las ecuaciones de campo tienen la forma de arriba con una única raíz real $\beta\equiv\frac{1}{l^2}$ (l se puede pensar como la escala natural del espacio anti-de Sitter) y ninguna raíz compleja, estas teorías se pueden escribir por la acción

$$S_k=\kappa\int\sum_{p=0}^{p=k}c^k_p L^{(p)}, \tag{5.4}$$

donde

$$\alpha_p=c^k_p=\begin{cases}\frac{l^{2(p-k)}}{(D-2p)}\binom{k}{p} & ,p\leq k\\ 0 & ,p>k.\end{cases} \tag{5.5}$$

con $1\leq k\leq\left[\frac{D-1}{2}\right]$. Por lo tanto, dada una dimensión D, los coeficientes c^k_p llevan a obtener una familia de teorías diferentes etiquetadas por el entero $k\in\{1,\ldots,\left[\frac{D-1}{2}\right]\}$, que representa la potencia mayor de la curvatura en el lagrangiano.

Se puede ver que la acción de Einstein-Hilbert en D dimensiones se obtiene haciendo $k=1$. Cuando $k=\left[\frac{D-1}{2}\right]$, se debe distinguir entre D par o impar. Cuando $D=2n-1$ con $n\in\mathbb{Z}$, el máximo valor de k es $n-1$ y corresponde al lagrangiano de Chern-Simons para el grupo Anti-de Sitter. Mientras que si D es par, para $k=n-1$ se tiene el lagrangiano de Born-Infield [52].

El comportamiento de la teorías con lagrangianos de Lanczos-Lovelock es muy diferente para teorías con $D\leq 4$ y para $D>4$, ya que en primer caso las ecuaciones (5.3) son lineales en R^{ab} mientras que no ocurre así en el segundo caso. En $D\leq 4$ las ecuaciones de campo implican torsión nula, como se vio en la sección 3.2, mientras que para $D>4$ esto ya no es cierto. Cuando la torsión no es forzosamente nula, como en el caso $D>4$, uno puede generalizar el teorema de Lovelock para tener en cuenta lagrangianos con torsión T^a. Para esto, es natural considerar todos los posibles invariantes Lorentz conteniendo T^a explícitamente. La forma general para construir estos tipos de lagrangianos se muestra en [54] donde, además de considerar las continuaciones dimensionales de densidades de Euler (como en el teorema de Lovelock), hay que considerar otros invariantes topológicos como las densidades de Pontryagin [5].

5.2. Gravedad en Dimensiones Impares Como Teoría Gauge

Ahora que se vio una manera de generalizar el lagrangiano de Relatividad General a D dimensiones, a través del teorema de Lovelock, cabe preguntarse cuáles son sus problemas para obtener su versión cuántica. Uno de los problemas de cuantizar la gravedad en una cierta dimensión D es el problema que ocurre en cuatro dimensiones comentado al comienzo de este capítulo: la constante gravitacional tiene dimensión $[M]^{-2}$, haciendo que la teoría de perturbaciones falle, ya que los resultados son infinitos. Para mantener los resultados observables de la teoría finitos, habrá que agregar infinitos contratérminos en la acción [5]. En dimensión D, la constante κ de la acción de Lanczos-Lovelock (5.4) está relacionada con la constante gravitatoria G_k como [52]

$$\kappa = \frac{1}{2(D-2)!\Omega_{D-2}G_k},$$

donde Ω_D es el ángulo sólido en dimensión D y la constante gravitatoria G_k tiene unidades $[M]^{2k-D}$. Se ve entonces que G_k tiene siempre dimensiones inversas de masa, ocurriendo el mismo problema que en cuatro dimensiones.

La única manera conocida, hasta ahora, de mantener la esperanza de poder tener resultados de observables de la teoría es tener algún principio de simetría que limite la cantidad de posibles contratérminos para agregar en la acción, algo que sí sucede con las teorías de Yang-Mills con constantes de acoplamiento adimensionadas. Al poco tiempo que C.N. Yang y R. Mills propusieran el modelo de teorías gauge no-abelianas [55], R. Utiyama mostró que la Relatividad General puede escribirse como una teoría gauge para el grupo de Lorentz [56]. En el formalismo de Cartan, esto puede verse directamente de la acción (3.8), ya que todos los índices de Lorentz están contraídos. Se tuvo esperanza entonces de poder extender el grupo de Lorentz a una simetría local bajo el grupo de Poincaré $ISO(3,1)$, que es el grupo que incluye al de Lorentz y además a las traslaciones. Esto parecería plausible ya que una traslación $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ está dentro de las transformaciones generales de coordenadas, transformaciones de las cuales la Relatividad General es covariante. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos, no se ha podido encontrar una acción invariante bajo transformaciones locales del grupo de Poincaré $ISO(3,1)$ [5]. Es decir, no existe una 4-forma localmente invariante construida con una conexión del álgebra $\mathfrak{iso}(3,1)$. En dimensión $D=3$, sin embargo, es posible encontrar una acción invariante gauge bajo el grupo $ISO(2,1)$. Para mostrar esto explícitamente, hay que estudiar un poco más en detalle el grupo de Poincaré $ISO(D-1,1)$ en dimensión D genérica.

5.2.1. El Grupo de Poincaré y (anti-)de Sitter

El grupo de Poincaré es el grupo de isometrías del espacio plano de Minkowski $(D-1,1)$, es decir si $x^\mu \to x'^\mu$, con $\mu \in \{0,\ldots,D-1\}$ es una transformación bajo el grupo de Poincaré, entonces es invariante el elemento de línea

$$\eta_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \tag{5.6}$$

Una transformación $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ que satisfaga (5.6) debe ser de la forma [57]

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{5.7}$$

donde a^{μ} es una constante arbitraria y $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ es una matriz constante que satisface

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}.$$

De esto último puede verse que $\det(\Lambda) = \pm 1$ y también puede mostrarse que, o bien $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$ o bien $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$. Se interpreta entonces a Λ como una transformación de Lorentz mientras que las a^{μ} representan las traslaciones espacio-temporales.

Por supuesto, estas transformaciones tienen las propiedades de un grupo. En particular, la transformación inversa de (5.7) es [32]

$$x'^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} - (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu},$$

con $(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\nu} = \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = \Lambda_{\nu}{}^{\rho}$. Conviene hacer una aclaración de nomenclatura, este trabajo se refiere al grupo de Lorentz como el subgrupo de transformaciones (5.7) en el cual $a^{\mu} = 0$, mientras que el grupo de Poincaré es el caso general[5]. El grupo de Poincaré $ISO(D-1,1)$ es el subgrupo de transformaciones (5.7) con $\det(\Lambda) = 1$ y $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$.

Para caracterizar el álgebra $\mathfrak{iso}(D-1,1)$ del grupo $ISO(D-1,1)$ se utilizará una transformación infinitesimal de (5.7) escrita como

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} + \lambda_{\mu}{}^{\nu}, \qquad\qquad a^{\mu} = \xi^{\mu}, \tag{5.8}$$

con $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ y ξ^{μ} ambos infinitesimales. Se puede ver que, de la condición $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$, se tiene

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}.$$

De esta forma, al incluir las D componentes de ξ^{μ} se tiene que el grupo de Poincaré está descripto por $D(D+1)/2$ parámetros.

Por simplicidad, se utilizará una representación del grupo de Poincaré en cierto espacio vectorial, es decir se designará como $U(\Lambda, a)$ al operador unitario que actúa en dicho espacio[6], estando éstos asociados a los elementos matriz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ y las constantes a^{μ} de (5.7). Estos operadores tienen la siguiente regla de composición

$$U(\overline{\Lambda}\overline{a})U(\Lambda, a) = U(\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a}). \tag{5.9}$$

[5] A veces se dice **grupo de Lorentz inhomogéneo** a las transformaciones que cumplen (5.6). El subgrupo que cumple $a^{\mu} = 0$ recibe recibe el nombre de **grupo de Lorentz homogéneo** [32].

[6] Puede utilizarse una representación a un espacio vectorial de dimensión arbitraria, incluso de dimensión infinita como en el caso del espacio de Hilbert de los estados de una partícula.

Entonces, para una transformación infinitesimal como (5.8), se puede escribir

$$U(1+\lambda,\xi) = 1 + \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu} - \xi_\rho \mathbf{P}^\rho + \dots$$

donde $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ y $\mathbf{P}^\rho$ son operadores independientes de λ y ξ y, además, son los generadores del grupo de Poincaré en esta representación. Estos operadores se han supuesto anti-hermíticos, es decir

$$\mathbf{J}^{\mu\nu\dagger} = -\mathbf{J}^{\mu\nu} \qquad , \qquad \mathbf{P}^{\rho\dagger} = -\mathbf{P}^\rho.$$

Como $\lambda_{\mu\nu}$ es anti-simétrica entonces lo es también $\mathbf{J}^{\mu\nu}$.

Hallar el álgebra $\mathfrak{iso}(D-1,1)$ es equivalente a hallar las reglas de conmutación de $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ y $\mathbf{P}^\rho$. Para hacer esto, primero se deducirán las propiedades de transformación $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ y $\mathbf{P}^\rho$. La transformación de $U(1+\lambda,\xi)$ con parámetros $\Lambda^\mu{}_\nu$ y a^μ es

$$U(\Lambda,a)U(1+\lambda,\xi)U^{-1}(\Lambda,a) = U(\Lambda(1+\lambda)\Lambda^{-1}, \Lambda\xi - \Lambda\lambda\Lambda^{-1}a),$$

donde se usó la regla de composición (5.9) y que $U^{-1}(\Lambda,a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. A primer orden en λ y ξ se tiene

$$U(\Lambda,a)\left[\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu} - \xi_\rho\mathbf{P}^\rho\right]U^{-1}(\Lambda,a) = \frac{1}{2}(\Lambda\lambda\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu} - (\Lambda\xi - \Lambda\lambda\Lambda^{-1}a)_\mu\mathbf{P}^\mu.$$

Igualando los coeficientes que contienen $\lambda_{\mu\nu}$ y ξ_ρ a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned} U(\Lambda,a)\mathbf{J}^{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a) &= \Lambda_\alpha{}^\mu\Lambda_\beta{}^\nu(\mathbf{J}^{\alpha\beta} - \xi^\alpha\mathbf{P}^\beta + \xi^\beta\mathbf{P}^\mu), \\ U(\Lambda,a)\mathbf{P}^\mu U^{-1}(\Lambda,a) &= \Lambda_\alpha{}^\mu\mathbf{P}^\alpha. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Se ve aquí que (5.10) pone de manifiesto que para transformaciones de Lorentz puras (con $a^\mu = 0$) $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ es un tensor y $\mathbf{P}^\mu$ es un vector. También se ve que para traslaciones puras (con $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$) $\mathbf{P}^\mu$ es invariante mientras que $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ no lo es. Ahora, se puede deducir qué pasa cuando la transformación $U(\Lambda,a)$ es infinitesimal (es decir $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \lambda^\mu{}_\nu$). Las ecuaciones (5.10) se pueden escribir a primer orden en $\lambda^\mu{}_\nu$ y ξ^μ como

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu} - \xi_\rho\mathbf{P}^\rho, \mathbf{J}^{\alpha\beta}\right] &= \lambda_\mu{}^\alpha\mathbf{J}^{\mu\beta} + \lambda_\nu{}^\beta\mathbf{J}^{\alpha\nu} - \xi^\alpha\mathbf{P}^\beta + \xi^\beta\mathbf{P}^\alpha, \\ \left[\frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}\mathbf{J}^{\alpha\beta} - \xi_\rho\mathbf{P}^\rho, \mathbf{P}^\mu\right] &= \lambda_\nu{}^\mu\mathbf{P}^\nu. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes en $\lambda_{\mu\nu}$ y ξ_μ en ambos lados de estas ecuaciones, se llega al álgebra del grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\alpha\beta}\right] &= \eta^{\nu\alpha}\mathbf{J}^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}\mathbf{J}^{\nu\beta} - \eta^{\beta\mu}\mathbf{J}^{\alpha\nu} + \eta^{\beta\nu}\mathbf{J}^{\alpha\mu}, \\ \left[\mathbf{P}^\mu, \mathbf{J}^{\alpha\beta}\right] &= \eta^{\mu\alpha}\mathbf{P}^\beta - \eta^{\mu\beta}\mathbf{P}^\alpha, \\ [\mathbf{P}^\mu, \mathbf{P}^\alpha] &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Si ahora se quiere ver al grupo de Poincaré como grupo gauge, hay que tomar a $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ y a ξ^{μ} como funciones dependientes de cada punto de la variedad espacio-temporal. Como este grupo actúa en el espacio tangente a dicha variedad, conviene utilizar los índices de Lorentz del espacio tangente. Así, la uno-forma de conexión queda dada por

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + e^{a}\mathbf{P}_{a}.$$

¿Cómo transforma A bajo el grupo gauge de Poincaré? Para ver esto, hay que notar que A, bajo una transformación U, transforma, según (4.13), de la forma

$$A' = U^{-1}AU + U^{-1}dU,$$

y que si U es infinitesimal, $U = 1 + i\frac{1}{2}\omega_{ab}\mathbf{J}^{ab} + i\xi_{a}\mathbf{P}^{a}$, usando las reglas de conmutación (5.11) se tiene

$$\begin{aligned} \delta A \equiv A - A' &= \frac{1}{2}\left(d\lambda_{ab} + \omega^{a}{}_{c}\lambda^{cb} + \omega^{b}{}_{c}\lambda^{ac}\right)\mathbf{J}^{ab} \\ &+ \left(d\xi^{a} + \omega^{a}{}_{b}\xi^{b} + e^{b}\lambda^{a}{}_{c}\right)\mathbf{P}_{a}. \end{aligned}$$

Reconociendo por un lado la variación δA

$$\delta A = \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + \delta e^{a}\mathbf{P}_{a},$$

y por otro lado a la derivación covariante de una p-forma (2.40), se llega, igualando términos con $\mathbf{J}_{ab}$ y $\mathbf{P}_{a}$ a la variación de la conexión $\delta\omega^{ab}$ y del vielbein δe^{a},

$$\begin{aligned} \delta\omega^{ab} &= D\lambda^{ab} \\ \delta e^{a} &= D\xi^{a} + e^{b}\lambda_{b}{}^{a}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Se puede ver directamente de (5.12) que para una traslación pura (es decir $\lambda^{ab} = 0$) se tiene que ω^{ab} no varía mientras que la variación de e^{a} es una derivada total $D\xi^{a}$.

Se puede escribir ahora el tensor $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ como

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}d\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + de^{a}\mathbf{P}_{a} + \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\omega^{cd}\mathbf{J}_{cd} + e^{c}\mathbf{P}_{c}, \frac{1}{2}\omega^{fh}\mathbf{J}_{fh} + e^{f}\mathbf{P}_{f}] \\ &= \frac{1}{2}(d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\omega^{cb})\mathbf{J}_{ab} + (de^{a} + \omega^{a}{}_{c}e^{c})\mathbf{P}_{a}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizaron las reglas de conmutación (5.11). Recordando las ecuaciones de estructura de Cartan se tiene finalmente

$$F = \frac{1}{2}R^{ab}\mathbf{J}_{ab} + T^{a}\mathbf{P}_{a}. \tag{5.13}$$

Ya que tanto R^{ab} como T^{a} son covariantes, uno puede comprobar directamente a partir de (5.13) que F es covariante bajo la transformación U (es decir, transforma como $F' = U^{-1}FU$).

Se puede pasar ahora a estudiar el grupo de (anti-)de Sitter. El grupo de Sitter $SO(D,1)$ es el grupo de rotaciones de un espacio plano de dimensión $D+1$ con métrica minkowskiana, es decir $\eta_{AB} = (-,+,\ldots,+)$, donde $A,B \in \{0,\ldots,D\}$. Mientras que el grupo anti-de Sitter $SO(D-1,2)$ es el grupo de rotaciones en un espacio de $D+1$ dimensiones pero con métrica $\eta_{AB} = (-,+,\ldots,+,-)$. Para poder hallar el álgebra de los generadores $\mathbf{J}_{AB}$ de estos grupos se puede proceder en completa analogía con el caso de grupo de Lorentz puro (o sea, $a^\mu = 0$), obteniendo una expresión similar a la primera relación (5.11) del álgebra de Poincaré

$$\left[\mathbf{J}^{AB}, \mathbf{J}^{CD}\right] = \eta^{BC}\mathbf{J}^{AD} - \eta^{AC}\mathbf{J}^{BD} - \eta^{DA}\mathbf{J}^{CB} + \eta^{DB}\mathbf{J}^{CA}. \tag{5.14}$$

Uno puede obtener el grupo de Poincaré $ISO(D-1,1)$ a partir del grupo de (anti-)de Sitter $SO(D,1)$ o $SO(D-1,2)$ mediante un proceso llamado contracción de Inönü-Wigner[7] [36]. El esquema de esta contracción en este caso sería separar los generadores $\mathbf{J}_{AB}$ en $\mathbf{J}_{ab}$ y $l\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{aD}$, con $a,b \in \{0,\ldots,D-1\}$. Con dicha separación de generadores, la regla de conmutadores (5.14) queda expresada como

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{J}^{ab}, \mathbf{J}^{cd}\right] &= \eta^{bc}\mathbf{J}^{ad} - \eta^{ac}\mathbf{J}^{bd} - \eta^{da}\mathbf{J}^{cb} + \eta^{db}\mathbf{J}^{ca}, \\
\left[\mathbf{P}^{a}, \mathbf{J}^{bc}\right] &= \eta^{bc}\mathbf{P}^{a} - \eta^{ac}\mathbf{P}^{b}, \\
\left[\mathbf{P}^{a}, \mathbf{P}^{b}\right] &= \pm\frac{1}{l^2}\mathbf{J}^{ab},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde en la tercera ecuación el signo $-$ es para el grupo de Sitter y el signo $+$ es para el grupo anti-de Sitter. En la tercera ecuación de (5.15) se puede ver que, como el límite para $l \to \infty$ existe y es cero, el álgebra de (anti-)de Sitter se reduce al álgebra de Poincaré (5.11). El parámetro l puede pensarse como una escala natural y más adelante se verá cómo puede relacionarse con la constante cosmológica.

Si se quiere escribir el potencial gauge 1-forma con simetría de grupo (anti-)de Sitter en un espacio de dimensión $D+1$, se deben tener los índices latinos en mayúscula contraídos de forma que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{A}^{AB}\mathbf{J}_{AB}$. Si uno separa los generadores $\mathbf{J}_{AB}$ en $\mathbf{J}_{ab}$ y P_a como arriba y define en forma esquemática

$$\mathcal{A}^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ab} & l^{-1}e^a \\ -l^{-1}e^b & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

se ve que la conexión puede escribirse como $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + e^a\mathbf{P}_a$, o sea, igual a potencial 1-forma para el grupo de Poincaré.

Puede también reordenarse los parámetros de la transformación $U = 1 + \frac{1}{2}\Lambda^{AB}\mathbf{J}_{AB} + \ldots$ como

$$\Lambda^{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{ab} & l^{-1}\xi^a \\ -l^{-1}\xi^b & 0 \end{pmatrix},$$

[7] Este esquema de contracción es análogo a cómo se puede obtener el álgebra del grupo de Galileo a partir del álgebra del grupo de Poincaré para la velocidad de la luz $c \to \infty$.

y así se obtiene, de forma completamente análoga a lo que se hizo con el grupo de Poincaré,

$$\delta\mathcal{A}^{AB} = d\Lambda^{AB} + \mathcal{A}^{A}{}_{C}\Lambda^{CB} + \mathcal{A}^{B}{}_{C}\Lambda^{AB}.$$

De esta forma, se tiene para las variaciones de ω^{ab} y e^a definidos a partir de $\mathcal{A}^{AB}$ la expresión

$$\begin{aligned}\delta\omega^{ab} &= d\lambda^{ab}\omega^{a}{}_{c}\lambda^{cb} + \omega^{b}{}_{c}\Lambda^{ab} \pm l^{-2}(e^a\xi^b - \xi^a e^b)\\ \delta e^a &= d\xi^a + \omega^{a}{}_{b}\xi^b + e^b\lambda_b{}^a,\end{aligned} \tag{5.17}$$

donde el signo $(+)$ corresponde para el grupo de Sitter y el signo $(-)$ para el grupo anti-de Sitter. Con estas convenciones, la curvatura $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$ asociada al potencial gauge (anti-)de Sitter se escribe

$$\mathcal{F}^{AB} = \begin{pmatrix} R^{ab} \pm l^{-2}e^a e^b & l^{-1}T^a \\ -l^{-1}T^b & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

con signo $(-)$ para el grupo de de Sitter y $(+)$ para el grupo anti-de Sitter.

Se ha visto entonces cómo las simetrías de un espacio-tiempo (es decir rotaciones $SO(D-1,1)$ y traslaciones) en cierta dimensión D son compatibles con un grupo más grande (ya sea $SO(D,1)$ o $SO(D-1,2)$) que contiene a $SO(D-1,1)$ y a las traslaciones. Los grupos $SO(D,1)$ y $SO(D-1,2)$ son semi-simples [5], mientras que el grupo de Poincaré no lo es. Los grupos semi-simples son preferidos como grupos gauge ya que tienen un invariante conocido como **métrica de Killing** o **forma de Killing** [34] que puede ser usada como término cinético para campos gauge.

5.2.2. Gravedad en $D = 3$ Como Teoría Gauge

Ya visto en la sección 5.2.1 cómo varían las componentes de la acción (es decir ω^{ab} y e^a) bajo el grupo de Poincaré de dimensión genérica $ISO(D-1,1)$, se puede ver ahora que la gravedad en dimensión tres es invariante bajo el grupo $ISO(2,1)$ [5]. Por invariancia bajo el grupo se entiende que las ecuaciones de campo permanecen incambiadas por la transformación bajo ese grupo, por lo tanto la variación del lagrangiano es, cuando mucho, una derivada total. Para ver esto, se considera la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert en $D = 3$

$$\mathcal{L}_3 = \epsilon_{abc}R^{ab}e^c. \tag{5.19}$$

Si se realiza una transformación infinitesimal de $ISO(2,1)$, de parámetros λ_{ab} y ξ^a, se tiene

$$\delta\mathcal{L}_3 = \epsilon_{abc}\delta R^{ab}e^c + \epsilon_{abc}R^{ab}\delta e^c,$$

donde se ha utilizado que $\delta\epsilon_{abc} = 0$. Utilizando la primera relación de (5.12) se tiene

$$\begin{aligned}\delta R^{ab} &= D(\delta\omega^{ab}) = D(D\lambda^{ab}) = -d\omega^{ac}\lambda^{b}{}_{c} - -d\omega^{cb}\lambda^{a}{}_{c} - \omega^{a}{}_{d}\omega^{dc}\lambda^{b}{}_{c} - \omega^{c}{}_{d}\omega^{db}\lambda^{a}{}_{c}\\ &= -R^{ac}\lambda^{b}{}_{c} - R^{cb}\lambda^{a}{}_{c}.\end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la segunda relación de (5.12) se ve

$$\epsilon_{abc}R^{ab}\delta e^c = \epsilon_{abc}R^{ab}(D\xi^c - e^d\lambda^c{}_d) = -\epsilon_{abc}R^{ab}e^d\lambda^c{}_d + d(\epsilon_{abc}R^{ab}\xi^c),$$

donde en la segunda igualdad se usó la identidad de Bianchi ($DR^{ab} = 0$) y que $D\epsilon_{abc} = 0$. Teniendo en cuenta todo esto, se deduce

$$\delta\mathcal{L}_3 = R^{ab}e^c(-\epsilon_{adc}\lambda^d{}_b - \epsilon_{dbc}\lambda^d{}_a - \epsilon_{abd}\lambda^d{}_c) + d(\epsilon_{abc}R^{ab}\xi^c) = d(\epsilon_{abc}R^{ab}\xi^c),$$

donde se usó que el primer término de la segunda igualdad se anula por la anti-simetría de ϵ_{abc} y de λ^{ab}, y que los índices latinos solamente toman valores del conjunto $\{0, 1, 2\}$.

Como $\delta\mathcal{L}_3$ es una derivada total, se desprende entonces que, en dimensión $D = 3$ para una variedad sin borde o con condición $\xi^a = 0$ en la variedad borde, la gravedad es una teoría de gauge para el grupo de Poincaré $ISO(2, 1)$.

Si se considera ahora un término con constante cosmológica adicionado a la densidad lagrangiana (5.19), la invariancia del espacio tangente no es más la simetría de Poincaré. Sin embargo, puede extenderse el grupo de Poincaré a un grupo más grande (el grupo (anti-)de Sitter), como se mostró en la sección 5.2.1, de forma que la densidad lagrangiana sí sea invariante bajo este grupo. En efecto, la densidad lagrangiana con constante cosmológica Λ es

$$\mathcal{L}_3^{Ads} = \epsilon_{abc}R^{ab}e^c \pm \frac{1}{3l^2}\epsilon_{abc}e^ae^be^c, \tag{5.20}$$

donde se ha puesto la constante cosmológica $\Lambda = \frac{1}{6l^2}$. La variación de (5.20) bajo el grupo (anti-)de Sitter es

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_3 &= \epsilon_{abc}\delta R^{ab}e^c + \epsilon_{abc}R^{ab}\delta e^c \pm \frac{1}{l^2}e^ae^b\delta e^c && (5.21)\\ &= \epsilon_{abc}\left(D(\delta\omega^{ab})e^c + R^{ab}\delta e^c + \frac{1}{l^2}e^ae^b\delta e^c\right). && (5.22) \end{aligned}$$

Las variaciones de ω^{ab} y e^a, según (5.17), son las siguientes

$$\begin{aligned} \delta\omega^{ab} &= d\lambda^{ab}\omega^a{}_c\lambda^{cb} + \omega^b{}_c\Lambda^{ab} \mp l^{-2}(e^a\xi^b - \xi^a e^b)\\ \delta e^a &= d\xi^a + \omega^a{}_b\xi^b + e^b\lambda_b{}^a, \end{aligned}$$

donde el signo negativo corresponde a la densidad lagrangiana con término constante $+\Lambda$ y el signo positivo con $-\Lambda$. Sustituyendo estas variaciones en (5.21), teniendo en cuenta que $\epsilon_{abc}e^ae^be^d\lambda^c{}_d = 0$ por la anti-simetría total de ϵ_{abc} y λ^{ab} y recordando el resultado más arriba que $D(D\lambda^{ab}) = -R^{ac}\lambda^b{}_c - R^{cb}\lambda^a{}_c$, se llega a que

$$\delta\mathcal{L}_3 = d(\epsilon_{abc}R^{ab}\xi^c) + \frac{1}{l^2}\epsilon_{abc}\left\{\pm e^ae^bD\xi^c \mp T^a\xi^be^c \mp e^aD\xi^be^c \pm \xi^aT^be^c \pm D\xi^ae^be^c\right\}.$$

Por anti-simetría total de ϵ_{abc} el tercer y el último término entre paréntesis curvo se anulan, mientras que el segundo y cuarto se adicionan. Ahora bien, como

$$d(\epsilon_{abc}e^a e^b \xi^c) = \epsilon_{abc}\left(T^a e^b \xi^c - e^a T^b \xi^c + e^a e^b D\xi^c\right),$$

entonces $\epsilon_{abc}e^a e^b D\xi^c = d(\epsilon_{abc}e^a e^b \xi^c) - 2\epsilon_{abc}T^a e^b \xi^c$. Sustituyendo esto se obtiene finalmente que

$$\delta\mathcal{L}_3 = d\left(\epsilon_{abc}\left\{R^{ab} \pm \frac{1}{l^2}e^a e^b\right\}\xi^c\right).$$

Por lo tanto, si la variedad espacio-tiempo no tiene borde o se imponen condiciones de contorno adecuadas (por ejemplo, $\xi^c = 0$ en la variedad borde), el lagrangiano (5.20) con signo $(+\Lambda)$ $-\Lambda$ es invariante por el grupo (anti-)de Sitter.

Cabe preguntarse cómo puede generalizarse este 'accidente' a dimensiones genéricas D. Para responder esto, hay que estudiar qué particularidad tiene la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_3$ que hace posible la cuasi-invariancia por $ISO(2,1)$ para el caso constante cosmológica nula y por el grupo (anti-)de Sitter para el caso con constante cosmológica no nula y ver si se puede extender esas características a otras dimensiones. En la sección que sigue se verá que esto es posible cuando la dimensión D es impar.

5.2.3. Gravedad en Dimensión D Impar

En la sección 5.2.3 se mostró cómo es posible pensar a la gravedad en dimensión $D = 3$ como teoría gauge ya sea bajo el grupo (anti)de Sitter con constante cosmológica (positiva) negativa o bajo el grupo de Poincaré en el caso de constante cosmológica nula. Se va a ver ahora cómo generalizar los argumentos mostrados en la sección 5.2.2 a una dimensión D arbitraria.

En dimensión D arbitraria, se puede ver al grupo de Lorentz $SO(D-1,1)$ como inmerso en un grupo mayor, ya sea el grupo (anti-)de Sitter ($SO(D,1)$ y $SO(D-1,2)$) o el límite de éstos cuando $l \to \infty$, o sea el grupo de Poincaré $ISO(D-1,1)$. El problema es que se puede construir una gravedad invariante bajo estos grupos mayores solamente cuando la dimensión D es impar, es decir $D = 2n-1$ con $n \in \mathbb{Z}$. Para convencerse de esto, primero hay que ver qué pasaría en el caso $D = 4$. En ese caso, la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert es

$$\mathcal{L}_4 = \epsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d. \tag{5.23}$$

Si se supone una transformación de Poincaré se obtiene, utilizando el resultado (5.12) de las variaciones $\delta\omega^{ab}$ y δe^a y cálculos similares al caso $D = 3$,

$$\delta\mathcal{L}_4 = 2d(\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c\xi^d) - 2\epsilon_{abcd}R^{ab}T^c\xi^d. \tag{5.24}$$

El Primer término del segundo miembro de (5.24) es un término que contribuye si la variedad tiene borde, el segundo término no es cero a menos que se imponga la segunda ecuación de campo de (3.11) (o sea, $T^a = 0$). Esto quiere decir que la invariancia de la acción bajo el grupo $ISO(3,1)$ solamente ocurre 'on shell', es decir solamente cuando valen las ecuaciones de campo. Como simetrías 'on shell' no son simetrías reales, probablemente no sobrevivan en la cuantización, ya que la Mecánica Cuántica no respeta las ecuaciones de campo [5].

Sin embargo, en dimensión $D = 3$ la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_3$ es lineal en e^a. Uno puede ver que lagrangianos lineales en e^a en dimensión D arbitraria de la forma

$$\mathcal{L}_{2n-1} = \epsilon_{a_1 \ldots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}},$$

que solamente se definen en dimensiones impares, son invariantes por $ISO(D-1,1)$. Se puede argumentar que como el grupo de Poincaré es el límite del grupo (anti-)de Sitter con $l \to \infty$, debería existir un lagrangiano en dimensión impar invariante bajo el grupo (anti-)de Sitter.

La clave para entender esto es que la derivada del lagrangiano (5.20) es un invariante topológico, más precisamente pertenece una clase característica (ver sección 4.2.2). Para el grupo (anti-)de Sitter en dimensión $D = 3$, como se vio en la sección 5.2.1, se puede escribir la curvatura 2-forma $\mathcal{F}^{AB}$ de la manera

$$\mathcal{F}^{AB} = \begin{pmatrix} R^{ab} \pm l^{-2} e^a e^b & l^{-1} T^a \\ -l^{-1} T^b & 0 \end{pmatrix},$$

donde los índices con mayúscula van de 0 hasta 4. Se vio en la sección 4.2.2 cómo construir una clase a partir de $\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{AB} \mathbf{J}_{AB}$, que por ejemplo en este caso

$$E_4 = \langle \mathbf{F}\mathbf{F} \rangle = \epsilon_{ABCD} \mathcal{F}^{AB} \mathcal{F}^{CD}.$$

El segundo miembro es invariante gauge (es decir, $\delta E_4 = 0$) y se asumió la última igualdad ya que se puede tomar $\epsilon_{ABCD} = \langle \mathbf{J}_{AB} \mathbf{J}_{CD} \rangle$. La 4-forma E_4 se puede escribir, dada la descomposición de $\mathcal{F}^{AB}$, como

$$E_4 = \frac{4}{l} \epsilon_{abc} \left(R^{ab} \pm l^{-2} \right) T^c.$$

A su vez,

$$d\mathcal{L}_3^{(A)dS} = \epsilon_{abc} \left(R^{ab} \pm l^{-2} e^a e^b \right) T^c,$$

y, por lo tanto,

$$E_4 = \frac{4}{l} d\mathcal{L}_3^{(A)dS}.$$

Entonces,

$$0 = \delta E_4 = \frac{4}{l} \delta(d\mathcal{L}_3^{(A)dS}) = \frac{4}{l} d(\delta \mathcal{L}_3^{(A)dS}),$$

donde de aquí se desprende por el lema de Poincaré [16] que *localmente*

$$\delta \mathcal{L}_3^{(A)dS} = d\alpha_2,$$

con α_2 una 2-forma. Es por esto que $\mathcal{L}_3^{(A)dS}$ es invariante, a menos de términos de borde [42, 41].

Esto puede entenderse en el contexto de teoría de fibrados, vista en la sección 4.2: se encuentra un polinomio invariante (en este caso E_4) y se utiliza la forma de Chern-Simons(CS) asociada (es decir, la forma $\mathcal{L}_3^{(A)dS}$) como lagrangiano de la teoría. Haciendo esto, uno tiene garantizado que $\delta\mathcal{L}_3^{(A)dS} = d\alpha_2$, con α_2 una 2-forma. Si se utiliza una variedad espacio-tiempo sin borde, o con condiciones $\delta\mathcal{L}_3^{(A)dS} = 0$ en el borde, se obtienen las ecuaciones de campo invariantes bajo el grupo (anti-)de Sitter. Esta construcción puede hacerse utilizando no solamente E_4 como invariante sino cualquier clase característica (ver sección 4.2.2). Pueden construirse lagrangianos utilizando forma de CS con clases características como, por ejemplo, clases de Pontryagin o clases de Chern [16, 58]. También puede utilizarse la torsión T^a en las formas de CS [5], pero en este trabajo se utilizarán lagrangianos sin torsión.

Ahora se puede dilucidar cómo proceder para encontrar lagrangianos invariantes bajo el grupo (anti-)de Sitter en dimensiones impares $D = 2n - 1$. Una vez elegido el polinomio invariante $P(\mathcal{F})$, puede utilizarse el método mostrado al final de la sección 4.2.2 para hallar la forma de CS asociada a dicho polinomio. En el caso del grupo (anti-)de Sitter para $D = 2n - 1$, el lagrangiano adquiere la forma

$$\mathcal{L}_{2n-1}^{(A)dS} = \kappa \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha_p L^{(p)}, \tag{5.25}$$

donde κ es una constante arbitraria adimensionada y $L^{(p)}$ está dado según (5.2). En este caso, los coeficientes α_p toman la forma

$$\alpha_p = \frac{l^{2p-n+1}}{(D-2p)} \binom{k}{p}, \qquad\qquad p \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Si se toma el caso anti-de Sitter (signo positivo en la constante cosmológica), este α_p es justamente el valor de las constantes en (5.5) con $k = \left[\frac{D-1}{2}\right]$. Por lo tanto, el lagrangiano $\mathcal{L}_{2n-1}^{AdS}$ además de ser invariante bajo el grupo anti-de Sitter es un caso particular del los lagrangianos de Lanczos-Lovelock con una única constante cosmológica [52] (ver sección 5.1).

5.2.4. Cuantización de la Constante Gravitatoria

Como se vio en la sección 4.2.2, las formas de CS están asociadas a la topología intrínseca a la variedad, ya que por el teorema 4.3 (Chern-Weil) dos polinomios $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{F}})$ pertenecen a la misma clase característica para dos conexiones diferentes $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$. Esto permite, si se usa la forma de CS como densidad lagrangiana, que esté asociada con un cuasi-invariante ya que, como se recalcó varias veces, la variación infinitesimal de la forma de CS bajo un cierto grupo gauge es una forma exacta. Esto tiene como consecuencia la cuantización de la constante gravitatoria κ, en el sentido que ésta tomará un conjunto de discreto de valores [48]. Para ver esto, sea M la variedad espacio-tiempo de dimensión $2n-1$ y sea Ω una variedad cuyo borde sea M (es decir, $M = \partial\Omega$). La densidad lagrangiana de CS para el grupo anti-de Sitter (5.25) puede ser escrita como

$$d\mathcal{L}_{2n-1} = \kappa E_{2n}.$$

La acción S_{2n-1} para este lagrangiano, utilizando el teorema de Stokes (2.18), se puede expresar

$$S_{2n-1} = \int_M \mathcal{L}_{2n-1} = \kappa \int_\Omega E_{2n}. \tag{5.26}$$

Existen muchas maneras de elegir una variedad Ω tal que $\partial\Omega = M$ pero, ya que la acción S_{2n-1} se refiere a las propiedades dinámicas de M, es razonable imponer que los observables físicos sean independientes de la variedad Ω siempre que $\partial\Omega = M$. Es decir, si se tienen dos extensiones Ω y Ω' de la variedad M, las acciones S y S' asociadas según (5.26) deben llevar a la misma física. Por lo tanto, para que la integral de caminos lleve a los mismos valores esperados de los observables la diferencia entre S y S' debe ser un múltiplo de $2\pi\hbar$, por lo tanto (en el caso $[h] = 1$) se tiene

$$S_{2n-1} - S'_{2n-1} = 2\pi m, \tag{5.27}$$

donde m es un entero. Por otro lado, por (5.26), se ve que

$$S_{2n-1} - S'_{2n-1} = \kappa \int_\Omega E_{2n} - \kappa \int_{\Omega'} E_{2n} = \kappa \left(\int_\Omega E_{2n} + \int_{-\Omega'} E_{2n} \right) = \kappa \int_{\Omega \cup (-\Omega')} E_{2n}, \tag{5.28}$$

donde el signo de menos para la variedad Ω' tiene en cuenta el hecho de que la orientación de una de las dos mitades debe ser invertida para que la orientación de la unión $\Omega \cup (-\Omega')$ esté bien definida. La integral en $\Omega \cup (-\Omega')$ de E_{2n} es un invariante topológico y los teoremas del índice aseguran que es un número entero conocido como **número de Chern** [6]. Al final, de (5.27) y (5.28) se tiene que la constante κ debe tomar un número discreto de valores posibles.

A partir de resultados del estudio de anomalías quirales, se sabe que, en las teorías de CS, los posibles contratérminos a agregar debido a las correcciones cuánticas consistentes con las simetrías de la acción (invariancia gauge y covariancia general) son también de Chern-Simons [59]. Esto último, sumando a la condición de cuantización, implicaría que después de hacer todas las correcciones cuánticas y la regularización apropiada se debe finalizar con una acción efectiva Γ con la misma forma original que la acción clásica S_{2n-1} y la condición de cuantización dada arriba [6].

5.2.5. Formas de Transgresión Como Teorías de Gravedad

En las secciones anteriores de este capítulo se ha visto que si se toman formas de CS como densidades lagrangianas en dimensiones impares $D = 2n-1$, se puede construir una teoría cuyas ecuaciones de campo son invariantes bajo un grupo gauge. Estos lagrangianos, al estar escritos en el lenguaje de formas, son covariantes por transformaciones generales de coordenadas y, al tener los índices contraídos del espacio tangente, cumplen con el principio de equivalencia. Sin embargo, las formas de CS no son invariantes bajo una variación gauge sino que cambian por una derivada total como se mostró anteriormente, es decir son cuasi-invariantes. Esto trae algunos problemas cuando, por ejemplo, las acciones están definidas en un espacio-tiempo infinitamente extendido ya que bajo transformaciones gauge se pueden tener contribuciones de borde que son infinitas [5]. También es problemático cuando se quiere que estén bien definidas algunas cantidades físicas de la teoría que se derivan directamente de la acción (como por ejemplo las cargas conservadas a partir del teorema de Noether y la temperatura). Es por estas razones que sería conveniente tener una teoría genuinamente invariante gauge. Por lo tanto, puede ser conveniente utilizar como lagrangianos a las formas de transgresión (ver sección 4.2.2) en vez de formas de CS [6].

Ya se vio en la sección 4.2.2 cómo escribir una forma de transgresión $\mathcal{T}_{2n-1}$ a partir de una forma de CS $\mathcal{Q}_{2n-1}$, a saber

$$\mathcal{T}_{2n-1}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}) = \mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}}) - dB_{2n-2}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}).$$

En el apéndice B se muestra cómo obtener la variación general $\delta\mathcal{T}_{2n-1}$ de una transgresión, obteniendo la ecuación (4.28):

$$\delta\mathcal{T}_{2n-1} = n < \mathcal{F}_1^{n-1}\delta\mathcal{A}_1 > -n < \mathcal{F}_0^{n-1}\delta\mathcal{A}_0 > -n(n-1)d\int_0^1 dt < \mathcal{J}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t > .$$

Si se escribe el potencial 1-forma como $\mathcal{A}_i = A_i^a T^a$ y el tensor de campo 2-forma como $\mathcal{F}_i = F_i^a T^a$, con $\{T^a\}$ los generadores del grupo gauge G y con $i \in \{0,1\}$, se puede arribar a las siguientes ecuaciones de campo asumiendo como campos variables e independientes $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_1^{a_1} \dots \mathcal{F}_1^{a_{n-1}} T^{a_n} \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{F}_0^{a_1} \dots \mathcal{F}_0^{a_{n-1}} T^{a_n} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

las cuales deben complementarse con condiciones de borde apropiadas para anular el término de borde de (4.28). De este modo, la acción es realmente un extremo cuando valen las ecuaciones de campo [6]. Existen varias condiciones de borde apropiadas para que la acción sea un extremo, por ejemplo se puede pedir que las variaciones δA_1 y δA_0 se anulen en la variedad borde. Esto último es demasiado restrictivo ya que la lagrangiana contiene solamente hasta derivadas primeras de los campos. Otra condición de borde sería imponer $\mathcal{J} = 0$ en el borde (o que tienda a cero lo suficientemente rápido) haciendo que en la variedad borde $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1$ y que $\mathcal{F}_t$ sea finito. Pero también puede pedirse que uno de los potenciales sea variable mientras el otro permanece fijo. En este último caso se puede tomar, por ejemplo, a $\mathcal{A}_1$

como campo dinámico mientras $\delta\mathcal{A}_0$ es una variación gauge con un parámetro de transformación igual al que aparece en la variación $\delta\mathcal{A}_1$ en el borde. Existen todavía otras posibilidades, una de ellas es la configuración de variedad cobordante que se verá más adelante y la otra relacionada con el modelo gauged-Wess-Zumino-Witten (g-WZW) que se verá en el capítulo 6.

Si se considera el grupo anti-de Sitter $SO(D-1,2)$ como grupo gauge se había visto que, siendo $\{\mathbf{J}_{AB}\}$ los generadores de la transformación, el potencial gauge $\mathcal{A}$ adquiere la forma

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + e^a\mathbf{P}_a,$$

donde los índices latinos en minúscula adquieren los valores del conjunto $\{0,\ldots,D-2\}$ y $\mathbf{P}_a = \mathbf{J}_{a,D+1}$. Cuando $D=3$, se puede ver, a partir de (4.23), que la forma de CS es [6]

$$\mathcal{Q}_3(e,\omega) = \epsilon_{abc}\left(R^{ab}e^c + \frac{1}{3}e^a e^b e^c\right) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d\left(e^a\omega^{bc}\right),$$

donde[8] se ha considerado la constante de escala $l=1$. Se puede entonces, a partir de (4.22), escribir la forma de transgresión asociada con dos potenciales $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_0$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3(e_1,\omega_1,e_0,\omega_1) &= \epsilon_{abc}\left(R_1^{ab}e_1^c + \frac{1}{3}e_1^a e_1^b e_1^c\right) - \epsilon_{abc}\left(R_0^{ab}e_0^c + \frac{1}{3}e_0^a e_0^b e_0^c\right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d\left[(e_1^a + e_0^a)(\omega_1^{bc} - \omega_0^{bc})\right].\end{aligned}$$

Una elección particular para $\mathcal{A}_0$, que permite acercarse lo más posible a teorías de gravitación de CS, es la configuración de variedad cobordante [6, 7]. Si se supone, por simplicidad en la notación de índices, que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}}$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + e^a\mathbf{P}_a,\\ \overline{\mathcal{A}} &= \frac{1}{2}\overline{\omega}^{ab}\mathbf{J}_{ab} + \overline{e}^a\mathbf{P}_a.\end{aligned}$$

El potencial $\overline{\mathcal{A}}$ está definido en el borde por

$$\overline{e}^a = 0, \qquad \overline{\omega}^{1\underline{i}} = 0, \qquad \overline{\omega}^{\overline{ij}} = \omega^{\overline{ij}}, \tag{5.29}$$

donde el índice 1 corresponde a la dirección perpendicular al borde y los índices subrayados como $\underline{i}$ pueden tomar cualquier valor diferente de 1.

La interpretación que uno puede hacer de esta última configuración es que la física observable se encuentra en una región del espacio-tiempo M caracterizada por el campo $\mathcal{A}$. En el borde ∂M de esta región, existe un campo $\overline{\mathcal{A}}$ con propiedades

[8] En los lagrangianos utilizados anteriormente, no se puso el término que es una derivada total ya que se habían utilizado condiciones de contorno $\delta\omega = \delta e = 0$ en la variedad borde.

idénticas a $\mathcal{A}$. Este campo $\overline{\mathcal{A}}$ se extiende en una variedad $\overline{M}$ que tiene borde ∂M [5].

Las formas de transgresión como teorías de gravedad permiten, como se mencionó más arriba, tener bien definida una carga conservada por el teorema de Noether (ver apéndice C para una formulación conveniente del teorema de Noether), que más adelante se verá cómo se puede utilizar para hallar la masa de un agujero negro en el modelo utilizado en este trabajo.

Capítulo 6

Modelo de Gravedad Gauged Wess-Zumino-Witten

En el capítulo 5 se ha visto una forma de generalizar la Relatividad General en dimensión cuatro (ver en el capítulo 3) a una dimensión genérica D. Se ha visto, también en el capítulo 5, que si la dimensión D es impar, la teoría puede escribirse como una teoría gauge para un cierto grupo de simetría G si se utiliza como densidad lagrangiana una forma de CS de G, o bien una forma de transgresión. Al estar estas formas relacionadas con invariantes topológicos del fibrado, como se vio en el capítulo 4, esto trae consecuencias inesperadas como por ejemplo la cuantización de la constante gravitatoria (ver sección 5.2.4). Y también, con estas consecuencias, no se puede evitar mantener la esperanza de que las teorías de gravedad así construidas puedan cuantizarse en algún momento.

A pesar de tener varias dificultades, el problema fundamental que tienen estas teorías es que solamente están definidas en dimensiones impares. Si bien las Teorías de Supercuerdas especulan en que la física puede estar descripta en $D = 10$ o $D = 11$ [1], todavía no existe alguna evidencia experimental de que esto sea efectivamente así. Por lo tanto, sería bienvenido algún mecanismo que permita poder generalizar las buenas características de estas teorías a dimensiones pares como $D = 4$. Se puede intentar llegar a esto pretendiendo extender estos conceptos relacionados con la topología del fibrado a dimensiones pares agregando campos dinámicos [64], [65]. Otra forma puede ser implementar algún proceso de reducción dimensional y esperar a que las características de la teoría en dimensiones impares sobrevivan al proceso de reducción.

Hace ya tiempo, mucho antes del surgimiento de las Teorías de Cuerdas, que se vienen pensando en procesos de reducción dimensional. Uno puede remontarse a los trabajos de Theodor Kaluza en 1921 donde, queriendo unificar la gravedad con el electromagnetismo, asumió que el Universo es de dimensión cinco [8]. Controlando la dimensión extra[1], Kaluza pudo obtener las ecuaciones de gravedad y

[1]Kaluza consideró el Universo como un sub-espacio cuadridimensional de $\mathbb{R}^5$ donde las derivadas

electromagnetismo en dimensión cuatro a partir de gravedad pura en dimensión cinco. Posteriormente, en 1926, Oskar Klein reformuló esta teoría utilizando el principio de mínima acción [9]. Klein asumió además que la coordenada extra estaba enrollada en un círculo de radio muy pequeño y es por esta razón que él argumentaba que no había podido ser detectada en algún experimento. Un argumento similar a este se utiliza en Teoría de Cuerdas para poder, a partir de dimensión diez u once, obtener un Universo cuadridimensional que se observa y así poder tomar contacto con los experimentos [66]. En estos casos, uno supone que el espacio-tiempo de dimensión diez u once puede escribirse como $M_4 \times K_C$, donde M_4 es una variedad cuadridimensional y K_C una variedad compacta del tamaño de la escala de Planck.

Las teorías de Wess-Zumino-Witten (WZW) y gauged Wess-Zumino-Witten (gWZW) [10, 11] fueron introducidas en un principio como teorías efectivas en Física Nuclear y Física de Partículas. En esos casos, se estudiaron conexiones valuadas en el álgebra $\mathfrak{su}_L(3)\times\mathfrak{su}_R(3)$, que sumado a un término cinético de los bosones de Goldstone, lleva a un lagrangiano efectivo para QCD. Los modelos de WZW y de gWZW están íntimamente relacionados con las teorías de CS y formas de transgresión ya que pueden ser pensadas como inducidas en el borde de una variedad en la cual la teoría de CS o transgresión respectiva es definida y, por lo tanto, tienen la particularidad de ser definidas en dimensiones pares.

Recientemente, los modelos de gWZW para grupos espacio-temporales como $SO(4,2)$, en vez de el grupo $SU_L(3) \times SU(3)_R$, han sido considerados como teorías de gravedad [12, 13], mostrando además que puede obtenerse Relatividad General en dimensión $3+1$ más un término con constante cosmológica. Estos modelos, como las gravedades de CS, resultan ser teorías gauge de gravedad que podrían ser relevantes para la construcción de una Gravedad Cuántica consistente y pueden ser utilizadas como teorías de gravedad modificadas que podrían resolver de manera dinámica problemas como la Materia Oscura[2] y la Energía Oscura[3] en Cosmología.

Lo interesante de estas teorías es que pueden verse como un mecanismo alternativo al de Kaluza-Klein para una reducción dimensional. Es por eso que este capítulo va a dedicarse a los modelos de gWZW. En las primera sección se mostrará cómo construir acciones de gWZW en dimensión arbitraria D. Luego, a los efectos de tener un modelo de testeo que sea más fácil de manipular analíticamente, se mostrará qué aspecto toman las ecuaciones de movimiento para dimensión dos y con grupos particulares: primero el grupo $SU(2)$, como precalentamiento para el grupo espacio-temporal $SO(2,1)$. El modelo gWZW con este último grupo puede considerarse como una teoría de gravedad y se pueden buscar algunas soluciones tipo agujero negro en dimensión $1+1$, como se estudiará en el capítulo 7.

---

respecto a la quinta coordenada se anulan. Esta es la llamada 'condición de cilindro' [66].

[2]La Materia Oscura es materia que no puede observarse por medios convencionales, es decir radiación electromagnética, sino que es inferida para explicar las velocidades estelares en los centros de las galaxias.

[3]Actualmente, las observaciones muestran que el Universo no solamente se expende sino que además lo hace aceleradamente. La Energía Oscura se piensa que es la responsable de esta aceleración [67].

6.1. Acciones gWZW

En la sección 5.2.5 se vio cómo construir densidades lagrangianas a partir de formas de transgresión (4.22). La acción se puede escribir como

$$S_{trans}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}) = \int\limits_{M} \mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}) - \int\limits_{\overline{M}} \mathcal{Q}_{2n-1}(\overline{\mathcal{A}}) - \int\limits_{\partial M} B_{2n-2}(\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}), \tag{6.1}$$

donde $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ son potenciales 1-forma definidos en las variedades M y $\overline{M}$ de dimensión $D = 2n-1$, respectivamente que tienen un borde común ∂M. Al aparecer en la acción (6.1) dos potenciales $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ hay un problema para interpretar físicamente esta situación. En la sección 5.2.5 se mostraron posibles interpretaciones como, por ejemplo, que $\overline{\mathcal{A}}$ no es un campo dinámico y permanece fijo o la condición de variedad cobordante. En esta sección se tomará otra interpretación posible y es pensar que $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ son dos potenciales que definen el mismo fibrado principal el cual es no trivial [12]. En este caso, la transgresión (4.22) no existe globalmente ya que no puede definirse una conexión global. Sin embargo, puede definirse globalmente utilizando dos o más cartas locales. Si se supone, como en [12], que las variedades M y $\overline{M}$ son en realidad la misma y que el potencial 1-forma puede definirse por dos cartas locales representadas por $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ tales que en el solapamiento de las cartas están relacionadas por una transformación gauge de la forma

$$\overline{\mathcal{A}} = h^{-1}\mathcal{A}h + h^{-1}dh \equiv \mathcal{A}^h,$$

en donde $h \in G$ es una función de transición que determina la no trivialidad del fibrado. Por lo tanto, ahora los grados de libertad de la teoría corresponden a $\mathcal{A}$ y h. Se puede definir ahora la **acción gWZW** como

$$S_{gWZW}(\mathcal{A},h) = \int\limits_{M} \mathcal{T}_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}^h), \tag{6.2}$$

que también puede escribirse como

$$S_{gWZW}(\mathcal{A},h) = \int\limits_{M} \left[\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}^h)\right] - \int\limits_{\partial M} B_{2n-2}(\mathcal{A},\mathcal{A}^h).$$

Ya que $\mathcal{A}^h$ es una transformación gauge de $\mathcal{A}$, se vio en la sección 4.2.2 que por la ecuación (4.26) la diferencia entre las formas de CS asociadas a cada una es la suma de una forma exacta y una cerrada, es decir

$$\mathcal{Q}_{2n-1}(\mathcal{A}^h) - \mathcal{Q}_{2n-1}(A) = d\alpha_{2n-2} + \mathcal{Q}_{2n-1}(h^{-1}dh),$$

con α_{2n-2} una $(2n-2)$-forma y $\mathcal{Q}_{2n-1}(h^{-1}dh)$ la forma cerrada de Wess-Zumino-Witten. Con esto en cuenta, la acción gWZW puede escribirse como

$$S_{gWZW}(\mathcal{A},h) = -\int\limits_{M} \mathcal{Q}_{2n-1}(h^{-1}dh) - \int\limits_{\partial M} \left[\alpha_{2n-2} + B_{2n-2}(\mathcal{A},\mathcal{A}^h)\right].$$

Por lo tanto, esta acción vive en la variedad ∂M de dimensión par aunque la primera integral, que recibe el nombre de **término de Wess-Zumino-Witten**, está en la variedad M de dimensión impar. Esto es debido a que si la constante adelante de la acción está cuantizada (aquí se omitió la constante ya que está introducida en la definición de traza) la manera en la cual se extiende en M es inmaterial a nivel cuántico [11]. De todas formas, se verá más abajo que el término de WZW contribuye a las ecuaciones de campo con un término que es una derivada total y, por lo tanto, definido en la variedad borde ∂M.

La acción (6.2) es invariante bajo transformaciones gauge generadas por un elemento $g \in G$ dependiente del punto $x \in \partial M$ de la forma

$$h \to g^{-1}hg \qquad , \qquad \mathcal{A} \to g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg.$$

Ya que en este trabajo se trata fundamentalmente con las soluciones a las ecuaciones de campo de dimensión dos, será de utilidad mostrar la acción gWZW en esta dimensión

$$S_{gWZW} = \kappa \int\limits_{\Sigma} \frac{1}{3}\langle (h^{-1}dh)^3\rangle - \kappa \int\limits_{M^2} \langle (\mathcal{A} - h^{-1}dh)\mathcal{A}^h\rangle, \tag{6.3}$$

donde M^2 es la variedad espacio-tiempo bidimensional y Σ es una variedad tridimensional tal que $\partial\Sigma = M^2$.

Existe una interpretación alternativa para arribar a la acción gWZW al pensar que el Universo de dimensión cuatro es un defecto topológico de un espacio de dimensión seis [13]. La idea es empezar con la densidad de Euler definida en seis dimensiones

$$\chi(M) = \frac{1}{48\pi^3}\int_{M^6} \langle \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}\rangle,$$

donde $\mathcal{F} = \frac{1}{2}F^{AB}\mathbf{J}_{AB}$, con $A, B \in \{0, \ldots, 5\}$. Los generadores $\mathbf{J}_{AB}$ podrán ser del grupo de Sitter $SO(5,1)$, anti-de Sitter $SO(4,2)$ o el grupo $SO(3,3)$. La traza simétrica en este caso es el tensor de Levi-Civita $\langle \mathbf{F}_{AB}\mathbf{F}_{CD}\mathbf{F}_{EF}\rangle = \epsilon_{ABCDEF}$ y se asume $\partial M^6 = \emptyset$. De esta forma, ocurre una reducción dimensional cuando una sub-variedad de dimensión cuatro se remueve produciendo un defecto topológico. El defecto topológico es creado removiendo un cilindro de dimensión seis $M^4 \times D^2$ y tomando luego que el radio del disco D^2 tienda a cero. Una vez removida la región se puede cubrir la variedad con dos cartas locales definiendo un potencial 1-forma en cada una y en la región de solapamiento los dos potenciales están relacionados por una transformación gauge. Utilizando luego un proceso de regularización, se llega a la misma acción de gWZW con similar grupo de simetría. En [13] se tratan los casos de reducción de cuatro a dos dimensiones y de seis a cuatro pero el proceso puede ser generalizado siempre removiendo de una variedad de dimensión par una sub-variedad de codimensión dos. En especial coincide el resultado en dimensión dos con la acción (6.3).

6.2. Ecuaciones de Campo para las Acciones gWZW

Una vez obtenida la acción (6.2) para una variedad Σ de dimensión impar $2n-1$, se pueden hallar sus ecuaciones de campo variacionalmente tomando como dinámicos los campos que definen a $\mathcal{A}$ y h. Para esto, se empieza con la fórmula de la variación de la transgresión (4.28) (ver apéndice B para su deducción)

$$\delta\mathcal{T}_{2n-1} = n < \overline{\mathcal{F}}^{n-1}\delta\overline{\mathcal{A}} > -n < \mathcal{F}^{n-1}\delta\mathcal{A} > -n(n-1)\int_0^1 dt < \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t >,$$

con $\mathcal{A}_t = t\mathcal{A} + (1-t)\overline{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{F}_t = d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2$. Para el caso de la variación de la acción gWZW, hay que tomar $\overline{\mathcal{A}} = h^{-1}\mathcal{A}h + h^{-1}dh \equiv \mathcal{A}^h$. De esta forma, $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A} - \mathcal{A}^h$ y $\overline{\mathcal{F}} = h^{-1}\mathcal{F}h \equiv \mathcal{F}^h$. Se puede ver además que

$$\delta\overline{\mathcal{A}} = \delta\mathcal{A}_h = h^{-1}\left[\delta\mathcal{A} + D(\delta hh^{-1})\right]h,$$

con la derivada covariante $D(\ldots) = d(\ldots) + [\mathcal{A}, \ldots]$. Se tiene también

$$(\mathcal{F}^h)^{n-1}\delta\mathcal{A}^h = h^{-1}\mathcal{F}^{n-1}\left[\delta\mathcal{A} + D(\delta h^{-1}dh)\right]h,$$

que con la ciclicidad de la traza

$$\langle(\mathcal{F}^h)^{n-1}\delta\mathcal{A}^h\rangle = \langle(\mathcal{F})^{n-1}\delta\mathcal{A}\rangle + \langle(\mathcal{F})^{n-1}D(\delta hh^{-1})\rangle.$$

Utilizando la identidad de Bianchi $D\mathcal{F} = 0$, ecuación (4.16), y que $d < \ldots >= D < \ldots >$

$$d\langle\mathcal{F}^{n-1}\delta hh^{-1}\rangle = D\langle\mathcal{F}^{n-1}\delta hh^{-1}\rangle = \langle\mathcal{F}^{n-1}D(\delta hh^{-1})\rangle,$$

y, por lo tanto

$$\langle(\mathcal{F}^h)^{n-1}\delta\mathcal{A}^h\rangle = \langle\mathcal{F}^{n-1}\delta\mathcal{A}\rangle + d\langle\mathcal{F}^{n-1}\delta hh^{-1}\rangle.$$

Se tiene entonces, por el teorema de Stokes, ecuación (2.18), que la variación de la acción gWZW se puede escribir como

$$\delta S_{gWZW} = -n\int_M \left(\langle\mathcal{F}^{n-1}\delta hh^{-1}\rangle + (n-1)\int_0^1 dt\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t\rangle\right),$$

donde en este punto ya se puede ver que, como se mencionó más arriba, la acción gWZW va a definir una dinámica solamente en la variedad borde $M = \partial\Sigma$ de dimensión par $2n-2$.

Teniendo en cuenta que

$$\delta\mathcal{A}_t = t\delta\mathcal{A} + (1-t)\delta\mathcal{A}^h = t\delta\mathcal{A} + (1-t)h^{-1}[\delta\mathcal{A} + D(\delta hh^{-1})]h,$$

se puede ver que

$$\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t\rangle = t\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}\rangle + (1-t)\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}h^{-1}[\delta\mathcal{A} + D(\delta hh^{-1})]h\rangle.$$

Ahora, tomando en cuenta la ciclicidad de la traza

$$\begin{aligned}(1-t)\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}h^{-1}[\delta\mathcal{A}+D(\delta hh^{-1})]h\rangle &= (1-t)\langle h\Delta\mathcal{A}h^{-1}(h\mathcal{F}_th^{-1})^{n-2}[\delta\mathcal{A}+D(\delta hh^{-1})]\rangle \\ &= -u\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}[\delta\mathcal{A}+D(\delta hh^{-1})]\rangle,\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó que $h(\mathcal{A}-\mathcal{A}^h)h^{-1}=(\mathcal{A}^{h^{-1}}-\mathcal{A})\equiv-\Delta\widetilde{\mathcal{A}}$ y se definió

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}}_u &\equiv h\mathcal{F}_th^{-1}=h\left((1-t)\mathcal{F}^h+t\mathcal{F}+t(t-1)(\mathcal{A}-\mathcal{A}^h)^2\right)h^{-1} \\ &= (1-u)\mathcal{F}^{h^{-1}}+u\mathcal{F}+u(u-1)\Delta\widetilde{\mathcal{A}}^2=d\widetilde{A}_u+\widetilde{A}_u^2,\end{aligned}$$

con $u\equiv1-t$ una reparametrizaciòn de t y $\widetilde{A}_u=u\mathcal{A}+(1-u)\mathcal{A}^{h^{-1}}$. Será de utilidad la siguiente relación: dada una cero forma α, entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_u\alpha &= d\alpha+\left[\widetilde{\mathcal{A}}_u,\alpha\right]=d\alpha+u\left[\mathcal{A}_u,\alpha\right]+(1-u)\left[\mathcal{A}^{h^{-1}},\alpha\right]+[\mathcal{A},\alpha]-[\mathcal{A},\alpha] \\ &= D\alpha+(u-1)\left[\Delta\widetilde{\mathcal{A}},\alpha\right].\end{aligned}$$

Utilizando dicha relación con $\alpha=\delta hh^{-1}$ se llega a

$$-u\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}D(\delta hh^{-1})\rangle=-u\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\widetilde{D}_u(\delta hh^{-1})\rangle+u(u-1)\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\left[\Delta\widetilde{\mathcal{A}},\delta hh^{-1}\right]\rangle.$$

Por otro lado, utilizando la identidad de Bianchi y que $d<\ldots>=\widetilde{D}_u<\ldots>$ se ve que

$$d\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle=\langle\widetilde{D}_u(\Delta\widetilde{\mathcal{A}})\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle-\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\widetilde{D}_u(\delta hh^{-1})\rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}-u\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}D(\delta hh^{-1})\rangle &= ud\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle-u\langle\widetilde{D}_u(\Delta\widetilde{\mathcal{A}})\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle \\ &\quad+u(u-1)\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\left[\Delta\widetilde{\mathcal{A}},\delta hh^{-1}\right]\rangle \\ &= ud\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle-u\langle\frac{d}{du}(\widetilde{\mathcal{F}}_u)\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\delta hh^{-1}\rangle \\ &\quad+u(u-1)\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}\left[\Delta\widetilde{\mathcal{A}},\delta hh^{-1}\right]\rangle,\end{aligned}$$

donde en la segunda igual se utilizó la relación (B.2), cuya deducción está en el apéndice B. Teniendo en cuenta esto, integrando por partes, y volviendo a parametrizar en t, con un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned}&(n-1)\int_0^1dt(1-t)\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}h^{-1}D(\delta hh^{-1})h\rangle \\ =\ &-(n-1)\int_0^1duu\langle\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_u^{n-2}D(\delta hh^{-1})\rangle \\ =\ &-(n-1)d\left(\int_0^1dt(1-t)\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}h^{-1}\delta h\rangle\right)-\langle\mathcal{F}_t^{n-1}h^{-1}\delta h\rangle+\int_0^1dt\langle\mathcal{F}_t^{n-1}h^{-1}\delta h\rangle \\ &+(n-1)\int_0^1dt(t-1)t\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_u^{n-2}\left[\Delta\mathcal{A},h^{-1}\delta h\right]\rangle.\end{aligned}$$

Por todo esto, la variación δS_{gWZW} sería

$$\begin{aligned}\delta S_{gWZW} &= -n(n-1)\int\limits_{M}\left\langle\left\{\int_0^1 tdt\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}-\int_0^1 tdt\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{F}}_t^{n-2}\right\}\delta\mathcal{A}\right\rangle\\ &\quad -n\int\limits_{M}\left\{\int_0^1 dt\langle\mathcal{F}_t^{n-1}h^{-1}\delta h\rangle+(n-1)\int_0^1 dt(t-1)t\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\left[\Delta\mathcal{A},h^{-1}\delta h\right]\rangle\right\}\\ &\quad +n(n-1)\int\limits_{\partial M}\left\{\int_0^1 dt(1-t)\langle\Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}h^{-1}\delta h\rangle\right\}, \qquad (6.4)\end{aligned}$$

donde ∂M es el borde de la variedad M y tiene dimensión $2n-3$. La primera integral de (6.4) da cuenta de la variación en los campos que intervienen en $\delta\mathcal{A}$, la segunda integral en aquellos que intervienen en δh y la tercera integral es un término de borde que contiene solamente la variación δh.

Conviene en este punto, antes de mostrar las ecuaciones de campo que se derivan de (6.4), detenerse a analizar una sutileza respecto al término de borde. Este término de borde aparece porque la variación de la transgresión es de la forma

$$\delta\mathcal{T}_{2n-1}=d(\mathcal{C}+d\mathcal{B}),$$

con $\mathcal{C}$ una $2n-2$-forma y $\mathcal{B}$ una $2n-3$-forma, ambas dos $\mathfrak{g}$-valuadas, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo gauge G. Uno estaría tentado a descartar el término $d\mathcal{B}$ ya que $d^2=0$. Sin embargo, S_{gWZW} se define como la integral de una transgresión en una variedad con borde, con ese borde siendo el espacio-tiempo en el cual uno está interesado, el cual también puede tener un borde[4]. En ese caso, el término $d\mathcal{B}$ podría contribuir como término de borde de la variedad borde del espacio-tiempo.

Dada una acción S la cual es una funcional de un conjunto de campos denotados por ϕ y definida en cierta variedad espacio-tiempo M, su variación es esquemáticamente de la forma

$$\delta S=\int\limits_{M}(E.C.)\delta\phi+\int\limits_{\partial M}\mathcal{B}\delta\phi,$$

donde $(E.C.)$ son las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y la segunda integral representa términos que aparecen asociados a a la variedad borde ∂M. Una teoría está definida cuando se dan la acción y las condiciones de borde. Entonces, o bien el término de borde se anula cuando son impuestas las condiciones de borde, o bien se deben agregar términos de borde a la acción inicial para que la misma sea efectivamente estacionaria cuando valen las ecuaciones de campo y las condiciones de borde son satisfechas. Es por ende importante que las condiciones de borde sean

[4] J.A. Wheeler una vez dijo [68]: 'Physics must be in the end law without law. Its undergirding must be a principle of organization that is no organization at all. In all of mathematics, nothing of this kind more obviously offers itself than the principle that the boundary of the boundary is zero. That this principle must pervade physics, as it does–is that the only way that nature has to signal to us a construction without a plan, a blueprint for physics that is the very epitome of austerity?'.

escogidas para que el problema variacional no esté ni sobredeterminado ni tampoco subdeterminado. Esto es algo similar al término de borde de Gibbons-Hawking-York que debe agregarse a la acción de Einstein-Hilbert para que el principio variacional quede bien definido cuando el espacio-tiempo es una variedad con borde [70, 71], e incluso para poder definir una termodinámica para un agujero negro. Es interesante que en los trabajos anteriores de transgresiones como teorías de gravedad [7, 69] el borde del borde no se tomó que valía cero y eso dejó bien definida las cargas conservadas de la teoría teniendo bien definidas cantidades termodinámicas de agujeros negros también en esos casos.

Para el caso de la acción (6.2), el término de borde se anula si uno requiere que h esté fijo en el borde ∂M, es decir $\delta h\big|_{\delta M} = 0$, sin ningún requerimiento para los campos en $\mathcal{A}$. En este caso, y tomando como independientes los campos en $\mathcal{A}$ y h, las ecuaciones de campo para la acción gWZW será la anulación los términos entre paréntesis curvos de las dos primeras integrales de la variación (6.4), es decir

$$\begin{aligned} \left\langle \left\{ \int_0^1 tdt(\mathcal{A} - \mathcal{A}^h)\mathcal{F}_t^{n-2} + \int_0^1 (1-t)dt(\mathcal{A}^{h^{-1}} - \mathcal{A})\widetilde{\mathcal{F}}_t^{n-2} \right\} \delta\mathcal{A} \right\rangle &= 0 \\ \int_0^1 dt \left\{ \langle \mathcal{F}_t^{n-1} h^{-1}\delta h\rangle + (n-1)(t-1)t\langle \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{n-2}\left[\Delta\mathcal{A}, h^{-1}\delta h\right]\rangle \right\} &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Las ecuaciones de campo en dimensión arbitraria se vuelven prácticamente inmanejables analíticamente. Es por eso que en la sección 6.3 se va estudiar el caso particular de las ecuaciones de campo (6.5) en dimensión $D = 2$ donde las ecuaciones son más tratables.

6.3. Ecuaciones de Campo gWZW en Dimensión $D = 2$

En la sección 6.2 se ha visto cómo llegar a las ecuaciones de campo a partir de la acción (6.2). Se va a ver en esta sección qué forma explícita tienen esas ecuaciones en dimensión $D = 2$ para dos grupos gauge: el grupo $SU(2)$ y el grupo $SO(2,1)$. El primer caso se tomará como un entrenamiento para el segundo, pudiendo este último considerarse como un grupo espacio-temporal. En el capítulo 7 se verán soluciones de agujeros negros para este último grupo.

Antes que nada, se van a hallar las ecuaciones de campo en $D = 2$ para un grupo gauge G genérico. El caso $D = 2$ corresponde a $n = 2$ para la acción (6.2). Por lo tanto, las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}\left\{ (\mathcal{A} - \mathcal{A}^h) + (\mathcal{A}^{h^{-1}} - \mathcal{A}) \right\} \delta\mathcal{A} \right\rangle &= 0 \\ \int_0^1 dt \left\{ \langle \mathcal{F}_t h^{-1}\delta h\rangle + (t-1)\langle \Delta\mathcal{A}\left[\Delta\mathcal{A}, h^{-1}\delta h\right]\rangle \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar un poco. Por un lado, se tiene

$$\int_0^1 dt\langle \mathcal{F}_t h^{-1}\delta h\rangle = \int_0^1 dt\langle (t\mathcal{F} + (1-t)\mathcal{F}^h + t(t+1)\Delta\mathcal{A})h^{-1}\delta h\rangle = \frac{1}{2}\langle (\mathcal{F} + \mathcal{F}^h - \frac{1}{3}\Delta\mathcal{A})h^{-1}\delta h\rangle.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 (1-t)tdt\langle \Delta\mathcal{A}\left[\Delta\mathcal{A}, h^{-1}\delta h\right]\rangle = 2\int_0^1 (t-1)tdt\langle \Delta\mathcal{A}^2 h^{-1}\delta h\rangle = -\frac{1}{3}\langle \Delta\mathcal{A}^2 h^{-1}\delta h\rangle.$$

La cantidad $\delta h h^{-1}$ es un elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo gauge G, lo mismo para el potencial 1-forma $\mathcal{A}$, por lo tanto, si los generadores $\{\mathbf{J}_a\}$ de G cumplen que $\langle \mathbf{J}_a \mathbf{J}_b\rangle$ sea invertible, se llega a las ecuaciones de campo en dimensión dos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{h^{-1}} - \mathcal{A}^h &= 0, \\ \mathcal{F}^h + \mathcal{F} - \frac{1}{2}[\mathcal{A}^h - \mathcal{A}, \mathcal{A}^h - \mathcal{A}] &= 0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

donde se utilizó que $\Delta\mathcal{A}^2 = \frac{1}{2}\left[\Delta\mathcal{A}, \Delta\mathcal{A}\right]$ para la segunda ecuación. Para uso posterior en este trabajo, es conveniente expresar las ecuaciones de campo (6.6) de otra forma. Para esto, primero se puede notar que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^h - \mathcal{A}^{h^{-1}} &= h^{-1}\mathcal{A}h + h^{-1}dh - h\mathcal{A}h^{-1} - hdh^{-1} \\ &= h^{-1}\left(\mathcal{A}h^2 - h^2\mathcal{A} + dhh + hdh\right)h^{-1} \\ &= h^{-1}D(h^2)h^{-1}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizó que $hdh^{-1} = -dhh^{-1}$, y en la última igualdad la definición de derivada covariante $D(\ldots) = d(\ldots) + [\mathcal{A}, \ldots]$. Es por esto, que la primera ecuación de campo (6.6) implica $D(h^2) = 0$, dada la invertibilidad de h.

Por la misma definición de derivada covariante se puede ver

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{A}^h &= h^{-1}\mathcal{A}h + h^{-1}dh - \mathcal{A} \\ &= h^{-1}\left(\mathcal{A}h - h\mathcal{A} + dh\right) = h^{-1}Dh, \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}[\mathcal{A}^h - \mathcal{A}, \mathcal{A}^h - \mathcal{A}] = (\mathcal{A}^h - \mathcal{A})^2 = (h^{-1}Dh)^2.$$

Esto último indica que la segunda ecuación de campo (6.6) implica $\mathcal{F} + \mathcal{F}^h - (h^{-1}Dh)^2 = 0$.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de campo (6.6) quedan

$$D(h^2) = 0 \tag{6.7}$$
$$\mathcal{F}^h + \mathcal{F} - (h^{-1}Dh)^2 = 0. \tag{6.8}$$

Aquí puede verse que las ecuaciones (6.7) se simplifican considerablemente si se toma el ansatz

$$\begin{aligned} h^2 &= C \\ \mathcal{F} &= -\mathcal{F}^h, \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde C es una matriz $2{\times}2$ constante. La segunda condición de (6.9) es una condición que se llamará **anti-auto-dualidad**. Más adelante, en la sección 7.1, se verá que la solución compatible con un agujero negro en dimensión $1+1$ es un caso particular del ansatz (6.9).

Visto esto, se puede pasar ahora a estudiar grupos gauge sencillos para estas ecuaciones, en particular el grupo $SU(2)$ y, en mayor detalle, el grupo $SO(2,1)$.

6.3.1. Grupo $SU(2)$

Se deducirán aquí, explícitamente, las ecuaciones de campo (6.6) para el caso del grupo no abeliano más simple: el grupo $SU(2)$. Para esto, será necesario establecer algunas convenciones que serán de ayuda para representar elementos del grupo $SU(2)$ y de su álgebra $\mathfrak{su}(2)$. La representación de este grupo y del álgebra se puede hacer con matrices 2×2 a partir de las matrices de Pauli $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, a saber

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\tag{6.10}$$

y la matriz identidad

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Las matrices de Pauli, además de ser hermíticas[5], tienen las siguientes propiedades que pueden verificarse directamente

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}I+i\epsilon_{ijk}\sigma_k\\ \{\sigma_i,\sigma_j\} &= 2\delta_{ij}\\ [\sigma_i,\sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\\ \sigma_i\sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{ijk}I+\delta_{ij}\sigma_k-\delta_{ik}\sigma_j+\delta_{jk}\sigma_i.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Un elemento genérico $h\in SU(2)$ puede escribirse de la forma

$$h=h^0I+h^i\sigma_i=h^0I+i\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{\sigma},\qquad \text{con}\qquad (h^0)^2+\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{h}=1,$$

donde en la segunda igualdad se definió $\overrightarrow{h}\equiv(h^1,h^2,h^3)$, $\overrightarrow{\sigma}\equiv(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ y el producto punto $(\cdot)$ se toma notacionalmente como el producto escalar convencional de vectores. También se puede escribir h en forma exponencial, tendiendo en cuenta que las matrices de Pauli (6.10) son los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. En efecto,

$$h=e^{i\theta\overrightarrow{n}\overrightarrow{\sigma}}=\cos\theta+i\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\sigma}\sin\theta,\qquad \text{con}\qquad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}=1.$$

El potencial 1-forma y el tensor curvatura 2 son ambos $\mathfrak{su}(2)$-valuados y se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= i\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\sigma},\\ \mathcal{F} &= i\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\sigma},\end{aligned}$$

[5]Una matriz A es hermítica si $A^\dagger=A$ y anti-hermítica si $A^\dagger=-A$.

donde aquí también se organizaron las tres 1-formas reales del potencial $\{A^i\}$ y las tres 2-formas del tensor curvatura $\{F^i\}$ de manera vectorial $\overrightarrow{A} \equiv (A^1, A^2, A^3)$, $\overrightarrow{F} \equiv (F^1, F^2, F^3)$, respectivamente. Hay que notar que la representación del potencial y del tensor curvatura se tomaron ambas anti-hermíticas. Utilizando las propiedades de conmutación de las matrices de Pauli (6.11) y que $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$ se tiene

$$F^i = dA^i + \epsilon^{ijk} A^j A^j \qquad \text{o} \qquad \overrightarrow{F} = d\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A},$$

donde se toma el operador $(\ldots \times \ldots)$ como el producto vectorial usual. Si se tiene una 0-forma α evaluada en el álgebra, entonces se puede escribir $\alpha = i\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\sigma}$, donde las $\{\alpha^i\}$ son 0-formas reales. Se puede escribir la derivada covariante como

$$D\alpha = d\alpha + [A, \alpha] = iD\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\sigma} \qquad \text{con} \qquad D\overrightarrow{\alpha} \equiv d\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{\alpha}.$$

Con todo esto, y con un poco de álgebra, se puede escribir $\mathcal{A}^h$ como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^h &= (h^0 I - ih^i\sigma^i)(iA^j\sigma^j)(h^0 I + ih^k\sigma^k) + (h^0 I - h^i\sigma^i)(dh^0 I + dh^i\sigma^i) \\
&= i\Big((h^0)^2\overrightarrow{A} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{A})\overrightarrow{h} - (\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{A} + h^0 d\overrightarrow{h} - dh^0\overrightarrow{h} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma},
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizaron las propiedades de las matrices de Pauli (6.11). Se halla $\mathcal{A}^{h^{-1}}$ a partir de lo anterior dando

$$\mathcal{A}^{h^{-1}} = i\Big((h^0)^2\overrightarrow{A} - 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{A})\overrightarrow{h} - (\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{A} - h^0 d\overrightarrow{h} + dh^0\overrightarrow{h} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma}.$$

Se puede comprobar directamente que los resultados dicen que $\mathcal{A}^h$ como $\mathcal{A}^{h^{-1}}$ pertenecen al álgebra $\mathfrak{su}(2)$, como debería ser. Se obtiene de esta forma la primera ecuación de campo (6.6), a saber

$$\mathcal{A}^h - \mathcal{A}^{h^{-1}} = i\Big(4h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A}) + 2h^0 d\overrightarrow{h} - 2dh^0\overrightarrow{h}\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma} = 0,$$

pudiéndose escribir también

$$h^0 D\overrightarrow{h} - dh^0\overrightarrow{h} = 0, \tag{6.12}$$

donde la derivada covariante $D\overrightarrow{h}$ se definió más arriba.

Para hallar la segunda ecuación de campo (6.6), primero hay que tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^h - \mathcal{A} &= i\Big((1 + (h^0)^2)\overrightarrow{A} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{A})\overrightarrow{h} - (\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{A} + h^0 d\overrightarrow{h} \\
&\qquad - dh^0\overrightarrow{h} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\
&= i\Big(2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{A})\overrightarrow{h} - 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{A} + h^0 d\overrightarrow{h} - dh^0\overrightarrow{h} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\
&= i\Big(2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{A})\overrightarrow{h} - 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\Big) \cdot \overrightarrow{\sigma},
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se tuvo en cuenta que $(h^0)^2 + \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h} = 1$ y en la tercera se tomó en cuenta la primera ecuación de campo (6.12). Si se toma en cuenta la fórmula de producto vectorial doble

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) \overrightarrow{C}, \tag{6.13}$$

se llega finalmente a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^h - \mathcal{A} &= i\left(2\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{h} \times d\overrightarrow{h})\right) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\ &= i\left(\overrightarrow{h} \times (2\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{A} + d\overrightarrow{h})\right) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\ &= i\left(\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h}\right) \cdot \overrightarrow{\sigma}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la definición de $D\overrightarrow{h}$ dada más arriba. De esta forma

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{A}^h - \mathcal{A}, \mathcal{A}^h - \mathcal{A}\right] &= -(\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h})^i (\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h})^j \left[\sigma^i, \sigma^j\right] \\ &= -2i\left((\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h}) \times (\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h})\right) \cdot \overrightarrow{\sigma}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizó las propiedades de conmutación de las matrices de Pauli (6.11). De forma similar a como se calculó $\mathcal{A}^h$, se puede calcular $\mathcal{F}^h$, dando

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^h &= (h^0 I - ih^i\sigma^i)(iF^j\sigma^j)(h^0 I + ih^k\sigma^k) \\ &= i\left((h^0)^2\overrightarrow{F} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{F})\overrightarrow{h} - (\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\ &= i\left(\overrightarrow{F} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{F})\overrightarrow{h} - 2(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h})\overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{\sigma} \\ &= i\left(\overrightarrow{F} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + 2\overrightarrow{h} \times (\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F})\right) \cdot \overrightarrow{\sigma}, \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se utilizó $(h^0)^2 + \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{h} = 1$ y en la última el producto vectorial doble (6.13). Con todo esto, llegamos a que la segunda ecuación de campo (6.12) se puede escribir como

$$i\left(2\overrightarrow{F} + 2h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + 2\overrightarrow{h} \times (\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h}) \times (\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h})\right) \cdot \overrightarrow{\sigma},$$

que se puede reformular quedando

$$\overrightarrow{F} + h^0(\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{h} \times (\overrightarrow{h} \times \overrightarrow{F}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h}) \times (\overrightarrow{h} \times D\overrightarrow{h}) = 0. \tag{6.14}$$

Las ecuaciones de campo (6.12) y (6.14) son bastante complicadas de resolver para casos generales de los campos que componen $\mathcal{A}$ y h. Si bien en este trabajo no va en esa dirección, podría explorarse si existen soluciones a esta ecuación, incluso configuraciones de solitones, que podrían tener alguna aplicación en el efecto Hall cuántico y en materia condensada [72]. Por lo tanto, este ejemplo para el modelo gWZW para el grupo $SU(2)$ se tomará como un paso previo para pasar al grupo espacio-temporal relacionado, es decir el grupo $SO(2,1)$.

6.3.2. Grupo $SO(2,1)$

Ya se vio en la sección 6.3.1 un ejemplo de cómo obtener explícitamente las ecuaciones de campo para las acciones gWZW para un grupo gauge no abeliano sencillo como el $SU(2)$. Si se quiere que las acciones gWZW se comporten como una teoría de gravedad lo más sencilla posible, se puede utilizar un grupo gauge espacio-temporal similar como, por ejemplo, el $SO(2,1)$.

Se van a utilizar algunas convenciones para que el procedimiento a seguir para derivar las ecuaciones de campo sea lo más parecido posible al caso del grupo gauge $SU(2)$. Es conveniente para esto utilizar una representación adecuada de los generadores del grupo $SO(2,1)$. Los mismos se representan por J_{ab} con $a,b \in 0,1,2$ y deben cumplir las reglas de conmutación (5.14), es decir

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{da} J_{cb} + \eta_{db} J_{ca}, \tag{6.15}$$

con $\eta_{ab} = (-,+,+)$. Pueden elegirse los generadores J_{ab} de forma que sean múltiplos de las matrices de Pauli (6.10). En efecto, asignando

$$J_{01} = \frac{1}{2}\sigma_2 \qquad , \qquad J_{20} = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad , \qquad J_{12} = i\frac{1}{2}\sigma_3,$$

se puede comprobar directamente que verifican el álgebra (6.15) de $SO(2,1)$. Uno puede re-etiquetar los generadores J_{ab} de la forma[6] $J^a = \epsilon^{abc} J_{bc}$ y $J_a = \eta_{ab} J^b$, y de esta forma

$$J_0 = i\sigma_3 \qquad , \qquad J_1 = -\sigma_1 \qquad , \qquad J_2 = -\sigma_2.$$

El álgebra del grupo (6.15), con esta convención, tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} J_a J_b &= \eta_{ab} I - \epsilon_{abc} J^c \\ [J_a, J_b] &= -2\epsilon_{abc} J^c \\ \{J_a, J_b\} &= 2\eta_{ab} I \\ J_a J_b J_c &= \eta_{ab} J_c - \eta_{ac} J_b + \eta_{bc} J_a - \epsilon_{abc} I. \end{aligned} \tag{6.16}$$

De esta forma, haciendo algunas cuentas, puede escribirse un elemento h del grupo $SO(2,1)$ como

$$h = e^{\beta^a J_a} = \cosh\beta I + \frac{\beta^a}{\beta}\sinh\beta J_a,$$

donde $\beta_a = \eta_{ab}\beta^b$ y $\beta^2 \equiv \beta_a \beta^a$. Definiendo $\lambda \equiv \cosh\beta$ y $\alpha^a \equiv \frac{\beta^a}{\beta}\sinh\beta$, se puede escribir

$$h = \lambda I + \alpha^a J_a, \qquad \text{con} \qquad \lambda^2 - \alpha^2 = 1,$$

[6] Aquí se utiliza la convención $\epsilon_{012} = -\epsilon^{012} = 1$, cambiando el signo por cada permutación de $\{0,1,2\}$.

donde $\alpha_a = \eta_{ab}\alpha^b$ y $\alpha^2 = \alpha^a\alpha_a$. El potencial gauge 1-forma y tensor de curvatura 2-forma, se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= A^a J_a = A \cdot J,\\ \mathcal{F} &= F^a J_a = F \cdot J,\end{aligned}$$

donde A^a es una 1-forma y F^a una 2-forma, y se definió el producto escalar minkowskiano como $V \cdot W = V^a W_a$. Como $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$, entonces

$$\mathcal{F} = dA^a J_a + A^a A^b J_a J_b = (dA^a - A^b A^c \epsilon_{bcd}\eta^{da})J_a = (dA^a - (A \times A)^a)J_a,$$

donde en la segunda igualdad se utilizó la primera de las propiedades (6.16) de las matrices J_a y se definió el producto vectorial minkowskiano como $(V \times W)^a = \eta^{ad}\epsilon_{bcd}V^b W^c = \epsilon^{abc}V_b W_c$. Si uno tiene una 0-forma evaluada en el álgebra $\mathfrak{so}(2,1)$ escrita como $\alpha = \alpha^a J_a$, entonces la derivada covariante se puede escribir como

$$D\alpha = d\alpha + [\mathcal{A}, \alpha] = D\alpha \cdot J \qquad \text{con} \qquad D\alpha^a = d\alpha^a - 2(A \times \alpha)^a.$$

Para derivar explícitamente la primera ecuación de campo (6.6), se debe escribir el elemento $\mathcal{A}^h$. Utilizando que $h^{-1} = \lambda I - \alpha^a J_a$, se puede calcular

$$\begin{aligned}h^{-1}Ah &= (\lambda I - \alpha^a J_a)A^b(\lambda I + \alpha^c J_c) = \lambda^2 A^a J_a + \lambda A^b \alpha^c \left[J_b, J_c\right] - \alpha^a \alpha^b \alpha^c J_a J_b J_c\\ &= \left((\lambda^2 + \alpha^2)A^a - 2\lambda(A \times \alpha)^a - 2(A \cdot \alpha)\alpha^a\right) J_a,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizaron las propiedades (6.16) de las matrices J_a. Por otro lado, usando las propiedades (6.16) se obtiene

$$h^{-1}dh = (\lambda I - \alpha^a J_a)(\lambda I + \alpha^b J_b) = (\lambda d\alpha^a - d\lambda \alpha^a + (\alpha \times d\alpha))^a)J_a.$$

Con esto,

$$\mathcal{A}^h = \left((\lambda^2 + \alpha^2)A^a - 2\lambda(A \times \alpha)^a - 2(A \cdot \alpha)\alpha^a + \lambda d\alpha^a - d\lambda\alpha^a + (\alpha \times d\alpha)\right) J_a.$$

De manera bastante similar puede calcularse

$$\mathcal{A}^{h^{-1}} = \left((\lambda^2 + \alpha^2)A^a + 2\lambda(A \times \alpha)^a - 2(A \cdot \alpha)\alpha^a - \lambda d\alpha^a + d\lambda\alpha^a + (\alpha \times d\alpha)\right) J_a.$$

Por lo tanto, la primera ecuación de campo (6.6) se puede escribir como

$$\mathcal{A}^h - \mathcal{A}^{h^{-1}} = \left(-4\lambda(A \times \alpha)^a + 2\lambda d\alpha^a - 2d\lambda\alpha^a\right) J_a = 0.$$

Utilizando la forma de la derivada covariante de la 0-forma α, la primera ecuación de campo se puede escribir como

$$\lambda D\alpha^a - d\lambda\alpha^a = 0. \tag{6.17}$$

Para llegar a la segunda ecuación de campo (6.6), conviene notar que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^h - \mathcal{A} &= \left(2\alpha^2 A^a - 2\lambda(A\times\alpha)^a - 2(A\cdot\alpha)\alpha^a + \lambda d\alpha^a - d\lambda\alpha^a + (\alpha\times d\alpha)\right)J_a \\ &= \left(2\alpha^2 A^a - 2(A\cdot\alpha)\alpha^a + (\alpha\times d\alpha)\right)J_a,\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se utilizó que $\lambda^2 - \alpha^2 = 1$ y en la segunda igualdad se usó la primera ecuación de campo (6.17). Esta expresión puede simplificarse teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(\alpha\times D\alpha)^a &= (\alpha\times d\alpha)^a - 2(\alpha\times(A\times\alpha))^a \\ &= (\alpha\times d\alpha)^a - 2\eta^{ab}\epsilon_{dbc}\epsilon^d_{fg}\alpha^c\alpha^c\alpha^g A^f \\ &= (\alpha\times d\alpha)^a - 2(A\cdot\alpha)^a + 2\alpha^2 A^a,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la contracción del tensor de Levi-Civita $\epsilon_{dbc}\epsilon^d_{fg}$ (ver apéndice A). Es por esto que

$$\mathcal{A}^h - \mathcal{A} = (\alpha\times D\alpha)^a J_a.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\mathcal{A}^h - \mathcal{A}, \mathcal{A}^h - \mathcal{A}\right] &= \frac{1}{2}(\alpha\times D\alpha)^a(\alpha\times D\alpha)^b\,[J_a, J_b] \\ &= -\eta^{ad}\epsilon_{dbc}(\alpha\times D\alpha)^b(\alpha\times D\alpha)^c J_a \\ &= -((\alpha\times D\alpha)\times(\alpha\times D\alpha))^a J_a.\end{aligned}$$

Análogamente a como se halló $\mathcal{A}^h$, puede verse que

$$\mathcal{F}^h = h^{-1}\mathcal{F}h = \left((\lambda^2+\alpha^2)F^a - 2\lambda(F\times\alpha)^a - 2(F\cdot\alpha)\alpha^a\right)J_a,$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{F} + \mathcal{F}^h = h^{-1}\mathcal{F}h = \left(2\lambda^2 F^a - 2\lambda(F\times\alpha)^a - 2(F\cdot\alpha)\alpha^a\right)J_a.$$

Entonces, la segunda ecuación de campo (6.6) se escribe como

$$2\lambda^2 F^a - 2\lambda(F\times\alpha)^a - 2(F\cdot\alpha)\alpha^a + ((\alpha\times D\alpha)\times(\alpha\times D\alpha))^a = 0. \qquad (6.18)$$

Puede verse que las ecuaciones de campo (6.17) y (6.18) para el grupo gauge $SO(2,1)$ son complicadas de resolver analíticamente de manera general, ya que, en realidad, son nueve ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales que están acopladas. Por lo tanto, en vez de resolverlas, se buscará un objetivo más modesto. Se comprobará si estas ecuaciones permiten que exista alguna solución de agujero negro ya que, de esta forma, puede verse mejor cómo se comporta este modelo de juguete como teoría de gravedad. Esto último será el tema del capítulo 7.

Capítulo 7

Soluciones de Agujeros Negros para el modelo g-WZW

En el capítulo 6 se ha visto cómo obtener una acción gWZW, aplicada a variedades de dimensión par, a partir de una forma de transgresión en una variedad de dimensión mayor impar. Se dedujeron allí las ecuaciones de campo variacionalmente para dimensión genérica $D = 2n - 2$ y en particular para dimensión $D = 2$. En este último caso, se vieron explícitamente las ecuaciones de campo para grupos gauge $SU(2)$ y $SO(2,1)$, pudiendo ser estas ecuaciones con el grupo $SO(2,1)$ un modelo gravitacional sencillo en dimensión $1+1$. Sin embargo, a pesar de estar en dimensión $D = 2$, se mostró que las ecuaciones de campo son complicadas de resolver en forma genérica. Sin embargo, si este modelo pretende ser mostrado como una teoría de gravedad, debería presentar soluciones convencionales de Relatividad General, como agujeros negros.

Como se había mencionado en la sección 3.3, los agujeros negros no son solamente una solución particular de Relatividad General, aparecen en casi todas las teorías de gravedad. A su vez, los agujeros negros son objetos fundamentales y bastante simples físicamente en el sentido que solamente pueden describirse con cantidades como masa, momento angular y carga. Es importante también que los agujeros negros relacionan su termodinámica con Teoría de la Información [52].

Es por esto que en este capítulo no se va a tratar solamente de un agujero negro como solución del modelo de gravedad gWZW, sino que se derivarán también su masa y su entropía a través de un par de métodos, para entender mejor la física a la que corresponde dicho modelo. La idea de que los conceptos termodinámicos pueden aplicarse a agujeros negros se remonta al año 1973 con los trabajos de Bekenstein por un lado [73], y Hawking, Bardeen y Carter por el otro [74]. Como clásicamente los agujeros negros tienden a absorber toda la materia que se encuentre demasiado cerca del mismo, entonces, para no violar la segunda ley de la termodinámica[1], éste

[1] Básicamente se dirá que, según la Termodinámica Clásica, la segunda ley de la termodinámica es la que afirma que la entropía del Universo debe aumentar o ser constante (esto último solamente para un proceso reversible) [75]. Esto quiere decir, desde el punto de vista de la Mecánica Estadística,

debe tener entropía. Si no fuera el caso, se podría disminuir la entropía del Universo tirando masa al agujero negro, violando así la segunda ley de la termodinámica. Estos autores mostraron que la entropía de un agujero negro S_{bh} de masa M debe ser proporcional al área del horizonte de sucesos A (ver sección 3.3) dividido la constante de Planck, es decir[2]

$$S_{bh} = \frac{kAc^3}{4G\hbar}, \tag{7.1}$$

donde k es la constante de Boltzmann, G es la constante de Newton, c es la velocidad de la luz. En 1974, Hawking mostró, utilizando argumentos de Teoría Cuántica de Campos, que un agujero negro no es tan negro sino que debía emitir al exterior [76]. Esto hace que el agujero negro tenga una temperatura asociada, llamada **temperatura de Hawking** T_H, que puede hallarse como

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{kGM}. \tag{7.2}$$

Desde el punto de vista de la escala cotidiana, un agujero negro astronómico normal tiene una temperatura muy baja, mucho más baja que la temperatura que puede reproducirse actualmente en un laboratorio. Sin embargo, su entropía es extremadamente grande, por ejemplo un agujero negro de una masa solar tiene mucha más entropía que la que tiene el Sol en su momento actual del ciclo estelar. Es decir, los agujeros negros tienen una gran cantidad de microestados accesibles para describirlos y esto es bastante sorprendente ya que, debido a los teoremas 'no hair', los agujeros negros son macroscópicamente simples y pueden tener unos pocos microestados. Se debe poder hacer alguna clase de conteo microscópico de estados cuánticos de un agujero negro (similar a lo que se hace con un gas cuántico), pero para esto se necesitaría tener una Teoría Cuántica de Gravedad. Existen sugerencias en Teoría de Cuerdas que apuntan en esta dirección y que exploran el principio holográfico [77]. La Teoría Cuántica de Lazos, la otra teoría candidata para cuantizar la gravedad, también ofrece algunos cálculos de entropía de agujeros negros [78].

En lo que se refiere a teorías clásicas de gravedad, como gravedades de Chern-Simons o transgresiones, existen trabajos que toman en cuenta la termodinámica de agujeros negros [79, 6, 7], calculando temperatura y entropía con aproximaciones semi-clásicas de métodos de Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita [82]. En este capítulo, se utilizarán estos métodos para hallar la energía (la masa) y la entropía de la solución de agujero negro del modelo gWZW. Sorprendentemente, al menos al principio, ambas cantidades dan nulas. También se hallará la masa de este agujero negro por otro método, la carga de Noether conservada, y se verificará que también da nula. Al final del capítulo, se procederá a discutir los resultados obtenidos dando una posible explicación a los mismos.

que la cantidad de información que se tiene del Universo debe ser cada vez menor [62].

[2]Para esta parte del capítulo se están usando unidades del Sistema Internacional.

7.1. Agujero Negro gWZW

Utilizando un grupo espacio-temporal como el $SO(2,1)$, y con las ecuaciones de campo encontradas en la sección 6.3.2, se puede proceder a buscar una solución a dichas ecuaciones. Pero, como se ha indicado en el capítulo 6, las ecuaciones de campo deducidas allí son bastante complicadas de manejar y resolver. Por lo tanto, en vez de resolverlas en forma genérica, se seguirá la estrategia de asumir una métrica de agujero negro determinada en dimensión $1+1$.

Los agujeros negros en dimensión $1+1$ fueron introducidos clásicamente por Callan, Giddings, Harvey y Strominger [80]. Estos agujeros negros aparecen en el marco de un modelo de juguete donde se acopla gravedad con un dilatón[3] y materia conforme. A estos agujeros negros los llamó 'evanescentes' ya que la materia colapsante emite toda la energía antes que pueda ocurrir la formación de un horizonte de sucesos. Por otro lado, Edward Witten mostró que existen agujeros negros como solución de una teoría de campos conforme en dos dimensiones [81]. Utilizando una teoría gWZW para un grupo de simetría $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ como un modelo en Teoría de Cuerdas, Witten da una interpretación de agujero negro a la métrica ds de forma similar a

$$ds^2 = -\tanh(\gamma r)^2 dt^2 + dr^2, \tag{7.3}$$

donde t es la coordenada temporal, r es la coordenada espacial y γ es una constante arbitraria[4]. En este trabajo se utilizará esta métrica como la de un agujero negro $1+1$ y en el apéndice D se muestra la interpretación espacio-temporal del mismo.

Lo que se hará ahora es verificar si existen soluciones de esta forma en el modelo de gravedad gWZW para dimensión $D=2$ con grupo de simetría $SO(2,1)$. Primero, se le va a dar una interpretación a las componentes del potencial 1-forma $\mathcal{A}$ si (7.3) fuera la métrica espacio-temporal. Para hacer esto, hay que observar que el vielbein es

$$\begin{aligned} e^0 &= \tanh(\gamma r)dt, && (7.4)\\ e^1 &= dr. && (7.5) \end{aligned}$$

Si se toma la torsión nula, se puede hallar la uno-forma de conexión ω^{01} vía $T^a = de^a + \omega^a_b e^b$ (ver sección 2.4). De esta forma se obtiene

$$\omega^{01} = \frac{\gamma}{\cosh(\gamma r)^2} dt. \tag{7.6}$$

Ya que el grupo $SO(2,1)$ es el grupo de de-Sitter para $D=2$, puede pasarse por contracción al grupo de Poincaré (ver sección 5.2.1) siendo natural asociar las componentes del potencial 1-forma con el vielbein y la conexión ω^{01} según (5.16). En

[3]Brevemente se dirá que un dilatón es un campo escalar que aparece como resultado de una compactificación dimensional, como la de Kaluza-Klein. Esto tiene como interpretación que las constantes de acoplamiento no sean constantes y se vuelvan dinámicas.

[4]En el trabajo de Witten se tomó $\gamma = 1$, aquí por generalidad se toma γ constante genérica.

este caso[5]

$$
\begin{aligned}
A^{01} &= \omega^{01}, \\
A^{02} &= e^{0}, \\
A^{12} &= e^{1}.
\end{aligned}
$$

Para hallar A^a, hay que notar que como $J^a = \epsilon^{abc} J_{bc}$ entonces

$$\epsilon_{aef} J^a = \epsilon_{aef} \epsilon^{abc} J_{bc},$$

esto hace, utilizando la contracción de $\epsilon_{aef}\epsilon^{abc}$ mostrada en el apéndice A,

$$J_{bc} = -\frac{1}{2}\epsilon_{bca} J^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{bca}\eta^{ad} J_d.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} A^{ab} J_{ab} = -\frac{1}{4} A^{bc}\epsilon_{dbc}\eta^{da} J_a,$$

o sea,

$$A^a = -\frac{1}{4}\epsilon_{bcd}\eta^{ad} A^{bc} = -\frac{1}{4}\epsilon^{abc} A_{bc}.$$

Para las asignaciones tomadas, esto quiere decir

$$
\begin{aligned}
A^{0} &= \frac{1}{2} e^{1} = \frac{1}{2} dr, \\
A^{1} &= \frac{1}{2} e^{0} = \frac{1}{2} \tanh(\gamma r) dt, \\
A^{2} &= -\frac{1}{2}\omega^{01} = -\frac{\gamma}{2\cosh^{2}(\gamma r)} dt.
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Utilizando la identificación (5.18) del tensor 2-forma F^{ab} con R^{ab} y con T^a, se tiene

$$
\begin{aligned}
F^{01} &= R^{01} - e^{0} e^{1}, \\
F^{02} &= T^{0}, \\
F^{12} &= T^{1}.
\end{aligned}
$$

Análogamente a lo hecho con A^a, se tiene que

$$F^a = -\frac{1}{4}\epsilon_{bcd}\eta^{ad} F^{bc} = -\frac{1}{4}\epsilon^{abc} F_{bc},$$

y, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
F^{0} &= \frac{1}{2} T^{1}, \\
F^{1} &= \frac{1}{2} T^{0}, \\
F^{2} &= -\frac{1}{2}(d\omega^{01} - e^{0} e^{1}),
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

[5]Notar que aquí se tomó la convención de hacer la constante de escala l igual a la unidad.

donde se utilizó en la última igualdad que $R^{01} = d\omega^{01}$.

Una vez asignados los valores del potencial 1-forma $\mathcal{A}$ y el tensor 2-forma $\mathcal{F}$, para hallar las $\{\alpha^a\}$ que cumplen las ecuaciones de campo , se sustituye (7.7) y (7.8) en (6.17) y (6.18). Si se quiere ver el resultado de esta sustitución y la deducción de la solución de dichas ecuaciones para ciertos casos particulares, se puede consultar el apéndice E. No se encontraron soluciones para el caso $\lambda \neq 0$, solamente existen soluciones para $\lambda = 0$. En este último caso, hay dos posibles conjuntos de valores para $\{\alpha^a\}$, que son

$$\begin{cases} \alpha^0 = \pm\sqrt{(\alpha^1)^2 + 1} \\ \alpha^1 = \frac{C}{\tanh(\gamma r)} \\ \alpha^2 = 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

y

$$\begin{cases} \alpha^0 = \pm\sqrt{(\alpha^2)^2 + 1} \\ \alpha^1 = 0 \\ \alpha^2 = D\cosh(\gamma r) e^{\frac{1}{8\gamma^2}\cosh(2\gamma r)} \end{cases} \tag{7.10}$$

donde C y D son constantes arbitrarias. Utilizando el teorema de Noether y métodos Termodinámica de agujeros negros, se puede hallar la masa y entropía asociada a los mismos. Eso es lo que se hará en las siguientes secciones y se mostrará que (7.9) es una solución de agujero negro con masa y entropía nulas. Si se considera el conjunto de soluciones (7.10), utilizando los métodos de las siguientes secciones, dan una masa y energía infinita, descartándolas como posibles soluciones con una física adecuada para agujeros negros.

Es interesante observar que la solución (7.9) es una solución particular con $\lambda = 0$. Si tenemos en cuenta que en ese caso $h = \alpha^a J_a$, entonces esa condición quiere decir que $h^2 = -I$, con I la matriz identidad 2×2. Además, como la torsión es cero, $F^0 = F^1 = 0$ y en la solución $\alpha^2 = 0$, (7.9) es un caso particular de una condición más general: $F \cdot \alpha = 0$. Esto último es equivalente, cuando $\lambda = 0$, a $\mathcal{F}^h = -\mathcal{F}$ o que $\{\mathcal{F}, h\} = 0$. Esto es la condición de anti-auto-dualidad vista en la sección 6.3 y, por lo tanto, la solución (7.9) es una solución dentro del ansatz (6.9). Esto lo notamos ya que más adelante podremos mostrar propiedades respecto a estas soluciones más generales que la solución de agujero negro (7.9). Por ejemplo, se mostrará en la sección 7.2 que la masa de una solución estática que cumpla (6.9) debe tener masa nula (derivada a partir del teorema de Noether) y se verá en la sección 7.3 que la acción euclídea evaluada en la solución debe ser nula también.

7.2. Masa del Agujero Negro gWZW a Partir del Teorema de Noether

En la sección 7.1 se mostró la solución (7.9) de los $\{\alpha^a\}$ que dan como resultado una métrica (7.3) agujero negro $1 + 1$ para el modelo gWZW. En esta sección se va a hallar la masa de este agujero negro utilizando el teorema de Noether, cuya derivación apropiada se encuentra en el apéndice C. Utilizando este teorema, la corriente conservada es, según la ecuación (C.5),

$$\star j = \Omega - \Theta - I_\xi \mathcal{L} - I_\xi dB,$$

donde el significado de Ω, Θ y j están en el apéndice C. La carga de Noether Q se define como

$$Q = \int_N \star j, \tag{7.11}$$

donde N corresponde a una capa de tiempo constante de la variedad M. Esta carga tiene la particularidad de conservarse en el tiempo, es decir $\frac{dQ}{dt} = 0$. La masa deducida del teorema de Noether será la carga conservada en el caso $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$.

Para el modelo gWZW estudiado, Ω es cero ya que $\mathcal{L}$ es invariante por difeomorfismos. Si se toma en cuenta las condiciones de borde descritas en la sección 6.2, es decir h fijo en el borde, el término dB es nulo también. El término Θ aparece al hacer las variaciones de $\mathcal{L}$ respecto a $\mathcal{A}$ y h, que según (6.4) para $n = 2$ se tiene

$$\Theta = n(n-1) \int\limits_{\partial M} \left\{ \int_0^1 dt(1-t)\langle \Delta \mathcal{A} h^{-1} \delta h \rangle \right\},$$

el cual es cero en virtud de $\delta h = \mathcal{L}_\xi h = 0$, con $\mathcal{L}_\xi$ la derivada de Lie, ya que h es independiente del tiempo.

Para hallar los términos restantes, hay que tener en cuenta que para la acción (6.3) se tiene

$$I_\xi S = \kappa \int\limits_\Sigma \frac{1}{3} I_\xi \langle (h^{-1}dh)^3 \rangle - \kappa \int\limits_{M^2} I_\xi \langle (\mathcal{A} - h^{-1}dh)\mathcal{A}^h \rangle, \tag{7.12}$$

Primero hay que notar que $I_\xi \langle (h^{-1}dh)^3 \rangle$, ya que no hay componente según dt porque h es independiente del tiempo. Por esta misma razón, se tiene

$$\begin{aligned} I_\xi \langle (\mathcal{A} - h^{-1}dh)\mathcal{A}^h \rangle &= \langle (I_\xi \mathcal{A} - h^{-1}dh)\mathcal{A}^h \rangle - \langle (\mathcal{A} - h^{-1}dh) I_\xi \mathcal{A}^h \rangle \\ &= \langle (I_\xi \mathcal{A} - h^{-1}dh)\mathcal{A}^h \rangle - \langle (\mathcal{A} - h^{-1}dh) h^{-1}(I_\xi \mathcal{A})h \rangle, \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se utilizó la propiedad de anti-derivación de la derivada interior I_ξ. Utilizando (7.7), que h no depende del tiempo t, y las propiedades de $\{J_a\}$, se puede hallar que

$$\begin{aligned} I_\xi \mathcal{A} &= I_\xi A^a J_a = \frac{1}{2}\tanh(\gamma r) J_1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\cosh^2(\gamma r)} J_2 \\ h^{-1} I_\xi \mathcal{A} h &= (-I_\xi A^a - 2 I_\xi A^1 \alpha^1 + 2 I_\xi A^0 \alpha^0) J_a \\ &= -\tanh(\gamma r)\alpha^1\alpha^0 J_0 - \tanh(\gamma r)\left(\frac{1}{2} + \alpha^1\alpha^1\right) J_1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\cosh^2(\gamma r)} J_2. \end{aligned}$$

Se puede ver además que en el caso $\lambda = 0$,

$$\mathcal{A} - h^{-1}dh = (A^a + (\alpha \times d\alpha)^a)\, J_a.$$

Por lo tanto, esto lleva a que, por un lado

$$\begin{aligned}\langle (I_\xi A) A^h \rangle &= 2(2\tanh(\gamma r) A^0 \alpha^0 \alpha^1 - \frac{1}{2}(\alpha \otimes d\alpha)^2 \frac{\gamma}{\cosh^2(\gamma r)} \\ &= \tanh(\gamma r)\alpha^0\alpha^1 dr - (\alpha \otimes d\alpha)^2 \frac{\gamma}{\cosh^2(\gamma r)},\end{aligned}$$

y por el otro,

$$\langle (A - h^{-1}dh) I_\xi A^h \rangle = \tanh(\gamma r)\alpha^0\alpha^1 dr - (\alpha \otimes d\alpha)^2 \frac{\gamma}{\cosh^2(\gamma r)}.$$

Estos dos resultados hacen que, debido a (7.12), $I_\xi S = 0$, la masa del agujero negro a partir del teorema de Noether sea nula.

Como se mencionó al final de la sección 7.1, se puede mostrar que la masa de Noether para una configuración independiente del tiempo y satisfaciendo la condición de anti-auto-dualidad debe ser cero. Para ver esto, primero hay que notar que para una configuración independiente del tiempo se tiene que $\Theta = 0$. La derivada interior de la densidad lagrangiana $I_\xi \mathcal{L}$ se puede escribir

$$\begin{aligned} I_\xi \mathcal{L} &= I_\xi \mathcal{T}_3(\mathcal{A}, \mathcal{A}^h) = 2 I_\xi \int_0^1 \langle \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t \rangle \\ &= I_\xi \langle \Delta\mathcal{A}\mathcal{F} + \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}^h - \frac{1}{3}\Delta\mathcal{A}^3 \rangle \\ &= I_\xi \langle \Delta\mathcal{A}\left[\mathcal{F} + \mathcal{F}^h - \frac{1}{3}(h^{-1}Dh)^2\right] \rangle = 0,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la condición anti-auto-dualidad y la segunda ecuación de campo (6.6) que le corresponde: $(h^{-1}Dh)^2 = 0$. Por lo tanto, una configuración con condición anti-auto-dualidad e independiente del tiempo tiene masa de Noether nula. Se discutirá en la sección 7.4 una posible interpretación de este resultado.

7.3. Termodinámica del Agujero Negro gWZW

Una vez mostrada la solución de agujero negro para el modelo gWZW (ver sección 7.1), conviene, como se mencionó al principio de este capítulo, estudiar las propiedades termodinámicas del mismo. En esta sección se hará un procedimiento estándar semi-clásico para obtener la entropía a partir de la acción de agujero negro [72].

A modo de ilustración de este procedimiento, se considerará un campo escalar ϕ en un espacio-tiempo minkowskiano de dimensión arbitraria D sometido a un cierto potencial $V(\phi)$. La integral de caminos se puede escribir entonces como [47, 72, 32]

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int d^Dx\{-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\}}.$$

Uno puede hacer una rotación de Wick para pasar la integral de caminos a una integral en un espacio euclídeo, es decir haciendo $id^Dx = d^D_E x \equiv dt_E d^{D-1}x$, donde el subíndice E en el diferencial quiere decir que está definido en un espacio euclídeo y t_E es el llamado tiempo euclídeo. Entonces, la integral euclídea se puede escribir como

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}\int d^dx\{\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi)\}} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}\int d^DxS_E(\phi)}, \tag{7.13}$$

con $S_E \equiv \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi)$ la **acción euclídea**.

Para hallar la función de partición Z en Mecánica Estadística Cuántica para un sistema con hamiltoniano H, se tiene que hacer

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta H} = \sum_n \langle n|e^{-\beta H}|n\rangle, \tag{7.14}$$

donde $\beta = \frac{1}{k_BT}$, con T la temperatura y k_B la constante de Boltzmann. De aquí en adelante se utilizará la convención $k_B = 1$. La representación integral de la evolución entre un estado inicial $|I\rangle = |\phi_i, t_i\rangle$ y un estado final $|F\rangle = |\phi_f, t_f\rangle$ es

$$\langle F|e^{-i\frac{T}{\hbar}H}|I\rangle,$$

donde[6] $T = t_f - t_i$. Esto es similar a (7.14) con la diferencia que el estado inicial $|I\rangle$ y final $|F\rangle$ debe ser el mismo y $\beta = iT$ (tomando unidades naturales $\hbar = 1$). Esto se puede resumir como

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta H} = \int_{\mathrm{CBP}} \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta dt_E \int d^dx \mathcal{L}[\phi,\partial\phi]}, \tag{7.15}$$

donde $\int_{\mathrm{CBP}}$ es una integral con las condiciones de borde periódicas $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$. Comparando (7.15) con (7.13) se puede ver que β es el período del tiempo euclídeo. Se puede decir que, a grandes rasgos, Teoría Cuántica de Campos euclídea en dimensión D es equivalente a Mecánica Estadística Cuántica en $D - 1$ dimensiones.

Dada acción euclídea S_E, si ϕ_0 es una solución de las ecuaciones de campo determinada de variar S_E, entonces se cumple

$$\left.\frac{\delta S_E}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0.$$

[6] No confundir el tiempo $T = t_f - t_i$ con la temperatura T.

Se puede hacer un desarrollo de S_E alrededor de ϕ_0, o sea

$$S_E\left[\phi\right] = S_E\left[\phi_0\right] + S_E^{(2)}\left[\bar{\phi}\right],$$

donde $\phi(x) = \phi_0(x) + \bar{\phi(x)}$ y $S_E^{(2)}\left[\bar{\phi}\right]$ es una funcional de orden cuadrático en $\bar{\phi(x)}$. Esta aproximación hace que

$$Z = e^{-S_E[\phi_0]} \int \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-S_E^{(2)}[\bar{\phi}]}.$$

Por lo tanto,

$$\ln Z = -S_E\left[\phi_0\right] + \ln \int \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-S_E^{(2)}[\bar{\phi}]}.$$

Por otro lado, se puede relacionar Z con las variables termodinámicas de entropía S y temperatura T a partir de

$$Z = e^{-\beta F},$$

con F la energía libre de Helmholtz. Entonces[7] $\ln Z \cong -S_E\left[\phi_0\right] = -\beta F$ y, como $F = E - TS = E - \frac{S}{\beta}$, siendo E la energía, se tiene

$$S_E\left[\phi_0\right] = \beta E - S.$$

Todo esto lleva a que

$$S = -\left[1 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right] S_E\left[\phi_0\right]. \tag{7.16}$$

Este método para hallar variables termodinámicas a partir de la acción euclídea evaluada cuando valen las ecuaciones de campo se conoce como **aproximación punto de silla**.

Antes de seguir adelante, es posible detenerse en este punto para mostrar un método heurístico para hallar una temperatura asociada a un agujero negro en dimensión cuatro [72], cuya métrica suele tener la forma genérica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega,$$

donde la función $f(r)$ tiene una raíz en el horizonte denotado por r_+, es decir $f(r_+) = 0$, y $d\Omega$ representa el elemento de ángulo sólido. La idea básica es que si el campo escalar se vuelve euclídeo vía una rotación de Wick con un período β, entonces el 'cuanto' asociado con el campo se comporta como si estuviera sumergido en un baño de temperatura $T = 1/\beta$.

Se toma el tiempo euclídeo t_E tal que $t = -it_E$, entonces

$$ds^2 = f(r)dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega.$$

[7]Esto lo que quiere decir que a orden cero, la acción efectiva cuántica es igual a la acción clásica evaluada donde valen las ecuaciones de campo clásicas [47].

Ya que $f(r_+) = 0$, se puede hacer un desarrollo alrededor de r_+ como $f(r) \cong (r - r_+)f'_+$ con f'_+ la derivada de f respecto a r evaluada en r_+. La métrica tiene entonces la forma

$$ds_E^2 = (r - r_+)f'_+ dt_E^2 + \frac{dr^2}{(r - r_+)f'_+} + r^2 d\Omega.$$

Eligiendo una nueva variable ρ de modo que

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{f'_+(r - r_+)}},$$

y escribiendo la métrica sin su parte angular, se tiene

$$ds_E^2 = (\frac{f'_+\rho}{2})^2 dt_E^2 + d\rho^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2,$$

con $\varphi = \frac{f_+\rho}{2}$. Se quiere que el período sea β para que haya una singularidad cónica en el horizonte. La razón de esto es que la curvatura diverge en una singularidad cónica, lo cual implica que la geometría no es un extremo de la acción euclídea y no contribuye, por lo tanto, a la evaluación de punto de silla en la función de partición. Entonces, esto implica que $\varphi(\beta) - \varphi(0) = 2\pi$. Por lo tanto, sustituyendo, se tiene

$$\beta = \frac{4\pi}{f'_+}. \tag{7.17}$$

Para utilizar este método para hallar la temperatura de Hawking de un agujero negro se pasa la métrica (7.3) a la forma

$$ds^2 = -f(x)dt^2 + \frac{dx^2}{f(x)},$$

donde en este caso (ver apéndice D para detalles del cálculo)

$$f(x) = 1 - e^{-2\gamma x}.$$

Aquí el horizonte se puede decir que está en $x_+ = 0$ y que $f_+ = 2\gamma$. Por lo tanto, utilizando (7.17) se llega al resultado

$$\beta = \frac{2\pi}{\gamma},$$

con lo que la temperatura de Hawking T valdría

$$T = \frac{\gamma}{2\pi}.$$

El argumento anterior se aplicaría a una acción que incluya explícitamente la curvatura. Pero la acción (6.3) no incluye curvatura R^{ab} ya que solamente incluye la conexión de spin ω^{ab}, no sus derivadas, por lo que la singularidad cónica en el horizonte no implica que la acción es singular evaluada en esa configuración y, por lo tanto, el período β del tiempo euclídeo no está restringido a ningún valor particular. Esta situación es similar al caso de agujero negro extremal y, como se verá más abajo en esta sección, la entropía nula coincide también con la de un agujero negro extremal.

Se puede aplicar ahora el método del punto de silla para hallar la masa (que es la energía E) y la entropía del agujero negro gWZW en dimensión $D = 2$. Para esto hay que evaluar la versión euclídea de la acción (6.3) en la solución (7.9). El término correspondiente a $\int_\Sigma$ debería, en principio, requerir la extensión del integrando de variedad de dos dimensiones M^2 a la variedad Σ. Por ejemplo, se puede bosquejar la geometría del agujero negro $1+1$ como una superficie tipo 'cigarrillo' con la coordenada r a lo largo del cigarrillo y t_E la coordenada angular alrededor del mismo cerrándose en $r = 0$. Para extenderlo a la variedad tridimensional Σ, puede considerarse una tercera coordenada que considere el interior del cigarrillo. Sin embargo, esto no es necesario ya que la forma $h^{-1}dh$ no tiene componente según dt, porque h es independiente del tiempo, y esto hace que

$$\int_\Sigma \frac{1}{3}\langle (h^{-1}dh)^3\rangle = 0,$$

al ser nulo el elemento de volumen.

Queda por evaluar el segundo término de (6.3). Utilizando los cálculos hechos en las secciones 6.3.2 y 7.2, se puede ver que

$$\begin{aligned}
\langle (A - h^{-1}dh)A^h\rangle &= 2\eta_{ab}(A^a - (\alpha\times d\alpha)^a)(-A^b - 2(\alpha\cdot A)\alpha^b + (\alpha\times d\alpha)^b)\\
&= 2\eta_{ab}(A^a - (\alpha\times d\alpha)^a)(-2(\alpha\cdot A)\alpha^b - (A^b - (\alpha\times d\alpha)^b))\\
&= -4\eta_{ab}(A^a - (\alpha\times d\alpha)^a)(\alpha\cdot A)\alpha^b\\
&= -4(\alpha\cdot A)(\alpha\cdot A) + 4((\alpha\times d\alpha)\cdot\alpha)(\alpha\cdot A)
\end{aligned}$$

El primer término se anula debido a que $\alpha\cdot A$ es una 1-forma valuada en $\mathbb{R}$, mientras que el segundo término se anula ya que $(\alpha\times d\alpha)\cdot\alpha = 0$ en la solución (7.9). Por lo tanto, la acción euclídea es cero para la solución de agujero negro. Esto último hace que

$$M = E = -\left.\frac{\partial S_E}{\partial\beta}\right|_\alpha = 0,$$

y

$$S = \left.(-S_E + \beta E)\right|_\alpha = 0,$$

haciendo que tanto la masa como la entropía del agujero negro sean nulas.

Se puede observar en este punto que la acción euclídea evaluada en una configuración independiente del tiempo y con anti-auto-dualidad, donde (7.9) es un caso particular, es también nula. Para esto, hay que observar que, como en la sección 7.2, la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ en este caso puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{T}_3(\mathcal{A},\mathcal{A}^h) = 2\int_0^1 \langle \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}_t\rangle \\ &= \langle \Delta\mathcal{A}\mathcal{F} + \Delta\mathcal{A}\mathcal{F}^h - \frac{1}{3}\Delta\mathcal{A}^3\rangle \\ &= \langle \Delta\mathcal{A}\left[\mathcal{F} + \mathcal{F}^h - \frac{1}{3}(h^{-1}Dh)^2\right]\rangle = 0,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la condición anti-auto-dualidad y la segunda ecuación de campo (6.7) que le corresponde: $(h^{-1}Dh)^2 = 0$. Por lo tanto, la acción euclídea es nula en una configuración con anti-auto-dualidad e independiente del tiempo, en particular la solución (7.9).

Antes que nada, hay que notar que el resultado de masa nula obtenido a partir del método aproximación punto de silla coincide con el resultado obtenido en 7.2. La entropía nula indicaría que la solución de agujero negro considerada es extremal.

7.4. Interpretación del Agujero Negro gWZW

En la sección 7.3 se vio que al interpretar la solución (7.9) como una solución de agujero negro, implica que éste tiene tanto entropía nula como masa nula. Esto podría ser impactante al principio ya que es difícil de interpretar un agujero negro con éstas características. Sin embargo, se pueden dar algunos argumentos que podrían llegar a explicar estos resultados.

Soluciones gravitacionales ligadas sin masa tienen una larga historia en Teoría de Campos. Hace más de cincuenta años Jordan Pascal sugirió que una estrella puede ser creada de la nada siempre que su energía gravitacional negativa fuera exactamente igual a su masa en reposo positiva[8]. Recientemente, existen varios ejemplos que agujeros negros de masa nula en varias dimensiones para diversas teorías en la literatura [84, 85]. Es de mención que en una teoría gravitacional llamada Gravedad Conforme, que se define en un espacio-tiempo de dimensión cuatro [86], todo estado espacialmente acotado debe tener masa cero.

En cuanto a que la masa de agujero negro del modelo de gWZW en $D = 2$ puede ser cero, se puede trasladar el argumento heurístico de la teoría de Gravedad Conforme [86]. La idea es que la acción de Gravedad Conforme en $D = 4$ tiene derivada de cuarto orden en el lagrangiano, lo que implica que el propagador va como

[8] El propio Einstein estaba tan perplejo cuando George Gamow le dijo esta idea que casi le cuesta a ambos un accidente grave. Como Gamow cuenta [83]: 'I remember that once, walking with him to the Institute, I mentioned Pascual Jordan's idea of how a star can be created from nothing, since at the point zero its negative gravitational mass defect is numerically equal to its positive rest mass. Einstein stopped in his tracks, and, since we were crossing a street several cars had to stop to avoid running us down.'.

$1/k^4$ con el cuadri-momento k_μ, haciendo que la interacción o energía potencial vaya como

$$\int \frac{d^3k}{k^4} \sim \frac{1}{k} \sim r.$$

Por lo tanto, el potencial de una fuente localizada es lineal y el trabajo requerido para separar una carga a infinita distancia es infinito[9]. Boulware et al. argumentan que, por lo tanto, este modelo de gravedad debe ser 'confinante', y así como en QCD el color debe ser cero, la masa debe ser cero para estados ligados en Gravedad Conforme.

Este argumento puede trasladarse al caso del modelo gWZW gravitacional en $D = 2$. Para una teoría gravitatoria con derivadas de segundo orden en un espacio de dimensión dos, el propagador debe ir como $1/k^2$ y el potencial como

$$\int \frac{dk}{k^2} \sim \frac{1}{k} \sim r.$$

Esto llevaría, según el argumento de Boulware et al., a que esta teoría sería gravitacionalmente confinante a nivel cuántico y la masa de los estados espacialmente localizados deben ser cero. Un argumento similar se aplica al modelo de Schwinger de electrodinámica con fermiones en dimensión $1+1$, el cual muestra ser confinante [87].

Todas estas consideraciones parecen no estar de acuerdo con el hecho que los agujeros negros en dimensión $1 + 1$ anteriormente estudiados tienen masa no nula [80, 81]. Sin embargo, en el artículo original de Callan et al., los agujeros negros son inestables cuando los efectos cuánticos se toman en cuenta, dándole la designación que da nombre al artículo: 'Evanescent Black Holes'. Estos autores argumentan que el estado final de estos agujeros negros después de la evaporación deben ser un estado de masa cero. Consideraciones similares son mostradas por Witten, donde postula que el estado final debe ser dos copias del espacio plano. Las acciones clásicas consideradas en [80, 81] son diferentes a la acción (6.3) considerada aquí. Debido a los argumentos estándares para las acciones WZW, la acción clásica (6.3) considerada aquí no debería recibir correcciones cuánticas, siendo ya una acción efectiva para toda una clase de acciones gravitatorias en dimensión $1+1$. Por lo tanto, la solución clásica (6.3) estudiada en este trabajo debería llevar a soluciones de agujeros negros de masa nula [88].

Está claro que estas consideraciones heurísticas deben tomarse con 'pinzas' ya que, si se utiliza el mismo argumento a modelos de gravedad en $D = 3$, implicaría un potencial logarítmico con el resultado de un agujero negro de masa nula. Por otro lado, los agujeros negros BTZ no son de masa nula en general [79], incluso en una teoría de gravedad de CS que no debería tener correcciones cuánticas. Sin embargo, en este último caso se podría 'esquivar' el argumento de los párrafos anteriores

[9] Similar a lo que sucede en QCD, que la energía necesaria para separar un quark de otro es tan grande que ocurre la creación de otro par quark-antiquark, produciéndose un confinamiento de color.

diciendo que gravedad pura en $D = 3$ no tiene grados de libertad que se propaguen. Esto hace que el propagador no esté bien definido, por lo que el argumento de Boulware et al. no se aplica al caso de agujero negro BTZ.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se derivaron las ecuaciones de campo del modelo gWZW, que está definido en una variedad de dimensión par. Estas ecuaciones refieren a grupos genéricos, por lo que pueden aplicarse a teorías de gravedad, para grupos espacio-temporales, o incluso para materia condensada para el grupo $SU(N)$, por ejemplo. Las componentes α^a del elemento h del grupo G genérico son dinámicas junto a las componentes de la uno-forma de conexión A^a. Las componentes α^a podrían interpretarse, en este contexto, como un campo de materia que se acopla con las componentes A^a. Se vio, en la sección 6.3, que las ecuaciones tienen varias contribuciones y se mostraron algunas sutilezas respecto a la contribución de los términos de borde. En la sección 7.1, se observó que pueden simplificarse considerablemente las ecuaciones considerando el ansatz (6.9), es decir $h^2 = -I$ y la condición de anti-auto-dualidad $\mathcal{F} = -\mathcal{F}^h$.

Las ecuaciones explícitas para $D = 2$ en casos particulares de grupos de simetría $SU(2)$ y $SO(2,1)$ son bastante complicadas como para resolverlas de manera analítica en una situación genérica. Por eso se trató de encontrar si existe una solución para una métrica particular, una métrica de agujero negro en dimensión $1 + 1$. Para esto, se consideraron las componentes α^a independientes del tiempo, es decir una solución estática. De las dos soluciones obtenidas, la que tiene un buen comportamiento es la solución (7.9).

La masa calculada a partir del teorema de Noether, así como la temperatura, la entropía y la masa calculada por una aproximación punto de silla se calcularon en la secciones 7.2 y 7.3. El resultado de masa nula podrían explicarse a partir del argumento de gravedad confinante de Boulware et al., como se discutió en la sección 7.4. En todo caso, la forma particular que tiene la acción de gWZW (6.3) y la independencia temporal de las componentes α^a es la que dicta el resultado. Esta forma particular de la acción es posible que no permita que el método aproximación punto de silla pueda aplicarse adecuadamente para calcular la temperatura y, por lo tanto, es posible que la temperatura de este agujero negro no esté bien definida. Esto, junto a la entropía nula, podría sugerir que el agujero negro considerado aquí sea extremal.

Es de destacar que en esta solución las componentes α^a en el infinito convergen, es decir, apuntan a un elemento fijo del grupo G. Esto puede justificar el hecho que si borde de la variedad Σ de dimensión tres es compacta, se pueda considerar este borde como la compactificación a un punto $M \cup \{\infty\}$, siendo M la variedad bidimensional espacio-tiempo no necesariamente compacta [88].

Son varias las tareas que pueden realizarse para entender un poco mejor la física del modelo gWZW en $D = 2$ con grupo de simetría $SO(2,1)$. Primero que nada, habría que ver si existen soluciones físicamente aceptables fuera del ansatz (6.9). Esto requerirá un mayor trabajo de cálculo analítico-computacional ya que las ecuaciones son bastante complicadas, aún para este grupo de simetría sencillo.

Queda por estudiar también qué tan únicas son las soluciones de agujero negro (7.9), es decir si puede haber en este modelo un equivalente al teorema de Birkoff. También podría analizarse la estabilidad de estas soluciones respecto a pequeñas perturbaciones de los campos.

En lo que refiere a las ecuaciones de campo para el grupo $SU(2)$, podrían estudiarse posibles solitones y si éstos tienen alguna relación con las soluciones de agujero negro mediante un equivalente a rotación de Wick debido a la relación existente entre $SU(2)$ y $SO(2,1)$, mostrada explícitamente en la similitud de las ecuaciones de campo (6.12)-(6.14) con (6.17)-(6.18). Esta relación, además, podría brindar información de carácter topológico sobre las soluciones obtenidas.

Este trabajo pretende ser un modesto aporte hacia la meta de investigar el modelo gWZW en dimensiones más relevantes, como $D = 4$. Ya que las ecuaciones de campo son complicadas en $D = 2$, uno puede imaginarse que en $D = 4$ las ecuaciones serán todavía más difíciles de resolver, por lo que es importante tener información relevante sobre soluciones en teorías de dimensiones más bajas para luego intentar generalizarlas a dimensiones mayores y puedan, a su vez, arrojar luz sobre problemas cosmológicos actuales como, por ejemplo, el origen de la Energía Oscura, Materia Oscura o la Inflación en el Universo.

Apéndice A

Contracción del Tensor de Levi-Civita

Aquí se mostrarán las fórmulas de cómo contraer tensores de Levi-Civita de una cantidad arbitraria de índices. Para esto se definirá la **matriz de delta de Kronecker generalizada** como

$$\delta^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \det \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \ldots & \delta^{\mu_1}_{\nu_r} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \ldots & \delta^{\mu_2}_{\nu_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\mu_r}_{\nu_1} & \delta^{\mu_r}_{\nu_2} & \ldots & \delta^{\mu_r}_{\nu_r} \end{vmatrix}, \tag{A.1}$$

donde $1 \leq r \leq m$ con m la dimensión de la variedad. De (A.1) se puede observar que la delta de Kronecker generalizada es un tensor (r, r) totalmente anti-simétrico. Esta anti-simetría total permite escribir la siguiente propiedad de contracción de k índices iguales para dimensión m

$$\delta^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu_{k+1} \cdots \mu_m}_{\mu_1 \ldots \mu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_m} = k!(n-k)! \delta^{\mu_{k+1} \cdots \mu_m}_{\nu_{k+1} \ldots \nu_m}. \tag{A.2}$$

A partir de las propiedades de anti-simetría total de $\delta^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ uno puede escribir el tensor de Levi-Civita como

$$\begin{aligned} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_r} &= \delta^{1 \ldots r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \\ \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_r} &= \delta^{\nu_1 \ldots \nu_r}_{1 \ldots r}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

coincidiendo con la definición (3.7). También se puede escribir el producto de tensores de Levi-Civita como

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_r} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \delta^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \tag{A.4}$$

Combinando (A.3) con (A.2) uno obtiene en dimensión m que

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu_{k+1} \cdots \mu_m} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_m} = k!(n-k)! \delta^{\mu_{k+1} \cdots \mu_m}_{[\nu_{k+1} \ldots \nu_m]}. \tag{A.5}$$

La ecuación (A.5) es utilizada en este trabajo para transformar contracciones de $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ a productos de $\delta^{\cdots}_{\cdots}$.

Apéndice B

Variación General de las Formas de Transgresión

En este trabajo, las formas de transgresión juegan un papel muy importante ya que a partir de ellas se construyen las acciones para modelos de gravedad. Es por ello que este apéndice se dedica a deducir las variaciones de las transgresiones frente a transformaciones generales, ya que darán lugar a las ecuaciones de campo para la teoría por principio variacional. El contenido de este apéndice se basa en [6, 7].

Se escribirá primero la definición de forma de transgresión que involucra dos conexiones $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_0$, ver (4.21), de la forma

$$\mathcal{T}_{2n+1}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) = (n+1) \int_0^1 dt < \mathcal{J}\mathcal{F}_t^n >, \tag{B.1}$$

donde $\mathcal{J} \equiv \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$ y se utilizó como polinomio invariante la traza simetrizada $< \ldots >$. Además

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= t\mathcal{J} + \mathcal{A}_0 = t\mathcal{A}_1 + (1-t)\mathcal{A}_0, \\ \mathcal{F}_t &= d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2 = \mathcal{F}_0 + tD_0\mathcal{J} + t^2\mathcal{J}^2, \end{aligned}$$

con $\mathcal{F}_0 = d\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0^2$ y $D_0\mathcal{J} = d\mathcal{J} + \mathcal{A}_0\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A}_0$, es decir D_0 es la derivada covariante respecto a la forma de conexión $\mathcal{A}_0$. Algo que será útil más adelante es distinguir que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_t = D_0\mathcal{J} + 2t\mathcal{J}^2 = d\mathcal{J} + \mathcal{A}\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} + 2t\mathcal{J}^2 = d\mathcal{J} + (t\mathcal{J} + \mathcal{A})\mathcal{J} + \mathcal{J}(t\mathcal{J} + \mathcal{A}) = D_t\mathcal{J}, \tag{B.2}$$

donde se definió $D_t\mathcal{J} \equiv d\mathcal{J} + \mathcal{A}_t\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A}_t$ para posterior conveniencia.

Se pasa a hacer ahora una variación general infinitesimal de (B.1), obteniendo

$$\delta\mathcal{T}_{2n+1} = (n+1) \int_0^1 dt \left(< \delta\mathcal{J}\mathcal{F}^n > + < n\mathcal{F}^{n-1}\delta\mathcal{F}_t > \right).$$

Ahora, por un lado $\delta\mathcal{F}_t = d\delta\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t\delta\mathcal{A}_t + \delta\mathcal{A}_t\mathcal{A}_t = D_t(\delta\mathcal{A}_t)$. Por otro lado,

$$D_t(\mathcal{J}\mathcal{F}_t^{n-1}\delta\mathcal{A}_t) = D_t(\mathcal{J})\mathcal{F}_t^{n-1}\delta\mathcal{A}_t - \mathcal{J}\mathcal{F}_t^{n-1}D_t(\delta\mathcal{A}_t) = \frac{d\mathcal{F}_t}{dt}\mathcal{F}_t^{n-1}D_t(\delta\mathcal{A}_t),$$

donde en la primera igualdad se utilizó $D_t\mathcal{F}_t = 0$ y en la segunda que $D_t\mathcal{J}_t = \frac{d\mathcal{F}_t}{dt}$ como se mostró más arriba. Usando además que $\delta\mathcal{A}_t = t\mathcal{J} + \mathcal{A}_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}_{2n+1} &= (n+1)\int_0^1 dt \left(< (\mathcal{F}_t + tn\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}\mathcal{F}_t^{n-1})\delta\mathcal{J} > + < n\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}\mathcal{F}_t^{n-1}\delta\mathcal{A}_0 > \right) \\ & \quad -n(n+1)d\int_0^1 dt < \mathcal{J}\mathcal{F}^{n-1}\delta\mathcal{A}_t > . \end{aligned}$$

Observando que $\mathcal{F}_t^n + tn\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}\mathcal{F}_t^{n-1} = \frac{d}{dt}(t\mathcal{F}_t^n)$ y que $n\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}\mathcal{F}^{n-1} = \frac{d\mathcal{F}_t^n}{dt}$, la primera integral en t se puede calcular dando la variación

$$\delta\mathcal{T}_{2n-1} = n < \mathcal{F}_1^{n-1}\delta\mathcal{A}_1 > -n < \mathcal{F}_0^{n-1}\delta\mathcal{A}_0 > -n(n-1)d\int_0^1 dt < \mathcal{J}\mathcal{F}_t^{n-2}\delta\mathcal{A}_t > . \tag{B.3}$$

La expresión (B.3) es la buscada para la variación de una forma de transgresión y será utilizada en este trabajo.

Apéndice C

Teorema de Noether

En este apéndice se va a mostrar cómo obtener una expresión para una carga conservada debido a la simetría del lagrangiano bajo una cierta transformación, conocido como teorema de Noether. Se presentará de una forma particular, de manera que sea conveniente para este trabajo. Como aquí se trabaja la densidad lagrangiana como una forma diferencial, es conveniente entonces dar una versión del teorema cuando uno trata con formas diferenciales [6, 7].

Dada una forma n-forma diferencial α_n sobre una variedad M, si las coordenadas cambian infinitesimalmente como $\delta x^\mu = \xi^\mu$ (es decir, ξ^μ son las componentes de la dirección de la transformación) o como se dice una transformación por difeomorfismos, entonces la variación de la forma $\alpha_n(x)$ está dada por

$$\delta\alpha_n(x) = \alpha'_n(x) - \alpha_n(x) = -\mathfrak{L}_\xi \alpha_n.$$

Aquí $\mathfrak{L}_\xi$ denota la **derivada de Lie** respecto a la dirección dada por ξ. Para formas diferenciales, la derivada de Lie puede escribirse como [16]

$$\mathfrak{L}_\xi \alpha_n = \left(dI_\xi + I_\xi d\right)\alpha_n,$$

donde d es la derivada exterior ordinaria y I_ξ es la **derivada interior**. La derivada interior para $\alpha_n = \frac{1}{n!}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_n} dx^1 \ldots dx^n$ puede escribirse

$$I_\xi = \frac{1}{n!}\sum_{s=1}^{s=n} \xi^{\mu_s}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_s\ldots\mu_n}(-1)^{s-1} dx^1 \ldots d\hat{x}^{\mu_s} \ldots dx^n,$$

donde $d\hat{x}^{\mu_s}$ quiere decir que esa entrada está omitida. La derivada interior, al igual que la derivada exterior, es una anti-derivación en el sentido que

$$I_\xi\left(\alpha_n\beta_m\right) = I_\xi\alpha_n\beta_m + (-1)^n\alpha_n I_\xi\beta_m,$$

con α_n una n-forma y β_m una m-forma en M cualesquiera.

Se considera ahora una densidad lagrangiana dada por la forma diferencial $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, donde ϕ representa todos los campos dinámicos. Por lo visto más arriba, la variación de la lagrangiana bajo transformaciones generadas por ξ (por difeomorfismos) es

$$\delta\mathcal{L} = -d(I_\xi \mathcal{L}),$$

ya que $d\mathcal{L} = 0$ porque $\mathcal{L}$ es una D-forma en una variedad de dimensión D. Si ahora se generaliza a una transformación por difeomorfismos más una transformación que deja a la lagrangiana cuasi-invariante (o sea, que $\mathcal{L}$ cambie por una derivada total como por ejemplo, el caso de las transformaciones gauge para una forma de CS), se tiene

$$\delta\mathcal{L} = d\Omega - d(I_\xi \mathcal{L}). \tag{C.1}$$

En la ecuación anterior, la primera derivada total proviene de la cuasi-invariancia y la segunda de los difeomorfismos. Por otro lado, el procedimiento que lleva a las ecuaciones de campo (EdC) de Euler-Lagrange da la variación de la lagrangiana como las ecuaciones de campo más un término de borde

$$\delta\mathcal{L} = (\mathrm{EdC})\delta\phi + d\Theta, \tag{C.2}$$

donde las $\delta\phi$ son infinitesimales y arbitrarias. A partir de (C.1) y (C.2) se tiene que, cuando valen las ecuaciones de campo,

$$d\left(\Omega - \Theta - I_\xi \mathcal{L}\right) = 0. \tag{C.3}$$

Es usual definir la **corriente de Noether** como

$$\star j = \Omega - \Theta - I_\xi \mathcal{L}. \tag{C.4}$$

Si se le agrega a la densidad lagrangiana un término de borde tal que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + dB$ entonces

$$\star j = \Omega - \Theta - I_\xi \mathcal{L} - I_\xi dB. \tag{C.5}$$

Tanto (C.4) y (C.5) permitirán hallar la masa de un agujero negro para el modelo utilizado en este trabajo.

Apéndice D

Agujero Negro en Dimensión $1+1$

Este apéndice tiene por objetivo mostrar de forma breve cómo la métrica (7.3)

$$ds^2 = -\tanh(\gamma r)^2 r dt^2 + dr^2, \tag{D.1}$$

puede llegar describir un agujero negro en dimensión $1+1$. El material contenido aquí puede verse más detalladamente en el trabajo de Edward Witten [81].

La métrica (D.1) parece tener una singularidad en $r = 0$. Pero esto, al igual que la métrica de Schwarzschild en $r = 2M$ (ver sección 3.3), puede ser una singularidad del sistema de coordenadas escogido y no una singularidad física ya que se puede calcular el escalar de curvatura R como

$$R = \frac{4\gamma^2}{\cosh(\gamma r)^2}. \tag{D.2}$$

Como puede verse R es completamente regular en $r = 0$. Sin embargo, que el escalar de curvatura sea regular en un punto no quiere decir que no exista una singularidad física en el mismo[1]. Para poder hacer un estudio más detallado, se puede hacer una continuación analítica por un procedimiento similar al utilizado con las coordenadas de Kruskal-Szekeres, vistas en la sección 3.3, para la métrica de Schwarzschild en cuatro dimensiones. Para esto se hallarán primero las geodésicas nulas, es decir aquellas cuya norma de su vector tangente es nula. Dichas geodésicas pueden obtenerse de la métrica (D.1) a partir de la condición

$$0 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -\tanh^2(\gamma r)\dot{t}^2 + \dot{r}^2,$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico de (D.1), k^μ las componentes del vector tangente a la geodésica nula y el punto es para denotar la derivada respecto

[1]De hecho, la singularidad es un concepto cuya definición no es trivial. Existen diferentes categorizaciones y no siempre es sencillo encontrar un método para hallarlas [24].

al parámetro de la geodésica. Esto implica, tomando ahora a t como parámetro de la geodésica,

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{\tanh(\gamma r)^2}. \tag{D.3}$$

Aquí se puede observar que (D.3) implica que el cono de luz es de 45 grados cuando $r \to \infty$ (el espacio es asintóticamente plano) y se va volviendo vertical cuando $r \to 0$ de forma similar a lo que pasa al acercarse al horizonte de sucesos en la métrica de Schwarzschild. Integrando la ecuación (D.3) queda

$$t = \pm\frac{\ln(\sinh(\gamma r))}{\gamma} + C,$$

donde C es una constante de integración. Se pueden definir ahora las coordenadas nulas (u, v) de la forma

$$\begin{aligned} u &= t - \frac{\ln(\sinh(\gamma r))}{\gamma}, \\ v &= t + \frac{\ln(\sinh(\gamma r))}{\gamma}. \end{aligned}$$

En las coordenadas (u, v) la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = \frac{-e^{\gamma(v-u)}}{\left[1 + e^{\gamma(v-u)}\right]} du dv.$$

Para poder extenderlas, se toman ahora otras coordenadas (U, V) de la forma

$$\begin{aligned} U &= -e^{-\gamma u}, \\ V &= e^{\gamma v}, \end{aligned}$$

entonces la métrica ds puede escribirse de manera simple como

$$ds^2 = \frac{-dUdV}{\gamma^2(1 - UV)}. \tag{D.4}$$

En coordenadas (U, V) se puede ver que

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma r) &= 1 - UV, \\ \sinh(\gamma r) &= -UV. \end{aligned}$$

Las coordenadas originales del espacio-tiempo (r, t) de la métrica (D.1) corresponden a la región $U < 0$ y $V > 0$. La singularidad de coordenadas en $r = 0$ corresponde a las dos rectas $U = 0$ y $V = 0$ y se ve que no existe esa singularidad en la métrica (D.4). La singularidad física se encuentra en la hipérbola $UV = 1$ ya que el escalar de curvatura explota según (D.2).

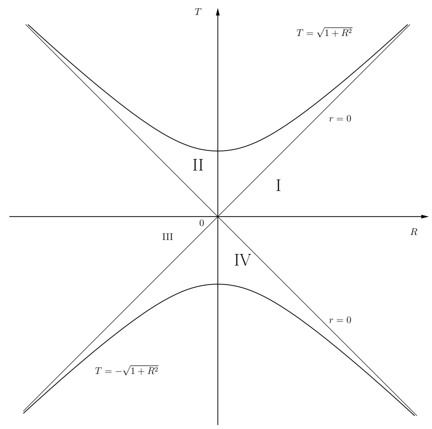

Figura D.1: Diagrama de la continuación de las coordenadas (r,t) a las coordenadas (R,T). La región I es la región explorada por la métrica (D.1). La singularidad física se encuentra en las hipérbolas $T = \pm\sqrt{1+R^2}$.

Se puede realizar otro cambio de coordenadas adicional para hacer más explícita la forma de la métrica de este agujero negro. Se toman las coordenadas (R,T) como

$$\begin{aligned} R &= \frac{V-U}{2}, \\ V &= \frac{V+U}{2}. \end{aligned}$$

La métrica (D.4) con estas coordenadas queda

$$ds^2 = \frac{-dT^2 + dR^2}{\gamma^2\left(1 - T^2 + R^2\right)}, \tag{D.5}$$

donde puede verse que es similar a la métrica de Minkowski con la coordenada T con signatura temporal y la coordenada R con signatura espacial. La diferencia con la métrica minkowskiana es el denominador que hace que (D.5) no esté bien definida en la hipérbola $T = \pm\sqrt{1+R^2}$, que es precisamente cuando $UV = 1$, es decir cuando el escalar de curvatura diverge. Similarmente a cuando se hace la continuación de las coordenadas de Schwarzschild a las coordenadas Kruskal-Szekeres, aparecen cuatro regiones bien diferenciadas como se ve en la figura D.1. La región I es la región explorada por las coordenadas (r,t) de la métrica (D.1). Como se muestra en la figura D.2, las curvas $t = cte$ son rectas que pasan por el origen que van disminuyendo el ángulo con el eje R a medida que t aumenta, mientras que las curvas $r = cte$ son hipérbolas que tienen por asíntotas las rectas que forman ± 45 grados con el eje R y pasan por el origen. Estas asíntotas son los casos extremos $r = 0, t = +\infty$ para el ángulo $+45$ grados y $r = 0, t = -\infty$ para el ángulo -45 grados.

Se va a escribir ahora la métrica (D.1) de una forma similar a la métrica de

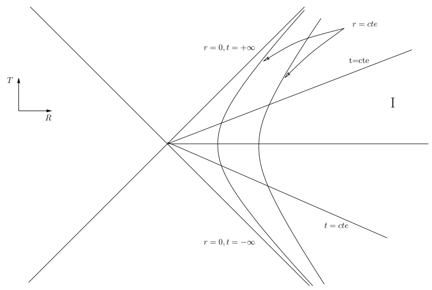

Figura D.2: Las curvas $t = cte$ son rectas que pasan por el origen, mientras que las curvas $r = cte$ son hipérbolas cuyas asíntotas son rectas que pasan por el origen y forman ± 45 grados con el eje R.

Schwarzschild

$$ds^2 = -f(x)dt^2 + \frac{dx^2}{f(x)}, \tag{D.6}$$

ya que será de utilidad en la sección 7.3 para hallar la temperatura del agujero negro estudiado en este trabajo. Para esto, a partir de la métrica de (D.1), se puede hacer el cambio de coordenadas

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{f(x')}},$$

lo que implica

$$f(x) = \tanh^2(\gamma r(x)) = \tanh^2\left(\gamma \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{f(x')}}\right).$$

Para resolver esta ecuación, se puede invertir la función tanh y derivar para obtener

$$\gamma = \frac{g(x)g'(x)}{(1 - g^2(x))} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-\ln(1 - g^2(x))}{2}\right),$$

con $g^2(x) \equiv f(x)$. Integrando esto último se puede obtener, tomando como cero la constante de integración, el resultado

$$g^2(x) = 1 - e^{-2\gamma x} = f(x).$$

Se puede ver que, con la constante elegida, la singularidad se encuentra en $x = 0$.

Apéndice E

Derivación de las Soluciones de Agujero Negro

En este apéndice se va a mostrar más o menos en detalle la derivación de las soluciones (7.9) y (7.10) de agujero negro para el modelo gWZW en $D = 2$.

Tomando la métrica (7.3), se tienen las relaciones (7.4) y (7.6) para el vielbein y la conexión de spin, respectivamente. Conviene recordar las relaciones (7.7) y (7.8) que permiten hallar A^a y F^a en función de las coordenadas. Con esto en mente, se pasa a escribir explícitamente las ecuaciones de campo (6.17) y (6.18). Se distinguen dos casos: $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$.

E.1. $\lambda \neq 0$

Se pueden escribir las ecuaciones de campo (6.17) para cada componente $a = 0, 1, 2$ y separar según dr y dt, lo que da un total de seis ecuaciones. Éstas son

$$
\begin{aligned}
(\alpha_a \alpha^a + 1)\left(\dot{\alpha^0} + \frac{\gamma\alpha^1}{\cosh^2(\gamma r)} + \tanh(\gamma r)\alpha^2\right) - \alpha^0(\alpha^1\dot{\alpha^1} + \alpha^2\dot{\alpha^2} - \alpha^0\dot{\alpha^0}) &= 0 \\
(\alpha_a \alpha^a + 1)\alpha^{0'} - \alpha^0(\alpha^1\alpha^{1'} + \alpha^2\alpha^{2'} - \alpha^0\alpha^{0'}) &= 0 \\
(\alpha_\mu \alpha^\mu + 1)\left(\dot{\alpha^1} + \frac{\gamma\alpha^0}{\cosh^2 r}\right) - \alpha^1(\alpha^1\dot{\alpha^1} + \alpha^2\dot{\alpha^2} - \alpha^0\dot{\alpha^0}) &= 0 \\
(\alpha_a \alpha^a + 1)(\alpha^{1'} + \alpha^2) - \alpha^1(\alpha^1\alpha^{1'} + \alpha^2\alpha^{2'} - \alpha^0\alpha^{0'}) &= 0 \\
(\alpha_a \alpha^a + 1)\left(\dot{\alpha^2} + \tanh(\gamma r)\alpha^0\right) - \alpha^2(\alpha^1\dot{\alpha^1} + \alpha^2\dot{\alpha^2} - \alpha^0\dot{\alpha^0}) &= 0 \\
(\alpha_a \alpha^a + 1)(\alpha^{2'} - \alpha^1) - \alpha^1(\alpha^1\alpha^{1'} + \alpha^2\alpha^{2'} - \alpha^0\alpha^{0'}) &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $\dot{\alpha^a} = \frac{\partial\alpha^a}{\partial t}$ y $\alpha^{a'} = \frac{\partial\alpha^\mu}{\partial r}$. Usando que se está en el caso $\lambda \neq 0$, la primera ecuación de campo (6.17) implica que $D\alpha^a = \frac{d\lambda}{\lambda}\alpha^a$, por lo tanto,

$$
(\alpha \times D\alpha)^a = \epsilon_{bcd}\eta^{da}\alpha^b D\alpha^c = \epsilon_{bcd}\eta^{da}\alpha^b \frac{d\lambda}{\lambda}\alpha^c = 0.
$$

Entonces, la segunda ecuación de campo (6.18) se reduce a

$$\lambda^2 F^a - \lambda(F \times \alpha)^a - (F.\alpha)\alpha^a = 0.$$

Utilizando (7.8) se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^2\alpha^0 + \sqrt{\alpha_a\alpha^a + 1}\alpha^1 &= 0 \\ \alpha^2\alpha^1 + \sqrt{\alpha_a\alpha^a + 1}\alpha^0 &= 0 \\ \lambda^2 - \alpha^2\alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando el programa Maple 12 no se consiguieron soluciones compatibles con las condiciones de que α^a debe ser real y que $\lambda \neq 0$.

E.2. $\lambda = 0$

Si $\lambda = 0$, entonces la primera ecuación de campo (6.17) se satisface directamente. La segunda ecuación de campo (6.18) se reduce en este caso a

$$-2(F.\alpha)\alpha^a + ((\alpha \times D\alpha) \times (\alpha \times D\alpha))^a = 0.$$

Usando que $(\alpha \times D\alpha)^a = \epsilon_{bcd}\eta^{da}\alpha^b D\alpha^c$ y que $((\alpha \times D\alpha) \times ((\alpha \times D\alpha))^a = \epsilon_{bcd}\eta^{da}(\alpha \times D\alpha)^b(\alpha \times D\alpha)^c$ se obtiene

$$\begin{aligned} (\alpha^0 D\alpha^1 - \alpha^1 D\alpha^0)(\alpha^2 D\alpha^0 - \alpha^0 D\alpha^2) - F^2\alpha^2\alpha^0 &= 0 \\ (\alpha^0 D\alpha^1 - \alpha^1 D\alpha^0)(\alpha^2 D\alpha^1 - \alpha^1 D\alpha^2) - F^2\alpha^2\alpha^1 &= 0 \\ (\alpha^2 D\alpha^1 - \alpha^1 D\alpha^2)(\alpha^2 D\alpha^0 - \alpha^0 D\alpha^2) - F^2\alpha^2\alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

De esta ecuación y de (7.7) y (7.8), se obtiene explícitamente el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2\alpha^0\tanh(r)}{2}\left(-\frac{2\gamma^2}{\cosh(\gamma r)^2} + 1\right) = \\ = \left(\alpha^0\dot{\alpha^1} + \frac{\gamma\alpha^0\alpha^0}{\cosh(\gamma r)^2} - \alpha^1\dot{\alpha^0} - \alpha^1\alpha^2\tanh(\gamma r) - \frac{\gamma\alpha^1\alpha^1}{\cosh(\gamma r)^2}\right) \times \\ \times(\alpha^2\alpha^{0\prime} - \alpha^0\alpha^{2\prime} + \alpha^0\alpha^1) - \\ -(\alpha^0\alpha^{1\prime} + \alpha^0\alpha^2 - \alpha^1\alpha^{0\prime}) \times \\ \times\left(\alpha^2\dot{\alpha^0} + \alpha^2\alpha^2\tanh(\gamma r) + \frac{\gamma\alpha^2\alpha^1}{\cosh(\gamma r)^2} - \alpha^0\dot{\alpha^2} - \alpha^0\alpha^0\tanh(\gamma r)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2\alpha^1\tanh(\gamma r)}{2}\left(-\frac{2\gamma^2}{\cosh(\gamma r)^2}+1\right) = \\
&= \left(\alpha^0\dot{\alpha^1}+\frac{\gamma\alpha^0\alpha^0}{\cosh(\gamma r)^2}-\alpha^1\dot{\alpha^0}-\alpha^1\alpha^2\tanh(\gamma r)-\frac{\gamma\alpha^1\alpha^1}{\cosh(\gamma r)^2}\right)\times \\
&\times(\alpha^2\alpha^{1'}+\alpha^2\alpha^2-\alpha^1\alpha^{2'}+\alpha^1\alpha^1)- \\
&-(\alpha^0\alpha1'+\alpha^0\alpha^2-\alpha^1\alpha^{0'})\left(\alpha^2\dot{\alpha^1}+\frac{\gamma\alpha^2\alpha^0}{\cosh(\gamma r)^2}-\alpha^1\dot{\alpha^2}-\alpha^1\alpha^0\tanh(\gamma r)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2\alpha^2\tanh(\gamma r)}{2}\left(-\frac{2\gamma^2}{\cosh(\gamma r)^2}+1\right) = \\
&= \left(\alpha^2\dot{\alpha^1}+\frac{\gamma\alpha^2\alpha^0}{\cosh(\gamma r)^2}-\alpha^1\dot{\alpha^2}-\alpha^1\alpha^0\tanh(\gamma r)\right)\times \\
&\times(\alpha^2\alpha^{0'}-\alpha^0\alpha^{2'}+\alpha^0\alpha^1)- \\
&-(\alpha^2\alpha^{1'}+\alpha^2\alpha^2-\alpha^1\alpha^{2'}+\alpha^1\alpha^1)\times \\
&\times\left(\alpha^2\dot{\alpha^0}+\alpha^2\alpha^2\tanh(\gamma r)+\frac{\gamma\alpha^2\alpha^1}{\cosh(\gamma r)^2}-\alpha^0\dot{\alpha^2}-\alpha^0\alpha^0\tanh(\gamma r)\right) \\
&(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2-(\alpha^0)^2+1=0,
\end{aligned}
$$

donde, como en el caso anterior, $\dot{\alpha^a} = \frac{\partial\alpha^a}{\partial t}$ y $\alpha^{a'} = \frac{\partial\alpha^\mu}{\partial r}$.

Estas ecuaciones no pudieron resolverse para un α^a genérico, pero asumiendo que son independientes del tiempo (agujero negro estático), y asumiendo que una de las componentes de α se anula, se tienen dos soluciones:

Si $\alpha^2 = 0$ y $\alpha^{0,1}(r,t) = \alpha^{0,1}(r)$, se tiene

$$\alpha^0 = \pm\sqrt{(\alpha^1)^2+1}\ ,\ \alpha^1 = \frac{C}{\tanh(\gamma r)} \tag{E.1}$$

donde C es una constante.

Si $\alpha^1 = 0$ y $\alpha^{0,2}(r,t) = \alpha^{0,2}(r)$, se tiene

$$\alpha^0 = \pm\sqrt{(\alpha^2)^2+1}\ ,\ \alpha^2 = D\cosh(\gamma r)e^{\frac{1}{8\gamma^2}\cosh(2\gamma r)} \tag{E.2}$$

donde D es una constante.

Las soluciones (E.1) y (E.2) son justamente las soluciones (7.9) y (7.10), respectivamente.

Bibliografía

[1] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*; *String Theory, Vol. 2: Superstring Theory and beyond*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1998.

[2] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory, Vol. 1*; *Superstring Theory Vol. 2*, Cambridge University Press, 1987.

[3] C. Rovelli, *Loop Quantum Gravity: The First Twenty Years*, arXiv:hep-th/10124707v4, 2011.

[4] R. Gambini, J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, Cambridge University Press, 1996.

[5] J. Zanelli, *Lecture Notes on Chern-Simons (Super-)Gravities*. arXiv:hep-th/0502193v4, 2008.

[6] P. Mora, *Formas de Transgresión como Principio Unificador en Teoría de Campos*. Ph. D. Thesis, Universidad de la República, Uruguay, (2003), [arXiv: hep-th/0512255].

[7] P. Mora, R. Olea, R. Troncoso, J. Zanelli, *Transgression forms and extensions of Chern-Simons gauge theories*, J. High Energy Phys. 0602, 067 (2006), [arXiv: hep-th/0601081]

[8] T. Kaluza, *On the Problem of Unity in Physics*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1 966-972, 1921.

[9] O. Klein, *Quantum Theory and Five-dimensionalTtheory of Relativity*, Z. Phys. 37, 895-906, 1926.

[10] J. Wess, B. Zumino, *Consequences of Anomalous Ward Identities*, Phys. Lett. B37, 95-97, 1971.

[11] E. Witten, *Global Aspects of Current Algebra*, Nucl. Phys. B223, 422-432, 1983.

[12] A. Anabalón, S. Willison, J. Zanelli, *General Relativity From a gauged WZW Term*, Phys. Rev. D75, 024009, 2007.

[13] A. Anabalón, S. Willison, J. Zanelli, *The Universe as Topological Defect*, Phys. Rev. D77, 044019, 2008.

[14] J. L. Kelley, *General Topology*. Graduate Text in Mathematics, Springer, 1975.

[15] J. Munkres, *Topology*. Second Edition Prentice Hall, 2000.

[16] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Graduate students series in Physics, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991.

[17] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston, Second Printing, 1993.

[18] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[19] L.A. Santaló, *Vectores y Tensores*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Tercera Edición, 1964.

[20] T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson, *Gravitation, Gauge theories and Differential Geometry*, Phys. Rep. 66 N6, (1980) 213-393.

[21] C.W. Misner, K.S Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, New York, 1973.

[22] J.J. Callahan, *The Geometry of Spacetime*, Springer-Verlag New York Inc., 2000.

[23] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, 1994.

[24] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1994.

[25] S. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, 2004.

[26] A. Einstein, *On the Electrodynamics of Moving Bodies*. Translation by Megh Nad Saha in The Principle of Relativity: Original Papers by A. Einstein and H. Minkowski, University of Calcutta, 1920, pp. 1-34.

[27] R.M. Eisberg, *Foundamentals of Modern Physics*, John Wesley & Sons Inc, 1963.

[28] R. Resnick, *Introduction to Special Relativity*, John Wesley & Sons Inc., 1964.

[29] E. Harrison, *Cosmology: The Science of the Universe*, Cambridge University Press, 2000.

[30] E. Hernández, *Álgebra y Geometría*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1994.

[31] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, 2002.

[32] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, 1995.

[33] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields II*, Cambridge University Press, 1996.

[34] R. Hermann, *Lie Groups for Physicist*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1966.

[35] S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.

[36] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications*, John Wiley & Sons, 1974.

[37] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981.

[38] J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*, Cambridge University Press, 1995.

[39] B. Zumino, *Chiral Anomalies and Differential Geometry*, Relativity, Groups and Topology II, Les Houches 1983, eds. B.S. DeWitt and R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984).

[40] S.S. Chern, J. Simons, *Characteristic Forms and Geometric Invariants*, The Annals of Mathematics, Second Series 99 (1), 48-69 (1974).

[41] A. Achúcarro, P.K. Townsend, *A Chern-Simons Action for Three-Dimensional Anti-de Sitter Supergravity Theories*, Phys. Lett. B180, 89 (1986).

[42] E. Witten, $(2+1)$-*Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl. Phys. B311, 46-78 (1988).

[43] A. H. Chamseddine, *Topological Gauge Theory of Gravity in Five and All Odd Dimensions*, Phys. Lett. B233, 291-294 (1989).

[44] A. H. Chamseddine, *Topological Gravity and Supergravity in Various Dimensions*, Nucl. Phys. B346, 213-234 (1990).

[45] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli *Lovelock-Born-Infeld Theory of Gravity*, presentado en J. J. Giambiagi Festschrift, La Plata, May 1990, edited by H. Falomir, R. RE. Gamboa, P. Leal and F. Schaposnik, World Scientific, Singapore (1991).

[46] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Dimensionally Continued Black Holes*, Phys. Rev. D49, 975-986 (1994), [gr-qc/9307033].

[47] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books Publishing L.L.C., 1995.

[48] J. Zanelli, *Quantization of the Gravitational Constant in Odd Dimensions*, Phys. Rev. D51, 490-492 (1995), [hep-th/9406202].

[49] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and its Generalizations*, J. Math. Phys. 12, 498-501, 1995.

[50] B. Zumino, *Gravitiy Theories in More than Four dimensions*, Phys. Rep. **137**, 109-114, 1986.

[51] C. Teitelboim, J. Zanelli, *Dimensionally Continued Topological Gravitation Theory in Hamiltonian Form*, Class. Quant. Grav. 4, L125, 1987.

[52] J. Crisóstomo, R. Troncoso, J. Zanelli, *Black Hole Scan*, Phys. Rev. D 62, 084013, 2000.

[53] B. Zwiebach, *Curvature Squared Terms and String Theories*, Phys. Lett. B156, 315-317, 1985.

[54] A. Madrones, J. Zanelli, *Lovelock-Cartan Theory of Gravity*, Class. and Quantum Grav. 8, 1545-1558, 1991.

[55] C.N. Yang, R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. 96, 191-195, 1954.

[56] R. Utiyama, *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, Phys. Rev. 101, 1597-1607, 1956.

[57] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons., 1974.

[58] R. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore (1995).

[59] S. Alder, W.A Bardeen, *Absence of Higher-Order Corrections in the Anomalous Axial-Vector Divergence Equation*, Phys. Rev. 182, 1517-1536 (1969).

[60] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K.J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[61] C. Kittel , *Física Térmica*, Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1973.

[62] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill Inc., 1965.

[63] R. Resnick, D. Halliday, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons Inc., 2011.

[64] K. Stelle, P. West, *Spontaneously Broken de Sitter Symetry and the Gravitational Holonomy Group*, Phys. Rev. D21, 1466-1488, 1980.

[65] E. Rodriguez, *Gravitación Invariante (A)dS en Altas Dimensiones*, Msc. Thesis, Universidad de Concepción, 2003.

[66] T. de Wit, *Domain-Walls and Gauged Supergravities*, Ph. D. Thesis, Universidad de Groningen, 2003.

[67] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York, 2008.

[68] J. A. Wheeler, *Hermann Weyl and the unity of knowledge*, American Scientist 74, 366-375, 1986.

[69] P. Mora, R. Olea, R. Troncoso, J. Zanelli, *Finite action principle for Chern-Simons AdS gravity*, J. High Energy Phys. 0406, 036 (2004), [arXiv: hep-th/0405267]

[70] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Physical Review D 15 (10): 2752. doi:10.1103/PhysRevD.15.2752, 1977.

[71] J. W. York, *Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation*, Physical Review Letters 28 (16), 1972.

[72] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press., 2003.

[73] J.D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*. Phys. Rev. D 7 (8): 2333-2346, 1973.

[74] J.M Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Comm. Math. Phys. 31 (2): 161-170, 1973.

[75] Y.A. Cengel, M.A. Boles, *Termodinámica*, Mc Graw Hill Interamericana de México, 1997.

[76] S. Hawking, *Black Hole Explosions?*, Nature 248 (5443): 30-31, 1974.

[77] E. Witten, *Black Holes and Quark Confinement*, Current Science Vol. 88, Number 12, 2001.

[78] K.A. Meissner, *Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity*, Class.Quant.Grav. 21, 5245-5252, 2004.

[79] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *The Black Hole in Three Dimensional Space Time*, Phys.Rev.Lett. 69, 1849-1851, 1992.

[80] C. Callan, S. Giddings, J. Harvey, A. Strominger, *Evanescent Black Holes*, Phys. Rev. D 45, R1005-R1009, 1992.

[81] E. Witten, *String Theory and Black Holes*, Phys. Rev. D 44, 314-324.

[82] J.I. Kapusta, *Finite-temperature Field Theory*, Cambridge Monograph on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1989.

[83] G. Gamow, *My World Line*, Viking Press, New York, 1970, p.150.

[84] H. Lu, Y. Pang, *On Hybrid (Topologically) Massive Gravity in Three Dimensions*, 2011, [ArXiv:1011.6212]

[85] H. Lu, C.N. Pope, *Critical Gravity in Four Dimensions*, 2011, [ArXiv:1101.1971]

[86] D.G. Boulware, G.T. Horowitz, A. Strominger, *Zero Energy Theorem for Scale Invariant Gravity*, Phys. Rev. Lett. 50, 1726-1729, 1983.

[87] J. Schwinger, *Gauge Invariance and Mass II*, Phys. Rev. D 128, 2425, 1962.

[88] P. Mora, P. Pais, S. Willison, *Gauged WZW Models For Space-time Groups and Gravitational Actions*, Phys. Rev. D 84 044058 (2011) [arXiv:hep-th/1107.0758].