

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY
Instituto de Física



Una interpretación de la mecánica cuántica basada en considerar un tiempo físico

T E S I S

Maestría en Física

Autor:

Lic. Luis Pedro García Pintos Barcia

Supervisor:

Dr. Rodolfo Gambini

25 de Agosto del 2011

IGUÁ 4225, FACULTAD DE CIENCIAS, MONTEVIDEO, URUGUAY.

Resumen

A más de cien años de los comienzos de la mecánica cuántica sus fundamentos no están al día de hoy comprendidos cabalmente. En particular, como ocurre el pasaje de un mundo cuántico a un mundo clásico ha dado lugar a largas discusiones. El problema está relacionado con la hipótesis del colapso de la función de onda en la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica. Esta hipótesis dice que en un proceso de medición el sistema pasa de una superposición cuántica de varios estados, cada uno asociado a distintos valores de las cantidades físicas del sistema (una situación no-clásica por excelencia), a uno solo de estos estados.

Veremos que una posible solución a este problema viene del hecho de que en ciertas situaciones la dinámica de un sistema es tal que las predicciones de la mecánica cuántica sin un colapso son idénticas a las predicciones de la mecánica cuántica si el sistema hubiera sufrido un colapso de la función de onda (denominaremos a esta situación *indecidibilidad*). Mostraremos que esto se debe a tres consideraciones: (i) la interacción del sistema con un ambiente, (ii) la necesidad de expresar la evolución en términos de una cantidad física para determinar el tiempo, y (iii) el considerar errores fundamentales en observables físicos.

El eliminar el postulado del colapso en favor del proceso antes mencionado dará lugar a una interpretación realista de la mecánica cuántica.

En el capítulo 1 contaremos más en detalle el problema de la medición en mecánica cuántica, resumiremos algunos resultados sobre la dinámica de sistemas cuánticos en contacto con un ambiente, y terminaremos estudiando los efectos de considerar un tiempo físico sobre la evolución de un sistema. El capítulo 2 introduce dos modelos cuya evolución lleva a un estado experimentalmente indistinguible del estado en el caso que el sistema sufrió un colapso de la función de onda y analiza también la relevancia de límites fundamentales en observables físicos. El capítulo 3 versa sobre la interpretación de la mecánica cuántica basada en el proceso estudiado. Terminaremos con conclusiones y un panorama de las perspectivas a futuro.

Índice general

1. Preámbulo	5
1.1. El problema de la medición	5
1.1.1. Medición de von Neumann	6
1.1.2. Eventos	7
1.2. El programa de decoherencia	8
1.2.1. Modelo espín-espín	9
1.2.2. Decoherencia no basta	10
1.3. Mecánica cuántica con relojes reales	12
1.3.1. La evolución en términos de un tiempo real	13
1.3.2. Limitaciones fundamentales en la medida de tiempo	15
2. Indecidibilidad	17
2.1. Indecidibilidad en el modelo espín-espín	17
2.1.1. Modelo espín-espín modificado	18
2.1.2. Evolución en términos del tiempo físico	22
2.1.3. Apéndice	25
2.2. Indecidibilidad en el modelo espín-bosón	26
2.2.1. El modelo	27
2.2.2. Evolución en términos del tiempo físico	29
2.3. FAPP	33
2.3.1. Límite fundamental en la medición de espines	33
2.3.2. Solución al problema FAPP en el modelo espín-espín	35
2.3.3. Solución al problema FAPP en el modelo espín-bosón	37
3. Una interpretación realista de la mecánica cuántica	39
3.1. Criterio para la producción de eventos	40
3.2. Actualización de la información	41
3.3. La Interpretación de Montevideo de la mecánica cuántica	42
Conclusiones y perspectivas	44
Bibliografía	47

Capítulo 1

Preámbulo

1.1. El problema de la medición

Repasemos los postulados de la mecánica cuántica según su formulación “ortodoxa”; por ejemplo podemos ir al capítulo III del Cohen [1], libro utilizado en la licenciatura en física. Ahí encontraremos los siguientes seis postulados:

1. A un tiempo t_0 fijo el estado de un sistema físico está definido por un ket $|\psi(t_0)\rangle$ perteneciente a un espacio de estados $\mathcal{E}$.
2. Toda cantidad física medible $\mathcal{A}$ está descrita por un operador A hermítico actuando en el espacio de estados $\mathcal{E}$; decimos que este operador es un observable.
3. Los únicos resultados posibles en una medición de una cantidad física $\mathcal{A}$ son los autovalores del operador correspondiente A .
4. Cuando se mide la cantidad física $\mathcal{A}$ sobre un sistema que se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ normalizado, la probabilidad $\mathcal{P}(a_n)$ de obtener el autovalor a_n del observable correspondiente A está dada por:

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2 \quad (1.1)$$

donde $|u_n\rangle$ es el autoestado de A con autovalor a_n ¹. A este postulado se lo conoce como regla de Born.

5. Si la medición de la cantidad física $\mathcal{A}$ ² sobre un sistema en el estado $|\psi\rangle$ da el resultado a_n , el estado del sistema inmediatamente después de la medida está dado por la proyección normalizada de $|\psi\rangle$ sobre el subespacio asociado con a_n . Es decir, si $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ es el proyector asociado a a_n , el sistema luego de la medida se encuentra en $P_n|\psi\rangle$ ³.
6. La evolución temporal del estado $|\psi(t)\rangle$ está dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.2)$$

donde $H(t)$ es el observable asociado al Hamiltoniano del sistema.

¹Considerando el caso más sencillo de observables de espectro discreto y sin degeneración.

²De ahora en más utilizaremos A para designar tanto la cantidad física como el observable correspondiente, y utilizaremos $\mathcal{A}$ para hacer referencia a un sistema físico.

³A menos de una constante de normalización.

Los postulados 1 al 4 son en general aceptados, y no presentan dificultades conceptuales ^{4,5}. El postulado 6 ha sido verificado en incontables experimentos y hasta hoy no se han encontrado violaciones a la ecuación de Schrödinger para los casos en los que se supone válida (sistemas cerrados no relativistas). Cualquier posible desviación que pudiera existir respecto a esta evolución debería ser muy pequeña, de otro modo se habría detectado en experimentos.

Resta ver el 5to postulado, origen de varios problemas conceptuales dentro de la teoría. Usualmente se le denomina postulado del colapso de la función de onda, o sencillamente *postulado del colapso*.

Por un lado, el salto instantáneo que se asume para el estado de un sistema en el momento en que se realiza una medición contrasta con la evolución unitaria impuesta por la ecuación de Schrödinger. Un problema mucho más profundo es el de saber en que instancias se debe aplicar el postulado. Aun cuando uno tome el concepto de medición como un concepto primitivo definido implícitamente por los axiomas, es necesario tener reglas que indiquen en que condiciones ocurre un colapso. Más aún, sería deseable un criterio que determine cuál es el observable medido dentro de la infinidad de posibilidades.

En la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica se asume la existencia de un mundo clásico que al interactuar con un sistema cuántico provoca un colapso. De esta forma, si un observador u aparato de medida, que se asumen clásicos, entran en contacto con un sistema cuántico el estado del último colapsa. Sin más detalles sobre la división cuántico-clásico esto no resuelve los problemas, y no se tiene un proceso de medición bien definido. Podemos por ejemplo pensar en el caso de una medición de espín por medio de un dispositivo Stern-Gerlach: la interacción del dispositivo es tal que el espín sale desviado en alguna dirección dependiendo de hacia donde apunta el espín. Si el estado inicial del espín es una superposición cuántica de “espín hacia arriba” y “espín hacia abajo” el estado luego de pasar por el Stern-Gerlach es una superposición cuántica de “desviación hacia arriba” y “desviación hacia abajo”. Generalmente se dice que cuando la partícula choca contra la pantalla al final del dispositivo se produce el colapso, y con cierta probabilidad se ve una mancha correspondiente a cada situación. Uno se pregunta en este ejemplo porque no habría de generarse una superposición cuántica de la pantalla también.

1.1.1. Medición de von Neumann

Consideremos un sistema $\mathcal{A}$ inicialmente en un estado $|v_0\rangle$ que interactúa con un sistema $\mathcal{S}$, inicialmente en un estado $|u_m\rangle$ autovector de algún observable O . Supongamos que la interacción entre los sistemas es tal que la evolución lleva

$$|u_m\rangle|v_0\rangle \longrightarrow |u_m\rangle|v_m\rangle. \quad (1.3)$$

Si consideramos ahora que inicialmente $\mathcal{S}$ se encuentra en una superposición cuántica, debido a la linealidad de la ecuación de Schrödinger tenemos

$$\sum_m a_m |u_m\rangle|v_0\rangle \longrightarrow \sum_m a_m |u_m\rangle|v_m\rangle. \quad (1.4)$$

El resultado es entonces que luego de alguna interacción entre dos sistemas el estado final está en general enredado.

⁴Se podría hacer una salvedad para el postulado 1, ya que hay posturas en las que $|\psi\rangle$ no se refiere al estado en que se encuentra el sistema sino a la máxima información que nosotros podemos tener sobre el estado del sistema.

⁵Adoptaremos una posición realista sobre la naturaleza de los estados.

El caso en que $\mathcal{A}$ es un aparato de medida se conoce como modelo de medición de von Neumann. A primera vista el resultado podría parecer satisfactorio, ya que se tiene una correlación entre cada posible estado del sistema $\mathcal{S}$ con algún estado del sistema $\mathcal{A}$. Es decir, si por ejemplo sabemos que el aparato de medida se encuentra en $|v_m\rangle$ podemos concluir que el sistema $\mathcal{S}$ se encuentra en $|u_m\rangle$.

Sin embargo, el estado dado por (1.4) nos dice que el sistema $\mathcal{A} + \mathcal{S}$ se encuentra en una superposición cuántica, por lo que no habría un resultado definitivo para la medición. El explicar como es que uno obtiene resultados definitivos, es decir como pasar de la interpretación de una *superposición cuántica*

$$|u_1\rangle|v_1\rangle \quad y \quad |u_2\rangle|v_2\rangle \quad y \quad \dots \quad (a)$$

a la interpretación de una *mezcla estadística perfecta*

$$|u_1\rangle|v_1\rangle \quad o \quad |u_2\rangle|v_2\rangle \quad o \quad \dots \quad (b)$$

es uno de los aspectos fundamentales del problema de la medida, y lo denominaremos el *problema de los resultados* (“problem of outcomes” en inglés). Por mezcla estadística perfecta (“total mixture”) nos referimos a una situación donde el sistema se encuentra en un estado determinado $|u_m\rangle|v_m\rangle$ con cierta probabilidad clásica a_m . Recordemos que cuando se tiene un estado como el obtenido en (1.4) la única interpretación válida es la (a), debido a la presencia de términos de interferencia. La “solución” que el postulado del colapso brinda a este problema es proyectar el estado final sobre el subespacio de uno de los posibles resultados, y así pasar de (a) a (b), pero como ya argumentamos no es satisfactoria, ni siquiera está bien definida; es un parche más que una solución.

Por otro lado encontramos el problema de la ambigüedad que existe sobre la expresión final del estado, ya que un estado puede en general expresarse en diferentes bases. Si por ejemplo consideramos estados de Bell de dos partículas, podemos expresarlos en la base de autoestados del operador de espín en la dirección x o en la dirección z :

$$\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+z| + |-\rangle\langle-z|) = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+x| + |-\rangle\langle-x|) \quad (1.5)$$

A este inconveniente lo denominaremos el *problema de la base puntero*. La solución consistiría en algún criterio que defina cual es la base en la que los resultados de mediciones se dan. Desde luego, el criterio debe ser consistente con las observaciones del mundo que nos rodea, es decir que debe ser capaz de explicar porque a escalas macroscópicas se observa un mundo clásico.

Por problema de la medición entenderemos tanto al problema de los resultados como al de la base puntero.

1.1.2. Eventos

Utilizaremos a menudo el concepto de *evento*. Es básicamente una generalización del concepto de medida para incluir la posibilidad de que observables puedan tomar valores aun cuando no ocurra un proceso de medición propiamente dicho, es decir, aun cuando no haya ninguna interacción con algún tipo de aparato de medida.

Diremos que ocurre un evento en el instante en que a un sistema $\mathcal{S}$ podamos asignarle un valor determinado para alguna cantidad física A . Entonces, en la interpretación ortodoxa, por ejemplo, el concepto de evento es el mismo que el de medición. Cuando ocurre una medición hay un colapso en la función de onda del sistema, y solo en ese instante se puede decir que el observable medido toma un valor determinado.

Si el observable A toma el autovalor a diremos que el evento consiste de una *propiedad* $\mathbb{P}_a$ (o alternativamente el sistema adquiere una propiedad $\mathbb{P}_a$) a la que asociaremos el proyector P_a .

En estos términos el problema de la medición se traduce a encontrar un criterio que permita definir cuando ocurre un evento (problema de los resultados) y cuales son las propiedades que los sistemas adquieren dentro de la infinidad de posibilidades que la mecánica cuántica nos da (problema de la base puntero).

1.2. El programa de decoherencia

A partir de la décadas 70 y 80 resurgió con fuerza la discusión acerca del problema de la medición, principalmente debido a nuevos resultados que son parte de lo que hoy se conoce como *programa de decoherencia* (ver por ejemplo los primeros trabajos de Zeh [2, 3] y Zurek [4, 5], o el review de Schlosshauer [6]).

La idea introducida es que en mecánica cuántica las interacciones con un ambiente⁶ cambian sustancialmente el comportamiento de un sistema debido al enredo que se genera. A diferencia de sistemas clásicos, donde los ambientes suelen despreciarse por no producir más que ruido sobre la evolución del sistema, aun una débil interacción con un ambiente puede modificar por completo las propiedades de un sistema cuántico.

Volvamos al esquema de medición de von Neumann visto en la sección anterior, dado por la ecuación (1.4), pero consideremos ahora una segunda instancia donde el aparato de medida interactúa con un ambiente $\mathcal{E}$

$$\left(\sum_m a_m |u_m\rangle \right) |v_0\rangle |e_0\rangle \longrightarrow \left(\sum_m a_m |u_m\rangle |v_m\rangle \right) |e_0\rangle \longrightarrow \left(\sum_m a_m |u_m\rangle |v_m\rangle |e_m\rangle \right), \quad (1.6)$$

donde $|e_m\rangle$ son los estados del ambiente asociados al estado del aparato $|v_m\rangle$, y $|e_0\rangle$ es el estado inicial.

En general nos interesa tan solo el comportamiento del sistema $\mathcal{S}$ y aparato de medida $\mathcal{A}$, que se puede determinar a partir de la matriz de densidad reducida. Esta permite calcular las probabilidades y valores esperados de observables que actúen sobre $\mathcal{A} + \mathcal{S}$.

A partir de la matriz de densidad total

$$\rho_{\mathcal{SA}\mathcal{E}} = \sum_{nm} a_n a_m^* |u_n\rangle |v_n\rangle \langle u_m| \langle v_m| \langle e_m|, \quad (1.7)$$

es fácil ver que la matriz de densidad reducida queda

$$\rho_{\mathcal{SA}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} (\rho_{\mathcal{SA}\mathcal{E}}) = \sum_{nm} a_n a_m^* |u_n\rangle |v_n\rangle \langle u_m| \langle v_m| \langle e_m| e_n\rangle. \quad (1.8)$$

Si $\langle e_m | e_n \rangle \neq 0$ esta matriz de densidad presenta términos de interferencia $|u_n\rangle |v_n\rangle \langle u_m| \langle v_m|$. El efecto de decoherencia inducida por el ambiente es justamente que, con cierta generalidad, la evolución lleva a que luego de un tiempo pequeño se cumple $\langle e_m | e_n \rangle \approx \delta_{nm}$. Cuando esto se cumpla términos de interferencia no se manifestaran en las probabilidades o valores esperados para observables actuando en $\mathcal{A} + \mathcal{S}$. De hecho la matriz de densidad reducida se

⁶Por ambiente nos referiremos a un sistema interactuando con algun sistema de interés. En general el ambiente contiene muchos mas grados de libertad que el sistema de interés (por ejemplo, un sistema con mucho mayor número de partículas). Consideraremos ambientes finitos.

aproxima en este caso a la matriz de densidad que uno tendría para una mezcla estadística perfecta

$$\rho_{\mathcal{SA}} = \sum_{nm} a_n a_m^* |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_m| \langle v_m| \langle e_m| e_n \rangle \approx \sum_n |a_n|^2 |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_n| \langle v_n|. \quad (1.9)$$

Hemos hecho una hipótesis implícita en la evolución (1.6): la interacción con el ambiente no perturba las correlaciones existentes entre el sistema y el aparato de medida. Es decir, el ambiente no provoca

$$|u_m\rangle|v_m\rangle \longrightarrow |u_m\rangle|v_n\rangle. \quad (1.10)$$

Esto es consistente con que el sistema $\mathcal{A}$ actúe como un buen aparato de medida para $\mathcal{S}$, reflejando el estado del último. Si la presencia del ambiente perturbara las correlaciones creadas estaríamos hablando de un aparato de medida mal diseñado. Esta idea fue utilizada por Zurek en [4] para definir la base puntero, en lo que denomino el *criterio de estabilidad*: la base puntero es la base en la que las correlaciones entre el aparato de medida y el sistema no son perturbadas por la interacción con el ambiente. Por ejemplo, en los casos en los que el hamiltoniano de interacción entre el aparato y ambiente es mucho mayor que los hamiltonianos libres de los sistemas una condición suficiente para la base puntero es que $[[v_n]\langle v_n|, H_{int}] = 0$.

Veremos a continuación uno de los primeros ejemplos donde se observó el efecto de decoherencia antes de discutir más en detalle las consecuencias prácticas y fundamentales de la decoherencia inducida por el ambiente.

1.2.1. Modelo espín-espín

Zurek analizó uno de los primeros modelos de decoherencia en [5], paradigmático por ser de fácil tratamiento y por permitir ilustrar el origen y alcance del efecto.

Consideremos el sistema $\mathcal{S}$ como un espín $1/2$, interactuando con un ambiente $\mathcal{E}$ compuesto por N espines $1/2$, y un hamiltoniano de interacción dado por

$$H_I = \hbar \sum_k g_k \sigma_z \otimes \sigma_z^k, \quad (1.11)$$

siendo σ_z y σ_z^k los operadores de espín en la dirección z actuando en el espacio de estados de $\mathcal{S}$ y del espín k respectivamente, y g_k una constante de acoplamiento.

Tomando el estado inicial como⁷

$$|\Psi(0)\rangle = (a|+\rangle + b|-\rangle) \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k|+\rangle_k + \beta_k|-\rangle_k), \quad (1.12)$$

es fácil resolver la ecuación de Schrodinger para obtener el estado del sistema al tiempo t ,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= a|+\rangle \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{ig_k t} |+\rangle_k + \beta_k e^{-ig_k t} |-\rangle_k \right) \\ &\quad + b|-\rangle \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{-ig_k t} |+\rangle_k + \beta_k e^{ig_k t} |-\rangle_k \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

⁷ Si se quisiera pensar el modelo en los mismos términos de la sección anterior podríamos agregar un espín que corresponda al sistema $\mathcal{A}$, y reemplazar $(a|+\rangle + b|-\rangle)$ por $(a|+\rangle_{\mathcal{S}}|+\rangle_{\mathcal{A}} + b|-\rangle_{\mathcal{S}}|-\rangle_{\mathcal{A}})$. Nada cambiaría en el análisis.

Escribiendo la matriz de densidad total $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ podemos tomar su traza sobre los grados de libertad del ambiente para obtener la matriz de densidad reducida

$$\rho_S(t) = |a|^2|+\rangle\langle+| + |b|^2|-\rangle\langle-| + z(t)ab^*|+\rangle\langle-| + z^*(t)a^*b|-\rangle\langle+|, \quad (1.14)$$

donde

$$z(t) = \prod_{k=1}^N [\cos(2g_k t) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin(2g_k t)]. \quad (1.15)$$

Esta función, que denominaremos “factor de decoherencia”, es en general una productoria de N factores menores a 1, por lo que si el número de espines en el ambiente es grande $z \approx 0$. La única forma de evitar esto sería tomando condiciones iniciales particulares de forma que cada término de la productoria valga 1, pero esta situación no es la que uno tiene en general cuando se habla de un ambiente, donde existen muchos grados de libertad.

En su trabajo Zurek vió que para ambientes genéricos el factor de decoherencia tiende a cero y permanece cerca de este valor, fluctuando con una dispersión promedio proporcional a $\sqrt{N}$. Por tratarse de una función multi-periódica, $z(t)$ presenta *recurrencias*, en las que la función se acerca a su valor inicial. Se puede ver que los tiempos de recurrencia son proporcionales a $N!$, por lo que para ambientes grandes $z(t)$ pasa la mayor parte del tiempo cerca de cero.

Se tiene entonces que el sistema S presenta términos de interferencia muy pequeños en la mayor parte de su evolución. Esto implica que el sistema se comporte tal como si se encontrara en una mezcla estadística perfecta, en la base puntero ($|+\rangle, |-\rangle$). Los resultados obtenidos son en general válidos para otros modelos, aunque los detalles pueden depender del hamiltoniano de interacción; por ejemplo el tiempo de recurrencia y el tiempo que le toma al sistema en perder la coherencia dependen de los detalles del acoplamiento.

1.2.2. Decoherencia no basta

Retomemos la discusión sobre las consecuencias de la decoherencia inducida por el ambiente. Como vimos los términos de interferencia en la matriz de densidad reducida del sistema son muy cercanos a cero, por lo que estamos en un caso donde la matriz se aproxima a la de una mezcla estadística perfecta:

$$\rho_{SA} = \sum_{nm} a_n a_m^* |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_m| \langle e_m| e_n \rangle \approx \sum_n |a_n|^2 |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_n| \langle v_n|. \quad (1.16)$$

La matriz

$$\sum_n |a_n|^2 |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_n| \langle v_n| \quad (1.17)$$

es la que uno asociaría a un sistema que se encuentra en uno de los posibles estados $|u_n\rangle\langle v_n|$, pero no se conoce con exactitud cual de estos; tan solo se conocen las probabilidades. Es tentador entonces interpretar que mediante este proceso hemos pasado de un caso en que el sistema se encuentra en una superposición cuántica a uno donde el sistema está en un estado definitivo, aunque no sabemos cual. De hecho, lo que ocurre cuando se aplica el postulado del colapso de la función de onda es muy similar, ya que se pasa de una matriz de densidad

$$\sum_{nm} a_n a_m^* |u_n\rangle\langle v_n| \langle u_m| \langle v_m| \quad (1.18)$$

a la matriz (1.17) (el pasaje de una superposición cuántica a una mezcla estadística perfecta, como comentamos en la sección 1.1.1). Entonces, todas las predicciones en base a la matriz

de densidad reducida luego de que ha habido decoherencia serán muy parecidas a las que obtendríamos si el sistema hubiera sufrido un colapso. Además, no tenemos más una ambigüedad en la base en la que esto ocurre, ya que la base queda definida a partir del criterio de estabilidad.

En esto radica la importancia práctica de la decoherencia. Debido a la dificultad de aislar sistemas de sus ambientes, en particular sistemas mesoscópicos y macroscópicos, es muy difícil observar efectos cuánticos salvo en situaciones de laboratorio. Esto explicaría entonces porque en el mundo macroscópico que nos rodea no se manifiestan efectos cuánticos, por ejemplo no se observan patrones de interferencia en la posición para partículas muy masivas, o gatos en superposiciones cuánticas. Este tipo de efectos serían muy difíciles de observar dado que la decoherencia suprimiría los términos de interferencia en la base puntero. La pregunta es si la decoherencia resuelve el problema de la medición introducido en la sección anterior, es decir si se puede encontrar sentido a una teoría cuántica que reemplace el postulado del colapso de la función de onda por la decoherencia inducida por el ambiente para explicar la ocurrencia de eventos.

El primer obstáculo que encontramos es que el efecto de decoherencia se basa en la matriz de densidad reducida, y en la similitud que esta adquiere con la matriz de densidad de una mezcla estadística perfecta. Pero un sencillo ejemplo muestra como esta identificación puede ser engañosa. Si consideramos un estado de Bell para dos espines $1/2$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle) \quad (1.19)$$

la matriz de densidad del sistema es

$$\rho = \frac{1}{2}(|++\rangle\langle++| + |++\rangle\langle--| + |--\rangle\langle++| + |--\rangle\langle--|). \quad (1.20)$$

La matriz de densidad reducida para cada uno de los dos espines queda exactamente igual a la correspondiente a una mezcla estadística perfecta,

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) \quad (1.21)$$

aun cuando el estado del sistema total claramente no corresponde a que los espines se encuentren en un estado definitivo $|+\rangle$ o $|-\rangle$. Esto implica que si uno intentara de alguna forma utilizar la decoherencia para definir la ocurrencia de eventos, en el mejor de los casos tendríamos un criterio relativo a la division en sub-sistemas que se haga.

El siguiente punto tiene que ver con el hecho de que la evolución del sistema cerrado $\mathcal{A} + \mathcal{S} + \mathcal{E}$ es unitaria, y por lo tanto en principio reversible⁸. Esto implica que la información de que el sistema total se encuentra en una superposición cuántica no se pierde, podemos decir que “*la información está*”. Este hecho se manifiesta por ejemplo en la presencia de recurrencias que comentamos anteriormente: los términos de interferencia son chicos, y permanecen cercanos a cero durante la mayor parte de la evolución, pero vuelven a crecer en un tiempo $\tau_{\text{recurrencia}}$. Aun cuando este $\tau_{\text{recurrencia}}$ sea en general muy largo, la mera posibilidad de que las interferencias vuelvan a surgir impediría utilizar la decoherencia para definir la ocurrencia de eventos.

Otra posibilidad que permitiría verificar experimentalmente que *la información está* es la de utilizar observables globales actuando sobre el sistema total $\mathcal{A} + \mathcal{S} + \mathcal{E}$. d’Espagnat

⁸Estamos considerando ambientes finitos.

consideró en el caso del modelo espín-espín estudiado en la sección 1.2.1 el observable M dado por [7]

$$M = \sigma_x \bigotimes_k^N \sigma_x^k, \quad (1.22)$$

donde σ_x y σ_x^k son los observables de espín en la dirección x para el espín central $\mathcal{S}$ y el espín k del ambiente, respectivamente. Para el hamiltoniano de interacción considerado en el modelo se cumple $[M, H_I] = 0$, por lo que M es una cantidad conservada. Usando la expresión para el estado inicial se puede ver entonces que

$$\langle M \rangle(t) = \langle \Psi(0) | M | \Psi(0) \rangle = (ab^* + a^*b) \prod_k^N (\alpha_k \beta_k^* + \alpha_k^* \beta_k), \quad (1.23)$$

que es en general distinto de cero. Tomando por ejemplo $a = b = \alpha_k = \beta_k = 1/\sqrt{2}$ tendríamos $\langle M \rangle(t) = 1$. Pero si suponemos que el espín central $\mathcal{S}$ se encuentra en un estado determinado, por ejemplo $|+\rangle$, obtendríamos $\langle M \rangle = 0$ por ser M proporcional a σ_x . Por lo tanto el observable permitiría en principio distinguir entre la situación en que el sistema se encuentra en un estado definitivo y la situación en que *aparenta* estar en un estado definitivo tan solo por un efecto de decoherencia inducida por el ambiente. Podría llamar la atención que nos situemos en un caso tan particular, que nada tiene que ver con lo que uno usualmente toma como ambiente. La idea es mostrar que al menos en algún caso el observable permite verificar que la información está.

Por último está el hecho de que la decoherencia inducida por el ambiente implica que los términos de interferencia en la matriz de densidad reducida sean muy pequeños, pero estrictamente distintos de cero. Esto significa que en principio haciendo mediciones lo suficientemente precisas, y tomando ensambles lo suficientemente grandes se podría verificar que un sistema no se encuentra en una mezcla estadística perfecta, sino en un estado muy aproximado a una mezcla estadística perfecta. La decoherencia puede entonces en el mejor de los casos dar una respuesta al problema de la medición que es desde un punto de vista práctico, pero no fundamental (“for all practical purposes” en inglés, o sencillamente *FAPP*).

1.3. Mecánica cuántica con relojes reales

En mecánica cuántica el tiempo es tratado de forma muy distinta a otras cantidades físicas. Tanto para la energía como la posición de una partícula por ejemplo tenemos operadores cuánticos asociados, con todo lo que ello implica (principios de incertidumbre, probabilidades de obtener distintos autovalores, etc). Sin embargo, cuando hablamos del estado de un sistema *al tiempo* t consideramos a t como un parámetro clásico; no es más que la variable que aparece en la ecuación de Schrödinger. Es interesante plantear que ocurre si no hacemos la idealización de considerar que existe un reloj clásico que indique el valor de t .

En una serie de trabajos Gambini, Porto y Pullin (GPP) estudiaron las distintas consecuencias provenientes de expresar la evolución de sistemas cuánticos completamente en termino de cantidades físicas susceptibles a ser medidas[8, 9, 10]. Resumiremos las ideas en esta sección.

1.3.1. La evolución en términos de un tiempo real

Consideremos algún sistema físico de interés $\mathcal{S}$, y algún sistema $\mathcal{R}$ que actuará como reloj. $\mathcal{R}$ debe ser algún sistema que evolucione de forma tal que algún observable $\hat{T}$ ⁹ permita determinar, al menos de forma aproximada, el pasaje del tiempo ideal t . Por ejemplo, la dirección de un espín precesando en un campo magnético podría en principio servir para marcar el pasaje del tiempo.

La idea es re-expresar la física en función de la cantidad observable T en lugar del parámetro ideal t . Siguiendo los trabajos de GPP nos concentramos en la probabilidad de que algún observable $\hat{O}$ del sistema tome un valor en un entorno de O_0 dado que el observable temporal $\hat{T}$ toma un valor en un entorno de T_0 :

$$\mathcal{P}(O \in [O_0 - \Delta O, O_0 + \Delta O] | T \in [T_0 - \Delta T, T_0 + \Delta T]) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_O P_T \rho(t) P_T) dt}{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_T \rho(t)) dt} \quad (1.24)$$

donde

$$P_{O_0} = \int_{O_0 - \Delta O}^{O_0 + \Delta O} \sum_j |O, j\rangle \langle O, j| dO \quad (1.25)$$

y

$$P_{T_0} = \int_{T_0 - \Delta T}^{T_0 + \Delta T} \sum_k |T, k\rangle \langle T, k| dT \quad (1.26)$$

son los proyectores sobre el subespacio correspondiente a entornos de O y T respectivamente. Los kets $|O, j\rangle$ y $|T, k\rangle$ son autoestados de los operadores $\hat{O}$ y $\hat{T}$ con autovalores O y T . Los índices j y k corresponden a los autovalores que completen conjuntos completos de operadores que conmuten con $\hat{O}$ y $\hat{T}$ respectivamente. Por último, $\rho(t)$ es la matriz de densidad del sistema total $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ al tiempo ideal t .

La idea detrás de la expresión (1.24) es imaginarse un ensemble de sistemas donde mediremos los observables $\hat{O}$ y $\hat{T}$. En cada realización del experimento se registra un valor de O y T para algún valor desconocido del parámetro aleatorio t . Luego de muchas realizaciones se cuenta cuantas veces se obtuvieron un par de valores de O y T dados, y se divide por el número total de realizaciones. Tenemos así la distribución de probabilidad arriba mencionada.

Supondremos que el reloj y el sistema están débilmente acoplados¹⁰, de forma que si inicialmente se encuentran en un estado producto su estado al tiempo t será $\rho_{\text{sis}}(t) \otimes \rho_r(t)$, con ρ_{sis} y ρ_r la matriz de densidad para el sistema y reloj respectivamente. Además, por ser sistemas distintos se cumple $[P_T, P_O] = 0$. Podemos entonces escribir, usando la propiedad cíclica de la traza:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(O \in [O_0 \pm \Delta O] | T \in [T_0 \pm \Delta T]) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_O P_T \rho_{\text{sis}}(t) \otimes \rho_r(t)) dt}{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_T \rho_{\text{sis}}(t) \otimes \rho_r(t)) dt} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_O \rho_{\text{sis}}(t)) \text{Tr}(P_T \rho_r(t)) dt}{\int_{-\tau}^{\tau} \text{Tr}(P_T \rho_r(t)) \text{Tr}(\rho_{\text{sis}}(t)) dt}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

⁹Utilizaremos tan solo en esta sección la notación $\hat{T}$ para designar al observable, y T a un autovalor.

¹⁰A lo largo de esta tesis haremos esta hipótesis de independencia entre reloj y sistema, como una primera aproximación. Es importante recordar, sin embargo, que este no es siempre el caso, y que en ciertas instancias el efecto del sistema sobre el reloj podría tener consecuencias importantes.

Si llamamos $\mathcal{P}_t(T)$ a la probabilidad de que el reloj indique T al tiempo t

$$\mathcal{P}_t(T) = \frac{\text{Tr}(P_T \rho_r(t))}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(P_T \rho_r(t)) dt} \quad (1.28)$$

la expresión queda

$$\mathcal{P}(O \in [O_0 \pm \Delta O] | T \in [T_0 \pm \Delta T]) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(P_O \rho_{\text{sis}}(t)) \mathcal{P}_t(T) dt \quad (1.29)$$

$$= \text{Tr}\left(P_O \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\text{sis}}(t) \mathcal{P}_t(T) dt\right) \quad (1.30)$$

Definiendo la matriz de densidad efectiva $\rho(T)$ como (eliminamos el subíndice “sis” ya que finalmente es el único en el que estaremos interesados):

$$\rho(T) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\text{sis}}(t) \mathcal{P}_t(T) dt \quad (1.31)$$

llegamos a la expresión final para la probabilidad condicional de que el observable del sistema caiga en un entorno de O si el observable del reloj cae en un entorno de T

$$\mathcal{P}(O \in [O_0 \pm \Delta a] | T \in [T_0 \pm \Delta T]) = \text{Tr}(P_O \rho(T)). \quad (1.32)$$

La expresión a la que llegamos es la usual para el calculo de probabilidades, reemplazando la matriz de densidad al tiempo ideal t por la matriz de densidad efectiva $\rho(T)$, que da las probabilidades condicionadas a un valor del tiempo T del reloj dado.

Es fácil ver que si el reloj se comporta de forma clásica se recupera el resultado usual, ya que este caso correspondería a una distribución de probabilidad para el reloj $\mathcal{P}_t(T)$ dada por una delta de Dirac. Supongamos en vez que el reloj se comporta de forma semiclásica, tomando un desarrollo de la forma:

$$\mathcal{P}_t(T) \approx \delta(T - t) + \alpha(T) \delta'(T - t) + \beta(T) \delta''(T - t) + \dots, \quad (1.33)$$

donde el primer coeficiente debe ser 1 para asegurar la normalización de la distribución de probabilidad. Si pedimos además que la distribución sea simétrica en torno a un valor de t tenemos que $\alpha(T) = 0$. El coeficiente β esta relacionado con la dispersión de la distribución.

Si la matriz de densidad del sistema ρ_{sis} cumple la ecuación de Schrödinger con un Hamiltoniano H que supondremos independiente del tiempo, y reemplazamos la distribución de probabilidad (1.33) en la expresión para la matriz de densidad efectiva (1.31) obtenemos

$$\rho(T) \approx \rho_{\text{sis}}(T) - \beta(T) [H, [\rho_{\text{sis}}(T)]]. \quad (1.34)$$

Derivando la expresión anterior y despreciando términos cuadráticos en β se puede llegar a la ecuación de evolución de la matriz de densidad efectiva $\rho(T)$:

$$\frac{\partial}{\partial T} \rho(T) = i[\rho(T), H] - \sigma(T) [H, [\rho(T)]], \quad (1.35)$$

donde $\sigma(T) \equiv \frac{\partial \beta}{\partial T}$. Es de notar que a ordenes mayores uno obtendría más conmutadores (ver [8] y [9] por más detalles y discusión de los resultados).

Este tipo de ecuaciones de evolución son muy comunes en el estudio de sistemas cuánticos abiertos y se conocen como ecuaciones de Lindblad [14]. El primer conmutador corresponde

sencillamente a la evolución unitaria mientras que el segundo produce pérdida de coherencia en la base de autoestados del Hamiltoniano. Esto podía preverse en base a la ecuación (1.31) para la matriz de densidad efectiva, ya que se tiene una combinación de la matriz de densidad evaluada en distintos valores del tiempo ideal t . Otros autores han llegado a conclusiones similares: incertezas en el tiempo provocan pérdida de coherencia[11, 12, 13].

Si suponemos por un instante que σ es constante se puede corroborar fácilmente que en la base de autoestados de energía los términos diagonales de la matriz de densidad no cambian, mientras que los términos de interferencia al tiempo T quedan

$$\rho_{nm}(T) = \rho_{nm}(0)e^{i\omega_{nm}T}e^{-\sigma\omega_{nm}^2T}, \quad (1.36)$$

donde n y m indican dos niveles de energía, y $\omega_{nm} = E_n - E_m$ es la frecuencia de Bohr entre los niveles.

1.3.2. Limitaciones fundamentales en la medida de tiempo

El efecto visto en la sección anterior surge de expresar la evolución en función de una coordenada temporal T medida por algún sistema físico, en lugar del parámetro clásico ideal t . El efecto depende por lo tanto de que tan bien refleja la cantidad T a t ; en particular el efecto desaparecería si uno pudiera utilizar algún reloj clásico tal que $\mathcal{P}_t(T) = \delta(T - t)$. Veremos ahora argumentos que indican que tal tipo de reloj no puede existir, y que por lo tanto existen limitaciones fundamentales a la precisión con la que uno puede medir el tiempo.

En una serie de trabajos Ng y van Dam encuentran límites fundamentales en la medición de distancias (ver [15] y referencias). Veremos a continuación como argumentos similares a los de Ng y van Dam dan incertezas en medidas temporales¹¹.

Tomemos un sistema de dos espejos paralelos a una distancia d , y un fotón que viaja de uno a otro. Si la distancia se conoce, la llegada del fotón a uno de los espejos sirve para medir un intervalo de tiempo $T = d/c$, y un error en la distancia se traducirá en un error en la medida de T . Por un lado, la mecánica cuántica implicará incertezas en la posición de los espejos. Si asumimos que la posición de uno de los espejos esta dada por una paquete de ondas gaussiano que evoluciona con la evolución libre¹² su dispersion a un tiempo t está dada por

$$\Delta x(t) = \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \delta^4}}, \quad (1.37)$$

donde δ es un parámetro que da el ancho inicial del paquete. Si minimizamos esta dispersión al tiempo T obtenemos $\delta^2 = 2\hbar T/m$, con lo que la dispersión mínima está dada por

$$\Delta x \approx \sqrt{\frac{\hbar T}{m}}. \quad (1.38)$$

Esta incerteza en la posición de los espejos implicará un error en la medida de tiempo

$$\Delta T_{MC} \approx \sqrt{\frac{\hbar T}{mc^2}}. \quad (1.39)$$

¹¹Otros autores han estudiado el problema [16, 17]. Por más que los resultados finales a veces difieren, los argumentos y las conclusiones son similares: mecánica cuántica más relatividad general imponen límites sobre que tan precisas pueden ser las medidas de distancias o de intervalos temporales.

¹²Es natural preguntarse si no puede mejorar la situación si intentamos evitar que el espejo se disperse, por ejemplo fijándolo a otro sistema. Ng y van Dam vieron en [18] que este no es el caso, en respuesta a una crítica de Baez y Olson[19]

La expresión anterior indica que la medición del tiempo es más precisa cuanto más masivos sean los espejos utilizados, pero aumentar la masa tendrá también un efecto en la medida de T de origen gravitacional, ya que la presencia de un campo gravitacional intenso afectará el intervalo de tiempo medido en

$$\Delta T_{RG} \approx \frac{Gm}{c^3}, \quad (1.40)$$

siendo G la constante gravitacional. Si buscamos el valor de m tal que el error total en el tiempo, $\Delta T_{MC} + \Delta T_{RG}$, sea mínimo obtenemos:

$$\Delta T_{RG} \approx \Delta T_{MC} \approx \left(\frac{G\hbar T}{c^5} \right)^{1/3} = T_P^{2/3} T^{1/3}, \quad (1.41)$$

donde el tiempo de Planck T_P se define

$$T_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}. \quad (1.42)$$

Concluimos entonces que existe un error fundamental en la medición de un intervalo de tiempo T de orden

$$\Delta T \approx T_P^{2/3} T^{1/3}. \quad (1.43)$$

GPP utilizaron este resultado para estimar el coeficiente $\beta(T)$ de la sección anterior, y así calcular la evolución de la matriz de densidad efectiva dada por la ecuación (1.35), obteniendo [8]

$$\rho_{nm}(T) = e^{i\omega_{nm}T} e^{-\omega_{nm}^2 T_P^{4/3} T^{2/3}}. \quad (1.44)$$

El efecto es muy pequeño, como era de esperarse, debido a la presencia del tiempo de Planck, $T_P \approx 10^{-43} s$. Igualmente en el próximo capítulo veremos como estos efectos pueden dar luz al problema de la medición.

Debido a la aproximación que realizamos para llegar a la ecuación de evolución de $\rho(T)$ esta expresión es estrictamente válida para tiempos cortos. Pero con toda generalidad siempre podemos volver a la ecuación que define la matriz de densidad efectiva (1.31)

$$\rho(T) \equiv \int \rho_{\text{sis}}(t) \mathcal{P}_t(T) dt. \quad (1.45)$$

Capítulo 2

Indecidibilidad

En este capítulo veremos como incertezas fundamentales en la medición de ciertos observables (por ejemplo incertezas en la medición de tiempo) pueden ser utilizados para resolver los inconvenientes que aparecen al utilizar el proceso de decoherencia inducida por el ambiente para reemplazar al postulado del colapso como criterio para la ocurrencia de eventos. Veremos entonces que una posible solución al problema de la medición surge de estas ideas, por medio de un efecto que denominaremos *indecidibilidad*.

Decimos que un sistema $\mathcal{A}$ en un estado ρ está en un estado *indecidible* si no existe ningún tipo de procedimiento físico que permita distinguir entre el sistema en el estado ρ y el sistema en el estado correspondiente a una mezcla estadística clásica ρ_C .

Por ρ_C nos referimos a la matriz de densidad luego de un colapso de la función de onda, con probabilidades que hacen referencia a que no tenemos certeza de en que estado se encuentra el sistema al final. Para que el concepto de indecidibilidad esté bien definido precisaremos algún criterio que diga en que base ocurre esto (es decir, la base en la que el sistema debería colapsar para obtener ρ_C).

El objetivo del capítulo es mostrar, en un par de modelos, como se da este proceso de *indecidibilidad*. Lo haremos por partes; en una primera instancia mostrando como el estado del sistema más ambiente tiende al estado ρ_C (secciones 2.1 y 2.2), y luego mostrando que incertezas fundamentales en observables implican indecidibilidad (sección 2.3).

2.1. Indecidibilidad en el modelo espín-espín

En el capítulo 1 repasamos el modelo de decoherencia espín-espín de Zurek, y vimos la existencia de un observable global M que permitiría en principio distinguir experimentalmente entre el caso en que el sistema central queda en un estado definitivo y el caso en que tan solo aparenta estar en un estado definido si se utilizan observables locales debido a un efecto de decoherencia inducida por el ambiente. Asimismo, vimos como la posibilidad de que surjan recurrencias también permitiría distinguir los dos casos. Como ya comentamos, esto tiene que ver con el hecho de que en el proceso de decoherencia *la información está* (haciendo referencia a que, puesto que la evolución del sistema más el ambiente es unitaria, la información de que el sistema se encuentra en una superposición no se pierde). Veremos en esta sección como el efecto considerado por GPP es suficiente para eliminar este problema.

El modelo de Zurek antes considerado tiene el inconveniente de ser un modelo “de juguete”, dado que la interacción entre espines no es en general proporcional a $\sigma_z^1 \sigma_z^2$ sino proporcional a $\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2$. Consideraremos en la próxima sección un modelo realista, y veremos como medir el observable M , para pasar a analizar el problema desde el punto de vista de GPP en la siguiente sección [20].

2.1.1. Modelo espín-espín modificado

Consideraremos el espín central $\mathcal{S}$ interactuando con algún espín k del ambiente $\mathcal{E}$, compuesto de N espines. El espín central lo suponemos dentro de una celda con un campo magnético B uniforme en la dirección z . Los espines del ambiente ingresan de a uno dentro de la celda, dentro de esta interactúan con $\mathcal{S}$, para luego salir de la celda y seguir su trayectoria. La idea general es que la interacción de los espines de $\mathcal{E}$ provocará decoherencia en el espín central, siendo la base puntero definida por la dirección del campo magnético, como veremos. Al tener los espines en un haz controlado, podríamos en principio intentar medir el observable M sobre estos al finalizar el experimento.

Tomaremos el hamiltoniano de interacción entre $\mathcal{S}$ y el espín k como

$$H_{\text{int}}^k = \hbar f_k(t) (\sigma_x \sigma_x^k + \sigma_y \sigma_y^k + \sigma_z \sigma_z^k), \quad (2.1)$$

donde $\hbar f_k(t)$ determina la magnitud del acoplamiento. Para espines con momentos magnéticos $\hbar\gamma_1$ y $\hbar\gamma_2$ el acoplamiento será

$$\tilde{f}_k(r) = \frac{\mu \hbar \gamma_1 \gamma_2}{r^3}, \quad (2.2)$$

siendo μ la permeabilidad magnética del vacío y r la distancia entre los espines. El acoplamiento dependerá en general del tiempo ya que la distancia r depende del vuelo de los espines ambientales dentro de la celda.

El hamiltoniano libre corresponde al de un campo magnético externo de magnitud B en la dirección z ¹

$$H_0^k = \hbar\gamma_1 B \sigma_z + \hbar\gamma_2 B \sigma_z^k, \quad (2.3)$$

La introducción del campo magnético en la dirección z servirá para asegurarnos de tener una base puntero dada por los autoestados de σ_z . Paz y Zurek estudiaron en detalle la base puntero que surge dependiendo de cual es el termino dominante en el hamiltoniano [21]. Veremos que asumir que el termino de interacción con el campo magnético es el dominante es suficiente para tener una base puntero en z .

Para encontrar la evolución del sistema pasaremos primero a la representación de interacción. Recordemos que para pasar a la representación de interacción un estado $|\Psi\rangle$ y operador O transforman de la forma

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi\rangle^i = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\Psi\rangle \quad (2.4)$$

$$O \longrightarrow O^i = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} O e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (2.5)$$

En esta los estados del sistema evolucionan con el operador de evolución U_{int}

$$|\Psi\rangle^i(t) = U_{\text{int}}(t) |\Psi\rangle(0) \quad (2.6)$$

con

$$U_{\text{int}}(t) = \mathcal{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_{\text{int}}^{k,i}(t) dt \right) \right], \quad (2.7)$$

¹ Acá σ_z y σ_z^k están multiplicados por la identidad en el espacio de Hilbert que corresponda. Incluimos la constante $\hbar$ para simplificar las expresiones posteriores.

donde $\mathcal{T}$ representa el producto temporalmente ordenado del desarrollo de la exponencial, y $H_{\text{int}}^{k,i}(t)$ es el hamiltoniano de interacción en la representación de interacción al tiempo t .

Necesitamos primero encontrar $H_{\text{int}}^{k,i}(t)$. Para esto hace falta ver como evoluciona por ejemplo $\sigma_x^i(t)$. Notemos que el hamiltoniano libre (2.3) contiene un término para el sistema central $\mathcal{S}$ y un termino para el espín k del ambiente. Solo el primero es relevante para la evolución de los operadores de espín sobre el sistema $\mathcal{S}$. Así obtenemos²

$$\sigma_x^i(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0^k t} \sigma_x e^{-\frac{i}{\hbar} H_0^k t} = e^{i\gamma_1 B \sigma_z t} \sigma_x e^{-i\gamma_1 B \sigma_z t} \quad (2.8)$$

y desarrollando la exponencial

$$\begin{aligned} \sigma_x^i(t) &= \cos^2(\gamma_1 B t) \sigma_x + i \sin(\gamma_1 B t) \cos(\gamma_1 B t) [\sigma_z, \sigma_x] + \sin^2(\gamma_1 B t) \sigma_z \sigma_x \sigma_z \\ &= \cos^2(\gamma_1 B t) \sigma_x - \sin^2(\gamma_1 B t) \sigma_x - 2 \sin(\gamma_1 B t) \cos(\gamma_1 B t) \sigma_y \end{aligned} \quad (2.9)$$

Obtendríamos un resultado análogo para $\sigma_y^i(t)$, mientras que $\sigma_z^i(t)$ es más sencillo ya que conmuta con H_0^k . Así obtenemos los tres operadores de espín actuando sobre el sistema $\mathcal{S}$ en la representación de interacción (y tenemos las mismas expresiones para los operadores sobre el espín k):

$$\sigma_x^i(t) = \cos(2\gamma_1 B t) \sigma_x - \sin(2\gamma_1 B t) \sigma_y \quad (2.10)$$

$$\sigma_y^i(t) = \cos(2\gamma_1 B t) \sigma_y + \sin(2\gamma_1 B t) \sigma_x \quad (2.11)$$

$$\sigma_z^i(t) = \sigma_z \quad (2.12)$$

Con estos resultados podemos escribir finalmente el hamiltoniano de interacción. Planteando todos los factores, y utilizando una vez más relaciones trigonométricas obtenemos

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{k,i}(t) &= \hbar f_k \left(\sigma_x^i(t) \sigma_x^{k,i}(t) + \sigma_y^i(t) \sigma_y^{k,i}(t) + \sigma_z^i(t) \sigma_z^{k,i}(t) \right) \\ &= \hbar f_k \left(\cos \left(2(\gamma_1 - \gamma_2) B t \right) (\sigma_x \sigma_x^k + \sigma_y \sigma_y^k) + \sin \left(2(\gamma_1 - \gamma_2) B t \right) (\sigma_x \sigma_y^k - \sigma_y \sigma_x^k) + \sigma_z \sigma_z^k \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definiendo las cantidades

$$\begin{aligned} I_1^k(t) &= \int_0^t f_k(t') \cos \left(2(\gamma_1 - \gamma_2) B t' \right) dt' \\ I_2^k(t) &= \int_0^t f_k(t') \sin \left(2(\gamma_1 - \gamma_2) B t' \right) dt' \end{aligned} \quad (2.14)$$

llegamos a la expresión para el operador de evolución

$$\begin{aligned} U_{\text{int}}(t) &= \mathcal{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_{\text{int}}^{k,i}(t) dt \right) \right] \\ &= \mathcal{T} \left[\exp \left(-i I_1^k(t) (\sigma_x \sigma_x^k + \sigma_y \sigma_y^k) - i I_2^k(t) (\sigma_x \sigma_y^k - \sigma_y \sigma_x^k) - i \int_0^t f_k(t') dt' \sigma_z \sigma_z^k \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

²Se puede chequear fácilmente utilizando que las matrices de Pauli cumplen:

$$\begin{aligned} [\sigma_a, \sigma_b] &= 2i\epsilon_{abc} \sigma_c \\ \sigma_a \sigma_b &= i\epsilon_{abc} \sigma_c, \quad a \neq b \\ \sigma_a \sigma_a &= I \quad (I \text{ es el operador identidad}) \end{aligned}$$

Como dijimos antes, la interacción con el campo magnético debe ser dominante para asegurarnos una base puntero en la dirección z . Haremos la hipótesis además de que el acoplamiento f_k varía poco en las integrales I_i^k . Esto, más suponer que el campo magnético es dominante

$$f_k \ll |B(\gamma_1 - \gamma_2)| \quad (2.16)$$

permite asegurarnos que

$$\int_0^t f_k(t') dt' \gg (I_1^k(t), I_2^k(t)), \quad (2.17)$$

ya que tendremos por ejemplo

$$\begin{aligned} \int_0^t f_k(t') \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)Bt') dt' &\approx f_k \int_0^t \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)Bt') dt' \\ &\approx \frac{f_k}{2(\gamma_1 - \gamma_2)B} \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2)Bt') \Big|_0^t \approx 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde utilizamos (2.16) en el último paso. De hecho, eliminar los factores de tipo $\sigma_x \sigma_x^k$ o $\sigma_y \sigma_y^k$ es la forma de tener una base puntero en z , ya que términos de este estilo en el operador de evolución desarmarían las correlaciones entre sistema y ambiente (ver el apéndice 2.1.3 al final de esta sección).

Así el operador de evolución se simplifica, ya que solo hay un termino en la exponencial, y el producto temporalmente ordenado deja de jugar un papel,

$$U_{\text{int}}(t) = \exp \left(-i \int_0^t f_k(t') dt' \sigma_z \sigma_z^k \right). \quad (2.19)$$

Podemos ahora ver como actúa sobre el estado inicial

$$|\Psi(0)\rangle = (a|+\rangle + b|-\rangle)(\alpha_k|+\rangle_k + \beta_k|-\rangle_k). \quad (2.20)$$

Para encontrar la evolución en la representación de interacción multiplicamos por el operador de evolución arriba obtenido,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle^i &= a|+\rangle \left(\alpha_k e^{-i \int_0^t f_k(t') dt'} |+\rangle_k + \beta_k e^{i \int_0^t f_k(t') dt'} |-\rangle_k \right) \\ &+ b|-\rangle \left(\alpha_k e^{i \int_0^t f_k(t') dt'} |+\rangle_k + \beta_k e^{-i \int_0^t f_k(t') dt'} |-\rangle_k \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para volver a la representación de Schrödinger multiplicamos el estado en la representación de interacción por $e^{-\frac{i}{\hbar} H_0^k t}$, y obtenemos

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= a e^{-i\gamma_1 B t} |+\rangle \left(\alpha_k e^{-i \int_0^t f_k(t') dt'} e^{-i\gamma_2 B t} |+\rangle_k + \beta_k e^{i \int_0^t f_k(t') dt'} e^{i\gamma_2 B t} |-\rangle_k \right) \\ &+ b e^{i\gamma_1 B t} |-\rangle \left(\alpha_k e^{i \int_0^t f_k(t') dt'} e^{-i\gamma_2 B t} |+\rangle_k + \beta_k e^{-i \int_0^t f_k(t') dt'} e^{i\gamma_2 B t} |-\rangle_k \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Este fue el efecto de la interacción con solo un espín k del ambiente. Si pensamos que el pasaje de cada espín por la celda dura un tiempo τ , y que solo un espín se encuentra dentro

de la celda a la vez, tenemos que el estado luego del pasaje de N espines es:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle = & \\
a|+\rangle \bigotimes_{k=1}^N & \left(\alpha_k e^{-i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{-i\gamma_2 B\tau} e^{-i\gamma_1 B\tau} |+\rangle_k + \beta_k e^{i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{i\gamma_2 B\tau} e^{-i\gamma_1 B\tau} |-\rangle_k \right) + \\
b|-\rangle \bigotimes_{k=1}^N & \left(\alpha_k e^{i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{-i\gamma_2 B\tau} e^{i\gamma_1 B\tau} |+\rangle_k + \beta_k e^{-i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{i\gamma_2 B\tau} e^{i\gamma_1 B\tau} |-\rangle_k \right). \quad (2.23)
\end{aligned}$$

El resultado es muy similar al obtenido en el modelo de Zurek visto en la sección (1.2.1) salvo por las exponenciales debidas a la evolución del hamiltoniano libre, y por las integrales de la función de acoplamiento, que dependerán de la trayectoria de los espines del ambiente dentro de la celda.

Definiendo los estados del ambiente

$$\begin{aligned}
|A\rangle &= \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{-i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{-iB\Gamma+\tau} |+\rangle_k + \beta_k e^{i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{-iB\Gamma-\tau} |-\rangle_k \right) \\
|B\rangle &= \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{iB\Gamma-\tau} |+\rangle_k + \beta_k e^{-i \int_0^\tau f_k(t') dt'} e^{iB\Gamma+\tau} |-\rangle_k \right), \quad (2.24)
\end{aligned}$$

con $\Gamma_\pm = \gamma_1 \pm \gamma_2$, tenemos que el estado final es

$$|\Psi\rangle = a|+\rangle|A\rangle + b|-\rangle|B\rangle. \quad (2.25)$$

La matriz de densidad reducida del sistema $\mathcal{S}$ queda

$$\rho_{\mathcal{S}} = |a|^2 |+\rangle\langle+| \langle A|A\rangle + ab^* |+\rangle\langle-| \langle B|A\rangle + a^* b |-\rangle\langle+| \langle A|B\rangle + |b|^2 |-\rangle\langle-| \langle B|B\rangle. \quad (2.26)$$

Se puede chequear fácilmente que

$$\begin{aligned}
\langle A|A\rangle &= \langle B|B\rangle = 1 \\
\langle A|B\rangle &= e^{2iNB\gamma_1\tau} \prod_{k=1}^N \left(|\alpha_k|^2 e^{-2i \int_0^\tau f_k(t') dt'} + |\beta_k|^2 e^{2i \int_0^\tau f_k(t') dt'} \right). \quad (2.27)
\end{aligned}$$

El producto $\langle A|B\rangle$ es lo que denominamos factor de decoherencia z en el modelo de Zurek, y en este caso da muy similar,

$$z = e^{2iNB\gamma_1\tau} \prod_{k=1}^N \left[\cos \left(2 \int_0^\tau f_k(t') dt' \right) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin \left(2 \int_0^\tau f_k(t') dt' \right) \right], \quad (2.28)$$

y sera muy pequeña por los mismos argumentos que antes. Básicamente si las condiciones iniciales de los espines de $\mathcal{E}$ corresponden a las de un ambiente (por ejemplo, no están polarizados), y el pasaje de los espines por la celda no esta ajustado de forma que cada factor de la productoria valga 1. Es necesario también exigir que la interacción con los espines del ambiente no sea despreciable, de otra forma el seno en la expresión daría cero, el coseno daría uno, y no tendríamos $z \approx 0$. A esta condición la expresaremos:

$$\left| \int_0^\tau f_k(t') dt' \right| \gtrsim 1. \quad (2.29)$$

Podemos ahora calcular, con el estado final obtenido, el valor esperado del observable de d'Espagnat $M = \sigma_x \otimes_k \sigma_x^k$:

$$\langle M \rangle = \left(ab^* e^{-2iNB\gamma_1\tau} + a^* b e^{2iNB\gamma_1\tau} \right) \prod_k^N \left(\alpha_k \beta_k^* e^{-2iB\gamma_2\tau} + \alpha_k^* \beta_k e^{2iB\gamma_2\tau} \right). \quad (2.30)$$

Una vez más, la diferencia con el resultado en el caso de Zurek se debe a la evolución debido a la presencia del campo magnético. Para ver que M permite distinguir si el espín se encuentra en un estado definitivo o no, tomemos las condiciones iniciales como $a = b = \alpha_k = \beta_k = 1/\sqrt{2}$, con lo que obtenemos

$$\langle M \rangle = \cos(2NB\gamma_1\tau) \prod_k^N \cos(2B\gamma_2\tau) = \cos(2NB\gamma_1\tau) \cos^N(2B\gamma_2\tau). \quad (2.31)$$

Dado un valor del tiempo de vuelo de los espines dentro de la celda τ , y un valor de la constante γ_2 (recordemos que $\hbar\gamma_2$ es el momento magnético de los espines ambientales) podemos tomar el valor del campo B tal que $\cos^N(2B\gamma_2\tau) = 1$, y de esta forma $\langle M \rangle = \cos(2NB\gamma_1\tau)$. Esto permitiría distinguir el caso en que el espín se encuentra en un estado definitivo $|+\rangle$ o $|-\rangle$, ya que en esos casos $\langle M \rangle = 0$.

Puede parecer raro que nos situemos en un caso tan particular como es el de elegir estas condiciones iniciales y parámetros. La idea es que buscamos si existe *algún* caso donde un experimento nos permita verificar que el estado final del sistema no corresponde al del espín apuntando hacia arriba ($|+\rangle$) o apuntando hacia abajo ($|-\rangle$). Si esto pasara un evento no ocurrió, y el sistema se encuentra en una superposición cuántica. El observable M permitiría chequear esto.

2.1.2. Evolución en términos del tiempo físico

Veamos como se modifica el análisis anterior al tener en cuenta los argumentos de GPP. Recordemos que en términos de un tiempo físico T la ecuación de evolución para la matriz de densidad esta dada por (1.35)

$$\frac{\partial}{\partial T} \rho(T) = i[\rho(T), H] - \sigma(T)[H, [\rho(T), H]], \quad (2.32)$$

Si utilizamos los límites fundamentales en las medidas de tiempo encontradas por Ng y van Dam vimos que en la base de autoestados de energía los términos de interferencia de la matriz de densidad al tiempo T están dadas por (1.44)

$$\rho_{nm}(T) = e^{i\omega_{nm}T} e^{-\omega_{nm}^2 T_P^{4/3} T^{2/3}}, \quad (2.33)$$

siendo ω_{nm} la frecuencia de Bohr entre los niveles.

En nuestro modelo el hamiltoniano libre es dominante. El efecto GPP es exponencial en los cuadrados de las diferencias de energías, por lo que el efecto mayor vendrá de los términos de evolución del campo magnético. Tendremos en cuenta solo la modificación debido a estos. Lo que importara sera entonces las diferencias de energías debido a la presencia del campo magnético de los distintos estados del espín S y un espín del ambiente k

$$|+\rangle|+\rangle_k, \quad |+\rangle|-\rangle_k, \quad |-\rangle|+\rangle_k, \quad |-\rangle|-\rangle_k, \quad (2.34)$$

que tienen las siguientes energías, respectivamente:

$$E_{++} = \hbar\Gamma_+ B, \quad E_{+-} = \hbar\Gamma_- B, \quad E_{-+} = -\hbar\Gamma_- B, \quad E_{--} = -\hbar\Gamma_+ B. \quad (2.35)$$

La corrección debido al efecto GPP sera entonces multiplicar los términos de interferencia por la exponencial $e^{-\omega_{nm}^2 T_P^{4/3} T^{2/3}}$, donde ω_{nm} deberá ser reemplazada por la frecuencia correspondiente.

Entonces, si consideramos la matriz de densidad solo para la interacción entre $\mathcal{S}$ y el espín k la modificación sería de

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 |\alpha_k|^2 & |a|^2 \alpha_k \beta_k^* & ab^* |\alpha_k|^2 & ab^* \alpha_k \beta_k^* \\ |a|^2 \alpha_k^* \beta_k & |a|^2 |\beta_k|^2 & ab^* \alpha_k^* \beta_k & ab^* |\beta_k|^2 \\ a^* b |\alpha_k|^2 & a^* b \alpha_k \beta_k^* & |b|^2 |\alpha_k|^2 & |b|^2 \alpha_k \beta_k^* \\ a^* b \alpha_k^* \beta_k & a^* b |\beta_k|^2 & |b|^2 \alpha_k^* \beta_k & |b|^2 |\beta_k|^2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

a

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 |\alpha_k|^2 & |a|^2 \alpha_k \beta_k^* e^{-(2B\gamma_2)^2 \theta} & ab^* |\alpha_k|^2 e^{-(2B\gamma_1)^2 \theta} & ab^* \alpha_k \beta_k^* e^{-(2B\Gamma_+)^2 \theta} \\ |a|^2 \alpha_k^* \beta_k e^{-(2B\gamma_2)^2 \theta} & |a|^2 |\beta_k|^2 & ab^* \alpha_k^* \beta_k e^{-(2B\Gamma_-)^2 \theta} & ab^* |\beta_k|^2 e^{-(2B\gamma_1)^2 \theta} \\ a^* b |\alpha_k|^2 e^{-(2B\gamma_1)^2 \theta} & a^* b \alpha_k \beta_k^* e^{-(2B\Gamma_-)^2 \theta} & |b|^2 |\alpha_k|^2 & |b|^2 \alpha_k \beta_k^* e^{-(2B\gamma_2)^2 \theta} \\ a^* b \alpha_k^* \beta_k e^{-(2B\Gamma_+)^2 \theta} & a^* b |\beta_k|^2 e^{-(2B\gamma_1)^2 \theta} & |b|^2 \alpha_k^* \beta_k e^{-(2B\gamma_2)^2 \theta} & |b|^2 |\beta_k|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

con $\theta = T_P^{4/3} \tau^{2/3}$.

Podemos así identificar cuales serán las modificaciones a los términos de interferencia que aparecen en el calculo de $\langle M \rangle$, con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= ab^* e^{-2iNB\gamma_1\tau} \prod_k^N \left(\alpha_k \beta_k^* e^{-2iB\gamma_2\tau} e^{-(2B\Gamma_+)^2 \theta} + \alpha_k^* \beta_k e^{2iB\gamma_2\tau} e^{-(2B\Gamma_-)^2 \theta} \right) \\ &\quad + a^* b e^{2iNB\gamma_1\tau} \prod_k^N \left(\alpha_k \beta_k^* e^{-2iB\gamma_2\tau} e^{-(2B\Gamma_-)^2 \theta} + \alpha_k^* \beta_k e^{2iB\gamma_2\tau} e^{-(2B\Gamma_+)^2 \theta} \right) \\ &= ab^* e^{-2iNB\gamma_1\tau} e^{-N(2B\Gamma_-)^2 \theta} \prod_k^N \left(\alpha_k \beta_k^* e^{-2iB\gamma_2\tau} e^{-16B^2\gamma_1\gamma_2\theta} + \alpha_k^* \beta_k e^{2iB\gamma_2\tau} \right) \\ &\quad + a^* b e^{2iNB\gamma_1\tau} e^{-N(2B\Gamma_+)^2 \theta} \prod_k^N \left(\alpha_k \beta_k^* e^{-2iB\gamma_2\tau} + \alpha_k^* \beta_k e^{2iB\gamma_2\tau} e^{-16B^2\gamma_1\gamma_2\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Vemos entonces que el valor esperado del observable sufre un decaimiento debido a la exponencial

$$D = e^{-N(2B\Gamma_-)^2 \theta} = e^{-4NB^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2 T_P^{4/3} \tau^{2/3}} \equiv e^{-K}, \quad (2.39)$$

que decrece a medida que aumenta el numero de espines N , el tiempo de interacción τ , o la diferencia de los momentos magnéticos de los espines ($\hbar\gamma_1 - \hbar\gamma_2$). Si encontráramos parámetros para el experimento que permitieran que D no sea muy pequeña podríamos utilizar el observable M para distinguir si ocurrió un colapso o no en el espín $\mathcal{S}$.

Recordemos que el modelo exige algunas condiciones. Por un lado el acoplamiento entre espines no puede ser despreciable, como ya comentamos, lo que da la condición (2.29)

$$\left| \int_0^\tau f_k(t') dt' \right| \gtrsim 1. \quad (2.40)$$

El valor de f_k en la integral podemos acotarlo por arriba por el valor máximo que tome el acoplamiento, en la distancia de máximo acercamiento d , llamémosle f_k . Así obtenemos una primera condición al modelo:

$$|f_k|\tau = \frac{\mu\hbar|\gamma_1\gamma_2|\tau}{d^3} \gtrsim 1. \quad (a)$$

Además tenemos la condición para tener una base puntero bien definida (2.16)

$$f_k \ll |B(\gamma_1 - \gamma_2)|. \quad (b)$$

Por último, hay que considerar que para realizar el experimento, y medir un observable que involucra a todas las partículas del ambiente, es necesario poder encontrarlas al finalizar el experimento; es decir que deben estar localizadas. Imponer que la dispersion de las partículas no sea grande dará una condición sobre el tiempo total del experimento. Como ya vimos en el capítulo 1, página 15, si imponemos que la dispersion sea minima a un tiempo T obtenemos $\Delta x \approx \sqrt{\frac{\hbar T}{m}}$, y la dispersion sera de este orden durante la duración de todo el experimento. La condición necesaria sobre la dispersion es que la distancia de máximo acercamiento de las partículas sea mayor que esta, es decir $\Delta x \leq d$. De otra forma: (i) si la dispersion fuera mayor que d podrían ocurrir colisiones entre algún espín del ambiente y el espín central y (ii) sería imposible asegurar la condición b de acoplamientos débiles ya que algunas partículas pasarían a distancias muy pequeñas³. Si finalmente usamos que $T \geq N\tau$, dado que cada espín entra de a uno en la celda, llegamos a la tercer y última condición:

$$d \geq \sqrt{\frac{\hbar N\tau}{m}}. \quad (c)$$

Utilizando las condiciones (a) y (c) obtenemos

$$\tau^{1/3} \leq \frac{m\mu^{2/3}(\gamma_1\gamma_2)^{2/3}}{\hbar^{1/3}N}. \quad (2.41)$$

Si utilizamos las condiciones (a) y (c) obtenemos

$$B^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2\tau^2 \gg f_k^2\tau^2 \gtrsim 1, \quad (2.42)$$

y reemplazando en el exponente K en (2.39),

$$K = 4NB^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2\frac{\tau^2}{\tau^2}T_P^{4/3}\tau^{2/3} \gg 4N\frac{T_P^{4/3}}{\tau^{4/3}}. \quad (2.43)$$

Finalmente utilizamos la condición (2.41) para obtener

$$K \gg 4N\frac{T_P^{4/3}}{\tau^{4/3}} \geq \frac{4N^5\hbar^{4/3}T_P^{4/3}}{m^4\mu^{8/3}(\gamma_1\gamma_2)^{8/3}} = \frac{4N^5\hbar^{20/3}T_P^{4/3}}{m^4\mu^{8/3}(\hbar\gamma_1\hbar\gamma_2)^{8/3}}. \quad (2.44)$$

Recordemos que si el exponente K es muy grande la exponencial que aparece en $\langle M \rangle$ tendería a cero, y el observable no permitiría distinguir el caso de colapso de la evolución

³Estamos despreciando el hecho de que si las partículas ambientales pasaran muy cerca del espín central habrían desviaciones grandes en los espines del ambiente debido a la repulsión magnética que inevitablemente habrá con este hamiltoniano de interacción. Este sería un factor extra a tener en cuenta, que restringiría aún más las condiciones del experimento. Como veremos no es necesario considerar esto para probar que existe indecidibilidad.

sin colapso. Busquemos entonces si existen parámetros donde K no cumple esto, es decir donde $K \lesssim 1$. Esto implicaría

$$m(\hbar\gamma_1\hbar\gamma_2)^{2/3} \gg \frac{4N^{5/4}\hbar^{5/3}T_P^{1/3}}{\mu^{2/3}}. \quad (2.45)$$

Si tomamos por ejemplo al espín $\mathcal{S}$ como un proton y a los espines ambientales como neutrones esta condición queda⁴ $10^6 \gg N^{5/4}$, lo que se viola ya para ambientes pequeños, con $N \approx 10^5$.

Podemos preguntarnos que pasaría con partículas con masas y momentos magnéticos mayores. Si ponemos por ejemplo un ambiente con $N \approx 10^{23}$ partículas, la condición para los momentos y la masa del espín central sería $m(\hbar\gamma_1\hbar\gamma_2)^{2/3} \gg 10^{-38}$, que está muy lejos de los valores para las partículas elementales.

Observamos entonces que cuando uno expresa la evolución del sistema más el ambiente en términos de un tiempo físico desaparece la posibilidad de utilizar un observable global para distinguir el estado del sistema del estado que el sistema tendría si un colapso ocurriera. Estrictamente hablando, lo que encontramos es que a medida que el ambiente y la interacción entre ambiente y sistema crecen se torna más difícil utilizar el observable para distinguir los dos casos.

Veamos por último que algo similar ocurre si intentamos utilizar la ocurrencia de recurrencias para verificar si un colapso ha ocurrido o no. De la misma forma que vimos como se ve afectado el valor esperado del observable M debido a la pérdida de coherencia de GPP, podemos ver el efecto sobre los términos de interferencia en la matriz de densidad reducida (ver ecuaciones (2.27) y (2.38)). En el resultado aparece la exponencial $e^{-N(2B\gamma_1)^2 T_P^{4/3} \tau^{2/3}}$, que también decrece con el acoplamiento y el número de espines del ambiente⁵.

La conclusión de esta sección es que, al menos en el modelo espín-espín, el problema de que *la información está* desaparece al considerar la pérdida de coherencia por considerar un tiempo físico, desde un punto de vista práctico.

2.1.3. Apéndice

Encontramos que el operador de evolución en la representación de interacción está dado por (2.15)

$$U_{\text{int}}(t) = \exp \left(-iI_1^k(t)(\sigma_x\sigma_x^k + \sigma_y\sigma_y^k) - iI_2^k(t)(\sigma_x\sigma_y^k - \sigma_y\sigma_x^k) - i \int_0^t f_k(t')dt' \sigma_z\sigma_z^k \right). \quad (2.46)$$

Notemos primero que $\sigma_x\sigma_x^k$, $\sigma_y\sigma_y^k$ y $\sigma_z\sigma_z^k$ conmutan entre si, y lo mismo ocurre para los operadores $\sigma_x\sigma_y^k$, $\sigma_y\sigma_x^k$ y $\sigma_z\sigma_z^k$. A su vez, se puede chequear que

$$[I_1^k\sigma_x\sigma_x^k - I_2^k\sigma_y\sigma_x^k, I_1^k\sigma_y\sigma_y^k + I_2^k\sigma_x\sigma_y^k] = 0, \quad (2.47)$$

⁴Los ordenes de las cantidades serían en este caso:

$$\begin{aligned} m_{p+} &\approx 1 \times 10^{-27} kg, & |\hbar\gamma_1| &\approx |\hbar\gamma_2| \approx 1 \times 10^{-26} J.T^{-1}, \\ T_P &\approx 1 \times 10^{-43} s, & \mu &\approx 1 \times 10^{-6} N/A^2, & \hbar &\approx 1 \times 10^{-34} Js. \end{aligned}$$

⁵En este modelo que estudiamos el efecto es solo debido al campo magnético, puesto que supusimos dominaba la interacción, pero se puede ver que por ejemplo en el caso de Zurek el efecto va con los acoplamientos con los espines ambientales, lo que daría $\prod_k^N e^{-(2g_k)^2 T_P^{4/3} t^{2/3}}$ [22].

lo que permite escribir el operador de evolución como

$$U_{\text{int}}(t) = \exp \left(-i \int_0^t f_k(t') dt' \sigma_z \sigma_z^k \right) \exp \left(-i I_1^k \sigma_x \sigma_x^k + i I_2^k \sigma_y \sigma_y^k \right) \exp \left(-i I_1^k \sigma_y \sigma_y^k - i I_2^k \sigma_x \sigma_x^k \right). \quad (2.48)$$

La última exponencial es $e^{-i(a+b)}$, con $a = I_1^k \sigma_y \sigma_y^k$ y $b = I_2^k \sigma_x \sigma_x^k$. Para calcular la exponencial precisaremos

$$(a+b)^2 = I_1^{k2} + I_2^{k2} + I_1^k I_2^k (\sigma_y \sigma_x I^k + \sigma_x \sigma_y I^k) = I_1^{k2} + I_2^{k2} \equiv \lambda. \quad (2.49)$$

Desarrollando la exponencial vemos entonces que

$$e^{-i(a+b)} = \cos(\lambda) - i \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} (I_1^k \sigma_y \sigma_y^k + I_2^k \sigma_x \sigma_x^k). \quad (2.50)$$

De forma muy similar podemos ver que la segunda exponencial en el operador de evolución queda

$$\exp \left(-i I_1^k \sigma_x \sigma_x^k + i I_2^k \sigma_y \sigma_y^k \right) = \cos(\lambda) - i \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} (I_1^k \sigma_x \sigma_x^k - I_2^k \sigma_y \sigma_y^k). \quad (2.51)$$

El punto importante es que estas últimas dos exponenciales desarmarán las correlaciones iniciales entre el sistema y el ambiente. Por ejemplo, si consideramos el estado $|+\rangle|+\rangle_k$, tenemos

$$e^{-i(a+b)}|+\rangle|+\rangle_k = \cos(\lambda)|+\rangle|+\rangle_k - i \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} (-I_1^k + i I_2^k)|-\rangle|-\rangle_k. \quad (2.52)$$

Algo similar ocurriría con la segunda exponencial. Es fácil notar que la única forma que esto no ocurra es que $\lambda \approx 0$, es decir, que $I_1^k(t)$ e $I_2^k(t)$ sean despreciables comparados con $\int_0^t f_k(t') dt'$. Como comentamos en el trabajo, para que esto se cumpla es necesario que $f_k \ll |B(\gamma_1 - \gamma_2)|$ y que la $f_k(t)$ varíe poco en la integral que define a las $I_i^k(t)$. Esta última puede expresarse matemáticamente como

$$\frac{df_k}{dt} \ll f_k |B(\gamma_1 - \gamma_2)|. \quad (2.53)$$

En el trabajo no consideramos que esta condición debe cumplirse, pero básicamente esta impondría más restricciones sobre los acoplamientos y el campo magnético. Ya vimos que sin estas restricciones el experimento no permite distinguir el estado final del sistema del estado que uno tendría si un colapso hubiese ocurrido, por lo tanto imponer más restricciones no cambia la conclusión.

2.2. Indecidibilidad en el modelo espín-bosón

Estudiaremos en esta sección otro de los modelos canónicos de decoherencia: el modelo espín-bosón. Este es importante principalmente debido a la utilidad de los sistemas de dos niveles en computación cuántica, y a los diversos sistemas que podría modelar[23, 24, 25, 26]. Veremos que en este modelo el efecto de expresar la evolución en términos de un tiempo físico también elimina la posibilidad de utilizar recurrencias u observables globales, al menos desde un punto de vista práctico.

2.2.1. El modelo

En esta sección repasaremos el modelo de un espín $\mathcal{S}$, o sistema de dos niveles, interactuando con un ambiente $\mathcal{E}$ de osciladores armónicos (ver por ejemplo [27]), con un hamiltoniano dado por

$$H = \frac{\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i + \sigma_z \sum_i g_i (a_i^\dagger + a_i). \quad (2.54)$$

El termino de interacción es

$$H_{int} = \sigma_z \sum_i g_i (a_i^\dagger + a_i), \quad (2.55)$$

que corresponde a un acoplamiento entre la componente z de espín del sistema de dos niveles (SDN) y la coordenada x de los modos bosónicos de oscilación. El termino de evolución libre es

$$H_0 = \frac{\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i, \quad (2.56)$$

donde la frecuencia ω_0 determina la diferencia de energía entre los dos estados del SDN, ω_i son las frecuencias características de los osciladores del ambiente, y g_i las constantes de acoplamiento entre el sistema y cada oscilador del ambiente⁶.

Una vez más, para encontrar la evolución del sistema pasaremos a la representación de interacción. En esta el hamiltoniano de interacción es:

$$H_{int}^i(t) = e^{iH_0 t} \left[\sigma_z \sum_i g_i (a_i^\dagger + a_i) \right] e^{-iH_0 t}. \quad (2.57)$$

Debido a la forma del hamiltoniano H_0 tan solo debemos ver que $a_i^\dagger(t) = e^{i\omega_i t} a_i^\dagger$ y $a_i(t) = e^{-i\omega_i t} a_i$, entonces:

$$H_{int}^i(t) = \sigma_z \sum_i g_i (e^{i\omega_i t} a_i^\dagger + e^{-i\omega_i t} a_i). \quad (2.58)$$

El operador de evolución en la representación de interacción es:

$$U(t) = T \left[e^{-i \int_0^t H_{int}(t') dt'} \right]. \quad (2.59)$$

En este caso el cálculo de U se simplifica debido a que el conmutador de H_{int}^i a tiempos distintos no me da un nuevo operador, sino un número complejo. Esto da como resultado que el operador de evolución es una fase global (que no tomaremos en cuenta) multiplicada por la expresión usual, pero sin el producto temporalmente ordenado (ver discusión en [27], sección (5.3), pág 210):

$$U(t) = e^{-i \int_0^t H_{int}^i(t') dt'}. \quad (2.60)$$

Definiendo

$$\tilde{\lambda}_i(t) = \frac{g_i}{\omega_i} (1 - e^{i\omega_i t}) \quad (2.61)$$

el operador de evolución queda

$$U(t) = \exp \left[\sigma_z \sum_i g_i \left(\tilde{\lambda}_i(t) a_i^\dagger + \tilde{\lambda}_i^*(t) a_i \right) \right]. \quad (2.62)$$

⁶En general se puede además considerar un “tunneling term” $\Omega\sigma_x$ que permite al sistema pasar del estado excitado al estado base y viceversa. Se puede despreciar este último si consideramos tiempos cortos comparados con los tiempos característicos de evolución del término de tunelamiento.

El operador de evolución obtenido es muy similar al operador desplazamiento $D(\lambda) = \exp \left[\lambda_i(t) a_i^\dagger + \lambda_i^*(t) a_i \right]$, que aplicado al vacío de un oscilador armónico genera estados coherentes $|\lambda\rangle = e^{-\lambda^2/2} \sum_n \lambda^n / n! |n\rangle$. Con esto en mente es fácil ver que si el estado inicial es

$$|\Psi\rangle(0) = \left(a|+\rangle + b|-\rangle \right) \bigotimes_i |0\rangle_i \quad (2.63)$$

el estado del sistema al tiempo t será

$$|\Psi\rangle^i(t) = a|+\rangle|A\rangle + b|-\rangle|B\rangle, \quad (2.64)$$

con

$$\begin{aligned} |A\rangle &\equiv \bigotimes_i |\tilde{\lambda}_i(t)\rangle \\ |B\rangle &\equiv \bigotimes_i |-\tilde{\lambda}_i(t)\rangle. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Volvamos ahora a la representación de Schrödinger para obtener la evolución del sistema. La matriz de densidad queda

$$\rho(t) = e^{-iH_0 t} \left(|a|^2 |+\rangle\langle+| |A\rangle\langle A| + |b|^2 |-\rangle\langle-| |B\rangle\langle B| + ab^* |+\rangle\langle-| |A\rangle\langle B| + a^* b |-\rangle\langle+| |B\rangle\langle A| \right) e^{iH_0 t}. \quad (2.66)$$

Usando la expresión en la base número de los estados coherentes, la parte que actúa sobre los estados del ambiente da

$$\begin{aligned} e^{-i \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i t} |A\rangle &= \bigotimes_i e^{-i \omega_i a_i^\dagger a_i t} |\tilde{\lambda}_i(t)\rangle = \bigotimes_i e^{-i \omega_i a_i^\dagger a_i t} \sum_{n_i} e^{-\frac{|\tilde{\lambda}_i|^2}{2}} \frac{\tilde{\lambda}_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \\ &= \bigotimes_i \sum_{n_i} e^{-\frac{|\tilde{\lambda}_i|^2}{2}} e^{-i \omega_i n_i t} \frac{\tilde{\lambda}_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle = \bigotimes_i \sum_{n_i} e^{-\frac{|\tilde{\lambda}_i|^2}{2}} \frac{(e^{-i \omega_i t} \tilde{\lambda}_i)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \end{aligned} \quad (2.67)$$

Si definimos $\lambda_i(t)$

$$\lambda_i(t) \equiv e^{-i \omega_i t} \tilde{\lambda}_i(t) = \frac{g_i}{\omega_i} (e^{-i \omega_i t} - 1) \quad (2.68)$$

la expresión para $|A\rangle$ y $|B\rangle$ en la representación de Schrodinger queda igual, es decir:

$$\begin{aligned} |A\rangle &= \bigotimes_i |\lambda_i(t)\rangle \\ |B\rangle &= \bigotimes_i |-\lambda_i(t)\rangle. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Los términos de interferencia se ven un poco afectados; aparece la frecuencia de Bohr entre los dos niveles del SDN. Tenemos entonces

$$\rho(t) = \left(|a|^2 |+\rangle\langle+| |A\rangle\langle A| + |b|^2 |-\rangle\langle-| |B\rangle\langle B| + ab^* e^{-i \omega_0 t} |+\rangle\langle-| |A\rangle\langle B| + a^* b e^{i \omega_0 t} |-\rangle\langle+| |B\rangle\langle A| \right). \quad (2.70)$$

Para observar la decoherencia ambiental que el SDN sufre realizamos la traza parcial sobre el ambiente

$$\rho_{\mathcal{S}}(t) = |a|^2 |+\rangle\langle+| + |b|^2 |-\rangle\langle-| + r(t) ab^* e^{-i \omega_0 t} |+\rangle\langle-| + r(t) a^* b e^{i \omega_0 t} |-\rangle\langle+| \quad (2.71)$$

con $r(t) \equiv \langle A|B \rangle$. Para estados coherentes

$$\langle \mu | \nu \rangle = e^{-\frac{|\mu|^2}{2}} e^{-\frac{|\nu|^2}{2}} e^{\mu^* \nu}, \quad (2.72)$$

con lo que

$$r(t) = \prod_i \langle \lambda_i(t) | -\lambda_i(t) \rangle = \prod_i e^{-2|\lambda_i(t)|^2}. \quad (2.73)$$

Usando la expresión para λ

$$|\lambda_i(t)|^2 = \frac{2g_i^2}{w_i^2} (1 - \cos(w_i t)) \quad (2.74)$$

obtenemos que el factor de decoherencia es

$$r(t) = \exp \left[- \sum_i \frac{4g_i^2}{w_i^2} (1 - \cos(w_i t)) \right]. \quad (2.75)$$

Como hace Schlosshauer, para tener una idea del comportamiento de $r(t)$ podemos ver en principio el límite de tiempos pequeños, es decir $\omega_i t \ll 1$

$$r(t) \approx \exp \left[- \sum_i \frac{2g_i^2 t^2}{\hbar^2} \right], \quad (2.76)$$

con lo que se tiene un decaimiento gaussiano de las coherencias en la matriz de densidad reducida (en esta última expresión agregamos los $\hbar$ faltantes para tener unidades MKS).

2.2.2. Evolución en términos del tiempo físico

En lugar de resolver la ecuación de Lindblad para la evolución de la matriz de densidad en términos de un tiempo físico utilizaremos en esta sección la definición de la matriz de densidad efectiva (1.31) [28]:

$$\rho(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_t(T) \rho(t) dt. \quad (2.77)$$

Abusando de la notación, la $\rho(t)$ en la derecha de la ecuación es la matriz de densidad usual, y la $\rho(T)$ a la izquierda la matriz de densidad efectiva. $\mathcal{P}_t(T)$ es la distribución de probabilidades del reloj de obtener T si el tiempo ideal vale t .

Supondremos que la distribución $\mathcal{P}_t(T)$ puede ser aproximada por una gaussiana centrada en $t = T$ con dispersión τ asociada al error en la medida de tiempo. La matriz de densidad efectiva al tiempo T será entonces

$$\begin{aligned} \rho(T) = & |a|^2 |+\rangle \langle +| \overline{|A\rangle \langle A|} + |b|^2 |-\rangle \langle -| \overline{|B\rangle \langle B|} \\ & + ab^* |+\rangle \langle -| \overline{|e^{-i\omega_0 t} A\rangle \langle B|} + a^* b |-\rangle \langle +| \overline{|e^{i\omega_0 t} B\rangle \langle A|} \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde la sobre-barra señala la modificación respecto a la evolución unitaria.

Para ver si ocurre *indecidibilidad* en el sistema debemos ver si se puede distinguir experimentalmente el sistema en el estado $\rho(T)$ del sistema en una matriz de densidad correspondiente a el espín apuntando hacia arriba ($|+\rangle$) o el espín apuntando hacia abajo ($|-\rangle$). Este último caso corresponde a una matriz de densidad ρ_{col} que sufrió un colapso en la base ($|+\rangle, |-\rangle$). Puesto que estamos expresando todo en términos del tiempo físico, y en este caso

la matriz de densidad ρ_{col} depende del tiempo, deberemos también considerar el efecto GPP sobre esta, entonces

$$\rho_{\text{col}}(T) = |a|^2|+\rangle\langle+| + |\overline{A}\rangle\langle\overline{A}| + |b|^2|-\rangle\langle-| + |\overline{B}\rangle\langle\overline{B}|. \quad (2.79)$$

Nos centraremos en si se puede utilizar el hecho de que *la información está* para verificar si el sistema se encuentra o no en un estado definitivo. Como vimos, una de las formas de ver esto era utilizar algún observable global sobre el sistema más el ambiente cuya medición permita distinguir entre el estado evolucionado y el estado colapsado. Sin embargo, en este modelo no está claro que exista un observable global como el encontrado por d'Espagnat. Esto no significa que uno no exista, quizás solo se trata de buscar mejor. Como sea, la información si está en la matriz de densidad total, lo que se puede ver utilizando alguna medida para las distancias entre matrices.

Utilizaremos el producto escalar entre matrices de Hilbert-Schmidt definido por la traza,

$$(A, B) = \text{Tr}(AB^\dagger), \quad (2.80)$$

que a su vez define la norma

$$\|A\|^2 = (A, A) \quad (2.81)$$

Si la distancia entre dos matrices ρ_1 y ρ_2 es pequeña también lo será la diferencia entre las predicciones obtenidas a partir de cada una. Esto se puede ver fácilmente comparando las probabilidades de obtener algún resultado caracterizado por un proyector P , dadas por $\text{Tr}(P\rho_1)$ y $\text{Tr}(P\rho_2)$. Si partimos de la diferencia entre estas, podemos ver que, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(P\rho_1) - \text{Tr}(P\rho_2)|^2 &= |\text{Tr}((\rho_1 - \rho_2)P)|^2 = |(\rho_1 - \rho_2, P)|^2 \\ &\leq (\rho_1 - \rho_2, \rho_1 - \rho_2)(P, P) = \text{Tr}((\rho_1 - \rho_2)^2)\text{Tr}(P^2) = \|\rho_1 - \rho_2\|^2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Esta cuenta vale para cualquier proyector P . Vemos entonces que, cuanto más pequeña es la distancia definida por la norma de Hilbert-Schmidt entre las matrices más difícil será distinguir entre las predicciones de ambas, puesto que las probabilidades de obtener cualquier resultado tenderán a ser más parecidas.

Veamos en el caso del modelo espín-bosón como es la distancia entre $\rho(T)$ y $\rho_{\text{col}}(T)$, es decir, nos concentraremos en la cantidad

$$K = \sqrt{\text{Tr}((\rho_1 - \rho_2)^2)}. \quad (2.83)$$

En función de las expresiones para $\rho(T)$ y $\rho_{\text{col}}(T)$ (ecs. (2.78) y (2.79)) vemos que necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \text{Tr} \left[|+\rangle\langle+| e^{-i\omega_0 t} |\overline{A}\rangle\langle\overline{B}| e^{i\omega_0 t} |\overline{B}\rangle\langle\overline{A}| \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{E}} \int \int dt_1 dt_2 \mathcal{P}_{t_1}(T) \mathcal{P}_{t_2}(T) e^{-i\omega_0 t_1} e^{i\omega_0 t_2} \bigotimes_i |\lambda_i(t_1)\rangle\langle-\lambda_i(t_1)| - |\lambda_i(t_2)\rangle\langle\lambda_i(t_2)| \end{aligned} \quad (2.84)$$

En el cálculo de la traza tan solo se precisa

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{E}_i} |\lambda_i(t_1)\rangle\langle\lambda_i(t_2)| &= e^{-\frac{|\lambda_i(t_1)|^2}{2}} e^{-\frac{|\lambda_i(t_2)|^2}{2}} \sum_n \langle n | \left(\sum_{n_i} \frac{\lambda_i^{n_i}(t_1)}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle \right) \left(\sum_{m_i} \frac{\lambda_i^{*m_i}(t_2)}{\sqrt{m_i!}} \langle m_i| \right) |n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\lambda_i(t_1)|^2}{2}} e^{-\frac{|\lambda_i(t_2)|^2}{2}} \sum_n \frac{\lambda_i^n(t_1) \lambda_i^{*n}(t_2)}{n!} = e^{-\frac{|\lambda_i(t_1)|^2}{2}} e^{-\frac{|\lambda_i(t_2)|^2}{2}} e^{\lambda_i^*(t_2) \lambda_i(t_1)}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Reemplazando arriba:

$$\Gamma = \int \int dt_1 dt_2 \mathcal{P}_{t_1}(T) \mathcal{P}_{t_2}(T) e^{-i\omega_0 t_1} e^{i\omega_0 t_2} \prod_i e^{-|\lambda_i(t_1)|^2} e^{-|\lambda_i(t_2)|^2} e^{\lambda_i^*(t_2) \lambda_i(t_1) + \lambda_i^*(t_1) \lambda_i(t_2)} \quad (2.86)$$

Los funciones que aparecen son:

$$\begin{aligned} |\lambda_i(t)|^2 &= \frac{2g_i^2}{w_i^2} (1 - \cos(w_i t)) \\ \lambda_i^*(t_1) \lambda_i(t_2) + \lambda_i^*(t_2) \lambda_i(t_1) &= \frac{2g_i^2}{w_i^2} (\cos(w_i(t_1 - t_2)) - \cos(w_i t_1) - \cos(w_i t_2) + 1) \\ \mathcal{P}_t(T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{(t-T)^2}{2\tau^2}} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Con lo que

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int \int dt_1 dt_2 e^{-\frac{(t_1-T)^2}{2\tau^2}} e^{-\frac{(t_2-T)^2}{2\tau^2}} e^{-i\omega_0 t_1} e^{i\omega_0 t_2} \exp\left(\sum_i \frac{2g_i^2}{w_i^2} (\cos(w_i(t_1 - t_2)) - 1)\right) \quad (2.88)$$

Dado que τ es el error en los tiempos, que es pequeño, supondremos que $w_i \tau \ll 1$. Luego, en función de que t_i toman valores en el intervalo $T - \tau \leq t_i \leq T + \tau$ (debido a la forma de la distribución $\mathcal{P}_t(T)$), podemos desarrollar:

$$\cos(w_i(t_1 - t_2)) \approx 1 - \frac{1}{2} w_i^2 (t_1 - t_2)^2 \quad (2.89)$$

y entonces

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int \int dt_1 dt_2 e^{-\frac{(t_1-T)^2}{2\tau^2}} e^{-\frac{(t_2-T)^2}{2\tau^2}} e^{-i\omega_0(t_1 - t_2)} \exp\left(-\sum_i g_i^2 (t_1 - t_2)^2\right) \quad (2.90)$$

Usando que $(t_1 - T)^2 + (t_2 - T)^2 = (t_1 - t_2)^2 + 2(t_2 - T)(t_1 - t_2) + 2(t_2 - T)^2$ la expresión queda

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int \int dt_1 dt_2 e^{-\frac{(t_1 - t_2)^2 + 2(t_2 - T)(t_1 - t_2)}{2\tau^2}} e^{-\frac{2(t_2 - T)^2}{2\tau^2}} e^{-i\omega_0(t_1 - t_2)} \exp\left(-\sum_i g_i^2 (t_1 - t_2)^2\right) \quad (2.91)$$

Podemos ahora realizar la integral gaussiana en t_1 ,

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int dt_2 e^{-\frac{(t_2-T)^2}{\tau^2}} \sqrt{\frac{2\pi\tau^2}{1+2\tau^2 \sum g_i^2}} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} & \exp \left[\left(\frac{(t_2-T)^2}{\tau^4} + \frac{2i\omega_0(t_2-T)}{\tau^2} - \omega_0^2 \right) \left(\frac{\tau^2}{2+4\tau^2 \sum g_i^2} \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right] \\ & \int dt_2 \exp \left[-(t_2-T)^2 \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right) + \frac{i\omega_0(t_2-T)}{(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right] \\ & \int dt_2 \exp \left[-(t_2-T)^2 \left(\frac{1+4\tau^2 \sum g_i^2}{2\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right) + \frac{i\omega_0(t_2-T)}{(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Y también la integral en t_2 ,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)}} \sqrt{\frac{2\pi\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)}{1+4\tau^2 \sum g_i^2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right] \\ & \exp \left[-\left(\frac{\omega_0^2}{4(1+2\tau^2 \sum g_i^2)^2} \right) \left(\frac{2\tau^2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)}{1+4\tau^2 \sum g_i^2} \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+4\tau^2 \sum g_i^2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)} \right] \exp \left[-\left(\frac{\omega_0^2\tau^2}{2(1+2\tau^2 \sum g_i^2)(1+4\tau^2 \sum g_i^2)} \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+4\tau^2 \sum g_i^2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{1+4\tau^2 \sum g_i^2} \right] \end{aligned} \quad (2.94)$$

Finalmente la constante K queda:

$$K = \sqrt{2|a|^2|b|^2\Gamma}, \quad (2.95)$$

con

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{1+4\tau^2 \sum g_i^2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{1+4\tau^2 \sum g_i^2} \right]. \quad (2.96)$$

Si reintroducimos $\hbar$:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{1+4\hbar^{-2}\tau^2 \sum g_i^2}} \exp \left[-\frac{\hbar^{-2}\omega_0^2\tau^2}{1+4\hbar^{-2}\tau^2 \sum g_i^2} \right]. \quad (2.97)$$

Hay dos posibles situaciones donde Γ se hace pequeño: ω_0^2 grande o $\sum g_i^2$ grande. El primer caso corresponde a un SDN con diferencia de energías grande entre sus niveles mientras que el segundo corresponde a un ambiente que interactúa fuertemente con el sistema. Los dos casos presumiblemente se dan cuando el sistema es macroscópico.

En ambos casos tendríamos que K se torna menor a medida que el SDN es más macroscópico, y por lo tanto se torna más difícil distinguir entre el estado del sistema $\rho(T)$ y el estado del sistema si el espín se encontrara en un estado definitivo $\rho_{\text{col}}(T)$. Podemos decir entonces que el sistema se aproxima asintóticamente a un estado *indecidable*. Vemos entonces que el problema de que *la información está* también desaparece, desde un punto de vista práctico, en el modelo espín-bosón⁷.

2.3. FAPP

Tanto en la sección 2.1 como en la sección 2.2 vimos que el efecto de expresar la evolución en términos de un tiempo físico gradualmente elimina el problema de que *la información está*, debido a la pérdida de coherencia del efecto GPP. Pero, estrictamente hablando, solo en un tiempo infinito o con un ambiente infinitamente grande el problema desaparecería del todo. Esto puede verse en cualquiera de los dos modelos que estudiamos: el valor esperado del observable M en el modelo espín-espín daría 0 tanto para el estado evolucionado como para el estado colapsado, y en el modelo espín-bosón la distancia entre el estado evolucionado y el estado colapsado sería 0.

Pero en una situación realista de un ambiente finito, en principio repitiendo el experimento más veces se podría distinguir un caso del otro. Es decir que el problema de que la información de que el sistema esta en una superposición se resuelve solo desde un punto de vista práctico. Esta es exactamente la misma crítica que hicimos al proceso de decoherencia como solución al problema de la medición en el capítulo 1.2.2: la crítica FAPP, como la llamamos.

Mostraremos en esta sección que existen incertidumbres fundamentales en observables cuánticos, y veremos como estos “errores” en observables harán que tomar ensembles mayores sea fútil a la hora de intentar distinguir entre el estado evolucionado y el estado colapsado, dando así una solución al problema FAPP [30].

2.3.1. Límite fundamental en la medición de espines

Siguiendo el trabajo de Kofler y Brukner [29], consideremos algún dispositivo utilizado para medir espín en alguna dirección (podría ser un Stern-Gerlach). Si L es el momento angular del dispositivo, y θ es un ángulo que determina la dirección en la que mide el espín, el principio de incertidumbre dice⁸:

$$\Delta L \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.98)$$

El conmutador entre el operador de ángulo y el de momento angular es

$$[\theta, L] = i\hbar \quad (2.99)$$

mientras que el hamiltoniano del dispositivo de medición es

$$H = \frac{L^2}{2I}, \quad (2.100)$$

⁷El hecho de que la distancia entre las matrices de densidad sea chica también excluye la posibilidad de observar recurrencias, ya que como vimos implica que para *cualquier* observable las predicciones serán similares.

⁸Válido para ángulos pequeños.

donde $I \approx MR^2$ es su momento de inercia, M su masa, y R su tamaño característico.

La ecuación de evolución del operador $\theta(t)$ en la representación de Heisenberg es

$$\frac{d\theta}{dt} = -i \frac{[\theta, H]}{\hbar} = \frac{L}{I}, \quad (2.101)$$

y

$$\theta(\tau) = \theta(0) + \frac{L\tau}{I}. \quad (2.102)$$

Recordando la desigualdad de Robertson para dos observables A y B , $\Delta A \Delta B \geq 1/2 |\langle [A, B] \rangle|$, obtenemos

$$\Delta\theta(0) \Delta\theta(\tau) \geq \frac{\hbar\tau}{2I} \approx \frac{\hbar\tau}{MR^2}. \quad (2.103)$$

Por lo tanto, al menos uno de los observables $\theta(0)$ y $\theta(\tau)$ tiene una dispersión tal que

$$\Delta\theta \gtrsim \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{M}}. \quad (2.104)$$

Los parámetros del dispositivo de medición no pueden tomar cualquier valor. La relatividad especial nos acota el valor de la distancia característica R , ya que no puede exceder la distancia que tarda la luz en viajar durante el tiempo en que se realiza la medición τ , es decir $R \leq c\tau$, de donde

$$\Delta\theta \gtrsim \sqrt{\frac{\hbar}{cMR}}. \quad (2.105)$$

La relatividad general pone una nueva condición, $R \geq 2GM/c^2$, ya que R debe ser mayor que el radio de Schwarzschild correspondiente a la masa M . Usando esta condición llegamos a

$$\Delta\theta \gtrsim \frac{L_P}{R}, \quad (2.106)$$

donde $L_P \equiv \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-35}m$ es la longitud de Planck. Si tomamos el radio del universo como la distancia característica, $R \approx 10^{27}m$, llegamos a una cota fundamental para la dispersión del ángulo:

$$\Delta\theta \gtrsim 10^{-62}. \quad (2.107)$$

Mediante un análisis mecánico cuántico muy general, e imponiendo condiciones provenientes de la teoría de la relatividad, se llegó a una incerteza en el ángulo conjugado al momento angular L . Veamos que consecuencias trae esto si queremos por ejemplo medir el valor esperado de la componente de espín en la dirección z . Si el estado del espín es $\Phi = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$,

$$\langle S_z \rangle = |a|^2 - |b|^2. \quad (2.108)$$

Ahora, en vez de medir S_z estamos midiendo $S_z^{\Delta\theta} = S \cdot \hat{n}$, con $\hat{n} = (\sin(\Delta\theta), 0, \cos(\Delta\theta))$. Entonces

$$\langle S_z^{\Delta\theta} \rangle = \sin(\Delta\theta) \langle S_x \rangle + \cos(\Delta\theta) \langle S_z \rangle \approx \langle S_z \rangle + \Delta\theta(ab^* + a^*b) - \frac{(\Delta\theta)^2}{2} \langle S_z \rangle. \quad (2.109)$$

Vemos entonces que asociado al observable S_z hay un error de orden⁹ $\Delta\theta$ (o $(\Delta\theta)^2$ dependiendo del estado inicial). Cabe preguntarse porque no han de promediarse a cero estos errores en el ángulo, dado que al medir $\langle S_z \rangle$ lo que hago en realidad es realizar el

⁹Por ahora hemos despreciado los efectos provenientes de los errores en la preparación del estado inicial.

experimento repetidas veces. El punto a notar es que la incerteza que estamos considerando es diferente de la que proviene de un procedimiento donde hay errores aleatorios al medir, que se manifiestan por ejemplo en que con cierta probabilidad el dispositivo mida en una dirección distinta de la deseada. En nuestro caso el dispositivo experimental contiene un error intrínseco $\Delta\theta$ que hace que *no se pueda* saber en que dirección se midió.

Podría por ejemplo compararse con el caso de errores aleatorios y errores de apreciación de una cierta medida. Los errores aleatorios pueden ser disminuidos aumentando el número de medidas, pero el error de apreciación está siempre presente. Quizás más apropiado aún sería pensar en la longitud de onda Compton λ_C de una partícula, que impone un límite fundamental en la determinación de la posición de esta. Si intentamos medir la posición a menos de λ_C precisamos energías mayores a su energía en reposo, y relatividad general implica que podría así crearse otra partícula idéntica. De forma análoga, relatividad general nos impide medir una componente de espín con una dirección determinada a menos de $\Delta\theta$.

2.3.2. Solución al problema FAPP en el modelo espín-espín

Apliquemos el resultado de la sección anterior al observable M del modelo espín-espín. Vimos que, debido a la pérdida de coherencia GPP, el valor esperado del observable estaba multiplicado por una exponencial e^{-K} , con

$$K = -4NB^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2 T_P^{4/3} \tau^{2/3}. \quad (2.110)$$

Recordemos que para distinguir si hay colapso o no es necesario distinguir $\langle M \rangle$ de 0. Ahora, de acuerdo al resultado de la sección anterior, el observable tendrá un error que depende de $\Delta\theta$. Si este error resultara mayor que $\langle M \rangle$ no habría forma de distinguir colapso de evolución unitaria.

Para encontrar el error recordemos la expresión para el observable, y agreguemos la incerteza en la dirección en que se mide:

$$M^{\Delta\theta} \equiv \sigma_x^{\Delta\theta} \bigotimes_k^N \sigma_x^{k, \Delta\theta}, \quad (2.111)$$

y

$$\sigma_x^{\Delta\theta} \approx \sigma_x + \Delta\theta \sigma_z. \quad (2.112)$$

Por lo tanto el observable que en realidad medimos es,

$$M^{\Delta\theta} \approx \sigma_x \bigotimes_k^N \sigma_x^k + (\Delta\theta)^{N+1} \sigma_z \bigotimes_k^N \sigma_z^k + E(\Delta\theta) = M + (\Delta\theta)^{N+1} \sigma_z \bigotimes_k^N \sigma_z^k E(\Delta\theta), \quad (2.113)$$

donde $E(\Delta\theta)$ incluye términos cruzados, que no será necesario analizar puesto que bastará con analizar los otros. Utilizando la expresión que teníamos para el estado inicial obtenemos

$$\langle M^{\Delta\theta} \rangle \sim \langle M \rangle e^{-K} + (\Delta\theta)^N (|a|^2 - |b|^2) \prod_k^N (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) + \langle E(\Delta\theta) \rangle. \quad (2.114)$$

Como se puede ver, aún puede darse, dependiendo del estado inicial, que el error sea cero. De hecho habíamos visto que el estado conveniente para realizar el experimento sería tal que $|\alpha_k|^2 = |\beta_k|^2$. Pero, debido a los errores que hemos encontrado en medir componentes de

espín, preparar estados de forma perfecta también resulta imposible. Por ejemplo, en lugar de preparar $\alpha_k |\uparrow\rangle_k + \beta_k |\downarrow\rangle_k$ se prepararía $\alpha_k |\uparrow\rangle_k^{\Delta\theta} + \beta_k |\downarrow\rangle_k^{\Delta\theta}$, siendo $(|\uparrow\rangle_k^{\Delta\theta}, |\downarrow\rangle_k^{\Delta\theta})$ autoestados del observable $\sigma_z + \Delta\theta\sigma_x$ (a primer orden en $\Delta\theta$). Estos están dados por:

$$|\uparrow\rangle_k^{\Delta\theta} = |\uparrow\rangle_k + \frac{\Delta\theta}{2} |\downarrow\rangle_k, \quad |\downarrow\rangle_k^{\Delta\theta} = |\downarrow\rangle_k - \frac{\Delta\theta}{2} |\uparrow\rangle_k \quad (2.115)$$

Entonces el estado que se prepara es

$$\alpha_k |\uparrow\rangle_k^{\Delta\theta} + \beta_k |\downarrow\rangle_k^{\Delta\theta} = \left(\alpha_k - \frac{\Delta\theta}{2}\beta_k\right) |\uparrow\rangle_k + \left(\beta_k + \frac{\Delta\theta}{2}\alpha_k\right) |\downarrow\rangle_k. \quad (2.116)$$

Como se observa las amplitudes de probabilidad no son exactamente las que uno desea. Volviendo con estas a (2.114) queda:

$$\langle M^{\Delta\theta} \rangle \sim \langle M \rangle e^{-K} + (\Delta\theta)^N \left(|a|^2 - |b|^2 + \Delta\theta(ab^* + a^*b) \right) \prod_k^N \left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 + \Delta\theta(\alpha_k\beta_k^* + \alpha_k^*\beta_k) \right) + \langle E(\Delta\theta) \rangle. \quad (2.117)$$

El punto es que aún intentando imponer la condición óptima $|\alpha_k|^2 = |\beta_k|^2$, los errores en la preparación harán que el observable M tenga un error asociado de orden $(\Delta\theta)^{2N}$:

$$\langle M^{\Delta\theta} \rangle \sim \langle M \rangle e^{-K} \pm (\Delta\theta)^{2N}. \quad (2.118)$$

Debido a las condiciones del modelo espín-espín habíamos obtenido una condición sobre K :

$$K \gg \frac{4N^5 T_{\text{Planck}}^{4/3} \hbar^{20/3}}{m^4 (\hbar\gamma_1 \hbar\gamma_2)^{8/3} \mu^{8/3}}. \quad (2.119)$$

Debido a la fuerte dependencia de K en N , tendremos que para ambientes grandes se cumplirá $(\Delta\theta)^{2N} \gtrsim e^{-K}$. Por ejemplo, para partículas fundamentales

$$e^{-K} \ll \exp \left[-10^{-20} N^5 \right], \quad (2.120)$$

recordando que $\Delta\theta \approx 10^{-62}$ se ve que para $N \approx 10^6$ se tiene $e^{-K} \leq (\Delta\theta)^{2N}$.

Por lo tanto el resultado que uno obtendría con colapso o sin colapso difieren menos que el error del observable M , y es por lo tanto imposible distinguir los dos casos experimentalmente.

Veamos por último como estas consideraciones hacen también imposible verificar si el sistema se encuentra o no en una superposición cuántica mediante observables locales (recorde-mos que el efecto de decoherencia no elimina por completo los términos de interferencia, como comentamos en la sección III). De la ecuación ((2.25)) para el estado final del sistema, se ve que el factor de decoherencia que aparece multiplicando los términos de interferencia en la matriz de densidad reducida es:

$$z \equiv \prod_k^N \left[\cos \left(2 \int dt f_k \right) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin \left(2 \int dt f_k \right) \right]. \quad (2.121)$$

Situémonos en la ya mencionada situación ideal para realizar el experimento, donde $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 0$, y tenemos:

$$z \sim \cos \left(2 \int dt f_k \right)^N. \quad (2.122)$$

Este factor z aparecería en la medición del observable local σ_x , como

$$\langle \sigma_x \rangle = z(ab^* + a^*b). \quad (2.123)$$

Ahora, debido a la incerteza en el ángulo en que medimos el observable y al error en las probabilidades debido a la preparación, ecuaciones (2.109) y (2.116), tenemos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^{\Delta\theta} \rangle &\approx \langle \sigma_x \rangle + \Delta\theta \langle \sigma_z \rangle \\ &\approx z \left(\left(a - \frac{\Delta\theta}{2} b \right) \left(b + \frac{\Delta\theta}{2} a \right)^* + CC \right) + \Delta\theta \left(|a|^2 + |b|^2 + \Delta\theta(ab^* + a^*b) \right). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Como se puede ver, hay un factor proporcional a z , que decrece con el tamaño del ambiente, y un error de orden $(\Delta\theta)^2$. Debido a la dependencia exponencial de las coherencias con N , claramente serán menores que el error para ambientes grandes.

Vemos entonces que con observables locales tampoco se puede distinguir el estado del sistema del estado que tendríamos si el sistema se encontrara en un estado definitivo “espín arriba” o “espín abajo”, aún tomando ensembles muy grandes. Llegamos entonces a que errores fundamentales en la medición de observables dan una solución al problema FAPP.

2.3.3. Solución al problema FAPP en el modelo espín-bosón

Como vimos en la sección anterior, la solución al problema FAPP proviene de considerar errores en la medición de observables, o en la preparación del estado inicial del sistema (de hecho errores en observables implican errores en la preparación). Con los resultados de Kofler y Brukner obtuvimos una cota para los errores correspondientes a espines, lo que fue suficiente para resolver el problema FAPP en el modelo espín-espín.

Para realizar un análisis detallado del modelo espín-bosón deberíamos encontrar si en este caso existen errores en la preparación del estado inicial del sistema más ambiente en este caso. En particular, habría que mirar con detalle posibles errores en la preparación o medición de los modos bosónicos del ambiente. A su vez, los errores asociados al sistema de dos niveles dependerá del modelo en particular.

En esta sección tomaremos como modelo idealizado al sistema de dos niveles como un espín, y utilizaremos las incertezas fundamentales obtenidas en base al análisis de Kofler y Brukner, tan solo para ilustrar como podría venir la solución al problema FAPP.

Recordemos que en el modelo espín-bosón, a fin de ver que la información de que el sistema se encuentra en una superposición cuántica se pierde al tomar en cuenta el efecto GPP, utilizamos el criterio de concentrarnos en la distancia entre la matriz de densidad evolucionada y la matriz de densidad correspondiente al caso en que ocurrió un colapso. Mirábamos entonces $\text{Tr}((\rho(T) - \rho_{\text{col}}(T))^2)$, a medida que esto decrece se torna más difícil distinguir entre ambos casos, puesto que las predicciones son similares. La matriz de densidad evolucionada era $\rho(T)$, y $\rho_{\text{col}}(T)$ la matriz de densidad evolucionada luego de sufrir un colapso, dada por (2.79)

$$\rho_{\text{col}}(T) = |a|^2|+\rangle\langle+| + |\overline{A}\rangle\langle\overline{A}| + |b|^2|-\rangle\langle-| + |\overline{B}\rangle\langle\overline{B}|. \quad (2.125)$$

Los errores en los observables de espín implicarán una incerteza asociada a las matrices de densidad, y por lo tanto impondrán límites en las matrices de densidad que uno puede en principio distinguir empíricamente. Por ejemplo, dos matrices de densidad cuyas probabilidades difieran a menos de las incertezas fundamentales debido a la preparación son físicamente indistinguibles, puesto que no hay forma de preparar una o la otra con certeza (o

distinguir las en un experimento). Usaremos esta idea para definir un límite en las matrices de densidad que podemos en principio distinguir en experimentos.

Considerando los resultados (2.115)

$$|\uparrow\rangle_k^{\Delta\theta} = |\uparrow\rangle_k + \frac{\Delta\theta}{2}|\downarrow\rangle_k, \quad |\downarrow\rangle_k^{\Delta\theta} = |\downarrow\rangle_k - \frac{\Delta\theta}{2}|\uparrow\rangle_k \quad (2.126)$$

vemos que por ejemplo la matriz de densidad ρ_{col} no es estrictamente esta, sino

$$\rho_{\text{col}}^{\Delta\theta}(T) \approx \rho_{\text{col}}(T) + \frac{(\Delta\theta)^2}{4}|a|^2|-\rangle\langle-| + \frac{(\Delta\theta)^2}{4}|b|^2|+\rangle\langle+| + (t.\text{cruzados}). \quad (2.127)$$

Si miramos la distancia entre estas dos matrices

$$\delta \equiv \sqrt{\text{Tr}\left(\left(\rho_{\text{col}}^{\Delta\theta}(T) - \rho_{\text{col}}(T)\right)^2\right)} \quad (2.128)$$

vemos que $\delta \approx (\Delta\theta)^2$, donde nuevamente podrían haber contribuciones de los términos cruzados, que tan solo darán más errores. Podemos tomar este δ como una distancia mínima entre las matrices de densidad que se pueden distinguir.

Una vez que la distancia entre dos matrices de densidad pasa a ser menor que la incerteza δ no existe forma de distinguir experimentalmente entre las dos. Para los errores obtenidos por Kofler y Brukner tenemos $\delta \approx 10^{-120}$. Dado que el comportamiento de la distancia entre las matrices K obtenida en la sección espín-bosón estaba dominada por la exponencial, asumamos que estamos en la situación en que ω_0 es grande. Entonces

$$K \approx \exp\left[-\frac{\omega_0^2 \tau^2}{\hbar^2}\right], \quad (2.129)$$

y buscamos el valor de ω_0 tal que $K \approx \delta \approx 10^{-120}$. Equivalentemente:

$$\frac{\omega_0^2 \tau^2}{\hbar^2} \approx 120 \ln(10) \approx 10^2, \quad (2.130)$$

de donde

$$\omega_0 \approx \frac{10\hbar}{\tau}. \quad (2.131)$$

Tomando el error fundamental en la medida de tiempos como el obtenido por Ng y van Dam $\tau = T_P^{2/3} T^{1/3}$, y mirando en tiempos del orden de 1 segundo, tenemos

$$\omega_0 \approx \frac{10\hbar}{\tau} \approx 10^{-33} 10^{29} \approx 10^{-4} J. \quad (2.132)$$

Entonces, en este caso podríamos decir que cuando el SDN es lo suficientemente macroscópico para tener diferencias de energías de esos ordenes, uno podría asegurarse que en tiempos de orden 1s no se puede distinguir experimentalmente entre el estado del sistema y el estado que tendría si se encontrara en un estado definitivo. Queremos enfatizar que este resultado se obtuvo en este modelo de juguete como un ejemplo. Para obtener tiempos realistas y energías realistas uno debería hacer un análisis más detallado. En particular, se deberían incluir posibles errores en la preparación o medición de los grados de libertad ambientales.

Capítulo 3

Una interpretación realista de la mecánica cuántica

En el capítulo anterior vimos, en un par de modelos, que la pérdida de coherencia proveniente de expresar la evolución en términos de un tiempo físico provoca que las predicciones sobre un sistema cuántico $\mathcal{S}$ interactuando con un ambiente $\mathcal{E}$ tiendan a ser las mismas que uno obtendría si $\mathcal{S}$ se encontrara en una mezcla estadística perfecta, en determinada base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. En términos de la matriz de densidad de $\mathcal{S} + \mathcal{E}$, $\rho(T)$, esto lo podemos expresar como el hecho de que las probabilidades calculadas a partir de $\rho(T)$ tienden a las predicciones que obtendríamos a partir de $\rho_C(T)$, la matriz de densidad correspondiente al caso en que el sistema $\mathcal{S}$ sufrió un colapso en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Cuando a esto sumamos que hay límites fundamentales en la medición de observables vemos que se llega a una situación de *indecidibilidad* donde no hay forma experimental de distinguir las dos situaciones debido a los errores intrínsecos que habrían si se intenta realizar algún experimento para verificar en cual de los casos se encuentra el sistema.

Puesto que el efecto de la pérdida de coherencia GPP es mayor cuanto más grandes sean las energías involucradas, sistemas con más grados de libertad y/o que acoplen más fuertemente con su ambiente llegarán a un estado indecible más rápidamente que sistemas microscópicos cuasi-aislados. Esto es perfectamente consistente con lo que uno espera en mecánica cuántica: sistemas microscópicos pueden encontrarse en superposiciones cuánticas mientras que sistemas mesoscópicos o macroscópicos se encuentran en estados definitivos.

La base en la que la indecidibilidad ocurre dependerá de la interacción entre el sistema y ambiente; en los dos casos estudiados coincide con la base puntero definida por el proceso de decoherencia inducida por el ambiente. Dado que el efecto GPP ocurre en la base de energía, y algo similar ocurre con la decoherencia inducida por el ambiente¹ es concebible que lo mismo ocurra en otros modelos.

Entonces, indecidibilidad resuelve lo que habíamos denominado como el problema de que *la información está*, que como vimos es el mayor inconveniente en intentar utilizar el proceso de decoherencia para definir la ocurrencia de eventos. Al considerar un tiempo físico y errores en observables vemos que la información de que el sistema se encuentra en una superposición cuántica no puede ser recuperada; se pierde irreversiblemente. En una formulación en términos de un tiempo físico llegará un momento en que no se manifestará de

¹En el caso en que el hamiltoniano de interacción domina la base puntero es la de autoestados de éste, mientras que cuando el hamiltoniano del sistema libre domina la base puntero está compuesta de autoestados de este último.

ninguna forma la superposición cuántica. Veremos en la siguiente sección que esta noción de indecidibilidad puede utilizarse como criterio para la ocurrencia de eventos.

3.1. Criterio para la producción de eventos

Diremos que cuando un sistema se encuentra en un estado $\rho(T)$ tal que no se puede distinguir experimentalmente de una mezcla estadística perfecta ρ_C , es decir hay *indecidibilidad*, un evento ocurrió en el sistema. En general podemos expresarlo formalmente como el siguiente axioma [31]:

Sea $\mathcal{S}$ un sistema cerrado y $A = \sum_n a_n P_{a_n}$ un observable actuando sobre $\mathcal{S}$, con a_n sus autovalores y P_{a_n} los proyectores sobre los subespacios correspondientes. Un evento ocurre cuando no se puede distinguir el estado del sistema al tiempo físico T , dado por

$$\rho(T) = \frac{\int dt P_T \rho(t) P_T}{\int dt \text{Tr}(P_T \rho(t))} \quad (3.1)$$

del estado²

$$\rho_C(T) = \frac{\sum_n \int dt P_{a_n} P_T \rho(t) P_T P_{a_n}}{\int dt \text{Tr}(P_T \rho(t))} = \sum_n P_{a_n} \rho(T) P_{a_n} \quad (3.2)$$

El evento asociado a que la cantidad física A tome el valor a_n ocurre con probabilidad dada por la expresión usual (1.32). Tendremos en este caso que el sistema adquiere la propiedad $\mathbb{P}_{a_n}$.

La matriz de densidad $\rho_C(T)$ no es más que la que uno tendría si hubiera ocurrido un colapso en la base de autovectores de A .

En general el sistema adquiere muchas propiedades en la ocurrencia de un evento, dado que muchos conjuntos de proyectores P_{a_n} cumplirán la condición anterior. Para ver esto consideremos otro observable B con una descomposición en proyectores P_{b_n} . Veremos que la condición para que el sistema adquiera alguna propiedad correspondiente a los proyectores de B , y podamos de esta forma decir que el observable B toma algún valor determinado, es que los subespacios de sus proyectores incluyan a los de los proyectores de A , es decir

$$P_{b_n} P_{a_n} |\psi\rangle = P_{a_n} |\psi\rangle \quad (3.3)$$

y

$$P_{b_m} P_{a_n} |\psi\rangle = 0, \quad \forall n \neq m. \quad (3.4)$$

Cuando estas condiciones se cumplen diremos que el proyector P_{b_n} incluye a P_{a_n} y que la propiedad correspondiente al primero incluye a la correspondiente al segundo, $\mathbb{P}_{a_n} \subset \mathbb{P}_{b_n}$.

Supongamos que tenemos indecidibilidad, $\rho_C(T) = \sum P_{a_n} \rho(T) P_{a_n}$, y veamos que la condición también se cumple para el observable B . Tenemos

$$\sum_n P_{b_n} \rho(T) P_{b_n} = \sum_n P_{b_n} \left(\sum_k P_{a_k} \right) \rho(T) \left(\sum_l P_{a_l} \right) P_{b_n}. \quad (3.5)$$

²El intervalo de integración en las integrales en el tiempo ideal t es el intervalo de tiempo donde el sistema que sea utilizado como reloj funcione como tal.

Utilizando las condiciones entre los proyectores vemos que

$$\sum_n P_{b_n} \rho(T) P_{b_n} = \sum_n P_{b_n} P_{a_n} \rho(T) P_{a_n} P_{b_n}, \quad (3.6)$$

y luego

$$\sum_n P_{b_n} \rho(T) P_{b_n} = \sum_n P_{a_n} \rho(T) P_{a_n} = \rho_C(T). \quad (3.7)$$

Por lo tanto la propiedad correspondiente a B también ocurre, y B toma un valor definitivo.

Llamaremos *propiedad esencial* a la que incluye a todas las otras propiedades que el sistema adquiere. Esta propiedad esencial contiene la información de todas las cantidades físicas que toman un valor definitivo luego de la producción de un evento.

Para entender como funciona veamos un ejemplo sencillo de un sistema con tres espines. Supongamos que el estado inicial es

$$\rho(0) = |c_1|^2 \left(|++-\rangle + |+-+\rangle \right) \left(\langle++-| + \langle+-+| \right) + |c_2|^2 |---\rangle \langle---| \quad (3.8)$$

$$+ \frac{c_1 c_2^*}{\sqrt{2}} \left(|++-\rangle + |+-+\rangle \right) \left(\langle-++| \right) + \frac{c_1^* c_2}{\sqrt{2}} \left(|--+\rangle \right) \left(\langle++-| + \langle+-+| \right) \quad (3.9)$$

Supongamos que la evolución del sistema es tal que ocurre un evento, con propiedades esenciales dadas por

$$P_{a_1} = \left(|++-\rangle + |+-+\rangle \right) \left(\langle++-| + \langle+-+| \right). \quad (3.10)$$

y

$$P_{a_2} = \left(|--+\rangle \right) \left(\langle-++| \right), \quad (3.11)$$

donde la primera se da con probabilidad $|c_1|^2$ y la segunda con probabilidad $|c_2|^2$.

Supongamos que se da la propiedad $\mathbb{P}_{a_1}$. Tendremos entonces que el sistema también adquiere las propiedades compatibles

$$P_{1 \text{ arriba}} = |+\rangle \langle+| \otimes I_2 \otimes I_3 \quad (3.12)$$

y

$$P_{2 \text{ y } 3 \text{ opuestos}} = I_1 \otimes \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right) \left(\langle+-| + \langle-+| \right), \quad (3.13)$$

puesto que cumplen las condiciones de arriba. En el primer caso podríamos decir entonces “el espín 1 apunta hacia arriba” y en el segundo caso decir “los espines 2 y 3 apuntan en direcciones opuestas”.

La propiedad esencial determina las propiedades que todos los subsistemas adquieren. Vemos que tiene sentido preguntarnos si el espín 1 apunta hacia arriba o no, o si los espines 2 y 3 apuntan en direcciones opuestas, pero no podemos preguntarnos si el espín 2 apunta hacia arriba o no, ya que esta última propiedad no es compatible con la propiedad esencial.

3.2. Actualización de la información

Como vimos el concepto de indecidibilidad puede ser utilizado para definir la ocurrencia de eventos en sistemas cerrados, quedando bien definidas todas las propiedades que podrán adquirir los subsistemas.

Debemos agregar un axioma más, que nos indicará como proceder luego de la ocurrencia de un evento, para incluir el hecho de que sólo una de las varias posibilidades se da. Es decir, como vimos luego de que el sistema está en un estado indecidible éste se comporta exactamente como se comportaría una mezcla estadística perfecta, con probabilidades para cada una de los posibles resultados. Al darse uno de estos resultados debemos actualizar nuestra información del sistema para tomar esto en cuenta. El axioma podemos expresarlo formalmente:

Si luego de la ocurrencia de un evento un sistema $\mathcal{S}$ adquiere una propiedad $\mathbb{P}_{a_n}$ la matriz de densidad de éste pasa a ser

$$\rho(T) \longrightarrow \frac{P_{a_n} \rho(T) P_{a_n}}{\text{Tr}(P_{a_n} \rho(T))}. \quad (3.14)$$

No es un axioma sobre nada físico que esté ocurriendo, el proceso físico por el que los eventos se dan es el que lleva a la indecidibilidad. Este axioma es tan sólo de carácter epistemológico, por más que operacionalmente sea igual al postulado del colapso de la interpretación ortodoxa. Podría compararse con el tirar una moneda: cuando ésta está en el aire sólo podemos asignarle el estado “1/2 cara o 1/2 número”, en el momento que vemos el resultado actualizamos nuestra información y le asignamos el estado “número”.

3.3. La Interpretación de Montevideo de la mecánica cuántica

El reemplazar el postulado del colapso de la función de onda por los axiomas introducidos en las dos secciones anteriores dan una interpretación de la mecánica cuántica que ha sido denominada la Interpretación de Montevideo[31, 32, 33, 34]. El ingrediente principal es un mecanismo físico para la producción de eventos: indecidibilidad. Como vimos en el capítulo 1 el problema de la medición consistía por un lado de la falta de un mecanismo físico por el cual observables físicos adquieren valores bien definidos, el *problema de los resultados*, y por otro la falta de un criterio que defina cuales son los observables que toman valores, el problema de la *base puntero*. Ambos aspectos son resueltos por la indecidibilidad.

La decoherencia ambiental juega un papel fundamental en la producción de eventos, por más que no es estrictamente necesaria. Sin embargo, las críticas que sufre la decoherencia ambiental como solución al problema de la medición no son tal para el proceso de indecidibilidad. En primera instancia, debido a que no se basa en la operación de traza parcial sino que en el estado del sistema cerrado, y los eventos que ocurren están bien definidos para todo el sistema, no dependiendo por lo tanto de alguna división en subsistemas. En segundo lugar el criterio es fundamental, y no desde un punto de vista práctico tan sólo.

Por último, vemos que desde el comienzo se deja de lado cualquier tipo de mención a observadores o mediciones propiamente dichas; es una interpretación realista y objetiva. Esto es debido a que la definición de eventos está relacionada puramente al estado en el que se encuentra el sistema, y las predicciones que se obtienen de éste luego de que ocurre la indecidibilidad.

Una de las preguntas más usuales es la de porque el tiempo ha de jugar un papel tan relevante en una solución al problema de la medición. Es fácil darse cuenta que para intententear verificar si luego de algún proceso un sistema se encuentra en una superposición cuántica o en un estado definitivo es necesario determinar instantes de tiempo: el instante inicial y el

instante en el que queremos conocer el estado del sistema. Además, por la naturaleza probabilista de la mecánica cuántica, la determinación de un sistema requiere de una repetición de un mismo procedimiento, en las mismas condiciones. Entonces, errores en la determinación de tiempos o en la determinación del estado inicial o del estado final seguramente impondrá límites en la información que finalmente podamos recuperar del sistema.

Tan importante como esto es el hecho de que si el tiempo ideal t no puede ser determinado con precisión por ningún tipo de procedimiento físico, *ni siquiera tiene sentido de hablar de un sistema al tiempo t* . Las preguntas sobre lo que se pueda determinar o no de un sistema o los procesos físicos que puedan suceder en algún sistema deben ser expresadas en función de cantidades físicas, en este caso el tiempo T . Pero, debido a las incertezas fundamentales en T , no hay una correlación unívoca entre t y T , sino que para un valor de T podrían corresponder varios valores del tiempo ideal t .

Por lo tanto no tenemos la matriz de densidad usual sino que hay que considerar la matriz de densidad efectiva al tiempo T . En general para sistemas microscópicos y con diferencias de energías pequeñas esta será muy similar a la matriz de densidad usual, pero como hemos visto juega un papel fundamental a la hora de resolver el problema de la medición.

Conclusiones y perspectivas

Hemos utilizado el concepto de indecidibilidad, introducido en el capítulo 2, para definir la producción de eventos en mecánica cuántica, y así reemplazar el postulado del colapso de la función de onda. Esto sirve como base para la interpretación de Montevideo de la mecánica cuántica.

Esta brinda una manera sencilla de pensar la mecánica cuántica. En una primera instancia actúa la decoherencia ambiental, dificultando la manifestación de efectos cuánticos en subsistemas. Luego el efecto de considerar un tiempo físico, sumado a incertezas fundamentales en la medición de tiempos y de observables en general hacen que la información de que el sistema cerrado se encuentra en una superposición cuántica no sea recuperable, produciéndose así un evento. Debido a la forma en que actúa el efecto de considerar un tiempo físico y errores en observables, los eventos se darán de forma en general para sistemas con muchos grados de libertad, con energías grandes y que acoplen fuertemente con los ambientes, como es de esperar.

La interpretación tiene la ventaja de estar motivada por un mecanismo físico para la producción de eventos, por lo que no requiere de hipótesis agregadas ad hoc. A su vez, describe una realidad independiente de observadores, a diferencia de muchas otras interpretaciones. Por más que esto es una preferencia filosófica más que un requisito físico, pensamos que debería descartarse toda posibilidad de encontrar sentido a una realidad subyacente sobre el mundo y los fenómenos que lo componen antes de adoptar otra posición.

Quedan varias líneas de trabajo por seguir. Consideramos que en este punto las prioridades serían:

1. Verificar experimentalmente la pérdida de coherencia debido a considerar un tiempo físico

La dificultad radica en que el efecto es exponencial en el cuadrado de las diferencias de energía y en el error en las mediciones de tiempos. Ambas son cantidades muy pequeñas en general. A fin de testear el efecto habría que generar superposiciones cuánticas con diferencias de energías considerables, y mantenerlas por tiempos considerables. Últimamente ha habido mucho trabajo en propuestas para generar superposiciones cuánticas de objetos mesoscópicos y macroscópicas. Algunas consisten en utilizar condensados de Bose-Einstein o SQUIDS para generar los denominados estados “gato de Schrödinger”[35, 36, 37], otras poner un espejo de muy pequeñas dimensiones en una superposición de dos posiciones[38, 39]. Estas propuestas, además de llevar la mecánica cuántica a nuevas escalas, permitirían testear distintos efectos, como pueden ser mecanismos físicos de colapso[40], o nuevas fuentes de pérdida de coherencia. Esto se ve sin embargo muy dificultado por la decoherencia ambiental, que limita seriamente la posibilidad de mantener la coherencia, por lo que testear el efecto GPP parece difícil, al menos con las propuestas actuales.

Otra posibilidad sería buscar procesos cosmológicos que puedan ser influidos por el efecto GPP. Esta perspectiva podría ser más factible que un experimento de laboratorio, dadas las escalas energéticas y temporales que se manejan en cosmología. De hecho ya hay propuestas de utilizar procesos que se dan en algunos períodos cosmológicos como una especie de “laboratorio” para testear distintos tipos de colapsos físicos o mecanismos de pérdida de coherencia[41, 42].

2. Verificar los límites fundamentales en las medidas de intervalos temporales

Como vimos la pérdida de coherencia debida a considerar un tiempo físico depende de los límites fundamentales en las medidas del tiempo. Encontrar experimentos que demuestren que estos existen apoyaría la idea de la necesidad de tratar el tiempo como hemos hecho acá. A los efectos de esto también se han hecho propuestas de utilizar fenómenos cosmológicos para testear los modelos[43].

3. Incluir la interacción entre el reloj y el sistema

Por último, una línea que nos resulta muy interesante es estudiar que ocurre cuando uno toma en cuenta la interacción del sistema de interés con algún sistema siendo utilizado como reloj (recordemos que en este trabajo supusimos que el reloj y el sistema evolucionan de forma independiente). En ciertos modelos se ve que cuando uno utiliza algún sistema cuántico como reloj para determinar algún tiempo característico de otro sistema, por ejemplo el tiempo de vuelo de una partícula, la interacción entre sistema y reloj afecta la cantidad que se intenta determinar (ver por ejemplo el libro de Peres[44]).

Es factible que algo similar ocurra en general, y que la reacción mutua entre sistema-reloj tenga consecuencia sobre la evolución de ambos, posiblemente como una pérdida de coherencia adicional al efecto ya estudiado por GPP.

Bibliografía

- [1] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum Mechanics”, John Wiley & Sons, New York (1977).
- [2] H. D. Zeh, Found. Phys. **1**, 69 (1970).
- [3] H. D. Zeh, Found. Phys. **3**, 109 (1973).
- [4] W. H. Zurek, Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981).
- [5] W. H. Zurek, Phys. Rev. D **26**, 1862 (1982).
- [6] M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267-1305 (2005).
- [7] B. d’Espagnat, Found. Phys. **20**, 1147 (1990).
- [8] R. Gambini, R. Porto and J. Pullin, Gen. Rel. Grav. **39**, 1143 (2007) [arXiv:gr-qc/0603090].
- [9] R. Gambini, R. Porto, J. Pullin, New J. Phys. **6**, 45 (2004) [arXiv:gr-qc/0402118].
- [10] R. Gambini, R. Porto, S. Torterolo, J. Pullin, Phys. Rev.D **79**, 041501 (2009) [arXiv:gr-qc/0809.4235].
- [11] I. L. Egusquiza, L. J. Garay, J. M. Raya, Phys. Rev.A **59**, 3236-3240 (1999) [arXiv:9811009 [quant-ph]].
- [12] L. Diosi, Phys. Lett. A **120**, 377 (1987)
- [13] G. Milburn, Phys. Rev. A **44**, 5401 (1991)
- [14] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [15] Y. J. Ng and H. Van Dam, Annals N. Y. Acad. Sci. **755**, 579 (1995) [arXiv:hep-th/9406110]; Mod. Phys. Lett. A **9**, 335 (1994).
- [16] F.Karolyhazy, Il Nuovo Cimento A**42**, 390 (1966).
- [17] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3415-3422 (1994) [arXiv:gr-qc/9603014].
- [18] Y. J. Ng and H. Van Dam, Class. Quant. Grav. **20** 393 (2003) [arXiv:gr-qc/0209021].
- [19] J. C. Baez, S. J. Olson, Class. Quant. Grav. **19** L121 (2002) [arXiv:gr-qc/0201030].
- [20] R. Gambini, L.P.G. Pintos, J. Pullin, Found. Phys. **40**, 93-115 (2010) [arXiv:0905.4222 [quant-ph]].

- [21] J. P. Paz, W. Zurek, Phys. Rev. Lett. **82**, 5181 (1999).
- [22] R. Gambini and J. Pullin, Found. Phys. **37**, 1074 (2007) [arXiv:quant-ph/0608243].
- [23] A. J. Leggett *et al.*, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987)
- [24] U. Weiss, “Quantum dissipative systems”, World Scientific, Singapore (1999)
- [25] D. Porras, F. Marquardt, J. vonDelft, J.I. Cirac, Phys. Rev. A **78**, 010101 (2008), [arXiv:0710.5145v2 [quant-ph]].
- [26] J. Gilmore and R.H. McKenzie, J. Phys.: Cond. Matt. **17**, 1735 (2005), [arXiv:cond-mat/0401444v3].
- [27] M. Schlosshauer, “Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition”, Springer, New York (2008).
- [28] L. P. Garcia-Pintos, “Fundamental loss of coherence due to real clocks in the spin-boson model: undecidability and the production of events”, in preparation.
- [29] J. Kofler, C. Brukner, “Are there fundamental limits for observing quantum phenomena from within quantum, theory?”, [arXiv:1009.2654v1 [quant-ph]].
- [30] R. Gambini, L. P. Garcia-Pintos, J. Pullin, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 909-918 (2011) [arXiv:1009.3817 [quant-ph]].
- [31] R. Gambini, L. P. García-Pintos, J. Pullin, “Complete quantum mechanics: an axiomatic formulation of the Montevideo Interpretation” [arXiv:1002.4209 [quant-ph]].
- [32] R. Gambini and J. Pullin, J. Phys. Conf. Ser. **174**, 012003 (2009) [arXiv:0905.4402 [quant-ph]].
- [33] R. Gambini and J. Pullin, “Free will, undecidability and the problem of time in quantum gravity” [arXiv:0903.1859 [quant-ph]].
- [34] R. Gambini, L. P. García-Pintos, J. Pullin, J. Phys. Conf. Ser. **306** 012005 (2011) [arXiv:1010.4188 [quant-ph]].
- [35] J. A. Dunningham, K. Burnett, J. Mod. Opt. **48**, 1837-1853 (2001);
- [36] D.Gordon, C.M. Savage, Phys. Rev. A **59**, 4623-4629 (1999).
- [37] J. R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, J. E. Lukens, Nature, **406**, 43 (2000).
- [38] W. Marshall, C. Simon, R. Penrose, D. Bouwmeester, Phys. Rev. Lett. **91**, 130401 (2003).
- [39] O. Romero-Isart, M. Juan, R. Quidant, J. Cirac, New J. Phys. **12**, 033015 (2010).
- [40] G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, Phys. Rev. D. **34**, 470 (1986).
- [41] A. Perez, H. Sahlmann, and D. Sudarsky, Class. Quant. Grav. **23**, 2317 (2006) [arXiv:gr-qc/0508100v3].
- [42] D. Sudarsky, J. Phys. Conf. Ser. **68**, 012029 (2007) [arXiv:gr-qc/0612005].

- [43] W. A. Christiansen, D. J. E. Floyd, Y. J. Ng, E. S. Perlman, Phys. Rev. D **83**, 084003 (2011) [arXiv:0912.0535].
- [44] A. Peres, “Quantum Theory: Concepts and Methods”, Kluwer Academic Publishers, New York (2002).