

Condiciones de estabilidad de la Optimización Dinámica Estocástica aplicada al cálculo del valor del agua de un embalse

R. Chaer y P. Monzón

Abstract—El presente trabajo analiza condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de un algoritmo de optimización dinámica estocástica para el cálculo del costo del agua en un sistema eléctrico con una planta de generación hidroeléctrica. Se estima la región de estabilidad y se presentan diferentes simulaciones para parámetros dentro y fuera de la misma. Se establece una relación entre el paso de integración temporal, la discretización espacial y los máximos flujos de entrada y salida del embalse. A efectos de mostrar ventajas y desventajas del método propuesto, se presentan simulaciones del sistema eléctrico uruguayo con cuatro centrales de generación hidroeléctrica. En este caso, las condiciones de estabilidad imponen un paso de integración temporal muy pequeño, lo que resulta en un tiempo de simulación muy grande.

Index terms: Optimización estocástica, Despacho de potencia.

I. INTRODUCCIÓN

La optimización de la operación de un sistema hidrotérmico resulta ser un problema complejo. Esto se debe a la presencia de embalses y su consecuente operación, que involucra decisiones respecto a cuándo usar el agua y cuánto usar. Estas decisiones afectan no solo la operación actual, sino también la futura.

El problema puede ser formulado como la minimización de una función objetivo: la suma del costo del combustible en las centrales térmicas y del costo de falla por no poder satisfacer la demanda de potencia y energía, con la restricción que imponen la red de transmisión y los límites operativos. Para su resolución, se divide el tiempo en sucesivos *pasos* o *etapas*. En cada etapa, se suponen conocidos los costos de producción de cada unidad térmica y y el costo de falla del sistema. Como el costo del agua en los embalses no tiene un costo explícito asignado, no es posible manejar un costo de producción asociado a las centrales hidroeléctricas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que si el agua en el embalse se usa hoy, la disponibilidad futura puede verse comprometida. Por otro lado, preservar el agua hoy, puede redundar en menos costos en el futuro, ya que puede no ser necesario prender más centrales térmicas. El problema es tener elementos de base para una política de uso de los recursos acumulados que resulte en un compromiso favorable entre los costos actuales y futuros.

En ese sentido, se enfrenta un problema de optimización: minimizar una función de costo sujeta a un conjunto de restricciones. Si bien hay varios métodos para atacar el problema, los más clásicos son el denominado *Stochastic Dynamic Programming* (SDP) y el *Stochastic Dual Dynamic Programming* (SDDP), que incorpora el problema dual. El SDP calcula la función de costo desde el futuro *hacia atrás*, hasta el momento actual. Para realizar este cálculo, se realiza una doble discretización, tanto en el tiempo como en el espacio, para

todas las variables de estado del sistema. Esto lleva naturalmente a trabajar con gran número de variables y a la denominada *maldición de la dimensionalidad* de Bellman, por lo que este método no es aplicable para sistemas grandes [1], [2]. Por otro lado, el SDDP ataca el problema de la dimensionalidad a través de la resolución del problema dual realizando los denominados *cortes de Benders* para aproximar la función de costo. Una buena explicación de este procedimiento puede encontrarse en [3]. El método funciona bien con funciones convexas, pero esto no permite incorporar restricciones naturales, como los mínimos operativos de las centrales térmicas. La no convexidad se traduce en un *gap* que suele ser despreciable en sistemas grandes [4], pero puede ser importante en sistemas medianos y pequeños, en los que, por ejemplo, una única central provee más del 10% de la demanda.

La demanda máxima diaria de potencia en Uruguay ronda los 1000MW. La mayor central térmica tiene una potencia de 125MW, por lo que el sistema es muy pequeño y tenemos que tener en cuenta el eventual *gap*. Por otro lado, al ser el sistema tan pequeño, la maldición de la dimensionalidad se torna manejable, sobre todo teniendo en cuenta la gran capacidad de cálculo con la que se cuenta hoy en día. Incluso técnicas de cálculo en paralelo pueden mejorar todavía más esta ventaja.

El presente trabajo analiza condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de un algoritmo de optimización dinámica estocástica para el cálculo del costo del agua en un sistema con una única central hidroeléctrica. Se deduce una relación entre el paso de integración temporal, el paso de discretización espacial (la altura del embalse en este caso) y los caudales máximos de entrada y salida. Para mostrar ventajas y desventajas de este enfoque, se presenta una simulación del sistema uruguayo con cuatro centrales hidroeléctricas. Se verifica que las restricciones en los pasos de discretización son muy grandes, lo cual resulta en grandes tiempos de simulación.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección II se presenta el problema de programación dinámica, la deducción de la función de costo futuro utilizando una aproximación lineal y las distintas formas de implementar las derivadas involucradas. En la Sección III, se realiza un análisis de estabilidad asintótica para un sistema con un solo embalse y se establece una condición de convergencia. Un ejemplo que ilustra el caso en el que hay más de un embalse es desarrollado en la Sección IV. Finalmente, el artículo se cierra con la exposición de algunas conclusiones y posibles líneas de trabajo futuro.

II. EL PROBLEMA

Como ya se ha mencionado, se quiere optimizar la operación de un sistema eléctrico con una planta de generación hidroeléctrica. Introducimos un paso temporal de discretización para realizar la simulación. Denotemos por k al instante actual. El estado del sistema está dado por el volumen actual V del embalse. Esta variable varía desde el nivel mínimo $V = 0$ hasta el máximo $V = V_{max}$. Esta variable espacial la discretizamos también, con un paso ΔV ; obtenemos así una variable j que varía entre 0 (embalse

cuales elegimos las matrices A_k y b_k respectivamente. Observemos que estos conjuntos son convexos y acotados.

Consideremos dos condiciones iniciales diferentes c_0 and c_0 , es decir, dos valores finales distintos. El algoritmo (9) produce dos secuencias $\{c_k\}$ y $\{c'_k\}$. Probaremos que, en cada paso, las secuencias se aproximan estrictamente. Para medir esta aproximación, utilizaremos la norma infinita para vectores:

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} \{|v_i|\}$$

En el tiempo $k + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= A_k c_k + b_k \\ c'_{k+1} &= A'_k c'_k + b'_k \end{aligned} \quad (10)$$

La optimalidad de las parejas (A_k, b_k) y (A'_k, b'_k) tiene la siguiente consecuencia

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= A'_k c_k + b'_k \\ c'_{k+1} &= A_k c'_k + b_k \end{aligned}$$

(la desigualdad hay que entenderla componente a componente). Entonces

$$\|c_{k+1} - c'_{k+1}\|_\infty = |(c_{k+1})_i - (c'_{k+1})_i|$$

y ocurre una de las siguientes dos posibilidades

$$\begin{aligned} |(c_{k+1})_i - (c'_{k+1})_i| &\leq |[A_k (c_k - c'_k)]_i| \\ |(c_{k+1})_i - (c'_{k+1})_i| &\leq |[A'_k (c_k - c'_k)]_i| \end{aligned} \quad (11)$$

Sabemos que

$$|[A_k (c_k - c'_k)]_i| = \left| \sum_{j=1}^N A_{kij} (c_k - c'_k)_j \right|$$

Por lo tanto

$$|[A_k (c_k - c'_k)]_i| \leq \|A\|_1 \cdot \|c_k - c'_k\|_\infty$$

donde $\|A\|_1$ representa la norma matricial inducida por la norma de vectores que estamos usando [5]:

$$\|A\|_1 = \max_{\|v\|_\infty=1} \{\|Av\|_\infty\} = \max_{i=1, \dots, N} \left\{ \sum_{j=1}^N |A_{ij}| \right\}$$

Para cada k , tenemos la desigualdad

$$\|c_{k+1} - c'_{k+1}\|_\infty \leq \max \{ \|A_k\|_1, \|A'_k\|_1 \} \|c_k - c'_k\|_\infty \quad (12)$$

Concluimos que si toda matriz $A_k \in \mathcal{A}$ has $\|A_k\|_1 < 1$, las dos secuencias generadas por el algoritmo (9) se aproximan a medida que el tiempo transcurre (hacia atrás). Recordemos que

$$A_k = \beta \cdot \left[I + \frac{\Delta T}{\Delta V} (q e_k D_{inc} - q s_k D_{dec}) \right]$$

Entonces, si consideramos los elementos no nulos de las filas de A_k , tenemos para la primera fila que:

$$A_k(1, 1) = \beta \cdot \left[1 - \frac{\Delta T}{\Delta V} [QE_k(1) - QS_k(1)] \right]$$

$$A_k(1, 2) = \beta \cdot \frac{\Delta T}{\Delta V} [QE_k(1) - QS_k(1)]$$

Para las siguientes filas,

$$A_k(i, i-1) = \beta \cdot \frac{\Delta T}{\Delta V} QS_k(i)$$

$$A_k(i, i) = \beta \cdot \left[1 - \frac{\Delta T}{\Delta V} [QE_k(i) + QS_k(i)] \right]$$

$$A_k(i, i+1) = \beta \cdot \frac{\Delta T}{\Delta V} QE_k(i)$$

La última fila de A_k cumple que

$$A_k(N, N-1) = \beta \cdot \frac{\Delta T}{\Delta V} [QS_k(N) - QE_k(N)]$$

$$A_k(N, N) = \beta \cdot \left[1 - \frac{\Delta T}{\Delta V} [QS_k(N) - QE_k(N)] \right]$$

Un detalle importante es que la suma de los elementos de las filas de A_k es siempre igual a β . Esto implica, en particular, que A_k tiene un autovector con todas sus componentes iguales. En segundo lugar, si elegimos $\frac{\Delta T}{\Delta V}$ suficientemente pequeño, todos los elementos de A_k son no negativos. Debe ser

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} \cdot [QE_k(i) + QS_k(i)] < 1, \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} \cdot [QE_k(1) - QS_k(1)] < 1 \quad (14)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} \cdot [QS_k(N) - QE_k(N)] < 1 \quad (15)$$

Los únicos términos que pueden presentar problema son $A_k(1, 2)$ y $A_k(N, N-1)$. Concentrémonos en el primero. Corresponde a la situación del embalse a su mínimo nivel. Entonces, debe ser $QS_k(1) \leq QE_k(1)$, dado que es una restricción impuesta al despacho óptimo (no puede salir más agua que la que entra, pues el embalse está vacío). De manera similar, con el embalse lleno, no podemos acumular más agua, por lo que el despacho óptimo garantiza $QS_k(N) \geq QE_k(N)$. Entonces, el cálculo directo da

$$\|A_k\|_1 = \beta$$

y resulta que toda tasa de descuento no nula garantiza la convergencia. Podemos también concluir que todos los autovalores de la matriz A_k están dentro del círculo unitario, ya que [5]

$$\max\{|\lambda_{A_k}|\} \leq \|A_k\|_1$$

Hemos probado entonces que la distancia entre dos secuencias distintas generadas por el algoritmo (9) tiende a cero en la medida que transcurre el tiempo (hacia atrás). Cada una de estas secuencias es monótona, ya que representan el costo óptimo de operación, y este aumenta al agregar una nueva etapa. Sean \mathcal{K}_A y \mathcal{K}_B cotas para los elementos de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente (como ya vimos, podemos elegir $\mathcal{K}_A < 1$). Consideremos una condición inicial c_0 para el algoritmo. En la primera iteración, tenemos que

$$c_1 = A_0 c_0 + b_0$$

De donde

$$\|c_0\|_\infty \leq \|A_0\|_1 \cdot \|c_0\|_\infty + \|b_0\|_\infty \leq K_A \|c_0\|_\infty + K_B$$

Para la k -ésima iteración, se cumple que

$$\|c_k\|_\infty \leq \|c_0\|_\infty + K_B \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} K_A^i \right)$$

$$\|c_k\|_\infty \leq \|c_0\|_\infty + \frac{K_B}{1 - K_A}$$

Entonces, siempre tenemos secuencias monótonas y acotadas, por lo que son convergentes. Concluimos pues que para cualquier condición inicial, el algoritmo converge a una única solución.

TABLE I

DATOS DEL EJEMPLO DE LA SECCIÓN IV.(*): ALTURA RESPECTO DEL NIVEL DEL MAR; (**): LOS VALORES CORRESPONDE AL 50% DE LA PLANTA, DE PROPIEDAD URUGUAYA.

	Bonete	Baygorria	Palmar	Salto-UY	
Mínima cota del lago [m]	70	53	36	30	*
Máxima cota del lago [m]	81	56	44	35.5	*
Cota de descarga [m]	Baygorria	Palmar	7.5	5	*
Capacidad del lago [Hm^3]	8210	216	2575	3058	**
Caudal medio de entrada [m^3/s]	567	0	290	2358	
Máximo caudal de descarga [m^3/s]	680	828	1373	4200	**
Potencia instalada [MW]	155	108	333	945	**

TABLE II

PARÁMETROS DE OPTIMIZACIÓN DEL EJEMPLO DE LA SECCIÓN IV.

	Bonete	Baygorria	Palmar	Salto-UY
Máximo caudal de entrada [m^3/s]	567	680	970	2358
Máximo caudal de salida [m^3/s]	680	828	1373	4200
Tiempo de llenado del lago (TFL) [días]	168	4	31	15
Tiempo de vaciado del lago (TEL) [días]	139.7	3.0	21.7	8.4
Pasos de discretización [n]	10	5	5	5
Pasos de volumen ($V/(n - 1)$) [Hm^3]	912.2	54.0	643.8	764.5
Tiempo de llenado de un paso de volumen (TFVS) [horas]	446.9	22.1	184.3	90.1
Tiempo de vaciado de un paso de volumen (TFVS) [horas]	372.64	18.12	130.26	50.56

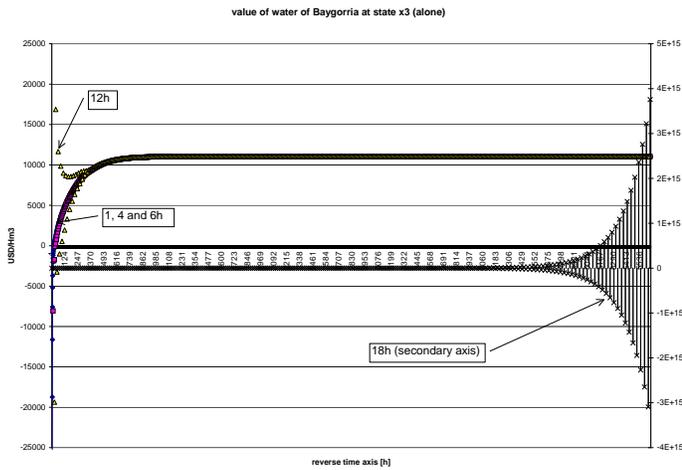


Fig. 1. Valor del agua en Baygorria en el estado x_3 - una única central hidroeléctrica. (El tiempo está revertido y medido en horas).

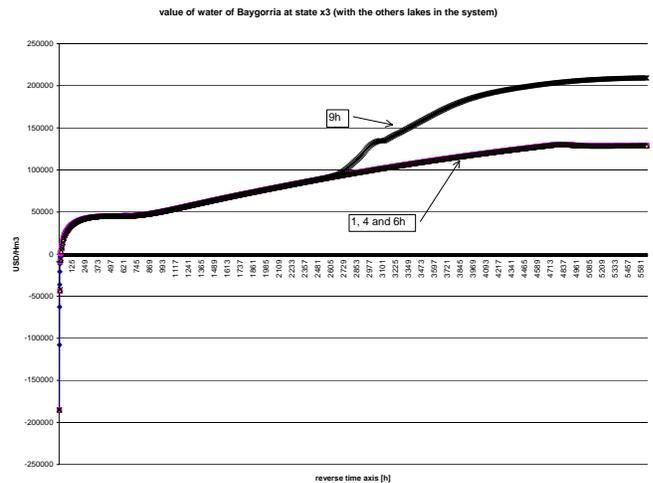


Fig. 2. Valor del agua en Baygorria en el estado x_3 - con todos los lagos del sistema uruguayo. (El tiempo está revertido y medido en horas).

IV. EJEMPLO

El sistema eléctrico uruguayo tiene cuatro centrales hidroeléctricas de generación: "Bonete", "Baygorria" y "Palmar" sobre el río Negro y la central bi-nacional de "Salto Grande" sobre el río Uruguay, compartida con Argentina. Las tres plantas sobre el río Negro están encadenadas, con Bonete aguas arriba, Baygorria en el medio y Palmar aguas abajo. Los parámetros más relevantes de las plantas se muestran en la Tabla I.

A efectos de tener una medida de la estabilidad del algoritmo, hemos realizado la optimización con diferentes pasos de tiempo. En la optimización, consideramos valores medios para los caudales de entrada a los embalses y para las potencias de las distintas centrales, es decir que no consideramos efectos estocásticos. Para la discretización espacial, tomamos cinco puntos para los lagos de Baygorria, Palmar y Salto Grande y diez puntos para el de Bonete.

Conociendo los valores para los caudales máximos de entrada y salida de los lagos, podemos calcular el tiempo de llenado del lago (TFL), el tiempo de vaciado del lago (TEL), el tiempo de vaciado de un elemento de volumen (TEVS) y el tiempo de llenado de un

elemento de volumen (TFVL). Estos valores se muestran en la Tabla II para los cuatro lagos de Uruguay. El criterio de estabilidad (13)-(15) impone un paso temporal menor que el mínimo TFVS y menor que el mínimo TEVS. En el ejemplo, el TEVS de Baygorria determina que el paso temporal debe ser menor que 18 horas.

En primer lugar consideremos sólo presente el lago de Baygorria, con 5 pasos de discretización. En cada etapa de optimización, el costo futuro se calcula para cada uno de los posibles estados del lago x_1 , x_2 , x_3 , x_4 y x_5 . La Figura 1 muestra los resultados obtenidos para el estado x_3 para distintos pasos temporales. Para pasos temporales menores que 6 horas, los resultados son prácticamente idénticos. Para un paso de 12 horas, se aprecian ciertas desviaciones, si bien el algoritmo es estable. Para un paso de 18 horas, el algoritmo es inestable y los cálculos divergen.

Cuando consideramos más de un lago en el sistema, es esperable que la restricción del paso temporal que calculamos anteriormente ya no sea aplicable. La Figura 2 muestra la misma variable que la Figura 1, pero considerando la presencia de todos los lagos. Observamos aquí que las trayectorias correspondientes a pasos temporales de 6 horas

o menos son estables y con resultados similares, en tanto que para un paso de 9 horas se observa un error importante en el cálculo.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos deducido un criterio de estabilidad para la convergencia de un algoritmo de optimización dinámica estocástica para simular el sistema eléctrico y definir así una política óptima de despacho. El criterio muestra que hay un compromiso entre el paso de discretización temporal, el paso de discretización espacial en los embalses y los flujos máximos de entrada y salida de caudal de los mismos. En virtud de las simulaciones realizadas, parece ser razonable elegir un paso temporal del orden de 5 veces menor que la cota teórica, ya que esto parece asegurar un buen control del error numérico, además de la estabilidad del algoritmo. Esto es importante ya que el algoritmo utiliza una aproximación lineal del problema. La cota teórica fue deducida para un sistema con un solo embalse y no se aplica directamente a sistemas con más embalses. A tales efectos, hemos incluido un ejemplo en el que se considera el sistema uruguayo, primero con solo embalse en Baygorria y luego con los

cuatro embalses que realmente existen. Es notoria la reducción necesaria en el paso temporal para obtener resultados razonables. En la actual implementación del simulador, la condición de estabilidad fue mejorada usando técnicas de predicción-corrección, para mantener acotado el error numérico acumulado. El simulador está disponible en forma gratuita en el sitio: <http://iie.fing.edu.uy/simsee/>.

REFERENCES

- [1] Bellman, R. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
- [2] Luemberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [3] Gorenstin, Campodonico, Costa, Pereira, "Stochastic Optimization of a Hydro-Thermal System Including Network Constraints", *IEEE Transactions on Power System*, Vol. 7, No. 2 May 1992, pp 791-797.
- [4] Bertsekas, Lauer, Sandell, Posbergh, "Optimal Short-Term Scheduling of Large-Scale Power Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol.AC-28, No 1, pp. 1-11, Jan 1983.
- [5] Zhou, K., Doyle J.C. *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, 1997.