

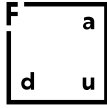
LA RED ESPACIAL KELVIN COMO MATRIZ DE PROYECTO

AUTOR: ARQ. JUAN PABLO TUJA
DIRECTOR: DR. ARQ. FERNANDO DE SIERRA

MAESTRÍA EN ARQUITECTURA
ENCUADRE PROYECTO Y REPRESENTACIÓN

FACULTAD DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

UDELAR
Montevideo, 2023



Facultad de Arquitectura,
Diseño y Urbanismo
UDELAR



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

LA RED ESPACIAL KELVIN COMO MATRIZ DE PROYECTO

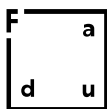
AUTOR: **ARQ. JUAN PABLO TUJA**
DIRECTOR: **DR. ARQ. FERNANDO DE SIERRA**

MAESTRÍA EN ARQUITECTURA
ENCUADRE PROYECTO Y REPRESENTACIÓN

FACULTAD DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

UDELAR

Montevideo, 2023



**Facultad de Arquitectura,
Diseño y Urbanismo**
UDELAR



**UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY**

LA RED ESPACIAL KELVIN COMO MATRIZ DE PROYECTO

AUTOR: **ARQ. JUAN PABLO TUJA**

Tesis de Maestría presentada al programa de Maestría en
Arquitectura de la Facultad de Arquitectura, Diseño y
Urbanismo como parte de los requisitos necesarios para la
obtención del título de Magíster en Arquitectura, en el Área
Proyecto y Representación

DIRECTOR: **DR. ARQ. FERNANDO DE SIERRA**

COLABORADORES:

Arq. Lucía Leal, Bach. Romina Mangini, Bach Alejandro Cuadro, Bach.
Ignacio Fuentes, Bach Leandro Caetano, Bach Lucía Barreda, Arq. Paula
Redondo y Karina Pita

DIRECTOR ACADÉMICO: **DR. ARQ. BERNARDO MARTÍN**

FACULTAD DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

UDELAR

Montevideo, Uruguay
Marzo de 2023

Agradecimientos

Agradezco a todos quienes han colaborado en la realización y conclusión de este trabajo de Tesis.

Especialmente al tutor del trabajo Dr. Arq. Fernando de Sierra. También a quienes colaboraron en la ejecución de materiales gráficos, Arq. Lucía Leal, Bach. Romina Mangini, Bach Alejandro Cuadro, Bach. Ignacio Fuentes, Bach Leandro Caetano, Bach Lucía Barreda, Arq. Paula Redondo y Karina Pita.

Al Psic. Gabriel Galli y al Arq. Marcelo Danza, quienes fueron responsables del dictado de la materia "Arquitectura Compleja" al inicio de la Maestría sobre fines del año 2016, abriendo múltiples puertas de acceso al conocimiento y al pensamiento proyectual.

A quienes cuidaron y acompañaron las múltiples etapas de este trabajo; Fernanda Veloso, Eduardo Córdoba, Milton Panizza, Santiago Sosa, Francisco Pieri, Andrea Gandini, Natalia Zanzi, a mi familia, a mi hermano por su constante colaboración académica, a mi padre, a Magdalena Bianco, a mis hijos Agustín y Francisco, y a las palabras de Dolores Jimenez.

También agradezco al departamento de Arquitectura de la Corporación Nacional para el Desarrollo, al personal de Biblioteca de FADU - Udelar, a la Comisión Académica de Posgrado - Udelar por el apoyo económico a través de su programa de Becas de apoyo a docentes para estudios de posgrado en Udelar. A la pequeña gran familia del Taller Comerci, especialmente al Arq. Franceso Comerci y al Arq. Sergio Barreto por su constante impulso a finalizar el trabajo y a la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo - Udelar.

Finalmente agradezco en forma muy especial a la memoria de Omar Gil y a la de mi madre...

Resumen

El presente trabajo se propone realizar una exploración gráfica y analítica de la estructura geométrica tridimensional denominada red espacial Kelvin. Dadas sus propiedades geométricas de regularidad y repetición, así como sus características relacionales y asociativas, se estima que la confección de un registro detallado de su estructura podría constituir un insumo relevante en la generación de futuros proyectos.

La red espacial Kelvin se define como el conjunto de rectas resultantes de la intersección recurrente de siete haces de planos paralelos coincidentes con las catorce caras del poliedro de Kelvin. Este conjunto de rectas contiene a todas las aristas del octaedro truncado y además particionan de forma regular y repetitiva su interior.

Si bien a priori resulta complejo obtener representaciones gráficas en dos dimensiones de esta red, su construcción se define a partir de operaciones y de reglas muy simples, por lo que se estima permitirá trabajar adecuadamente con herramientas digitales de diseño paramétrico y de fabricación digital.

De esta forma es posible pensar en ampliar las posibilidades de diseño a través de la utilización de un sistema geométrico algo más complejo que el sistema ortogonal, utilizando entornos tecnológicos y productivos más eficientes para intentar generar procesos y productos más rápidos y económicos.

Para realizar el análisis y construir el registro gráfico se utilizarán los modos de aproximación y las herramientas del proyecto arquitectónico y sus nociones básicas. Se emplearon los métodos de representación básicos del proyecto así como nociones generales de orientación y nociones topológicas. Asimismo, las transformaciones geométricas se mapearon de forma secuencial, utilizando la lógica sistémica de los procesos de documentación arquitectónica.

El trabajo busca exponer de forma simple y visual, las propiedades y relaciones geométricas contenidas dentro de esta red espacial tridimensional. El desarrollo del trabajo expuesto corresponde a un recorte temporal acotado de una investigación que se expandió en múltiples direcciones, quedando muchas de estas líneas de investigación por fuera del presente trabajo.

Palabras clave:

Redes espaciales - Poliedro de Kelvin - Geometría

Abstract

The present dissertation intends to carry out a graphic and analytical exploration of the three-dimensional geometric structure named Kelvin spatial network. Given its geometric properties of regularity and repetition, as well as its relational and associative characteristics, it is expected that the creation of a detailed record of its structure could constitute a relevant input in the development of future projects.

The Kelvin spatial network is defined as the set of straight lines resulting from the recurrent intersection of seven parallel sheaf of planes concurrent with the fourteen faces of the Kelvin polyhedron. This set of straight lines contains all the edges of the truncated octahedron and also partitions its interior in a regular and repetitive way.

Even if, a priori, it is complex to obtain two-dimensional graphic representations of this network, its design is based on very simple operations and rules, so it is projected that it will allow to work adequately with digital tools of parametric design and digital fabrication.

Thus, it is feasible to think of expanding the possibilities of design through the use of a geometric system somewhat more complex than the orthogonal system, using more efficient technological and productive environments to try to generate faster and more economical processes and products.

In order to carry out the analysis and build the graphic record, the approximate methods and the tools of the architectural project and its basic notions will be employed. The basic representation methods of the project were used as well as general notions of orientation and topological notions. Furthermore, geometric transformations were mapped sequentially, using the systemic logic of architectural documentation processes.

This dissertation seeks to expose in an easy and graphic way the geometric properties and relationships contained within the three-dimensional spatial network. The development of the work presented corresponds to a limited time frame of a study that diverged in multiple directions, leaving many of these lines of research outside its scope.

Keywords:

Spatial networks - Kelvin polyhedron - Geometry

Índice general

9	Resumen
11	Abstract

1. Fundamentación general

17	1.1 / Introducción
18	1.2 / Objetivos
18	1.3 / Metodología
19	1.4 / Antecedentes
21	1.5 / Rafael Leoz
23	1.6 / Eckhard Schulze-Fielitz
23	1.7 / Toyo Ito
25	1.8 / Sólidos platónicos
27	1.9 / Sólidos arquimedianos
29	1.10 / Representación

2. Análisis geométrico del tetraedro, cubo, octaedro

33	2.0 / Herramientas y criterios de análisis geométricos
35	2.1 / Análisis geométrico del tetraedro
41	2.2 / Análisis geométrico del cubo
47	2.3.1 / Análisis geométrico del octaedro (posición tipo I, apoyado en cara triangular)
52	2.3.2 / Análisis geométrico del octaedro (posición tipo II, apoyado en vértice)

3. Análisis geométrico del octaedro truncado

61	3.0 / Octaedro truncado
61	3.1 / Génesis por sustracción
63	3.2 / Octaedro truncado / Posición tipo I (apoyado en cara hexagonal)
67	3.3 / Génesis por adición / Posición tipo I (apoyado en cara hexagonal)
75	3.4 / Octaedro truncado / Posición tipo II (apoyado en cara cuadrada)
80	3.5 / Génesis por adición / Posición tipo II (apoyado en cara cuadrada)
87	3.6 / Conclusiones sobre teselaciones, espumas y redes espaciales

4. Aproximación a la red Kelvin

90	4.1 / Aproximación a la red Kelvin
----	------------------------------------

5. Consideraciones finales

109	5.0 / Consideraciones finales
-----	-------------------------------

6. Bibliografía y fuentes consultadas

115	7.0 / Referencias bibliográficas / generales
115	7.1 / Referencias bibliográficas / específicas

7. Anexos

118	ANEXO / I A
118	Propiedades dimensionales de triángulos
119	ANEXO / I B
119	Propiedades dimensionales de triángulos
120	ANEXO / I C
120	Propiedades dimensionales de triángulos
121	ANEXO / II A
121	Zuecos irregulares / Sección vertical
122	ANEXO / II A
122	Zuecos irregulares / Sección horizontal

1. Fundamentación general

1.1 / Introducción

Partiendo de los “conceptos primitivos” de punto, recta y plano utilizados como punto de partida en la geometría Euclidiana, es posible definir el concepto de red espacial como el lugar geométrico de aquellos puntos que pueden inscribirse en rectas y planos que cumplen determinadas propiedades y relaciones en el espacio, capaces de ser identificables y modelizables. A priori resulta de interés explorar redes que presenten propiedades regulares, que puedan ser fácilmente comprensibles, modelables y que permitan trabajar proyectualmente con sus elementos.

El presente trabajo se propone realizar una exploración gráfica y analítica de la estructura geométrica tridimensional denominada red espacial Kelvin. Dadas sus propiedades geométricas de regularidad y repetición, así como sus características relacionales y asociativas, se estima que el registro realizado sobre las características de su estructura podría constituir un insumo relevante en la generación de futuros proyectos.

El poliedro de Kelvin (definido a partir de la red espacial) se constituye como una interesante puerta de entrada en la exploración de geometrías espaciales alternativas al sistema ortogonal. En su génesis interior así como en la definición de sus caras se encuentra presente el triángulo equilátero y el cuadrado, estableciendo "a priori" una interesante combinación entre figuras planas deformables e indeformables. A su mismo su conformación unitaria y regular permiten comprender rápidamente sus características geométricas, abriendo el camino hacia el estudio "abstracto" de la red general.

Para realizar el análisis y el registro se utilizarán los modos de aproximación y las herramientas del proyecto arquitectónico, lo cual permitirá crear nuevas asociaciones entre las lógicas de representación propias de la disciplina y elementos abstractos como polígonos, poliedros y redes espaciales. Para confeccionar los gráficos se utiliza el sistema diédrico ortogonal, vistas perspectivas, completas y seccionadas, así como esquemas de diversos tipos. Complementariamente se utilizaron nociones generales de orientación y nociones topológicas. Las transformaciones geométricas se mapearon de forma secuencial, utilizando la lógica sistémica de los procesos de documentación arquitectónica.

El método general de trabajo se ha basado fundamentalmente en el ensayo y en el error de múltiples vías de aproximación a los temas expuestos, prescindiendo por completo de herramientas y de procesos derivados del análisis matemático complejo. En su lugar se integraron conceptos básicos de la disciplina arquitectónica como las operaciones de sustracción, adición, intersección, modos de orientación espacial, puntos cardinales, nociones topológicas (arriba, abajo, izquierda, derecha, anisotropía espacial¹, etc). Finalmente se utilizaron también condiciones "naturales" de posicionamiento relativo, como la presencia de la gravedad, la manipulación de la iluminación, las sombras y los contrastes.

La expectativa del trabajo radica en que los registros construidos puedan entregar valor y servir como insumo en futuros procesos proyectuales, teniendo en cuenta las facilidades que otorgan las herramientas de diseño y fabricación digital a la hora de trabajar con geometrías complejas, alejadas de las geometrías definidas por las redes ortogonales.

A modo de cierre, se presentan tres posibles exploraciones de diseño basadas en la manipulación de componentes constitutivos de la red espacial Kelvin.

¹ Anisotropía. característica de algunos fenómenos en el espacio cuyas propiedades no dependen de la dirección en que son examinadas.

1.2 / Objetivos

Objetivo general:

Construir un registro gráfico de las características geométricas de la red espacial Kelvin, incluyendo sus propiedades topológicas y dimensionales, utilizando las herramientas y los modos de aproximación del proyecto arquitectónico.

Objetivos específicos:

- _ Desarrollar un posible método de análisis gráfico, que puede replicarse en otros campos.
- _ Configurar nuevas preguntas sobre el empleo de entidades geométricas no ortogonales en diseños de proyectos arquitectos.

1.3 / Metodología

Inicialmente se observaron las características generales del poliedro de Kelvin, para poder identificar los elementos recurrentes que conforman su estructura. Una vez identificados se conformó una serie de registros gráficos en los cuales se intentó comunicar de forma simple y sintética, (de menor a mayor complejidad) los modos de agrupación, repetición y construcción de las geometrías singulares que conforman finalmente la red Kelvin.

De esta forma el análisis geométrico parte de los tres sólidos platónicos constitutivos de la red espacial Kelvin, el tetraedro, octaedro y cubo. En este análisis se registran sus propiedades básicas y se construye un relato sobre sus posibles ubicaciones en el espacio.

A continuación se realiza un análisis similar del poliedro de Kelvin, identificando dos posibles posiciones en el espacio. Este análisis se vincula con el anterior y establece múltiples asociaciones, que permiten entender los vínculos existentes entre los distintos poliedros y las figuras geométricas que los definen.

Finalmente el análisis del poliedro de Kelvin se extiende a lo que se denominó en esta investigación red espacial Kelvin, constituida por la repetición de los elementos esenciales que componen el poliedro, que es a la vez capaz de teselar el espacio en cualquier dirección. Esta red se puede definir a partir de la suma de Octaedros y Tetraedros de igual longitud de arista, siguiendo un preciso modo de agrupación que será explicado y desarrollado a lo largo de varios capítulos.²

² Es posible también definir al red espacial Kelvin a partir de la adición de semi-octaedros (pirámides regulares de base cuadrada) y tetraedros (pirámides regulares de base triangular)

1.4 / Antecedentes

Si bien el vínculo entre geometría tridimensional y diseño (incluyendo el diseño arquitectónico y urbanístico) resulta indisociable, se pueden registrar episodios de gran intensidad en el transcurso de las décadas del 60' y del 70'. Allí la geometría espacial tridimensional produjo un soporte casi fundacional, sobre el cuál se desarrollaron y formularon, nuevas exploraciones, propuestas utópicas a nivel edilicio y urbano. Estos proyectos se caracterizaron por la definición de una estructura espacial general (casi siempre detalladamente definida en términos de su geometría) sobre las que se adicionan y se repiten diferentes componentes. Al mismo tiempo en muchos de estos proyectos se puede encontrar una cierta aspiración a que dichos elementos tuviesen una configuración flexible, permitiéndole en algunos casos moverse, crecer, etc.

Este modo proyectual, desencadenó un profundo estudio sobre las propiedades geométricas básicas de diferentes tipos de sólidos y sobre las múltiples formas de relacionarse. Estos estudios se convirtieron en insumos esenciales de proyecto, pero que no trascendieron las fronteras de los estudios de los diseñadores y arquitectos.

Entre quienes se embarcaron en estas exploraciones geométricas destacan varios grupos y algunos individuos que al modo de las vanguardias históricas de principio de siglo, construyeron múltiples relatos asociados a imágenes proyectuales cargadas de una fuerte pregnancia. Entre estos grupos se pueden citar los grupos más difundidos por la historiografía como: Archigram, Archizoom, Metabolistas, Superstudio y el trabajo de individuos como: Yona Friedman, Buckminster Fuller, Constant Nieuwenhuys³, Eckhard Schulze-Fielitz, Isamu Noguchi, Cedric Price y el español Rafael Leoz. Cabe también mencionar el trabajo de Reyner Banham, como crítico y lúcido lector del contexto que se estaba viviendo en ese momento⁴. Dado que el campo de antecedentes es muy vasto, el trabajo optó por realizar dos tipos de aproximaciones con mayor intensidad:

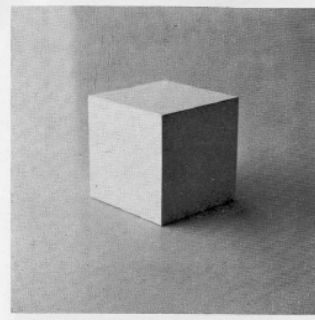
Por un lado se expondrá el trabajo de corte abstracto y experimental de los arquitectos Rafael Leoz y Eckhard Schulze-Fielitz, basados en la premisa de estudiar y analizar geometrías complejas para luego generar proyectos arquitectónicos y urbanos capaces de constituirse como organismos capaces de dar respuesta a cuestiones como el crecimiento, la adaptabilidad y la flexibilidad.

El segundo tipo de aproximación corresponde a la presentación de dos proyectos del arquitecto japonés Toyo Ito que utilizan como matriz inicial la combinación de poliedros, inscriptos dentro de la red espacial Kelvin. Estos proyectos son: el proyecto para el concurso de la nueva biblioteca central Deichman en Oslo del año 2008 (proyecto no construido) y el proyecto para el museo de arquitectura en Imabari, Japón del año 2009, construido en el año 2011.

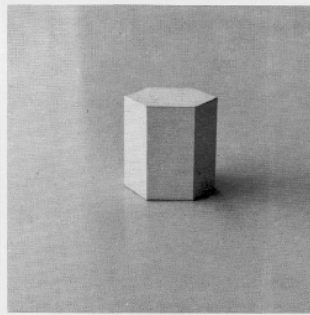
A continuación se realiza una presentación general a los conceptos de sólidos platónicos y sólidos arquimedianos, iniciando así el análisis de sus propiedades y características geométricas que se profundizará en los capítulos siguientes. Al cierre del capítulo se realiza un breve comentario sobre los procesos de representación gráfica de estos poliedros.

3 New Babylon (1956) "Consistía en una amplia red de espacios interiores de diversos niveles que se propagaría para cubrir, eventualmente, el planeta. Estos espacios interconectados, llamados sectores, tendrían múltiples pisos con suelos transparentes, sostenidos en el aire por altas columnas de diseño variable" "Cada aspecto del entorno podía ser controlado y reconfigurado de forma espontánea. Se trataba de una urbe lúdica donde los neobabilonios serían libres para crear y recrear la ciudad a su gusto."
Tomado de: <https://www.macba.cat/es/arte-artistas/artistas/constant/new-babylon>

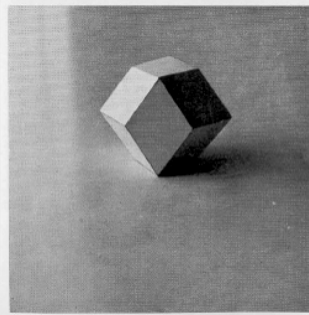
4 En otras disciplinas como la danza también se producen aproximaciones e investigaciones desde la geometría asociada a los poliedros, como en el caso del Icosaedro de Rudolph Laban.



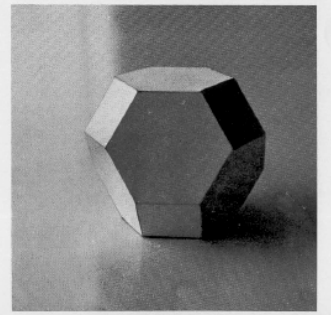
cubo o hexaedro regular



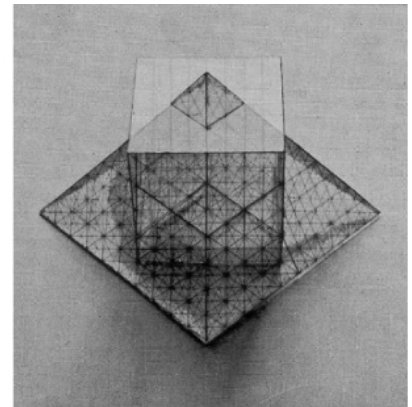
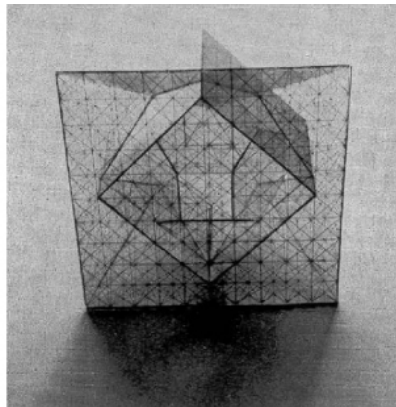
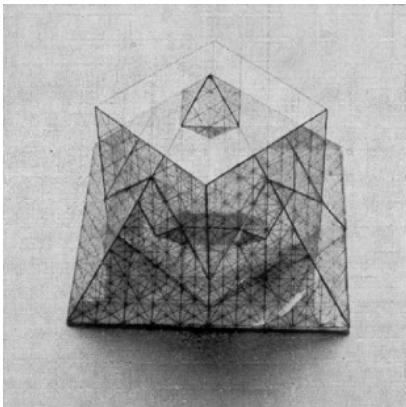
prisma recto de base hexagonal regular



rombododecaedo



poliedro de Lord Kelvin



Poliedro de Lord Kelvin inscrito en cubo y pirámide cuadrangular regular

1.5 / Rafael Leoz

El Arquitecto español Rafael Leoz a finales de la década del 60' en su libro "Redes y ritmos espaciales", realizó una exploración gráfica en buscando encontrar sistemas de organización y modulación que permitieran facilitar la industrialización de la producción de vivienda, con altas calidades espaciales. En su exploración desarrolló la construcción de redes espaciales sistematizadas, entendiéndolas como formas de "dividir o compartimentar el espacio tridimensional cartesiano obedeciendo a un sistema o a unas normas y no de una forma arbitraria o anárquica"⁵.

Distingue un grupo de redes espaciales sistematizadas en la que se encuentran infinitos puntos centrales de simetría radial, todos con la misma jerarquía. Para Leoz esta propiedad es a priori útil para el diseño de espacios arquitectónicos y establece que: "Solamente existen cuatro poliedros con simetría central que tengan la propiedad de macizar el espacio tridimensional cartesiano, sin dejar huecos entre ellos." "Estos cuatro poliedros son: El cubo o hexaedro regular, el prisma recto de base hexagonal regular, el rombododecaedro y el heptaparaleleodro o poliedro de Lord Kelvin"⁶

Al colocar cada uno de estos poliedros uno al lado del otro (conservando la escala) y haciendo coincidir sus caras, aristas y vértices, se obtienen cuatro tipos de redes espaciales que Leoz denomina como redes espaciales "conformes" ya que no dejan huecos o vacíos de espacio entre los poliedros. Comenta también que estas cuatro redes prototípicas podrán ser sometidas a deformaciones geométricas tales como "alargamientos" o "achatamientos" que deriven en una nueva retícula espacial donde las dimensiones lineales y angulares habrán cambiado, conservando la propiedad fundamental de macizar el espacio tridimensional.

En cuando a la red definida por el poliedro de Kelvin, Leoz explica que: "hay dos grandes y únicos sistemas: el derivado del cuadrado y el derivado del triángulo equilátero"⁷. Es importante también destacar que tanto el cuadrado como el triángulo equilátero, presentes en la definición del sistema poseen la misma longitud de arista, lo cual resulta a priori una ventaja importante para la definición de un sistema proyectual.

También expone múltiples formas de arribar a la definición del poliedro a través de operaciones de adición o sustracción entre el cubo, el octaedro, y la pirámide de base cuadrada (equivalente a medio octaedro).

Adicionalmente observa que es posible: "encontrar volúmenes que se comprenden unos dentro de otros..." "..." todos semejantes, dando lugar a unas series crecientes o decrecientes que, partiendo de una unidad, el cubo, o el poliedro de Lord Kelvin, según queramos, nos llevan de lo infinitamente grande hasta lo infinitamente pequeño, a través de un crecimiento o decrecimiento discontinuo". De esta forma se evidencia la posibilidad de recorrer la red espacial, a través de cambios de escala por disminución o aumento de componentes, conservando las propiedades geométricas, adquiriendo un comportamiento similar al de los fractales.

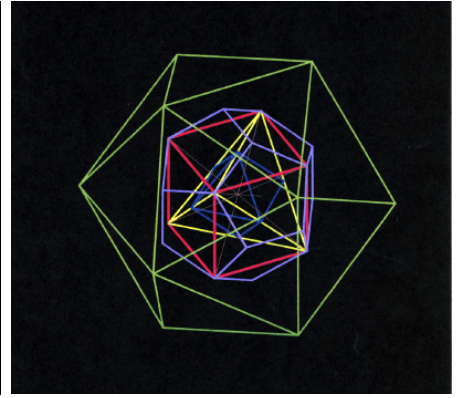
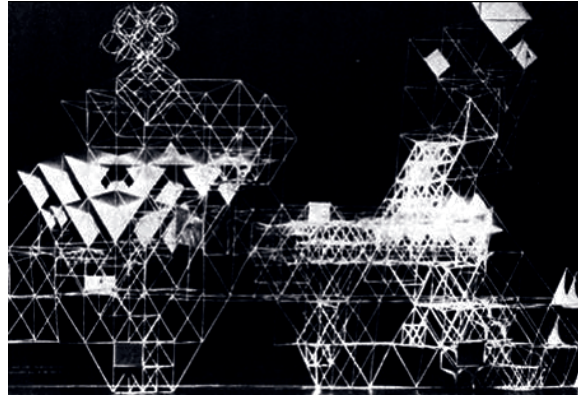
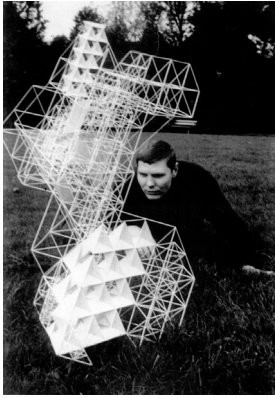
La investigación de Leoz se configura como un importante insumo sobre el tema de estudio del presente trabajo, ya que establece un sistema de análisis a lo largo del libro y además genera un sistema de representación basado en gráficos bidimensionales y en fotografías de maquetas realizadas algunas de ellas en acrílico transparente para evidenciar las características de los volúmenes detrás de las caras que se muestran en primer plano.

Resulta notable el esfuerzo de Leoz por presentar de forma simple y didáctica los diferentes temas asociados a las redes espaciales llevando los medios y la tecnología disponible al límite.

⁵ LEOZ, Rafael. Redes y ritmos espaciales. Madrid: Blume, 1969. 209 p.

⁶ Ibid.

⁷ Este concepto se desarrollará en el capítulo 4. Aproximación a la red Kelvin.

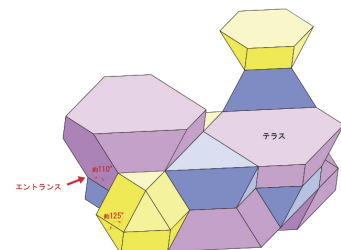
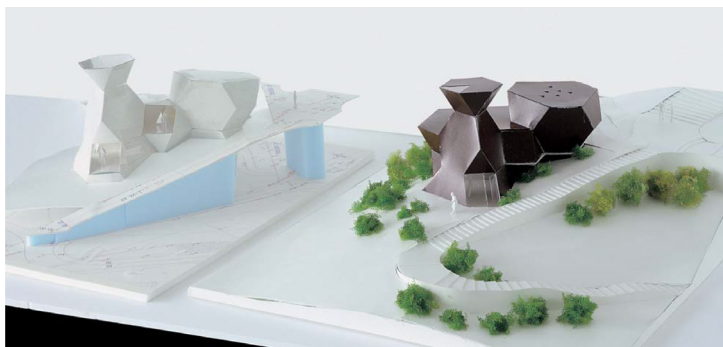
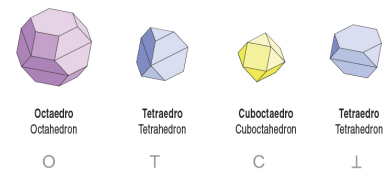


Ciudad espacial "Raumstadt"

Metaeder



Biblioteca Central Deichman / Oslo / Concurso 2008



Museo de arquitectura / Imabari - Japón / 2009

1.6 / Eckhard Schulze-Fielitz

A partir del año 1959, el Arquitecto Alemán Eckhard Schulze-Fielitz desarrolló el proyecto para la “ciudad espacial” denominada Raumstadt.

En este trabajo desarrolló: “un sistema de clasificación espacial”⁸ “que fuese capaz de modularse y crecer a partir de unas pocas partículas elementales y una ley de formación que determina como dichas partículas pueden agregarse”.⁹ La ciudad espacio de Raumstadt se configura “como una capa cristalina, igual que las formaciones geológicas, con picos y valles, cañones y mesetas, la Raumstadt debía acompañar el perfil del paisaje, constituyendo otro paisaje en sí mismo: El núcleo geométrico de estos conceptos se formaliza en el llamado Metaeder (a partir de 1960), una figura tridimensional que incluye los cinco poliedros platónicos situados en diferentes posiciones del espacio.”¹⁰

Esta exploración en la que los límites entre el edificio y la ciudad se funden, es quizás una acción anticipatoria o concurrente con el concepto de "Megaestructura" desarrollado por Reyner Banham en su libro homónimo de 1964, en el que pueden encontrarse variedad de ejemplos en los que coinciden el análisis geométrico como insumo esencial de proyecto.

1.7 / Toyo Ito

Nueva Biblioteca Central Deichman en Oslo del año 2008 / propuesta de concurso (proyecto no construido)

Este proyecto se define a partir de la repetición de tres poliedros semi-regulares, distribuidos dentro de la red espacial Kelvin. Los tres poliedros seleccionados son el octaedro truncado, el tetraedro truncado y el cuboctaedro. Siguiendo una estrategia de proyecto similar a la empleada en la mediateca de Sendai, en este proyecto se definen "tubos estructurales" a través del apilamiento de poliedros siguiendo una secuencia preestablecida.

El edificio presenta ocho niveles. En cada nivel los planos horizontales se definen a través de una red plana de triángulos equiláteros, cuyos lados coinciden en longitud con el largo de las aristas de los poliedros. La red espacial se encuentra orientada según la posición tipo I, la cual se describirá con más detalle en el capítulo 3.

Museo de arquitectura en Imabari, Japón del año 2009 (construido en el año 2011)

De un modo similar al proyecto anterior en este proyecto se utilizan el octaedro truncado, el tetraedro truncado y el cuboctaedro como elementos generadores del proyecto.¹¹ En el caso del octaedro truncado y del tetraedro truncado se utilizan uno o dos niveles del volumen total del poliedro. La cavidad de espacio generado siempre se deja libre, a diferencia de la operación realizada en el proyecto de la biblioteca, en donde los planos horizontales de la red espacial se extienden e invaden todos los volúmenes. La singularidad de la geometría resultante del edificio y el contraste generado con el contexto natural que lo rodea, le brindan un carácter icónico, fácilmente reconocible.

8 Arquitectura Viva N° 136, 2011. De vuelta a la utopía. Yona Friedman y Eckhard Schulze-Fielitz, en diálogo. Eva Birkenstock. Pág 74-75.

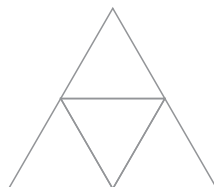
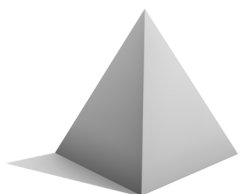
9 Ibid.

10 Ibid. Imágenes tomadas de Pinterest y del libro Eckhard Schulze-Fielitz, Metasprache des Raums/Metalanguage of space . Viena: Springer Vienna Architecture, 2009. 536 p. A esta disposición de sólidos platónico contenidos uno dentro de otros se le conoce también como Omnipoliedro.

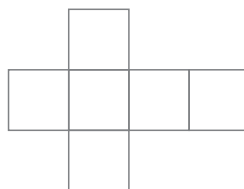
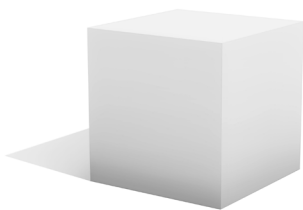
11 En este proyecto el tetraedro truncado se dispone en dos ubicaciones espaciales diferentes con respecto al nivel del plano de suelo: apoyado en cara hexagonal y apoyado en cara triangular

Sólidos platónicos

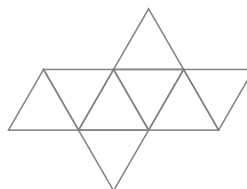
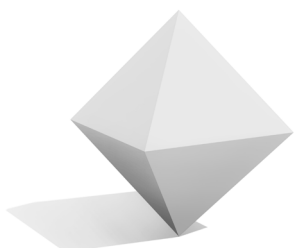
TETRAEDRO



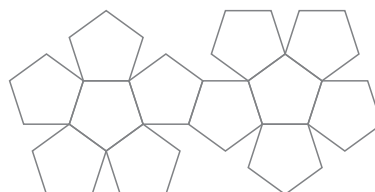
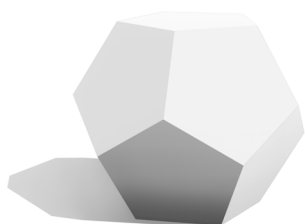
HEXAEDRO



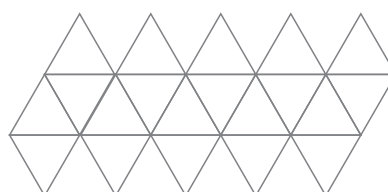
OCTAEDRO



DODECAEDRO



ICOSAEDRO



1.8 / Sólidos platónicos

Los sólidos platónicos¹² son poliedros convexos¹³, cuyas caras se definen por un mismo tipo de polígono regular¹⁴ lo cual determina que todas sus aristas tengan la misma longitud.

Al mismo tiempo en todos sus vértices concurren la misma cantidad de aristas, con idéntica posición relativa en el espacio, de esta manera los diedros definidos por los caras de los poliedros presentan siempre el mismo valor angular. De esta forma se definen dos de las propiedades más importantes de estos sólidos, la CONVEXIDAD y la REGULARIDAD.

Los sólidos platónicos son cinco: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Esta lista es exhaustiva, ya que no es posible construir otro sólido diferente de los cinco anteriores que cumpla las propiedades de convexidad y regularidad.

Complementariamente los sólidos platónicos cumplen con otra propiedad que es la de CONJUGACIÓN, o DUALIDAD. Esta propiedad establece que al trazar un poliedro ubicando los vértices en los centros de las caras de un sólido platónico se obtiene otro sólido platónico con la misma cantidad de aristas del sólido inicial.

El poliedro dual del tetraedro, es otro tetraedro, en el caso del cubo es el octaedro (y viceversa) y en el caso del icosaedro es el dodecaedro.

A lo largo del presente trabajo se estudiarán únicamente el tetraedro, el cubo y el octaedro.

A continuación se presentan los ángulos que definen los diedros de sus caras:

Tetraedro:	70.53 °
Cubo:	90.00 °
Octaedro:	109.47 °

Para el caso puntual de estos tres poliedros existen otras formas de conjugación en donde es posible "anidar" un poliedro dentro de otro. Por ejemplo es posible recomponer dos tetraedros dentro de un cubo a través de la conexión de cuatro de sus vértices, utilizando seis de las doce diagonales que contienen sus seis caras.

También es posible definir un octaedro dentro de un tetraedro conectando todos los puntos medios de sus seis aristas, transformándolos en seis vértices.¹⁵

En todo ellos es posible definir un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices y de sus aristas. Dada esta propiedad es posible trazar en todo sólido platónico tres esferas particulares, todas ellas centradas en el centro de simetría del poliedro.

Una esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.

Una esfera tangente a todas las aristas en su centro.

Una esfera circunscrita, que pase por todos los vértices del poliedro.

De los cinco sólidos solamente el cubo tiene la capacidad de TESELAR el espacio, es decir que a partir de su repetición espacial es capaz de completarlo sin dejar espacios libres. La suma del tetraedro y octaedro con algunas condiciones especiales son capaces también de teselar el espacio. (ver Anexo II)

Los sólidos arquimedianos o sólidos de Arquímedes son trece poliedros convexos cuyas caras están definidas por

12 Nombre otorgado en honor al filósofo griego Platón (427a. C. -347a. C.) al que se le atribuye haberlos estudiado por primera vez.

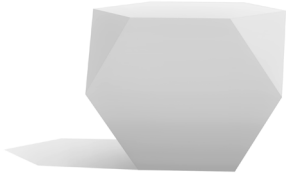
13 Se define un poliedro como convexo cuando, al definirse un plano en el espacio coincidente con una de sus caras, el poliedro en su totalidad queda ubicado uno de los semiespacios determinado por ese plano.

14 Un polígono regular (geometría plana) se define cuando todos sus lados y ángulos interiores son iguales entre sí.

15 En 1960 el Arq. Alemán Eckhard Schulze-Fielitz desarrolló el concepto de "Metaeder" utilizando múltiples conjugaciones para "anidar" unos dentro de otros los cinco sólidos platónicos.

Sólidos arquimedianos

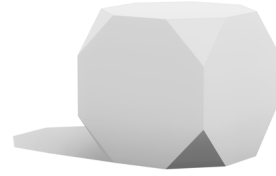
TETRAEDRO TRUNCADO



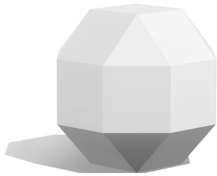
CUBOCTAEDRO



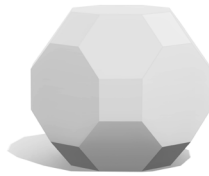
CUBO TRUNCADO



ROMBICUBOCTAEDRO



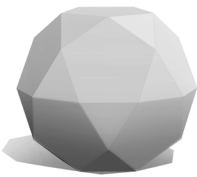
CUBOCTAEDRO TRUNCADO



CUBO ROMO



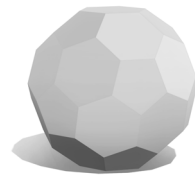
ICOSIDODECAEDRO



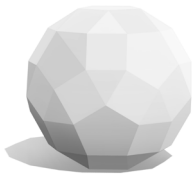
DODECAEDRO TRUNCADO



ICOSAEDRO TRUNCADO



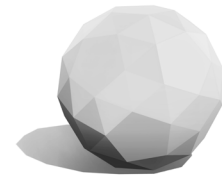
ROMBICOSIDODECAEDRO



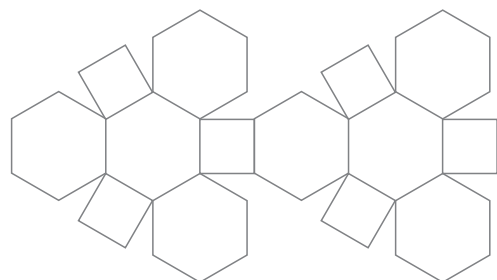
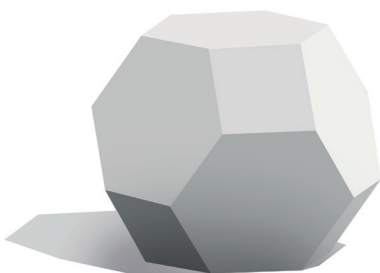
ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO



DODECAEDRO ROMO



OCTAEDRO TRUNCADO



1.9 / Sólidos arquimedianos

polígonos regulares de dos o más tipos. Todos los sólidos de Arquímedes poseen vértices uniformes. La mayoría de ellos se obtienen a partir de truncamientos de los sólidos platónicos. Arquímedes realizó varios estudios sobre estos poliedros, los cuales se retomaron en el Renacimiento por artistas y matemáticos.

Siete sólidos arquimedianos se pueden obtener truncando sólidos platónicos:

El tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, el octaedro truncado, el icosidodecaedro, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado.

En el presente trabajo se estudiará el octaedro truncado, el cual se puede obtener a partir del truncamiento del cubo y del octaedro (sólidos platónicos que a su vez son duales entre sí). Los polígonos regulares que definen sus caras son el hexágono y el cuadrado. Entre sus caras se pueden medir dos diedros¹⁶ diferentes, dependiendo del tipo de polígono contiguo la arista de referencia. Los 36 diedros se definen de la siguiente forma:

Diedro 1 (cantidad 24) $_ 109.47^\circ$ ¹⁷ entre caras hexagonales

Diedro 2 (cantidad 12) $_ 125.26^\circ$ entre caras hexagonales y cuadradas

El octaedro truncado (denominado también como poliedro de Kelvin) es el único dentro de los trece sólidos arquimedianos capaz de TESELAR el espacio, a partir de su repetición en el espacio bajo determinadas condiciones particulares.

En el año 1887 el físico y matemático Lord Kelvin exploró cómo podría particionarse el espacio, utilizando celdas de igual volumen con la menor área de contacto entre ellas. Este problema se llamó problema de Kelvin. Para resolverlo propuso dividir el espacio a través de una estructura poliédrica conformada por octaedros truncados, pasando a denominarse como poliedro de Kelvin¹⁸.

Es posible obtener el poliedro de Kelvin a través de dos operaciones:

$_$ Sustracción: Intersectando un cubo con un octaedro

$_$ Adición: Sumando tetraedros, octaedros, semi y cuartos octaedros

Estas operaciones a su vez poseen dos ubicaciones espaciales relativas dependiendo de la posición definida del poliedro con respecto al plano vertical.

$_$ Posición 1: Poliedro apoyado sobre cara hexagonal

$_$ Posición 2: Poliedro apoyado sobre cara cuadrada

Construyendo el poliedro a partir del proceso de adición, es posible develar que dentro del poliedro existe una red espacial tridimensional que presenta propiedades singulares, que pueden ser codificadas y simplificadas para utilizarse como insumo de proyecto.

A esta red en el presente trabajó se le denominó: RED ESPACIAL KELVIN.

Respresentación bidimensional

¹⁶ Diedro o ángulo interior entre planos definidos por las caras de un poliedro convexo.

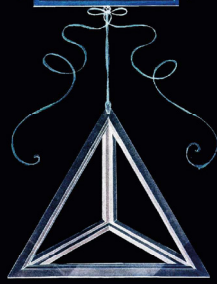
¹⁷ Este diedro presenta un valor idéntico al del octaedro regular (Ver sólidos platónicos).

¹⁸ Desde 1887 hasta 1993, el octaedro o Poliedro de Kelvin, cuya teselación del espacio se llamó "estructura de Kelvin" fue la solución al problema sobre cómo particionar el espacio en celdas de igual volumen con el área más pequeña de contacto entre ellas. En 1993 los físicos Irlandese Denis Weaire y Robert Phelan descubrieron un contraejemplo, utilizando celdas de igual volumen con dos formas diferentes, resultando una superficie 0.3 % menos que la estructura de Kelvin, aunque aún no se considera como una estructura óptima. Este modelo se conoce como estructura de Weaire-Phelan.

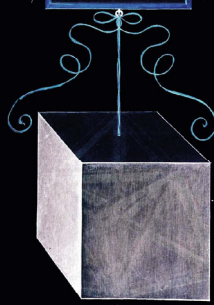
TETRAEDRON PLANVS
SOLIDVS



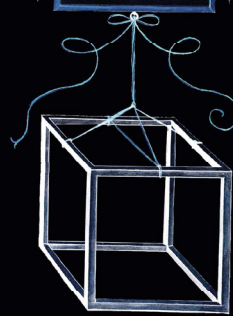
TETRAEDRON PLA
NVS-VACVVS



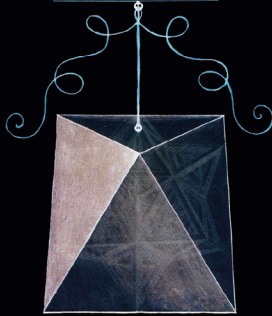
EXACEDRON PLANVS
SOLIDVS



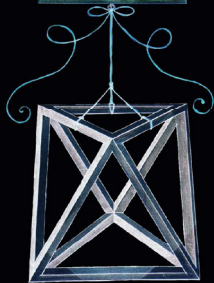
EXACEDRON PLANVS
VACVVS



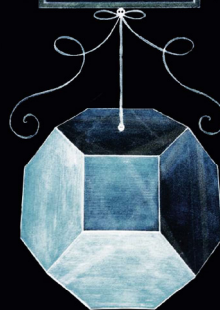
OCTOEDRON PLANVS
SOLIDVS



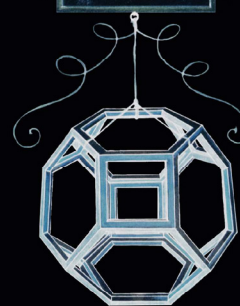
OCTOEDRON PLANVS
VACVVS



OCTOEDRON ABSISVS
SOLIDVS

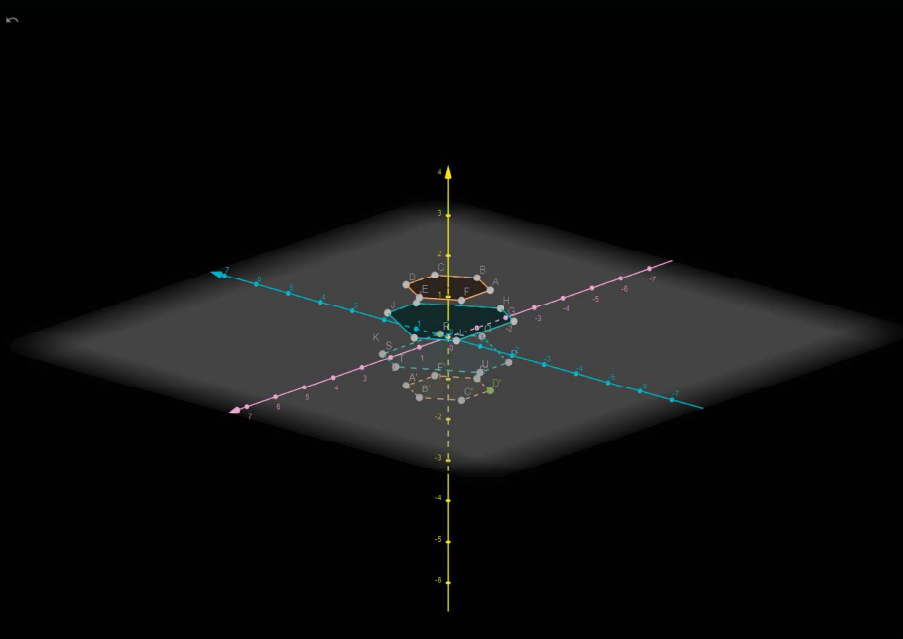


OCTOEDRON ABSISVS
VACVVS



Leonardo DaVinci / ilustraciones para "La divina proporción" / 1498

- $k=1$
- $t = \left(\frac{-k}{2} \sqrt{3}, \frac{k}{2}, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0.87, 0.5, 1.22)
 - $l = \left(0, k, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0, 1, 1.22)
 - $u = \left(\frac{k}{2} \sqrt{3}, \frac{k}{2}, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0.87, 0.5, 1.22)
 - $v = \left(0, -k, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0, -1, 1.22)
 - $A = \left(\frac{-k}{2} \sqrt{3}, \frac{-k}{2}, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0.87, 0.5, 1.22)
 - $C = \left(\frac{k}{2} \sqrt{3}, \frac{-k}{2}, k \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
= (0.87, 0.5, 1.22)
 - $a = \text{Segmento}(A, B, n2)$
= 1
 - $b = \text{Segmento}(B, C, n2)$
= 1
 - $c = \text{Segmento}(C, D, n2)$
= 1



Poliedro de Kelvin / sobre cara hexagonal / parametrizado en GeoGebra

1.10 / Representación

En el libro escrito por Luca Pacioli "La divina proporción"¹⁹ se realizan múltiples comentarios y análisis geométricos sobre poliedros y otros elementos, incluidos temas y componentes arquitectónicos. Sobre el final de los tres capítulos principales se adjuntan dos grupos de ilustraciones. En el primer grupo se publican veintitrés tipografías mayúsculas diseñadas por Pacioli y en el segundo grupo se publican sesenta ilustraciones realizada por Leonardo DaVinci. En cada ilustración DaVinci presenta un sólido o poliedro utilizando dos estrategias de representación diferentes. Para facilitar la comprensión de cada volumen se presentan dos ilustraciones, una en la que el volumen se representa en su formato sólido y otra en la que se representa el esqueleto del poliedro para permitir distinguir de forma simple los elementos presentes detrás de las caras visibles en primer plano.

Esta estrategia de representación en la que se suman la presencia de sombras y de un cordel superior para transmitir la sensación de que el poliedro se encuentra flotando en el espacio, mantiene su vigencia en la actualidad, dada su extraordinaria capacidad didáctica para lograr transmitir y comunicar, la forma de cada uno de los poliedros.

Representación digital tridimensional

En la actualidad, el diseño y la visualización asistida por herramientas digitales, ha llegado a un estado de uso generalizado probablemente desde mediados de la década de los 90'. A partir de ese momento su evolución continua, dio origen a múltiples tipos de software incluidos aquellos que integran diseño paramétrico con programación visual. Estos cambios constantes han incidido en las dinámicas de los procesos creativos, en los modos de representación y comunicación visual, para finalmente posibilitar la fabricación digital a través de impresoras tridimensionales.

Esta condición contemporánea abundante en posibilidades, exige quizás un mayor dominio en cuestiones geométricas por parte de quienes asuman la tarea de diseñar en el futuro, para poder extraer el mayor potencial de dichas herramientas.

Complementariamente se han desarrollado programas y aplicaciones de análisis geométrico matemático, que además permiten construir elementos tridimensionales, controlando en todo momento sus coordenadas y sus relaciones dimensionales. Tal es el caso de la aplicación GeoGebra²⁰

19 A continuación se dejan dejan enlaces virtuales a la segunda edición manuscrita del tratado, realizada en 1498 conservada y digitalizada en la Biblioteca Ambrosiana, en Milán.

Enlace a Ficha bibliográfica de la biblioteca Ambrosiana de Milán:
<https://ambrosiana.comperio.it/opac/detail/view/ambro:catalog:104784>

Enlace a escaneado digital / del manuscrito de 1498, las ilustraciones realizadas por Leonardo Davinci comienzan en la página 205
<http://213.21.172.25/0b02da8280051c28>

20 Enlace a Octaedro truncado - Base hexagonal:
<https://www.geogebra.org/m/cqj9gksz>

Octaedro truncado - Base cuadrada
<https://www.geogebra.org/m/zkddcwzy>

2. Análisis geométrico del tetraedro, cubo, octaedro

2.0 / Herramientas y criterios de análisis geométricos

En esta sección se realizará el análisis de las propiedades geométricas del tetraedro, cubo y octaedro a través de tres estrategias de aproximación.

Estrategia 1 / secciones horizontales y verticales

En la primera aproximación se realizarán secciones horizontales y verticales (asimilables a plantas y cortes) obteniendo volúmenes truncados, en los cuales se podrán visualizar propiedades dimensionales y relacionales del poliedro original. En el caso de los planos que definen las secciones de estudio se tomarán los siguientes criterios:

- _ Plano horizontal: coincidente con la mitad de la altura del poliedro
- _ Planos verticales: coincidentes con por lo menos dos vértices del poliedro

Estrategia 2 / subdivisión del volumen

En esta segunda aproximación se realizará una subdivisión de los poliedros estudiados en su primer grado. Esta subdivisión se realiza partiendo de la localización de los puntos medios de las aristas. Luego estos puntos se conectan con segmentos de rectas, definiendo nuevos poliedros más pequeños manteniendo una relación dimensional con el largo de arista del poliedro inicial de 2 a 1.

En el caso del tetraedro y del octaedro se podrá visualizar que en su subdivisión se encuentran presentes octaedros y tetraedros más pequeños capaces de teselar el espacio. Esta propiedad o comportamiento de naturaleza fractal fue descrito por Mathila Ghyka como "zueco irregular"²¹ en su libro *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*.

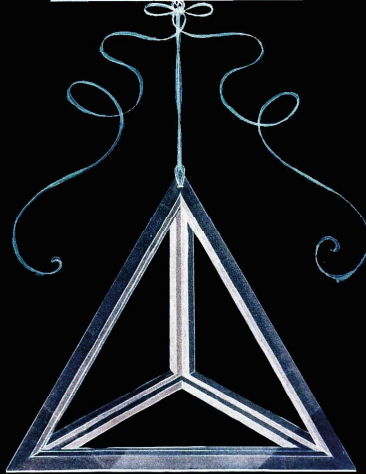
Estrategia 3 / estudio de nodos - dirección de aristas

En el caso del estudio de nodos, se utiliza como referencia el sistema de posicionamiento global terrestre para identificar la dirección angular de las aristas que concurren en cada nodo. De esta forma es posible establecer un sistema de coordenadas globales que permiten identificar rápida y claramente posiciones relativas como, arriba, abajo, izquierda y derecha. Cada arista se identifica con un nombre y un valor de coordenadas independientemente de su dimensión lineal.

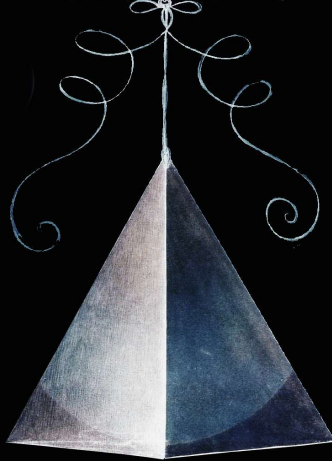
Una vez que se registran todos los parámetros necesarios para construir un nodo tipo, se establecen los movimientos geométricos mínimos para posicionar la totalidad de los vértices en el espacio y reconstruir así el poliedro.

²¹ Al describir el "zueco irregular" Mathila Ghyka hace referencia a la suma (en determinadas condiciones espaciales y dimensionales) de un tetraedro y un semi octaedro / Ver ANEXO I

TETRACEDRON PLANA
VACVVS.



TETRACEDRON PLANA
SOLIDVS.



2.1 / Análisis geométrico del tetraedro

El tetraedro (o pirámide triangular) es un poliedro regular convexo que cuenta con cuatro caras, seis aristas y cuatro vértices. Es uno de los cinco sólidos platónicos. En el caso del tetraedro regular²² todas sus caras están definidas por triángulos equiláteros. En todos sus vértices concurren tres aristas, con posiciones angulares idénticas. A continuación se analizan las relaciones geométricas y dimensionales del tetraedro a partir de dos secciones:

Sección 1 / Corte horizontal / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura del tetraedro se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_1 = a \cdot \sqrt{(2/3)} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.8165$$

El plano de corte horizontal (ubicado en la mitad de la altura del tetraedro) se encuentra a la siguiente distancia del plano de apoyo horizontal:

$$\text{altura : } h_2 = a \cdot \sqrt{(2/3)}/2 \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.40825$$

Dicho corte horizontal da origen a un nuevo triángulo equilátero de lado = a / 2

Sección 2 / Corte vertical / Relaciones geométricas y dimensionales

El plano de corte vertical coincidirá con dos vértices del poliedro y con el punto medio de la arista que enfren-tan. La figura resultante es un triángulo isósceles, cuyo lado mayor es igual al largo de arista del tetraedro = a, y dos lados menores ($l = a \cdot \sqrt{3}/2$) aproximadamente = 0.8660 a

Subdivisión de volumen

En el primer grado de subdivisión simple (utilizando como nuevos vértices los puntos medios de las aristas del poliedro original) se pueden encontrar los siguiente poliedros "anidados":

- _ 1 octaedros de lado ($l = a/2$)
- _ 4 tetraedros de lado ($l = a/2$)

Análisis angular de aristas en vértices

Haciendo coincidir el vértice con el origen de coordenadas geográficas se obtienen los siguientes valores para cada una de las cuatro aristas.

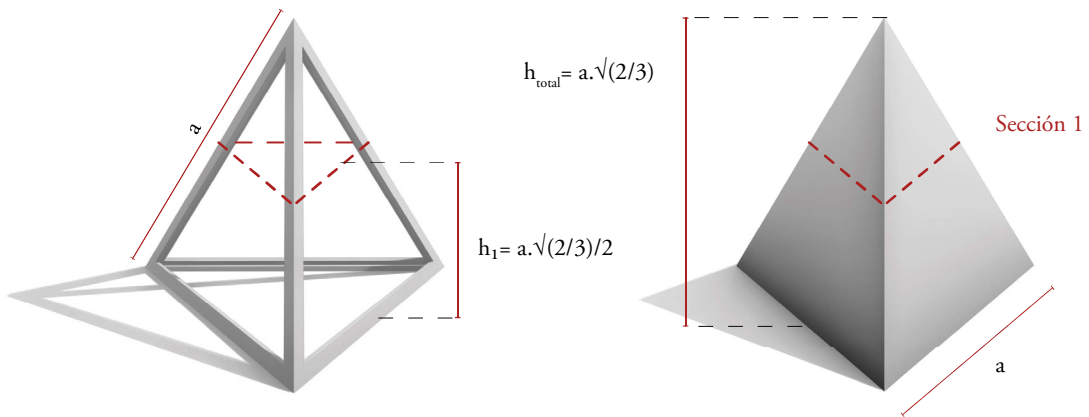
- _ Arista 1 LON: N/S 0.00° LAT: O 60.00°
- _ Arista 2 LON: N/S 0.00° LAT: E 60.00°
- _ Arista 3 LON: N 60.00° LAT: E/O 0.00°

Finalmente reposicionando un vértice en relación al origen de coordenadas y a través de movimientos geométri-cos sencillos (duplicados y rotaciones) es posible reconstruir la totalidad de los vértices que definen el tetraedro.

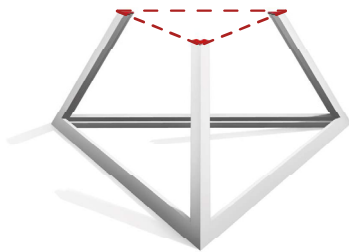
²² En el presente trabajo por definición se considerará en todos los casos, salvo aclaración particular el tetraedro regular.

TETRAEDRO

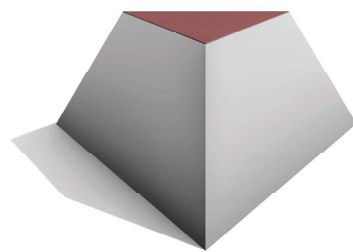
Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 1 / Corte horizontal



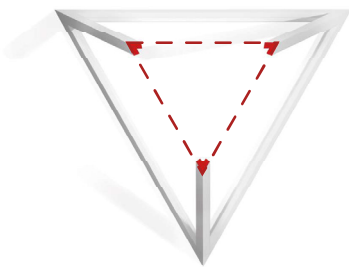
Sección 1
Vista 1



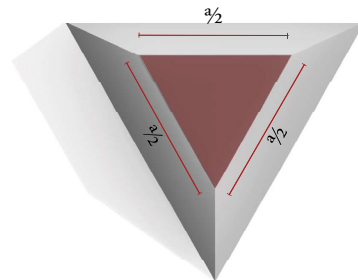
Sección 1
Vista 1



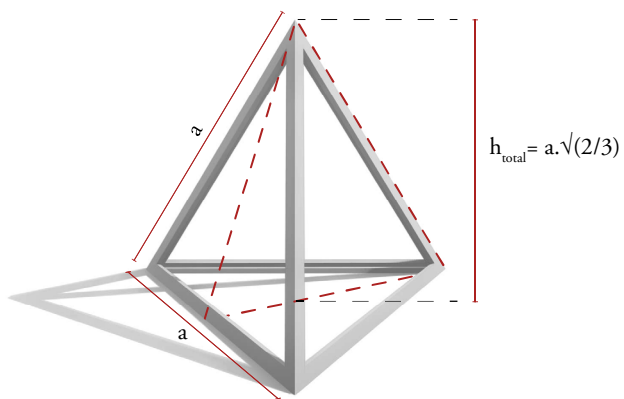
Sección 1
Vista 2



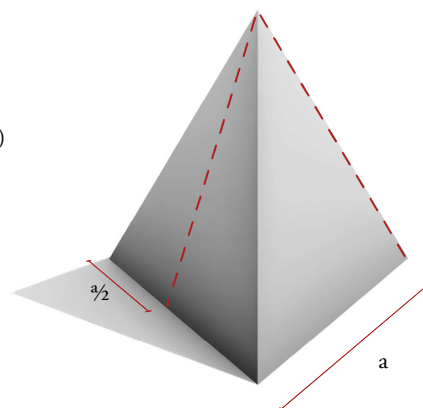
Sección 1
Vista 2



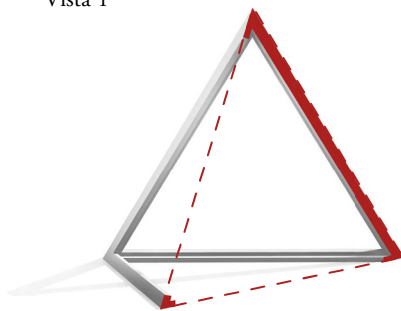
TETRAEDRO
 Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 2 / Corte vertical



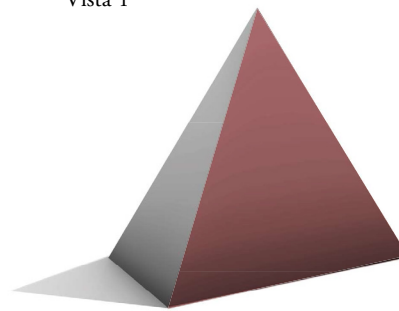
Sección 2



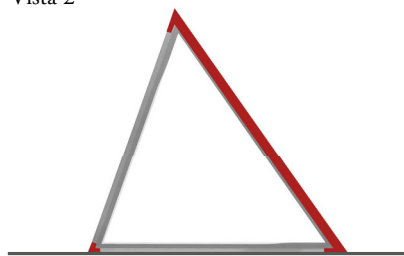
Sección 2
Vista 1



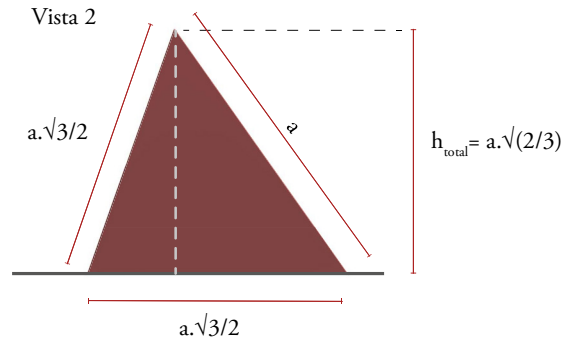
Sección 2
Vista 1



Sección 2
Vista 2



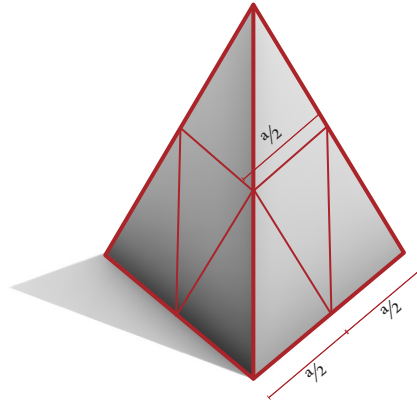
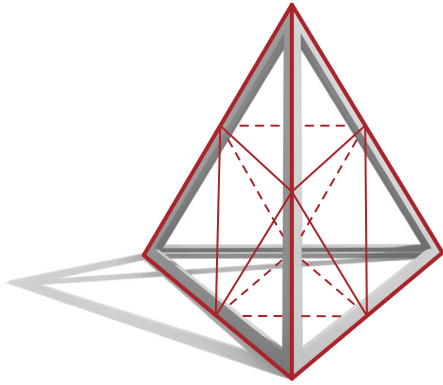
Sección 2
Vista 2



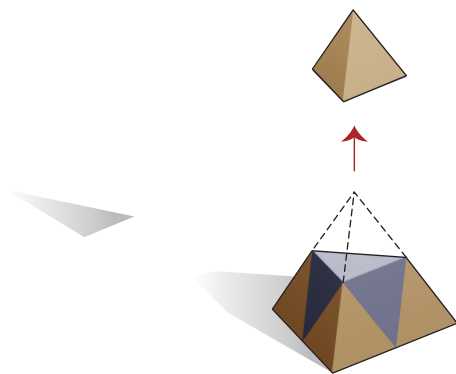
TETRAEDRO

Propiedades / Estudio de su generación

Conformación de aristas con triángulos equiláteros

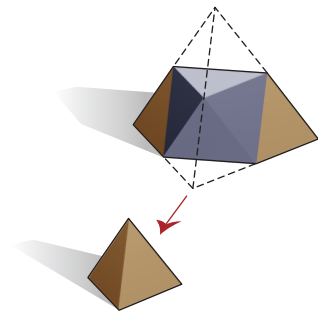


Descomposición
4 Tetraedros / 1 Octaedro



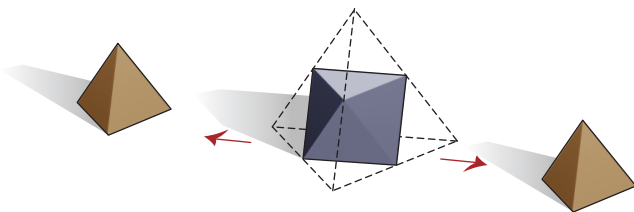
Tetraedro
cantidad 1

Tetraedro
cantidad 1



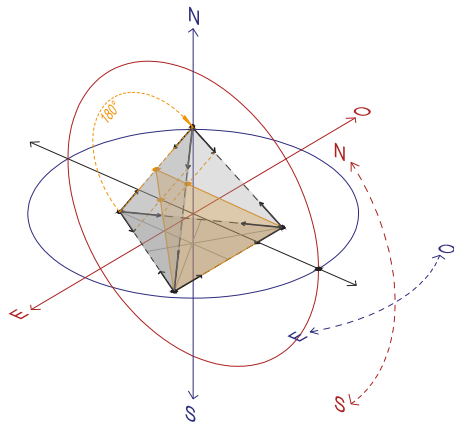
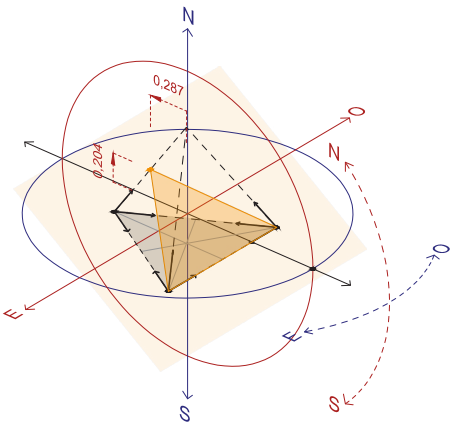
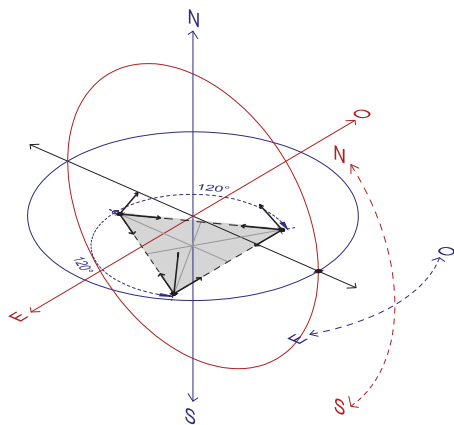
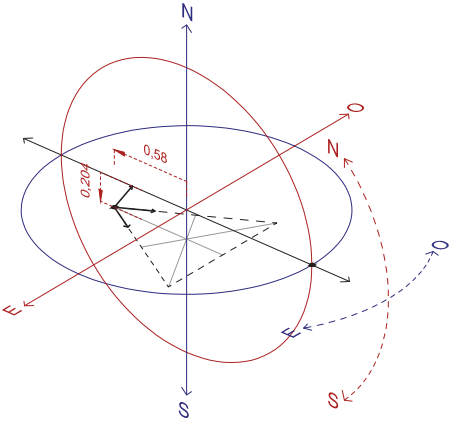
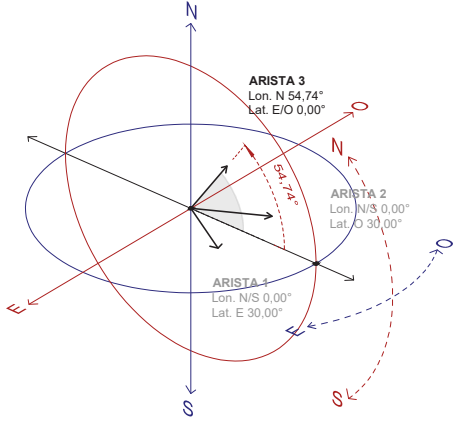
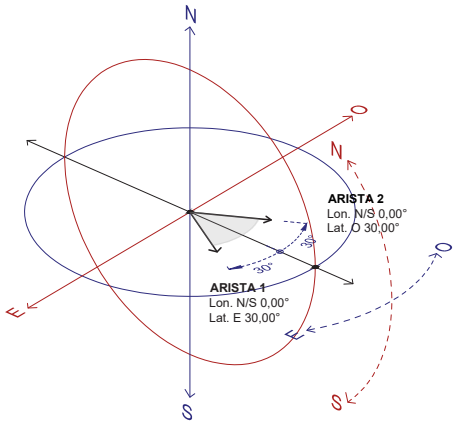
Tetraedro
cantidad 2

Octaedro
cantidad 1

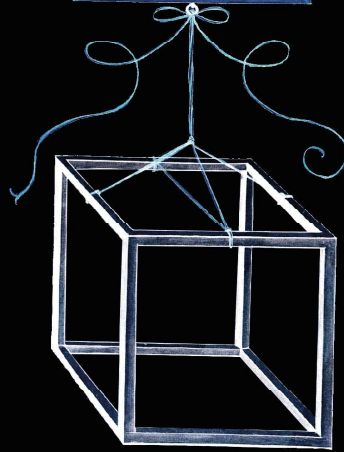


TETRAEDRO

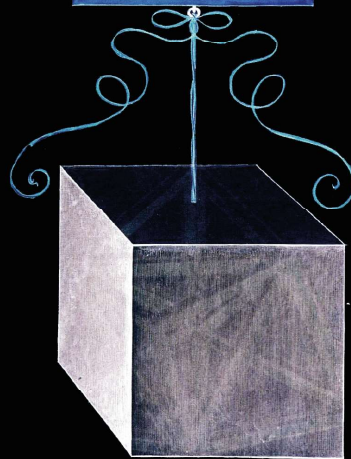
Propiedades nodo / Estudio de su generación



EXACEDRON PLANVS
VACVVS.



EXACEDRON PLANVS
SOLIDVS.



2.2 / Análisis geométrico del cubo

El cubo (o hexaedro regular) es un poliedro de seis caras, doce aristas y ocho vértices.

Es uno de los cinco sólidos platónicos y es el único capaz de teselar el espacio, repitiendo su forma.

Sus caras se definen por cuadrados, lo cual determina que sus doce aristas tengan la misma longitud y que los ángulos que definen estas aristas entre sí en cada vértice sean igual e iguales para todos los vértices del cubo.

A continuación se analizan sus relaciones geométricas y dimensionales a partir de dos secciones, primer nivel de teselado regular por cara y la descripción de los ángulos que conforman sus vértices.

Sección 1 / Corte horizontal / Relaciones geométricas y dimensionales

En el presente análisis se realiza un corte horizontal por la mitad de la altura general del poliedro, la altura del cubo considerando una longitud de arista = a, es: altura : $h_1 = a = 1.000 a$

El plano de corte horizontal (ubicado en la mitad de la altura del cubo) se encuentra a la siguiente distancia del plano de apoyo horizontal: altura : $h_2 = a/2 = 0.500 a$

En esta sección horizontal se puede reconocer un cuadrado resultante de lado ($l = a$) idéntico a los cuadrados que definen sus seis caras, integrado por cuatro cuadrados de lado ($l = a/2$)

Sección 2 / Corte vertical / Relaciones geométricas y dimensionales

El plano de corte vertical coincide con el punto medio de cuatro de sus aristas. La figura resultante es un cuadrado de lado ($l = a$) integrado por cuatro cuadrados de lado ($l = a/2$) al igual que en la sección horizontal.

Subdivisión de volumen

En el primer grado de subdivisión simple (utilizando como nuevos vértices los puntos medios de las aristas del poliedro original) se pueden encontrar "anidados":

_ 8 cubos de lado ($l = a/2$)

El cubo es de los poliedros estudiados el único que en su primer grado de subdivisión se compone por la misma figura, esta propiedad está vinculada con su capacidad de teselar el espacio al repitiendo el mismo volumen.

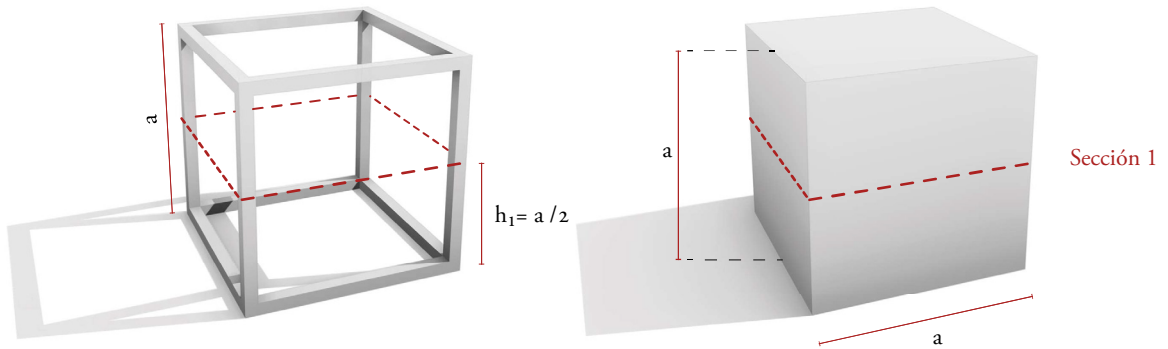
Análisis angular de aristas en vértices

Haciendo coincidir el vértice con el origen de coordenadas geográficas se obtienen los siguientes valores para cada una de las cuatro aristas.

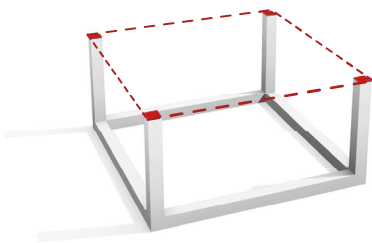
- _ Arista 1 LON: N/S 0.00° LAT: O 45.00°
- _ Arista 2 LON: N/S 0.00° LAT: E 45.00°
- _ Arista 3 LON: N 90.00° LAT: E/O 0.00°
- _ Arista 4 LON: S 90.00° LAT: E/O 0.00°

Finalmente reposicionando un vértice en relación al origen de coordenada y a través de movimientos geométricos sencillos (duplicados y rotaciones) es posible reconstruir la totalidad de los vértices que definen el cubo.

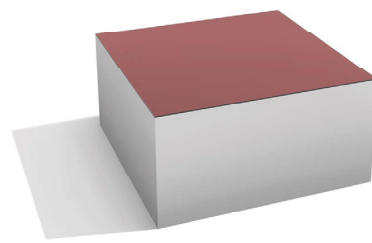
CUBO
Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 1 / Corte horizontal



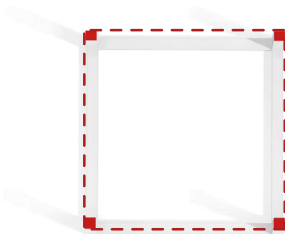
Sección 1
Vista 1



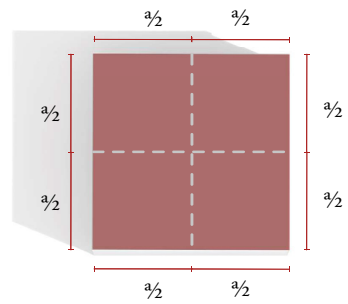
Sección 1
Vista 1



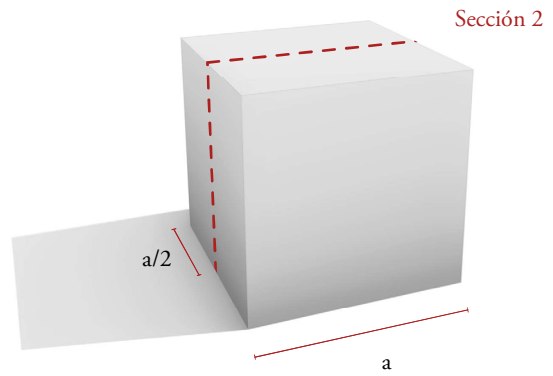
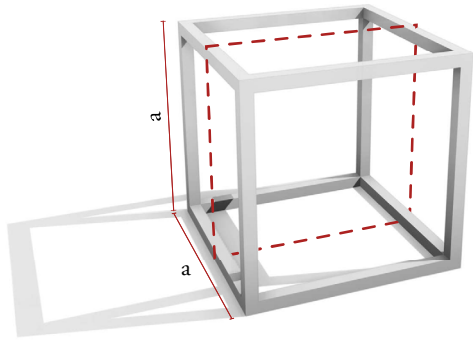
Sección 1
Vista 2



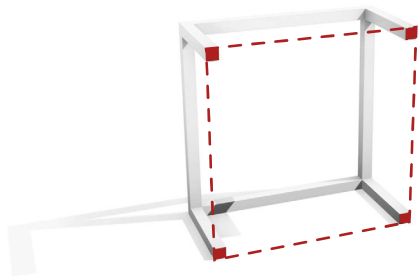
Sección 1
Vista 2



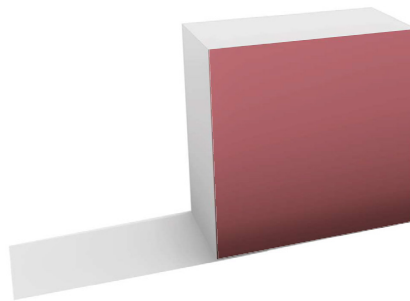
CUBO
Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 2 / Corte vertical



Sección 2
Vista 1



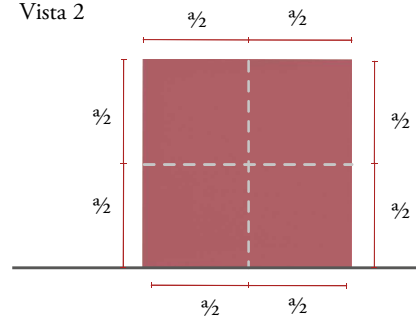
Sección 2
Vista 1



Sección 2
Vista 2



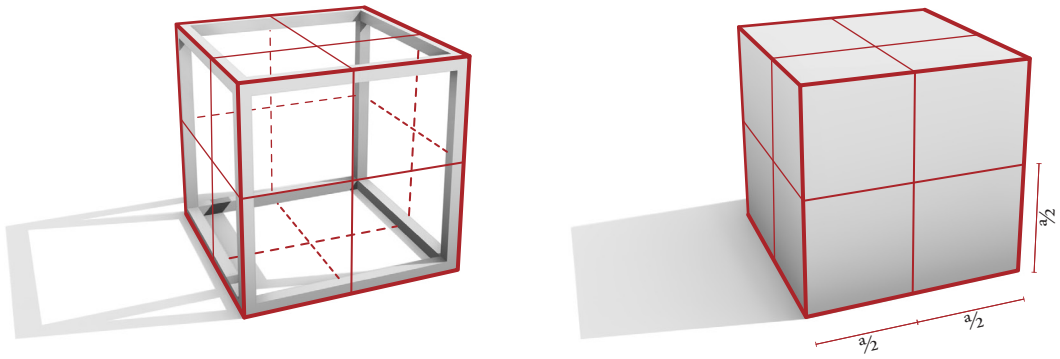
Sección 2
Vista 2



CUBO

Propiedades / Estudio de su generación

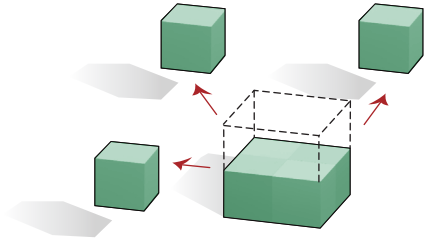
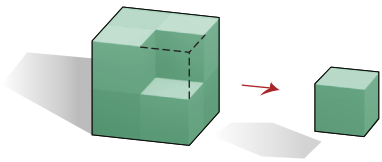
Conformación de aristas con cuadrados sub módulos



*Descomposición
8 Cubos*

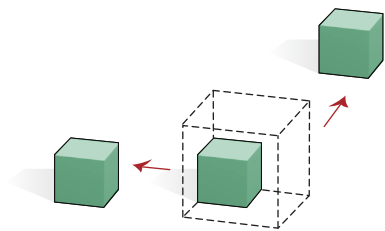
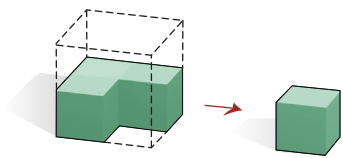
*Cubo
cantidad 1*

*Cubo
cantidad 3*



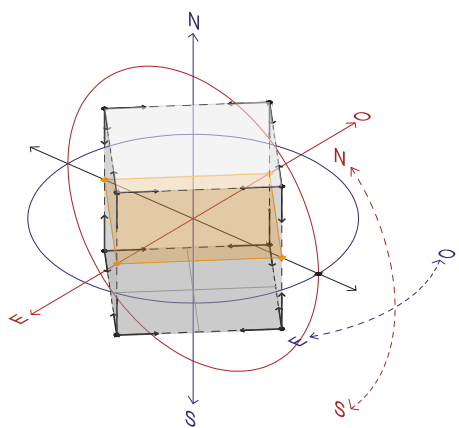
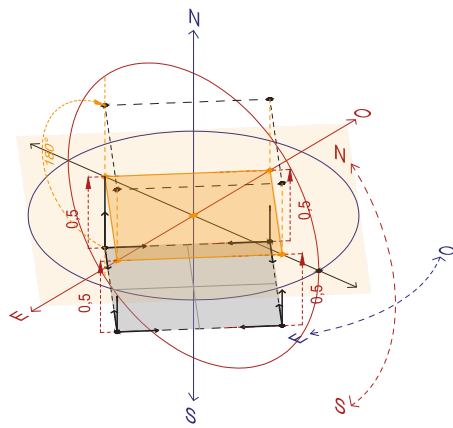
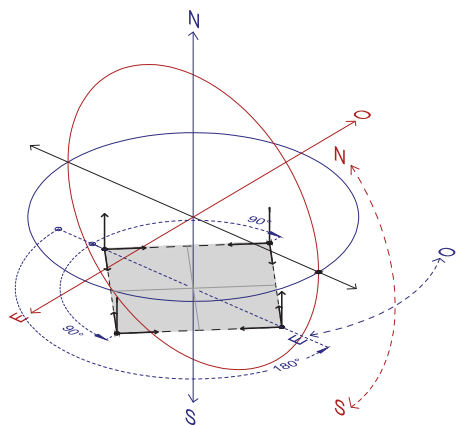
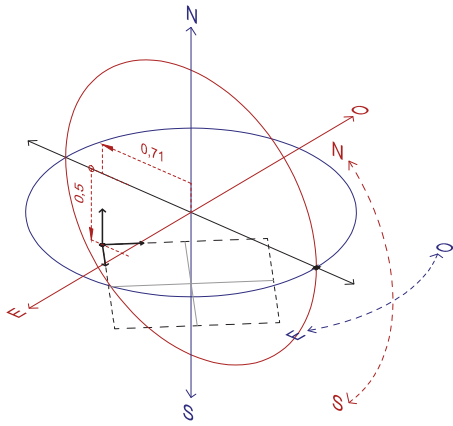
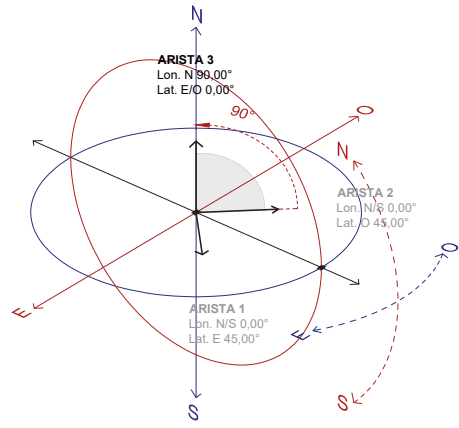
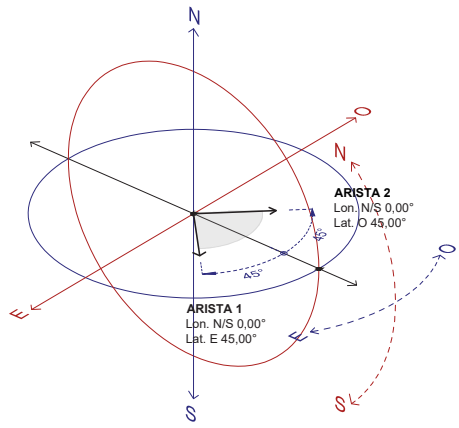
*Cubo
cantidad 1*

*Cubo
cantidad 3*

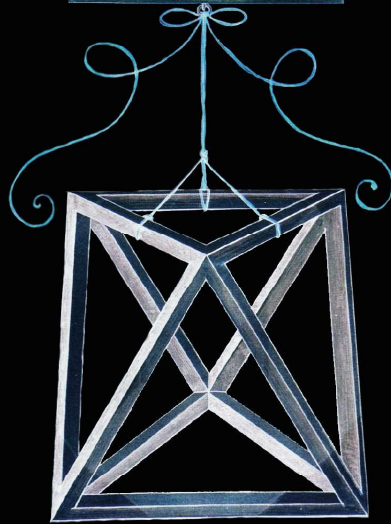


CUBO

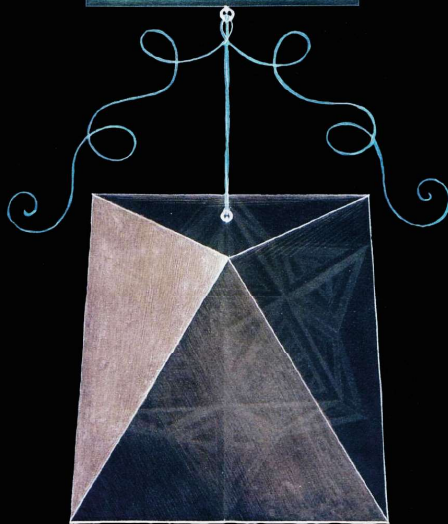
Propiedades nodo / Estudio de su generación



OCTOEDRON PLANVS
VACVVS.



OCTOEDRON PLANVS
SOLIDVS XVII.



2.3.1 / Análisis geométrico del octaedro (posición tipo I, apoyado en cara triangular)

El octaedro es un poliedro regular convexo que cuenta con ocho caras, doce aristas y seis vértices. Es uno de los cinco sólidos platónicos. En el caso del octaedro regular²³ todas sus caras están definidas por triángulos equiláteros. En cada vértice concurren cuatro aristas, con posiciones angulares idénticas, repitiéndose en todos los vértices. Al asociarlo a un plano base horizontal se observa que el volumen puede tomar dos posiciones: Volumen apoyado en cara triangular (Posición I) o volumen apoyado en uno de sus vértices (Posición II) A continuación se analizan las relaciones geométricas y dimensionales del tetraedro a partir de dos secciones para la posición I:

Sección 1 / Corte horizontal / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura del octaedro se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_1 = a \cdot \sqrt{2/3} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.8165$$

El plano de corte horizontal (ubicado en la mitad de la altura del octaedro) se encuentra a la siguiente distancia del plano de apoyo horizontal:

$$\text{altura : } h_2 = a \cdot \sqrt{2/3}/2 \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.40825$$

En esta sección horizontal se puede reconocer un hexágono regular de lado ($l = a / 2$)

Sección 2 / Corte vertical / Relaciones geométricas y dimensionales

El plano de corte vertical coincidirá con dos vértices del poliedro y con los puntos medios de la aristas que enfrentan. La figura resultante es un rombo conformado por dos triángulos isósceles, cuyo lado mayor es igual al largo de arista del tetraedro = a, y sus lados menores ($l = a \cdot \sqrt{2/3}$) coinciden con la altura de un triángulo equilátero de lado = a, dicha altura se puede expresar como:

Subdivisión de volumen

En el primer grado de subdivisión simple (utilizando como nuevos vértices los puntos medios de las aristas del poliedro original) se pueden encontrar los siguiente poliedros "anidados":

$$_ 6 \text{ octaedros de lado } (l = a/2) + 8 \text{ tetraedros de lado } (l = a/2)$$

Análisis angular de aristas en vértices

Haciendo coincidir el vértice con el origen de coordenadas geográficas se obtienen los siguientes valores para cada una de las cuatro aristas.

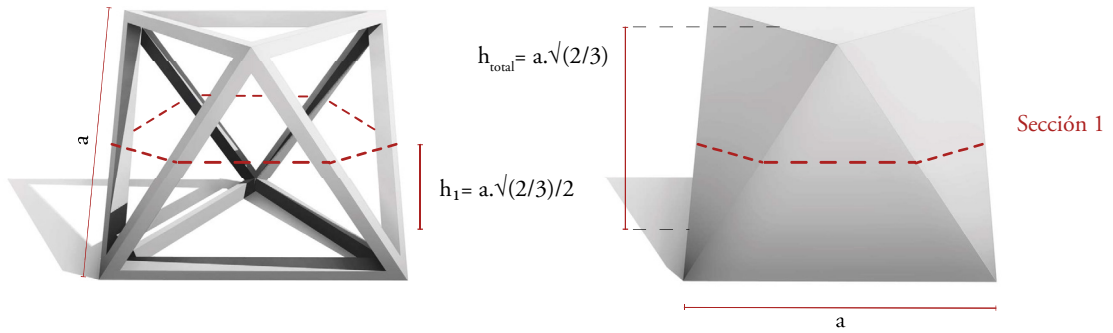
$$\begin{array}{ll} _ \text{Arista 1 LON: N/S } 0.00^\circ \text{ LAT: O } 30.00^\circ & _ \text{Arista 2 LON: N/S } 0.00^\circ \text{ LAT: E } 30.00^\circ \\ _ \text{Arista 3 LON: N } 54.74^\circ \text{ LAT: O } 60.00^\circ & _ \text{Arista 4 LON: S } 54.74^\circ \text{ LAT: E } 60.00^\circ \end{array}$$

Finalmente reposicionando un vértice en relación al origen de coordenada y a través de movimientos geométricos sencillos (duplicados y rotaciones) es posible reconstruir la totalidad de los vértices que definen el octaedro.

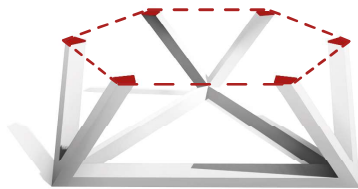
23 En el presente trabajo por definición se considerará en todos los casos, salvo aclaración particular el octaedro regular.

OCTAEDRO

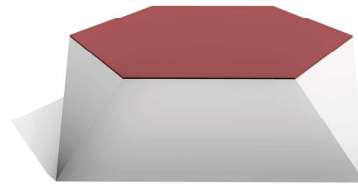
Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 1 / Corte horizontal



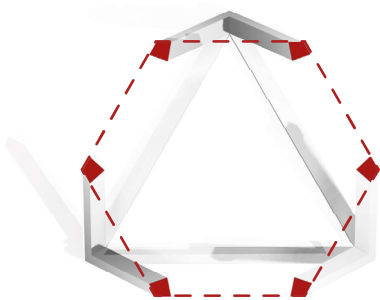
Sección 1
Vista 1



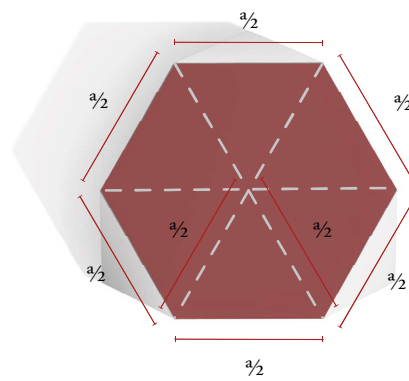
Sección 1
Vista 1



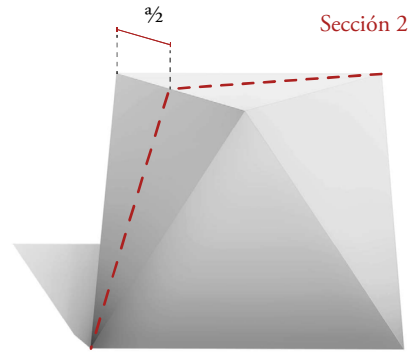
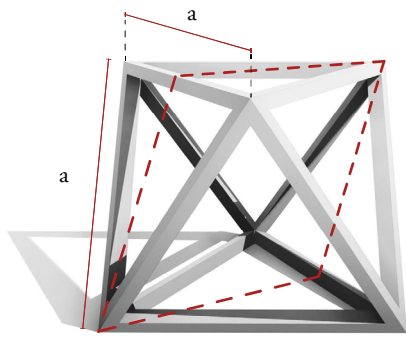
Sección 1
Vista 2



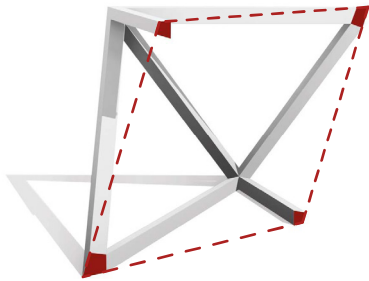
Sección 1
Vista 2



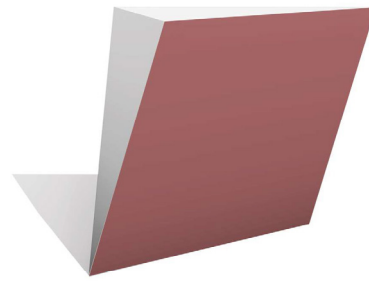
OCTAEDRO
 Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 2 / Corte vertical



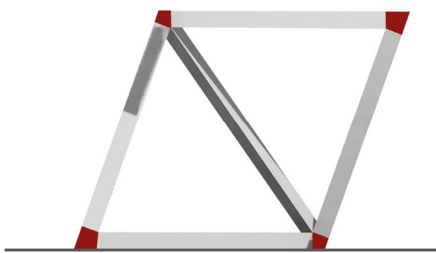
Sección 2
Vista 1



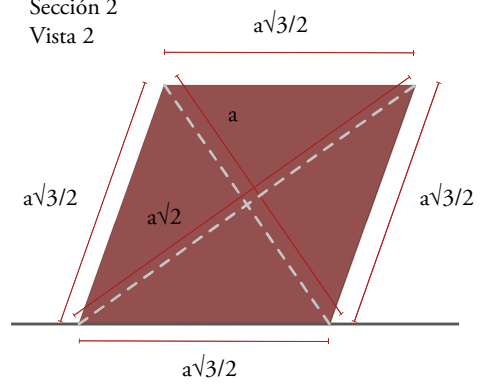
Sección 2
Vista 1



Sección 2
Vista 2



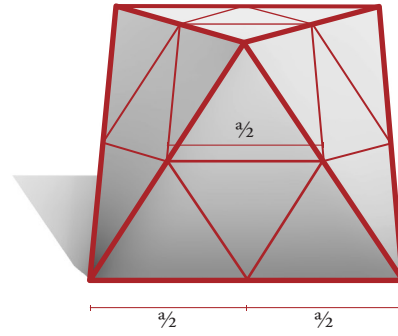
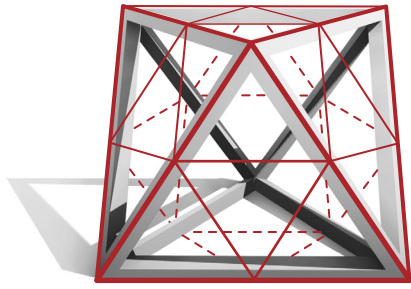
Sección 2
Vista 2



OCTAEDRO

Propiedades / Estudio de su generación

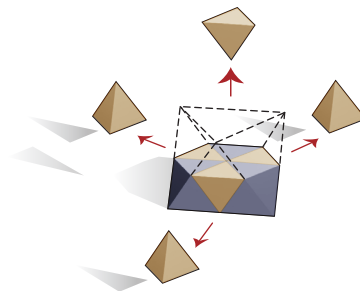
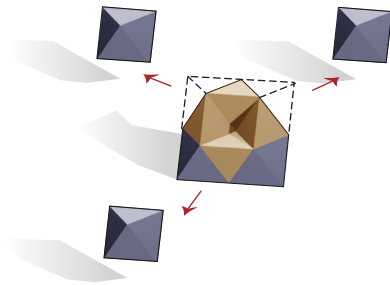
Conformación de aristas con triángulos equiláteros



Descomposición
8 Tetraedros / 6 Octaedros

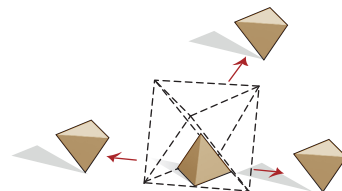
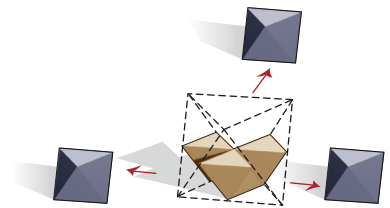
Octaedro
cantidad 3

Tetraedro
cantidad 4



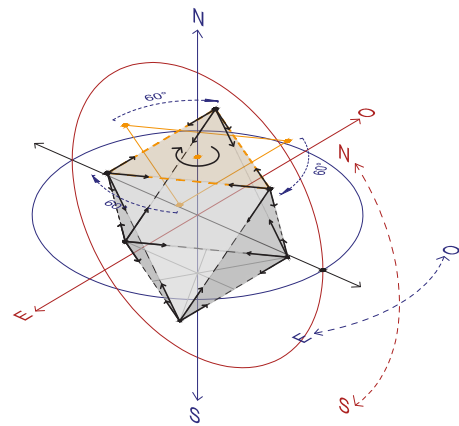
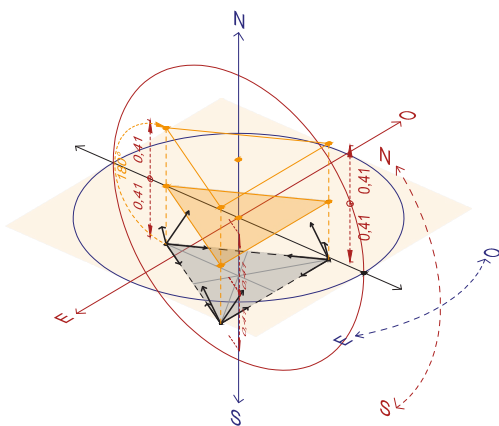
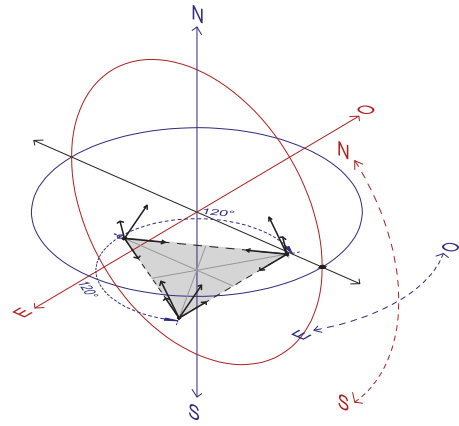
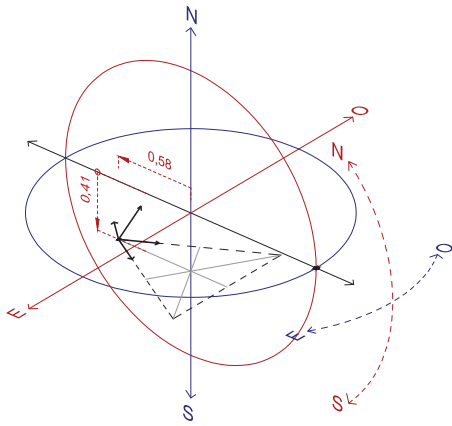
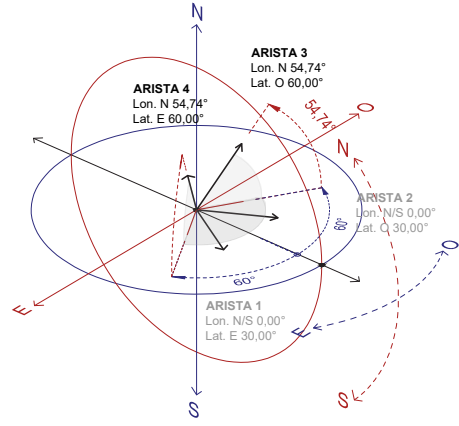
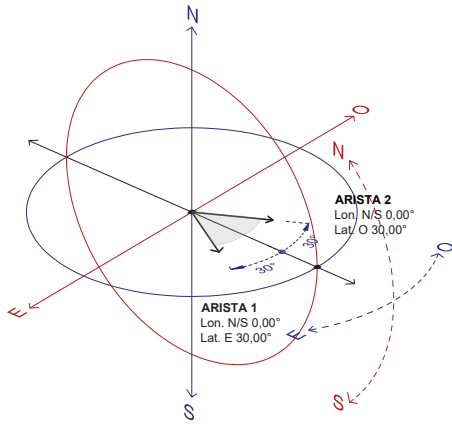
Octaedro
cantidad 3

Tetraedro
cantidad 4



OCTAEDRO

Propiedades nodo / Estudio de su generación



2.3.2 / Análisis geométrico del octaedro (posición tipo II, apoyado en vértice)

Al ubicar el octaedro sobre un plano horizontal (símil suelo) y apoyando uno de sus vértices se define la posición II, a efectos de realizar el análisis. El estudio geométrico se realiza el estudio geométrico en base a tres secciones (una horizontal y dos verticales), luego se analizan las posibilidades más simples de subdivisión del volumen y se estudian la variaciones angulares de las aristas al concurrir en los vértices.

Sección 1 / Corte horizontal / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura del octaedro equivale a la diagonal de un cuadrado de lado (l = a) y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_1 = a\sqrt{2} \quad \text{proximadente} = a \cdot 1.4142$$

El plano de corte horizontal (ubicado en la mitad de la altura del octaedro y coincidiendo con sus cuatro aristas verticales) se encuentra a la siguiente distancia del plano de apoyo horizontal:

$$\text{altura : } h_2 = a\sqrt{2}/2 \quad \text{aproximadente} = a \cdot 0.7071$$

En esta sección horizontal se puede reconocer un cuadrado de lado = a, conformado por cuatro cuadrados de lado = a / 2

Sección 2 y 3 / Cortes verticales / Relaciones geométricas y dimensionales

Los planos de corte vertical coincidirán en cada caso con cuatro de sus aristas. La figura resultante es un cuadrado de lado (l = a) conformado por cuatro cuadrados de lado (l = a/2) al igual que en la sección horizontal.

Subdivisión de volumen

En el primer grado de subdivisión simple (utilizando como nuevos vértices los puntos medios de las aristas del poliedro original) se pueden encontrar los siguiente poliedros "anidados":

- _ 6 octaedros de lado (l = a/2)
- _ 8 tetraedros de lado (l = a/2)

Análisis angular de aristas en vértices

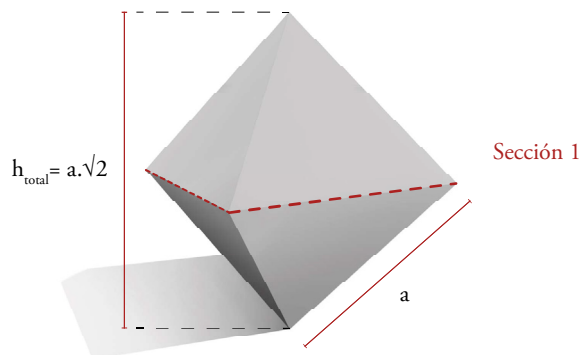
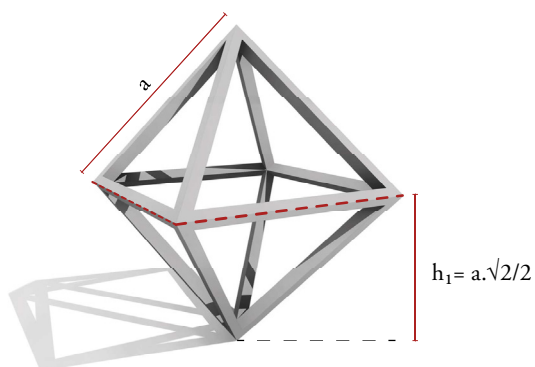
Haciendo coincidir el vértice con el origen de coordenadas geográficas se obtienen los siguientes valores para cada una de las cuatro aristas.

- _ Arista 1 LON: N/S 0.00° LAT: O 45.00°
- _ Arista 2 LON: N/S 0.00° LAT: E 45.00°
- _ Arista 3 LON: N 45.00° LAT: E/O 0.00°
- _ Arista 4 LON: S 45.00° LAT: E/O 0.00°

Finalmente reposicionando un vértice en relación al origen de coordenadas y a través de movimientos geométricos sencillos (duplicados y rotaciones) es posible reconstruir la totalidad de los vértices que definen el octaedro.

OCTAEDRO

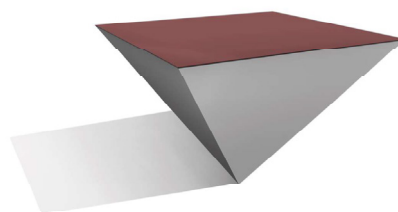
Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 1 / Corte horizontal



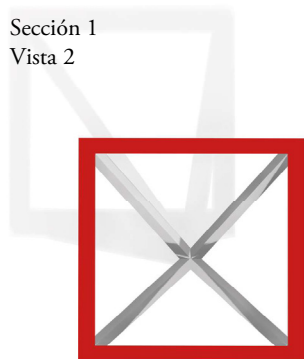
Sección 1
Vista 1



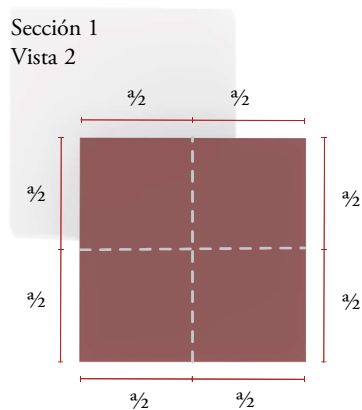
Sección 1
Vista 1



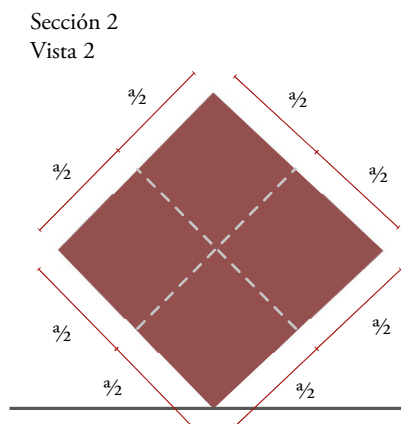
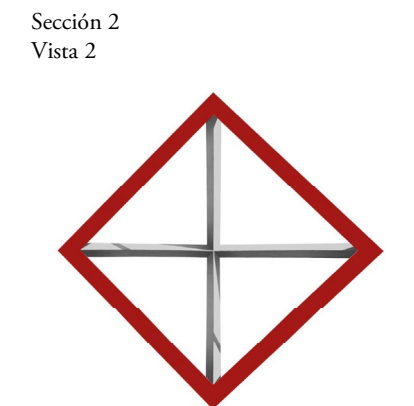
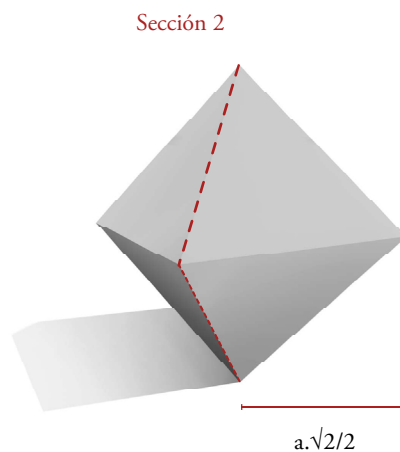
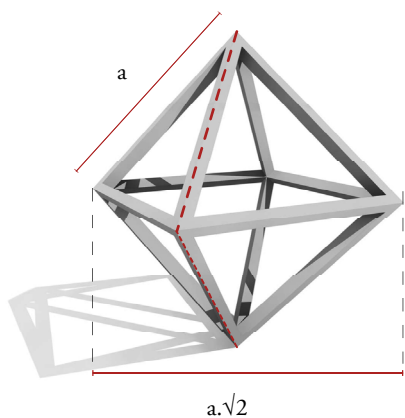
Sección 1
Vista 2



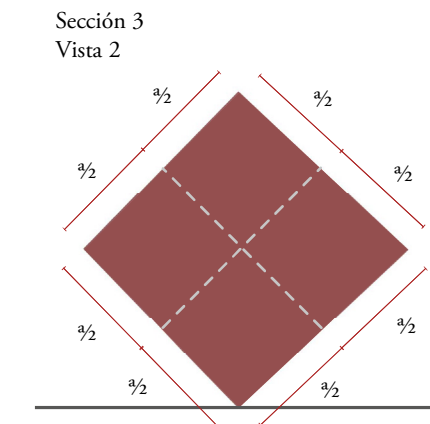
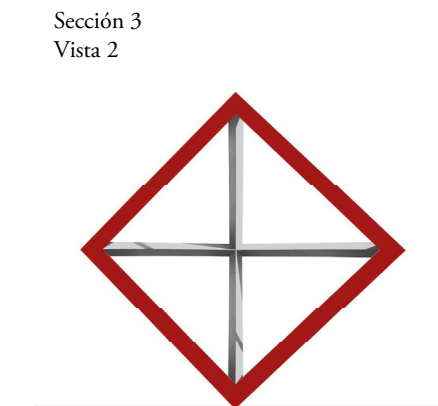
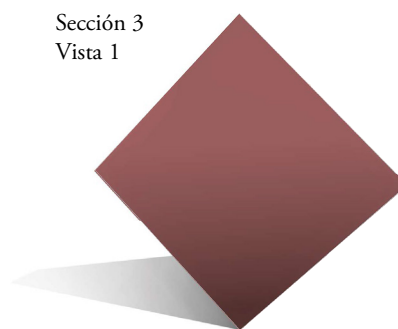
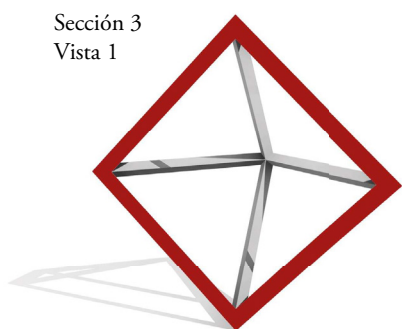
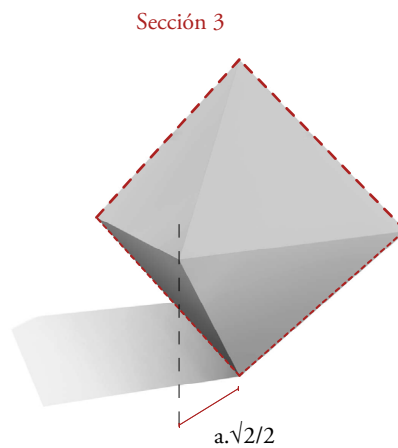
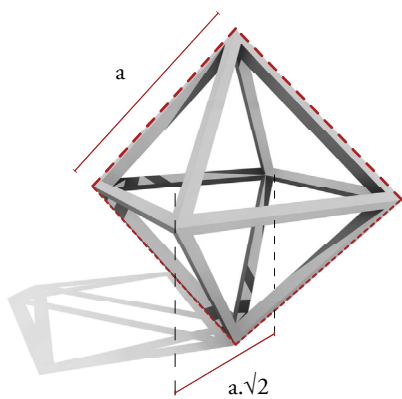
Sección 1
Vista 2



OCTAEDRO
 Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 2 / Corte vertical



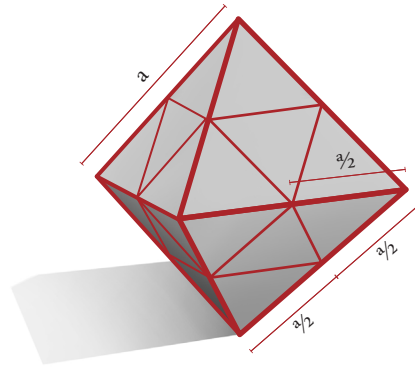
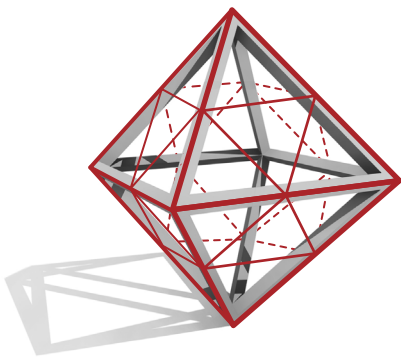
OCTAEDRO
 Relaciones geométricas y dimensionales
Sección 3 / Corte vertical



OCTAEDRO

Propiedades / Estudio de su generación

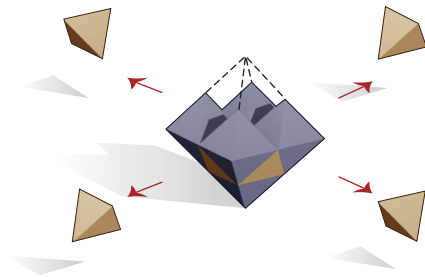
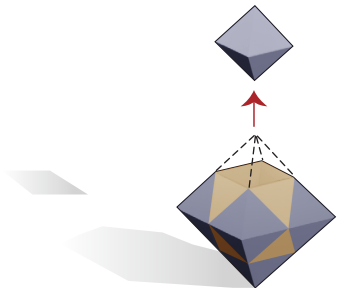
Conformación de aristas con triángulos equiláteros



Descomposición
8 Tetraedros / 6 Octaedros

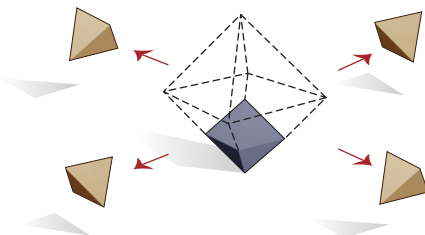
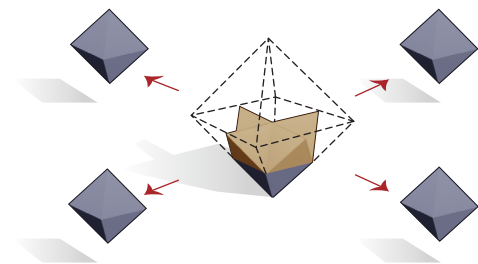
Octaedro
cantidad 1

Tetraedro
cantidad 4



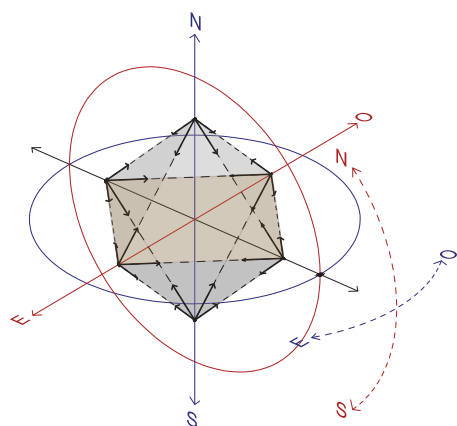
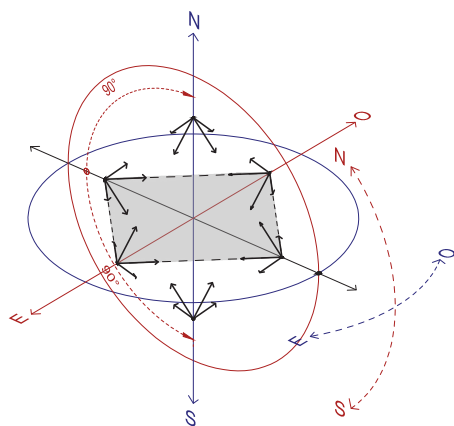
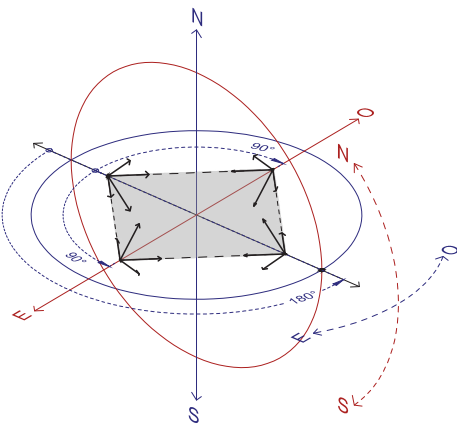
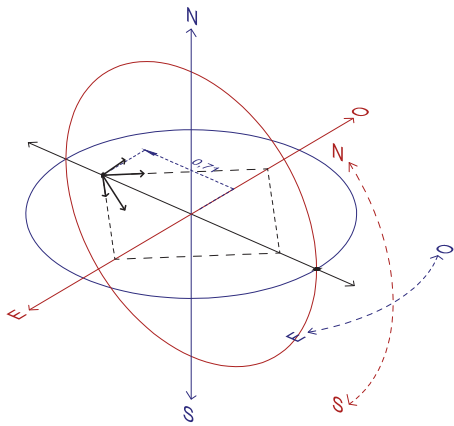
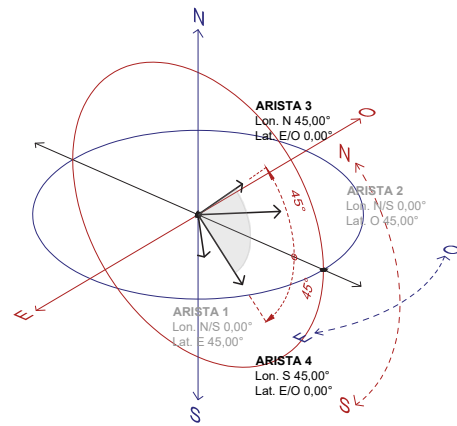
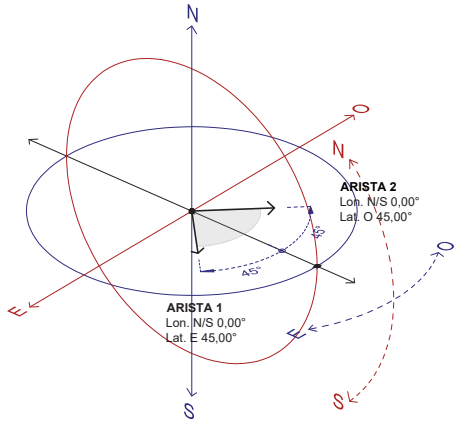
Octaedro
cantidad 4

Tetraedro + Octaedro
cantidad 4 + 1



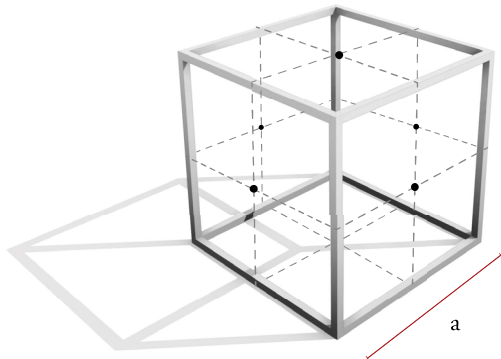
OCTAEDRO

Propiedades nodo / Estudio de su generación

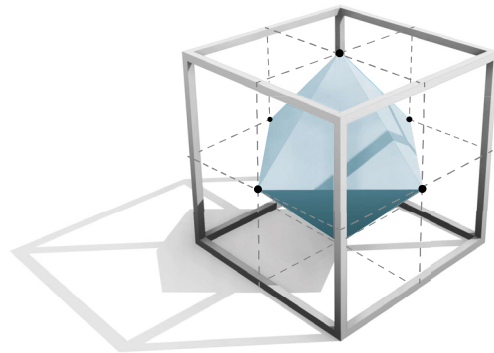


3. Análisis geométrico del octaedro truncado

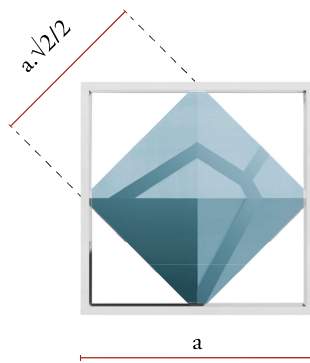
Centros en caras cuadradas
(6 puntos)



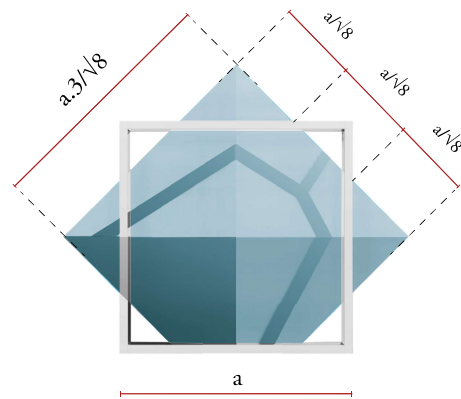
Conexión / generación de octaedro
(6 vértices)



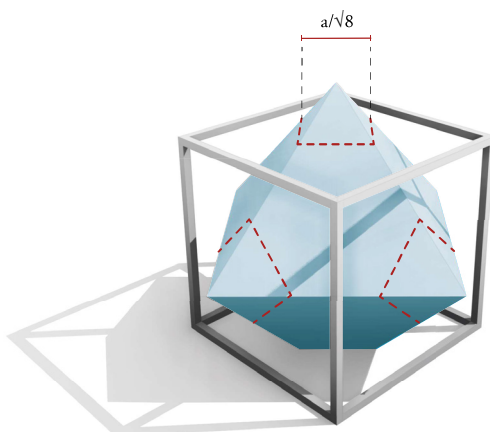
Relaciones entre aristas



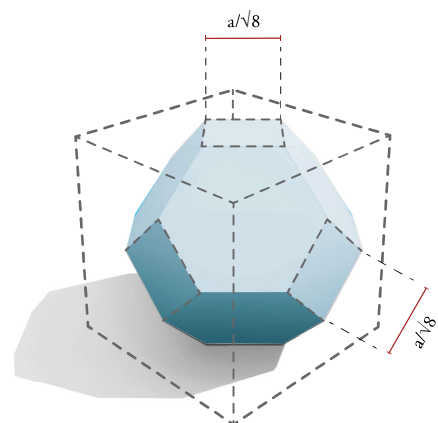
Homotecia central k = 1.5



Proyección de truncamiento
(6 sectores)



Octaedro truncado
lado = $a/\sqrt{8}$



3.0 / Octaedro truncado

En el presente capítulo se realizará el análisis geométrico del octaedro truncado (o poliedro de Kelvin) construyendo el registro correspondiente. Se comienza con el proceso de generación a través de una operación de sustracción, luego el análisis se divide en dos subcapítulos a partir de las posiciones espaciales que puede adoptar el poliedro en relación al plano de apoyo horizontal y al tipo de cara sobre la que se apoya:

- _ Posición espacial tipo I (octaedro truncado apoyado en cara hexagonal)
- _ Posición espacial tipo II (octaedro truncado apoyado en cara cuadrada)

A continuación se analizan sus propiedades geométricas y relaciones dimensionales a través de secciones horizontales y verticales, se estudia su composición interna, presentando un proceso de generación a través de la adición de componentes de menor tamaño, siguiendo el primer grado de subdivisión decreciente.

3.1 / Génesis por sustracción

La forma más sencilla y simple para obtener un octaedro truncado, es a través de un proceso de sustracción entre un cubo y un octaedro regular. Para poder ejecutar esta operación es necesario considerar por un lado la posición relativa de ambos volúmenes en el espacio y por otro las relaciones dimensionales entre ambos, tomando como referencia el largo de las aristas.

Paso 1 / ubicación espacial del cubo y del tetraedro

En el caso del cubo el concepto de dualidad, establece que su poliedro "dual" se genera al unir los puntos medios de sus seis caras cuadradas. De esta forma es posible obtener un octaedro regular contenido dentro de un cubo, en una única posición espacial. A continuación se expresa la relación de lado en función del lado del cubo.

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arista del cubo} &= a \\ \text{Longitud de arista del octaedro} &= a \cdot \sqrt{2}/2 \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.7071 \end{aligned}$$

Paso 2 / homotecia en octaedro regular

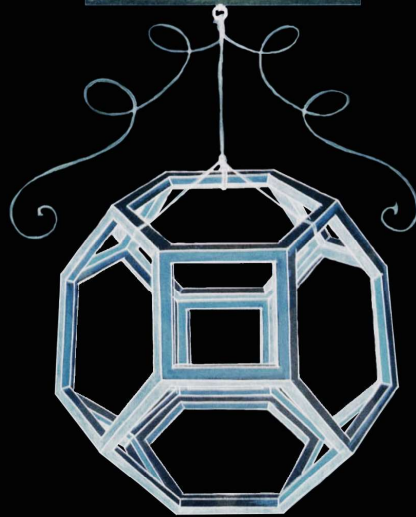
En el siguiente paso es necesario realizar un aumento de escala tomando como centro de la homotecia el centro del octaedro y razón igual = 1.5. Modificándose la relación dimensional de aristas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arista del cubo} &= a \\ \text{Longitud de arista del octaedro} &= a \cdot 3/\sqrt{8} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 1.061 \end{aligned}$$

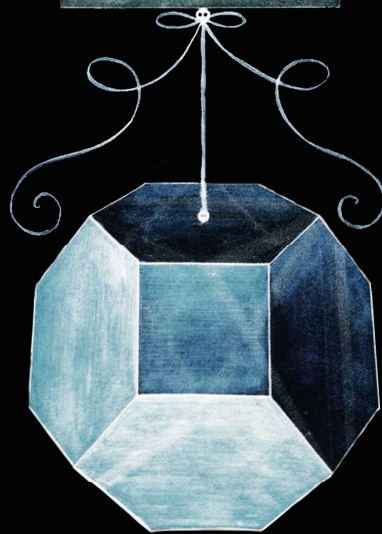
Paso 3 / truncamiento del octaedro regular

Una vez aumentado el tamaño del octaedro, se truncan los extremos que sobresalen a los planos coincidentes con las seis caras del cubo. De esta forma se obtiene un octaedro truncado apoyado en cara cuadrada, esta posición espacial se ampliará más adelante y denominará posición tipo II. La otra posibilidad es que el octaedro se apoye en una de sus caras hexagonales, dando origen a la posición tipo I.

OCTOCEDRON ABSISVS
VACVVS.



OCTOCEDRON ABSISVS
SOLIDVS.



3.2 / Octaedro truncado / Posición tipo I (apoyado en cara hexagonal)

Para iniciar el análisis geométrico del octaedro truncado en la primera posición espacial, se realizarán dos cortes horizontales (coincidiendo son los tres niveles que son posibles reconocer al realizar una primera subdivisión) Considerando una longitud de arista = a, la altura del octaedro truncado se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_{\text{total}} = a \cdot 3\sqrt{(2/3)} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 2.4495$$

Sección 1 / Corte horizontal 1 / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura de esta primera sección horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_1 = a \cdot 2\sqrt{(2/3)} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 1.6330$$

En esta sección horizontal es posible reconocer una figura asimilables triangulo equilátero "romo" compuesto por trece triángulos equiláteros de lado ($l = a$)

Sección 2 / Corte horizontal 2 / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura de esta primera sección horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_2 = a \cdot \sqrt{(2/3)} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.8165$$

En este corte horizontal se visualiza la misma figura geométrica que en el corte horizontal 1, rotada 180° .

Sección 3 / Corte vertical / Relaciones geométricas y dimensionales

El plano de corte vertical coincidirá con el plano medio que dividirá el volumen en dos mitades iguales y simétricas. La figura geométrica obtenida a partir de la sección se constituye en base a triángulos irregulares que reflejan la posición de los planos inclinados que componen la red espacial Kelvin.

Generación por adición

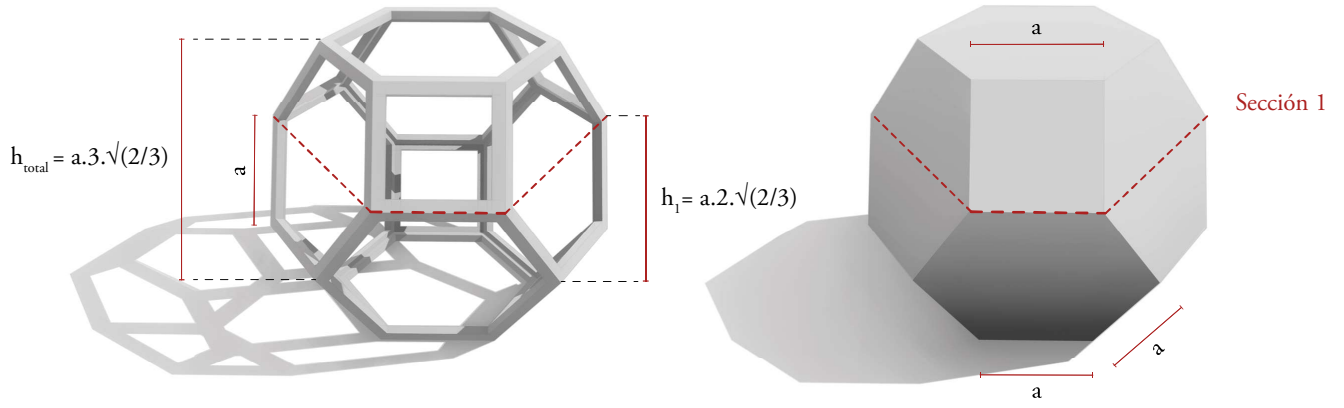
Sobre el final del análisis se realiza un registro graficando la construcción del octaedro truncado a partir de la adición poliedros de menor tamaño con un largo de arista = a. Esta construcción se realizará utilizando: 32 tetraedros regulares, 6 semi octaedros regulares y 13 octaedros regulares

Análisis angular de aristas en vértices

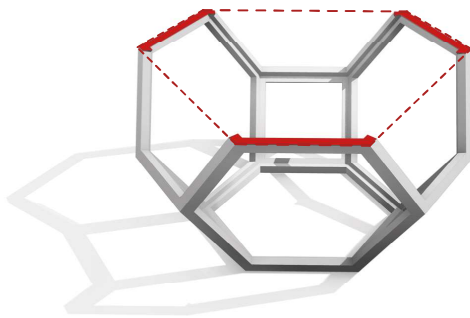
Haciendo coincidir el vértice con el origen de coordenadas geográficas se obtienen los siguientes valores para cada una de las cuatro aristas.

- _ Arista 1 LON: N/S 0.00° LAT: E 60.00°
- _ Arista 2 LON: N/S 0.00° LAT: O 60.00°
- _ Arista 3 LON: N 54.76° LAT: E 150.00°

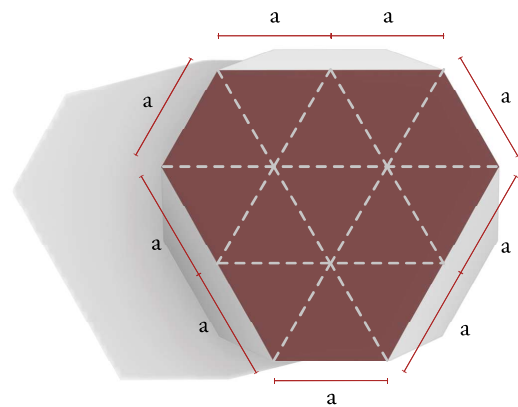
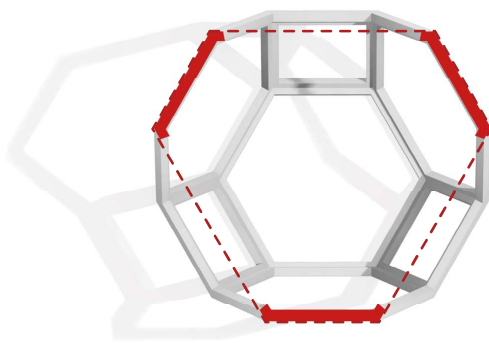
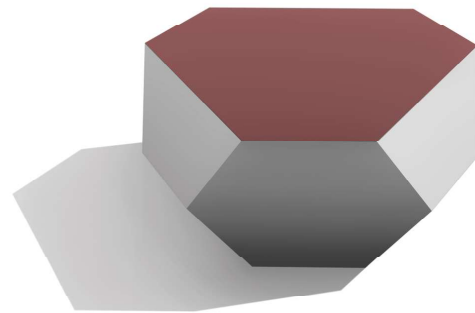
Octaedro truncado / Posición tipo I



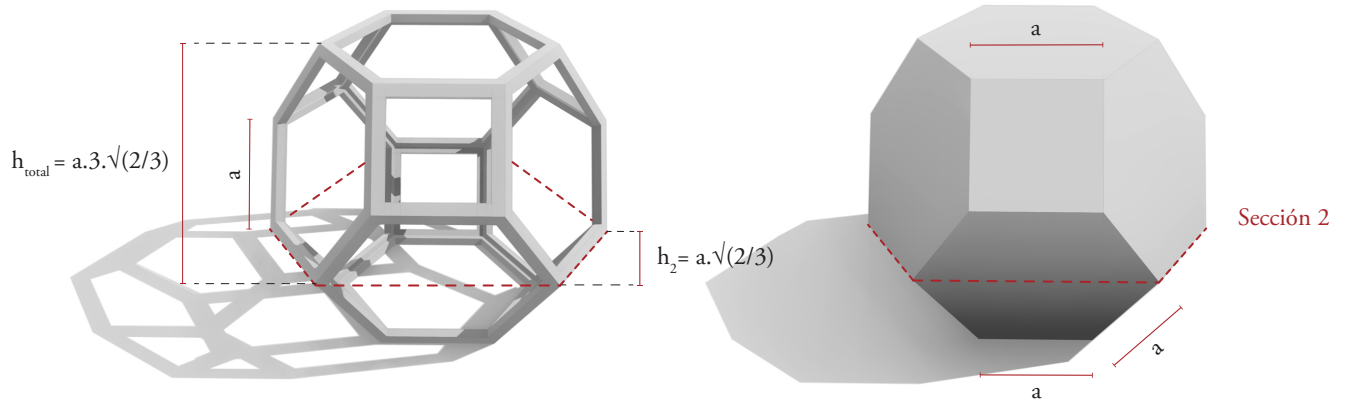
Sección 1:



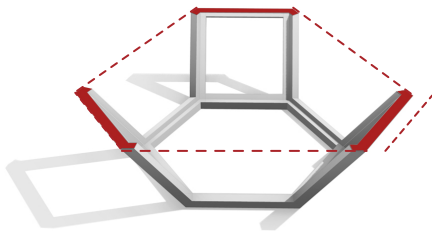
Sección 1:



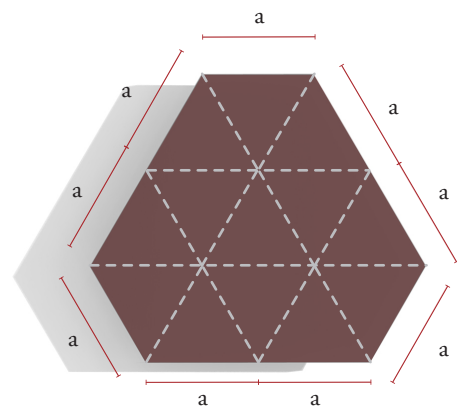
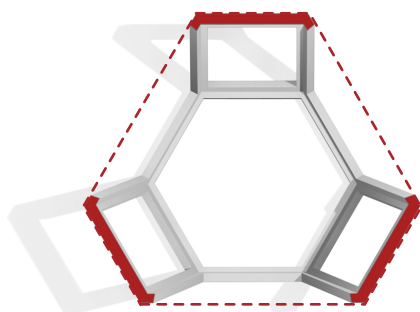
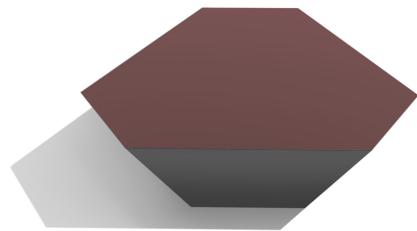
Octaedro truncado / Posición tipo I



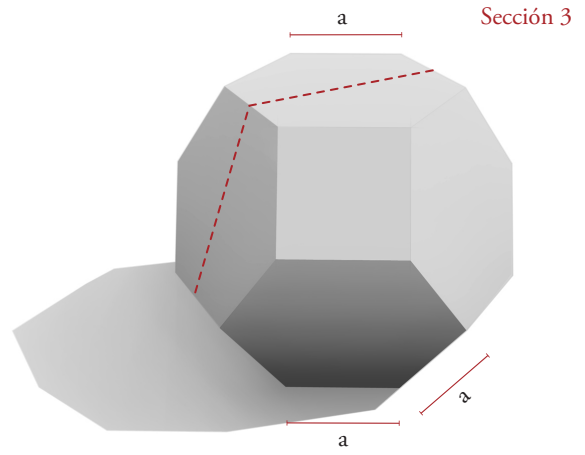
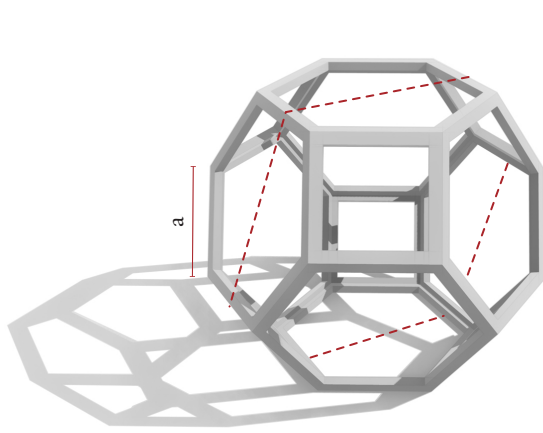
Sección 2:



Sección 2:

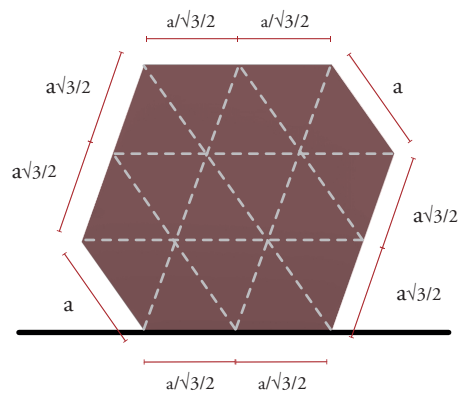
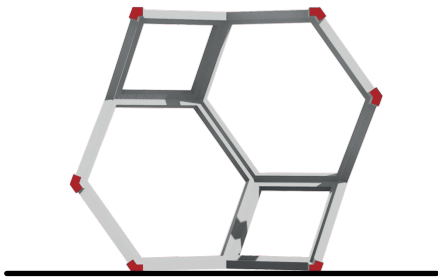
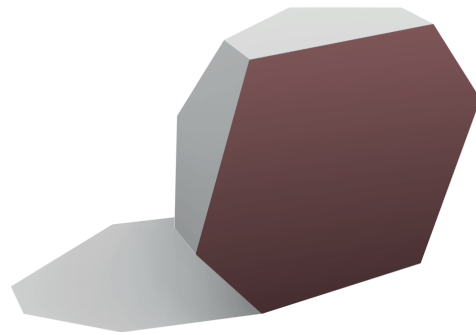
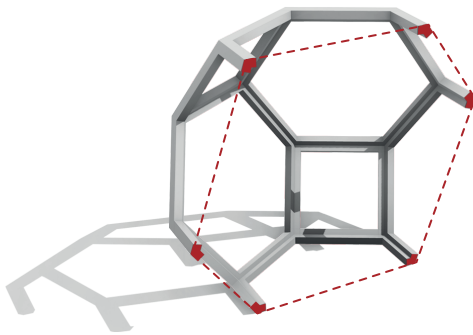


Ocraedro truncado / Posición tipo I



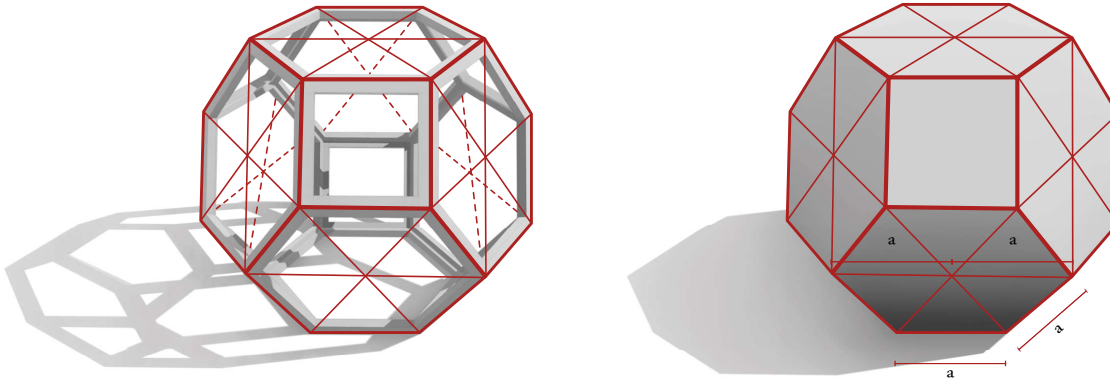
Sección 3:

Sección 3:



3.3 / Génesis por adición / Posición tipo I (apoyado en cara hexagonal)

Octaedro Truncado _ Primer nivel de subdivisión



Tomando los análisis anteriores es posible obtener el octaedro truncado a partir de poliedros regulares de menor tamaño, originados en el primer nivel de subdivisión, orientados en la posición espacial tipo I del octaedro truncado, apoyado sobre una de sus caras hexagonales. En esta posición espacial al visualizar los elementos de la red espacial Kelvin, es posible detectar tres niveles, dentro del poliedro.

A efectos de simplificar la comprensión del proceso de adición, los registros gráficos fueron ordenaron partiendo desde el nivel inferior, hasta el nivel superior, como si se tratar de la construcción de un edificio.

Los poliedro utilizados para reconstruir el octaedro truncado por adición de componentes son los siguientes:

- _ 32 tetraedros regulares
- _ 6 semi octaedros regulares
- _ 13 octaedros regulares

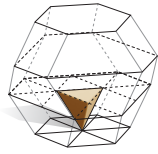
En los gráficos que siguen se identifica cada tipo de poliedro con un color diferente y a medida que se va avanza en altura en la construcción se va registrando el estado general del volumen con un pequeño esquema en sección.

OCTAEDRO TRUNCADO Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal

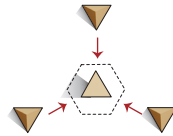
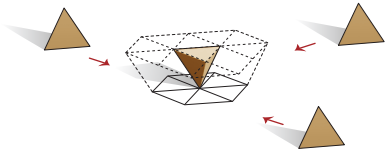
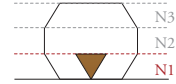


OCTAEDRO TRUNCADO

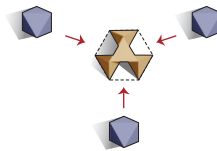
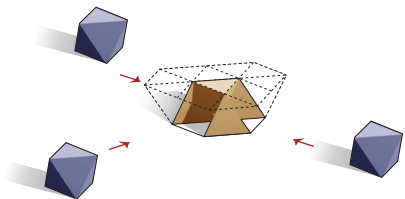
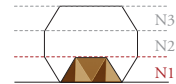
Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal



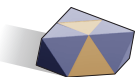
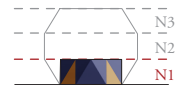
Tetraedro
cantidad 1



Tetraedros
cantidad 3

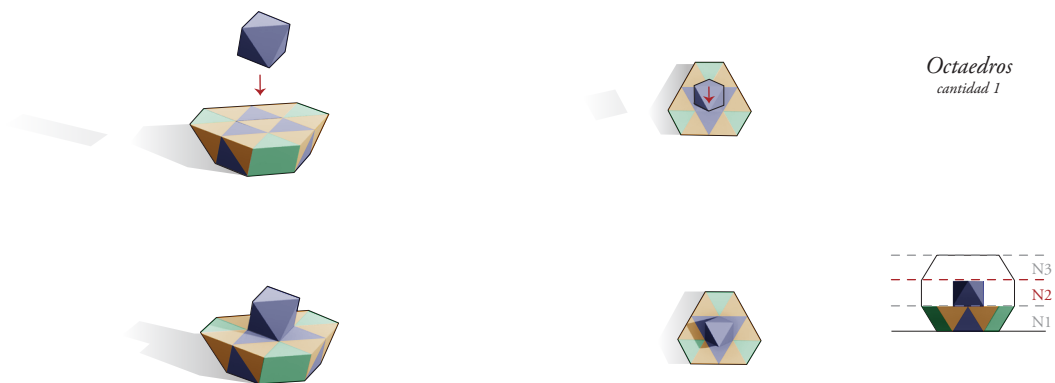
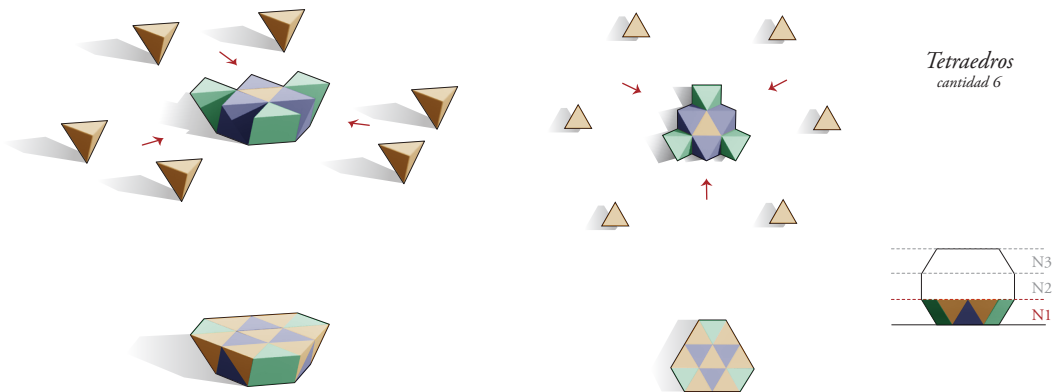
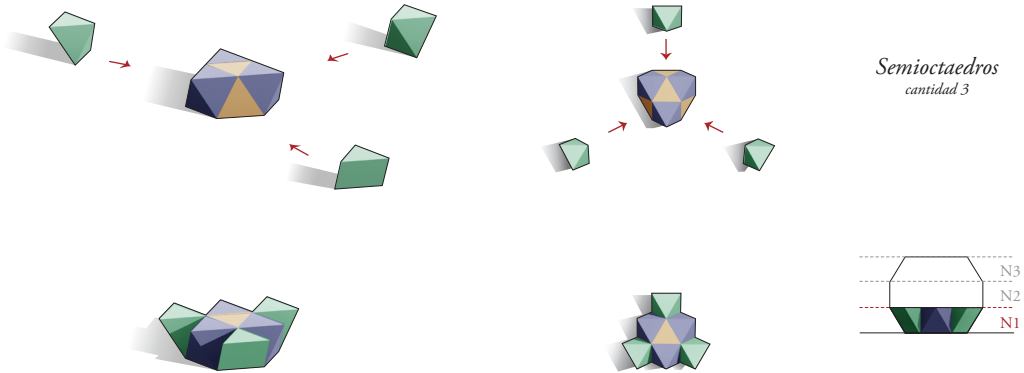


Octaedros
cantidad 3



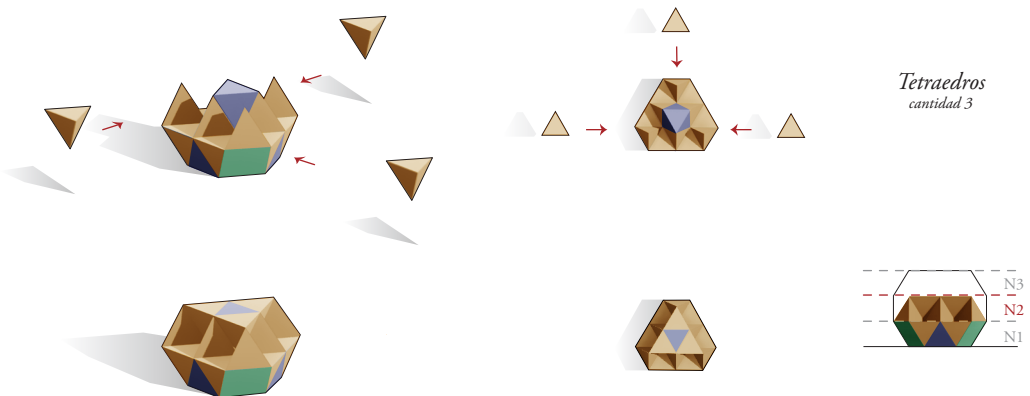
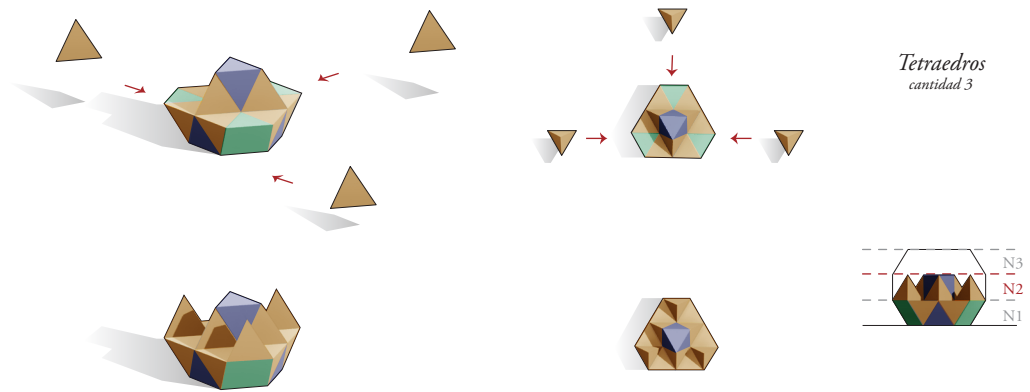
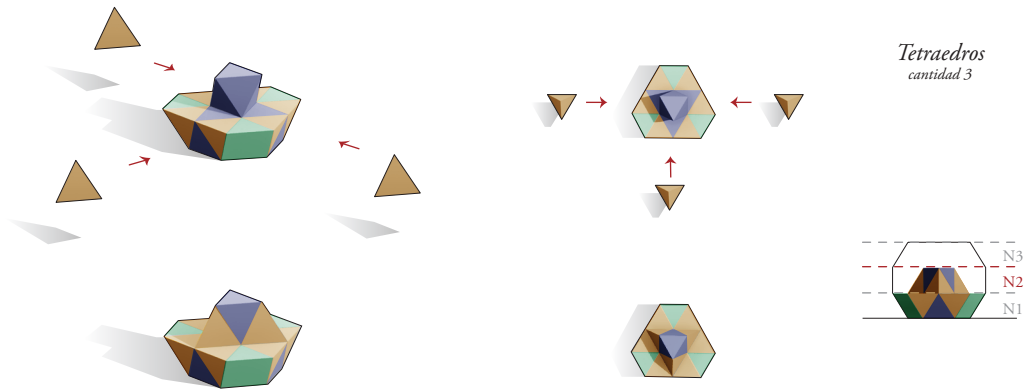
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal



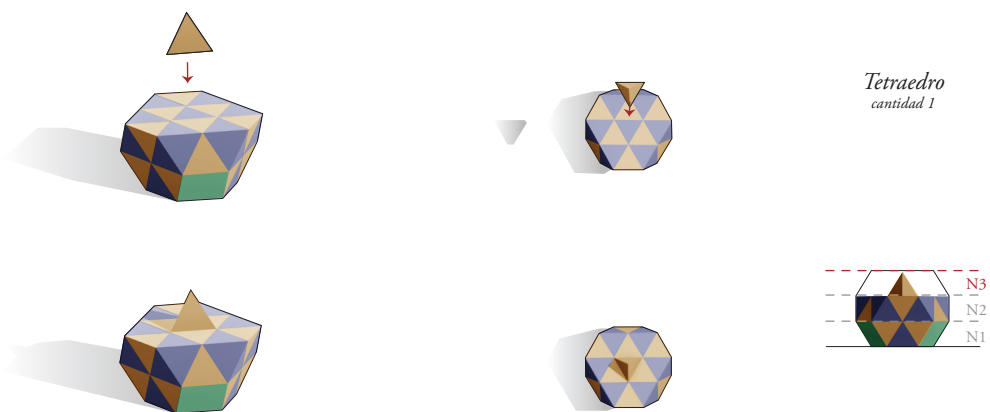
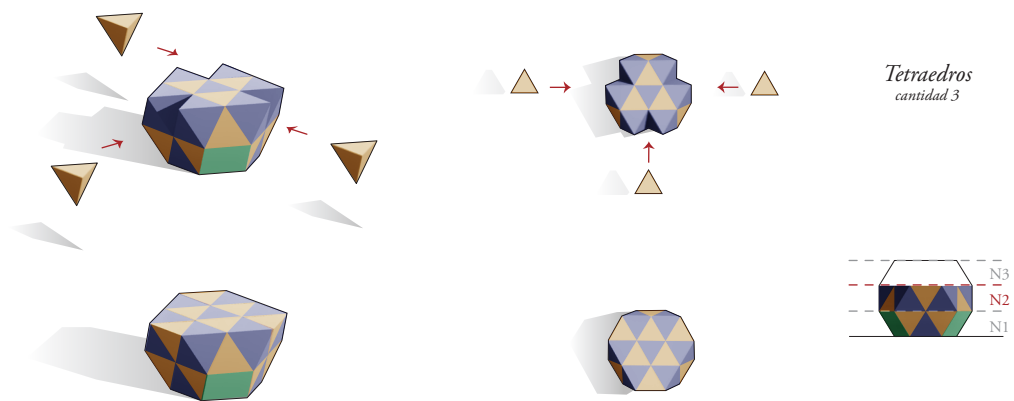
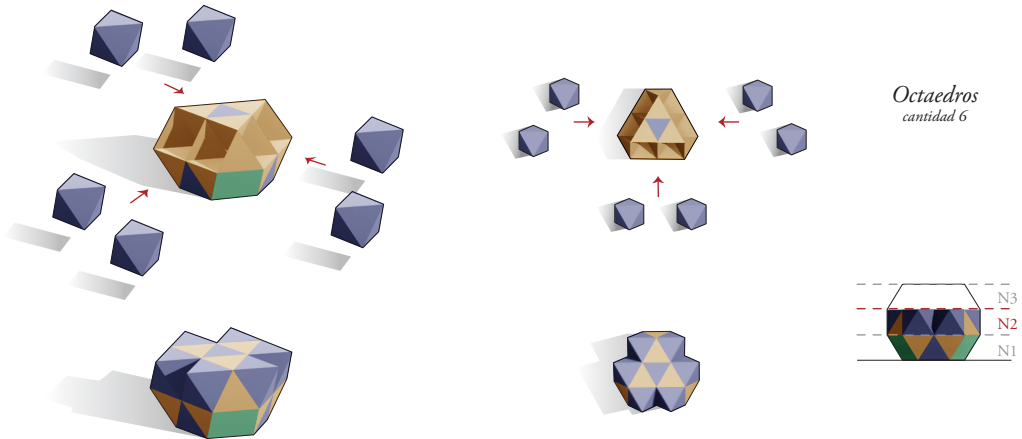
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal



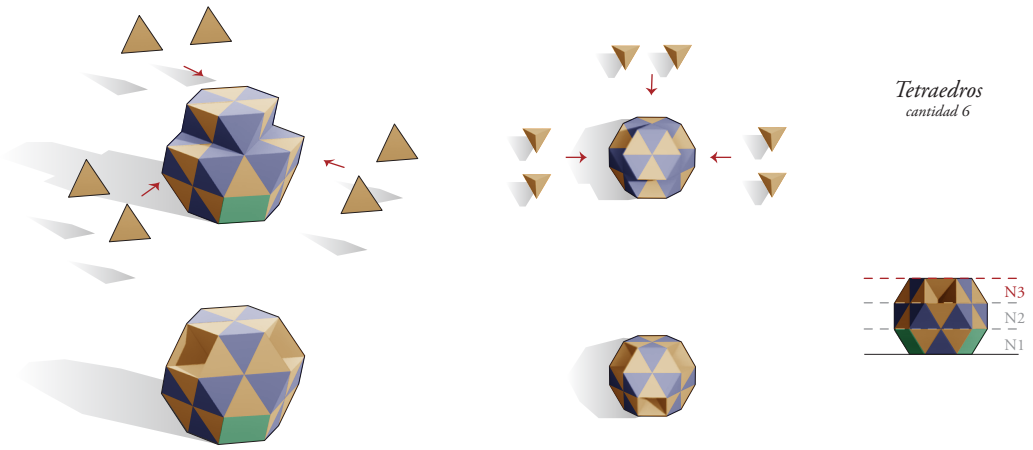
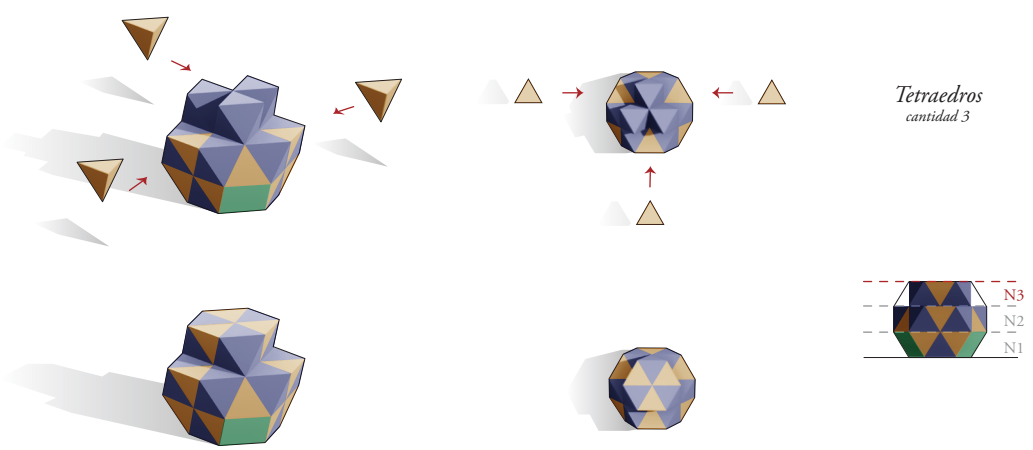
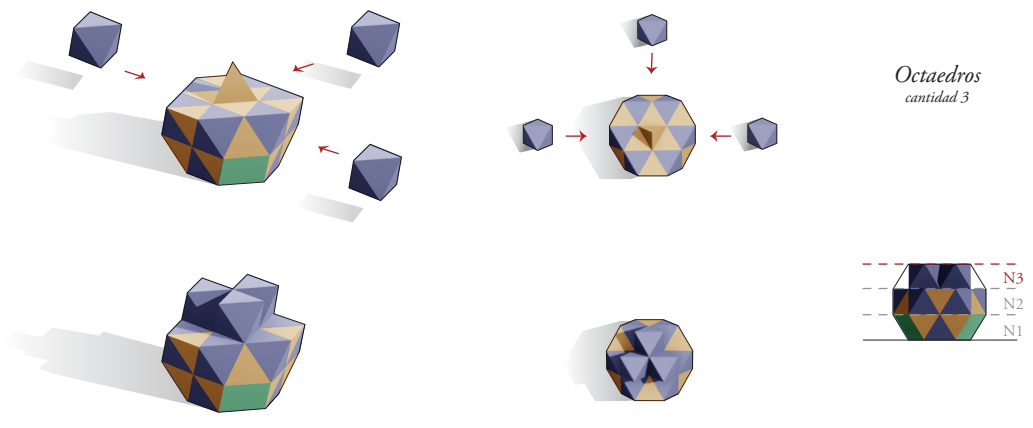
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal



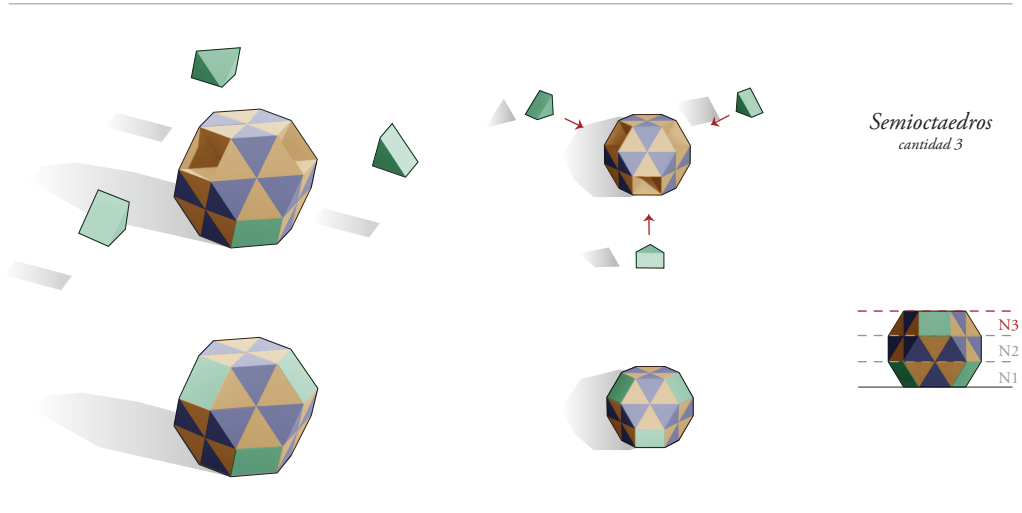
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal



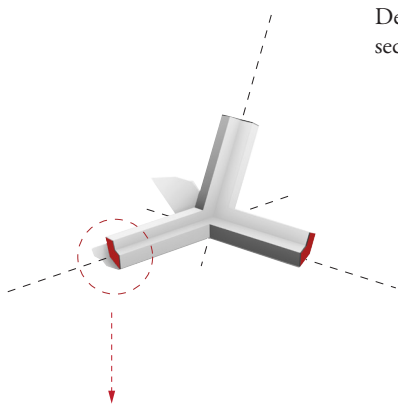
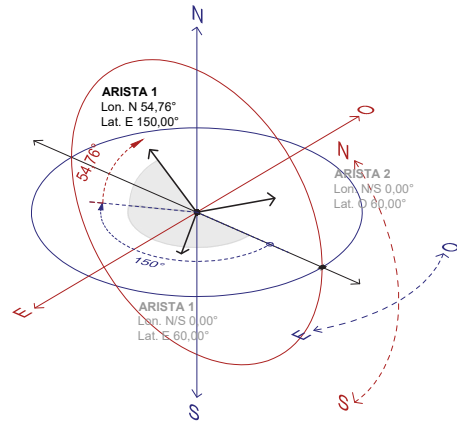
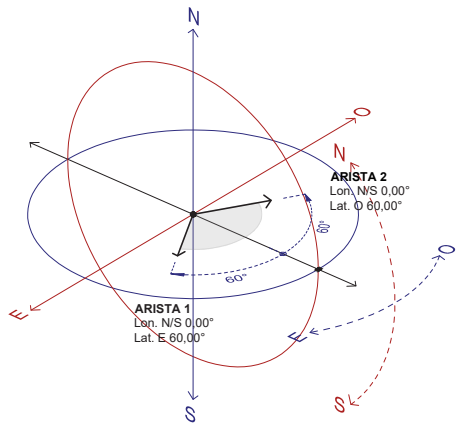
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara hexagonal

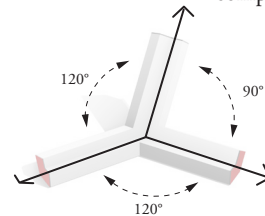


OCTAEDRO TRUNCADO

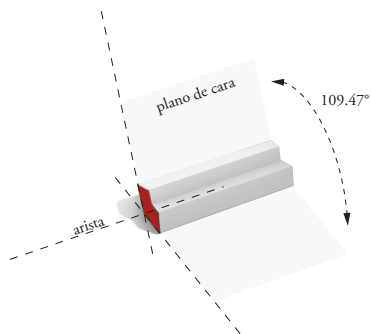
Propiedades nodo / Estudio de su generación



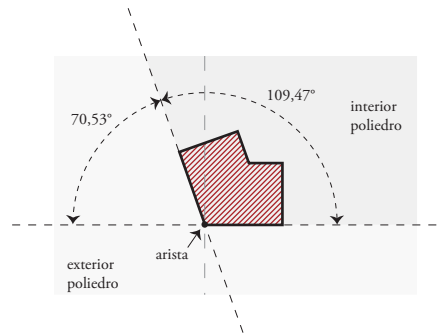
Detalle de nodo con secciones normales



Total de vértices para conformar el volumen completo: 24



Detalle de sección normal



3.4 / Octaedro truncado / Posición tipo II (apoyado en cara cuadrada)

Para continuar el análisis geométrico del octaedro truncado en la segunda posición espacial, se realizarán tres cortes horizontales (coincidiendo son los cuatro niveles que son posibles reconocer al realizar una primera subdivisión) Considerando una longitud de arista = a, la altura del octaedro truncado se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_{\text{total}} = a \cdot 2\sqrt{2} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 2.8284$$

Sección 1 / Corte horizontal 1 / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura de esta primera sección horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_1 = a \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 2.1213$$

En esta sección horizontal es posible reconocer cuatro cuadrados de lado ($l = a$)

Sección 2 / Corte horizontal 2 / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura de esta primera sección horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_2 = a \cdot \sqrt{2} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 1.4142$$

Este corte horizontal da origen a una figura relativamente compleja, compuesta por una cruz definida por cinco cuadrados lado ($l = a$) y por cuatro triángulos isósceles ubicados en los cuatro extremos de la cruz, cuyos catetos coincidan con el lado de los cuadrados y su hipotenusa con la diagonal del cuadrado ($l = a \cdot \sqrt{2}$)

Sección 3 / Corte horizontal 3 / Relaciones geométricas y dimensionales

Considerando una longitud de arista = a, la altura de esta tercera sección horizontal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{altura : } h_3 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{aproximadamente} = a \cdot 0.7070$$

En esta sección horizontal es posible reconocer cuatro cuadrados de lado ($l = a$)

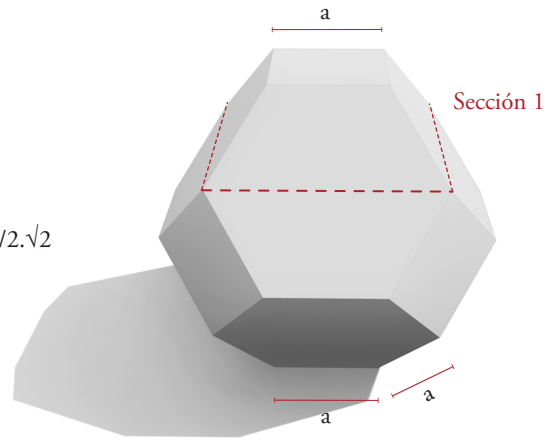
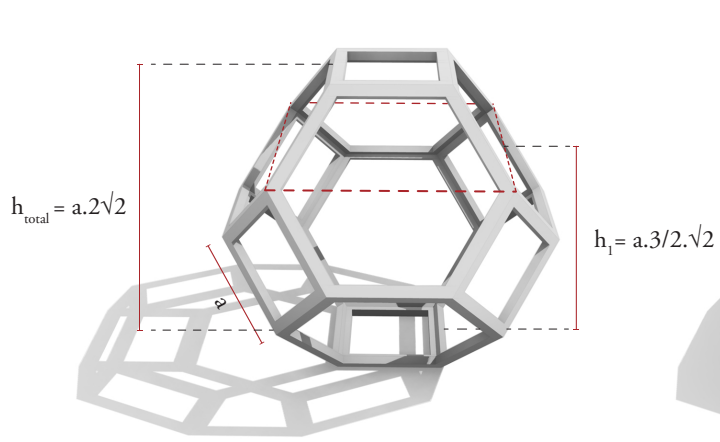
Sección 4 / Corte vertical / Relaciones geométricas y dimensionales

El plano de corte vertical coincidirá con el plano medio que dividirá el volumen en dos mitades iguales y simétricas. La figura geométrica obtenida a partir de la sección coincide con la figura obtenida en la sección horizontal 2. También es posible encontrar la misma coincidencia con la figura resultante en la sección 1 y 3 si el plano de corte vertical se desplaza en forma paralela una distancia igual a: $a \cdot \sqrt{2}$ y $-(a \cdot \sqrt{2})$

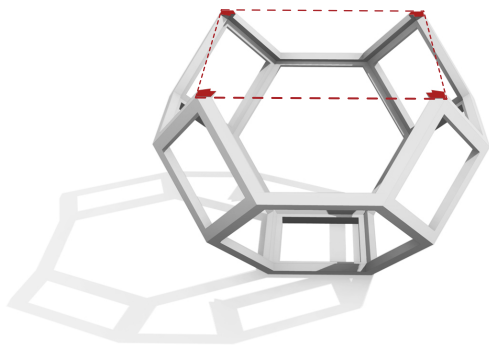
Generación por adición

Sobre el final del análisis se realiza un registro graficando la construcción del octaedro truncado a partir de la adición poliedros de menor tamaño con un largo de arista = a. Esta construcción se realizará utilizando: 32 tetraedros regulares, 28 semi octaedros regulares y 8 cuartos octaedros regulares

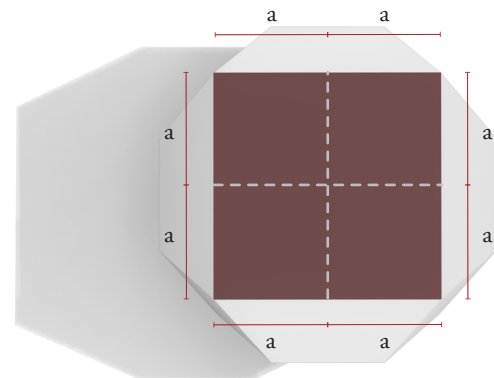
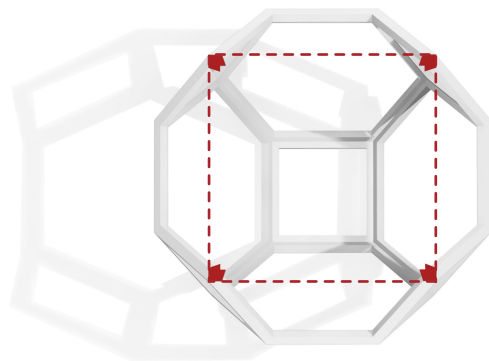
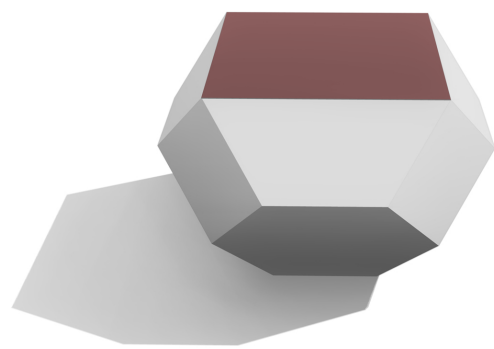
Octaedro truncado / Posición tipo II



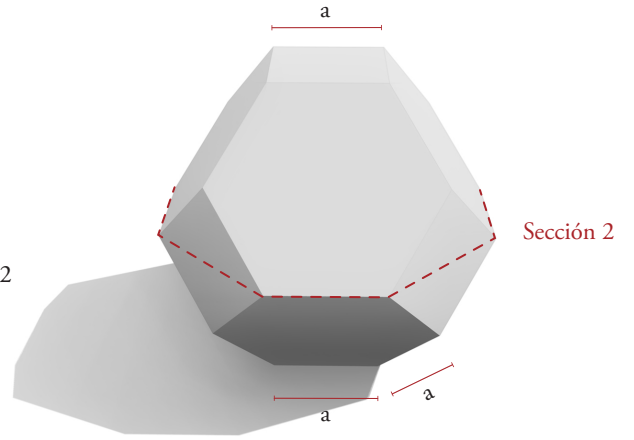
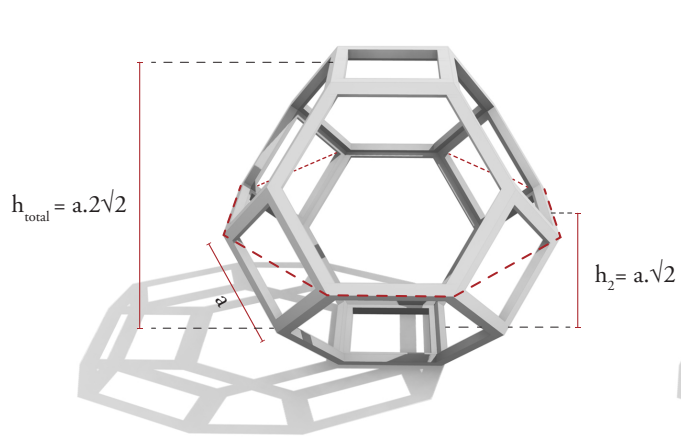
Sección 1:



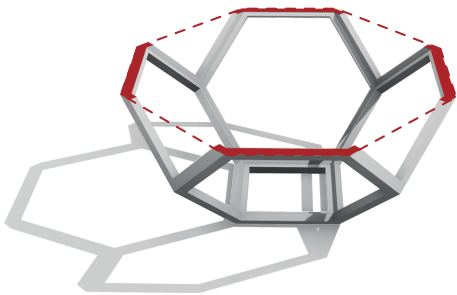
Sección 1:



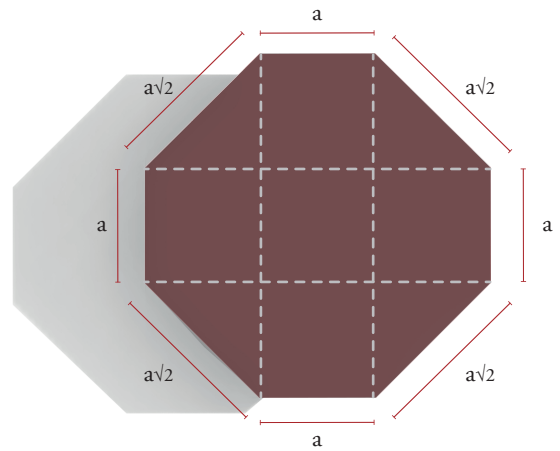
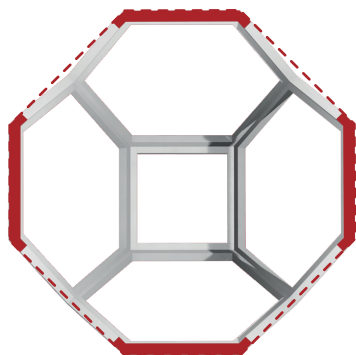
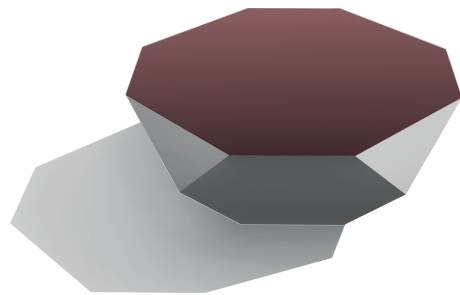
Octaedro truncado / Posición tipo II



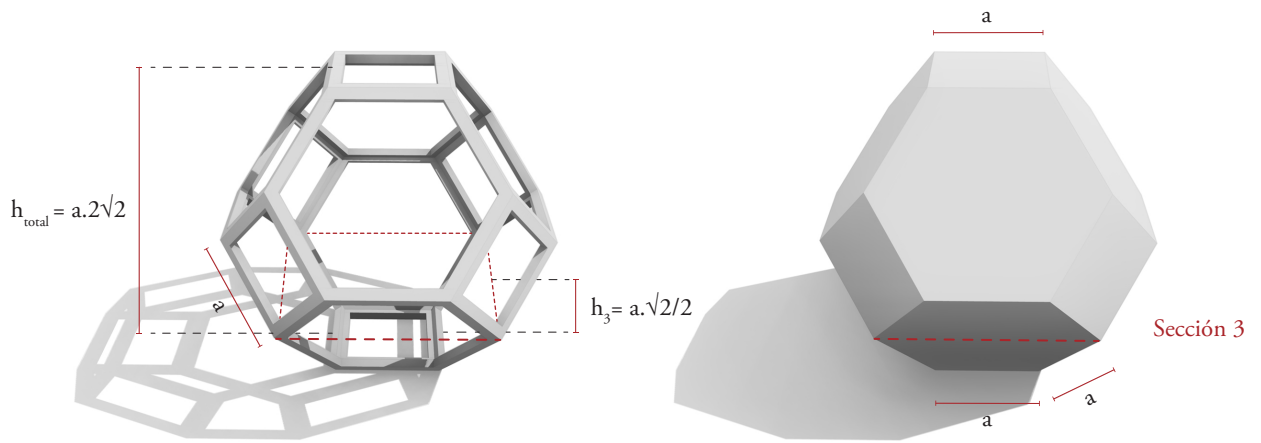
Sección 2:



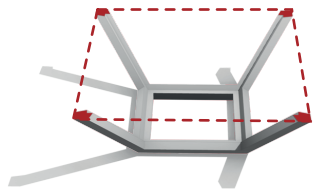
Sección 2:



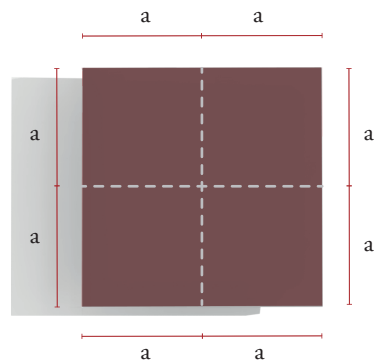
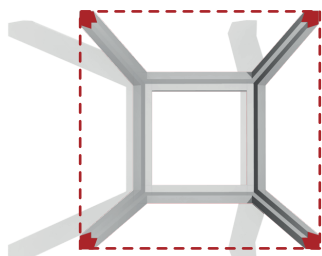
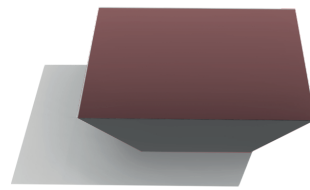
Octaedro truncado / Posición tipo II



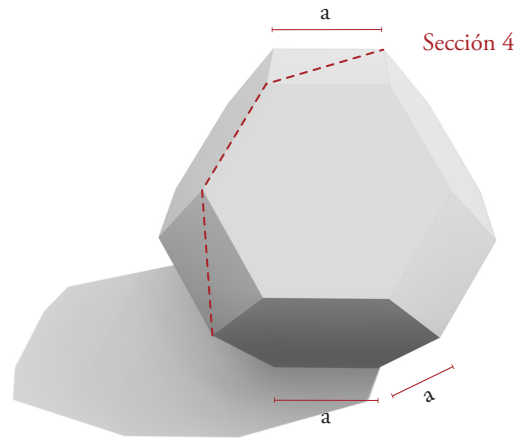
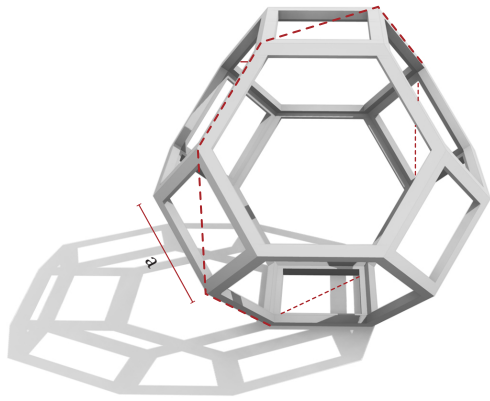
Sección 3:



Sección 3:

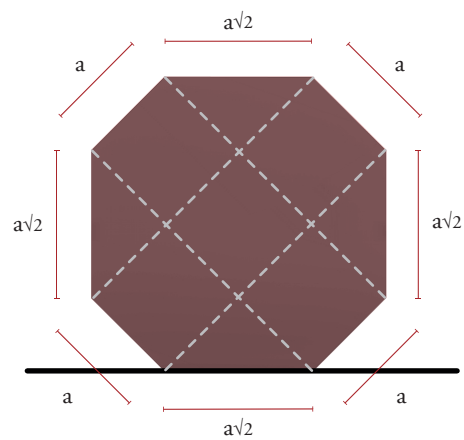
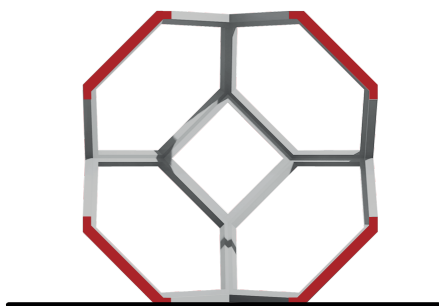
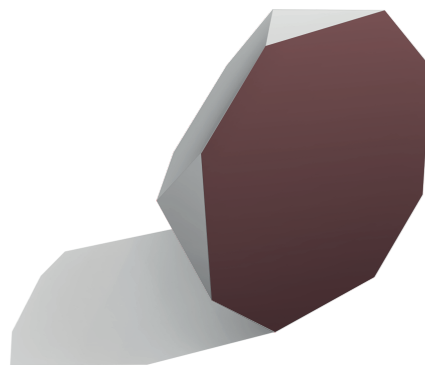
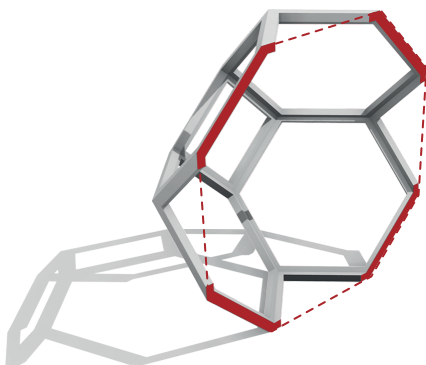


Octaedro truncado / Posición tipo II



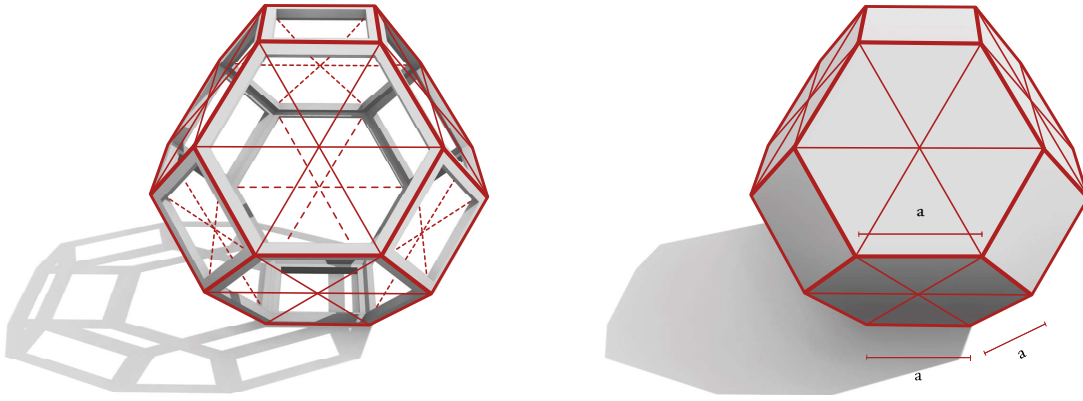
Sección 4:

Sección 4:



3.5 / Génesis por adición / Posición tipo II (apoyado en cara cuadrada)

Octaedro Truncado _ Primer nivel de subdivisión



Continuando el análisis anterior es posible obtener el octaedro truncado a partir de poliedros regulares de menor tamaño, originados en el primer nivel de subdivisión, orientados en la posición espacial tipo II del octaedro truncado, apoyado sobre una de sus caras cuadradas. En esta posición espacial al visualizar los elementos de la red espacial Kelvin, es posible detectar cuatro niveles, dentro del poliedro.

A efectos de simplificar la comprensión del proceso de adición, los registros gráficos fueron ordenados partiendo desde el nivel inferior, hasta el nivel superior, como si se tratar de la construcción de un edificio.

Los poliedros utilizados para reconstruir el octaedro truncado por adición de componentes son los siguientes:

- _ 32 tetraedros regulares
- _ 28 semi octaedros regulares
- _ 8 cuarto octaedros regulares

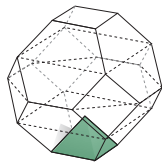
En los gráficos que siguen se identifica cada tipo de poliedro con un color diferente y a medida que se va avanzando en altura en la construcción se va registrando el estado general del volumen con un pequeño esquema en sección.

OCTAEDRO TRUNCADO Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada

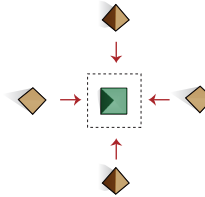
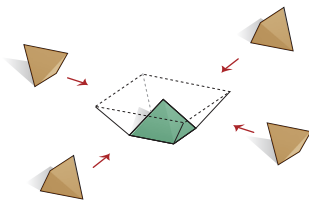
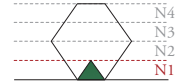


OCTAEDRO TRUNCADO

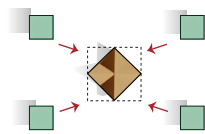
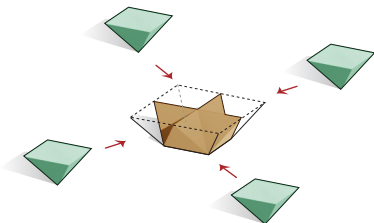
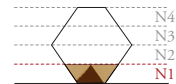
Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada



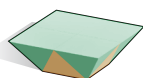
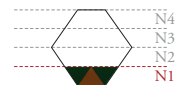
Semioctaedro
cantidad 1



Tetraedros
cantidad 4

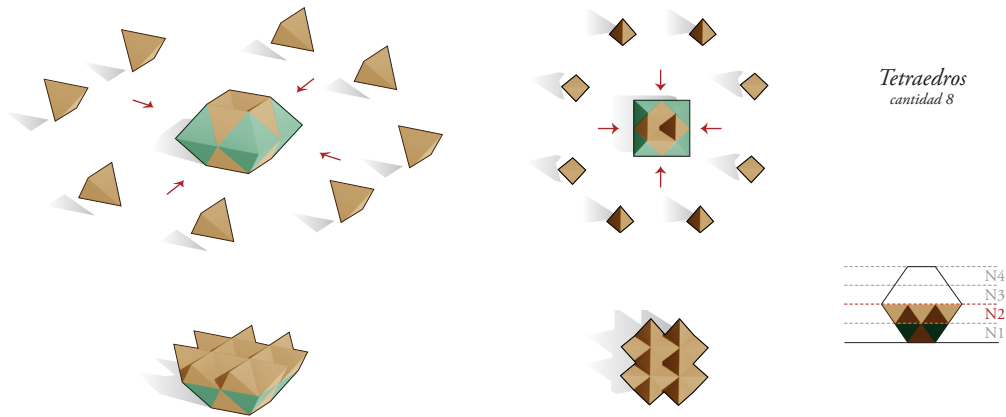
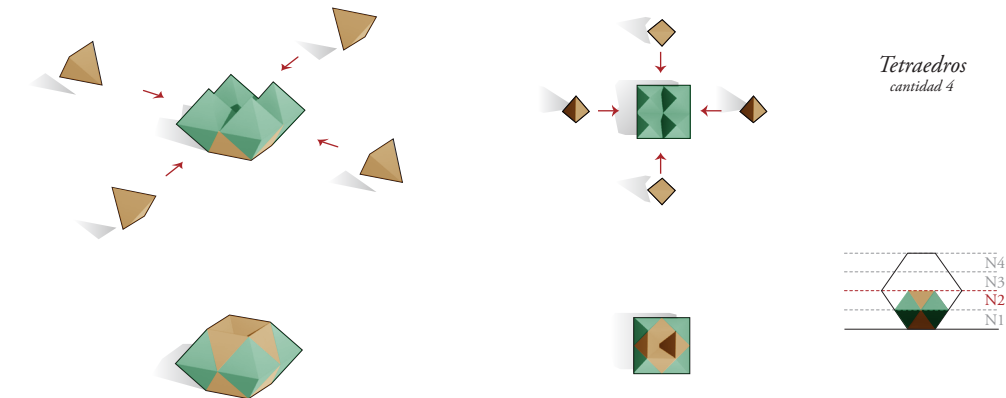
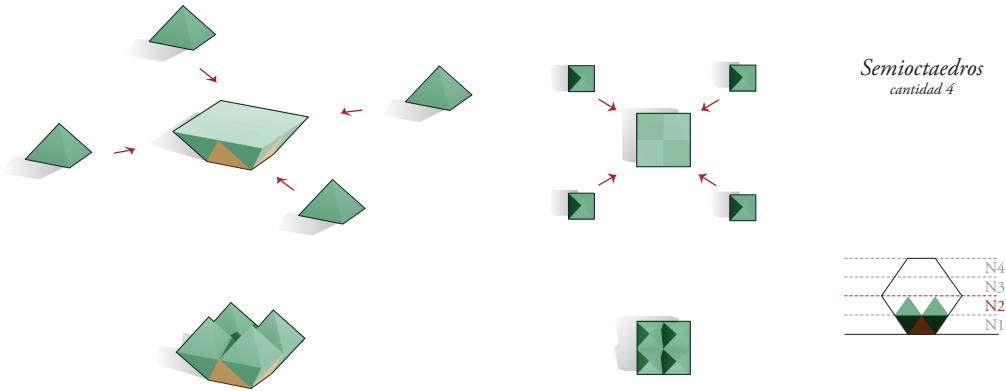


Semioctaedros
cantidad 4



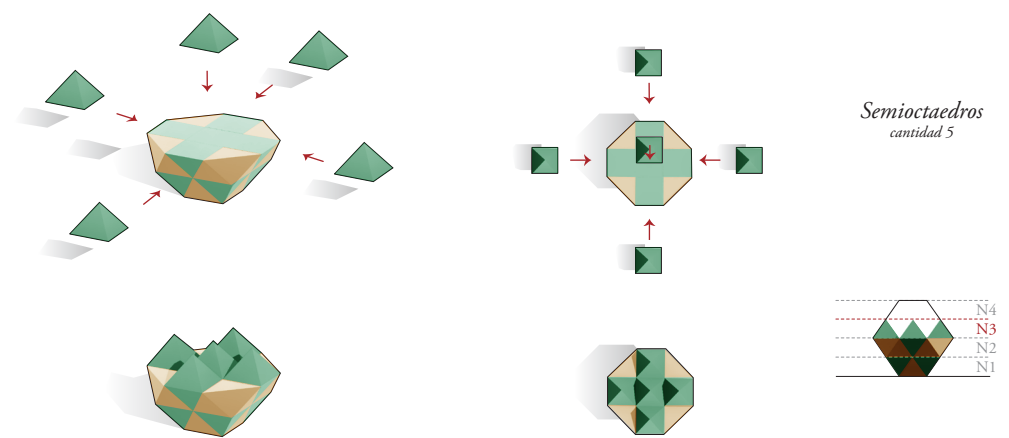
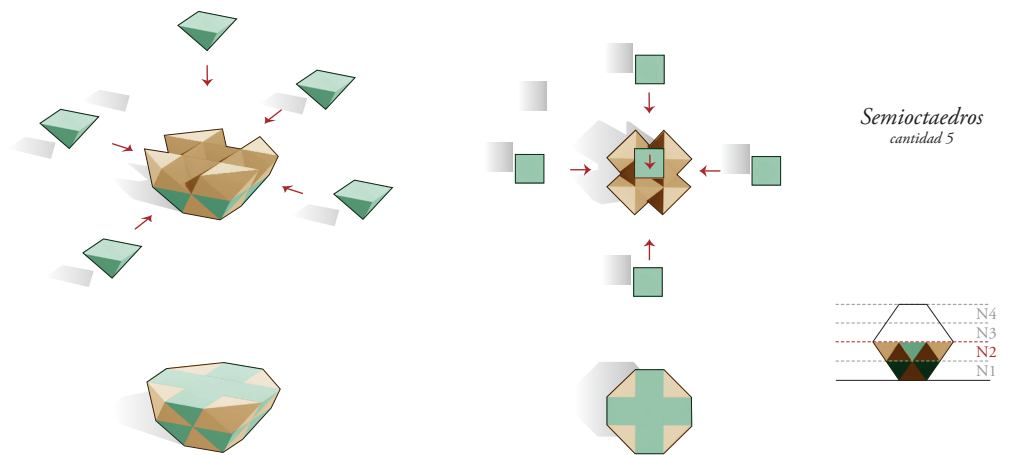
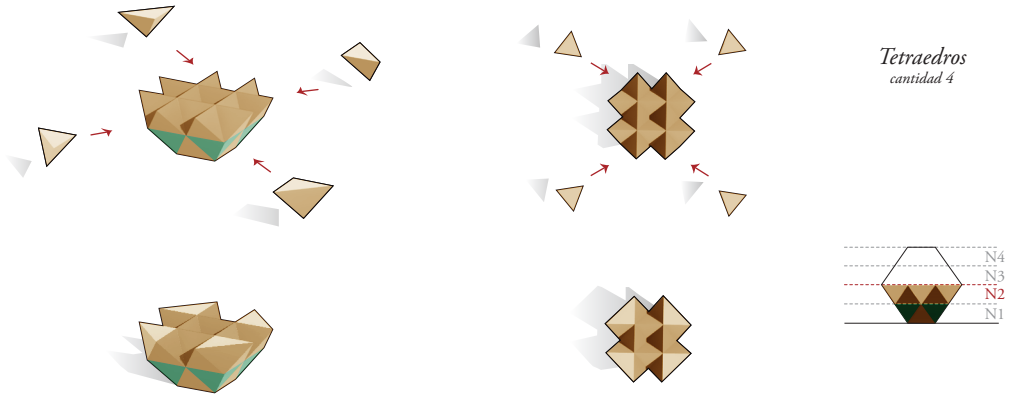
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada



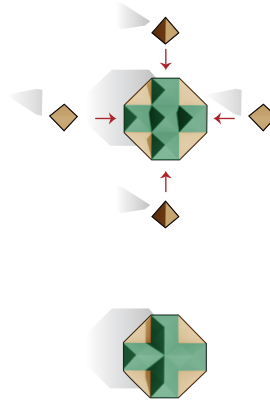
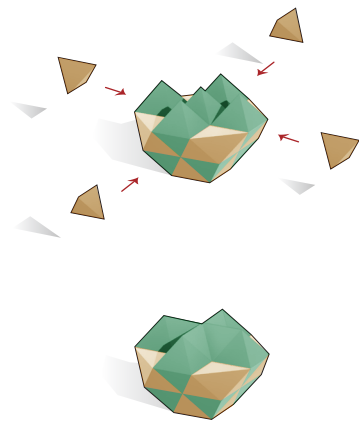
OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada

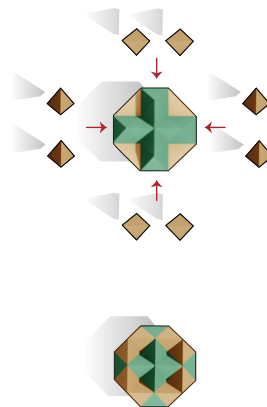
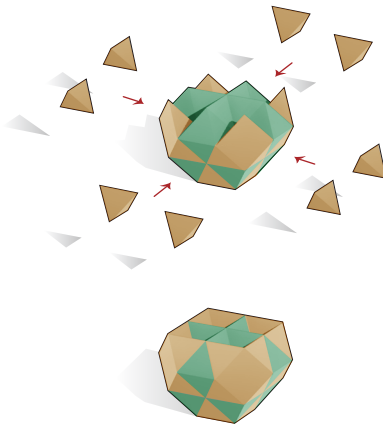
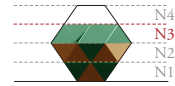


OCTAEDRO TRUNCADO

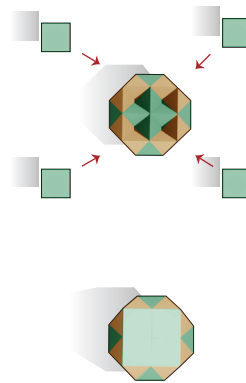
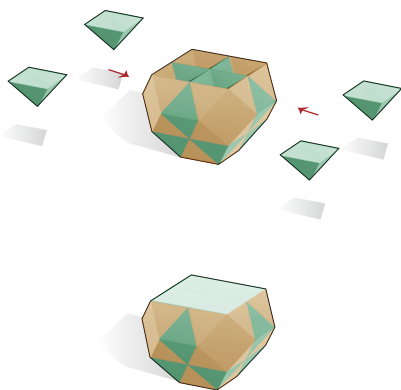
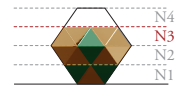
Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada



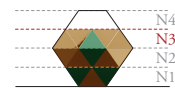
Tetraedro
cantidad 4



Tetraedros
cantidad 8

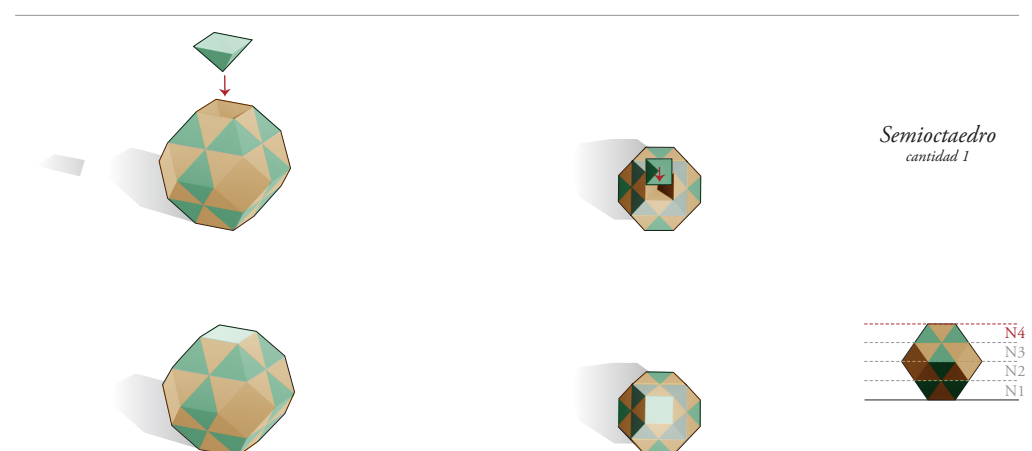
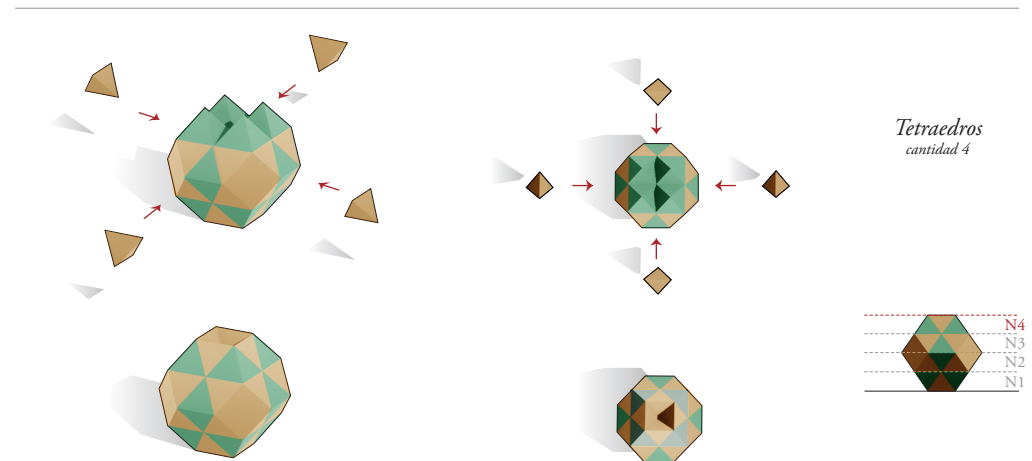
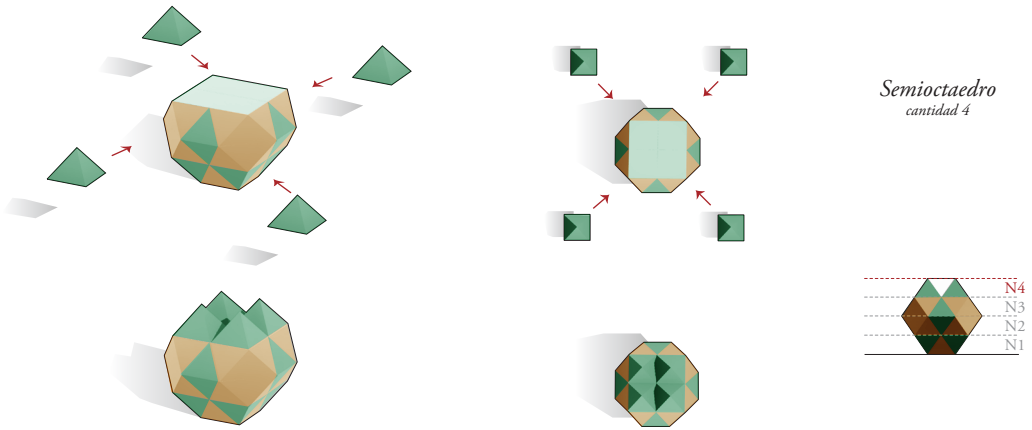


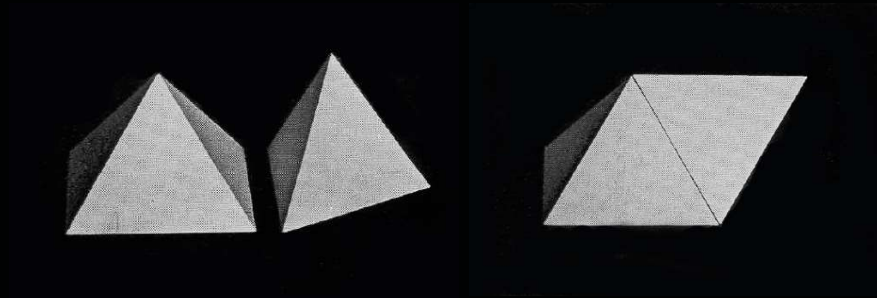
Semioctaedros
cantidad 4



OCTAEDRO TRUNCADO

Génesis por adición / Apoyado en cara cuadrada





“Zueco irregular” Imágenes de maquetas tomadas por Rafael Leoz en su libro “Redes y ritmos espaciales”



Arq. Antonio Bonet / Capilla para Susana Soca / Localidad de Soca, Canelones 1952 - 1966

3.6 / Conclusiones sobre teselaciones, espumas y redes espaciales

Como se explicitó anteriormente entre los sólidos platónicos el único poliedro capaz de teselar el espacio, por repeticiones a intervalos regulares del mismo volumen es el cubo. Dentro de los sólidos arquimedianos es el octaedro truncado es único capaz de teselar el espacio y al mismo tiempo fue desde 1887 hasta 1993 fue la solución al problema sobre cómo particionar el espacio en celdas de igual volumen con el área más pequeña de contacto entre ellas.²⁴ A la repetición del octaedro truncado se le denominó "estructura de Kelvin" ya que en 1887 Lord Kelvin se enfrentó a la pregunta sobre la forma más eficaz de teselar el espacio y encontró la respuesta en la "espuma"²⁵ conformada por octaedros truncados, de ahí que también se le denomine como poliedro de Kelvin.

Complementariamente, y como se demostró en los registros de construcción por adición dentro del octaedro truncado es posible encontrar teselaciones espaciales menores, coincidentes con los lugares geométricos de la red espacial Kelvin. Estas teselaciones menores encuentran su "unidad mínima" en la suma de un tetraedro regular y un semi octaedro regular, en lo que Matyla Ghyka denominó "zueco irregular"²⁶ en su libro "Estética de las proporciones". La repetición de estos elementos mínimos de igual largo de arista (bajo reglas definidas de simetrías y de ubicaciones espaciales específicas) define el lugar geométrico de las rectas y planos que componen la red espacial Kelvin.

En la Capilla para Susana Soca del Arquitecto Catalán Antonio Bonet (ubicada en la localidad de Soca en el departamento de Canelones) es posible reconocer la red espacial Kelvin en la estructura del edificio. La composición está basada en el agrupamiento de dos semi octaedros (o pirámides de base cuadrada) y cinco tetraedros. En las aristas (de doce metros de largo) es posible visualizar la presencia de elementos estructurales longitudinales. Las caras triangulares de los poliedros de diseñan para comportarse como opacas y translucidas. La ubicación de estas caras podría dar una pista del pensamiento proyectual del Arquitectos en términos de redes espaciales, ya que las cuatro caras opacas (inclinadas hacia el exterior) se encuentra ubicadas en los testeros de las naves identificado quizás un límite temporal o "terrenal" de una red de características infinitas. Las doce caras triangulares que ofician como cubierta del edificio, presentan dos series de subdivisiones en triángulos equiláteros menores. En la primera serie es posible reconocer veinticinco triángulos equiláteros y en la segunda, nueve triángulos equiláteros definiendo una especie de filigrana de hormigón en los que se insertan cristales de colores como vitreux.²⁷

En el capítulo siguiente se realizará una aproximación a las propiedades y características de la red Kelvin, a través de registros gráficos, en los que se intentará transmitir de forma simple reglas que gobiernan el sistema geométrico, con la expectativa de facilitar su utilización y manipulación.

24 En 1993 los físicos Irlandeses Denis Weaire y Robert Phelan descubrieron un contraejemplo, utilizando celdas de igual volumen con dos formas diferentes, resultando una superficie 0.3 % menos que la estructura de Kelvin, aunque aún no se considera como una estructura óptima. Este modelo se conoce como estructura de Weaire-Phelan.

25 Si bien exceden el alcance del presente trabajo, se identifican algunas similitudes entre las propiedades geométricas de la red espacial Kelvin definida en base a la repetición de octaedros truncados y las leyes matemáticas que describen la estructura de las burbujas de jabón "Leyes de Plateau" en cuanto al valor de los ángulos de sus componentes. En las últimas dos de sus leyes describe: 3) Tres películas de jabón se intersecan a lo largo de una línea, formando un ángulo de **120 grados**, llamada Frontera de Plateau.

4) Cuatro de estas «fronteras de Plateau» (todas formadas por la intersección de tres superficies) intersecan en un punto, formando un ángulo de $\cos^{-1}(-1/3) \approx 109.47$ **grados** (ángulo tetraédrico). Tomado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Plateau

Los ángulos interiores del octaedro truncado son los siguientes:

Diedro 1 _ **109.47°** entre caras hexagonales

Diedro 2 _ **125.26°** entre caras hexagonales y cuadradas

26 Ver estudio volumétrico en ANEXO II

27 Imagen tomada de: <http://talleravb.blogspot.com/2017/06/antonio-bonet-iglesia-soca.html>

4. Aproximación a la red Kelvin

4.1 / Aproximación a la red Kelvin

Tomando como referencia los análisis realizados en este capítulo se expondrá y graficará el sistema de planos paralelos ubicados a intervalos regulares que definen la red espacial Kelvin, así como el conjunto de rectas que resultan de sus intersecciones.

La red se define como un conjunto de siete haces de planos paralelos posicionados en intervalos regulares. La intersección recurrente de estos planos define rectas sobre cada plano. A su vez la intersección de estas rectas definen polígonos regulares que teselan la superficie de estos planos (cuadrados y triángulos equiláteros).

De esta forma los haces de planos que conforman la red espacial Kelvin se pueden clasificar de la siguiente forma, en función del polígono que tesela su superficie:

- _ Planos teselados por triángulos equiláteros (cuatro haces de planos)
- _ Planos teselados por cuadrados (tres haces de planos)

Estos siete planos coinciden, con los planos definidos por las catorce caras del poliedro de Kelvin, en pares de a dos. El poliedro posee seis caras cuadradas y ocho caras hexagonales. A cada cara hexagonal y cuadrada le corresponde otra cara igual a la siguiente distancia en función de un largo de arista = a.

- _ Distancia entre caras paralelas hexagonales = $a \cdot 3\sqrt{2/3}$ aprox. = $a \cdot 2.4495^{28}$
- _ Distancia entre caras paralelas cuadradas = $a \cdot 2\sqrt{2}$ aprox. = $a \cdot 2.8284^{29}$

Complementariamente, dado que la red espacial deriva del poliedro de Kelvin también es posible determinar dos tipos de posiciones espaciales. Para denominar estas posiciones de forma simple y asociarlas a características edilicias es posible referirse a ellas como planos "horizontales".

En el caso de la posición tipo I del octaedro truncado (apoyado en cara hexagonal) se puede determinar que los planos horizontales de la red se encontrarán teselados por triángulos equiláteros, nominándola también como posición tipo I.

En el caso de la posición tipo II del octaedro truncado (apoyado en cara cuadrada) se puede determinar que los planos horizontales de la red se encontrarán teselados por cuadrados, nominándola también como posición tipo II.

A continuación se expondrán cada haz de planos y su relación con el plano horizontal, en las dos posibles ubicaciones espaciales de la red.

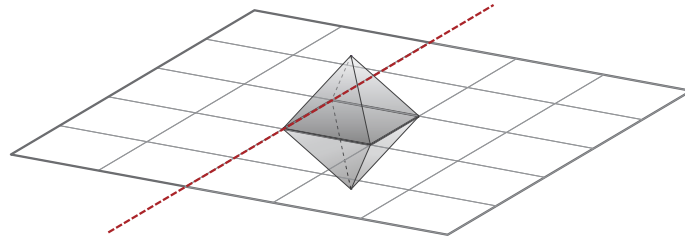
28 Esta distancia coincide con la altura total del poliedro de Kelvin cuando su ubicación espacial corresponde a la posición tipo I

29 Esta distancia coincide con la altura total del poliedro de Kelvin cuando su ubicación espacial corresponde a la posición tipo II

RED KELVIN

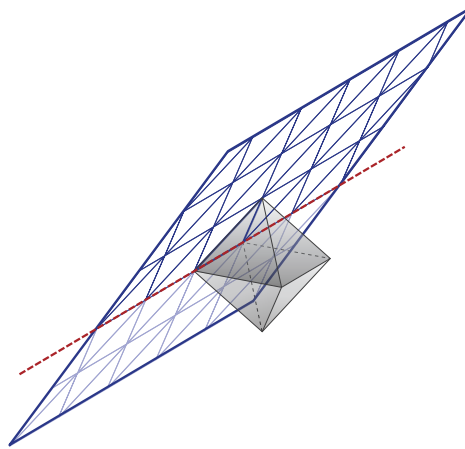
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



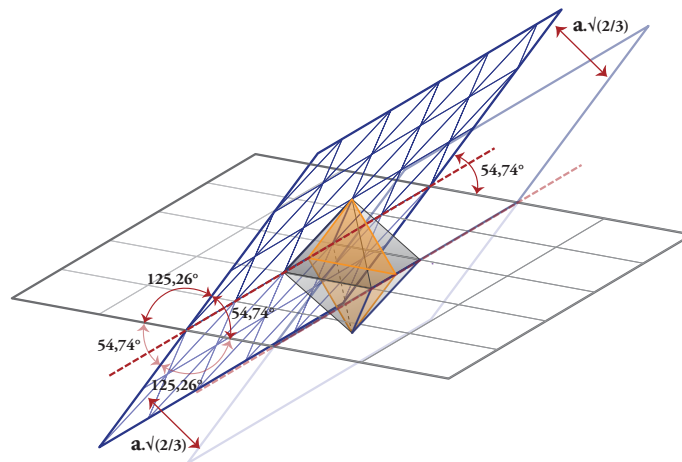
+

Plano inclinado 01

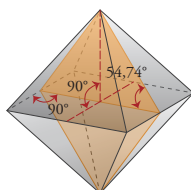


=

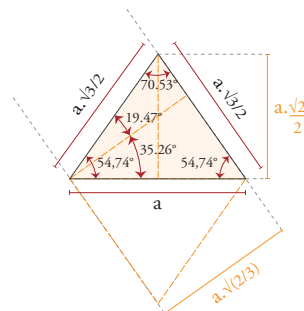
Intersección 01:
Plano horizontal y
Plano inclinado 01



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



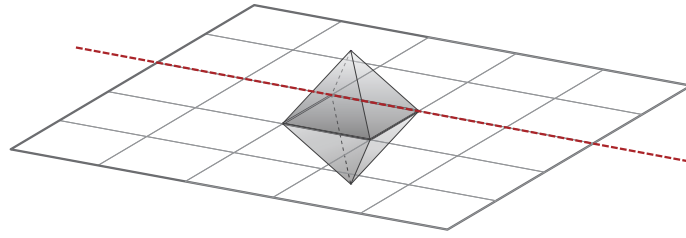
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

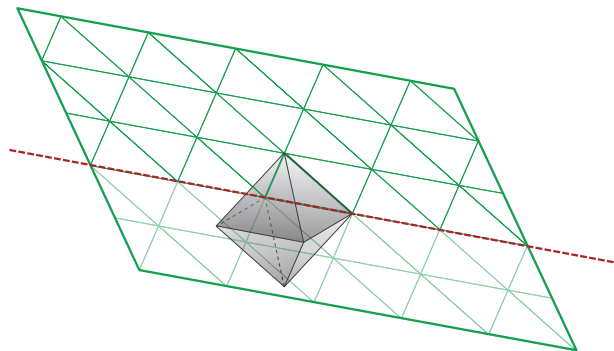
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



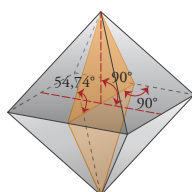
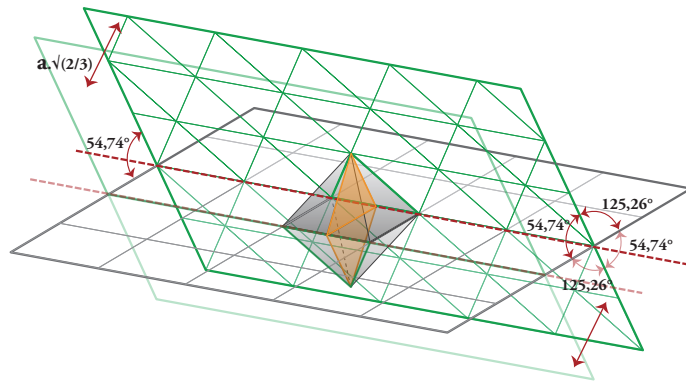
+

Plano inclinado 02

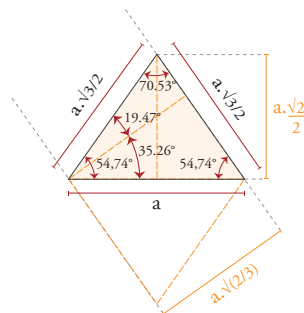


=

Intersección 02:
Plano horizontal y
Plano inclinado 02



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas

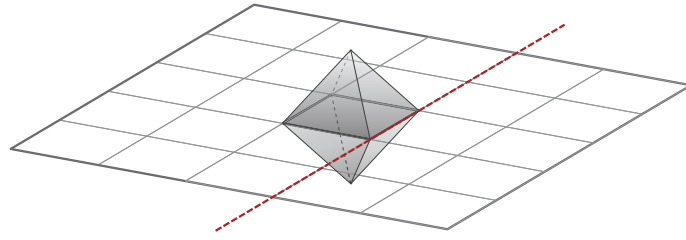


Dimensiones
y ángulos de
la figura

RED KELVIN

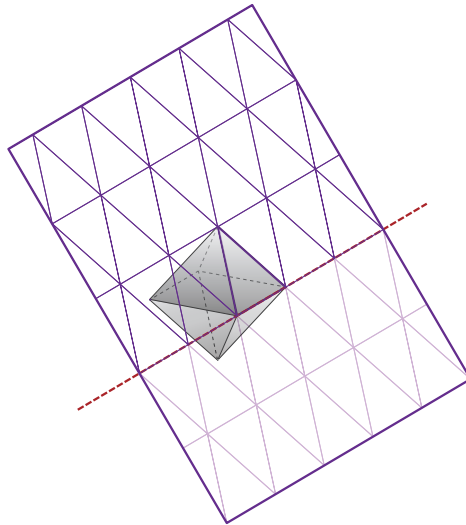
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



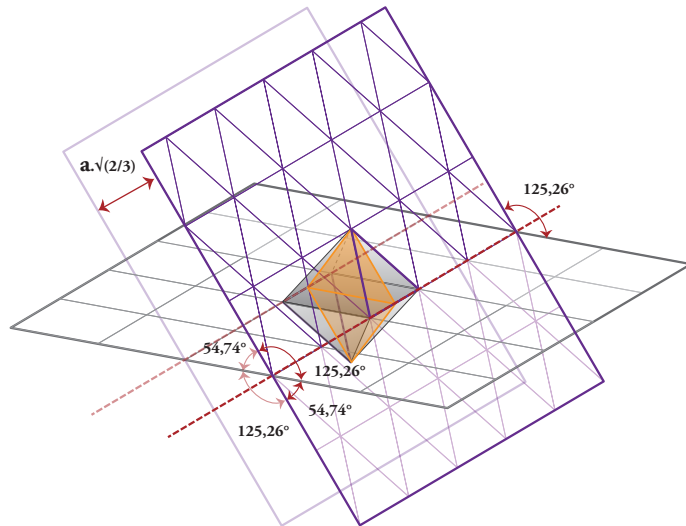
+

Plano inclinado 03

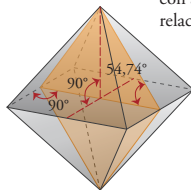


=

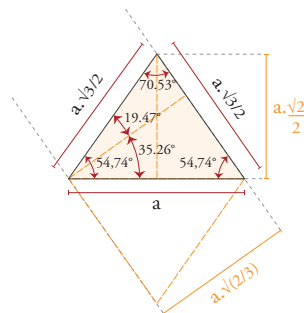
Intersección 03:
Plano horizontal y
Plano inclinado 03



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



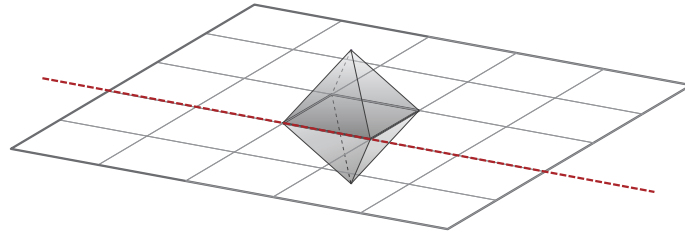
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

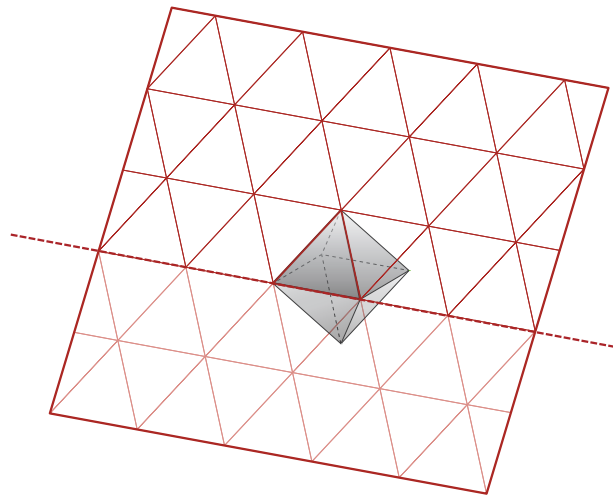
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



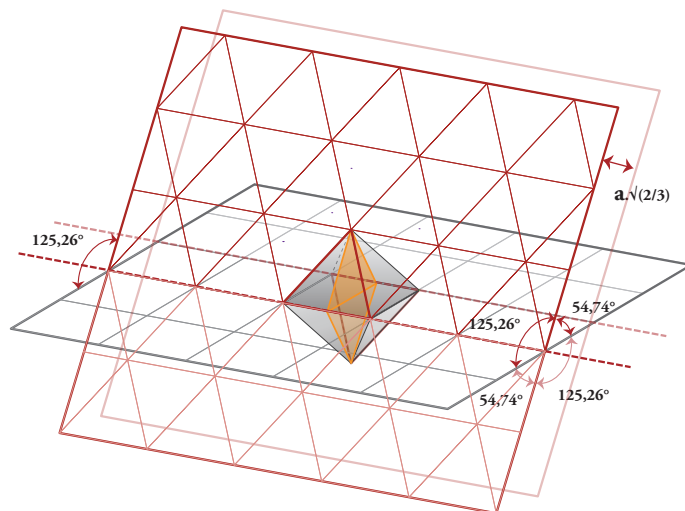
+

Plano inclinado 04

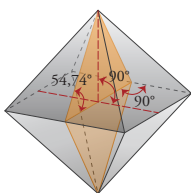


=

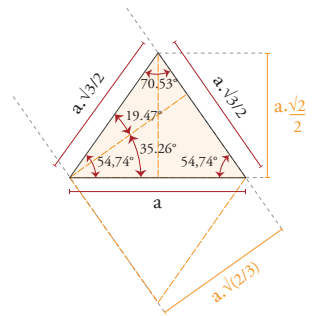
Intersección 04:
Plano horizontal y
Plano inclinado 04



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



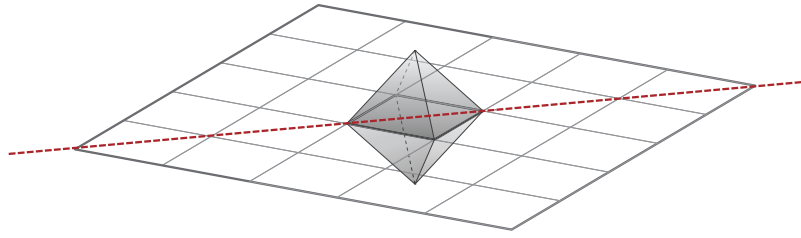
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

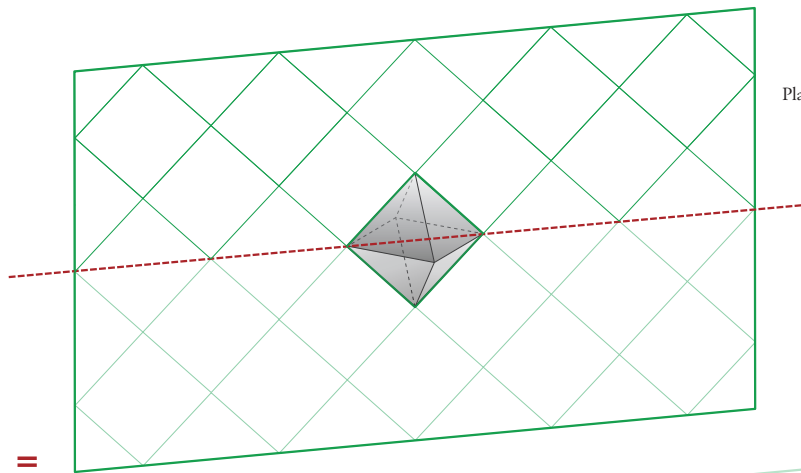
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



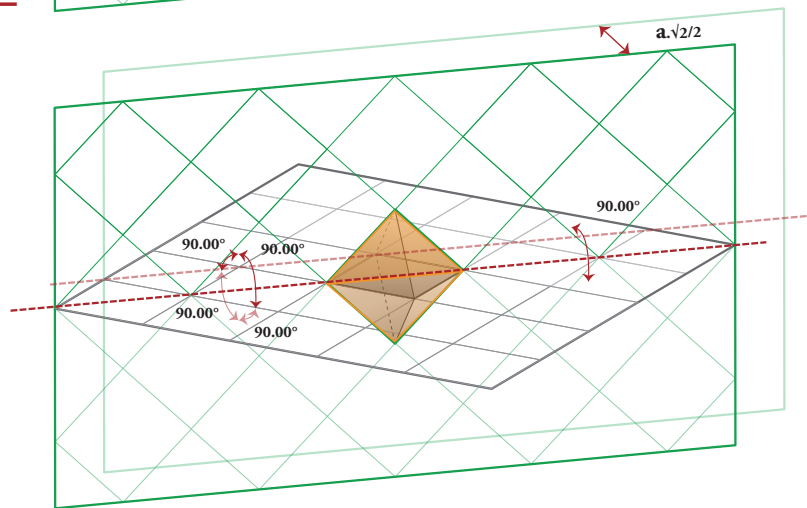
+

Plano vertical 01

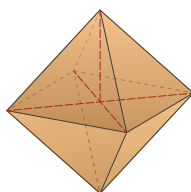


=

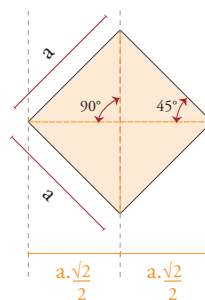
Intersección 05:
Plano horizontal y
Plano vertical 01



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



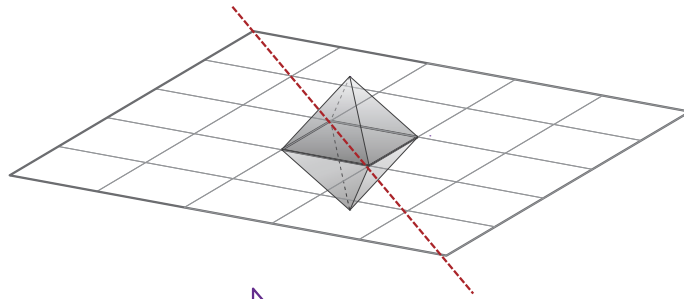
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

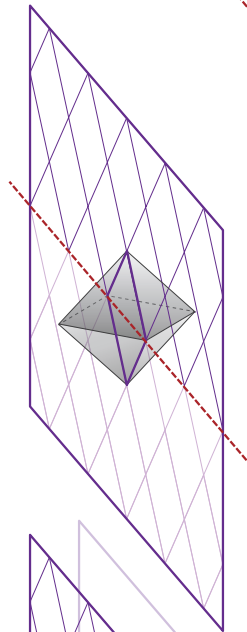
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



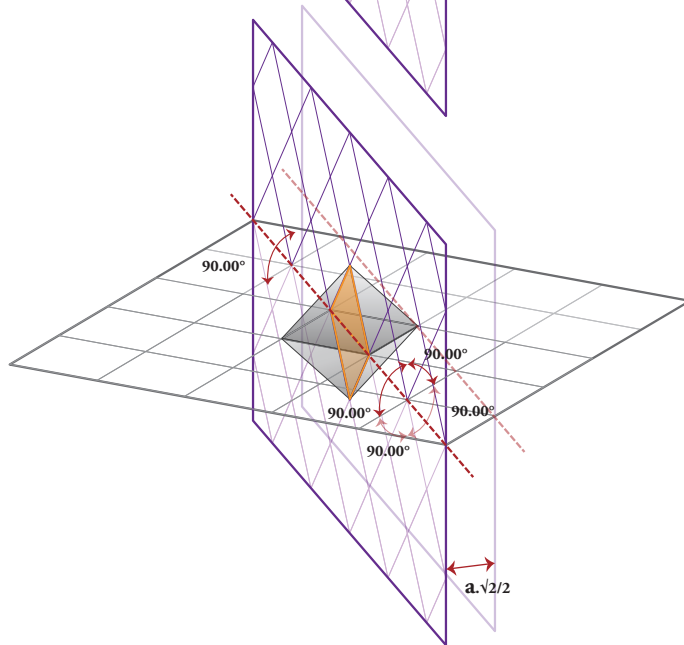
+

Plano vertical 02

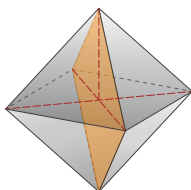


=

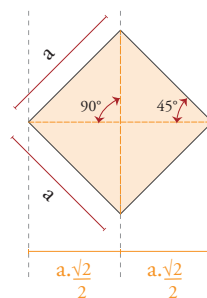
Intersección 06:
Plano horizontal y
Plano vertical 02



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



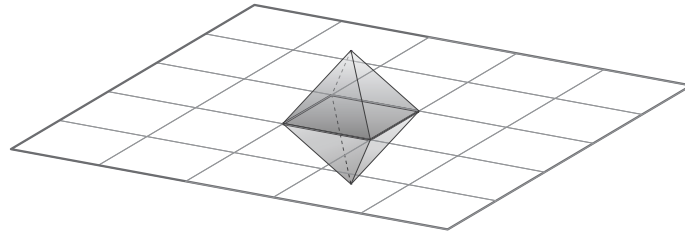
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

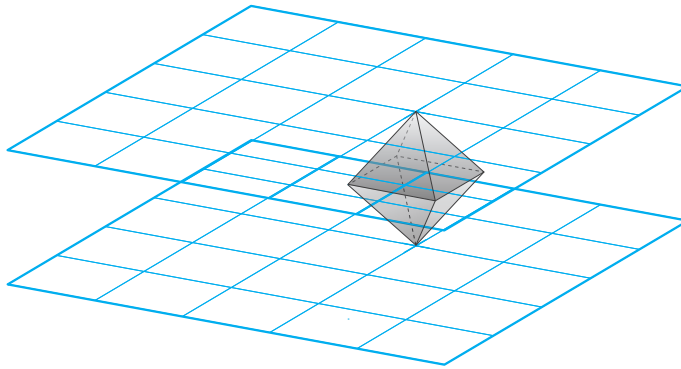
Octaedro posición 1 / Planos

Plano horizontal



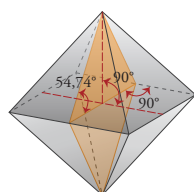
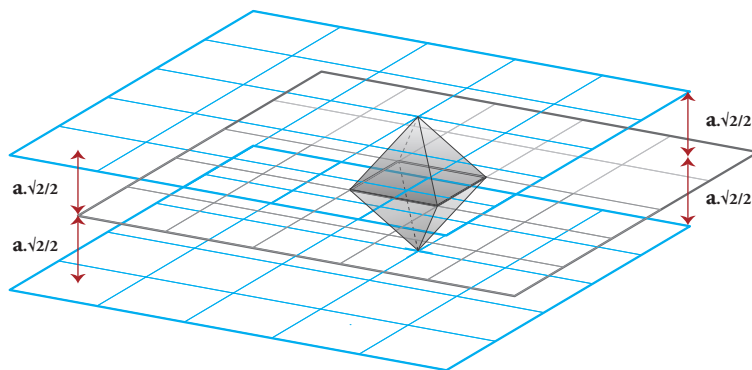
+

Planos horizontales paralelos

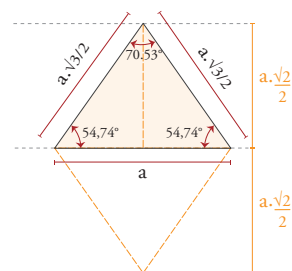


=

Juego de planos horizontales



Ángulos vinculados con aristas relacionadas



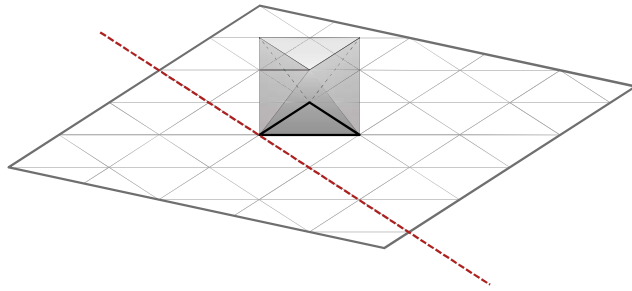
Dimensiones y ángulos de la figura

ANÁLISIS DE PLANOS DE LA RED KELVIN EN POSICIÓN II

RED KELVIN

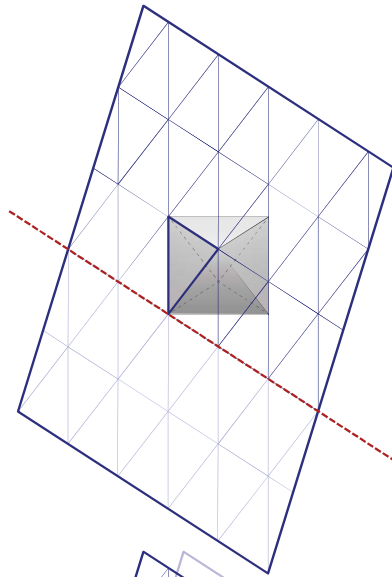
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



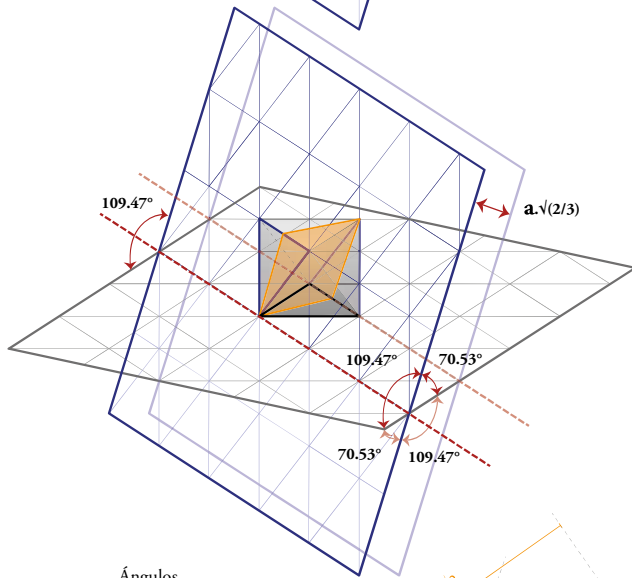
+

Plano inclinado 01

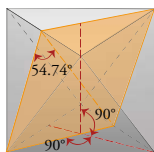


=

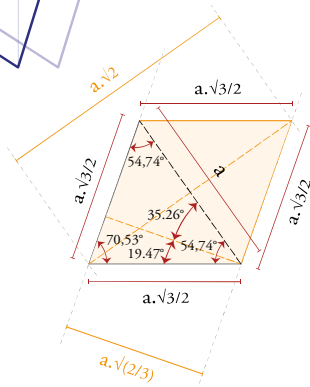
Intersección 01:
Plano horizontal y
Plano inclinado 01



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



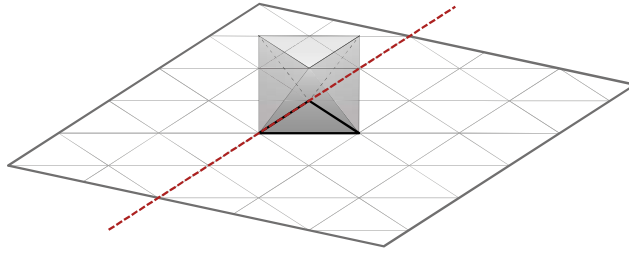
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

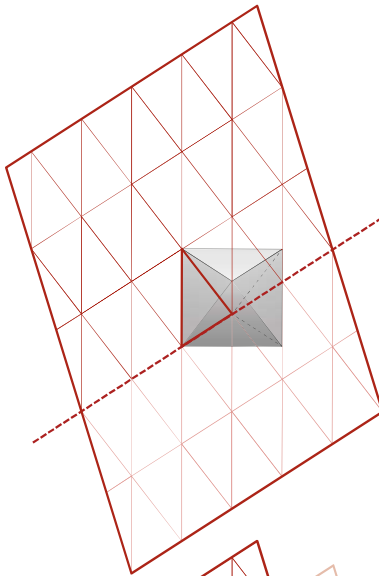
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



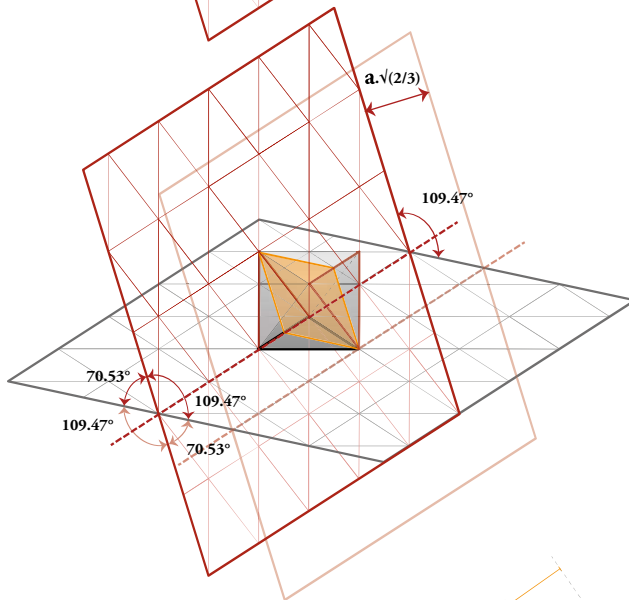
+

Plano inclinado 02

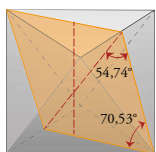


=

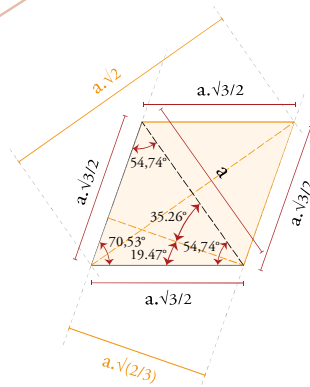
Intersección 02:
Plano horizontal y
Plano inclinado 02



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



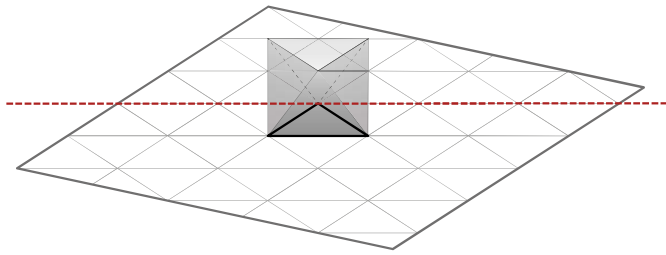
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

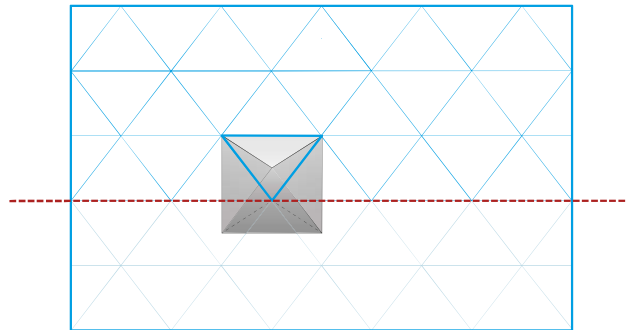
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



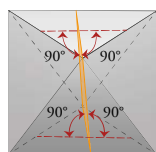
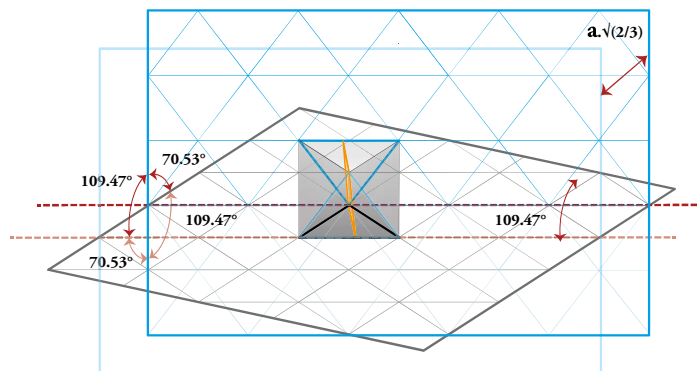
+

Plano inclinado 03

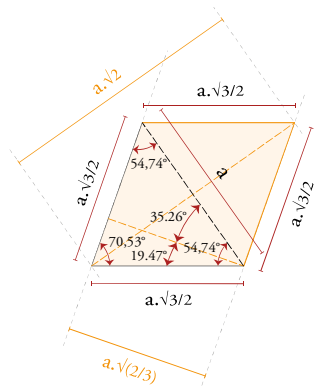


=

Intersección 03:
Plano horizontal y
Plano inclinado 03



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas

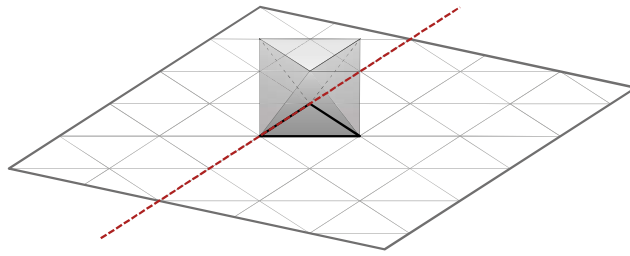


Dimensiones
y ángulos
de la figura

RED KELVIN

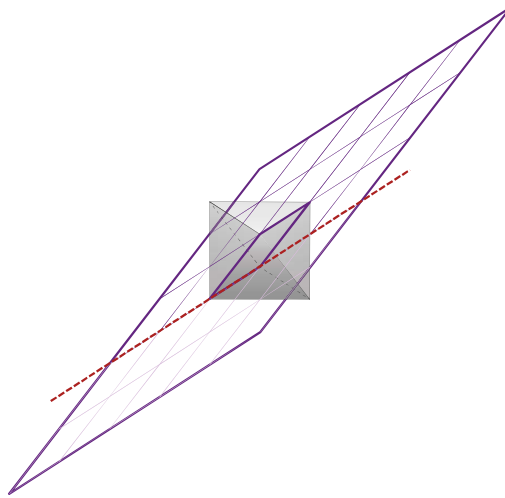
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



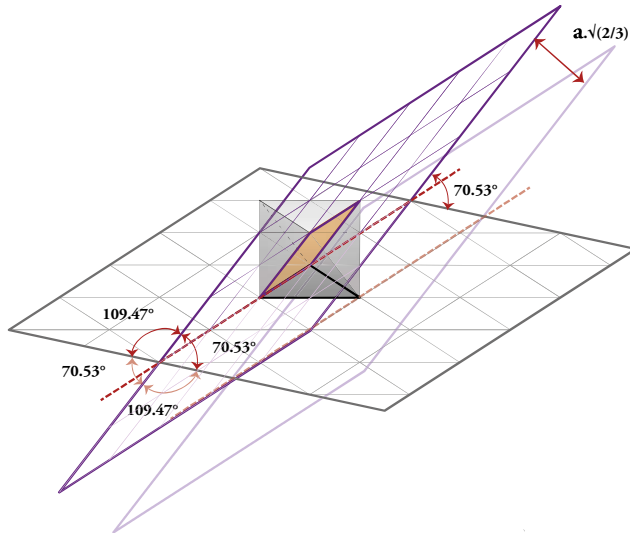
+

Plano inclinado 04

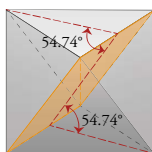


=

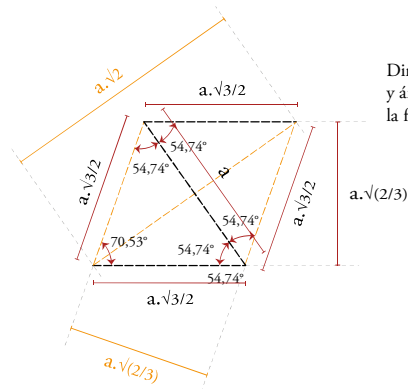
Intersección 04:
Plano horizontal y
Plano inclinado 04



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas



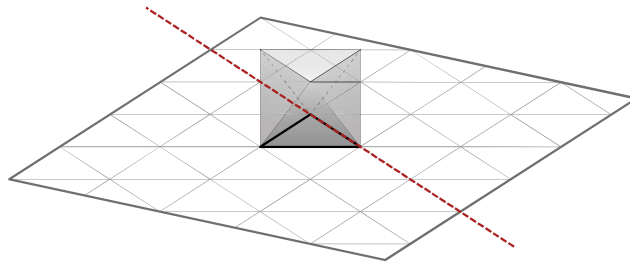
Dimensiones
y ángulos de
la figura



RED KELVIN

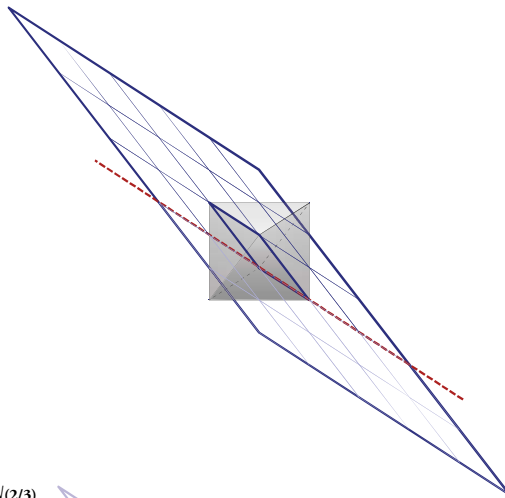
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



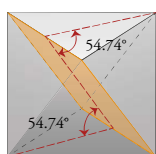
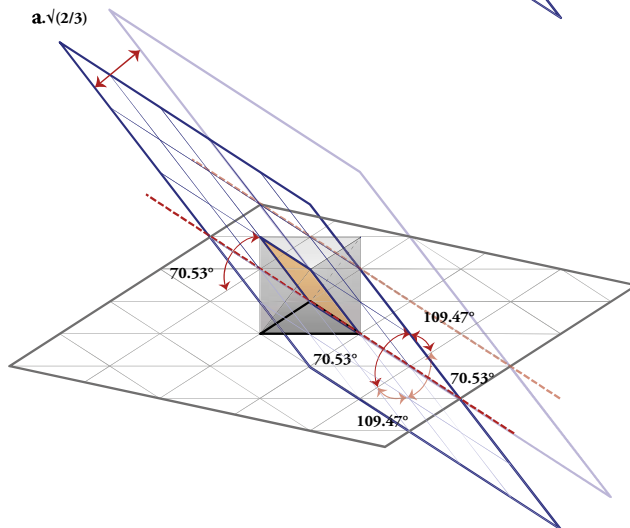
+

Plano inclinado 05

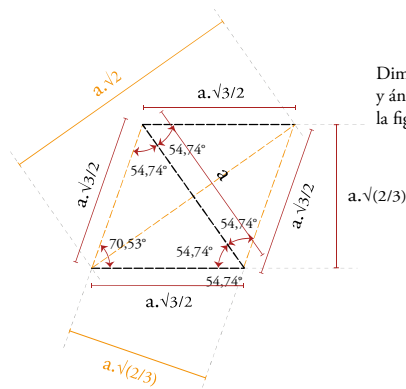


=

Intersección 05:
Plano horizontal y
Plano inclinado 05



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas

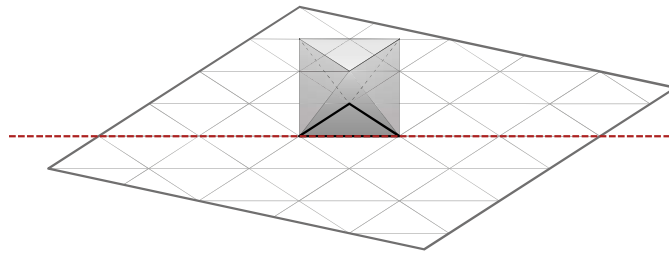


Dimensiones
y ángulos de
la figura

RED KELVIN

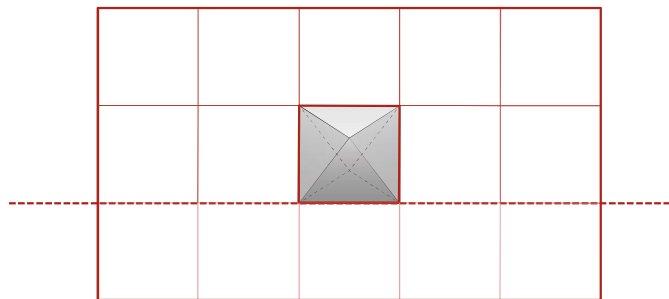
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



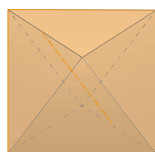
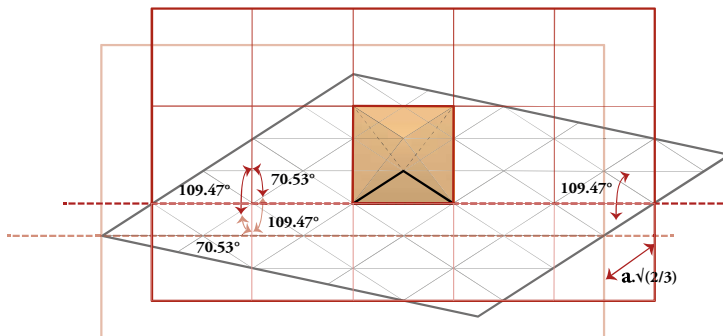
+

Plano vertical

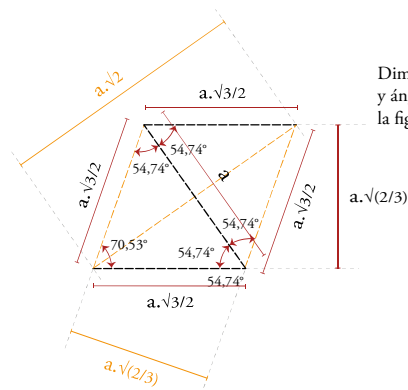


=

Intersección 06:
Plano horizontal y
Plano vertical



Ángulos
vinculados
con aristas
relacionadas

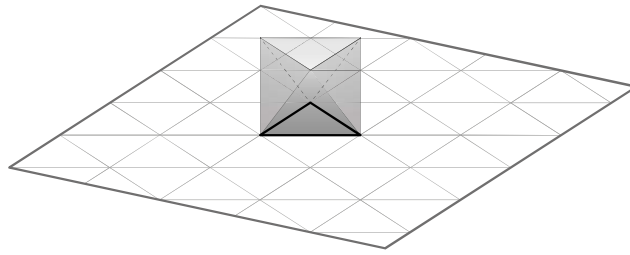


Dimensiones
y ángulos de
la figura

RED KELVIN

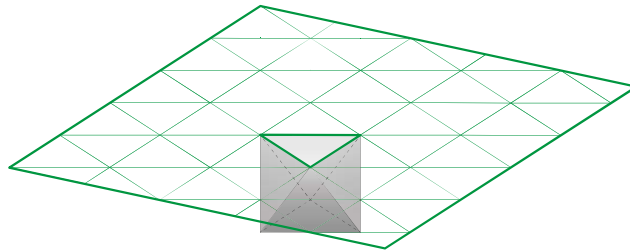
Octaedro posición 2 / Planos

Plano horizontal



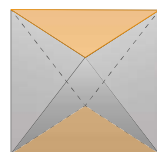
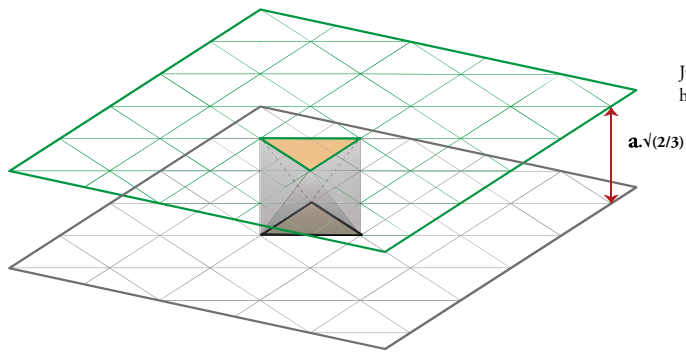
+

Plano horizontal

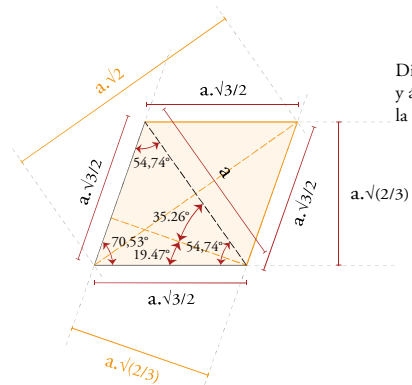


=

Juego de planos horizontales

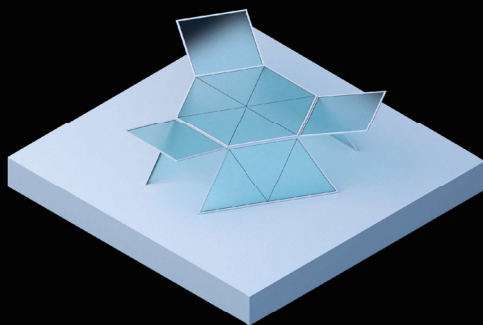


Ángulos vinculados con aristas relacionadas

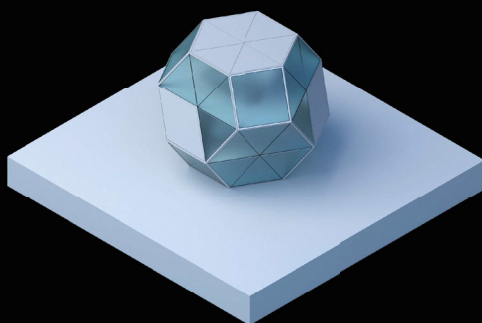


Dimensiones y ángulos de la figura

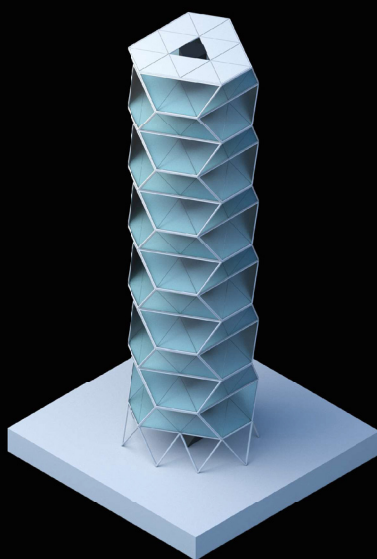
5. Consideraciones finales



Proyecto tipo 1 / **Domo**



Proyecto tipo 2 / **Vivienda**



Proyecto tipo 3 / **Torre**

5.0 / Consideraciones finales

A modo de cierre del análisis y del registro gráfico realizado, e inicio de una posible nueva etapa de trabajo, se esbozan a continuación tres posibles diseños, basados en el poliedro de Kelvin y en su red espacial, realizando operaciones de sustracción, adición, combinación y superposición de sus elementos.

Estos tres proyectos básicos (o proto edificios) incorporan desde su fase inicial las posibles ventajas de un sistema estructural definido en base a triángulos equiláteros y la adecuación posicional de la red en la que unos de los siete sistemas de planos paralelos, construyen los suelos planos de los edificios.

Proyecto tipo 1 / **Domo**

Para la realización del domo se utilizó el casquete superior del octaedro truncado considerando la posición I (octaedro truncado apoyado en cara hexagonal). De esta forma las paredes de las fachadas del domo se definen por tres cuadrados y tres medios hexágonos integrados cada uno por tres triángulos equiláteros²⁹.

Dadas las propiedades analizadas anteriormente todas las figuras (hexágono, triángulo y cuadrado) presentan la misma longitud de arista. En el caso de las paredes cuadradas el ángulo interior definido contra el plano del suelo es de 54.74° y en el caso de las paredes trapezoidales en donde se agrupan los tres triángulos equiláteros el ángulo es de 70.53° . La cubierta (plana en principio), se define a partir de un hexágono. Dado que sería necesario facilitar el escurrimiento de agua de lluvia en este sector se podría introducir una leve deformación en el hexágono, elevando su centro y facilitando a su vez el diseño de soportes estructurales para la cubierta, resistentes al esfuerzo de flexión, al aumentar la inercia de dichas piezas. Los accesos podrían establecerse en las caras cuadradas, utilizando un mecanismo de apertura del tipo rotacional lo cual dotaría al acceso además de una protección horizontal. El diseño de posibles partes translúcidas o transparentes tanto en las fachadas como en la cubierta requieren de un estudio de proyecto mucho más avanzado del estado preliminar que se esbozó de forma preliminar en este trabajo.

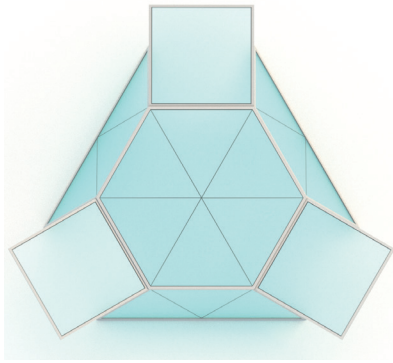
Proyecto tipo 2 / **Vivienda**

En este proyecto se utilizó la geometría completa de un octaedro truncado, ubicado sobre el plano del suelo en posición I (apoyado sobre base hexagonal) generándose así un edificio en tres niveles. Dadas las características de la red interna del poliedro, se toma como hipótesis la posibilidad de que los triángulos equiláteros presentes en las fachadas configuren la estructura exterior del edificio, brindando un soporte perimetral a los tres niveles y a la vez definiendo la estructura general de la propia fachada. Dentro del edificio es posible definir un núcleo estructural central (en el que a priori se prevé pueda contener instalaciones) definido por dos tetraedros en el primer y último nivel y un octaedro en el nivel intermedio. Se podría considerar un largo de arista preliminar para el volumen de entre tres y cuatro metros.

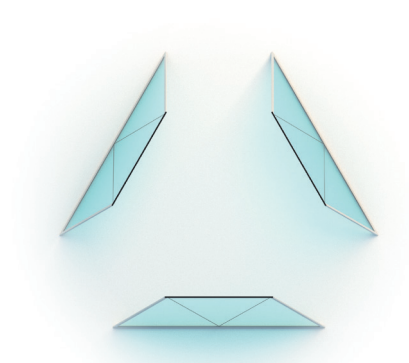
Proyecto tipo 3 / **Torre**

Para este proyecto se toma el nivel intermedio del octaedro truncado en posición I (apoyado sobre cara hexagonal). Utilizando esta sección del volumen original se construyen todos los niveles de la torre aplicando una rotación de 180° en cada nivel. De esta forma los niveles pares presentan la misma ubicación espacial y en los impares sucede lo mismo de forma invertida. Todos los planos de las fachadas de la torre se definen a partir de un triángulo equilátero (dieciocho triángulos por nivel, agrupados de a tres). Los planos de las fachadas forman ángulos de 109.47° y 70.53° con respecto al plano del suelo y al plano del cielo en cada nivel. El plano del suelo se define por trece triángulos equiláteros y como en el proyecto anterior es posible ubicar un núcleo de servicios en el centro geométrico de la planta definido por un octaedro regular en cada nivel y utilizar la geometría facetada de la fachada para diseñar una estructura perimetral en forma de malla.

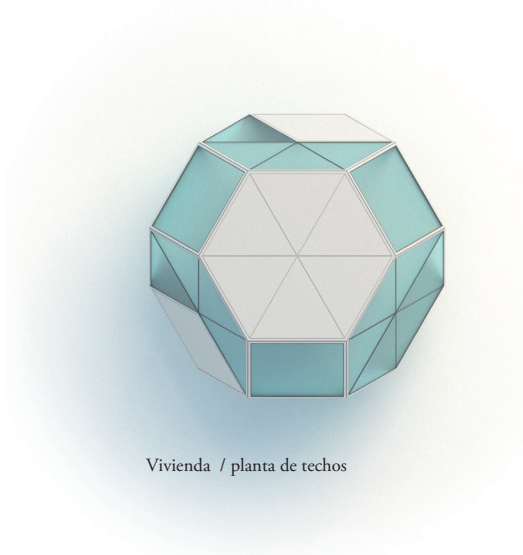
²⁹ En toda la fachada se contabilizan nueve triángulos equiláteros y tres cuadrados en una secuencia 3:1



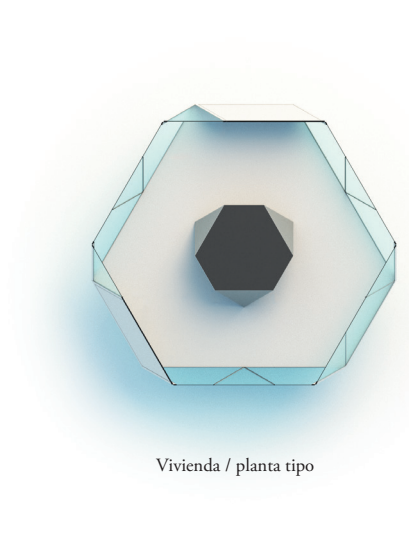
Domo / planta de techos



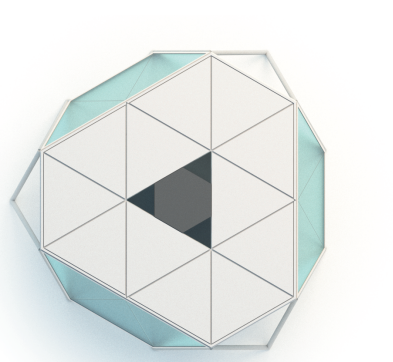
Domo / planta tipo



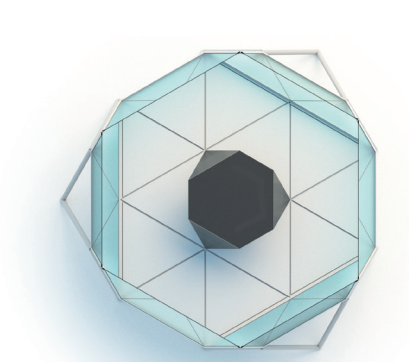
Vivienda / planta de techos



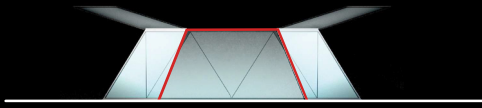
Vivienda / planta tipo



Torre / planta de techos



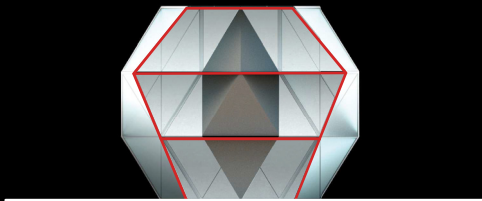
Torre / planta tipo



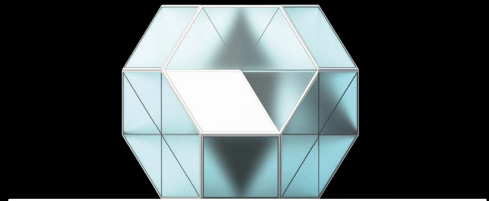
Domo / sección vertical



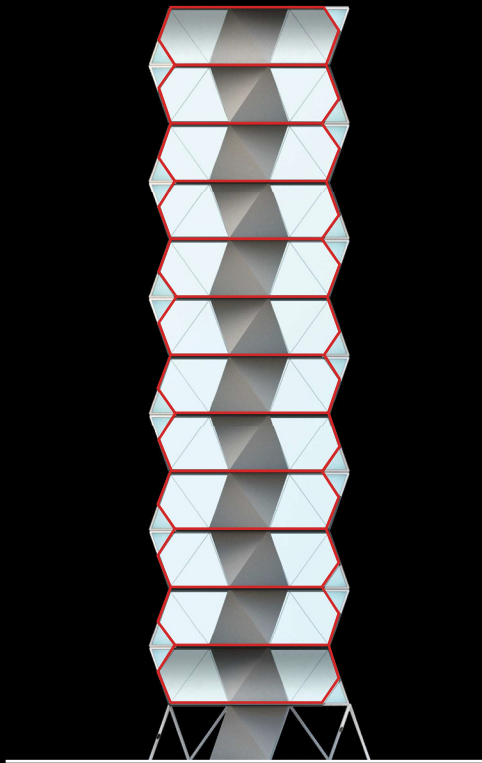
Domo / alzado genérico



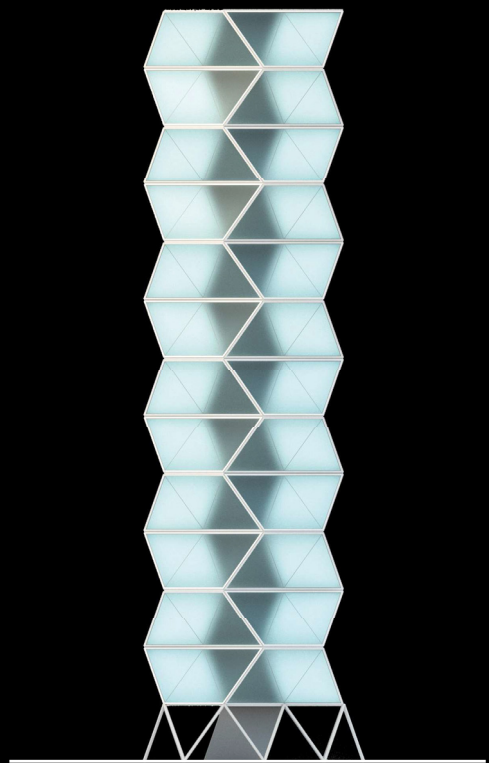
Vivienda / sección vertical



Vivienda / alzado genérico



Torre / sección vertical



Torre / alzado genérico

6. Bibliografía y fuentes consultadas

7.0 / Referencias bibliográficas / generales

BALMOND, Cecil. Informal. Munich: Prestel, 2002. 400 p. ISBN 978-3-7913-3776-0.

BUKMINSTER FULLER, Richard. El capitán etéreo y otros escritos. Murcia: Fundación Caja Murcia, 2003. 268 p.

BURRY, Jane, BURRY, Mark. The new mathematics of architecture. New York: Thames & Hudson, 2010. 271p. ISBN: 978-0-500-29025-5

CROMWELL, Peter. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 451 p. ISBN 9-521-55432-2

ENGBERG-PEDERSEN, Anna ... [et al.]. Studio Olafur Eliasson An Encyclopedia. Köln: Taschen, 2012. 531 p. ISBN-10: 3836562812 ISBN-13: 978-3836562812

FERRATER, Carlos, FERRATER, Borja. Sincronizar la Geometría. Barcelona: ACTAR, 2006. 126 p. ISBN 84-96540-35-9.

FERNÁNDEZ, Roberto. Inteligencia proyectual. Un manual de investigación en arquitectura. Teseo. Buenos Aires: 2013. 420 p. ISBN 978-987-1867-80-6.

FIEL, Wolfgang. Eckhard Schulze-Fielitz, Metasprache des Raums/Metalanguage of space. Viena: Springer Vienna Architecture, 2009. 536 p. ISBN-10: 3211991972 ISBN-13: 978-3211991978

MOUSSAVI, Farshid. The function of form. Barcelona: ACTAR, Harvard Graduate School of Design, 2009. 520 p. ISBN 978-84-96954-73-1.

PACIOLI, Luca. La divina proporción. Buenos Aires: Editorial Losada S.A, 1946. 335 p. (traducción de "Divina proportione" Venetia: Paganinus de Paganinis, 1509)

BANHAM, "Megaestructuras"

7.1 / Referencias bibliográficas / específicas

FIEL, Wolfgang. Eckhard Schulze-Fielitz, Metasprache des Raums/Metalanguage of space. Viena: Springer Vienna Architecture, 2009. 536 p. ISBN-10: 3211991972 ISBN-13: 978-3211991978

GHYKA, Matila C.. Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Barcelona: Editorial Poseidón, 1977. 298 p.

LEOZ, Rafael. Redes y ritmos espaciales. Madrid: Blume, 1969. 209 p.

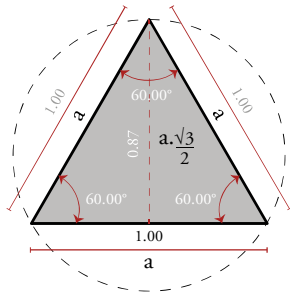
Revista El Croquis. 2009, nº 147 Toyo Ito 2005-2009. Madrid: EL croquis editorial, ISBN-10: 8488386567 ISBN-13: 978-8488386564

Nota: Se ha utilizado el criterio de registro elaborado por FADU.

7. Anexos

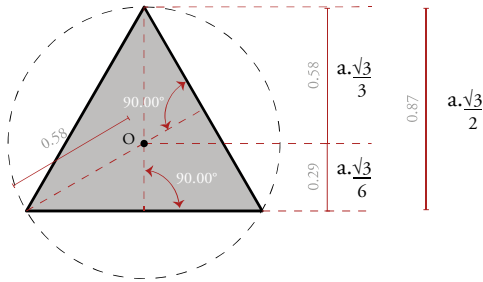
ANEXO / I A

Propiedades dimensionales de triángulos



TRIÁNGULO / EQUILÁTERO

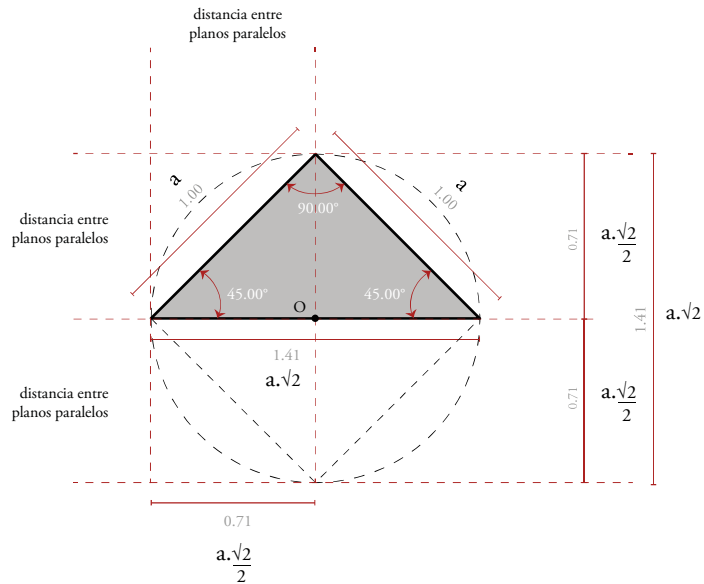
La altura del triángulo se define en función del lado $l = a$, como expresión fraccionada y como expresión decimal



El baricentro "O" coincide con el ortocentro, incentro y con el circuncentro

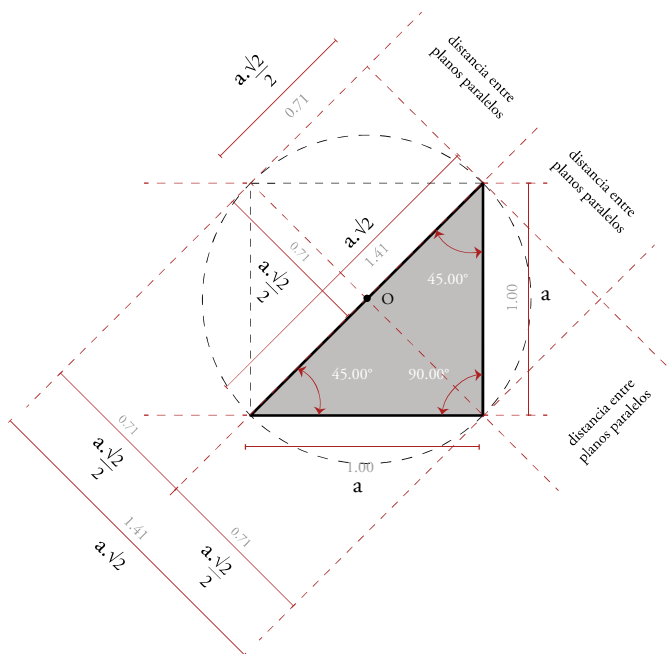
ANEXO / I C

Propiedades dimensionales de triángulos



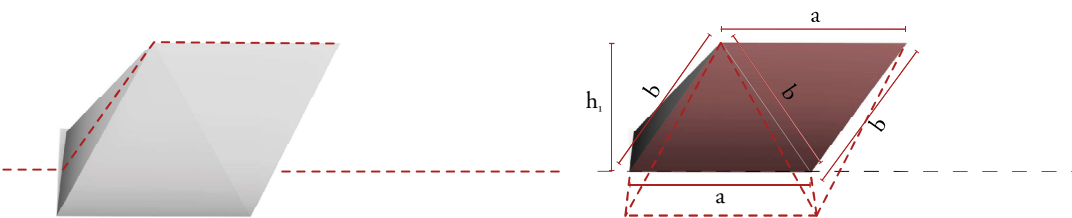
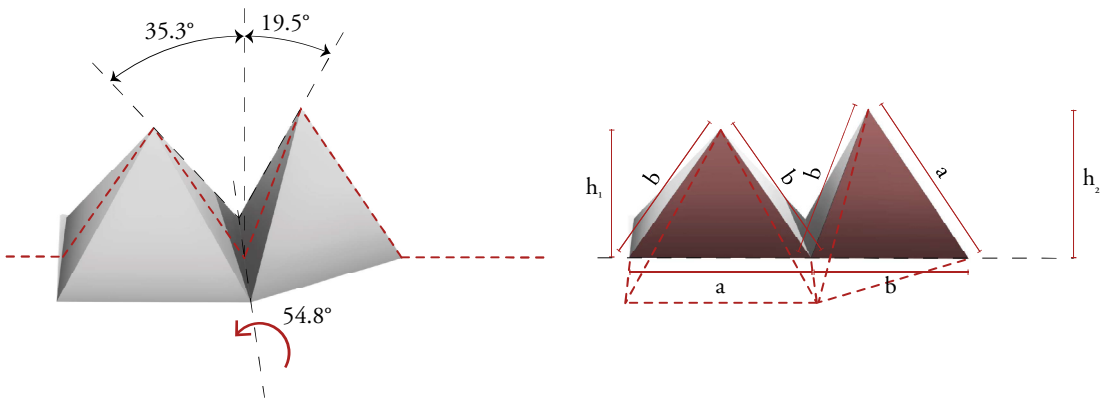
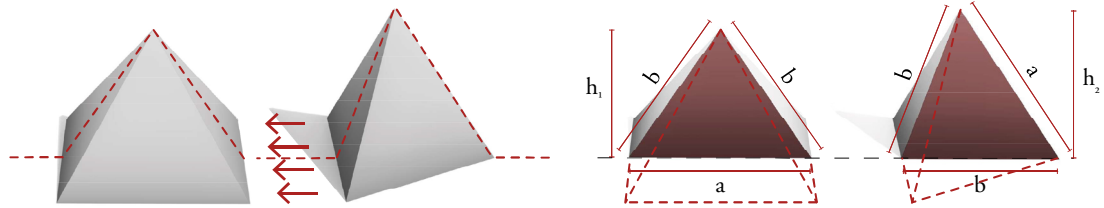
TRIÁNGULO / RECTÁNGULO

El triángulo se corresponde con la mitad de un cuadrado de lado $l = a$
 La altura del triángulo se define en función del lado $l = a$, como expresión fraccionada y como expresión decimal.



Circunferencia que proyecta la esfera que contiene los seis vértices del octaedro regular de centro "O"

ANEXO / II A
Zuecos irregulares / Sección vertical

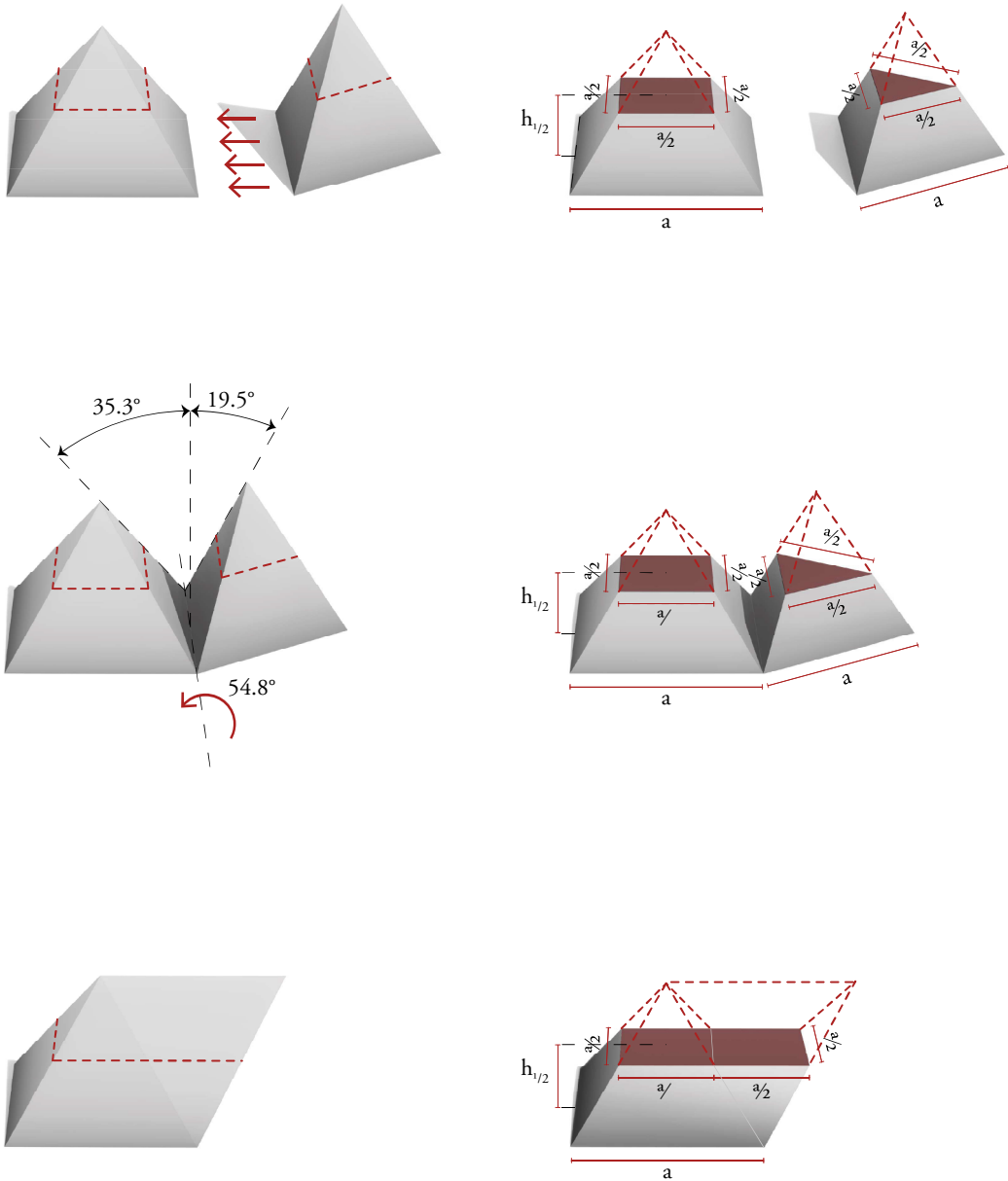


$$b = a \cdot \sqrt{3}/2$$

$$h_1 = a \cdot \sqrt{2}/2$$

$$h_2 = a \cdot \sqrt{2}/3$$

ANEXO / II A
Zuecos irregulares / Sección horizontal



**LA RED ESPACIAL KELVIN
COMO MATRIZ DE PROYECTO**

**AUTOR: ARQ. JUAN PABLO TUJA
DIRECTOR: DR. ARQ. FERNANDO DE SIERRA**

**MAESTRÍA EN ARQUITECTURA
ENCUADRE PROYECTO Y REPRESENTACIÓN**

FACULTAD DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

UDELAR
Montevideo, 2023