Parada óptima en procesos de Markov de tiempo discreto y aplicaciones

Facundo Oliú Eguren

18 de diciembre de 2017

Índice general

Resumen:

El siguiente trabajo estudia el problema de parada óptima bajo los supuestos de ganancia no negativa y tiempo discreto.
Este trabajo monográfico comienza estudiando el problema en horizonte finito con espacio de estados numerable, luego se pasa al caso no finito y finalmente se trabaja con espacio de estados continuo.
Se ven casos en que el horizonte finito puede aproximar al infinito y se muestran varios ejemplos.

Capítulo 1

Introducción

El siguiente trabajo estudia el problema de parada óptima bajo los supuestos de ganancia no negativa y tiempo discreto. Esto es, dado un espacio de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$, (véase 1.1.1) una función g no negativa e integrable y una sucesión adaptada $\{X_n\}$ hallar:

$$\sup_{\tau} E(g(X_\tau)), \text{ (siendo } \tau \text{ un tiempo de parada)},$$

y de ser posible encontrar el tiempo de parada que lo realiza.
Este trabajo monográfico consta de cuatro capítulos donde progresivamente disminuyen las hipótesis del problema (exceptuando el primero que es introductorio).
En el primer capítulo se dan los resultados indispensables de análisis que se usan en la monografía y se introduce un modelo mátematico de mercados financieros.
En el segundo capítulo se trata el caso de horizonte finito (tiempo acotado) con aplicaciones en la teoría matemática de mercados financieros y ejemplos numéricos. Para esto se estudia el método de inducción inversa y la Envolvente de Snell.
En el tercer capítulo se trabaja con Cadenas de Markov en espacio de estados discretos. Aquí se presenta una caracterización mediante la teoría de funciones excesivas y potenciales de la resolución del problema para tiempos de parada.
En el cuarto capítulo se vuelve a trabajar con Cadenas de Markov, pero en este caso con espacio de estados continuo, se ven varios ejemplos y por último se exponen resultados que permiten aproximar el caso de tiempo no acotado por tiempo acotado con ejemplos numéricos incluidos.
Para preparar esta monografía se utilizaron los libros:

- D. Lamberton, B. Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. [1]
- G. Peskir, A. N. Shiryaev. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. [3]
- E. Çinlar. Introduction to stochastic processes. [2]

- A. N. Shiryaev. Optimal Stopping Rules. [4].

  Las ilustraciones de los ejemplos fueron resultado de programas escritos en software R.

1.1. Herramientas de medida:

1.1.1. Definiciones básicas:

Definición 1.1.1 (Filtración). *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Llamamos filtración a una sucesión creciente de σ-álgebras contenidas en $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}$ denotándose $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ al espacio de probabilidad con filtración $\mathscr{F}_n$.*

Definición 1.1.2 (Sucesión adaptada). *Dada una filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ se dice que la sucesión $\{X_n\}$ es una sucesión adaptada a la filtración si X_n es $\mathscr{F}_n$-medible $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.1.3 (Esperanza condicional). *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con $E|X| < \infty$ y $\mathscr{D}$ una σ-álgebra contenida en $\mathscr{F}$. Se define $E(X \mid \mathscr{D})$ como una variable aleatoria que cumpla:*

1) $E(X \mid \mathscr{D})$ es $\mathscr{D}$ medible.

2) $\int_D E(X \mid \mathscr{D})\ dP = \int_D X\ dP \quad \forall\ D \in \mathscr{D}$.

Denotaremos $E(X \mid Y)$ a $E(X \mid \sigma(Y))$.

Definición 1.1.4 (Martingalas). *Dado un espacio de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathscr{F}, P)$, y una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ se dice que X es una martingala si:*

- $E|X_n| < \infty\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
- X_n *es* $\mathscr{F}_n$*-medible* $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
- $E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$ *P-ctp.* $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Se dice que $\{X_n\}$ es una submartingala (supermartingala) si en el tercer item en vez de valer la igualdad vale $\geq$ $(\leq)$.

1.1.2. Herramientas de medida y analisis:

Lema 1.1.1 (Lema de Fatou). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas integrables que cumplen:*

$$\liminf_n \int_\Omega f_n\ dP < \infty.$$

$\Rightarrow\ \exists \liminf_n f_n$ *para casi todo punto, es integrable como función y*

$$\int_\Omega \liminf_n f_n\ dP \leq \liminf_n \int_\Omega f_n\ dP.$$

Teorema 1.1.1 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Bajo las mismas hipótesis y si además la sucesión es creciente:*

$$\exists \ \lim_n f_n, \ \text{es integrable y} \ \int_\Omega \lim_n f_n \ dP = \lim_n \int_\Omega f_n \ dP.$$

Teorema 1.1.2 (Teorema de convergencia dominada)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que convergen puntualmente a una función medible f. Si $\exists$ g integrable tal que $|f_n| \leq g \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.Entonces:*

$$f \ \text{es integrable y} \ \int_\Omega f \ dP = \lim_n \int_\Omega f_n \ dP.$$

Teorema 1.1.3 (Teorema de Radon Nykodin)**.** *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ con una medida σ-finita P y γ una medida absolutamente continua con respecto a P, entonces existe a menos de conjunto de medida nula una única función integrable h que cumple para todo conjunto $A \in \mathscr{F}$: $\gamma(A) = \int_A h \ dP$.*

Corolario 1.1.1 (Existencia y unicidad de esperanza condicional)**.**

Demostración. Se deduce del teorema de Radon Nykodin tomando como $\gamma(A) := \int_A f \ dP$ y $E(f \mid \mathscr{F}) := h$. □

Teorema 1.1.4 (Teorema de separación de Hanh-Banach)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo, $A, B \subseteq X$ convexos, disjuntos , no vacios, con A compacto y B cerrado. Entonces $\exists \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y φ lineal tal que:*

$$\Re(\varphi(a)) < \alpha < \beta < \Re(\varphi(b)) \ \forall \ a \in A, b \in B.$$

Notar que si B es un espacio vectorial, entonces $\varphi(B) = 0$ y multiplicando por escalares negativos a φ podemos cambiar la desigualdad.

Teorema 1.1.5 (Teorema de extensión de Carathéodory)**.** *Si $\mathscr{A}$ es una álgebra σ finita en el conjunto X, μ_0 una pre-medida definida en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$. Entonces existe una única medida μ en $\mathscr{M}$ que extiende a μ_0.*

1.1.3. Lemas de convergencia para esperanza condicional:

Las notaciones son las mismas que cuando definimos esperanza condicional. Se supondra que está definida de forma única.

Teorema 1.1.6 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea $\{X_n\} \subset L^1$ tal que $X_n \to X \ \in L^1$, entonces:*

$$E(X_n \mid \mathscr{D}) \to E(X \mid \mathscr{D}) \ ctp.$$

Demostración. Como la sucesión $\{E(X_n \mid \mathscr{D})\}$ es mónotona creciente, converge a una función medible Y. Luego, por teorema de convergencia monótona; para todo $A \in \mathscr{D}$:

$$E(Y \mathbf{1}_A) = \lim_n E(\mathbf{1}_A E(X_n \mid \mathscr{D})) = E(\mathbf{1}_A X).$$

Por unicidad de la esperanza condicional se concluye que $Y = E(X \mid \mathscr{D})$. □

Lema 1.1.2 (Lema de Fatou para esperanza condicional)**.** *Sea la sucesión* $\{Y_n\}$ *tal que* $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$ *(notar que* $Y_n \to Y := \liminf X_n$*.).*
$\Rightarrow E(\lim_n Y_n \mid \mathscr{D}) \leq \liminf_n E(X_n \mid \mathscr{D})$

Demostración.

$$\text{Como } Y_n \leq X_k \ \forall\ k \geq n \ \Rightarrow\ E(Y_n \mid \mathscr{D}) \leq \inf_{k\geq n} E(X_k \mid \mathscr{D}).$$

Usando el Teorema de convergencia monótona para esperanza condicional:

$$E(Y \mid \mathscr{D}) = \lim_n E(Y_n \mid \mathscr{D}) \leq \liminf_n E(X_n \mid \mathscr{D}).$$

□

1.1.4. Tiempos de parada y Teorema del Muestreo opcional:

Siempre que se hable de tiempos de parada, se asume que se esta en un espacio con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$.

Definición 1.1.5 (Tiempo de Parada)**.** *Se dice que la función medible* $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ *es un tiempo de parada si*

$$\forall\ n \in\ \mathbb{N},\ \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Definición 1.1.6 (Tiempo de Markov)**.** *Se dice que la función medible* $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *es un tiempo de Markov si*
$\forall\ n \in\ \mathbb{N},\ \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$

Teorema 1.1.7 (Teorema del Muestreo Opcional)**.** *Sea* $\{X_n\}$ *una martingala,* τ, σ *dos tiempos de parada tal que* $0 \leq \sigma \leq \tau \leq \infty$ *y además se cumple:*

$$E|X_\sigma| < \infty,\ E|X_\tau| < \infty,$$

$$\liminf_n E(|X_n| \boldsymbol{1}_{\{\tau > n\}}) = 0,$$

entonces:

i) $E(X_\tau \mid \mathscr{A}_\sigma) = X_\sigma$.

ii) $E(X_0) = E(X_\tau) = E(X_\sigma)$.

Caso de supermartingalas y submartingalas*:*
Si $\{X_n\}$ *es supermartingala(submartingala), se sustituye el signo de igual por* $\leq (\geq)$.

Definición 1.1.7 (Sucesión uniformemente integrable)**.** *Se dice que la sucesión de funciones* $\{X_n\}$ *es uniformemente integrable si:*

$$\lim_{H\to\infty} \sup_n \int_{|X_n|>H} |X_n|\ dP = 0.$$

Notar que si una sucesión de funciones integrables está acotada por otra positiva e integrable, entonces es uniformemente integrable.

Teorema 1.1.8 (Teorema de Lévy)**.** *Sea Z definida en un espacio con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ tal que $E(|Z|) < \infty$. Si $\{X_n\} = E(Z \mid \mathscr{F}_n)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ con $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathscr{A}_n)$, entonces:*

$$E(Z \mid \mathscr{A}_\infty) = \lim_n X_n \ \ ctp.$$

Teorema 1.1.9 (Convergencia de Supermartingalas)**.** *Sea $X = (X_0, X_1, ...)$ una supermartingala uniformemente integrable. Entonces:*

- $\exists$ $X_\infty := \lim_n X_n$, *P-ctp.*
- $E|X_n - X_\infty| \to 0$ *si* $n \to 0$.

Ejemplo 1.1.1 (Barrera en paseo al azar)**.** *Sea $S_0 = k$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ con $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de Bernoulli simétrica con probabilidad p. Sea A un natural positivo y,*

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : S_n = A\}$$

, entonces:

- *Si $p > \frac{1}{2}$, entonces $P(\tau_A < \infty) = 1$.*
- *Si $p \leq \frac{1}{2}$, entonces $P(\tau_A < \infty) = (\frac{p}{1-p})^A$.*

1.2. Mercados discretos y finitos:

Esta sección se basa en "Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance"de D. Lamberton y B. Lapeyre [1].

1.2.1. Preliminares

En este modelo se trabaja con un espacio de probabilidad finito equipado con una filtración en la cual $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{P}(\Omega)$ $(N \in \mathbb{N})$ y
$\forall\ \omega \in \Omega$: $P(\{\omega\}) > 0$.
A la sucesión de vectores aleatorios $\{X_n\}$ de dimensión d para la cual $\{X_n^i\}$ es una sucesión adaptada a la filtración $\forall\ i\ \in \{0, ..., d\}$ le llamamos vector de precios a lo largo del tiempo (este depende de n).
Además se pide que $\exists\ r > 0$ tal que $X_n^0 = (1+r)^n\ \forall\ n\ \in \{0, ..., N\}$. Es por esto que a la sucesión de variables aleatorias formadas por los precios del primer activo se les llama activo sin riesgo.
Por último se le llama factor de descuento a $\beta_n = \frac{1}{X_n^0}$.

1.2.2. Estrategia y valor de portfolio

Definición 1.2.1 (Estrategia)**.** *Se dice que* $\phi = \{(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{o \leq n \leq N}$ *es una estrategia si:*

$$\forall\ i\ \in\ \{0, ..., d\} = \begin{cases} \phi_0^i & \text{es } \mathscr{F}_0\text{-medible} \\ \phi_n^i & \text{es } \mathscr{F}_{n-1} \text{ medible para } n \geq 1 \end{cases}$$

Definición 1.2.2 (Valor del portfolio)**.** *El valor del portfolio en el tiempo n es:*

$$V_n(\phi) = \phi_n . X_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i . X_n^i \text{ ; y su valor descontado es } \widetilde{V}_n = \beta_n V_n(\phi).$$

Definición 1.2.3 (Estrategía autofinanciada)**.** *Se dice que una estrategía es autofinanciada si* $\forall\ n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ *:*

$$\phi_n . X_n = \phi_{n+1} . X_n.$$

Observar que esta definición es equivalente a cualquiera de las dos siguientes ecuaciones:

$$\phi_{n+1} . (X_{n+1} - X_n) = \phi_{n+1} . X_{n+1} - \phi_n . X_n.$$

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} . (X_{n+1} - X_n).$$

Proposición 1.2.1. *Son equivalentes:*

i) La estrategía ϕ es autofinanciada.

ii) $\forall\ n \in \{1, ..., N\}$:

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta X_j,\ donde\ \Delta X_j = X_j - X_{j-1}.$$

iii) $\forall\ n \in \{1, ..., N\}$:

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta \widetilde{X}_j,\ donde\ \Delta \widetilde{X}_j = \widetilde{X}_j - \widetilde{X}_{j-1} = \beta_j X_j - \beta_{j-1} X_{j-1}.$$

Demostración. La equivalencia entre i) y ii) se desprende de la segunda equivalencia a la definición de estrategía autofinanciada y la equivalencia entre i) y iii) es consecuencia de despejar β_j.

□

Proposición 1.2.2. *Para todo proceso predecible* $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$ *y* V_0 $\mathscr{F}_0$-*medible (osea constante) existe un único proceso predecible* $\{(\phi_n^0, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$ *tal que la estrategía que este define es autofinanciada y su valor inicial es* V_0.

Demostración. Usando la proposición 1.2.1 ser autofinanciado implica:

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1 \widetilde{X}_n^1 + ... + \phi_n^d \widetilde{X}_n^d = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta \widetilde{X}_j.$$

De esta manera queda unequivocamente definido ϕ_n^0. Basta ver que es predecible lo cual se chequea si despejamos su valor con la ecuación obtenida. □

Definición 1.2.4 (Estrategía admisible)**.** *Una estrategía* ϕ *es admisible si es autofinanciada y* $V_n(\phi) \geq 0\ \forall n \in \{0, 1, ..., N\}$.
Se dice que la estrategía es de arbitrage si es admisible con valor inicial cero y valor final distinto a cero (en un conjunto de probilidad no nula).

Proposición 1.2.3. *Sea* $\{M_n\}_{0\leq n\leq N}$ *una martingala y* $\{H_n\}_{0\leq n\leq N}$ *una sucesión predecible con respecto a la filtración* $\{\mathscr{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$. *Se denota* $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. *La sucesión* $\{X_n\}_{0\leq n\leq N}$ *definida como:*

$$X_0 = H_0 M_0,$$

$$X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + ... + H_n \Delta M_n\ si\ n \geq 1,$$

es una martingala con respecto a la filtración.

Demostración. Obviamente está adaptada a la filtración. Por otro lado:

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - X_n = E(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n) =$$
$$E(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathscr{F}_n) = H_{n+1} E(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n) = 0$$

Entonces:

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$$

□

Proposición 1.2.4. *Una sucesión adaptada* $\{M_n\}_{0\leq n\leq N}$ *es martingala si y solo si para toda sucesión predecible* $\{H_n\}_{1\leq n\leq N}$ *se cumple:*

$$E(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n) = 0.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Por teorema del muestreo opcional notar que $E(M_n - M_{n-1}) = 0$.
($\Leftarrow$) Fijados j y $A \in \mathscr{F}_i$; tomando $H_i = 0$ si $i \neq j$ y $H_i = \mathbf{1}_A$ si $i = j$. Luego $E(\mathbf{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0$.
$\Rightarrow \ E(M_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) = M_j$. $\square$

Definición 1.2.5 (Mercado viable)**.** *Se dice que el mercado es viable si no existen estrategias de arbitraje.*

Lema 1.2.1. *Bajo el supuesto que el mercado es viable:*
sean Γ *el conjunto de variables aleatorias estrictamente positivas y* $\phi = \{\phi^1, ..., \phi^d\}$ *un proceso predecible.*
Se define $\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n}(\phi_j^1 \Delta \widetilde{X}_j^1 + ... + \phi_j^d \Delta \widetilde{X}_j^d)$.
Entonces:

$$\widetilde{G}_n(\phi) \notin \Gamma.$$

Demostración. Por absurdo se supone que $\widetilde{G}_n(\phi) \in \Gamma$.
Notar primero que:

$$\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d} \phi_j^i \widetilde{X}_j^i - \phi_j^i \widetilde{X}_{j-1}^i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{V}_j(\phi) - \widetilde{V}_{j-1}(\phi) = \widetilde{V}_n(\phi) - \widetilde{V}_0(\phi).$$

De esta manera si $\widetilde{G}_n \geq 0 \ \forall \ n \in \ \{0, ..., N\}$ el mercado es no viable llegando a un absurdo y concluyendo la prueba.
Si no es así, tomemos $n := \sup\{k \mid P(\widetilde{G}_k(\phi) < 0) > 0)\}$.
Sea $A := \{\widetilde{G}_n(\phi) < 0\}$. Notemos que A es $\mathscr{F}_n$-medible. Sea el proceso φ definido como:

$$\varphi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \\ \mathbf{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & sij > n \end{cases}$$

Como ϕ es predecible, φ también lo es. De esta manera:

$$\widetilde{Z}_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \\ \mathbf{1}_A(\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G_n}(\phi)) & si \quad j > n \end{cases}$$

Es asi que $\widetilde{Z}_j(\varphi) \geq 0$ para todo $j \in \{0, ..., N\}$ y $\widetilde{Z}_N(\varphi) > 0$ en A. Esto contradice la hipótesis de que el mercado es viable. $\square$

Teorema 1.2.1. *El mercado es viable si y solo si existe una medida de probabilidad P^* equivalente a P tal que los precios descontados son P^* martingalas.*

Demostración. $(\Leftarrow)$:
Por la proposicón 1.2.3:

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\widetilde{X}_j \text{ es una } P^* \text{ martingala.}$$

Entonces, por el teorema del muestreo opcional:

$$E^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = E^*(\widetilde{V}_0(\phi)).$$

Por ende si la estrategía es admisible con valor inicial cero: $E^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$. Con $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$. Luego $\widetilde{V}_N(\phi) = 0$ P^*-ctp.
$\Rightarrow \widetilde{V}_N(\phi) = 0$ P-ctp.

$(\Rightarrow)$:
Para cualquier proceso admisible $\{\phi_j^1, ..., \phi_n^d\}$ se define $\widetilde{G}_n(\phi)$ como en el lema anterior. Por la proposición 1.2.2 existe un único proceso $\{\phi_n^0\}$ tal que la estrategía $\{(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}$ es autofinanciada con valor inicial 0.
Luego, usando el lema 1.2.1 deducimos que $\widetilde{G}_N(\phi) = 0$.
Por otro lado, se puede considerar al conjunto de variables aleatorias del mercado como $\mathbb{R}^\Omega$ ya que $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ (recordar también que Ω es finito). De esta manera se puede ver que el conjunto de variables aleatorias de forma $\widetilde{G}_N(\phi)$, con ϕ un proceso predecible en $\mathbb{R}^d$ es subespacio de $\mathbb{R}^\Omega$ (y por ende cerrado). Por el lema 1.2.1 este subespacio no intersecta a Γ (definido como en dicho lema). De esta manera no intersecta al conjunto compacto y convexo $K = \{W \in \Gamma;\ \sum_\omega W(\omega) = 1\}$.
Luego por el teorema de separación de Hanh-Banach $\exists\ \lambda \in (\mathbb{R}^\Omega)^*$; $\lambda = (\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ tal que:.

- $\forall W \in K,\ \sum_\omega \lambda(\omega)W(\omega) > 0$.
- $\forall \phi$ proceso predecible en $\mathbb{R}^d$ $\sum_\omega \lambda(\omega)\widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$.

Es asi que se puede definir P^* como:

$$P^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}.$$

La cual es equivalente a P. Finalmente, por como está definido λ y la proposición 1.2.3 se deduce que los precios descontados son P^* martingalas. □

Definición 1.2.6. *Dada una variable aleatoria no negativa h que se de llamará plan de contingencia, se dice que es alcanzable si existe una estrategía admisible que valga h en el tiempo N (tiempo final).*
Se dice que el mercado es completo si cada plan de contingencia es alcanzable.

Teorema 1.2.2. *Un mercado viable es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad P^* equivalente a P donde los precios descontados son martingalas.*

Demostración. ($\Rightarrow$)
Sean P^1 y P^2 dos medidas de probabilidad equivalentes a P donde los precios descontados son martingalas. Dada $h \geq 0$ $\mathscr{F}_N$-medible.
$\Rightarrow$ $\exists\{\widetilde{V}_N(\phi)\}_{0\leq n\leq N}$ tal que $V_N(\phi) = \frac{h}{X_N^0}$. Por la proposición 1.2.4 dicha sucesión es una P^1 y P^2 martingala. Luego por el teorema del muestreo opcional:

$$E_1(\frac{h}{X_0^N}) = E_1(V_0(\phi)) = V_0(\phi) = E_2(V_0(\phi)) = E_2(\frac{h}{X_0^N}).$$

$$\Rightarrow E_1(h) = E_2(h).$$

Como h es una variable aleatoria no negativa arbitraria se concluye que $P_1 = P_2$.
($\Leftarrow$)
Suponer por absurdo que el mercado es viable pero no completo. Entonces existe una variable aleatoria no negativa h que no es alcanzable. Se considera el conjunto de variables aleatorias de la forma:

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{X}_n.$$

Donde U_0 es $\mathscr{F}_0$-medible y $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)_{0\leq n\leq N}\}$ es un proceso predecible. Por la proposición 1.2.2 este subespacio está contenido estrictamente en las variables aleatorias de $(\Omega, \mathscr{F})$. Se puede definir el producto interno $(W, Z) \rightarrow E^*(W, Z)$. Tomando W no nula perteneciente al complemento ortogonal del subespacio. De esta manera si P^* es una medida de probabilidad equivalente a P donde los precios descontados son una martingala; definiendo P^{**}:

$$P^{**}(\{\omega\}) = (1 + \frac{W(\omega)}{||W||_\infty})P^*(\{\omega\}).\frac{1}{\sum_\omega 1 + \frac{W(\omega)}{\|W\|_\infty}},$$

notar primero que la variable aleatoria constante 1 es perpendicular a W. Por ende $E^*(W) = 0$.
Además $E^{**}(\sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{X}_n) = 0$ para cualquier proceso predecible $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$. Luego por la proposición 1.2.3 se concluye que los precios descontados son P^{**} martingalas.

□

1.3. Cadenas de Markov

Exceptuando la definición de Cadenas de Markov, esta sección se basa en el libro "Introduction to stochastic processes"de E. Çinlar [2].

Definición 1.3.1 (Cadena de Markov)**.** *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espacio de probabilidad. Considerar* $\{X_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *un proceso estocástico cuya imagen es un subconjunto de los naturales* E *al cual se llamara espacio de estados.*
Se dice que $\{X_n\}$ *es una cadena de Markov si* $\forall n, j \ \in \ \mathbb{N}$*:*

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0, ..., X_n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n).$$

Definición 1.3.2 (Cadena homogénea)**.** *Sea* E *un conjunto numerable dotado de una sigma algebra* $\mathscr{B}$ *la cual es atómica ,* $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ *con la sigma álgebra generada por productos finitos de conjuntos* $\mathscr{B}$ *medibles la cual se le llama* $\mathscr{F}$ *. Por el Teorema de extensión de Caratheodory, la medida de probabilidad* P *queda definida si la definimos para los conjuntos de la forma* $A = \{\omega_0\} \times \{\omega_1\} \times ... \times \{\omega_n\} \times E^{\mathbb{N}},\ \omega_i \ \in E \ \forall \ i \ \in \ \{1, ..., n\}$*.*
Para esto se define :
La matriz de estados (con coordenadas no negativas) $\mathbb{P}$*:*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & ... \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & ... \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j \ \in \ E} P(i,j) = 1.$$

La sucesión no negativa $\{\Phi_n\}_{n \ \in \ E}$ ***que cumple:***

$$\sum_{n \in E} \phi(n) = 1.$$

De esta forma se define:

$$P(A) = \Phi(\omega_0) P(\omega_0, \omega_1). \ ... \ P(\omega_{n-1}, \omega_n).$$

Por último a la sucesión $\{X_n\}$ *dada por la proyección Cadena de Markov. De aquí en adelante en toda la tesis cada vez que se mencione una Cadena de Markov se hace referencia a una Cadena homogénea de Markov (a menos que se diga lo contrario).*

Observación 1.3.1.

- *Toda cadena homogénea de Markov es una cadena de Markov.*

- *Se toma esta definición de cadenas porque se podrá relacionar con el caso de estados no numerables y porque permite usar herramientas de medida.*

Proposición 1.3.1. $P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^m(i,j)\ \forall\ i,j \in E,\ n,m \in \mathbb{N}.$

Demostración. Se probará por inducción fijando $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(i,j)\ \forall\ i,j\ \in\ E.$$
$$H)\ P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^m(i,j)\ \forall\ i,j \in E.$$
$$T)\ P(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^{m+1}(i,j)\ \forall\ i,j \in E.$$

Dem.:

$$P(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) = \sum_R \mathbb{P}(r,j)\mathbb{P}^m(i,r) = P^{m+1}(i,j).$$

□

Observación 1.3.2. $\forall\ m,n \in \mathbb{N},\ i_n,...,i_{n+m} \in E:$

$$P(X_{m+n} = i_{m+n}, X_{m+n-1} = i_{m+n-1}, ..., X_{1+n} = i_{1+n} \mid X_n = i_n) =$$
$$= P(i_n, i_{n+1})P(i_{n+1}, i_{n+2})...P(i_{m+n-1}, i_{m+n}).$$

(Se desprende de la definición de esperanza condicional).

Proposición 1.3.2. *Dado $n,m \in \mathbb{N}$, f $\mathscr{F}$-medible y acotada, la cual solo depende de $m+1$ variables, $i \in E$. Entonces:*

$$E(f(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}) \mid X_n = i) = E(f(X_0, X_1, ..., X_m) \mid X_0 = i).$$

Demostración. $E(f(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}) \mid X_n = i) =$

$$\sum_{i_1 \in E} ... \sum_{i_m \in E} f(i, i_1, ..., i_m)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i)...P(X_m = i_m \mid X_{m-1} = i_{m-1}).$$

Por otro lado:
$E(f(X_0, X_1, ..., X_m) \mid X_0 = i) =$

$$\sum_{i_1 \in E} ... \sum_{i_m \in E} f(i, i_1, ..., i_m)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i)...P(X_m = i_m \mid X_{m-1} = i_{m-1}).$$

□

Corolario 1.3.1. *Dado $m \in \mathbb{N}$. Sea f $\mathscr{F}$-medible y acotada, tal que solo depende de m variables, $\omega = (\omega_0, \omega_1, ...)$, entonces:*

$$E(f(X_1, ..., X_{1+m}) \mid \sigma(X_0, X_1))(\omega) = E(f(X_0, ..., X_m) \mid X_0 = \omega_1)$$

Demostración. Por la proposición 1.3.2 y la unicidad de la esperanza condicional basta probar que dados a_0, a_1:

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} f(X_1, ..., X_m)\ dP(\omega) =$$

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} E(f(X_1, ..., X_m) \mid X_1 = \omega_1)\ dP(\omega).$$

Por un lado:

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} f(X_1, ..., X_m)\ dP(\omega) =$$

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times\{i_2\}...\times\{i_m\}\times E^{\mathbb{N}}} f(a_1, i_2, ..., i_m)(\omega)\ dP(\omega).$$

Usando la observación 1.3.2

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \Pi(a_0)P(a_0, a_1)P(a_1, i_2)...P(i_{m-1}, i_m)f(a_1, i_2, ..., i_m).$$

Por otro lado:

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} E(f(X_1, ..., X_m) \mid X_1 = \omega_1)\ dP(\omega) =$$

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} \sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} f(\omega_1, i_2, ..., i_m)P(X_2 = i_2, ..., X_m = i_m \mid X_1 = \omega_1)\, dP(\omega) =$$

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} f(a_1, i_2, ..., i_m)P(a_1, i_2)P(i_2, i_3)...P_(i_{m-1}, i_m)\, dP(\omega) =$$

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \Pi(a_0)P(a_0, a_1)P(a_1, i_2)P(i_2, i_3)...P(i_{m-1}, i_m)f(a_1, i_2, ..., i_m).$$

Cumpliéndose la igualdad. Notar que usamos que la función era acotada cuando intercambiamos la sumatoria con la integral.

□

Corolario 1.3.2. *Sea $\{f_n\}$ una filtración adaptada a $\{\mathscr{F}_n\}$ ($\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$), creciente, no negativa de funciones integrables. Supóngase además que $\exists\ g\ \mathscr{F}$-medible y acotada:*
$\Rightarrow\ E(g \mid \sigma(X_0, X_1))(\omega) = E(g \mid X_0 = \omega_1)\ \forall\ \omega = (\omega_0, \omega_1, ...) \in \Omega$

Demostración. Usando el teorema de convergencia monótona para esperanza condicional y el teorema de convergencia dominada:
$E(g \mid \sigma(X_0, X_1))(\omega) = E(\text{lím}_n f_n \mid \sigma(X_0, X_1))(\omega) =$
$\text{lím}_n E(f_n \mid X_0 = \omega_1) = E(g \mid X_0 = \omega_1).$

□

Definición 1.3.3 (Clasificación de estados). *Un estado j es* ***recurrente*** *si* $P_j(\text{ínf}\{n > 0 : X_n = j\} < \infty) = 1$.
Un conjunto de estados es ***cerrado*** *si no se puede alcanzar desde uno del complemento.*
Un conjunto de estados es ***irreducible*** *si no tiene subconjuntos propios cerrados.*

Definición 1.3.4 (Cadenas de Markov no discretas). *En este caso la diferencia es que se cambia la medida de probabilidad P y se agrega un conjunto de medidas indexados por E : $\{P_x\}_{x\in E}$ que cumplen:*
i) $\forall\ A \in \mathscr{F}, x \in E,$ *la función que asocia x a $P_x(A)$ es $\mathscr{B}$-medible.*
ii) $\forall x \in E, B \in \mathscr{B},\ n, m \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega :$
$E_x(\boldsymbol{1}_{X_{n+m}\in B} \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\boldsymbol{1}_{X_m\ \in\ \Omega})$.
iii) $P_x(X_0 = x) = 1$.

Capítulo 2

Problema de parada óptima con horizonte finito

En este capítulo se aborda el problema de parada óptima en el caso de tiempo finito. Para resolverlo se ve el método de inducción inversa, introducimos las opciones americanas y algunos ejemplos númericos.
Las secciones **2.1** y **2.2** se basan en el libro “Optimal Stopping and Free-Boundary Problems” de G. Peskir, A.N. Shiryaev [3].
La secciones **2.3** y **2.5** se basan en el libro “Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance”de D. Lamberton, B. Lapeyre [1].

2.1. Introducción

A menos que se diga lo contrario en todo el capítulo, el espacio muestral es finito , se trabaja en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ equipado con la filtración $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1} \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}_N = \mathscr{P}(\Omega)$. $(n \leq k \leq N$ y $\mathbf{P}(\omega) > 0\ \forall \omega \in \Omega)$.

Definición 2.1.1. *Se define el conjunto de tiempos de parada entre n y N como:*

$$\mathscr{R}_n^N = \{\tau \in \mathscr{R} : n \leq \tau \leq N\}.$$

De esta manera dada $G = \{G_k\}_{n \leq k \leq N}$ una sucesión adaptada , para resolver el problema hay que hallar:

$$s_n^N = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(G_\tau).$$

De aquí en adelante en esta sección $\{G_k\}_{N \geq k \geq n}$ está en las hipotesís recién mencionadas.

Observación 2.1.1. *Como el espacio muestral es finito, notar que* $\exists\, E(G_\tau)\ \forall \tau \in \mathscr{R}_n^N$ *ya que:*

$$E(\sup_{n \le k \le N} |G_k|) < \infty.$$

2.2. Método de inducción inversa

Definición 2.2.1 (Envolvente de Snell). *Se define la Envolvente de Snell de* $\{G_k\}_{N\geq k\geq n}$ *como la sucesión adaptada* $\{v_k\}_{N\geq k\geq n}$ *dada por:*

$$\begin{cases} G_N & si \quad k = N \\ \\ \max(G_k, E(X_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)) & si \quad n \leq k < N \end{cases}$$

Observación 2.2.1. *En las mismas hipótesis* $\{v_k\}_{N\geq k\geq n}$ *es una supermartingala:*

Demostración. Simplemente notar que: $\max(G_k, E(G_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)) \geq E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$. □

Definición 2.2.2. *Se define el tiempo de parada* τ_n^N *(entre n y N) como:*

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : v_k = G_k\}.$$

Observación 2.2.2. τ_n^N *es tiempo de parada.*

Demostración. Dado $k \in \{n, n+1, ..., N\}$

$$\{\tau_n^N = k\} = \{v_k = G_k\} \bigcap_{h<k} \{v_h > G_h\}.$$

Como son todos conjuntos $\mathscr{F}_k$-medibles $\Rightarrow$ $\{\tau_n^N = k\}$ es $\mathscr{F}_k$-medible.

□

Teorema 2.2.1 (Horizonte finito). *Este teorema permite resolver el problema de parada óptima en el caso de horizonte finito (tiempo finito). Bajo las hipótesis de este capítulo se cumple:*

1. a) $v_n \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n) \ \ \forall \ \ \tau \in \mathscr{R}_n^N$.
   b) $v_n = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)$.
2. *Fijado* $n \in \{0, ..., N\}$*:*
   a) τ_n^N *resuelve el problema de parada óptima.*
   b) *si* τ_* *es otro tiempo de parada óptima* $\Rightarrow$ $\tau_n^N \leq \tau_*$.
   c) $\{v_k\}_{n\leq k\leq N}$ *es la supermartingala más chica que domina a* $\{G_k\}_{n\leq k\leq N}$.
   d) *La sucesión* $\{v_{k\wedge\tau_n^N}\}_{n\leq k\leq N}$ *es una martingala.*

Demostración.

1. *a) Demostración.* Se probará por inducción en n:

$$\text{Si } n = N \Rightarrow \ v_n = G_n.$$

$$H) v_k \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_k) \ \forall \tau \in \mathscr{R}_k^N, \ \forall k \in \{n, n+1, ..., N\}.$$

$$T)v_k \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_k)\ \forall \tau \in \mathscr{R}_k^N,\ \forall k \in \{n-1,,...,N\}.$$

Dem. :
Dado $\tau\ \in \mathscr{R}_{n-1}^N$. Sea $\overline{\tau} := \tau \vee n$.
Observar que:
$\overline{\tau} \in \mathscr{R}_n^N$ y $\{\tau\ \geq\ k\} \in \mathscr{F}_{n-1}$.
Luego:
$E(G_\tau \mid \mathscr{F}_{n-1}) = E(I_{\{\tau=n-1\}}.G_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) + E(I_{\tau\geq n}.G_\tau \mid \mathscr{F}_{n-1}) = I_{\{\tau=n-1\}}.G_{n-1} + I_{\{\tau\geq n\}}.E(E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_{n-1)} \leq I_{\{\tau=n-1\}}.v_{n-1} + I_{\{\tau\geq k\}}.v_{n-1} = v_{n-1}$.
Quedando probada la tesis. □

b) *Demostración.* Se quiere probar que $v_n = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)$.
Se repite la prueba anterior solo que se cambia las desigualdades por igualdades. □

2. *a)* *Demostración.* $E(v_n) \geq E(E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n)) = E(G_\tau)\ \ \forall\ \ \tau \in \mathscr{R}_n^N\ \ \Rightarrow E(v_n) \geq s_n^N$.
Por otro lado:

$$E(v_n) = E(E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)) = E(G_{\tau_n^N}) \Rightarrow s_n^N = E(G_{\tau_n^N}).$$

□

b) *Demostración.* Se probará que $v_{\tau_*} = G_{\tau_*}$. De esta manera al ser τ_n^N la primera vez que se alcanza dicha igualdad, debe ser $\tau_* \geq \tau_n^N$.
Supóngase por absurdo que $v_{\tau_*} > G_{\tau_*}$ en un conjunto de probabilidad positiva (notar que la otra desigualdad no se puede dar por como se definieron ambas variables aleatorias.
$\Rightarrow E(G_{\tau_*}) < E(v_{\tau_*} \leq E(v_n) \leq E(G_\tau) = E(G_{\tau_*})$ llegando a una contradicción.
La última igualdad es porque ambos son tiempos de parada óptimos.
La segunda desigualdad es debido a que:

$$E(v_{\tau_*}) = \sum_{k=n}^{N} \int\limits_{\{\tau_*=k\}} v_k\ dP \leq \sum_{k=n}^{N} \int\limits_{\{\tau_*=k\}} v_n\ dP = E(v_n).$$

Donde la desigualdad se da porque $\{v_k\}$ es supermartingala. □

c) *Demostración.* Es supermatingala:
$E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k) \leq \text{máx}(E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k), G_k) = v_k$.
Es la más chica que domina a $\{G_k\}$:
Sea $\{A_k\}_{n\leq k\leq N}$ otra supermartingala que domina a $\{G_k\}$.

$A_N \geq G_N = v_N$.
$H)A_k \geq v_k\ \forall\ \ k \in \{h, h+1, ..., N\}$.
$T)A_k \geq v_k\ \forall\ \ k \in \{h-1, h, ..., N\}$.
Dem:

$A_{h-1} \geq \text{máx}(G_{h-1}, E(A_h \mid \mathscr{F}_{h-1})) \geq \text{máx}(G_{h-1}, E(v_h \mid \mathscr{F}_{h-1})) = v_{h-1}$.

$\square$

d) *Demostración.* Dado $k \in \{n, n+1, ..., N-1\}$.
$E(v_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) =$
$E(I_{\{\tau_n^N \leq k\}} v_{k\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) + E(I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} v_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k)$.
Como el primer termino y $I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}}$ son $\mathscr{F}_k$- medibles:
$E(v_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) =$
$I_{\{\tau_n^N \leq k\}} v_{k\wedge\tau_n^N} + I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$.
Observar que en $\{\tau_n^N \geq k+1\}$, $v_k = E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$.
$\rightarrow \ E(v_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) = I_{\{\tau_n^N \leq k\}} v_{k\wedge\tau_n^N} + I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} v_k = v_{k\wedge\tau_n^N}$. $\square$

$\square$

Observación 2.2.3. *Considerar el problema de encontrar el supremo de las ganancias medias, esto es:*

$$\sup_{\tau\in\mathscr{R}_n^N} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n).$$

Razonando como la proposición $2a$ del teorema 2.2.1 (horizonte finito) pero cambiando esperanza por esperanza condicional:

$$E(v_n \mid \mathscr{F}_n) \geq E(X_\tau \mid \mathscr{F}_n) \forall \tau \in \mathscr{R}_n^N.$$

$$\Rightarrow E(v_n) \geq \sup_{\tau\in\mathscr{R}_n^N} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n).$$

Por otro lado:

$$E(v_n \mid \mathscr{F}_n) = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n).$$

$$\Rightarrow E(v_n) = \sup_{\tau\in\mathscr{R}_n^N} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n).$$

Observación 2.2.4. *En el caso de que la ganancia sea supermartingala o submartingala el problema es trivial:*

- *Si* $\{G_k\}_{n\leq k\leq N}$ *es supermartingala estricta* $\Rightarrow \tau_n^N \equiv 1$.

  Demostración. $U_N = Z_N$.
  $U_{N-1} = \text{máx}(E(U_N \mid \mathscr{F}_{N-1}), G_{N-1}) = E(U_N \mid \mathscr{F}_{N-1}) > G_{N-1}$.
  Inductivamente se obtiene que $U_k > Z_k \ \ \forall \ \ k \in \{n, ..., N-1\}$. $\square$

- *Demostración.* Si $\{G_k\}_{n\leq k\leq N}$ es submartingala $\Rightarrow \tau_n^N \equiv N$.
  La demostración es análoga (notar que no es necesario pedir que sea estricta). $\square$

2.3. Opciones americanas

Este es un modelo el cual se trabaja con un activo fijo cuyo precio varía a lo largo del tiempo (X_k^1) . Se asocia a cada unidad de tiempo en la cual cambia el precio con los naturales $\{n, .., N\}$ (siendo n el primero y N el último). Fijado un real positivo K, un ente tiene el derecho de vender (comprar) en cualquier momento entre n y N a precio K el activo. Por ende el problema es averiguar en que momento debe ejercer la opción para maximizar su ganancia $(K - \widetilde{X}_k^1)_+$ $((\widetilde{X}_k^1 - K)_+)$.

2.3.1. Hipótesis adicionales

- El mercado es viable y completo.
- Las notaciones son las mismas que en la introducción.
- El modelo es discreto financiero con solamente dos activos (el sin riesgo y el cual varía en el tiempo).
- $X_k^0 = (1 + r)^{-k} \quad \forall k \in \{n, ..., N\}$.

Definición 2.3.1.

- *Un call en el activo es la sucesión* $\{g(X_k^1)\}_{n \leq k \leq N}$ *con* $g(x) := (x - K)_+$ $\forall \ k \in \{n, ..., N\}$.

- *Un put en el activo es la sucesión* $\{g(X_k^1)\}_{n \leq k \leq N}$ *con* $g(x) := (K - x)_+$ $\forall \ k \in \{n, ..., N\}$.

Tomando el activo sin riesgo que se interpeta como la devaluación de la moneda se define para ambos casos:

$$\widetilde{g(X_k^1)} = X_k^0 g(X_k).$$

Definición 2.3.2.

- *Un tiempo de parada* τ_* *es óptimo para la sucesión* $\{\widetilde{g(X_k^1)}\}_{n \leq k \leq N}$ *si:*

$$E(\widetilde{g(X_{\tau_*}^1)} \mid \mathscr{F}_n) = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(\widetilde{g(X_{\tau_*}^1)} \mid \mathscr{F}_n).$$

- *Un tiempo de parada* τ_* *es óptimo para la sucesión* $\{g(X_k)\}_{n \leq k \leq N}$ *si:*

$$E(g(X_{\tau_*}) \mid \mathscr{F}_n) = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(g(X_\tau) \mid \mathscr{F}_n).$$

Notar que con el método de inducción inversa podemos hallar dicho óptimo.

2.4. Precio de la opción americana

2.4.1. Introducción

- Al ser un mercado viable y completo, por el teorema 1.2.1 $\exists !$ P^* donde los precios descontados son una martingala .
- Sea h una funcion $\mathscr{F}_N$ medible no negativa y ϕ una estrategia admisible que replique el plan de contingencia definido por $V_N(\phi) = h$.
- Notar que $\{\widetilde{V}_k\}$ es una P^* martingala y por ende:

$$V_k(\phi) = X_k^0 E^*(\tfrac{h}{X_N^0} \mid \mathscr{F}_k), \forall k \in \{n, ..., N\}.$$

- En cualquier tiempo la estrategía admisible que replica a h esta completamente determinada por este. Por ende $V_k(\phi)$ es el dinero necesario para replicar la opción h en el tiempo k. De esta manera es natural tomarlo como el valor de la opción en el día k.
- Notar que en la práctica no tiene por qué haber conocimiento de la ley de P^*.
- Se supone que el tiempo inicial es 0

2.4.2. Opción americana

En este caso $h = (K - X_k^1)_+$. El poseedor de la opción puede ejercerla en cualquier momento, es por esto que el precio de la opción no debe solamente poder replicar $(K - X_N^1)_+$ el último día, sino que también debe ser mayor o igual a $g(X_k)$ en el día k. Por esto es natural ponerle precio:

$$\begin{gathered} v_N = g(X_N); \\ v_{N-1} = \text{máx}(g(X_{N-1}), X_{N-1}^0 E^*(\widetilde{g(X_N)} \mid \mathscr{F}_{N-1})), \\ v_k = \text{máx}(g(X_k), X_k^0 E^*(\tfrac{v_{k+1}}{X_{k+1}^0} \mid \mathscr{F}_k)) \ \ \forall k \in \{n, ..., N\}. \end{gathered}$$

Observación 2.4.1. *Notar que la sucesión determinada por $\widetilde{v}_k := \frac{v_k}{X_k^0}$ es la P^*-envolvente de Snell de la sucesión dada por $\widetilde{g(X_k)}$.*

Las siguientes proposiciones tienen el objetivo de demostrar que con de la opción, el vendedor puede tener ganancia no negativa sin importar el tiempo en que se ejerza la opción.

Proposición 2.4.1. *Con la notación usada hasta ahora un tiempo de parada* τ *es óptimo si y solo si:*

$$\begin{cases} g(X_\tau) = v_\tau \\ \\ v^\tau := (v_{\tau \bigwedge n}) \text{ es martingala.} \end{cases}$$

Demostración. Solo se probará el recíproco:
$v_0 = E(v_\tau \mid \mathscr{F}_0) = E(v_{\tau_0^N}) = E(g(X_{\tau_0^N}))$ el cual es un tiempo de parada óptimo (2.2.1).
Notar que sustituyendo 0 por n, τ cumple en todo punto:

$$E(g(X_{\tau^*}) \mid \mathscr{F}_n) \leq E(g(X_\tau) \mid \mathscr{F}_n) \; \forall \tau^* \in \mathscr{R}_n^N.$$

□

Proposición 2.4.2 (Descomposición de supermartingalas)**.** *Toda supermartingala* $\{v_k\}_{n \leq k \leq N}$ *se descompone de forma única como:*

$$v_k = M_k - A_k.$$

Donde $\{M_k\}$ *es martingala y* $\{A_k\}$ *es un proceso no decreciente, predecible y nulo en 0.*

Demostración. Si $n = 0$, tomando $M_0 = v_0$ y $A_0 = 0$.
Luego M_{k+1} y A_{k+1} deben cumplir:

$$v_{k+1} - v_k = M_{k+1} - M_k - (A_{k+1} - A_k).$$

Tomando esperanzas condicionales en $\mathscr{F}_k$:

$$-(A_{k+1} - A_k) = E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k) - v_k.$$

De esta manera, usando las dos ecuaciones anteriores:

$$M_{k+1} - M_k = v_{n+1} - E(v_{k+1} \mid \mathscr{F}_k).$$

Se concluye que $\{M_k\}$ y $\{A_k\}$ quedan determinados y son una martingala y un proceso predecible respectivamente.

□

Proposición 2.4.3. *Con la notación de la proposición anterior, el tiempo de parada máximo* τ_{max} *para* $\{g(X_k)\}$ *está dado por:*

$$\begin{cases} N & si \quad A_N = 0 \\ \\ \text{ínf}(k, A_{k+1} \neq 0)) & si \quad A_N \neq 0 \end{cases}$$

Demostración. $\tau_{\text{máx}}$ es tiempo de parada ya que $\{A_k\}$ es predecible.
Para probar que es óptimo basta ver que se está en las hipótesis de la proposición 2.4.1 Por como se definió $\tau_{\text{máx}}$ si tomo $n \leq N$: $v_{\tau_{\text{máx}} \wedge n} = M_{\tau_{\text{máx}} \wedge n} \Rightarrow v_{\tau_{\text{máx}} \wedge n}$ es martingala. Para ver optimalidad queda probar que $v_{\tau_{\text{máx}}} = g(X_{\tau_{\text{máx}}})$:
$v_{\tau_{\text{máx}}} = \sum_{j=0}^{N-1} I_{\tau_{\text{máx}}=j} v_j + I_{\tau_{\text{máx}}} v_N =$
$v_{\tau_{\text{máx}}} = \sum_{j=0}^{N-1} I_{\tau_{\text{máx}}=j} \text{máx}(g(X_j), E(v_{j+1} \mid \mathscr{F}_j)) + I_{\tau_{\text{máx}}} v_N$.

En el conjunto $I_{\tau_{\text{máx}}=j}$,$A_j = 0$ y $A_{j+1} > 0$. Luego $v_j = M_j$ y $E(v_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) = M_j - A_{j+1} \Rightarrow v_j > E(v_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) \Rightarrow v_j = g(X_j)$. Sustituyendo en la sumatoria se obtiene:

$$v_{\text{máx}} = g(X_{\text{máx}}).$$

Si $\tau \geq \tau_{\text{máx}}$, este no puede ser óptimo ya que:

$$E(v_\tau) = E(M_\tau) - E(A_\tau) = E(v_0) - E(A_\tau) < E(v_0).$$

□

2.4.3. Conclusión

Tomando el precio de la opción definido al principio de la sección en 2.4.2. Con la notación la proposición 2.4.2, se puede definir las sucesiones $\{\widetilde{M}_k\}$, $\{\widetilde{A}_k\}$ de manera que:

$$\widetilde{v}_k = \widetilde{M}_k - \widetilde{A}_k.$$

Como el mercado es completo, hay una estrategía autofinanciada ϕ tal que:

$$V_N(\phi) = X_N^0 \widetilde{M}_N.$$

Se define $\widetilde{v}_k := \widetilde{M}_k$ y $A_k := X_k^0 \widetilde{A}_k$. Luego:

$$v_n = V_n(\phi) - A_n.$$

Como el mercado es completo, una vez que el vendedor reciba $v_0 = V_0(\phi)$ podrá generar una ganancia en el día n mayor o igual a v_n y por ende a $g(X_n)$.
El que ejerza la opción deberá hacerlo cuando $v_k = g(X_k)$. Entonces los tiempos de parada óptimos τ deberán cumplir: $g(X_\tau) = v_\tau$.
Por otro lado el poseedor de la opción no le conviene ejercerla luego de:

$$\tau_{\text{máx}} = \text{ínf}\{j, A_{j+1} \neq 0\} = \text{ínf}\{j, \widetilde{A}_{j+1} \neq 0\}.$$

Ya que obtendrá $U_{\tau_{\text{máx}}}$ en ese período y en los siguientes puede generar un portafolio con valor estrictamente mayor siguiendo la estrategia ϕ.
$\Rightarrow$ Los tiempos óptimos cumplen $\tau \leq \tau_{\text{máx}}$.

, de esta manera manera $\forall n \in \{0, ..., N\}$ la sucesión $\widetilde{v_{\tau \wedge n}}$ es P^* martingala. Por el teorema 2.4.1 $g(\widetilde{X_{\tau_{\text{máx}}}})$ es martingala. Así, los tiempos de parada óptima para ejercer la opción (tomando en cuenta que también puede venderla) son tiempos de parada P^*óptimos para la sucesión $\{\widetilde{g(X_k)}\}$.

De esta manera se concluye que si el vendedor de la opción sigue la estrategía ϕ y el comprador ejerce en un tiempo no óptimo $\Rightarrow v_\tau > g(X_\tau)$ o $A_\tau > 0$. En ambos casos el vendedor obtiene ganancia $V_\tau(\phi) - g(X_\tau) = v_\tau + A_\tau - g(X_\tau) > 0$.

2.5. Ejemplos númericos para ejercer la opción americana

En toda esta sección:

- $n = 0$ y $\exists$ $\{Y_k\}$ sucesión independiente idénticamente distribuida, las cuales toman solo dos valores y $\mathscr{F}_k = \sigma\{Y_1, ..., Y_k\}$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$.
- Se dice que se esta en el caso multiplicativo si: $X_k^1 = K.Y_1.Y_2.....Y_k$.
- Se dice que se esta en el caso aditivo si: $X_k^1 = K + Y_1 + Y_2 + ...Y_k$.
- En el caso aditivo (multiplicativo) los valores posibles son opuestos (inversos).
- Se representa con un punto rojo cuando hay que ejercer la opción y azul cuando no.
- D representa del descuento, K el capitital inicial y N el máximo índice de la filtración (por ende en el eje horizontal estarán puestos los períodos desde 0 hasta N .

2.5.1. Caso aditivo sin descuento, call :

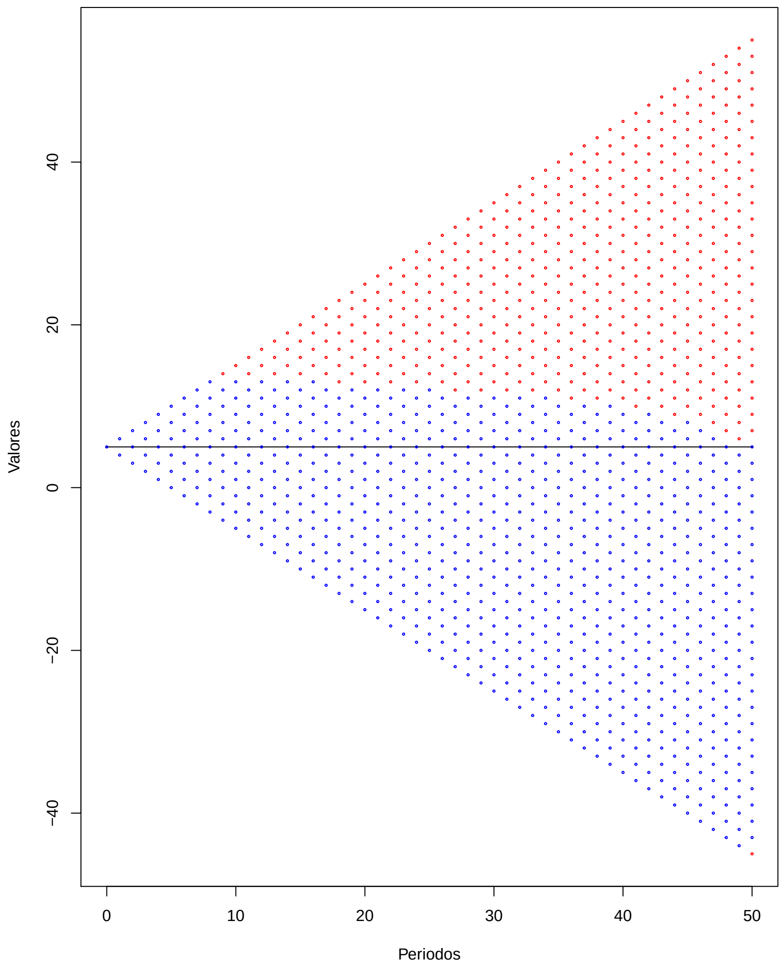

Figura 2.1: Caso $K = 5, N = 50, P(Y_k = 1) = 0{,}49$

2.5.2. Caso aditivo sin descuento, put :

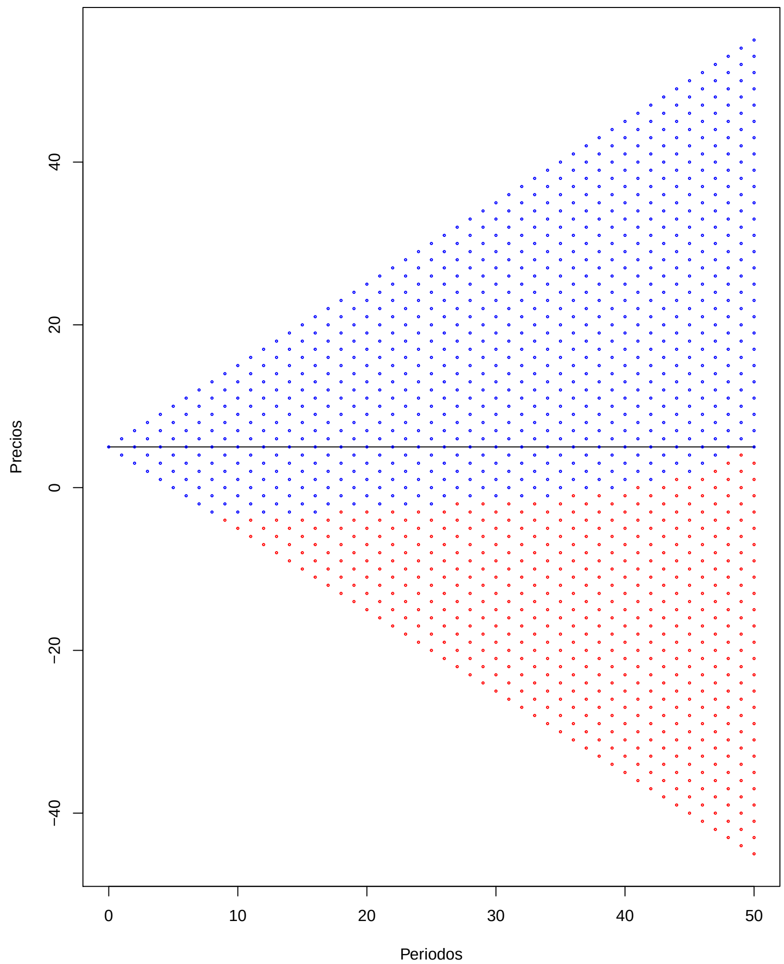

Figura 2.2: Caso $K = 5, N = 50, P(Y_k = 1) = 0{,}51$

2.5.3. Caso multiplicativo sin descuento,put:

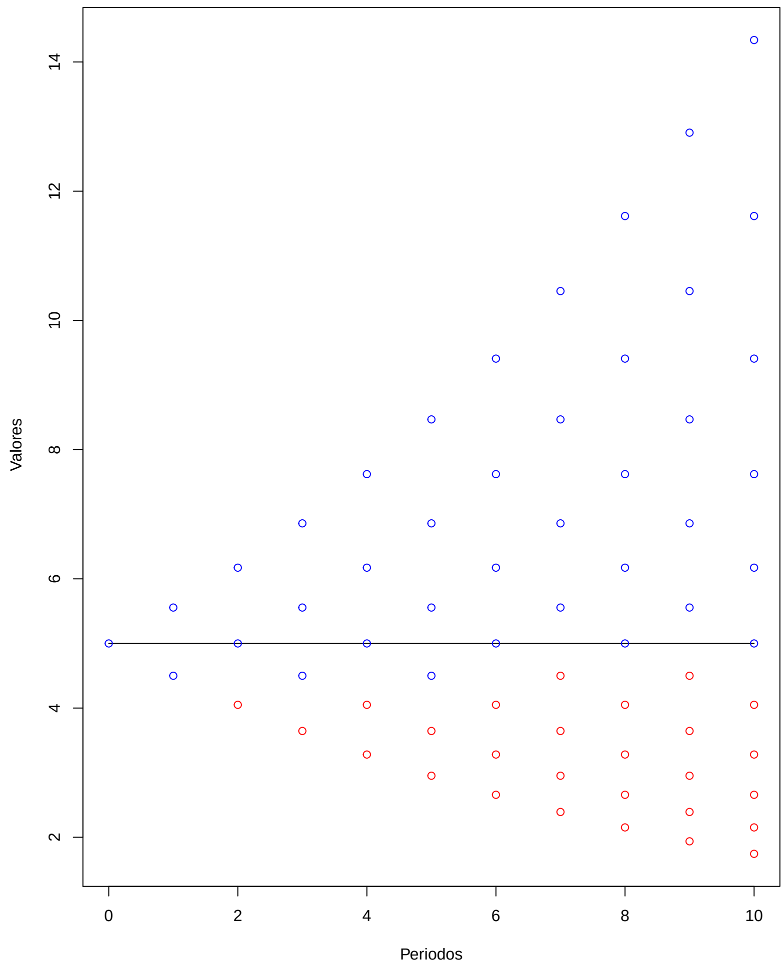

Figura 2.3: Caso $K = 5, N = 10, P(Y_k = \frac{10}{9}) = 0{,}4$

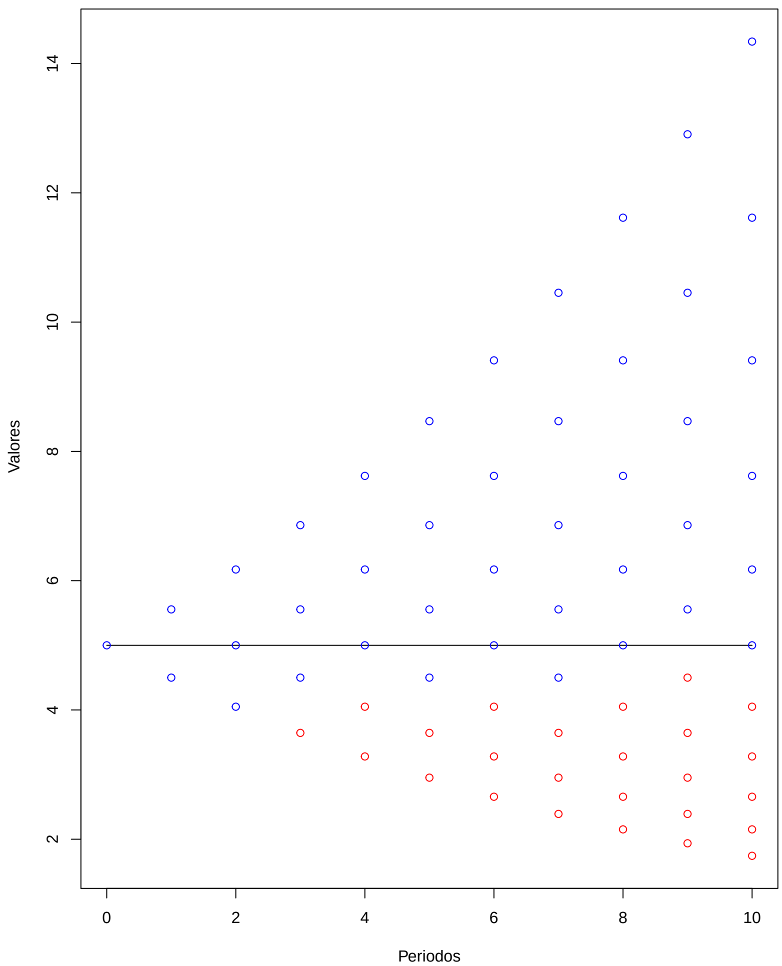

Figura 2.4: Caso $K = 5, N = 10, P(Y_k = \frac{10}{9}) = 0{,}45$

2.5.4. Caso multiplicativo con descuento,put:

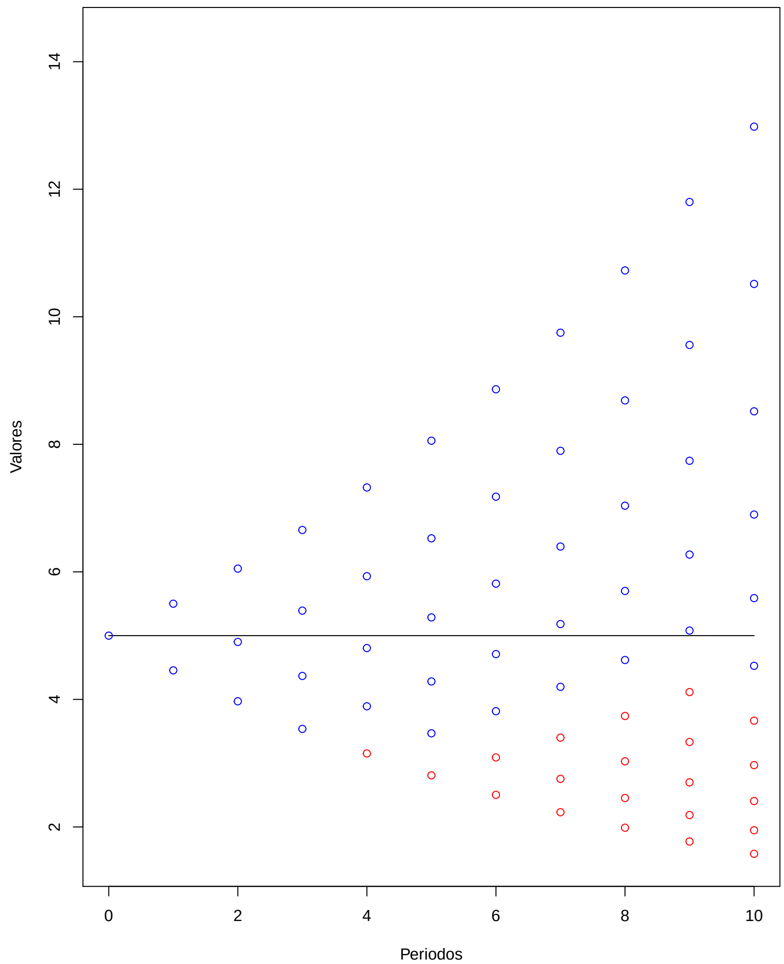

Figura 2.5: Caso $K = 5, N = 10, P(Y_k = \frac{10}{9}) = 0{,}45, D = 0{,}01$

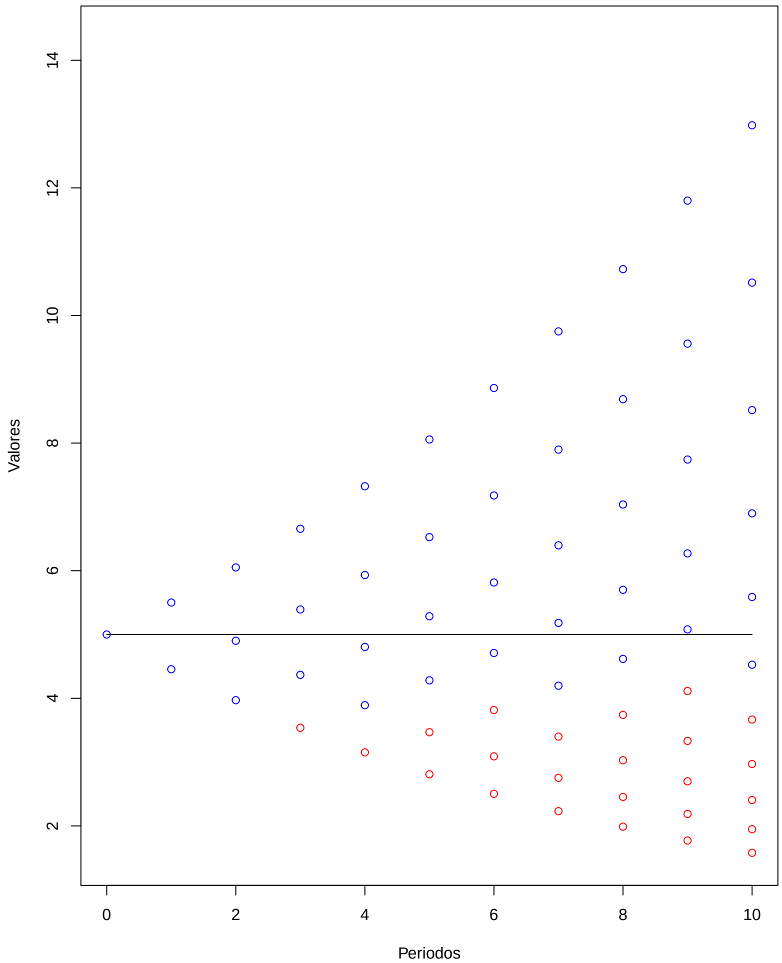

Figura 2.6: Caso $K = 5, N = 10, P(Y_k = \frac{10}{9}) = 0{,}4, D = 0{,}01$

Capítulo 3

Cadenas con espacio de estados numerable

Ahora los tiempos de parada están definidos para todos los naturales (se toma 0 como natural) y en vez de trabajar con martingalas trabajamos con cadenas de Markov. La bibliografía usada en este capítulo es "Introduction to stochastic processes"de E. Çinlar [2]. Aquí algunas pruebas están más extendidas pero esencialmente se pueden encontrar todos las pruebas y resultados en este libro.

3.1. Introducción

En este capítulo, se trabaja con cadenas de Markov homogéneas en espacio de estados numerables. Al igual que el capítulo anterior $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$. Se modela el espacio con la misma notación que en la introducción:

Para la resolución del problema de parada óptima bajo estas hipótesis es necesario estudiar primero la teoría potenciales y funciones excesivas.

3.2. Potenciales:

Definición 3.2.1. *Dada $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$ se define la esperanza del valor retornado descontado en i como:*

$$R^\alpha g(i) = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n)),\ i \in E.$$

Definición 3.2.2 (Potencial)**.**

- *Bajo las mismas hipótesis y si $g \geq 0$, la función $R^\alpha g$ se le llama $\alpha-$ potencial de g (cuando $\alpha = 1$ se denota Rg y se dice que es potencial de g).*

- *Se dice que f es α-potencial (potencial) si $\exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f = R^\alpha g$ ($f = Rg$).*

Ejemplo 3.2.1. *Sea g definida como:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad si \qquad x = j \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n)) \text{ es el número de visitas a } j.$$

La siguiente proposión muestra la relación entre la matriz de estados y la esperanza del valor retornado.

Proposición 3.2.1. *Sean $\alpha \in [0, 1]$ y $g \geq 0$:*
$R^\alpha g(i) = \sum_{j \in E} R^\alpha(i, j)g(j)$, $\forall i \in E$. Con $R^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n$.

Demostración. $E_i(g(X_n)) = \sum_{j \in E} g(j)\mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{j \in E} g(j)\mathbb{P}^n(i, j)$.
Luego:
$R^\alpha g(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \alpha^n \mathbb{P}^n g(j) = \sum_{j \in E}(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n(i, j))g(j) =$
$\sum_{j \in E} R^\alpha(i, j)g(j)$.

$\square$

Proposición 3.2.2. *Dada $\alpha \in [0, 1)$ y $g \geq 0$ acotada, definida en E.*
$f = R^\alpha g$ es la única solución al sistema (mirando g como vector):

$$(I - \alpha\mathbb{P}) = g$$

Demostración.

- Es solución:

  Notar primero que $R^\alpha g \leq (\max g)\frac{1}{1-\alpha}$.

  $$\text{Como } R^\alpha g = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n g \;\Rightarrow f - \alpha\mathbb{P}f = g.$$

- Unicidad:
  Tomando $h = f - R^\alpha$. Notar en primer lugar que está acotada. Por otro lado:

  $$f = g + \alpha\mathbb{P}f \text{ **y** } R^\alpha g = g + \alpha\mathbb{P}R^\alpha g$$

  $$\Rightarrow \alpha\mathbb{P}h = \alpha\mathbb{P}f - \alpha\mathbb{P}R^\alpha g = f - g + g - R^\alpha g = h.$$

  Inductivamente $0 \leq h \leq \alpha^n \mathbb{P}^n \max(h)$.
  Como $\alpha < 1$ tomando $n \to \infty$ se obtiene que $h = 0$ probando la unicidad.

$\square$

Corolario 3.2.1. *Tomando* $f = R^\alpha Id$*, se puede usar la proposición para computar* R^α *con este corolario:* $\forall \alpha \in [0,1) : \ (I - \alpha\mathbb{P})R^\alpha = I$ *.*

Observación 3.2.1. *Bajo la misma notación y con* $\alpha < 1$*:*

$$E_i(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n)) + \alpha^m \mathbb{P}^m R^\alpha g(i) = R^\alpha g(i).$$

Se deduce de que $R^\alpha g = g + \alpha\mathbb{P}g + ... + \alpha^{m-1}\mathbb{P}^{m-1}g + \alpha^m \mathbb{P}^m(g + \alpha\mathbb{P}g + ...)$.

Teorema 3.2.1. *Se puede generalizar el resultado para tiempos de parada en vez de un natural fijo:*
$\forall$ *tiempo de parada* T*,* $g \geq 0$ *(*$\alpha < 1$ *y definiendo* $\sum_{n=0}^{-1} g(X_n) := 0$*):*

$$E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)) + \alpha^T E_i(\mathbb{P}^T R^\alpha g(X_T)) = R^\alpha g(i).$$

Demostración. Se deduce de la observación anterior tomando indicatrices $\mathbf{1}_{\{T=n\}}$. □

Teorema 3.2.2. *Dado* $A \subseteq E, g \geq 0$ *acotada,* $\alpha \in [0,1]$ *y sean:*

$$T = \text{ínf}\{(n \in \mathbb{N} : X_n \in A)\} \text{ (el cual es un tiempo de parada)}$$

$$h(i) = E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)),\ i \in E,$$

entonces:

$$h(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \in A \\ g(i) + \alpha\mathbb{P}h(i) & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. El caso $\alpha = 0$ es trivial (con $0^0 = 1$) por ende $\alpha \in (0,1]$ y se define $\sum_{n=0}^{-1} g(X_n) = 0$. Usando dichas hipótesis es facíl ver que si $i \in A \Rightarrow h(i) = 0$.

$$\text{Sea } W = \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \text{ (notar que es } \mathscr{F}\text{-medible).}$$

Se define $T^{'} := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : X_{n+1} \in A\}$. Sea $\omega \notin \{T = 0\}$. Observar que $T(\omega) = 1 + T^{'}(\omega)$
$\Rightarrow \ W(\omega) = g(X_0(\omega)) + \sum_{n=1}^{T^{'}(\omega)} \alpha^n g(X_n)(\omega) =$

$$g(X_0(\omega)) + \alpha \sum_{n=0}^{T^{'}(\omega)-1} \alpha^n g(X_{n+1}).$$

Definiendo $W^{'}(\omega) := \sum_{n=0}^{T^{'}(\omega)-1} \alpha^n g(X_{n+1})$ y $W^{'}_m(\omega) := \sum_{n=0}^{(T^{'}(\omega)\wedge m)-1} \alpha^n g(X_{n+1})$.

Notar que $W_m \to W$; luego a partir del corolario 1.3.2 se deduce que:

$$E_i[W^{'} \mid X_0, X_1] = h(X_1).$$

Finalmente, si $i \in A^c$:

$$h(i) = E_i[W] = E_i[g(X_0) + \alpha W^{'}] = g(i) + \alpha E_i[h(X_1)] = g(i) + \alpha \sum_{j\in E} \mathbb{P}(i,j)h(j).$$

□

3.3. Funciones excesivas:

Definición 3.3.1 (excesiva)**.** *Se dice que la función f es α-excesiva si $f \geq 0$ y $f \geq \alpha \mathbb{P} f$.*

Observación 3.3.1. *Se enumeran aquí una serie de propiedades de las funciones excesivas:*

- *Inductivamente se puede ver que $\forall i \in E$:*

$$f(i) \geq \alpha^n \mathbb{P}^n f(i) = E_i(\alpha^n f(X_n))$$

- *Multiplicar por un escalar positivo y sumar funciones excesivas dan como resultado funciones excesivas.*

- *Si $\beta < \alpha \Rightarrow f \geq \alpha \mathbb{P} f \geq \beta \mathbb{P} f$ y por ende f es β-excesiva.*

- *Si f y g son α-excesivas, entonces $\min(f, g)$ también (notar que $\min(\alpha \mathbb{P} f, \alpha \mathbb{P} g) = \alpha \mathbb{P} \min(f, g)$).*

Proposición 3.3.1. *Si f es el α-potencial de una función no negativa y es finita $\Rightarrow f$ es α-excesiva.*

Demostración. $f = R^\alpha g$
$\Rightarrow f = g + \alpha \mathbb{P} g + ... \geq \alpha \mathbb{P} g + ... = \alpha \mathbb{P}(g + \alpha \mathbb{P} g) = \alpha \mathbb{P} f$. □

Teorema 3.3.1. *Dada una función excesiva f, $\exists\ g \geq 0, h \geq 0$ tal que:*

$$f = Rg + h,\ \ h = \mathbb{P} h.$$

Demostración. Recordar primero que se está tomando a f como un vector de E dimensiones.
Sea $g := f - \mathbb{P} f$. Iterando y usando que f es excesiva se obtiene que:
$f = (g + \mathbb{P} g + ... + \mathbb{P}^n g) + \mathbb{P}^{n+1} f$.

En el limite $n \to \infty$ el primer término converge por definicón a Rg y el segundo:

$$f \geq \mathbb{P} f \geq \mathbb{P}^2 f \geq .... \Rightarrow \exists h := \lim_n \mathbb{P}^n f.$$

Observar que la convergencia es puntual en cada coordenada y por ende se obtienen dos funciones medibles en el espacio de probabilidad.

□

Proposición 3.3.2. *Toda función excesiva f es α-potencial para todo $\alpha < 1$.*

Demostración. Sea $g := f - \alpha \mathbb{P} f$, luego sustituyendo en el término de la derecha a f e iterando se deduce que:
$f = (g + \alpha \mathbb{P} g + ... + \alpha^n \mathbb{P}^n g) + \alpha^{n+1} \mathbb{P}^{n+1} f$.
Luego, tomando límite se concluye que: $f = R^\alpha g$. □

Teorema 3.3.2. *Si f es α-excesiva entonces:*

$$f(i) \geq E_i(\alpha^T f(X_T)) \ \forall i \in E \text{ y todo tiempo de parada } T.$$

Demostración. Caso $\alpha < 1$:

Por proposición anterior podemos tomar $f = R^\alpha g$ con $g \geq 0$

$$\text{Luego } f(i) = E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) + \alpha^T f(X_T)) \geq E_i(\alpha^T f(X_T))$$

En el caso $\alpha = 1$ tomando $\beta < 1$ repetiendo la prueba y se toma el límite $\beta \to 1$ (con la observación 3.3.1 vemos que f es β-excesiva) □

Teorema 3.3.3. *Bajo las hipótesis anteriores , he aquí un teorema es aún más general (el anterior se deduce tomando $T = 0$): si f es α-excesiva entonces $\forall i$:*

$$E_i(\alpha^T f(X_T)) \geq E_i(\alpha^S f(X_S))$$

Con $T \leq S$ tiempos de parada.
Notemos primero que el resultado es intuitivo ya que una función excesiva en promedio 'vale' menos en el futuro.

Demostración. Solo se probará el caso $\alpha < 1$ ya que si $\alpha = 1$ usando la observación 3.3.1 parte 3 y tomando límite este caso se desprende del primero.

$$E_i[\alpha^T f(X_T)] = f(i) - E_i[\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)] \geq f(i) - E_i[\sum_{n=0}^{S-1} \alpha^n g(X_n)] = E_i[\alpha^S f(X_S)].$$

□

Proposición 3.3.3. *Esta proposición muestra que el problema de parada óptima en el caso de conjuntos irreducibles y recurrentes es conveniente 'esperar hasta llegar al lugar con más ganancia'.*
Sea $X \subseteq E$ irreducible recurrente. Entonces cualquier función excesiva f es constante.

Demostración. Por el Teorema 3.3.2; $f(i) \geq E_i[f(X_T)]$ para cualquier tiempo de parada T. Sea S la primera vez que $X_n = j$.
Como es recurrente: $P(T = \infty) = 0$.
$\Rightarrow E_i(f(X_T)) = f(j)$. $\Rightarrow f(i) \geq f(j)$ $\forall j \in E$. Como j es génerico se concluye que f es constante. □

3.4. Tiempo de parada óptima

En esta sección se resuelven dos problemas:

- Computar la función:

$$v := \sup_T E_i[f(X_T)],\ \forall i \in E \text{ (siendo } T \text{ un tiempo de parada).}$$

- Encontrar un tiempo de parada que realice el supremo.

Observación 3.4.1. *Si X es irreducible recurrente, entonces v es igual a la constante $c = sup_j f(j)$ (notar que es simplemente ver que v debe mayorar a f).*

Ejemplo 3.4.1. *Sea X una cadena recurrente e irreducible de Markov y $f \geq 0$. Sea $c = \sup_i f(i)$, $j \in E$ tal que $f(j) = c$ y T_0 la primera llegada a j. Observar que: $v(i) \leq E_i[c] = c,\ P(T_0 < \infty) = 1$.*
$\Rightarrow v(i) \geq E_i[X_{T_0}] = c$

Observación 3.4.2. *Estas dos observaciones son propiedades de las cadenas de Markov homogéneas y serán utilizadas en los próximos teoremas.*
Dado T tiempo de parada y σ el shift en el espacio muestral, entonces:

- $P(X_n = r, T \circ \sigma = n \mid X_1 = i) = P(X_{n-1} = r, T = n \mid X_0 = i)\ \forall\ n > 0,\ i, r \in E$.

  Demostración. Por como se definió las cadenas de Markov homogeneas en la introducción notar que: $\{\omega = (\omega_0, i, \omega_2, \dots)$ tal que $X_n = r\}$ $= \Omega\ \times \{\omega = (i, \omega_1, \dots)$ tal que $X_{n-1} = r\}$. Por otro lado $(To\sigma = n \mid X_1 = i) = \Omega\ \times\ (T = n \mid X_0 = i)$.

  $\Rightarrow$ Definiendo $A = (T = n \mid X_0 = i)$ (el cual es $\mathscr{F}_n$- medible).

  La igualdad que basta probar es:

  $P(\Omega \times A) = P(A)$, la cual se cumple si es $\mathscr{F}_n$ medible ya que se cumple

  para el álgreba generada por $(X_0, ..., X_n)$. ☐

-

  $$P(X_n = r, To\sigma = n \mid X_0 = i, X_1 = j) = P(X_n = r, T = n \mid X_1 = j)$$

  $\forall\ n > 0,\ i, j \in E\ , r \in \mathbb{R}$.

  Demostración. La medida obtenida condicionando a los sucesos $X_1 = j, X_0 = i$ tiene álgebra generadora formada por los conjuntos:

  $$\cup_{k=1}^{l} \cap_{j_k=1}^{m_k} X_{j_k} = e_{j_k}\ .\ \text{Con } j_k > 1$$

Este último conjunto mide lo mismo según la medida definida por condicionar $X_1 = j$. Por teorema de extensión de Caratheodory se deduce que:

$$P(T = n \mid X_0 = i, X_1 = j) = P(T = n \mid X_1 = j)$$

$\square$

Teorema 3.4.1. *La función v es la mínima función excesiva mayor o igual a f.*
Se verá una versión más general que este teorema en 3.5.1

Corolario 3.4.1. *Si C es un subconjunto de E irreducible, entonces $\forall i \in C$, $v(i) = \sup_{j \in C} f(j)$.*

(Notar que para maximizar f lo mejor es esperar hasta pasar por el supremo).

Lema 3.4.1. *Si g es una función excesiva; la función h definida como:*
$h(i) = E_i(g(X_T))$, $i \in E$ también es excesiva

En la subsección 3.5.1 se demostrará una versión más general.

Teorema 3.4.2. *Si E es finito entonces $T_0(\omega) = \inf\{n \geq 0 : f(X_n(\omega)) = v(X_n(\omega))\}$. Es tiempo de parada óptimo.*
Se probará una versión más general en 3.5.2.

Ejemplo 3.4.2 (Caso de espacio de estados finito)**.** *Sea X una cadena de Markov cuyo conjunto de estados es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, función de ganancia $f = (2, 0, 1, 3, 2, 4, \frac{5}{2})$ y matriz de estados:*

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Observar que los estados 1 y 2 forman un conjunto irreducible cerrado, al igual que los estados 3, 4 y 5, luego por 3.4.1:

$$v(1) = v(2) = 2,\ v(3) = v(4) = v(5) = 3.$$

Por otro lado $v(6) = f(6)$ ya que ahí se alcanza el máximo de f.
Usando el teorema 3.4.1:

$$v(7) \geq (0{,}1 + 0{,}1)2 + (0{,}1 + 0 + 0{,}1)3 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}4v(7)\ ,\ v(7) \geq \frac{5}{2}.$$

$\Rightarrow v(7) \geq 3.$

$\Rightarrow v = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 3)$, $\{f = v\} = \{1, 4, 6\}$ *y* $T_0 = \inf\{n : f(X_n) = v(X_n)\}$.

3.5. Tiempo de parada óptima con descuento

Los dos problemas a resolver en esta subsección son los mismos que la anterior a diferencia que ahora hay un $\alpha \in (0,1]$ tal que:

$$v := \sup_T E_i(\alpha^T f(X_T)),\ i \in E. \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de parada.}$$

Esta constante α se puede interpretar como un factor de 'descuento' en la ganancia.

Teorema 3.5.1. *La función v es la mínima función α excesiva mayor o igual a f.*

Demostración.

- Excesividad:
  Dado $\epsilon > 0$: $\forall j \in E\ \exists\ T_j$ tiempo de parada tal que
  $E_j(\alpha^T f(X_T)) > v(j) - \epsilon$. Sea $T := 1 + \sum_{j \in E} I_{\{X_1 = j\}}(T_j o\sigma)$.
  Notar que T es un tiempo de parada:
  $(T = n)\ = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, ...); T_j(\omega_1, \omega_2) = n - 1\} =$
  $\cup_{j \in E} \Omega \times T_j = n - 1\ \in \mathscr{F}_n$.
  Por otro lado:

  $$E_i(\alpha^T f(X_T)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T = n \mid X_0 = i, X_1 = j) P(i,j) =$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j o\sigma = n - 1 \mid X_0 = i, X_1 = j) P(i,j) = (*)$$

  Usando la segunda observación. de 3.4.2:

  $$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j o\sigma = n - 1 \mid X_1 = j) P(i,j) = (**)$$

  Usando la primera observación de 3.4.2

  $$(**) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_{n-1} = r, T_j = n - 1 \mid X_0 = j) P(i,j)$$

  $$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha\alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

  $$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha\alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in E} \sum_{r\in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \alpha \sum_{j\in E} E_j(\alpha^{T_j} f(X_{T_j})) P(i,j) \geq \alpha(Pv(i) - \epsilon)$$

Como v es el supremo en los tiempos de parada y ϵ es génerico:

$$v(i) \geq \alpha P v(i).$$

- Mayora a f: Tomando el tiempo de parada $T = 0$ se concluye este item.
- Es la menor función α- excesiva que mayora a f:

  Sea g otra función excesiva mayorante, usando el teorema 3.3.3

  $$g(i) \geq E_i(\alpha^T g(X_T)) \ \Rightarrow g(i) \geq E_i(\alpha^T f(X_T)) \ \forall\, T \text{ tiempo de parada}$$

  $\Rightarrow g \geq v.$

□

Lema 3.5.1. *Si g es una función α-excesiva; la función h definida como: $h(i) = E_i(\alpha^T g(X_T))$,$i \in E$ también es α-excesiva*

Demostración. Observar primero que $h \geq 0$.
Luego, sea σ el shift , se define $S := To\sigma$.
Notar que $T \leq S$. Luego por la proposición 3.3.3 se deduce que:

$$h(i) = E_i(\alpha^T g(X_T)) \geq E_i(\alpha^S g(X_S)).$$

Usando la primera observación de 3.4.2 :

$$E_i(\alpha^S g(X_S) \mid X_1 = j) = \alpha E_j(\alpha^S g(X_S)) = \alpha h(j).$$

$\Rightarrow \ E_i(\alpha^S g(X_S)) = \alpha \sum_{j\in E} P(i,j) h(j) \leq \alpha(i).$

□

Teorema 3.5.2. *Si E es finito y*

$$T_0(\omega) := \text{ínf}\{n \geq 0 : f(X_n(\omega)) = v(X_n(\omega))\},$$

es tiempo de parada.
$\Rightarrow T_0$ *es tiempo de parada óptimo.*

Demostración. Basta probar que $h(i) = E_i(\alpha^{T_0} f(X_{T_0})) = v(i)$

- Por definición de v, $h \leq v$.

- h es α-excesiva: $f(\alpha^{T_0} X_{T_0}) = v(X_{T_0})$.

$$\text{Luego } h(i) = E_i(f(\alpha^{T_0} X_{T_0})) = E_i(v(X_{T_0}))$$

  Por el lema 3.4.1 se deduce h es α excesiva.

- $h \geq f$:

$$\text{Si } i \in A \Rightarrow P_i(T_0 = 0) = 1 \Rightarrow h(i) = E_i(\alpha^{T_0} f(X_{T_0})) = f(i).$$

  Se supone que $c := \text{máx}_{i \in E}(f(i) - h(i))$ es positivo y se realiza en j.
  Observar que $h + c$ es $\alpha -$ excesiva y mayora a f.
  Como v es la mínima función α -excesiva que mayora a f (teorema 3.5.1) $\Rightarrow v \leq h + c \Rightarrow f(j) \leq v(j) \leq h(j) + c = h(j) + f(j) - h(j) = f(j) \Rightarrow v(j) = f(j)$.
  Sin embargo, $j \notin A$ lo cual es absurdo. De esta manera h es α-excesiva, mayora a f y es menor o igual a v. Por teorema 3.5.1 se concluye que $h = v$.

$\square$

Ejemplo 3.5.1 (Parada óptima con descuento)**.** *Sea X una cadena de Markov cuyo conjunto de estados es $E = \{a, b, c\}$, función de ganancia $f = (6, 5, 3)$ y $\alpha = 0{,}75$ y matriz de estados:*

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Por el teorema 3.5.1:

$$v(a) \geq 0{,}15v(a) + 0{,}60v(b) \text{ , } v(a) \geq 6,$$

$$v(b) \geq 0{,}45v(a) + 0{,}30v(b) \text{ , } v(b) \geq 5,$$

$$v(c) \geq 0{,}30v(a) + 0{,}15v(b) + 0{,}30v(c) \text{ , } v(c) \geq 3,$$

Observar que la función $h := (6, 6, 6)$ es $0{,}75$-excesiva $\Rightarrow v(a) = 6$.
Tomando $v(b) = 5$ y teniendo en cuenta que $v(a) = 6$ (son los mínimos valores que pueden tomar) , $v(c)$ está obligado a valer $3{,}643$.

$\Rightarrow v = (6, 5, 3{,}643)$ *y el tiempo de parada óptima es la primer llegada a* $\{a, b\}$

Capítulo 4

Procesos de Markov con espacio de estados continuo

Este capítulo se basa en el libro "Optimal Stopping Rules"de A. N. Shiryaev [4].

4.1. Introducción

4.1.1. Preliminares:

De ahora en más el espacio de estados $(E, \mathscr{B})$ no tiene que ser numerable y se trabaja con la definición de Cadenas de Markov para dicho caso.

Los objetivos ahora son:

- Dada g una función medible no negativa que cumple $\lim_n X_n = 0$ P_x-ctp. $\forall x \in E$ Computar la función:

$$\overline{v} := \sup_T E_i[g(X_T)],\ i \in E. \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de Markov.}$$

$$v := \sup_T E_i[g(X_T)],\ i \in E. \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de parada.}$$

  Cuando se mencione a g se referirá a esta función.

- Encontrar un tiempo de Markov (de parada) que realice los supremos.

Definición 4.1.1.

- *Se dice que una función $f : E \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}$- medible, pertenece a $B(A^+)$ si:*

$$E_x(\sup_n f^+(X_n)) < \infty \ \forall x \in E.$$

- *Una función f $\mathscr{B}$ medible es excesiva si:*

$$E_x(f(X_1)) \leq f(x) \ \forall x \in E.$$

(Siendo f^+ la parte no negativa de f).

Observación 4.1.1.

1) Si E es numerable las definiciones de excesividad son equivalentes.

2) Sea f medible tal que $\exists E_x(f(X_n))\ \forall\ x \in E, n \in \mathbb{N}$:
$E_x(f(X_m) \mid \mathscr{F}_n))(\omega) = E_{X_n(\omega)}(f(X_{m-n}))\ , \forall \omega \in \Omega\ ,\ m \geq n$.

.3) Si f es excesiva, no negativa , entonces $(f(X_n), \mathscr{F}_n, P_x)$ forman una supermartingala (y por ende existe su límite en casi todo punto).

.4) Si $f \geq 0$ y $f \in B(A^+)$ entonces:

$$E_x(\sup_{j \geq n} f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j \geq 0} f(X_0)).$$

.5) Si f, g son funciones excesivas no negativas , $b,\ c$ son escalares no negativos entonces $cf + bg$ es excesiva.

Demostración.

1 Simplemente notar que:
$E_x(f(X_1)) = \sum_{j \in E} P(x,j) f(j)$.

2 Dado $B\ \in\ \mathscr{F}_n$ y $A\ \in \mathscr{B}$. Por unicidad de la esperanza condicional basta ver que:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} f(X_{m-n})\ dP_x(\omega) = \int_B f(X_m)(\omega)\ dP_x(\omega)\ .$$

Por definición sabemos que:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} \mathbf{1}_{(X_{n-m} \in A)}\ dP_x(\omega) = \int_B \mathbf{1}_{(X_m \in A)(\omega)}\ dP_x(\omega)\ .$$

$\Rightarrow\ \forall\ \varphi \in (E, \mathscr{B})$ simple:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} \varphi(X_{m-n})\ dP_x(\omega) = \int_B \varphi(X_m)(\omega)\ dP_x(\omega)\ .$$

Como aproximan a f se concluye la tesis.

3 Usando observación anterior: $E_x(f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n))(\omega) = E_{X_n(\omega)}(X_1) \leq f(X_n(\omega))$.

4 Usando la observación 2:

$$\lim_j E_x(\max\{f(X_n), ..., f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = \lim_j E_{X_n(\omega)}(max\{f(X_0), ..., f(X_j)\}).$$

Analizando la igualdad de la izquierda:
Dado $B \ \in \mathscr{F}_n$:

$$\int_B \lim_j E_x(\max\{f(X_n),...,f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega)\ dP_x(\omega) =$$

$$\int_B \lim_j \max\{f(X_n),...,f(X_j)\}\ dP_x(\omega) = \int_B \sup_{j\geq n}\{f(X_j)\}.$$

Como $f \ \in B(A^+)$ y B es génerico , por la unicidad de la esperanza condicional:
$\lim_j E_x(\max\{f(X_n),...,f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_x(\sup_{j\geq n}\{f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega)$.
En la igualdad de la derecha se puede usar el teorema de convergencia dominada para deducir que:

$$\lim_j E_{X_n(\omega)}(max\{f(X_0),...,f(X_j)\}) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j\geq 0} f(X_j)).$$

Finalmente se concluye que:

$$E_x(\sup_{j\geq n}\{f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j\geq 0} f(X_j)).$$

5 Es análogo al caso numerable.

$\square$

Lema 4.1.1. *Sea f no negativa, finita y excesiva. $\tau \geq \sigma$ tiempos de Markov* $\Rightarrow \ E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq f(X_\sigma)$.

Demostración. Se estudia primero el caso en que f está acotada:
dado $c > 0$,observar que $\sigma \wedge \tau$ es un tiempo de parada.

$$\begin{aligned} \text{Luego } E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) &= E_x(f(X_{\tau\wedge c})\mathbf{1}_{\sigma\leq c} \mid \mathscr{F}_\sigma) + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{\sigma>c} \mid \mathscr{F}_\sigma) \\ &\leq f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma\leq c} + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{(\sigma>c)} \mid \mathscr{F}_\sigma). \\ \Rightarrow E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) &\leq \lim_{c\to\infty} f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma\leq c} + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{(\sigma>c)} \mid \mathscr{F}_\sigma) \\ &= f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma<\infty} + E_x(f(X_\infty)\mathbf{1}_{\sigma=\infty} \mid \mathscr{F}_\sigma) = * \end{aligned}$$

Observar que $f(X_\infty)\mathbf{1}_{\sigma=\infty}$ es $\mathscr{F}_\sigma$ medible

$$\Rightarrow * = f(X_\sigma)_{(\sigma<\infty)} + f(X_\infty)_{(\sigma=\infty)} = f(X_\sigma).$$

Si f no está acotada:
dado $m \in \mathbb{N}$ definimos $f^m(x) := f(x) \wedge m$.
Por convergencia monótona para esperanza condicional:

$$\exists \ \lim_m E_x(f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma).$$

Luego por el lema de Fatou para esperanza condicional y el teorema del muestreo opcional (recordar que $\{f(X_n)\}$ es una supermartingala):

$$E_x(\lim_m f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq \liminf_m E_x(f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq \lim_m f^m(X_\sigma).$$

Se estudiará solo el límite de la derecha ya que el razonamiento es el mismo:

$$\lim_m f^m(X_\sigma) = \lim_m f^m(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_m f^m(X_\infty)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} =$$

$$f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_m \lim_n f^m(X_n)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} = *$$

Fijado $\omega \in \Omega$, $\exists\ M$ tal que $f^m(X_n(\omega)) = f(X_n(\omega))$, para n suficientemente grande (esto es porque existe su límite). De esta manera se pueden iterar los límites.

$$* = f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_n \lim_m f^m(X_n)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} =$$

$$f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} = f(X_\sigma).$$

De esta manera se concluye que:

$$E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq f(X_\sigma).$$

□

Corolario 4.1.1. *Bajo las mismas hipótesis:*

$$E_x(f(X_\tau)) \leq E_x(f(X_\sigma)) \leq f(x)\ \forall\ x \in E.$$

Corolario 4.1.2. *Si g es excesiva $\Rightarrow \overline{v}(x) = v(x) = g(x)$ (un tiempo de parada (Markov) óptimo será $\tau = 0$) .*

Lema 4.1.2. *Sea f no negativa y excesiva, A un conjunto $\mathscr{F}$-medible y $\sigma_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Entonces la función:*

$$f_A(x) = E_x(f(X_{\sigma_A})),$$

es excesiva.

Demostración. $E_x(E_{X_1(\omega)}(f(X_{\sigma_A}))) = \int_{\sigma_A=0} E_{X_1(\omega)}(f(X_0))dP_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma_A=n} E_{X_1(\omega)}(f(X_n))dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} E_{X_1(\omega)}(f(X_\infty)dP_x(\omega) = = \int_{\sigma_A=0} f(X_1)dP_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma_A=n} E_x(f(X_n) \mid \mathscr{F}_n)(\omega)dP_x(\omega)$
$+ \int_{\sigma_A=\infty} E_{X_1(\omega)}(\lim_n f(X_n))dP_x(\omega) \leq **$ Por lema de Fatou :

$$** \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} \liminf_n E_{X_1(\omega)}(f(X_n))dP_x(\omega) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} \liminf_n E_x(f(X_n) \mid \mathscr{F}_1)(\omega)dP_x(\omega) \leq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega)+\int_{\sigma_A=\infty}\lim_n f(X_n)(\omega)dP_x(\omega)=$$

$$E_x f(X_{\sigma_A})=f(x).$$

□

Lema 4.1.3. *Sea v la mínima función excesiva mayorante de g. Entonces:*

$$v(x)=\max\{g(x),E_x(v(X_1))\}.$$

Demostración. v es mayor a g (por definición) y a $E_x(v(X_1))$ (por excesividad).
De esta manera $v(x)\geq \max\{g(x),E_x(v(X_1))\}$
Por otro lado la función $v_1:=\max\{g(x),E_x(v(X_1))\}$ al ser menor a v cumple :

$$0\leq E_x(v_1(X_1))\leq E_x(v(X_1))\leq v_1(x).$$

$\Rightarrow$ es excesiva. $\Rightarrow$ $v=v_1$. □

Observación 4.1.2. *No toda función f que cumpla la ecuación :*
$f(x)=\max\{g(x),E_x(f(X_1))\}$ es la mínima excesiva mayorante a g.

Por ejemplo, Tomando g acotada por c : $f(x):=k\geq c$ cumple la ecuación.

Lema 4.1.4. *Dada f integrable, positiva; definiendo $Q(f(x)):=\max\{f(x),E_x(f(X_1))\}$.*
$\Rightarrow$ $v(x)=\lim_n Q^n(g(x))$ (tomando elevar como la composición).

Demostración.

- Existe el límite:
  observar que $Q^{n+1}(g(x))=\max\{Q^n(g(x)),E_x(Q^n(g(X_1)))\}\Rightarrow Q^{n+1}(g(x))\geq Q^n(g(x))$.
  $\Rightarrow$ existe el límite (puede ser infinito).

- Obviamente mayora a g.

- Excesividad:

$$\lim_n Q^n(g(x))=\lim_n \max\{Q^{n-1}(g(x)),E_x(Q^{n-1}(g(X_n)))\}\geq$$

$$\lim_n E_x(Q^{n-1}(g(X_1)))=\lim_n\int_\Omega Q^{n-1}(g(X_1))(\omega)\ dP_x(\omega)=*$$

  Por teorema de convergencia monótona de integrales Lebesgue:

$$*=\int_\Omega \lim_n Q^{n-1}(g(X_1)(\omega))\ dP_x(\omega)=E_x(\lim_n Q^{n-1}(g(X_1))),$$

  quedando probada la excesividad.

- Mínima:
  Si f es otra función excesiva mayorante de g, entonces:

$$Q(f(x)) = \max\{f(x), E_x(f(X_1))\} = f(x).$$

$$\Rightarrow f(x) = Q^n(f(x)) \geq Q^n(g(x)) \;\forall\; n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow f \geq \lim_n Q^n(g(x)).$$

□

Lema 4.1.5. *Sea f excesiva que satisface la ecuación $f(x) = \max\{g(x), E_x f(X_1)\}$, $\epsilon \geq 0$ y $\tau_\epsilon = \inf\{n \geq 0 \;:\; f(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\}$.*

$$\Rightarrow E_x(f(X_{\tau_{\epsilon \wedge n}})) = f(x).$$

Demostración. Usando la siguiente **afirmación**:

$$\forall\; m \leq n,\; f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}).$$

Luego tomando $m = n$ queda probado el lema.
Demostración de la afirmación:
Si $m = 0 \Rightarrow\; P_x(X_0 = x) = 1$.

Luego $f(x) = E_x(f(X_0)) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq 0\}}) + E_x(f(X_0)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > 0\}})$.

H) $f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}})$.

T) $f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m+1\}}) + E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m+1\}})$.

Dem.:

$$f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) =$$

$$E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) - E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}).$$

$\Rightarrow$ Basta ver que: $-E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) = E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m+1\}})$.

Esto sucede si y sólo si: $E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) = E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}})$.

$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_m)(\omega)\; dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1})(\omega)\; dP_x(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} E_{X_m(\omega)}(f(X_1)\; dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1})\; dP_x(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} E_x(f(X_{m+1}) \mid \mathscr{F}_m)(\omega))\; dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1})\; dP_x(\omega).$$

Lo cual se cumple ya que $\{\tau_\epsilon > m\}$ es $\mathscr{F}_m$-medible. □

Lema 4.1.6. *Supóngase que $g \in B(A^+)$:*

1) *La función excesiva mínima y mayorante a g tiene mismo límite superior que este último. Esto es:*

$$\overline{\lim_n}\, v(X_n) = \overline{\lim_n}\, g(X_n).$$

2) *Debido al lema anterior, fijado un $\epsilon > 0$, en casi todo punto, va a existir un N suficientemente grande donde a partir de este se aproxime g a v a menos de ϵ. Esto es:*

$$Si\ \tau_\epsilon = \inf\{n \geq 0 : v(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\},$$

entonces:

$$P_x(\overline{\tau}_\epsilon < \infty) = 1.$$

Demostración.

1) $$\overline{\lim}_n v(X_n) \geq \overline{\lim}_n g(X_n) \text{ obviamente ya que } v \text{ mayora a } g.$$

Se probará la otra desigualdad; para ello fijado $x \in E$ y definiendo:

$$\Psi_n := \sup_{j \geq n} g(X_j),\ \varphi_n = E_x(\Psi_n \mid \mathscr{F}_n),$$

$$\varphi(X_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\Psi_0).$$

Notar que las esperanzas y las esperanzas condicionales de estas funciones están bien definidas ya que $g \in B(A^+)$. Luego:

$$E_x(\sup_{j \geq n} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j \geq 0} g(X_0)).$$

Por un lado, obviamente $\varphi(x) \geq g(x)$.

Además: $E_x(\varphi(X_1)) = E_x(E_{X_1(\omega)}(\Psi_0)) = E_x(\Psi_1) = E_x(E_x(\Psi_1 \mid \mathscr{F}_1)) =$

$$E_x(\Psi_1) \leq E_x(\Psi_0) = \varphi(x).$$

$\Rightarrow \varphi \geq g$ y φ excesiva $\Rightarrow v \leq \varphi$. Fijado m y tomando $n \geq m$ se obtiene que:

$$E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) \geq E_x(\Psi_n \mid \mathscr{F}_n) = \varphi_n \geq v(X_n).$$

$$\Rightarrow\ \overline{\lim}_n E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) \geq \overline{\lim}_n v(X_n).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $(E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, P_x)$, $n \geq m$ forma una martingala. Luego por teorema de Lévy:

$$\lim_n E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_\infty) = \Psi_m.$$

$$\Rightarrow \Psi_m \geq \overline{\text{lím}}_n v(X_n) \leq \Psi_m.$$

Finalmente:

$$\overline{\text{lím}}_n v(X_n) \leq \inf_m \Psi_m = \inf_m sup_{j\geq m} g(X_j) = \overline{\text{lím}}_n g(X_n).$$

2) Sea $A = \{\omega : \tau_\epsilon(\omega) = \infty\}$; entonces para $\omega \in A$:

$$v(X_n) > g(X_n) + \epsilon.$$

$$\Rightarrow \overline{\text{lím}}_n v(X_n) > \overline{\text{lím}}_n g(X_n).$$

Por la parte anterior se sabe que este conjunto tiene medida nula , por ende A también y se concluye este enunciado.

□

Definición 4.1.2. *Dada f medible tal que $\exists\ E_x(f(X_1))\ \forall\ x \in E$; se define:*

$$Gf(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(f(X_1))\}$$

Lema 4.1.7. *Nuevamente se supone que $g \in\ B(A^+)$ y sea $\varphi(x) := E_x(\sup_n g(X_n))$. Entonces:*

1) $G^{n+1}(\varphi(x)) \leq G^n(\varphi(x))\ n \in \mathbb{N}$.

2) $\overline{v}(x) := \text{lím}_n G^n(\varphi)$ *satisface* $\overline{v}(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(\overline{v}(X_1))\}$.

Demostración.

1) La demostración es por inducción; lo único que se demostrará es el paso base:

$$\begin{aligned} G(\varphi(x)) &= \text{máx}\{g(x), E_x(E_{X_1(\omega)}(\sup_{j\geq 0} g(X_j))\} \\ &= \text{máx}\{g(x), E_x(E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j) \mid \mathscr{F}_1))\} \\ &= \text{máx}\{g(x), E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j))\} = \text{máx}\{E_x(g(x)), E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j))\} \\ &\leq E_x(\text{máx}\{g(x), \sup_{j\geq 1}(g(X_j))\}) = E_x(\sup_{j\geq 0} g(X_j)) = \varphi(x). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se basa en la cuarta observación de 4.1.1.

2)
$$G^n(\varphi)(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(G^{n-1}(\varphi(X_1)))\}.$$

Tomando límites y usando el teorema de convergencia monótona (notemos que si en un momento se iguala a g; a partir de ese siempre será igual) obtenemos la igualdad.

□

De aquí en adelante cuando se mencione a $\overline{v}(x)$ nos referiremos a este límite y a φ como esta función.

Lema 4.1.8. *Nuevamente supondremos que $g \in B(A^+)$. Razonando de forma análoga que el segundo item de 4.1.6,*

$$\Rightarrow \varlimsup_n \overline{v}(X_n) = \varlimsup_n g(X_n) \ P_x\text{-ctp. } \forall x \in E.$$

Demostración.

$$\varlimsup_n \overline{v}(X_n) \geq \varlimsup_n g(X_n) \text{ ya que } v \text{ es mayor a g.}$$

Por otro lado tomando $m \leq n$:

$$\overline{v}(X_n) \leq G^n(\varphi(X_n)) \leq \varphi(x) = E_{X_n}(\sup_{j\geq 0} g(X_j)) = E_x(\sup_{j\geq n} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n) \leq$$

$$E_x(\sup_{j\geq m} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n).$$

Se procede (sustituyendo v por $\overline{v}$) como el primer item del lema 4.1.6 y se prueba la otra desigualdad.

□

Corolario 4.1.3. *Si $g \in B(A^+)$, sea $\epsilon > 0$ y*

$$\overline{\tau}_\epsilon = \inf\{n \geq 0 : \overline{v}(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\}.$$

Entonces:

$$P_x(\overline{\tau}_\epsilon < \infty) = 1.$$

(Se deduce como el segundo item del lema 4.1.6)

De ahora en adelante cuando mencionemos a $\overline{\tau}_\epsilon$ estará definido como en este corolario.

Lema 4.1.9. *Si $g \in B(A^+)$, se cumple que $\forall\ \epsilon > 0$:*

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) \text{ y } \overline{v}(x) = v(x).$$

Demostración. Por lema 4.1.5:

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) + E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon > n}).$$

Tomando límite en n:

$$\overline{v}(x) = \lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})) = \lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) + E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon > n}).$$

Analizando el primer término de la derecha:
Por el corolario anterior $\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}$, converge puntualmente cuando $n \to \infty$ Luego por el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon})).$$

Para concluir el lema se verá que el segundo término converge a 0.
Para esto basta ver que $\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})$ es uniformemente integrable. Notar que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \sup_j g(X_j) \geq \overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})$ y esta variable tiene esperanza acotada. De esta manera, se deduce la integrabilidad uniforme.
Queda probar que $\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon}))$:
obviamente $\overline{v} \geq v$.
Por otro lado:

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) \leq$$
$$E_x(g(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) + \epsilon \leq E_x(v(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) + \epsilon \leq v(x) + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario se concluye la desigualdad.

□

Corolario 4.1.4. *Bajo las mismas hipótesis (usando que $v = \overline{v}$):*

$$v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon}))$$

4.1.2. Conclusiones:

Con la batería de lemas de esta sección se pueden sacar algunas ideas para la avanzar en la resolución del problema de parada óptima.

- El lema 4.1.1 es un resultado intuitivo de las supermartingalas y tiene como corolario interesante que el problema de parada óptima es trivial en el caso de que g sea excesiva (lo cual es razonable ya que excesividad implica menor valor en promedio a futuro).
- El lema 4.1.3 da una ecuación necesaria que debe cumplir v.
- El lema 4.1.5 habla de una zona donde no hay pérdida de ganancia (valor de g; hablando en promedios).
- De los demás lemas se obtiene información del comportamiento límite de la función de ganancia.

4.2. Caracterización del pago y los tiempos de parada

En está sección g es no negativo e integrable, el operador Q es el definido anteriormente ($Q(f(x)) = \max\{f(x), E_x(f(X_1))\} = f(x)$) y los objetivos son los mismos mencionados en los preliminares.

Teorema 4.2.1. *Bajo estas condiciones se puede dar las siguientes propiedades de s (el supremo de las ganancias medias)):*

1) $s(x)$ es la mínima función excesiva mayorante a $g(x)$.

2) $s(x) = \overline{s}(x)$.

3) $s(x) = \max\{g(x), E_x(s(X_1))\}$.

4) Dado $b \geq 0$; sea $g^b(x) := g(x) \wedge b$. Entonces:

$$s(x) = \lim_n Q^n(g)(x) = \lim_b \lim_n Q^n(g^b(x)).$$

Demostración.

1) Por corolario 4.1.1, $\forall\ \tau$ tiempo de Markov:

$$v(x) \geq E_x(v(X_\tau)) \geq E_x(g(X_\tau)).$$

$$\Rightarrow v(x) \geq \overline{s}(x) \geq s(x).$$

Para probar la otra desigualdad primero se asume que $g \in B(A^+)$.
Por corolario 4.1.9 $v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon}))$. Luego:

$$v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon})) \leq E_x(g(X_{\tau_\epsilon})) + \epsilon \leq s(x) + \epsilon.$$

Como ϵ es génerico, se concluye la desigualdad (y por ende la igualdad).
Caso general:
Sea $s^b(x) := \sup_{\tau \in \mathscr{R}}(E_x(g^b(X_\tau))) = v^b(x)$.
$v^b(x)$ crece cuando b crece; sea $v^*(x) := \lim_b v^b(x)$. Primero se probará que $v^* = v$:
obviamente mayora a g (se compara con g^b y toma límite).
Excesividad (usando el Teorema de Convergencia Mónotona):

$$E_x(v^*(X_1)) = \lim_b E_x(v^b(X_1)) \leq \lim_b v^b(x) = v^*(x).$$

Es minimal:
Sea f excesiva mayorante a g .Entonces $f \geq g^b \ \Rightarrow f \geq v^b$.

$$\Rightarrow f \geq v^* \ \Rightarrow v = v_* \leq s.$$

2) Notar que en el item anterior se probó que $s = v \geq \overline{s} \geq s$.

3) Se desprende del corolario 4.1.3.

4) Se desprende del lema 4.1.4 y de la demostración del primer item de este teorema.

$\square$

Observación 4.2.1.

Dado $\overline{\tau} \in \overline{\mathscr{R}}$ tal que $f(x) := E_x(g(X_{\overline{\tau}}))$ es una función excesiva que mayora a g.

- $\Rightarrow f = \overline{s}$ *por como está definida f y por ser s la mínima excesiva mayorante a g.*

- $\overline{\tau}$ *es un tiempo de Markov óptimo.*

Observación 4.2.2. *Notar que de la demostración del teorema 4.2.1 se puede concluir que los tiempos de Markov de la forma τ_ϵ permiten aproximar por lo menos con error ϵ a v. Por ende definiendo $\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}})$ como los tiempos de parada (Markov) de llegada a un boreliano se deduce que:*

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathscr{C}} E_x(g(X_\tau)) = \sup_{\tau \in \overline{\mathscr{C}}}(E_x(g(X_\tau))).$$

Teorema 4.2.2. *Supóngase que $g \in B(A^+)$, se puede dar una caracterización del tiempo de Markov óptimo:*

1)

$\tau_0 := \inf\{n \geq 0 : v(X_n) = g(X_n)\}$ *es un tiempo óptimo de Markov.*

(Comparar con los resultados de los capítulos anteriores).

2) Si τ_0 es un tiempo de parada $\Rightarrow$ es óptimo.

Demostración.

1) Aplicando el lema 4.1.5: $v(x) = E_x(v(X_{\tau_0 \wedge n})) =$

$$E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(v(X_n)\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(v(X_n)\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq *$$

Como $E_{X_n}(\sup_j g(X_j)) \geq E_{X_n}(g(X_\tau))\ \forall\ \tau \in \overline{\mathscr{R}}$

$$* \, E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(E_{X_n}(\sup_j(g(X_j)))\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(E_{X_n}(\sup_j(g(X_j)))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq$$

$$E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(\sup_j(g(X_j))\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(\sup_{j \geq n}(g(X_j))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq **$$

Como $g \in B(A^+)$, usando el lema de Fatou cuando $n \to \infty$:

$$v(x) \leq E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}}) + E_x(\overline{\lim_n}(g(X_j))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) = E_x(g(X_{\tau_0})).$$

Por ende τ_0 es óptimo (ya que por el teorema 4.2.1 $\overline{s}(x) = v(x)$).

2) De la prueba anterior se obtuvo que:

$$s(x) = v(x) \leq= E_x(g(X_{\tau_0})).$$

Por 4.2.1 $s(x) = v(x) \Rightarrow \ \tau_0$ es óptimo.

$\square$

4.3. Ejemplos:

En está sección se muestran una serie de ejemplos de resolución problemas de parada óptima y casos donde no se cumplen todas las hipótesis de los teoremas que se utilizaron para resolverlo.

4.3.1. Caso trivial con ganancia infinita:

El siguiente ejemplo es una cadena homógenea,$g \notin B(A^+)$ y $g \geq 0$, con esperanzas definidas en la cadena y $g(X_\infty) = 0$ (como no es homogenea decimos que el proceso comienza en cero y s es constante):

- Sea $\{X_n\}$ es una sucesión independiente. Se estudia el caso en que la cadena parte desde 0 (los demás son análogos) y la cadena empieza en $X_0 = 0$.
- $P(X_n = n) = 1 - e^{\frac{-1}{i^2}}$, $P(X_n = 0) = e^{\frac{-1}{i^2}}$.
- $g = id$.

El problema en este caso tiene como solución parar cuando obtengo un resultado distinto a cero:

- Esperanza:
  $\sup_n(E(X_n)) = \sup_{n>0}(1 - e^{\frac{-1}{n^2}}) = 1 - e^{-1}$.
- Límite:
  Observar que $\lim_n(g(X_n)) = 0$, P_x-ctp.
- $g \notin B(A^+)$:

$$\text{Sea } Y := \sup_n(X_n) \;\Rightarrow\; F_Y(x \leq c) = P(X_i \leq c \;\forall\; i) = \Pi_{i=[c]+1}^{\infty}(e^{\frac{-1}{i^2}}).$$

$$\Rightarrow\; F_Y(x \leq c) = e^{\sum_{i=[c]+1}^{\infty}(\frac{-1}{i^2})}.$$

$$\text{Luego } \int_1^\infty 1 - e^{\sum_{i=[c]+1}^{\infty}(\frac{-1}{i^2})}\, dc \geq \int_1^\infty 1 - e^{\frac{-1}{c}}\, dc = \infty.$$

- $s = \infty$:
  Sea $\tau := \inf\{m;\; X_m > 0\}$.

$$\Rightarrow E(X_\tau) = \sum_{i=1}^{\infty}(\Pi_{j=0}^{i-1}e^{\frac{-1}{j^2}})(1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i \geq \sum_{i=1}^{\infty}(\Pi_{j=0}^{\infty}e^{\frac{-1}{j^2}})(1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i.$$

Notar que $(1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i \;\sim\; \frac{1}{i} \;\Rightarrow$ La serie diverge.

$$\Rightarrow E(X_\tau) = \infty.$$

4.3.2. g no positiva, mínima función excesiva mayorante es ella misma pero la ganancia máxima promedio es infinito :

Sea $\{Y_n\}$ una sucesión de variables independientes, idénticamente distribuidas. $g(x) = x$; $X_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n$; $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.
$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$; $\mathscr{F}_\infty = \sigma(X_0, ...)$. Notar que $g(x) = E_x(g(X_1))$. Entonces:

- $Q(g)(x) = x$.
- La mínima función mayorante excesiva a g es g.

Sin embargo, $s(x) = \infty$.

Demostración. Sea $\tau_k = \text{ínf}\{n \geq 0 : g(x) \geq k\}$.
Por 1.1.1: $P_x(\{\omega;\ \exists\ n \geq 0\ ; X_n \geq k\}) = 1 \Rightarrow\ P_x(\overline{\text{lím}_n} X_n = \infty) = 1$
$\Rightarrow\ P(\tau_k < \infty) = 1 \Rightarrow s(x) \geq k$.

□

4.3.3. Paseo al azar:

Sea $\{Y_n\}$ una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas tal que $P(Y_n = 1) = p;\ P(Y_n = -1) = 1 - p = q$.

$$g(x) = x\text{: } X_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n.$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n);\ \mathscr{F}_\infty = \sigma(X_0, ...).$$

Observar que en el caso $p > q$ $\tau^* = \infty$ es óptimo por lo visto en 1.1.1. Por ende se estudiará el otro caso:
Dado $c \in \mathbb{R}$:

$$P_x(\sup_n g(X_n) < c) = P_x(\text{nunca llegar a } c) = 1 - (\frac{p}{1-p})^{c-x}$$

$$\Rightarrow E_x(\sup_n(g(X_n))) = \int_0^\infty 1 - (1 - (\frac{p}{1-p})^{c-x})\ dP_x(c) < \infty.$$

$\Rightarrow\ g\ \in B(A^+)$. Para resolver el problema, se buscará una función como en la observación 4.2.1.
Sea $\tau_\gamma = \text{ínf}\{n \geq 0; X_n \geq \gamma\}$ (es un tiempo de llegada a un boreliano).
Luego, sea $p_\gamma(x) := P_x(\tau_\gamma < \infty)$. Entonces:

$$P_x(\tau_\gamma < \infty) = \begin{cases} (\frac{p}{q})^{\gamma - x} & si \quad x \leq \gamma \\ \\ 1 & si \quad x > \gamma \end{cases}$$

Por el lema de Borel-Cantelli $g(X_\infty) = 0$ P_x-ctp.
Se procede a analizar $E_x(g(X_{\tau_\gamma}))$.

- Si $x < \gamma > 0$:

$$E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \sum_0^\infty \int_{\tau_\gamma} g(X_n)(\omega)\ dP_x(\omega) = \sum_0^\infty \int_{\tau_\epsilon} \gamma\ dP_x(\omega) = \gamma(\frac{p}{q})^{\gamma-x}.$$

- Si $x \geq \gamma > 0$:

$$\tau_\epsilon = 0\ P_x\text{-ctp} \ \Rightarrow\ E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \int_\Omega g(X_0)\ dP_x(\omega) = x.$$

- Si $0 \geq \gamma$:

  Como $g(X_n(\omega)) = 0$ si $\omega\ \in \{\tau_\gamma = n\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ g(X_{\tau_\gamma}) = 0\ P_x - \text{ctp}$.

Entonces:

$$f_\gamma(x) := E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \begin{cases} \gamma(\frac{p}{q})^{\gamma-x} & si \quad x \leq \gamma \\ \\ x & si \quad x > \gamma \end{cases}$$

Sea $f^*_\gamma(x) := \text{máx}_\gamma\, f_\gamma(x)$,

$$\Rightarrow\ f^*_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma^*(\frac{p}{q})^{\gamma^*-x} & si \quad x \leq \gamma^* \\ \\ x & si \quad x > \gamma^* \end{cases}$$

f^* está en las hipótesis de la observación 4.2.1.
Demostración:

- $f^* \geq g$: Tomando $\gamma = x$: $E_x(g(X_{\tau_x})) = g(x)$.
- Es excesiva:

  Observar que $E_x(f^*(X_1)) = \int_{X_1 \leq \gamma^*} \gamma^*(\frac{p}{q})^{\gamma^*-X_1(\omega)}\ dP_x(\omega) + \int_{X_1 > \gamma^*} X_1(\omega)\ dP_x(\omega)$.

  - Si $\gamma^* \leq x - 1$:

    $$P^x(X_1 \geq \gamma^*) = 1\ \Rightarrow\ E_x(f^*(X_1)) = \int_\Omega X_1(\omega) dP_x(\omega) =$$

    $$(x+1)p+(x-1)(1-p) = xp+p+x-px-1+p = x+2p-1 \leq x = f^*(x).$$

  - Si $\gamma^* \geq x + 1$:

    $$P^x(X_1 \geq \gamma^*) = 0\ \Rightarrow\ E_x(f^*(X_1)) = \int_\Omega \gamma^*(\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-X_1(\omega)}(\omega) dP_x(\omega) =$$

    $$\gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x-1}\ p + \gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x+1}\ (1-p) =$$

    $$\gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x}\ ((\frac{1-p}{p})p + \frac{p}{1-p}(1-p)) =$$

    $$\gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x}\ (1-p+p) = \gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x} = f^*(x).$$

- Si $\gamma^* = x$:

$$E_x(f^*(X_1)) = \gamma^* \ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x+1} \ (1-p)+xp = x(\frac{p}{1-p})p+xp = 2xp < x = f^*(x).$$

- $f^*(x) = E_x(g(X_{\tau_{\gamma^*}}))$: Ya visto.

De esta manera $f^* = \overline{s} = s$. Observar que $P_x(\gamma^* = \infty) > 0 \Rightarrow$ no es tiempo de parada.
Ahora se dará un ejemplo númerico y se comparará con el caso de Horizonte finito: en el caso $p = \frac{e^{\frac{-1}{3}}}{1+e^{\frac{-1}{3}}}$ y $x = 0$. Notar que en este caso $f^*_\gamma(0) = 3$. Luego se observa como queda la solución del problema de parada óptima para el caso de $N = 200$ y se pone en el mismo gráfico (en negro) la recta horizontal de altura 3 (se usan las mismas notaciones que en el capítulo 2):

Se podría intuir de este ejemplo que la solución al problema se puede aproximar desde el caso finito. Esto se verá más a fondo el la sección **4.4**.

4.3.4. Cadena homogenea con ganancia infinita en tiempo trivial $g \notin B(A^+)$

Sea $\{Y_n\}$ tal que: $P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1) = (e+1)^{-1}$, independientes entre si. La cadena de Markov será $\{X_n\}$ con $X_n := e^{Y_0+\ldots+Y_n}$.
Con $g(x) = x$.

- $\tau_0 = 0$ es óptimo: Por corolario 4.1.2 basta ver que $g$es excesiva: :

$$g \text{ es excesiva } \Leftrightarrow \ E_x(g(X_1)) \leq x \Leftrightarrow \ ((e+1)^{-1})e+(1-((e+1)^{-1}))e^{-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ (\frac{e}{e+1}) + (\frac{e+1-1}{e+1})\frac{1}{e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e+1}{e+1} \leq 1.$$

- $g \ \notin \ B(A^+)$: Sean $Z := \sup_n X_n$, $c > 0$

$$\Rightarrow \ P_x(Y \leq c) = P_x(\cap_{n=0}^{\infty} e^{\sum_{i=0}^{n} Y_i} \leq c) =$$

$$P_x(\cap_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} Y_i \leq \log(c)) = (\frac{(e+1)^{-1}}{1-(e+1)^{-1}})^{\log(c)-\log(x)} =$$

$$(\frac{1}{e})^{\log(c)-\log(x)} = \frac{x}{c} \ \Rightarrow E_x(g(X_1)) = \int_0^\infty 1-(1-\frac{x}{c}) = \infty.$$

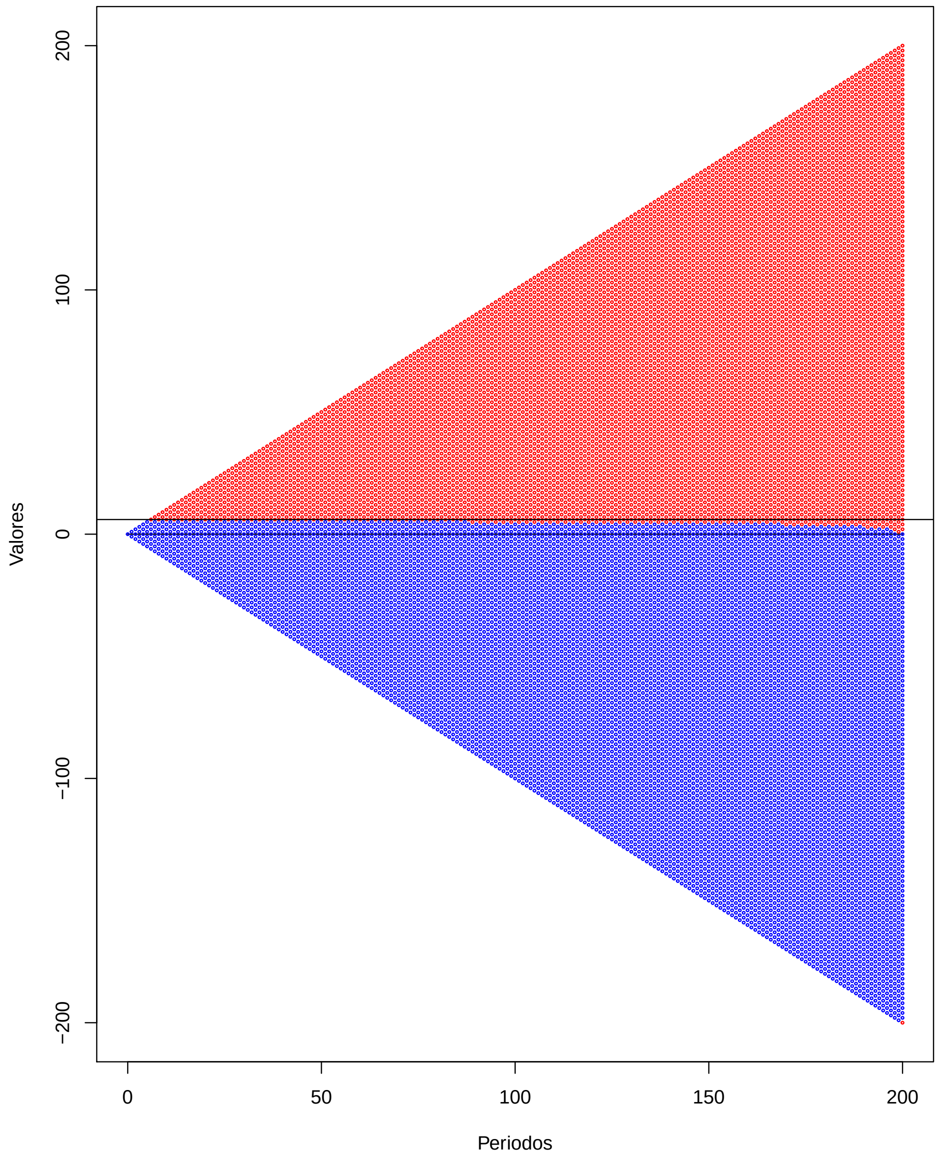

Figura 4.1: Problema completo.

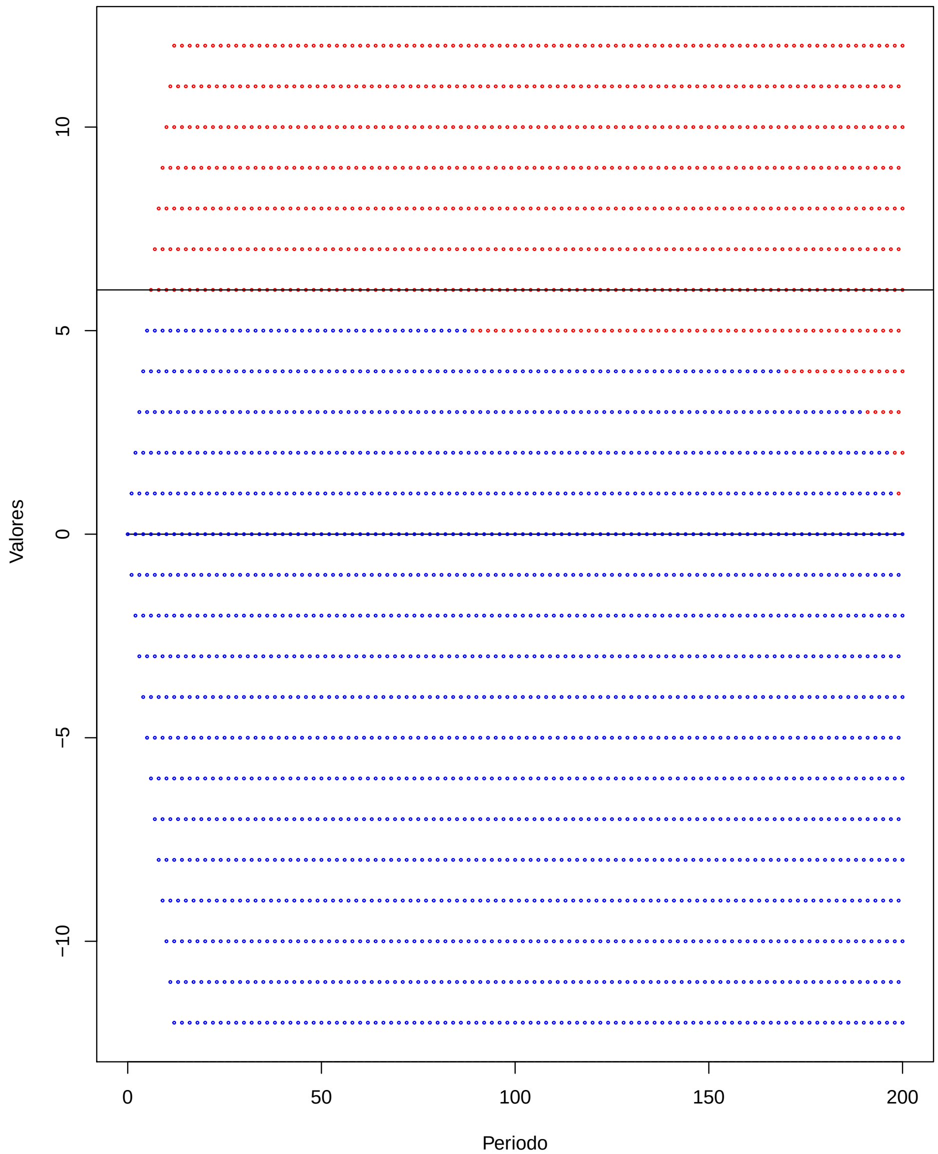

Figura 4.2: Zoom al problema.

4.4. Aproximación de horizonte finito a infinito:

Se usa la misma definición de este capítulo para $\overline{s},\ s,\ G$ y g estén las mismas hipótesis (integrable y no negativo).

Definición 4.4.1. *Estas dos definiciones dan la conexión entre horizonte finito e infinito:*

- $s_n(x) = G^n(g(x))$.
- $s^*(x) = \lim_n s_n(x)$
- $\tau_n^* := \min\{m \geq 0 : s_{n-m}(X_m) = g(X_m)\} \wedge n$.

Observación 4.4.1. *Para el caso horizonte finito N, $G^N(g)$ es la envolvente de Snell y τ_n^* es tiempo de parada óptima.*

Teorema 4.4.1 (Aproximación de horizonte finito a infinito)**.** *Estos cuatro items permiten caracterizar la aproximación buscada y justificar el ejemplo del paseo al azar.*
Si $g \in B(A^+)$:

i) las ganancias óptimas de los tres problemas coinciden:

$$\overline{s}(x) = s(x) = s^*(x),$$

ii)

$$\tau^* = \lim_n \tau_n^* \text{ es óptimo.}$$

iii)

$$\text{Si } \tau^* \text{ es tiempo de parada, entonces es óptimo.}$$

iv)

$$\tau^* = \inf\{n \geq 0 : \ s^*(X_n) = g(X_n)\}.$$

Demostración.

i) Se deduce del teorema 4.2.1 y del lema 4.1.4

ii)

En primer lugar si ω es tal que $\tau^*(\omega) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(X_{\tau_n^*(\omega)}) = g(X_{\tau^*(\omega)})$.

Luego , usando el lema de Fatou:

$$s(x) = \lim_n s_n(x) = \lim_n E_x(g(X_{\tau_n^*})) \leq E_x(\overline{\lim}_n g(X_{\tau_n^*}))$$

$$= E_x(\overline{\lim}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*<\infty}) + E_x(\overline{\lim}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*=\infty})$$

$$= E_x(\overline{\lim}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*<\infty}) + E_x(\overline{\lim}_n g(X_n)\mathbf{1}_{\tau^*=\infty})$$

$$= E_x(g(X_{\tau^*})).$$

iii) Es corolario del teorema 4.2.2

iv) Sea $\tau := \text{ínf}\{n \geq 0 : s^*(X_n) = g(X_n)\}$ y ω tal que $\tau(\omega) = n$.
$\Rightarrow g(X_i(\omega)) < s^*(X_i(\omega))\ \forall i \in \{0, ..., n-1\}$.
$\Rightarrow$ Para N suficientemente grande: $g(X_i)(\omega) < s_{N-i}(X_i)(\omega)$.
$\Rightarrow \tau_N^*(\omega) \geq n \ \Rightarrow\ \text{lím}_N\, \tau_N^*(\omega) \geq n \ \Rightarrow\ \tau^*(\omega) \geq \tau(\omega)$.
Por otro lado si $\tau(\omega) = \infty\ \Rightarrow g(X_i) < s^*(X_i)\ \forall i \geq 0$.
$\Rightarrow\ \tau_N^*(\omega) > n$ para N suficientemente grande
$\Rightarrow \tau^*(\omega) = \text{lím}_N\, \tau_N^*(\omega) > n\ \Rightarrow \tau^*(\omega) = \infty \Rightarrow \tau \leq \tau^*$.
La otra desigualdad es trivial ya que $s^* \geq s_n$

$\square$

Ejemplo 4.4.1 (Necesidad que $g \in B(A^+)$)**.** *Sea* $g(x) = -x$,
$E = \{0, 2, 2^2, 2^3, ...\}$, $\{Y_n\}$ *Bernoulli independientes de probabilidad* $\frac{1}{2}$ *y* $X_{n+1} = 2Y_{n+1}X_n$.
Por un lado g *es excesiva; por ende* $\tau = 0$ *es óptimo.*
Por otro lado considerando que $\tau := \{\text{ínf}\, n \geq 0 : Y_n = 0\}$ *tiene probabilidad* 1 *de ser finito* $\Rightarrow E_x(g(X_\tau)) > g(x)\ \forall x > 0$.

Bibliografía

[1] D. Lamberton, B. Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall/CRC, United States, 1996.

[2] E. Çinlar. Introduction to stochastic processes. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[3] G. Peskir, A. N. Shiryaev. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Birkhäuser Verlag, Berlin, 2006.

[4] A.N. Shiryaev. Optimal Stopping Rules. Springer, Providence, R.I., 1978.