



Programa de  
Desarrollo de las  
Ciencias Básicas

TESIS DE MAESTRIA EN FISICA

**ELASTOGRAFIA ULTRASONORA DE MEDIOS  
VISCOELASTICOS CON ONDAS DE CIZALLA BAJA  
FRECUENCIA**

Lic. NICOLAS BENECH

TRIBUNAL:

Dr. HUGO FORT

Dr. HORACIO FAILACHE

Dr. ALBERTO BIESTRO

Ing. RAFAEL CANETTI

Dr. CARLOS NEGREIRA (ORIENTADOR)

13 DE FEBRERO DE 2004

## **Agradecimientos**

Agradecemos especialmente a los investigadores del Departamento de Biofísica del Instituto de Investigaciones Biológicas Clemente Estable (IIBCE) por su invaluable apoyo, interés en el tema y aporte de ideas en la elaboración de fantomas para la simulación de tejidos biológicos.

## RESUMEN

---

Este trabajo propone la caracterización elástica de medios viscoelásticos blandos (aquellos en los que el módulo elástico de compresión es mucho mayor al módulo de cizalla), utilizando ondas de cizalla de baja frecuencia combinado con un método de investigación por ultrasonido. Entre los principales exponentes de este tipo de medios se encuentran los tejidos biológicos.

Las propiedades viscoelásticas de los sólidos blandos no son fácilmente derivables de la propagación de ondas de ultrasonido. El comportamiento del ultrasonido en este tipo de materiales es similar al registrado en los fluidos. La teoría de la propagación de ondas en medios elásticos muestra, a través de las funciones de Green, que a bajas frecuencias la mayor parte de energía se propaga bajo la forma de una onda de cizalla. El estudio experimental de las características de esta vibración permite obtener valores cuantitativos de los parámetros viscoelásticos de interés.

La idea de este trabajo de tesis es explotar los resultados de la interferometría speckle ultrasonora. Cuando un medio en reposo es “iluminado” con pulsos ultrasonoros, el speckle acústico es siempre el mismo porque queda determinado por la posición relativa de los difusores. Este no es el caso cuando una onda de baja frecuencia se propaga en el medio. En una primera aproximación, para pequeños desplazamientos, el movimiento del speckle está linealmente relacionado con el movimiento del medio.

Para detectar el movimiento del speckle, se utiliza una técnica de correlación entre señales de speckle consecutivas. Esta modalidad de inspección permite detectar desplazamientos con una precisión bastante inferior a la longitud de onda ultrasonora. Un análisis primario de los errores en la precisión del método indica que la resolución en la estimación de los desplazamientos es del entorno de  $2 \mu\text{m}$ .

Los resultados, son alentadores e indican que es posible obtener valores cuantitativos en materiales viscoelásticos y compararlos con los modelos reológicos existentes, lo que permitiría un análisis crítico de estos modelos. Entre otros resultados logramos construir una imagen de elasticidad local relativa del material bajo estudio.

Esta técnica de caracterización elástica surge por sus posibilidades de ser aplicada en el diagnóstico médico de patologías tales como tumores, o determinar la elasticidad de paredes vasculares. Sin embargo encontramos también potenciales aplicaciones en la industria agroalimentaria, por ejemplo en la determinación de la ternura de la carne.

## INDICE

<b>Introducción.....</b>	<b>v</b>
<b>Capítulo I</b>	
<b>Estado actual de la elastografía.....</b>	<b>1</b>
Introducción.....	1
Motivación.....	3
Antecedentes.....	5
Descripción de la tesis.....	9
<b>Capítulo II</b>	
<b>Marco teórico.....</b>	<b>13</b>
Introduccion.....	13
Ecuación de ondas.....	14
Función de Green.....	16
Desplazamientos sobre el eje.....	20
Diagrama de directividad.....	27
Viscoelasticidad.....	30
Conclusión.....	36
<b>Capítulo III</b>	
<b>Interferometría speckle ultrasonora.....</b>	<b>39</b>
Introducción.....	39
Speckle y firma acústica.....	40
Seguimiento del speckle.....	43
Material: gel de agar-gelatina.....	45
Montaje experimental.....	47
Algoritmo de correlación.....	50
Velocidad de la onda de cizalla.....	58
Viscosidad.....	63
El pistón.....	65
Diagrama de directividad.....	67
Presición y límites del método.....	71
Conclusión.....	78
<b>Capítulo IV</b>	
<b>Algunos resultados y aplicaciones.....</b>	<b>82</b>
Introducción.....	82
B-Scan.....	82
Mapa elástico.....	85
Aplicación en tejidos biológicos.....	90
Consideraciones prácticas.....	94
Conclusión.....	98
<b>Conclusión.....</b>	<b>100</b>
<b>Apendice A</b>	
<b>Problema de Lamb, solución sobre el eje.....</b>	<b>103</b>

<b>Apéndice B</b>	
<b>Expresiones aproximadas de las funciones de</b>	
<b>Green Sobre el eje de la fuente.....</b>	<b>111</b>
<b>Apéndice C</b>	
<b>Problema de Lamb, solución fuera del eje.....</b>	<b>115</b>

## INTRODUCCION

---

Predecir y entender el comportamiento de los materiales cuando están sujetos a fuerzas mecánicas es la base para muchas prácticas en la ciencia de los materiales. En los inicios de estas investigaciones, la práctica común era aplicar tensiones al sistema hasta que este fallara. Luego se estudiaban los mecanismos de la ruptura para entender el comportamiento del material previo a la misma. A medida que avanzaron las investigaciones, fue posible estudiar materiales más complejos mediante técnicas no destructivas, por ejemplo difracción por rayos-X, técnicas ópticas, resonancia magnética o el comportamiento acústico entre otras. En particular el uso del ultrasonido se ha extendido a lo largo de los años como técnica no destructiva en el ensayo de materiales.

La incorporación del ultrasonido en medicina significó una gran herramienta de diagnóstico con ventajas sumamente importantes respecto a otras técnicas. Entre ellas se destacan su carácter no invasivo y que los bioefectos de la radiación ultrasonora son relativamente menores, comparados por ejemplo con las radiaciones ionizantes. A partir de entonces, los tejidos biológicos han adquirido importancia como material de estudio de la física. Las áreas de interés se centran en el estudio del scattering, espaciado medio de difusores, absorción de ondas ultrasonoras y últimamente han tomado relevancia las propiedades mecánicas de los tejidos como sólidos.

La propagación de ondas en los tejidos denominados blandos, a frecuencias ultrasonoras típicas usadas en diagnóstico (entre 2MHz y 10 MHz), es muy similar a la registrada en fluidos. Es decir el modo de propagación preferente es el de una onda longitudinal (o de compresión). Esta característica, debida al alto porcentaje de agua en la composición de los tejidos, no permite relevar más que una parte del comportamiento mecánico de los tejidos, a saber, su compresibilidad. Sin embargo, en muchos ámbitos, incluyendo a la medicina, es de interés estudiar además su comportamiento como sólido. En efecto, algunas patologías están asociadas a modificaciones en las propiedades elásticas del tejido, en particular al módulo elástico de corte o de cizalla. También en la agroindustria alimentaria el relevamiento de estos parámetros es de interés. Por ejemplo, la terneza de la carne vacuna es un factor relevante en el mercado de exportación.

Actualmente la manera de investigar sobre estos parámetros es extrayendo una muestra de tejido, darle una forma particular (por ejemplo de un cilindro fino) y someterla a deformaciones controladas, de manera de poder relevar la curva esfuerzo vs deformación. En los últimos tiempos, se ha propuesto la propagación de ondas de baja frecuencia como vehículo para obtener los parámetros relevantes. Esta técnica, conocida como sonoelastografía, tiene la ventaja de ser no destructiva y permite por lo tanto ser aplicada en vivo.

Este trabajo de tesis es una contribución a la sonoelastografía. Es el primer trabajo de este tipo que se realiza en nuestro laboratorio sobre el tema. Es un tema de investigación abierto que se está desarrollando en diferentes países. Si bien los resultados actuales en la materia son prometedores, quedan todavía algunos aspectos abiertos sobre los que habrá que seguir investigando en el futuro. Algunos de ellos son, los efectos de la difracción analizados a través de las funciones de Green, las condiciones de borde internas y externas de las muestras, un modelo reológico apropiado para los tejidos blandos y la precisión con que esta nueva modalidad logra obtener valores cuantitativos de la elasticidad. Todos estos temas son objeto de análisis en el desarrollo de esta monografía.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: En el capítulo I se repasan los antecedentes más importantes en la materia, se introducen las dificultades encontradas en su aplicación, se describe la motivación del estudio de esta tesis y las posibles aplicaciones, y se destacan los aportes realizados durante esta investigación. El capítulo II está dedicado al marco teórico en el que se basan muchas de las experiencias realizadas en este trabajo. En él se presentan los resultados de las funciones de Green para un sólido elástico, semi-infinito e isótropo. El tratamiento matemático se realiza en los apéndices A, B y C. También se introduce en este capítulo un modelo lineal que tiene en cuenta la viscosidad de los tejidos, el modelo de Voigt. En el capítulo III, se describe el principio básico de las experiencias los materiales utilizados y el montaje experimental. Los resultados obtenidos se comparan con los descritos en el capítulo II. En este capítulo se incluye también un análisis de los límites y la precisión del método. En el capítulo IV, se muestran algunas aplicaciones que hemos desarrollado en el laboratorio donde se destacan algunos ítems que todavía quedan por investigar para mejorar los resultados.

# CAPITULO I

## ESTADO ACTUAL DE LA ELASTOGRAFIA

---

### I.1 Introducción

El principio en que se basa la utilización del ultrasonido como herramienta de investigación, consiste en enviar pulsos dentro del medio y registrar los ecos generados por inhomogeneidades dentro del mismo. Éstas pueden ser defectos en las estructuras de los materiales, bordes debido a un cambio de medio, etc. A partir del análisis y tratamiento de estas señales ecográficas es posible estudiar algunas de las características mecánicas del material donde se propagan las ondas.

En medicina, la habilidad de una ecografía convencional para formar imágenes y poder diferenciar entre los diferentes tipos de tejidos depende principalmente de la impedancia acústica de las estructuras reflectoras, que a su vez depende de su compresibilidad  $k$  (o del módulo elástico de volumen  $K = 1/k$ ). En la figura 1 se muestra un cuadro tomado de la literatura [1], de los valores de  $K$  para tejido blando, hueso y líquidos. Allí se observa que el rango de variación del módulo de volumen es relativamente chico para el tejido blando. Este escaso contraste entre tejidos blandos se debe a que su módulo elástico de compresión es mucho mayor al módulo elástico de cizalla [2], y por lo tanto la compresibilidad del tejido está dominada por el primero de ellos. Como el agua representa un gran porcentaje en los tejidos, su módulo de compresión es similar al del agua. En estas circunstancias la ecuación de ondas para los tejidos se formula normalmente en términos de propiedades de fluidos.

La impedancia acústica se define como la razón entre la presión acústica en el medio y la velocidad de la partícula asociada en determinada posición e instante de tiempo:

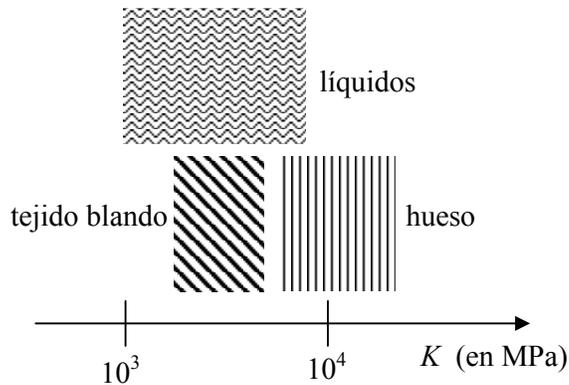
$$Z = \frac{\text{presión acústica}}{\text{velocidad partículas}} = \frac{P}{u} \quad (1)$$

Las unidades de  $Z$  son  $\text{Pa sm}^{-1}$ . Para una onda plana en un fluido la presión acústica y la velocidad de las partículas cumplen una relación simple y la ecuación (1) se expresa:

$$Z = \rho c$$

donde  $\rho$  es la densidad de equilibrio del medio y  $c$  es la velocidad de la onda acústica. Si bien esta no es una expresión general para la impedancia, al producto  $\rho c$  se le conoce como impedancia característica del medio. Es de destacar que cuando se trabaja

con ondas de compresión a frecuencias ultrasonoras esta aproximación es en general alcanzable. Por ejemplo a una frecuencia típica de 5 Mhz la longitud de onda en tejidos blandos (velocidad del ultrasonido  $\approx 1540$  m/s) es de 0,3 mm aproximadamente y por lo tanto para distancias del orden del cm se cumple la condición de campo lejano y la aproximación de una onda plana.



**FIGURA 1:** Datos tomados de la literatura sobre los órdenes de valores del módulo elástico de volumen para tejido blando, hueso y líquidos.

La amplitud de la onda reflejada en una interfase depende de la impedancia de cada uno de los medios. La velocidad del ultrasonido en los diferentes tipos de tejido biológico varía entre 3500 m/s para tejido óseo y 1450 m/s para el tejido adiposo (Ver tabla 1). Para los tejidos denominados blandos, la velocidad es muy similar entre sí, debido al escaso rango de variación del módulo de volumen, siendo en promedio de 1540 m/s (muy similar a la registrada en agua:  $\approx 1500$  m/s). Por lo tanto, la diferencia de la impedancia característica se debe básicamente a la diferencia en la densidad entre ellos. En este sentido podríamos decir que la ecografía es un “mapa de densidades” de los tejidos. Es de esperar entonces que existan situaciones en las que el uso del ultrasonido no revele la existencia de un cambio de medio o que sea difícil distinguir con claridad una interfase entre dos regiones cuando éstas son de densidad similar.

MATERIAL	VELOCIDAD (m/s)
Aire	330
Sangre	1575
Hueso	3500
Grasa	1450
Riñón	1560
Hígado	1550
Músculo	1580
Tejido blando (prom)	1540

**TABLA 1:** Velocidad del ultrasonido en algunos tejidos biológicos. Nótese el alto valor en hueso. El aire se incluye en la tabla por razones comparativas.

## I.2 Motivación

Un parámetro clínico importante en medicina es la “firmeza” de los tejidos biológicos. Es bien conocido que un cambio en la elasticidad de tejidos blandos, está relacionado con alguna patología. Por ejemplo, los tumores en el seno o en la próstata, suelen presentarse como regiones más duras que el tejido circundante. También la cirrosis se traduce en una dureza anormal del hígado. Sin embargo no existe una relación simple entre la velocidad de las ondas acústicas en tejidos y los parámetros mecánicos que determinan su firmeza, ya que no hay una relación directa entre la densidad y la elasticidad. Así algunos estudios han revelado que alrededor de un 20% de los exámenes de cáncer de próstata por ultrasonido brindan falsos negativos [3]. La técnica de diagnóstico de rutina en estos casos es la palpación. De hecho, en nuestro país, se recomienda a las mujeres hacerse un auto examen a través de la palpación, para el diagnóstico temprano del cáncer de mamas.

La propagación del ultrasonido pone de manifiesto en su dinámica la compresibilidad del medio, un parámetro elástico que no es perceptible por nuestros sentidos. En efecto es difícil distinguir al tacto la plata del aluminio, pero el ultrasonido en estos medios se propaga a velocidades bien diferentes (3650 m/s y 6420 m/s respectivamente). Por el contrario, el tejido muscular y el agua son perfectamente distinguibles al tacto, pero la velocidad del ultrasonido es prácticamente idéntica en ambos medios (1540 m/s y 1500 m/s respectivamente). En realidad, la palpación permite evaluar el módulo de Young:  $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$  del material [4]. En esta expresión

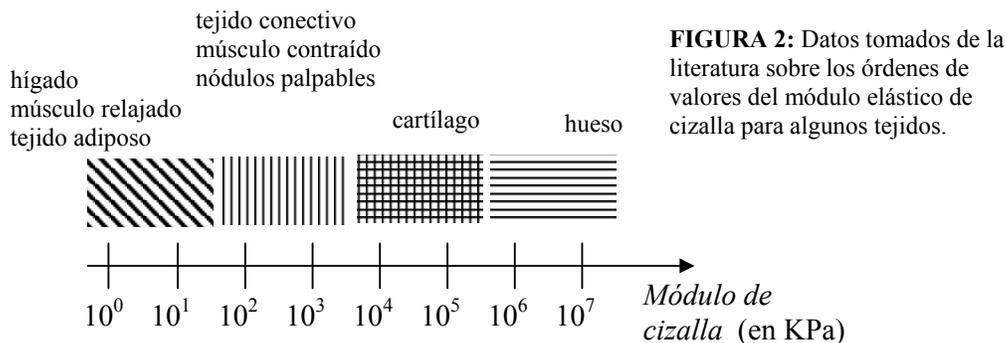
$\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros elásticos de Lamé que representan la elasticidad de compresión y la elasticidad de cizalla respectivamente. En el caso extremo en que

$\lambda \gg \mu$  como sucede en algunos medios biológicos, la expresión para el módulo de Young se puede aproximar por:

$$E \cong 3\mu \quad (2)$$

Es común la denominación de sólidos blandos a los materiales que cumplen esta aproximación. Por lo tanto la sensación de firmeza en sólidos blandos está controlada por el módulo elástico de cizalla. Este parámetro es prácticamente nulo en el agua pero no en el tejido muscular, allí radica la diferencia al tacto.

El uso de la palpación en medicina está restringido a aquellas zonas del cuerpo que se encuentran próximas a una superficie accesible y a tamaños de las anomalías que puedan ser detectadas a través del tacto. Se desprende entonces, la necesidad de algún sistema que brinde una medida cuantitativa de la elasticidad de los tejidos biológicos, un sistema de “palpación remota”. Si bien existen aparatos reológicos capaces de medir la elasticidad, todos requieren la extracción de una muestra de tejido, lo que las vuelve técnicas destructivas. El rango de variación del módulo de cizalla es bastante amplio en los tejidos. En la figura 2 se muestran algunos valores tomados de la referencia [1]. De manera que algún sistema de construcción de imágenes basados en este módulo permitiría distinguir con mayor claridad algunas patologías que la ecografía convencional.



**FIGURA 2:** Datos tomados de la literatura sobre los órdenes de valores del módulo elástico de cizalla para algunos tejidos.

La propagación del ultrasonido en los tejidos pone de manifiesto su comportamiento a altas frecuencias. La palpación es en cierto sentido una evaluación del material a bajas frecuencias. A finales de la década de los 80 surgieron los primeros trabajos tendientes a cuantificar la elasticidad de tejidos biológicos por métodos no destructivos. La idea básica es aplicar una deformación de baja frecuencia al material sobre una superficie libre y estudiar los desplazamientos internos por técnicas

ultrasonoras o de otro tipo. En algunos casos dicha deformación es estática, es decir, se comprime el material y se trata de cuantificar la deformación sufrida por éste. Otra alternativa consiste en hacer propagar una vibración de baja frecuencia ( $\approx 10 - 1000$  Hz) dentro del medio y a partir de las características de esta vibración estimar sus propiedades elásticas. La primer opción se conoce con el nombre de elastografía estática o simplemente elastografía, mientras que la segunda recibe el nombre de sonoelastografía o sonoelasticidad. Estos trabajos se siguen desarrollando al día de hoy en varios laboratorios de investigación en diversos países.

Si bien la motivación inicial de las técnicas elastográficas fueron sus aplicaciones médicas, éstas se muestran también útiles en la industria agro-alimentaria. En efecto, una característica importante de la carne vacuna es su terneza. Las técnicas mecánicas utilizadas hoy en día para su determinación (Instron, Warner-Blatzer), no permiten su uso en planta industrial ya que requieren muestras cortadas especialmente. La técnica propuesta podría en un futuro desarrollarse de manera que permita evaluar la terneza en planta.

### **I.3 Antecedentes**

La elastografía estática desarrollada principalmente por J. Ophir, es la primer técnica ultrasonora que ha permitido obtener imágenes de la elasticidad de los medios biológicos [5]. Cuando un tejido se somete a una compresión cuasi-estática, las deformaciones internas quedan definidas por las condiciones de frontera y por las propiedades intrínsecas del tejido. Para cuantificar las propiedades elásticas locales de un volumen del interior del medio, es necesario conocer su ecuación constitutiva. Si se supone que el material es elástico y homogéneo, el esfuerzo y la deformación están relacionados por la ley de Hooke:

$$\tau_{11} = E\varepsilon_{11}$$

$E$  es el módulo de Young,  $\tau_{11}$  es el esfuerzo (stress) normal en la dirección 1 y  $\varepsilon_{11}$  es la deformación (strain) en la misma dirección. Se puede entonces evaluar el módulo de Young a través del cociente entre el esfuerzo y la deformación. Esta tarea requiere el conocimiento de estas dos cantidades a la vez. En el caso de un compresor circular aplicado normalmente sobre la superficie plana de un medio semi-infinito, existe una expresión analítica para el esfuerzo en función de la profundidad y del radio del pistón obtenida por Saada [6], cuya expresión a primer orden es:

$$\tau(z) = \tau(0) \left| \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^{3/2}} - 1 \right| \quad (3)$$

donde  $z$  es la profundidad medida desde la superficie libre,  $\tau(z)$  es el esfuerzo normal al eje  $z$ ,  $\tau(0)$  es el esfuerzo aplicado sobre la superficie y  $a$  es el radio del compresor. Esta expresión para el esfuerzo es fuertemente dependiente de las condiciones de borde, condiciones que son difíciles de lograr en muestras de tejido biológico donde existe la presencia de otros órganos, huesos, etc. Esta complejidad en las condiciones de frontera constituye un obstáculo en el cálculo del esfuerzo. Para evitar este problema, muchos autores han elegido utilizar un compresor de gran superficie, comparado con las dimensiones de la muestra. Si el radio  $a$  del compresor cumple  $a \gg 1$ , la expresión (3) se puede aproximar por un esfuerzo constante  $\tau(0)$ , independiente de la profundidad  $z$ .

El mapa de deformaciones puede ser estimado por ultrasonido. Los tejidos biológicos contienen en su interior elementos difusores del orden o menores que la longitud de onda ultrasonora, distribuidos en forma más o menos aleatoria. Algunos ejemplos son:

Fibras musculares,  $\phi \approx 6 \text{ mm}$

Conjuntos de células,  $\phi \approx 100 \text{ }\mu\text{m}$

Agregados de grasa,  $\phi \approx 10 \text{ }\mu\text{m}$

Filamentos de actina,  $\phi \approx 1.5 \text{ }\mu\text{m}$

donde  $\phi$  representa la sección eficaz del difusor. Al ser alcanzados por la onda ultrasonora, estos difusores generan una onda retrodifundida que puede ser captada por el receptor. La señal recibida se conoce como speckle acústico, debido al fenómeno análogo encontrado en óptica. Cuando el material se deforma, el speckle acústico se modifica en relación a la deformación. A partir de esta información es posible reconstruir el movimiento de los difusores basándose en alguna técnica de correlación entre las señales ecográficas pre y post compresión. La técnica se conoce como “*speckle tracking*” o seguimiento de speckle. Esta idea se desarrollará más adelante en la monografía.

La información conjunta del mapa de esfuerzo junto con el de la deformación local del medio puede ser utilizada para formar una imagen de las propiedades elásticas locales denominada elastograma. Estas experiencias llevadas a cabo *in vitro* y *in vivo*, mostraron la capacidad de formar imágenes de estructuras elásticas que no figuraban en una ecografía convencional [7].

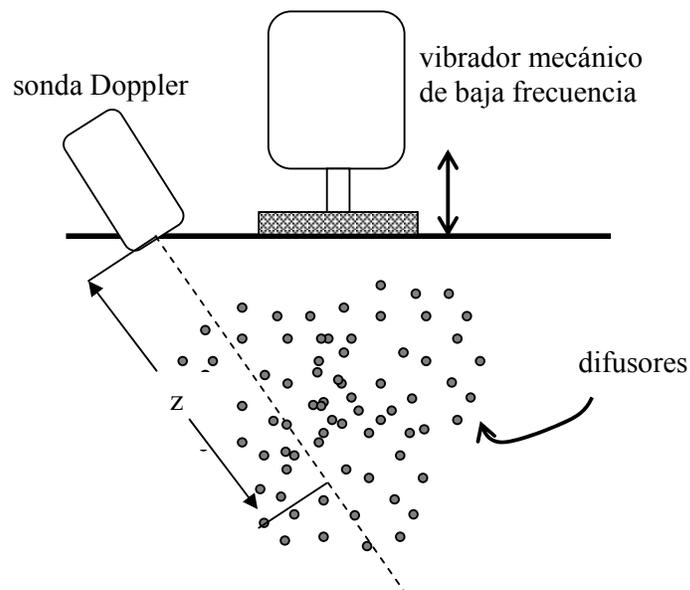
En elastografía es deseable que las deformaciones provocadas al tejido sean las mayores posibles ya que esto brinda una alta relación señal/ruido en las imágenes elastográficas. Sin embargo, grandes desplazamientos de los difusores resultan en una decorrelación importante de las señales ecográficas recibidas, falseando entonces la estimación de los desplazamientos [8]. Esto representa un compromiso entre la relación señal/ruido y la correcta estimación de los desplazamientos. El grupo de Ophir et al, ha trabajado intensamente en este aspecto [9], [10], [11]. Si bien los métodos propuestos mejoran la relación señal/ruido en las imágenes obtenidas, también aumentan el tiempo de cálculo y su aplicabilidad *in vivo* es menos efectiva.

Los elastogramas obtenidos por elastografía contienen en general artefactos debido principalmente a que las condiciones de borde en general no son simples. Otro aspecto que es fuente de errores es el cálculo de la deformación. En efecto, las técnicas de detección de movimiento por seguimiento del speckle acústico, permiten calcular el desplazamiento interior del medio luego de la compresión. Como la deformación se obtiene derivando los desplazamientos, el ruido de alta frecuencia en la adquisición de los desplazamientos (pequeñas fluctuaciones en su estimación), se ve amplificado. Los elastogramas construidos de esta manera son altamente ruidosos. Una descripción detallada de los artefactos encontrados en elastografía se encuentra en [12].

La sonoelastografía, desarrollada por Krouskop[13], Parker [14], Greenleaf [15], Fink [16], entre otros, estudia las vibraciones internas de baja frecuencia de los sólidos blandos generadas por una excitación sinusoidal. Se mostrará más adelante que para vibraciones de baja frecuencia en sólidos blandos la mayor parte de la energía se propaga como una onda de cizalla. Como la velocidad de la onda de cizalla está relacionada en forma simple con el módulo elástico correspondiente, se puede obtener una estimación del módulo de Young midiendo directamente las vibraciones internas. La forma de registrar las vibraciones varía según los autores. Una forma es medirlos a partir de las distorsiones frecuenciales de las señales ecográficas por efecto Doppler.

Los movimientos provocados por la vibración se traducen en la modificación del contenido espectral de la señal ecográfica.

Si una onda de baja frecuencia se propaga por el medio, los difusores internos siguen el movimiento del propio medio y vibran con la misma frecuencia. Cuando la onda ultrasonora alcanza a los difusores en movimiento, la onda reflejada está sujeta a una modulación debida al efecto Doppler resultando en un corrimiento de la frecuencia. Inicialmente la sonoelastografía basada en efecto Doppler, utilizaba instrumentos de onda continua (CW), registrando directamente la velocidad de los desplazamientos, [14]. Con el objetivo de tomar en cuenta los efectos viscoelásticos, Yamakoshi et al [17], utilizaron una técnica de Doppler pulsado (PW) para detectar los movimientos internos. Esta técnica permite computar la amplitud y la fase de la vibración. Es posible entonces obtener la velocidad de propagación de la vibración de baja frecuencia en el tejido y su atenuación. A partir de esta información y la hipótesis de un modelo viscoelástico lineal conocido como modelo de Voigt, se obtienen el módulo elástico y el módulo viscoso del tejido. Esta técnica fue aplicada por los autores *in vivo* mostrando que es posible obtener información cuantitativa de la elasticidad de los órganos, excitando modos propios de vibración a través de fuerzas externas [18]. La figura 3 muestra el montaje utilizado por los autores.



**FIGURA 3:** Esquema de la configuración experimental utilizada en la sonoelastografía Doppler.

Otros autores como Greenleaf [15], utilizan la resonancia magnética nuclear (MRI) para calcular los desplazamientos. Este procedimiento tiene ventajas comparativas respecto a las ya mencionadas. La precisión en la detección de los desplazamientos es inferior a los 200 nm (comparado con las técnicas ultrasonoras cuya precisión es del orden de 1  $\mu$ m), pudiéndose entonces construir un mapa elástico a escalas que permiten claramente distinguir la frontera entre medios con propiedades elásticas distintas. Estas técnicas recientemente han sido aplicadas *in vivo* [19], mostrándose capaces de formar imágenes en escala de grises de tumores de seno y de materia blanca en el cerebro. Una desventaja de las técnicas de elastografía por resonancia magnética es que resulta onerosa y requiere una gran infraestructura para su funcionamiento debido a los altos campos magnéticos utilizados.

Todas las alternativas hasta ahora mencionadas en sonoelastografía, utilizan una excitación monocromática para generar vibraciones internas. Las reflexiones en las fronteras del medio hacen que se generen ondas estacionarias dentro del mismo. Sus características son muy sensibles a las condiciones de frontera, y si éstas no son simples, puede resultar complicado relacionar las propiedades de la vibración de baja frecuencia con la elasticidad del medio, pudiéndose incluso obtener resultados erróneos [4]. Para evitar estos efectos no deseados, Fink y su grupo propusieron utilizar una excitación impulsional a través de un pistón para generar los movimientos internos [4], [20]. Esta nueva modalidad conocida como sonoelastografía impulsional (transient sonoelastography), sugiere estudiar las vibraciones antes de que éstas alcancen los bordes y las reflexiones “contaminen” la onda viajera, de manera que los resultados sean independientes de la forma geométrica de la frontera. Los resultados *in vitro* llevados a cabo en fantasmas de simulación se mostraron capaces de obtener un mapa elástico de un medio inhomogéneo compuesto de dos regiones con diferente elasticidad.

#### **I.4 Descripción de la tesis**

Este trabajo de tesis sigue la línea de la sonoelastografía impulsional. Utilizamos una excitación impulsional para generar vibraciones internas en la muestra. El estudio experimental se centra en las propiedades de la onda de cizalla así generada.

En el siguiente capítulo se desarrolla la teoría de propagación de ondas elásticas en un sólido elástico. Se presentan las funciones de Green y se marcan varios aspectos relevantes de sus particularidades para un sólido blando, que son bien diferentes a las de sólidos convencionales (metales, granito, etc.). Por esta razón los resultados existentes

en la literatura y aceptados en la utilización del ultrasonido para el ensayo no destructivos de materiales ya no son válidos. En particular el diagrama de directividad obtenido por Miller y Pursey [21], no se ajusta a las experiencias. El montaje experimental fue especialmente diseñado entre otros fines para poder relevar experimentalmente el diagrama de directividad de la fuente de desplazamientos.

En este trabajo se trata de incluir además el comportamiento viscoso de los tejidos. Este punto no es de rutina en todas las técnicas elastográficas. Creemos que es importante su análisis para la validez final de las posibles aplicaciones del método. Su incorporación se hace en base al modelo viscoelástico lineal de Voigt que se introduce también en el capítulo II donde se mencionan además las experiencias realizadas por otros autores confirmando la validez del modelo en primera instancia.

En el capítulo III se describe el principio básico en que se basan las experiencias realizadas, la reconstrucción de los desplazamientos internos de la muestra a través del seguimiento del speckle acústico. En ese capítulo se muestra también cómo obtener valores cuantitativos de los parámetros viscoelásticos de la muestra, y se hace un estudio detallado de la influencia de los parámetros experimentales sobre la precisión de los resultados finales arrojados por el método. Analizaremos los factores que intervienen en dicha precisión y la configuración experimental que optimiza estos parámetros. En particular estudiamos la influencia del tamaño del pistón utilizado sobre la atenuación de la onda de cizalla. En este sentido mostramos como aporte que la validez de las expresiones obtenidas para una fuente puntual se registran a partir de cierta distancia al pistón que tratamos de establecer aquí en forma aproximada.

Una característica importante que deben tener los métodos elastográficos es poder relevar la elasticidad del medio a nivel local, de manera de poder distinguir entre regiones diferentes. En el capítulo IV se muestra que el método propuesto aquí se revela capaz de hacerlo, creando una imagen de “lentitud” que es la inversa de la velocidad de la onda de cizalla, directamente relacionada a las propiedades elásticas del material. Las imágenes obtenidas de esta manera son susceptibles de presentar artefactos debido a la precisión del método.

## REFERENCIAS

- [1] A. Sarvazyan, O. Rodenko, S. Swanson, J. Flowkers, Y. Emilianov, “*Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics*” *Ultras. Med. Biol.* **24** (1998).
- [2] Y. Fung, “*Biomechanics: mechanical properties of living tissues*”, Springer-Verlag, New York Inc. (1993).
- [3] S. Melchior, M. Brawer “*Role of transrectal ultrasound and prostate biopsy*” *J. Clinical Ultrasound* **24** (1996).
- [4] S. Catheline, “*Interferometrie-speckle ultrasonore: Application a la mesure d’elasticite*”, These de doctoract de l’universite Paris VII, (1998).
- [5] J. Ophir, S. Alam, B. Garra, F. Kallel “*Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues*” *Ultrasonic Imaging*, **13** (1991).
- [6] S. Saada “*Elasticity, theory and applications*” New York, Pergamont Press (1974).
- [7] I. Céspedes, J. Ophir, “*Elasticity imaging using ultrasound with application to muscle and breast in vivo*”, *Ultras. Imaging* **15** (1993).
- [8] W. Walker, G. Thaney, “*A fundamental limit on the accuracy of speckle signal alignment*”, *IEEE Trans UFFC* **41** (1994).
- [9] I. Céspedes, J. Ophir, “*Reduction in image noise in elastography*”, *Ultrasonic Imaging* **15** (1993).
- [10] H. Ponnekanti, J. Ophir, Y. Huang, I. Céspedes, “*Fundamental mechanical limitations on the visualization of elasticity contrast in elastography*”, *Ultrasound Med. Biol.* **21** Vol 4 (1995).
- [11] S. Alam, J. Ophir, “*Reduction of signal decorrelation from mechanical compression of tissues by temporal stretching: applications to elastography*”, *Ultrasound Med. Biol.* **23** Vol 1 (1997).
- [12] J. Ophir, S. Alam, B. Garra, F. Kallel, E. Konofagou, T. Kruskop, T Varghese, “*Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues*”, *Proc. Instn. Mech. Engrs.* **213** part H (1999).
- [13] T. Krouskop, D. Dougherty, S. Levinson, “*A pulsed doppler ultrasonic system for making noninvasive measurements of the mechanical properties of soft tissues*”, *J. Rehabil. Res. and Dev* **24** (1987).
- [14] K. Parker, R. Lerner “*Sonoelasticity: medical elasticity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated target*” *Acoustical Imaging*, **16** (1988).

- [15] R. Muthupillari, D. Lomas, P. Rossmann, A. Manduca, J. Greenleaf “ *Magnetic resonance elastography by direct visualization of a propagating acoustic strain wave*” Science, **269** (1995).
- [16] L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, M. Fink, “*Shear elasticity probe for soft tissues with 1D transient elastography*”, IEEE Trans. UFFC, **49**, (2002)
- [17] Y. Yamakoshi, J. Sato “*Ultrasonic imaging of internal vibration of soft tissue under forced vibration*” IEEE Trans. UFFC **37**, (1990)
- [18] S. Levinson, M. Shinaguawa, T. Sato, “*Sonoelastic determination of human skeletal muscle elasticity*”, J. Biomech. **28**, (1995).
- [19] A. Manduca, T. Oliphant, M. Dresner, J. Mahowald, S. Kruse, E. Amromin, J. Felmlee, J. Greenleaf, “*Magnetic resonance elastography: noninvasive mapping of tissue elasticity*” Medical Image Analysis **5** (2001).
- [20] S. Catheline, F. Wu, M.Fink, “*A solution to diffraction bias in sonoelasticity: the acoustic impulse technique*”, J. Acoust. Soc. Am **105**, (1999).
- [21] G. Miller, H. Pursey, “The field and radiation impedance of mechanical radiators on the surface of a semi-infinite isotropic solid”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A223**, (1954).

## CAPITULO II

### MARCO TEORICO

---

#### II.1 Introducción

La descripción de una ecuación constitutiva (mecánica) para los tejidos biológicos no es materia sencilla. Su comportamiento depende de muchos factores. Mientras viven, están activos metabólicamente y exhiben propiedades mecánicas que varían rápidamente después de muertos [1]. Además estas propiedades mecánicas pueden ser dependientes de la deformación, del ritmo de deformación y de la edad del tejido. Las ecuaciones para su descripción que se encuentran en la literatura en muchos casos son empíricas y pueden no adaptarse bien a una muestra particular. Para simplificar la caracterización de los tejidos, se someten a esfuerzos de una duración lo suficientemente breve que permita ignorar en primera instancia su naturaleza viscosa y el tejido se puede asumir como elástico. Esto significa que el estado del tejido sólo depende del esfuerzo actual, no hay efectos de la historia previa del tejido. Con esta idealización de un tejido, la tarea de describir sus características mecánicas se reduce a encontrar el tensor de 21 coeficientes elásticos. Como esto resulta aún en un proceso extremadamente complejo, se deben hacer hipótesis adicionales.

Los tejidos presentan una organización jerárquica de su estructura. Las células animales (típicamente de entre 16 y 22  $\mu m$  de diámetro) unidas a través de una matriz intercelular forman un tejido. El tejido es la base de un órgano, que puede estar constituido por un solo tejido o por varios de ellos. De manera que dependiendo de la escala en la que estemos interesados, su descripción será más o menos compleja. Si la escala es apropiada, podemos considerar que las pequeñas estructuras de los tejidos están distribuidas aleatoria y uniformemente. En estas circunstancias, puede considerarse al tejido como un material homogéneo. En algunos casos puede considerarse además que las estructuras del tejido no definen ninguna dirección preferente de manera que se pueda considerar isótropo. Este es el caso por ejemplo en el hígado. En otros casos, típicamente en el tejido muscular, las estructuras celulares definen claramente direcciones preferentes de orientación. La hipótesis de isotropía deja de valer aunque se puede conservar la de homogeneidad. En estos casos se considera al tejido como un material con isotropía transversal, es decir, en el plano

perpendicular a la orientación preferente. Las constantes elásticas a determinar en este caso son 5.

Como nuestro sistema de medición se basa en la propagación de ondas de baja frecuencia en el medio, comenzaremos este capítulo con un estudio de la propagación de ondas en un sólido elástico e isotrópico. Se analiza en forma cuidadosa la solución a una excitación impulsional y puntual en la superficie libre de un sólido semi-infinito (funciones de Green). Estos resultados serán objeto de comparación luego con resultados experimentales a través de la técnica de interferometría speckle, descrita más adelante en el capítulo III.

Una característica importante de los tejidos biológicos es su comportamiento viscoelástico. Esta característica es conocida en el campo de aplicaciones médicas del ultrasonido. Los efectos viscosos son en parte responsables por el aumento de temperatura registrada en tejidos al propagarse una onda ultrasonora [2]. Un modelo apropiado cuando las deformaciones del medio son pequeñas, es el de un medio viscoelástico lineal [3]. En la segunda parte de este capítulo se describe el modelo viscoelástico de Voigt y se muestra cómo obtener los parámetros relevantes a partir de datos que se pueden obtener experimentalmente.

## II.2 Ecuación de ondas

Nos interesa en esta sección deducir la ecuación de ondas en un sólido elástico e isotrópico. Un sólido elástico es aquel que cumple una relación lineal entre la fuerza que actúa sobre el material y la consecuente deformación sufrida por éste. Su ecuación constitutiva está dada por la ley de Hooke:

$$T_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (1)$$

donde  $T_{ij}$  es el tensor de esfuerzos,  $e_{kl}$  es el tensor de deformaciones y  $C_{ijkl}$  es el tensor elástico o de Cristoffel que establece la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación. El número de coeficientes independientes de este tensor, se puede ver reducido por consideraciones de simetría del material. Si el material es isotrópico, el tensor elástico debe reflejar esta simetría y la cantidad de términos independientes se reducen a tan solo dos, conocidos como coeficientes de Lamé. La expresión para  $C_{ijkl}$  en este caso viene dada por:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los coeficientes de Lamé y  $\delta_{ij}$  es la habitual delta de Kroenecker, vale 1 si  $i = j$  y 0 en otro caso. Para deducir la ecuación de ondas, haremos uso de la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i \quad (3)$$

En esta expresión  $\rho$  es la densidad del medio y  $f_i$  la componente  $i$  de la fuerza por unidad de volumen. El término  $f_i$  se puede expresar en función del tensor de esfuerzos como:

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

donde está implícita la suma sobre el índice  $j$ . Al escribir la expresión (4) estamos asumiendo que no hay fuerzas de volumen presentes.

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2) y (4) en (3) obtenemos la ecuación de ondas para un sólido elástico e isotrópico:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Cuya expresión vectorial es:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5)$$

Un resultado útil para estudiar la propagación de ondas en estos casos es el teorema de Lamé [4]:

Si las condiciones iniciales para  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  se escriben en términos de los potenciales de Hemholtz<sup>1</sup> vía:  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r},0) = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B}$ ;  $\mathbf{u}(\mathbf{r},0) = \nabla C + \nabla \times \mathbf{D}$  con  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ . Entonces existen los potenciales  $\phi(\mathbf{r},t)$  y  $\Psi(\mathbf{r},t)$  para  $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$  que cumplen:

- i)  $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi$
- ii)  $\nabla \cdot \Psi = 0$

---

<sup>1</sup> Los potenciales de Hemholtz para un campo vectorial  $\mathbf{Z}(\mathbf{r})$  son campos  $X(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{Y}(\mathbf{r})$  tal que  $\mathbf{Z} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}$ , con  $\nabla \cdot \mathbf{Y} = 0$ . Para construir  $X(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{Y}(\mathbf{r})$  dado  $\mathbf{Z}(\mathbf{r})$ , es suficiente con resolver la ecuación vectorial de Poisson:  $\nabla^2 \mathbf{W} = \mathbf{Z}$ , ya que entonces la identidad  $\nabla^2 \mathbf{W} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W})$  nos dice que podemos elegir los potenciales  $X = \nabla \cdot \mathbf{W}$  e  $\mathbf{Y} = -\nabla \times \mathbf{W}$ .

$$\text{iii) } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_p^2 \nabla^2 \phi \quad \text{con} \quad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\text{iv) } \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \Psi \quad \text{con} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

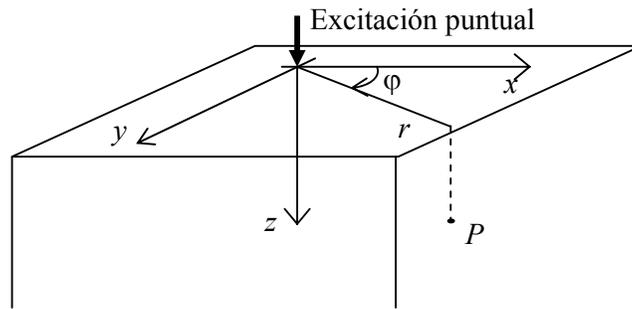
De los puntos iii y iv del teorema de Lamé, se deduce que  $\mathbf{u}_p = \nabla \phi$  cumple con la ecuación de ondas con velocidad  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ , y que  $\mathbf{u}_s = \nabla \times \Psi$  también cumple con la ecuación de ondas con velocidad  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ . Dado que  $\lambda > 0$  se verifica que  $c_s < c_p/\sqrt{2}$ . Por esta razón, a los desplazamientos asociados a los potenciales  $\phi$  y  $\Psi$  se los denomina onda P (onda primaria) y onda S (onda secundaria) respectivamente. Vemos entonces que la solución a la ecuación de ondas se compone en general de la suma de dos términos, uno irrotacional (onda P) y otro de divergencia nula o solenoidal (onda S). El primero se propaga modificando localmente el volumen del medio, mientras que el segundo se propaga deformando al medio sin modificar su volumen.

Estudiaremos ahora la solución a la ecuación (5) cuando el origen de los movimientos es provocado por una excitación puntual de duración infinitamente breve, es decir un impulso del tipo Dirac. Esta solución se conoce como función de Green.

### II.3 Función de Green

Las funciones de Green permiten evaluar el campo de desplazamientos en función del tiempo y el espacio generados por una fuerza puntual e impulsional. Esta función permite luego conocer la respuesta del medio cuando la excitación de entrada es una función arbitraria del tiempo, a través del producto de convolución entre ellas. Esta afirmación es válida si el medio es considerado lineal e invariante en el tiempo como en nuestro caso.

Nuestro interés se centra en la solución de la ecuación (5) cuando la excitación es aplicada sobre la superficie libre de un semi-espacio sólido, elástico e isotrópico. Este problema fue estudiado por Horace Lamb en 1904 [5] por su interés en sismología. A partir de entonces se conoce como problema de Lamb. La geometría del problema es la que se muestra en la figura 1. La fuerza puntual de amplitud unidad se aplica sobre el origen de coordenadas, mientras que el semi-espacio elástico ocupa la región  $z > 0$ .



**FIGURA 1:** Descripción de las coordenadas utilizadas para describir el problema de Lamb. Se muestran la ubicación de un punto  $P$  en términos de las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  y de las coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ .

Dada la simetría cilíndrica del problema, es conveniente expresar los resultados en coordenadas cilíndricas. En el apéndice A se muestra la solución a este problema, para puntos sobre el eje de la fuente (eje  $z$  en la figura), en el apéndice B se obtiene una solución aproximada, válida para sólidos blandos y finalmente en el apéndice C, se muestran los resultados para puntos fuera del eje. Para resolver el problema, se aplica la transformada de Laplace en el tiempo y la doble transformada de Fourier en el espacio con el objetivo de manejar las ecuaciones de ondas y las condiciones de borde en términos algebraicos. Luego se invierten las transformaciones para obtener la dependencia espacial y temporal de la solución, siendo la más laboriosa la inversión de la transformada de Laplace que se hace a través de la técnica de Cagniard-de Hoop [4].

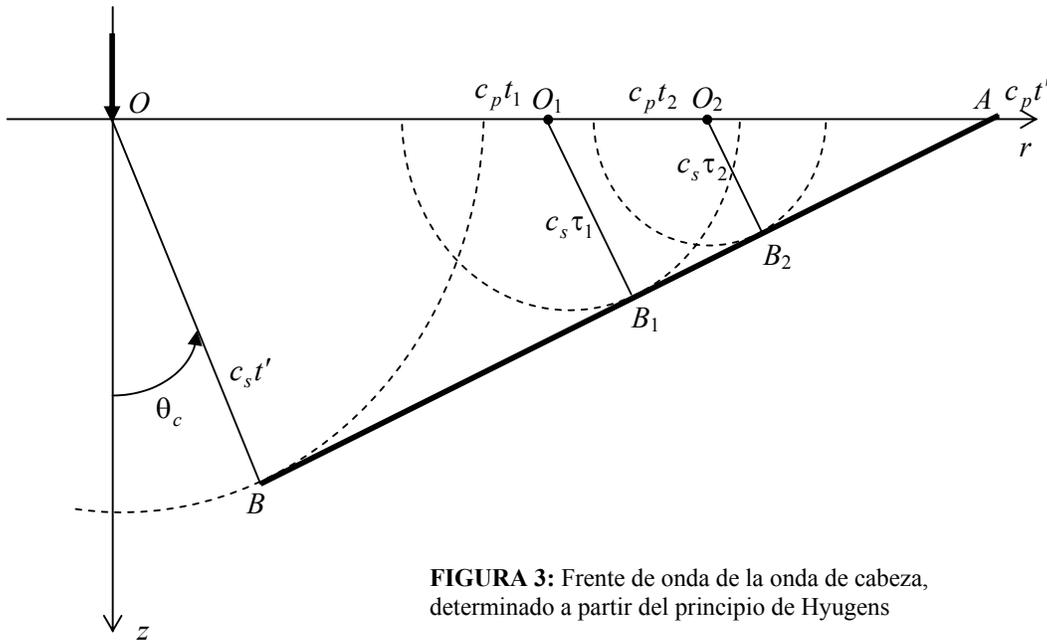
Se deduce de esta solución que como resultado de la excitación se generan en el medio cuatro ondas<sup>2</sup> como se muestra en la figura 2. Allí se muestran los cuatro frentes de onda. Los dos frentes esféricos corresponden a una onda de compresión (onda  $P$ ) y una onda de cizalla (onda  $S$ ) marcados en la figura como  $t_p$  y  $t_s$  respectivamente.

Además de las ondas de compresión y de cizalla se produce una onda superficial (onda de Rayleigh) cuya amplitud decae exponencialmente dentro del medio. La velocidad de propagación de la onda de Rayleigh  $c_R$ , depende del módulo de Poisson del material y queda bien aproximada por la fórmula de Viktorov [7] :

<sup>2</sup> En realidad la cantidad de ondas generadas depende del módulo de Poisson  $\nu$  del material, definido como:  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ . Si  $\nu < 0.263$  aparecen también otro tipo de ondas superficiales conocidas como “leaky surface wave” [8]. Sin embargo como los sólidos blandos cumplen  $\nu \approx 1/2$ , no tomaremos estos términos en cuenta.



un tiempo  $t_i = r_i / c_p$ , con  $i = 1,2$  y actúan como emisores secundarios de ondas P y S. Para un instante de tiempo posterior  $t' = t_1 + \tau_1 = t_2 + \tau_2$ , el frente de la onda S proveniente de  $O_i$  es un semicírculo de radio  $O_i B_i = c_s \tau_i$ . Consideremos el triángulo rectángulo  $OBA$  con  $OB/OA = c_s t' / c_p t'$ . Se puede mostrar que los triángulos  $O_1 B_1 A$  y  $O_2 B_2 A$  son semejantes al  $OBA$ . Por lo tanto la recta  $BA$  es tangente a los semicírculos con centro  $O_i$ , y en consecuencia determina el frente de onda. El ángulo  $\theta_c = \sin^{-1}(c_s / c_p)$  se denomina ángulo crítico.



**FIGURA 3:** Frente de onda de la onda de cabeza, determinado a partir del principio de Huygens

El resultado final para el campo de desplazamientos en función del tiempo y el espacio queda expresado en términos de integrales finitas que no se pueden evaluar analíticamente en el caso general. La descripción del comportamiento de cada término sólo puede llevarse a cabo a través de una integración numérica. Sin embargo, en el eje de simetría (eje  $z$  en la figura 1), es posible obtener una expresión analítica para los desplazamientos, que llamamos  $G_z^0$  en el apéndice A. En el estudio experimental de esta tesis, estudiaremos principalmente los desplazamientos ocurridos sobre el eje de la fuente de excitación. Por esta razón es importante tener una descripción con más detalle para este caso.

## II.4 Desplazamientos sobre el eje

El campo de desplazamientos sobre el eje  $G_z^0(z, t)$ , es el resultado de la contribución de una onda de compresión (onda P), y de una onda de cizalla (onda S), lo que se puede representar como (ver apéndice A):

$$G_z^0(z, t) = G_{zp}^0(z, t) + G_{zs}^0(z, t) \quad (7)$$

Esta expresión da cuenta que la onda de cizalla tiene una componente longitudinal no nula sobre el eje z. Se deduce entonces que la onda S no se trata de una onda transversal pura donde los desplazamientos de materia son perpendiculares a su sentido de propagación.

En el apéndice B se deduce una expresión aproximada del resultado exacto de la función de Green cuya expresión es:

$$G_z^0(z, t) = \frac{c_p}{2\pi\mu\gamma^2 z^2} \left[ \delta(t - t_p) t + H(t - t_p) - 4H(t - t_s) + 2(H(t - t_p) - H(t - t_s)) \frac{t}{t_p} \right] \quad (8)$$

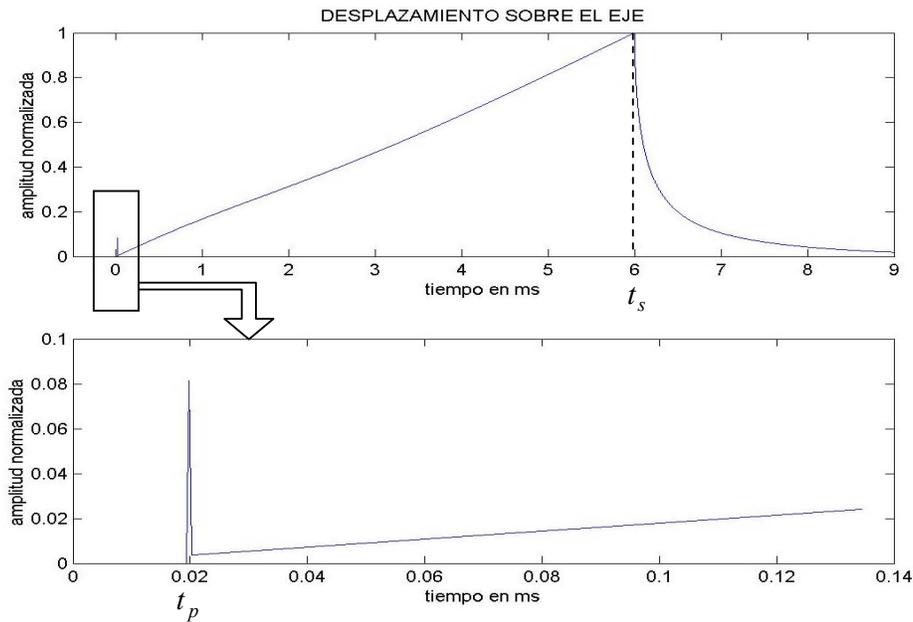
donde:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_s}; \quad \delta(t - t_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq t_p \\ 1 & \text{si } t = t_p \end{cases} \quad H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

En la figura 4, se muestra la dependencia de  $G_z^0$  con el tiempo, calculada a partir del resultado exacto, para el caso  $c_p = 1500$  m/s y  $c_s = 5$  m/s, valores similares a los encontrados en sólidos blandos como veremos más adelante en el capítulo III. Esta figura fue construida para una distancia  $z = 30$  mm de la fuente. En ella se distingue un impulso del tipo  $\delta$  de Dirac en  $t = t_p = 0.02$  ms correspondiente al tiempo de arribo de la onda de compresión. Luego de este tiempo, se produce una rampa que crece hasta  $t = t_s = 6.0$  ms, el tiempo de arribo de la onda de cizalla. Esta rampa, que corresponde al último término de la ecuación (8), es un término de acoplamiento entre la onda de compresión y la onda de cizalla que llamaremos P+S. Su interpretación física es la siguiente: La onda de compresión es la primera en arribar a un punto dado del interior del medio. La propagación de esta onda está relacionada con deformaciones irrotacionales del medio. Como el medio no es totalmente incompresible, estas deformaciones irrotacionales dan lugar a deformaciones solenoidales locales y actúan como fuentes secundarias de ondas de cizalla. Estas fuentes secundarias se crean a lo

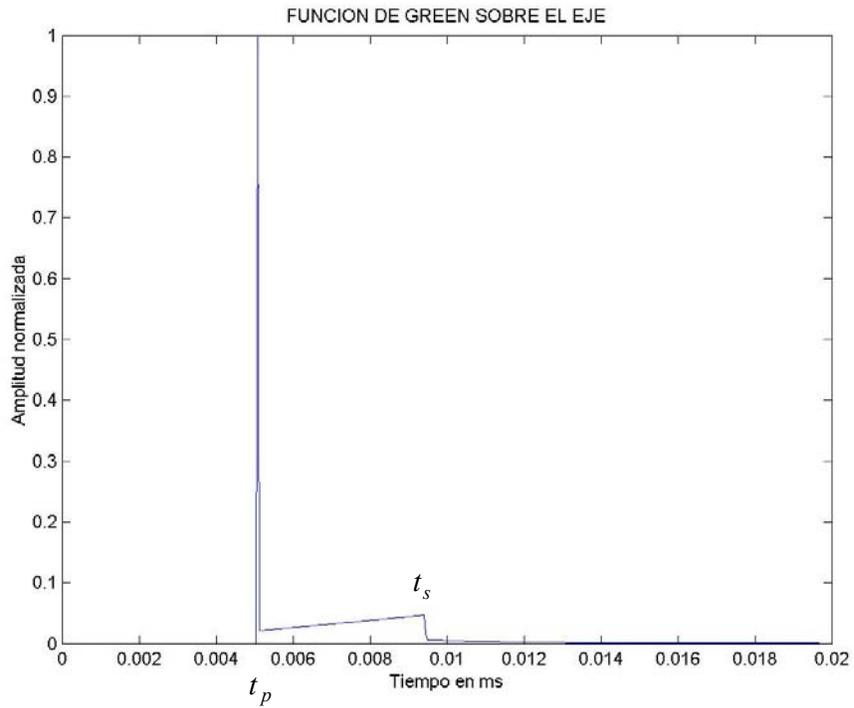
largo del camino de la onda de compresión. El continuo de fuentes secundarias explica la extensión del término de acoplamiento.

Luego del arribo de la onda de cizalla, la curva decrece rápidamente acercándose a cero. Debido a la gran diferencia entre los tiempos  $t_p$  y  $t_s$  en la figura no es posible observar claramente el arribo de la onda de compresión, por eso se muestra en la figura inferior una versión ampliada en torno a  $t_p$ .



**FIGURA 4:** Representación gráfica de la función de Green sobre el eje de la fuente en función del tiempo. La figura inferior es una ampliación en torno al tiempo de arribo de la onda de compresión. La amplitud de la onda de cizalla es mayor que la de la onda de compresión.

Para comparación se muestra en la figura 5 el mismo resultado para el caso del acero donde  $c_p = 5840$  m/s y  $c_s = 3170$  m/s. La diferencia entre las figuras es clara. En el caso del sólido blando, la función toma su valor máximo en el tiempo de arribo de la onda de cizalla, mientras que en el caso del acero, el valor máximo se corresponde con el tiempo de arribo de la onda de compresión. Se desprende entonces que el peso relativo de cada componente varía en función de la relación  $\gamma = c_p/c_s$  que en el primer caso vale  $\gamma = 300$  y en el segundo  $\gamma = 1.84$ . En este último caso, la diferencia de tiempos entre la onda de compresión y la de cizalla es mucho menor, por lo que la rampa de acoplamiento tiene un crecimiento más limitado que en un sólido blando.



**FIGURA 5:** Forma temporal de la función de Green para el acero. Las diferencias con la figura 3 son notorias y se debe a la relación  $\gamma = c_p / c_s$ .

#### II.4.1 Consideraciones energéticas

Cuando una onda elástica se propaga en un medio, se produce un transporte de energía. La energía  $E$  contenida en un volumen  $\mathcal{V}$  interior al medio varía con el tiempo; un incremento de energía  $dE$ , debe ser igual al trabajo hecho por el esfuerzo mecánico  $T_{ij}(\mathbf{r})$  sobre la superficie límite del volumen:

$$dE = \int_S T_{ij} n_j du_i dS \quad (9)$$

donde  $n_j$  es la componente  $j$  del vector  $\mathbf{n}$  normal a la superficie de integración en todo punto. La variación de energía contenida en  $\mathcal{V}$  por unidad de tiempo es por lo tanto:

$$\frac{dE}{dt} = \int_S T_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial t} dS \quad (10)$$

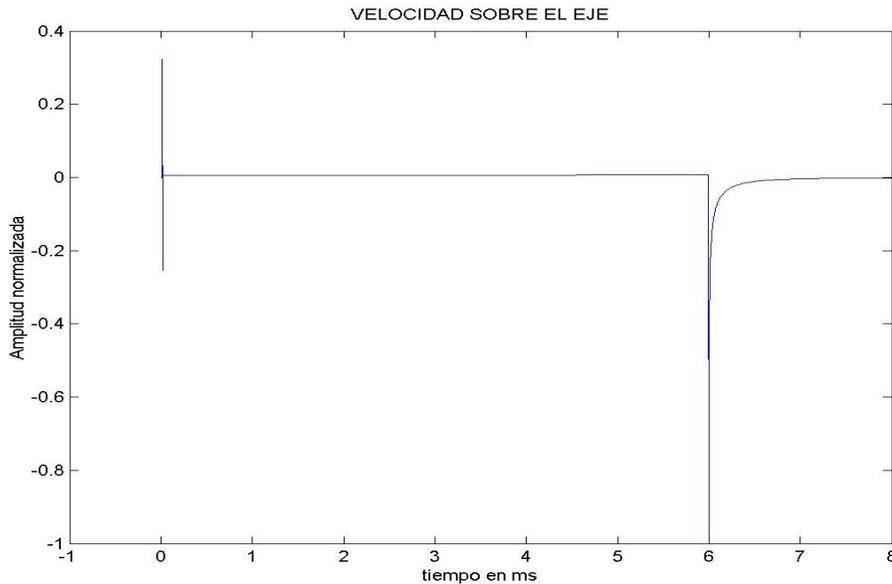
que puede escribirse en la forma:

$$\frac{dE}{dt} + \int_S P_j n_j dS = 0 \quad (11)$$

donde se ha definido el vector  $\mathbf{P}$  como:

$$P_j = -T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (12)$$

La ecuación (11) muestra que la variación de energía en el volumen  $\mathcal{V}$  proviene del flujo del vector  $\mathbf{P}$  sobre su superficie límite.  $\mathbf{P}$  es el vector de Poynting; su dirección es la del transporte de energía y su magnitud es la cantidad de energía que atraviesa la superficie por unidad de área y unidad de tiempo. Para una onda plana en un sólido elástico e isotrópico, el flujo de energía vale  $\rho c_p \dot{\mathbf{u}}^2$  para el modo P y  $\rho c_s \dot{\mathbf{u}}^2$  para el modo S. El transporte de energía es proporcional al cuadrado de la velocidad que adquieren las partículas del medio al propagarse la onda. La figura 6 muestra el comportamiento esta velocidad en función del tiempo. Este resultado se obtiene haciendo la derivada temporal de los desplazamientos mostrados en la figura 4. En esta figura prácticamente desaparece la rampa entre  $t_p$  y  $t_s$ , y se registran impulsos correspondientes al arribo de cada onda. El correspondiente a la onda de compresión aparece como la derivada de la función de Dirac, un impulso del tipo  $\delta'$  y el de la onda de cizalla como una función de Dirac negativa.



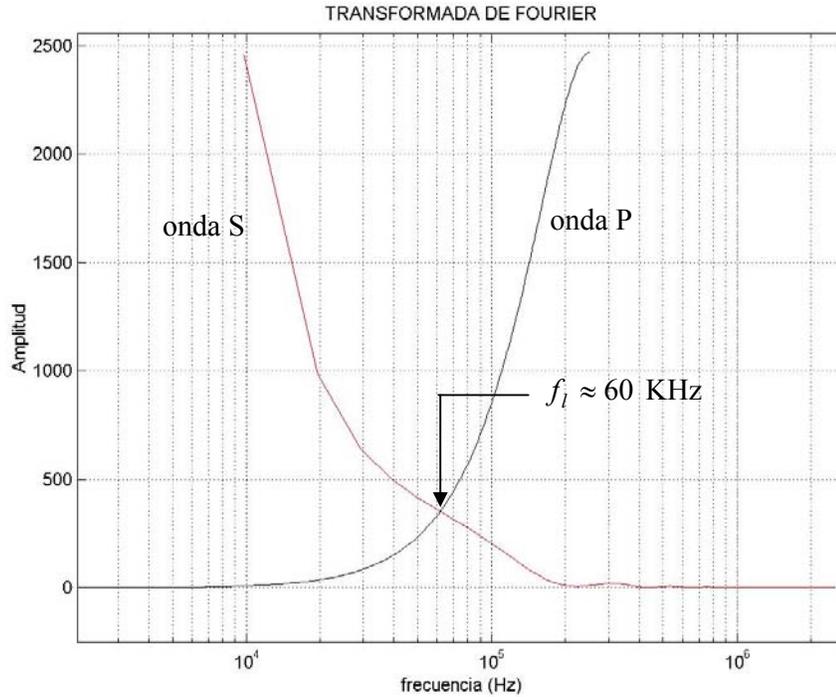
**FIGURA 6:** velocidad de las partículas del medio en función del tiempo. Los dos impulsos mostrados corresponden al tiempo de arribo de la onda de compresión (0.02 ms) y al de la onda de cizalla (6.0 ms) respectivamente.

En el apéndice B se obtiene una expresión aproximada para la velocidad de los desplazamientos, válida para sólidos blandos, cuando la fuente es una excitación monocromática. El resultado es el siguiente:

$$s(t) = \frac{\partial G_z^0}{\partial t} \otimes \sin(\omega t) \cong \frac{c_p}{2\pi\mu\gamma^2} \left[ \frac{\omega}{zc_p} \cos \omega(t-t_p) - \frac{2\gamma}{z^2} \sin \omega(t-t_s) + \frac{2\gamma c_s}{z^3 \omega} (\cos \omega(t-t_s) - \cos \omega(t-t_p)) \right] \quad (13)$$

El primer término de esta ecuación es la contribución a la velocidad de la onda de compresión, el segundo la de la onda de cizalla y el tercero la del término de acoplamiento P+S. La interpretación de la ecuación (13) es que la onda P domina para una vibración de alta frecuencia debido a la presencia de la frecuencia de la vibración en el numerador del primer término. Este término domina también en campo lejano ya que la amplitud decae con el inverso de la distancia a la fuente. El término de acoplamiento P+S domina a muy bajas frecuencias cerca del límite estático debido a que la frecuencia figura en el denominador. Es también el término más importante en campo “muy cercano” debido al decaimiento  $1/z^3$ . En fin, a frecuencias intermedias, y “campo intermedio” el término dominante es el de la onda de cizalla.

Estos resultado aproximados se ven confirmados haciendo un análisis de Fourier de cada componente. En la figura 7 se muestra el módulo de la transformada de Fourier de la velocidad para cada componente de la onda. La figura se obtuvo a través de la función de Green sin aproximaciones. Se observa que para altas frecuencias la mayor parte de la energía se propaga bajo la forma de una onda de compresión, mientras que para bajas frecuencias la onda de cizalla es el término dominante (El límite de muy bajas frecuencias no aparece en la figura). La frecuencia límite  $f_l$  a partir de la cual la onda de compresión tiene mayor amplitud que la onda de cizalla se encuentra aquí en el entorno de los 60 KHz para los mismos valores de  $c_p$  y  $c_s$  usados para construir la figura 4. Otros autores [11], han registrado resultados del mismo orden considerando medios viscoelásticos con características similares a la de los tejidos biológicos.



**FIGURA 7:** Transformada de Fourier de las componentes S y P de la velocidad mostrada en la figura 6.

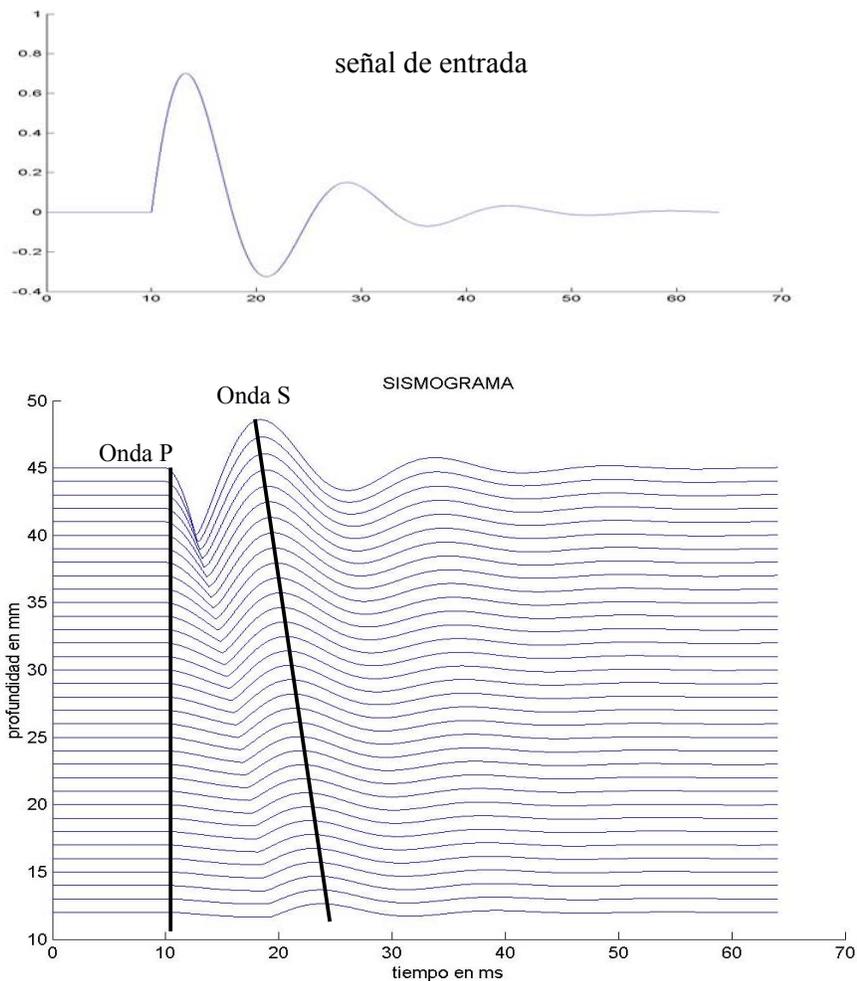
Importa destacar aquí lo que ya habíamos mencionado en la introducción de la monografía, el hecho de que a altas frecuencias el comportamiento del tejido es similar al registrado en fluidos, es decir la propagación de ondas se da básicamente bajo el modo de una onda de compresión. A pesar de ello, los efectos de la onda de cizalla no son despreciables en la propagación del ultrasonido en tejidos. Esta onda es responsable del aumento de temperatura registrado en el tejido en regiones cercanas al transductor y su presencia debe ser considerada en aspectos relativos a la seguridad de un paciente en tratamiento [12]. A bajas frecuencias el modelo correcto es el de un sólido. Como la onda de cizalla domina a bajas frecuencias, estudiando su propagación en un sólido blando se puede extraer el módulo elástico correspondiente.

#### II.4.2 Sismograma

Una vez obtenida la respuesta al impulso en función del tiempo y la posición sobre el eje, se puede obtener la respuesta  $\Gamma(z, t)$  del medio a una excitación arbitraria  $E(t)$  a través de la convolución temporal entre estas funciones:

$$\Gamma(z, t) = E(t) \otimes G_z^0(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t - \tau) G_z^0(z, \tau) d\tau \quad (15)$$

El campo de desplazamientos  $\Gamma(z,t)$ , se puede representar bajo la forma de un sismograma como se muestra en la figura 8.



**FIGURA 8:** En la parte superior de la figura se muestra la forma de excitación, una senoide amortiguada de 150 Hz. La figura inferior es la respuesta del medio a esta entrada en función del tiempo y la profundidad. Esta respuesta se muestra en forma de sismograma. Cada línea representa la evolución temporal de los desplazamientos a una profundidad dada.

La función de entrada  $E(t)$  usada para construir la figura es una senoide amortiguada de frecuencia central 150 Hz, que se muestra en la parte superior de la figura. Las razones para utilizar esta función están dadas por la posibilidad de comparar luego estos resultados con los obtenidos experimentalmente. La figura inferior es el sismograma. La fuente de desplazamientos se encuentra a los 58 mm. Cada línea de esta

figura representa la evolución temporal del desplazamiento a una profundidad dada (Los desplazamientos no están a escala, se muestran amplificados). Las rectas introducidas en la figura muestran la propagación de la onda P (1500 m/s) y de la onda S (5 m/s). La onda P parece propagarse instantáneamente a todas las profundidades debido al gran valor de su velocidad. En contraste, se puede observar el retardo en el arribo de la onda S a medida que aumenta la distancia a la fuente.

## II.5 Diagrama de directividad

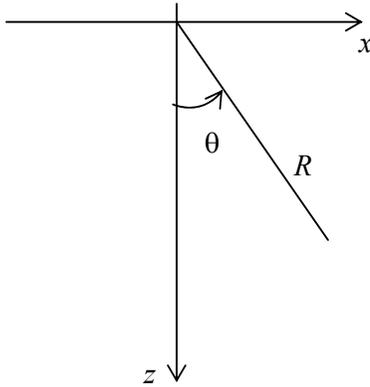


FIGURA 9

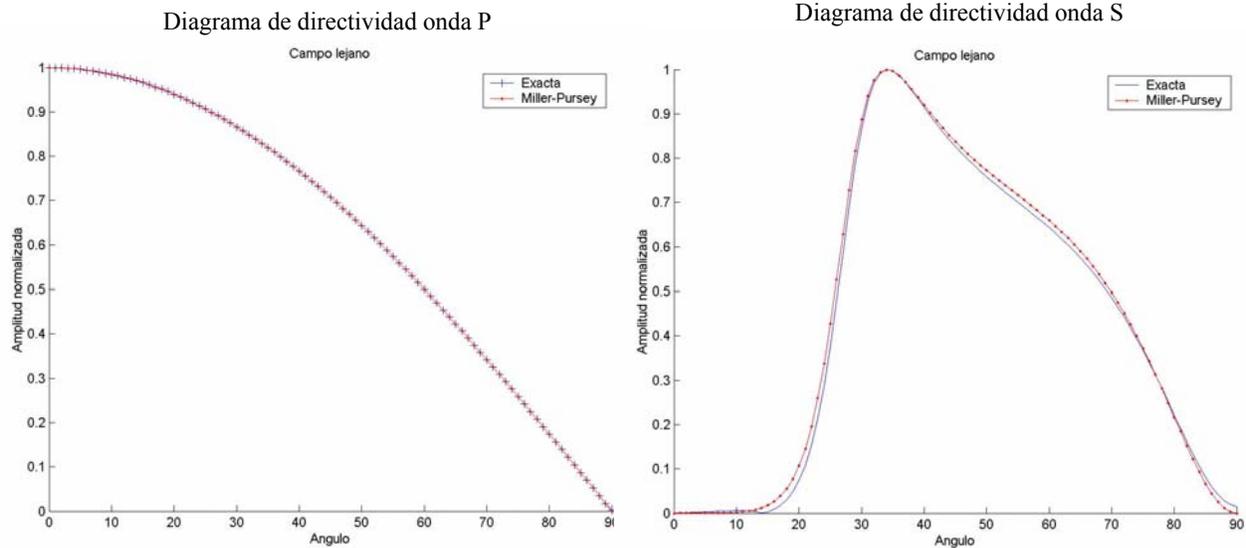
Hasta ahora hemos analizado los desplazamientos sobre el eje de simetría del problema. Un resultado interesante surge cuando se estudian los desplazamientos en función del ángulo  $\theta$  mostrado en la figura 9 para una distancia  $R$  fija a la fuente. Este análisis conocido como diagrama de directividad de la fuente fue obtenido por Miller y Pursey en 1954 [13] para campo lejano. El resultado analítico obtenido por Miller y Pursey es el siguiente:

$$A_P = \frac{\cos(\theta)(\gamma^2 - 2\sin^2(\theta))}{(\gamma^2 - 2\sin^2(\theta))^2 + 4\sin^2(\theta)\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}\sqrt{\gamma^2 - \sin^2(\theta)}} \quad (16)$$

$$A_S = \frac{\sin(2\theta)\sqrt{\gamma^2 - \sin^2(\theta)}}{(\gamma^2 - 2\sin^2(\theta))^2 + 4\sin^2(\theta)\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}\sqrt{\gamma^2 - \sin^2(\theta)}}$$

donde  $A_P$  es la amplitud de la onda de compresión y  $A_S$  la de la onda de cizalla. Este diagrama se muestra en la figura 10a para la onda de compresión y en la figura 10b para la onda de cizalla. En el primer caso se puede observar que la amplitud máxima se da para  $\theta = 0$ , es decir sobre el eje  $z$ , y que luego decae hasta hacerse prácticamente nula para  $\theta = \pi/2$ . En el segundo caso, el máximo de amplitud se obtiene para un ángulo de  $34^\circ$ , mientras se observa que la amplitud es prácticamente nula en el eje. En las mismas figuras se muestran las amplitudes obtenidas a través de una integración numérica de las funciones de Green calculadas en el apéndice C. La concordancia entre los dos

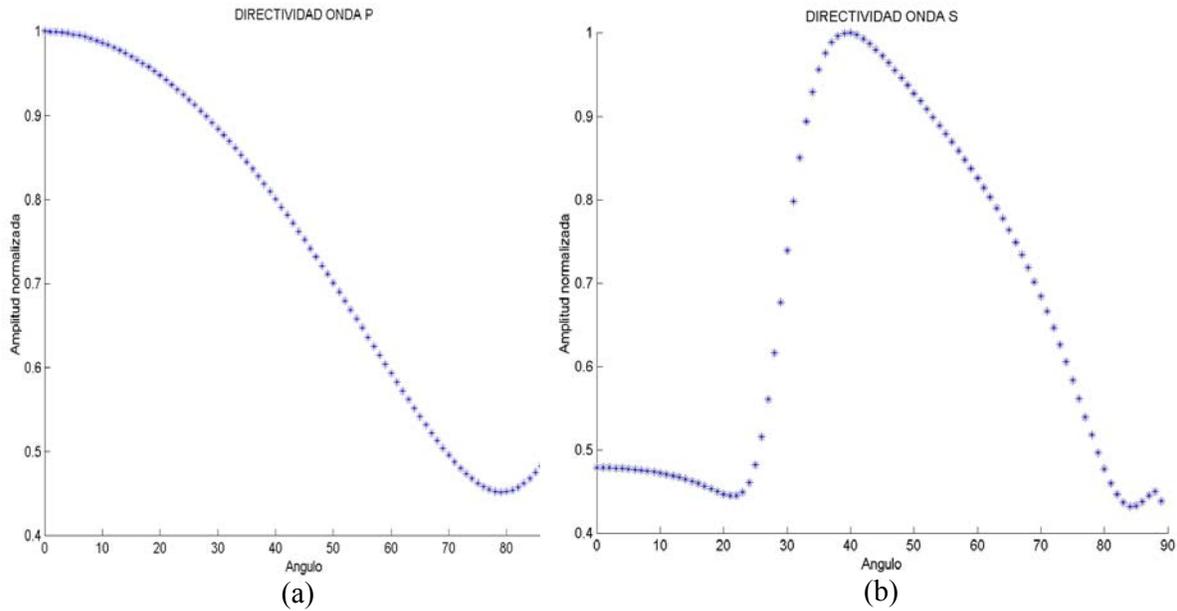
resultados es evidente. Dado que  $c_p \gg c_s$ , a bajas frecuencias, el campo lejano para la componente P se obtiene a grandes distancias de la fuente, del orden de algunos metros. Para la onda de cizalla el campo lejano es del orden de algunos cm.



**FIGURA 10a:** Diagrama de directividad para la onda P. Comparación entre el resultado de Miller-Pursey y la función de Green.

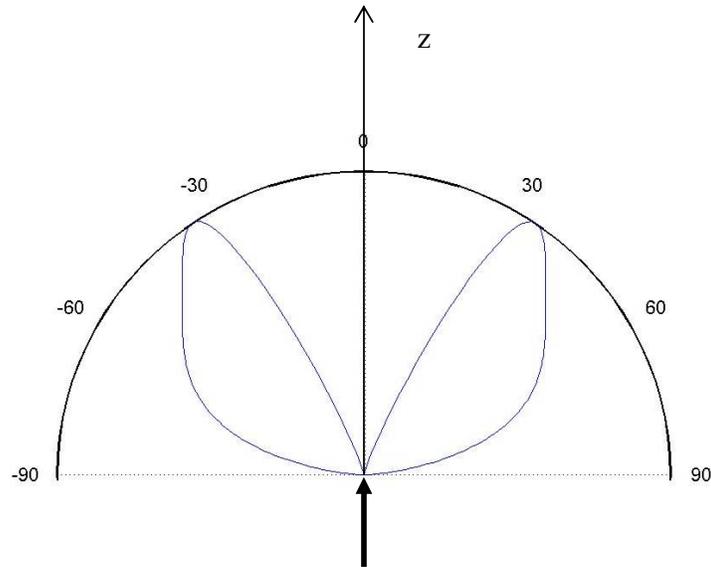
**FIGURA 10b:** Diagrama de directividad para la onda S. Comparación entre el resultado de Miller-Pursey y la función de Green.

La forma del diagrama de directividad varía para puntos de observación más cercanos a la fuente. En la figura 11, se muestran los resultados obtenidos con la función de Green para una distancia de 30 mm. La figura 11a (izquierda) corresponde a la directividad de la onda P. La amplitud pasa por un mínimo en torno a los 80°. Se trata de una consecuencia de las condiciones de borde de Dirichlet [15]. A medida que aumenta el ángulo  $\theta$ , nos acercamos más a la superficie libre (ver figura 9). Como cerca de la superficie no hay oposición al desplazamiento, la componente  $z$  del desplazamiento se efectúa desde el interior al exterior, en sentido contrario al impuesto por la fuente. Esto se traduce en un pasaje por cero y un cambio de signo de esta componente. Este pasaje por cero se refleja en un mínimo en la componente total del desplazamiento como se ve en la figura. La figura 11b representa la directividad de la onda S. El máximo de la amplitud se registra ahora a los 40° del eje. Aquí también se produce un mínimo local en torno a los 85°.

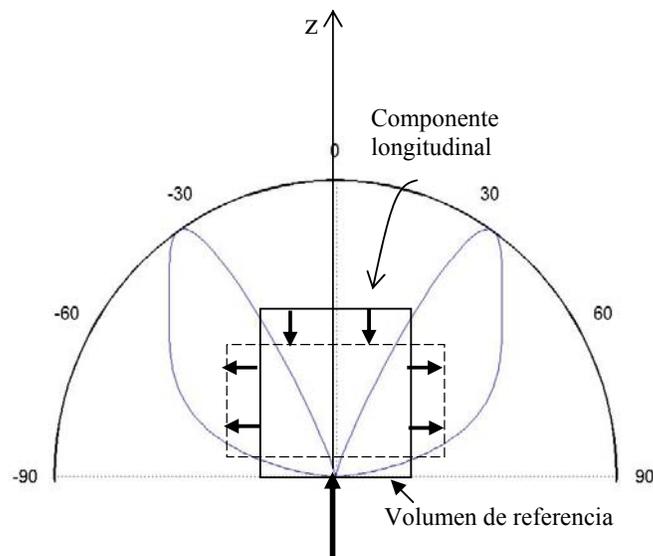


**FIGURA 11:** Diagrama de directividad para la onda de compresión (a) y para la onda de cizalla (b) en zona cercana ( $z = 30 \text{ mm}$ ). Aparecen diferencias respecto a la zona lejana mostrada en la figura 10.

Una representación polar del diagrama de directividad para la onda de cizalla mostrada en la figura 12, revela que una excitación normal a la superficie libre de un sólido semi-infinito, actúa como una fuente dipolar para esta onda. Se ven allí dos lóbulos con oposición de fase respecto al eje  $z$ . Este resultado permite dar una interpretación sencilla a la componente longitudinal de la onda de cizalla sobre el eje [15]. En efecto, al tratarse de una solución de divergencia nula, la onda se propaga deformando al medio sin variar su volumen. Si tomamos un volumen de referencia centrado en el eje cuando el medio está en reposo, luego, en el momento que es alcanzado por la onda de cizalla, este volumen se estira lateral y longitudinalmente pero su valor se mantiene constante. Como los desplazamientos radiales a ambos lados del eje de la fuente están en oposición de fase, cuando el volumen se estira o se comprime lateralmente lo hace de manera que se produce un desplazamiento sobre el eje. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 13.



**FIGURA 12:** Diagrama polar para la amplitud de la onda de cizalla. Un impulso normal a la superficie actúa como una fuente dipolar para esta onda.

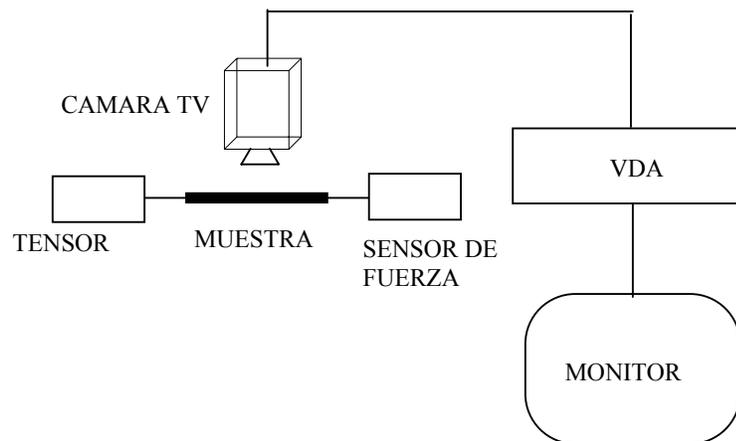


**FIGURA 13:** Interpretación física de la componente longitudinal de la onda de cizalla, en función del resultado mostrado en la figura 12.

## II.6 Viscoelasticidad

Hasta ahora hemos tratado el caso de un sólido elástico, es decir un material cuya ecuación constitutiva es la ley de Hooke:  $T_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}$ . Sin embargo es sabido que los tejidos biológicos no obedecen ecuaciones de este tipo, sino que presentan comportamientos no lineales y viscoelásticos. Fung [3], en experimentos de

caracterización mecánica de algunos tejidos blandos, ha mostrado la curva tensión-deformación no es lineal sino para pequeñas deformaciones. Cuando la deformación aplicada supera cierto límite, la curva no sigue el mismo camino cuando el músculo se estira que cuando se relaja, presentando entonces un ciclo de histéresis. Además la forma de la curva va cambiando en cada ciclo, rápidamente al inicio hasta alcanzar un estado estacionario luego de determinado número de ellos. La existencia de este período inicial de ajuste parece común a muchos tejidos biológicos. Otros autores [16],[17], han registrado un comportamiento similar y han propuesto fórmulas para la ecuación constitutiva de diversos tipos de tejidos. El montaje experimental utilizado por Fung [3], consiste en darle a la muestra una forma de cilindro fino y someterla a una tensión unidimensional, cuya magnitud se puede registrar a través de un sensor como se muestra esquemáticamente en la figura 14. La deformación se registra a través de un circuito cerrado de televisión y un analizador de dimensión de video (Video Dimension Analyzer, VDA).

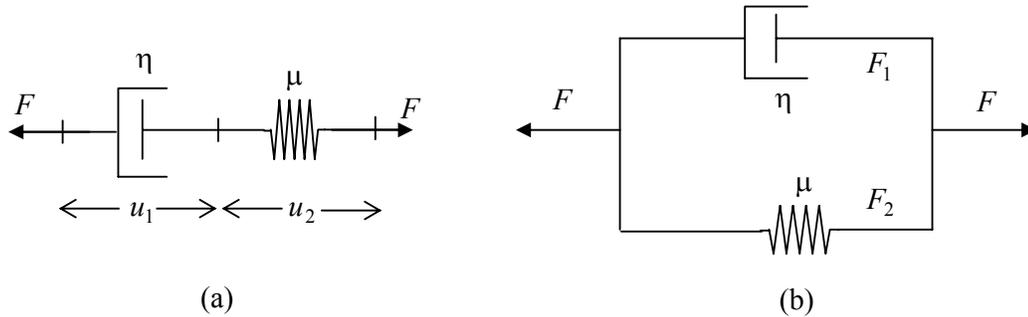


**FIGURA 14:** Montaje experimental utilizado por Fung para relevar la curva tensión-deformación para diferentes muestras de tejidos. Este montaje requiere darle a la muestra una forma específica.

En estas experiencias, las muestras de tejido se someten a grandes deformaciones de hasta un 200 %. Sin embargo cuando las deformaciones son pequeñas, un modelo apropiado para describir el comportamiento viscoelástico de algunos tejidos es el de un sólido viscoelástico lineal. En la figura 15 se muestran dos modelos mecánicos unidimensionales, el modelo de Maxwell (a) y el modelo de Voigt (b). El primero consiste en un resorte lineal de constante  $\mu$ , en serie con un

amortiguador también lineal de coeficiente viscoso  $\eta$ . En el amortiguador se supone que la velocidad es proporcional a la fuerza aplicada en cada instante. La fuerza  $F$  produce un desplazamiento  $u_2 = F/\mu$  en el resorte y una velocidad  $\dot{u}_1 = F/\eta$  en el amortiguador. La velocidad total es:

$$\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 = F/\eta + \dot{F}/\mu \tag{17}$$



**FIGURA 15:** Modelos viscoelásticos lineales (a) Modelo de Maxwell (b) Modelo de Voigt

El modelo de Voigt consiste en un resorte lineal de constante elástica  $\mu$  en paralelo con un amortiguador de viscosidad  $\eta$ . Al estar en paralelo, el desplazamiento en el resorte y en el amortiguador es el mismo. Si el desplazamiento es  $u$ , la velocidad es  $\dot{u}$  y la fuerza en el resorte es  $F_1 = \mu u$  y en el amortiguador es  $F_2 = \eta \dot{u}$ . La fuerza total es por lo tanto:

$$F = \mu u + \eta \dot{u} \tag{18}$$

Si resolvemos las ecuaciones (17) y (18) para  $u(t)$  cuando se aplica una fuerza del tipo escalón (función de Heaviside)  $H(t)$ , el resultado se llama *función de arrastre* (creep function) y la anotaremos como  $c(t)$ . Cuando se aplica una fuerza impulsiva en  $t = 0$  en el modelo Maxwell, el desplazamiento en el resorte es  $u_2(0) = F(0)/\mu$ , pero en el amortiguador el desplazamiento inicial es nulo. Por lo tanto la condición inicial es  $u(0) = F(0)/\mu$ . Para el modelo de Voigt el desplazamiento es el mismo en el resorte y el amortiguador y por lo tanto la condición inicial es  $u(0) = 0$ . Los resultados son:

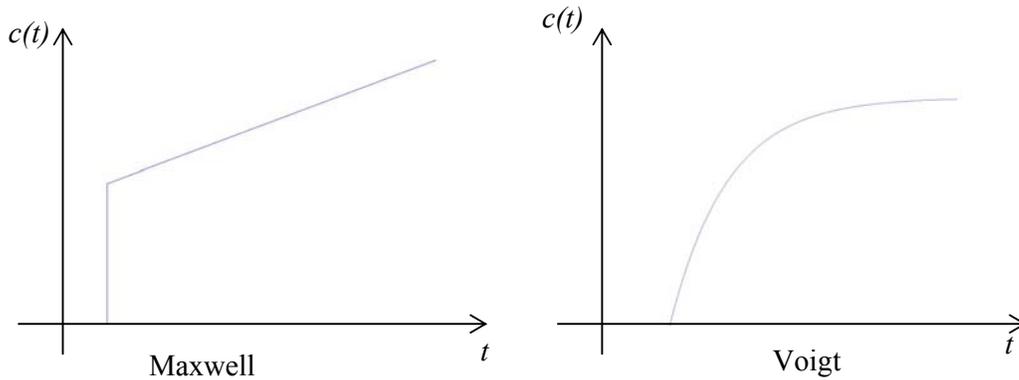
Maxwell:

$$c(t) = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} t \right) H(t) \tag{19}$$

Voigt:

$$c(t) = \frac{1}{\mu} \left( 1 - e^{-(\mu/\eta)t} \right) H(t) \quad (20)$$

La figura 16 muestra la forma de  $c(t)$  para cada modelo.



**FIGURA 16:** Función de arrastre para los modelos de Maxwell y Voigt

En las experiencias mencionadas, se puede medir estas curvas experimentalmente. Una vez determinadas, se trata de ajustar a alguno de los modelos. Algunos autores han mostrado que entre los dos el modelo de Voigt ajusta mejor a las experiencias [18].

En general los tejidos biológicos no quedan bien descritos por modelos tan sencillos como los anteriores, y suelen presentar más de un mecanismo de relajación. Un modelo más apropiado en algunos casos consiste en suponer una superposición de estos mecanismos en la función de arrastre:

$$c(t) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-f_n t} \quad (21)$$

El modelo de Voigt es una caso particular de esta ecuación con  $N = 1$ ,  $\alpha_{0,1} = \pm 1/\mu$ ,  $f_0 = 0$  y  $f_1 = \mu/\eta$ . En otros casos un modelo de frecuencias discretas como el de la ecuación (21) no se reconcilia con las experiencias y hay que extender el modelo a uno de espectro continuo[3]. En esta monografía, basándonos en la literatura, asumiremos el modelo de Voigt como válido. La confirmación de esta hipótesis no está dentro de los trabajos llevados a cabo durante la tesis. Seguramente formará parte de trabajos a desarrollarse en el futuro.

La ecuación (18) representa una situación unidimensional. La generalización de esta ecuación a una situación tridimensional es la siguiente:

$$T_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + D_{ijkl} \frac{\partial e_{kl}}{\partial t} \quad (22)$$

donde  $D$  es el tensor de coeficientes viscosos. Para un sólido isotrópico la expresión anterior toma la forma:

$$T_{ij} = \left( (\mu_1 + \lambda_1) + (\mu_2 + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} + \left( \mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{ij} \quad (19)$$

y la ecuación de ondas es por lo tanto:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left[ (\mu_1 + \lambda_1) + (\mu_2 + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left( \mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \mathbf{u} \quad (20)$$

donde  $\lambda_1$  es el módulo elástico de compresión,  $\lambda_2$  es el coeficiente viscoso de compresión,  $\mu_1$  es el módulo elástico de cizalla y  $\mu_2$  es el coeficiente viscoso de cizalla. Las soluciones a la ecuación (20) también se pueden descomponer en un término irrotacional y uno de divergencia nula. Sin embargo no es posible obtener ahora una solución analítica para la función de Green en el mismo sentido que obtuvimos para un sólido elástico [4]. Analizaremos por lo tanto la propagación de una onda plana en este tipo de medios y mostraremos como obtener los parámetro  $\mu_1$  y  $\mu_2$  del modelo a partir de cantidad que podemos medir experimentalmente en el laboratorio.

La solución para una onda plana monocromática se escribe:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}_p + k_p^2 \mathbf{u}_p &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{u}_s + k_s^2 \mathbf{u}_s &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\mathbf{u}_p$  es la solución irrotacional,  $\mathbf{u}_s$  la solución solenoidal,  $k_p^2$  y  $k_s^2$  los cuadrados del vector de onda respectivos que valen:

$$\begin{aligned} k_p^2 &= \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \\ k_s^2 &= \frac{\rho \omega^2}{\mu} \end{aligned} \quad (22)$$

con  $\lambda = \lambda_1 + i\omega\lambda_2$ ,  $\mu = \mu_1 + i\omega\mu_2$  y  $\omega$  es la frecuencia angular de la vibración. La velocidad de fase para la onda de divergencia nula vale:

$$c_s = \frac{\omega}{\text{Re}[k_s]} = \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2})}} \quad (23)$$

y la atenuación:

$$\alpha_s = \text{Im}[k_s] = \sqrt{\frac{\rho\omega^2(\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2\mu_2^2} - \mu_1)}{2(\mu_1^2 + \omega^2\mu_2^2)}} \quad (24)$$

Si elevamos estas expresiones al cuadrado y definimos:  $\chi^2 = \mu_1^2 + \omega^2\mu_2^2$  obtenemos:

$$\begin{cases} c_s^2 = \frac{2\chi^2}{\rho(\mu_1 + |\chi|)} \\ \alpha_s^2 = \frac{\rho\omega^2(|\chi| - \mu_1)}{2\chi^2} \end{cases} \quad (25)$$

que se pueden escribir como.

$$\begin{cases} \frac{2\chi^2}{c_s^2} - \rho\mu_1 = \rho|\chi| \\ \frac{2\chi^2\alpha_s^2}{\omega^2} + \rho\mu_1 = \rho|\chi| \end{cases} \quad (26)$$

la diferencia entre estas dos ecuaciones da arreglando los términos:

$$\chi^2 = \frac{\rho\mu_1}{\left(\frac{1}{c_s^2}\right) - \left(\frac{\alpha_s}{\omega}\right)^2} \quad (27)$$

sustituyendo esta expresión en (25) y (26) encontramos:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{\rho c_s^2}{\left(1 - \eta^2\right)\left(\frac{2}{1 - \eta^2} - 1\right)^2} \\ \mu_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\rho\mu_1 c_s^2}{1 - \eta^2} - \mu_1^2} \end{cases} \quad (28)$$

donde  $\eta^2 = \left(\frac{\alpha_s c_s}{\omega}\right)^2$ . En las experiencias llevadas a cabo en este trabajo, medimos la

velocidad y la atenuación de la onda de cizalla, pudiendo entonces a partir de (28) obtener su módulo elástico y viscoso. Nótese que si el módulo viscoso es pequeño la atenuación también lo será y recuperamos los resultados de un sólido elástico:

$$\mu_1 \cong \rho c_s^2. \quad (29)$$

## **Conclusión**

El análisis de la propagación de ondas en un sólido blando semi-infinito arrojó, en primera instancia, que una fuente normal a la superficie libre de un sólido es capaz de generar ondas de cizalla dentro del mismo. Además, se mostró que es el término dominante a bajas frecuencias. En el trabajo experimental nos valdremos de este hecho, en conjunto con el bajo valor de la velocidad, para cuantificar la elasticidad de los tejidos. La velocidad de la onda de cizalla nos permite conocer directamente el módulo elástico buscado si el medio es considerado elástico. Sin embargo si se desea un modelo más realista hay que tener en cuenta la viscosidad en los tejidos. El modelo de Voigt permite introducir estos efectos de manera que aún es posible cuantificar la elasticidad con los parámetros obtenidos experimentalmente.

El diagrama de directividad de la onda de cizalla es más complicado que el que se obtiene para ondas de compresión. En la literatura especializada en ultrasonido, no es común este tipo de análisis ya que la onda de cizalla se atenúa rápidamente a altas frecuencias y el modo dominante es el de una onda de compresión. En sonoelastografía sin embargo, la onda de cizalla adquiere gran importancia y es importante conocer sus características con detalle.

En el siguiente capítulo mostraremos cómo obtener la velocidad y la atenuación de la onda de cizalla con métodos ultrasonoros. Se muestra que también que con el método propuesto, se pueden medir los lóbulos laterales, que permiten un interpretación a la componente longitudinal.

## REFERENCIAS

- [1] J. Ophir, S. Alam, B. Garra, F. Kallel, E. Konofagou, T. Kruskop, T. Varghese, “*Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues*”, Proc. Instn. Mech. Engrs. **213** part H (1999).
- [2] P. Fish, “*Diagnostic medical ultrasound*”, John Wiley & Sons (1990).
- [3] Y. Fung, “*Biomechanics: mechanical properties of living tissues*”, Springer-Verlag, New York, (1993).
- [4] K. Aki, P. Richards, “*Quantitative seismology, theory and methods*”, W. H. Freeman and Company, (1980).
- [5] H. Lamb, “*On the propagations of tremors over the surface of an elastic solid*”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A203**, (1904).
- [6] D. Gakenheimer, J. Miklowitz, “*Transient excitation of an elastic half space by a point load travelling on the surface*”, Journal of Applied Mechanics, **pp 505-515**, (1969).
- [7] E. Dieulesaint, D. Royer, “*Elastic waves in solids*”, John Willey & Sons (1981).
- [8] C. Schröder, W. Scott, “*On the complex conjugate roots of the Rayleigh equation: the leaky surface wave*”, J. Acoust. Soc. Am. **110** Vol 6 (2001).
- [9] L. Fradkin, A. Kiselev, “*The two components representation of time-harmonic elastic body waves in the high and intermediate frequency regimes*”, J. Acoust. Soc. Am. **101** Vol 1 (1997).
- [10] D. Gridin, “*High frequency asymptotic description of head waves and boundary layers surrounding the critical rays in an elastic half space*”, J. Acoust. Soc. Am **104** Vol 3 (1998).
- [11] H. Oestrecher, “*Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with application to Biophysics*”, J. Acoust. Soc. Am **23** Vol 6 (1951).
- [12] A. Vedernikov, V. Andreev, “*Generation of the shear waves by focused ultrasonic beam: account of thermal effects*”, XIII Session of the Russian Acoustical Society, Moscow, August 25-29 (2003).
- [13] G. Miller, H. Pursey, “*The field and radiation impedance of mechanical radiators on the surface of a semi-infinite isotropic solid*”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A223**, (1954).
- [14] S. Catheline, J.L. Thomas, F. Wu, M. Fink, “*Diffraction field of a low frequency vibrator in soft tissues using transient elastography*”, IEEE Trans. UFFC **46** Vol 4 (1999).

[15] S. Catheline, "*Interferometrie-speckle ultrasonore: Application a la mesure d'elasticite*", These de doctoract de l'universite Paris VII, (1998).

[16] M. Ridge, V. Wright, "*Mechanical properties of skin: a bioengineering study of skin texture*", J. Appl. Physiol. **21** (1966).

[17] R. Kenedi, T. Gibson, C. Daly, "*Tissue mechanics*", Phys. Med. Biol **20** (1975)

## CAPITULO III

### INTERFEROMETRIA SPECKLE ULTRASONORA

---

#### **III.1 Introducción**

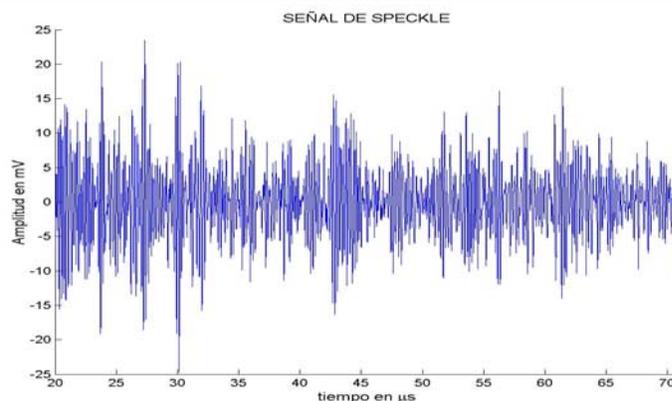
La sonoelastografía se basa en el estudio de los movimientos interiores del medio generados desde la superficie. Como se mencionó en el capítulo I, estos movimientos pueden ser estimados por técnicas ultrasonoras. Entre ellas se mencionaron la posibilidad de obtenerlos a través de la modulación frecuencial en las señales ecográficas debida al efecto Doppler. Otra posibilidad es detectar los movimientos, utilizando transductores convencionales pero con un tratamiento de señal apropiado que permita hacer un seguimiento del movimiento de un grupo de pequeños difusores interiores al medio. En este capítulo se describe este método de investigación conocido como “*speckle tracking*” o seguimiento del speckle, que es la base para las posteriores aplicaciones de la sonoelastografía. También describiremos aquí la configuración experimental que fue desarrollada específicamente para este trabajo y analizamos su influencia sobre la precisión del método. En particular el estudio de la difracción y el diagrama de directividad de la onda de cizalla en campo “intermedio”, es analizado con cuidado ya que son pocos los trabajos a cerca de este punto que se encuentran en la literatura, aunque son de gran importancia en la correcta determinación de las propiedades elásticas del material bajo estudio.

El límite en la precisión del método es analizado a través del teorema de Cramér-Rao, que establece un límite inferior para la desviación estándar en la estimación de un parámetro a partir de la densidad de probabilidad de la señal recibida. En su expresión final, aparecen varios factores de la configuración experimental. Se muestra cómo elegir estos factores de manera de minimizar la incertidumbre. La expresión analítica del límite de Cramér-Rao requiere una serie de hipótesis que difícilmente se cumplen en la práctica. Nosotros lo adoptaremos simplemente para guiar las condiciones experimentales que optimizan el rendimiento. Este es un tema aun abierto en sonoelastografía.

### III.2 Speckle y firma acústica

El término speckle proviene de la óptica coherente. La luz retrodifundida por superficies rugosas genera un patrón de ondas estacionarias en el espacio debido a la coherencia del haz de un láser. La interferencia de la luz proveniente de diferentes puntos de la superficie, provoca variaciones de intensidad en una pantalla con zonas oscuras y zonas claras. En acústica, ocurre un fenómeno similar, pero no ya en la superficie sino en el volumen interior de un medio. Cuando una onda acústica encuentra en su trayectoria discontinuidades de dimensiones similares o menores a la longitud de onda, una porción de la energía se difunde en todas las direcciones. Las discontinuidades pueden ser cambios de densidad, compresibilidad o ambas, en definitiva, cambios de impedancia acústica. La energía irradiada por los diferentes difusores del medio interfiere en el receptor, dando lugar a una señal con variaciones espaciales de amplitud. En una señal ecográfica, la señal de speckle se compone entonces de la contribución de todos los difusores encontrados por el haz ultrasonoro en su propagación. La figura 1 muestra una señal típica de speckle debida a una distribución aleatoria de difusores en el interior de un material. El eje horizontal corresponde al tiempo en  $\mu\text{s}$  y el eje vertical a la amplitud de los ecos recibidos en mV.

Podemos ver en la señal que existen zonas donde los ecos se refuerzan en el receptor dando lugar a amplitudes grandes y zonas donde interfieren destructivamente, dando lugar a mínimos locales.

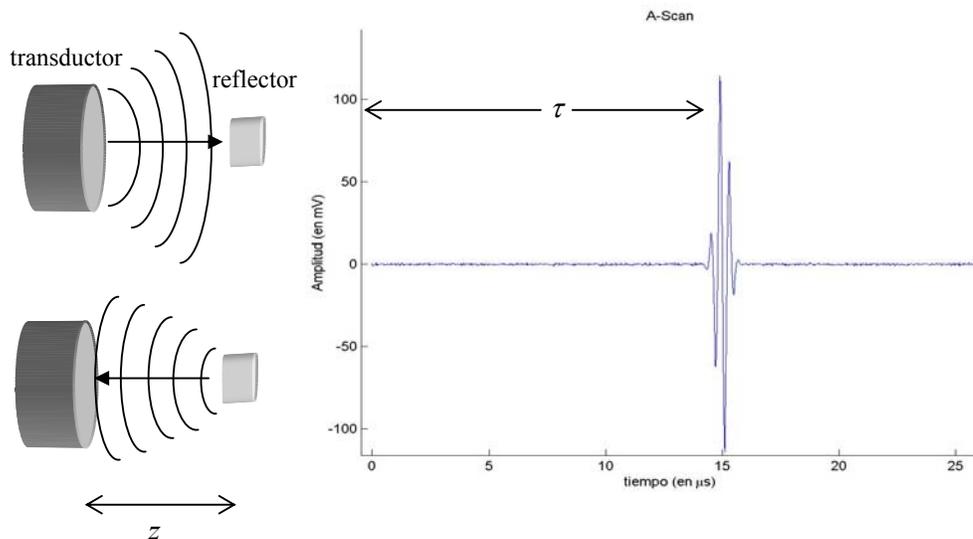


**FIGURA 1:** Señal de speckle debida a difusores distribuidos aleatoriamente dentro del medio

Utilizando señales breves, típicamente inferior a  $1 \mu\text{s}$  de duración, la ecografía pulsada permite relacionar el registro de un eco con la posición del reflector que le dio origen. En la figura 2 se muestra gráficamente este procedimiento. La electrónica permite registrar la amplitud de los ecos recibidos por el transductor, en función del tiempo de vuelo de la onda ultrasonora. Se designa A-Scan (o modo A) a esta forma de registrar la información. Si se conoce la velocidad de propagación del ultrasonido en el medio, se puede obtener la profundidad a la que se encuentra el reflector a partir de la fórmula clásica de modo ecográfico:

$$z = \frac{1}{2} c \tau \quad (1)$$

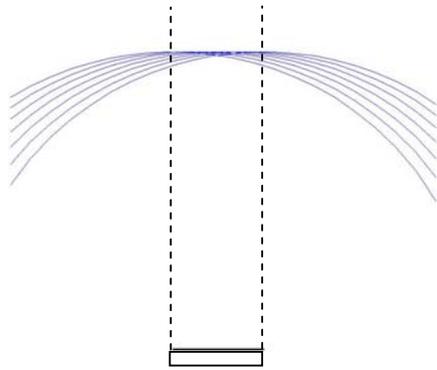
donde  $c$  es la velocidad del ultrasonido y  $\tau$  el tiempo al que se recibe el eco, que corresponde al tiempo de ida y vuelta del pulso ultrasonoro. Por esta razón se introduce el factor  $1/2$  para calcular la profundidad del receptor.



**FIGURA 2:** Un transductor emite un pulso que encuentra un obstáculo y se refleja nuevamente hacia el transductor. A la derecha se muestra la señal registrada en un A-Scan. A partir del tiempo  $\tau$  y la velocidad del ultrasonido en el medio, se puede calcular la profundidad a la que se encuentra el reflector.

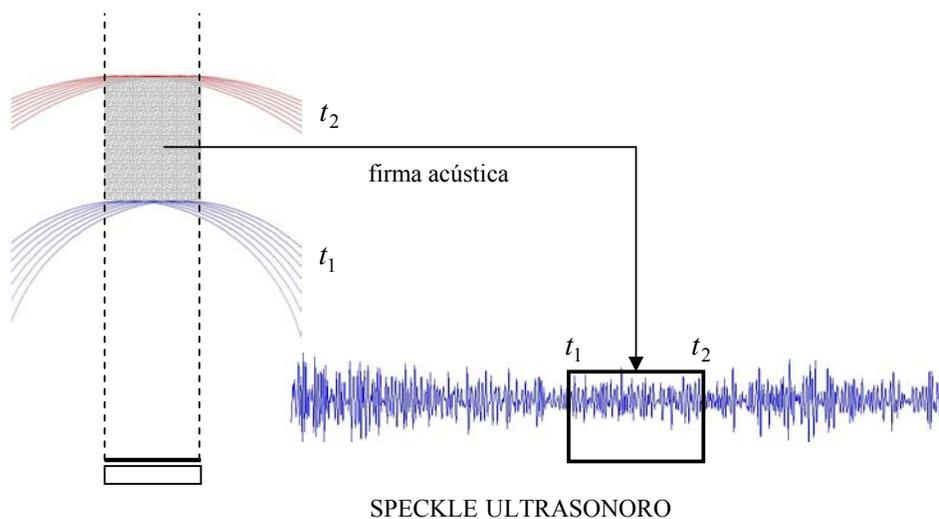
La posibilidad de relacionar los ecos con la profundidad de los reflectores, da origen a la noción de volumen isócrono [1], introducido a partir del formalismo impulsional de Stepanishen [2]. El volumen isócrono se define como el conjunto de puntos que en un instante  $t$  dado son capaces de contribuir a la señal registrada por el receptor. Este volumen está dado entonces por el conjunto de todos aquellos puntos que

disten  $ct$  de algún punto de la superficie del transductor, intersecado con el conjunto de puntos del espacio alcanzados por la directividad del transductor. La figura 3 muestra el concepto de volumen isócrono para un transductor plano. Por simplicidad en la figura se confunde la directividad con la sombra del transductor a través de las líneas punteadas. La amplitud de la señal en un instante  $t$  dado, es debida a la contribución de todos los difusores pertenecientes al volumen isócrono.



**FIGURA 3:** Representación gráfica de la noción de volumen isócrono para un transductor plano.

Extendiendo este concepto, podemos considerar que la señal contenida en una ventana temporal  $[t_1, t_2]$  de un A-Scan, corresponde a un volumen preciso  $V$ , definido como el conjunto de volúmenes isócronos entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . En la figura 4 se muestran los volúmenes isócronos en los instantes  $t_1$  y  $t_2$  y el volumen  $V$  que da origen a la señal registrada en un A-Scan representado en gris.



**FIGURA 4:** La señal contenida entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es la firma acústica de los difusores contenidos en un volumen preciso del material.

Esta señal es producto de la interferencia de las ondas retrodifundidas por cada difusor contenido en  $V$ , es decir es una señal de speckle acústico. Es importante notar que la señal de speckle no es una señal aleatoria en el tiempo, aun si los difusores están distribuidos aleatoriamente. Si la posición relativa de los difusores no varía, las señales ecográficas registradas por sucesivas emisiones de pulsos ultrasonoros, no se modifican. Podemos considerar entonces que esta señal contiene la “firma acústica” del grupo de difusores contenidos en  $V$ .

### III.3 seguimiento del speckle

En los casos donde existen movimientos en el seno del medio, ya sean de origen natural (respiración, flujo sanguíneo) o de origen artificial como en sonoelastografía, la señal de speckle acústico se modifica debido al movimiento de los difusores que le dan origen. A partir de la modificación del speckle, es posible reconstruir el movimiento de los difusores que a su vez es el movimiento del propio medio en primera aproximación.

Esta idea fue utilizada en la década de los 70 para medir la velocidad de flujo sanguíneo [3]. A esto le siguió un número de publicaciones desarrollando la teoría básica para la reconstrucción del movimiento [4]. El nombre común en estos trabajos para denominar el método fue *speckle tracking* [5]. La figura 5 muestra la base de la idea detrás de estas técnicas. En un tiempo  $T_1$ , un grupo de difusores está localizado en la posición  $P_1$ . Si se emite un pulso breve desde el transductor en  $T_1$ , llevará un tiempo  $t_1$  para que el pulso alcance la posición  $P_1$  y retorne al transductor. Si un segundo pulso es emitido  $T$  segundos después, en  $T_2=T_1+T$ , el grupo de difusores se habrá movido a una posición  $P_2$ , y el tiempo de vuelo del pulso será  $t_2$ . La distancia axial  $\Delta\delta_z$  que se han desplazado los difusores en la dirección del haz ultrasonoro se puede obtener a partir de:

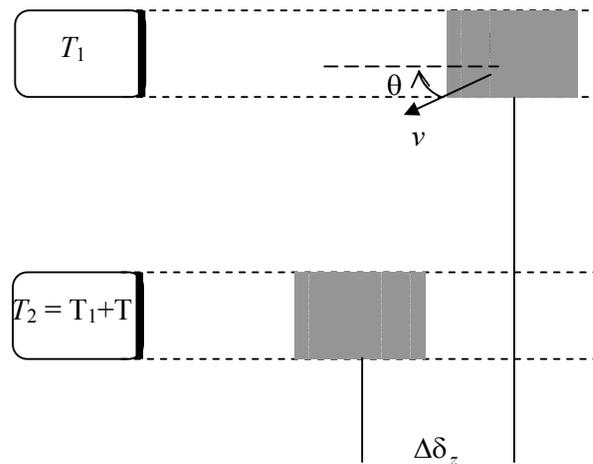
$$\Delta\delta_z = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}c\tau \quad (2)$$

y la componente de la velocidad en la misma dirección es:

$$v_z = v \cos(\theta) = \frac{1}{2} \frac{c\tau}{T} \quad (3)$$

En el análisis anterior hay involucrados dos tiempos de órdenes de magnitud bien diferente. Uno es el tiempo de vuelo del pulso ultrasonoro en alcanzar la posición de los difusores y retornar al transductor (designado con letras minúsculas). A este

tiempo lo llamaremos “tiempo rápido” ya que al ser la velocidad del ultrasonido en tejidos blandos del orden de 1500 m/s, para distancias de algunos centímetros, este tiempo es del orden de algunas decenas de microsegundo. El otro tiempo involucrado es el tiempo entre el envío de dos pulsos ultrasonoros consecutivos (designado con letras mayúsculas). A este lo llamaremos “tiempo lento” ya que la frecuencia de repetición en el envío de pulsos ultrasonoros y el posterior registro de la señal, para la muchos equipos está en el entorno de 1 KHz y por lo tanto este tiempo es del orden del milisegundo. Si la velocidad de las partículas del medio es pequeña, la escala de tiempo asociada a su movimiento es el tiempo lento. En esta hipótesis un A-Scan registra un instante de la posición de los difusores para todas las profundidades, una “fotografía” de la distribución de difusores dentro del medio.



**FIGURA 5:** Idea básica detrás de las técnicas de speckle tracking. Un grupo de difusores se movió desde la posición  $P_1$  a la posición  $P_2$ . Comparando la firma acústica es posible reconstruir el movimiento en la dirección del haz ultrasonoro.

Para reconstruir el movimiento es necesario poder calcular el desplazamiento temporal  $\tau = t_2 - t_1$  de la ecuación (2). En la hipótesis de que el grupo de difusores que se encontraba en la posición  $P_1$  en el instante  $T_1$  de la figura 4, esté en  $P_2$  en el instante  $T_2$ , su firma acústica es la misma pero desplazada una cantidad  $\tau$  en el eje temporal de un A-Scan. Esta hipótesis en general no es válida. Más adelante, en la sección precisión y límites del método, discutiremos su alcance. La habilidad en detectar el desplazamiento temporal se basa entonces en la habilidad que tengamos para comparar dos señales ecográficas entre sí. Esta tarea se logra mediante un algoritmo de

correlación entre señales ecográficas consecutivas. En la siguiente sección se describe el material utilizado en las experiencias, el montaje experimental y se desarrolla el algoritmo de correlación que permite calcular los desplazamientos.

### **III.4 Material: gel de agar-gelatina**

Para saber si los resultados obtenidos a través de la sonoelastografía son correctos, es necesario un conocimiento a priori de la composición interior del material en el que se desarrolla la experiencia. La implementación directa en tejidos biológicos no nos brinda esta posibilidad ya que no conocemos detalladamente las condiciones de frontera, el tipo de inhomogeneidades interiores en una muestra particular, etc. Para evitar estas complicaciones, en la mayoría de las experiencias presentadas en esta tesis utilizamos fantasmas de simulación de tejidos. Esta es una práctica habitual incluso para calibrar ecógrafos de uso médico.

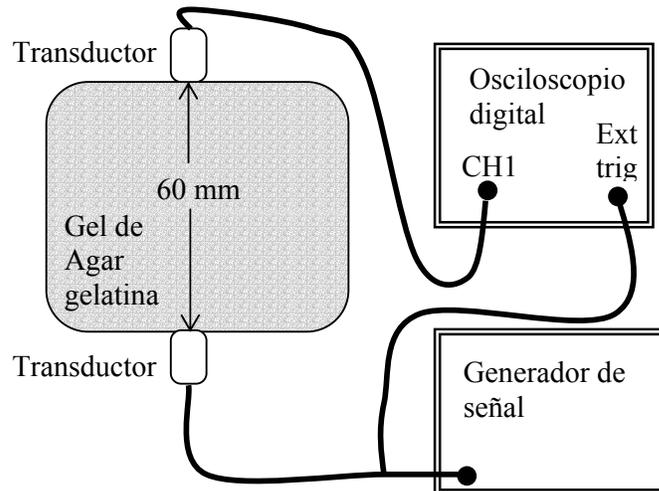
Existen diversos materiales con los que se pueden fabricar los fantasmas de simulación de tejidos. En la literatura [6], [7] es común el uso de gelatina como el material que forma la matriz del gel, a la que se le agregan otros materiales que actúan como difusores de las ondas acústicas. Algunos ejemplos son carborundum (SiC), polvo de vidrio, polvo de grafito o polvo de agar. La elección del material difusor se debe hacer en función de la utilización que se hará del fantoma. El vidrio y el carborundum por ejemplo, tienen un alto contraste de impedancia con la gelatina y los ecos recibidos son de gran amplitud. Esto tiene como ventaja que la relación señal/ruido es alta. Nuestro propósito en la elaboración de un gel es obtener una señal de speckle acústico pero además que el movimiento de los difusores sea el movimiento de la propia matriz de gelatina. Por esta razón no es deseable que los difusores tengan un alto contraste de impedancia con la matriz de gelatina. Los materiales más adecuados para este fin parecen ser el polvo de grafito o el polvo de agar [8]. Nosotros utilizamos la segunda opción.

La elaboración de un gel en el laboratorio se obtiene al mezclar 3% de agar y 6% de gelatina en agua tibia ( $\approx 50$  °C). Variando la concentración de gelatina es posible controlar la elasticidad final de la muestra. El agar oficia como material difusor del ultrasonido, ya que, al contrario de la gelatina que se funde a una temperatura de aproximadamente 30 °C, el agar en polvo permanece sólido hasta los 75 °C.

La descripción detallada del speckle acústico requiere conocer la forma, el tamaño, la impedancia y la posición de cada difusor. Como esta tarea es impracticable

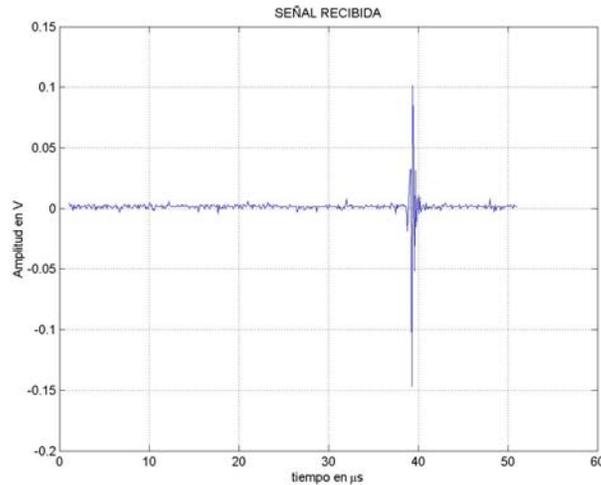
en la presencia de muchos difusores, normalmente se considera que los difusores encontrados en tejidos blandos están distribuidos aleatoria y uniformemente dentro del tejido. En la fabricación de los geles de simulación se procura entonces que la distribución de agar sea uniforme dentro del gel. Para eso es necesario disponer de un sistema agitador mientras la gelatina adquiere una consistencia sólida (gelatiniza). De lo contrario los granos de agar se depositan en el fondo del gel por consecuencia de la gravedad. Los geles construidos de esta manera presentan la propiedad de ser a la vez isótropos y homogéneos. Esta característica permitirá luego, comparar los resultados obtenidos a través de la interferometría speckle con los desarrollados en el capítulo II.

Al tratarse casi en un 90% de agua, las características acústicas de los geles son similares a la de los tejidos blandos. La velocidad de las ondas de compresión en estos geles es del mismo orden que la registrada en tejidos blandos. La figura 6 muestra el montaje utilizado para determinar esta velocidad. Se colocan 2 transductores opuestos por un eje común entre los que se encuentra el gel. La separación entre los transductores es de 60 mm. Con el osciloscopio se mide el retardo temporal entre que se emite un pulso en el transductor inferior de la figura y se recibe en el otro. El inicio de la digitalización de la señal está sincronizado con el envío del pulso ultrasonoro del transductor inferior.



**FIGURA 6:** Montaje para determinar la velocidad de las ondas de compresión en un gel de agar-gelatina fabricado en el laboratorio.

En la figura 7 se muestra la señal captada por el transductor superior. El tiempo de retardo entre la señal emitida y la señal recibida es de  $39 \mu s$ , por lo que la velocidad de la onda ultrasonora de compresión es  $c_p \cong 1526 \text{ m/s}$ .

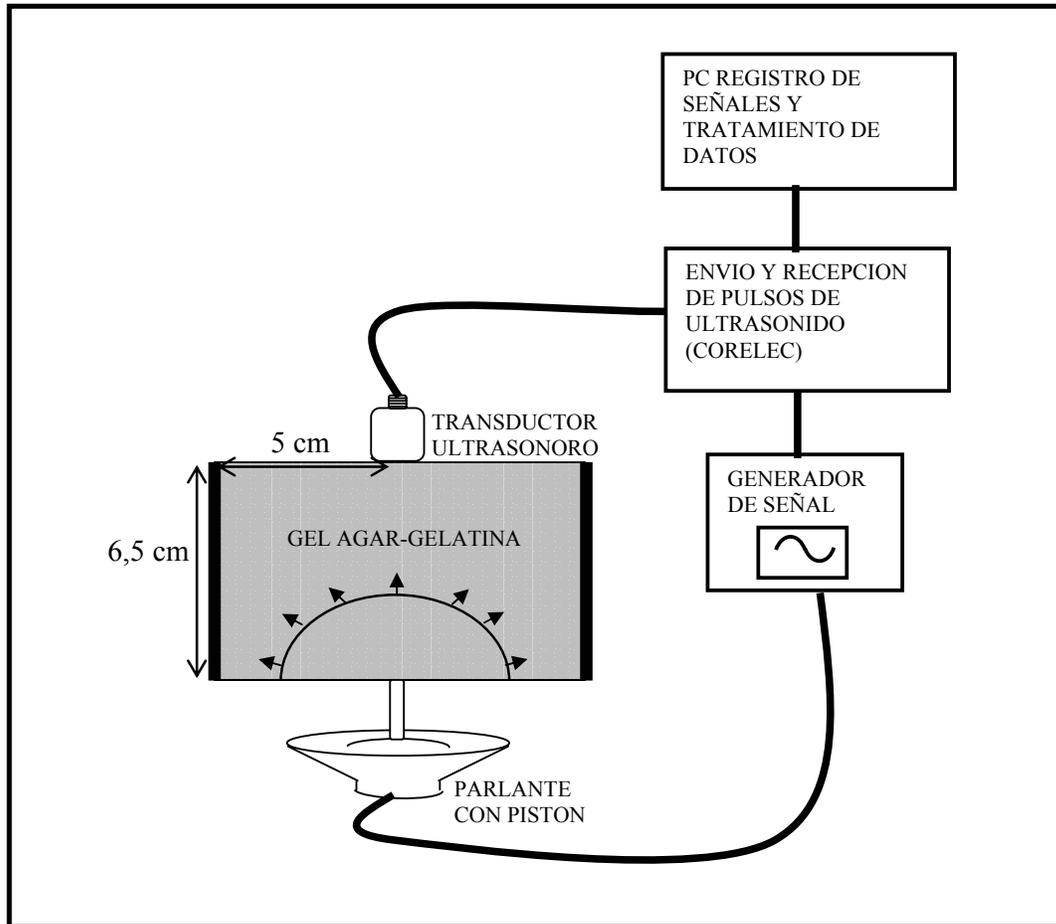


**FIGURA 7:** Señal recibida por el transductor superior. El retardo entre la emisión y la recepción del pulso es de  $39 \mu s$  por lo que la velocidad de la onda de compresión es de  $1526 \text{ m/s}$ .

### III.5 Montaje experimental

El objetivo de las técnicas elastográficas es determinar el módulo elástico de cizalla de un sólido blando. Como vimos en el capítulo anterior, un pistón actuando en forma impulsional sobre la superficie libre de un sólido elástico es capaz de producir ondas de cizalla sobre el eje del pistón. El diseño del montaje experimental fue pensado para aprovechar este hecho. Este aspecto es de importancia práctica ya que en algunas regiones del cuerpo, la superficie accesible de tejidos blandos (lo que se conoce como ventana acústica) es pequeña debido a la presencia de huesos. Por lo tanto la fuente excitadora debe poder acceder a estas regiones y su superficie debe también ser pequeña.

El montaje experimental fue diseñado especialmente para esta tesis y se compone de dos partes principales, un parlante con un pistón acoplado que se utiliza como generador de ondas baja frecuencia en el medio, y el sistema ultrasonoro de emisión-recepción. El montaje se muestra esquemáticamente en la figura 8.

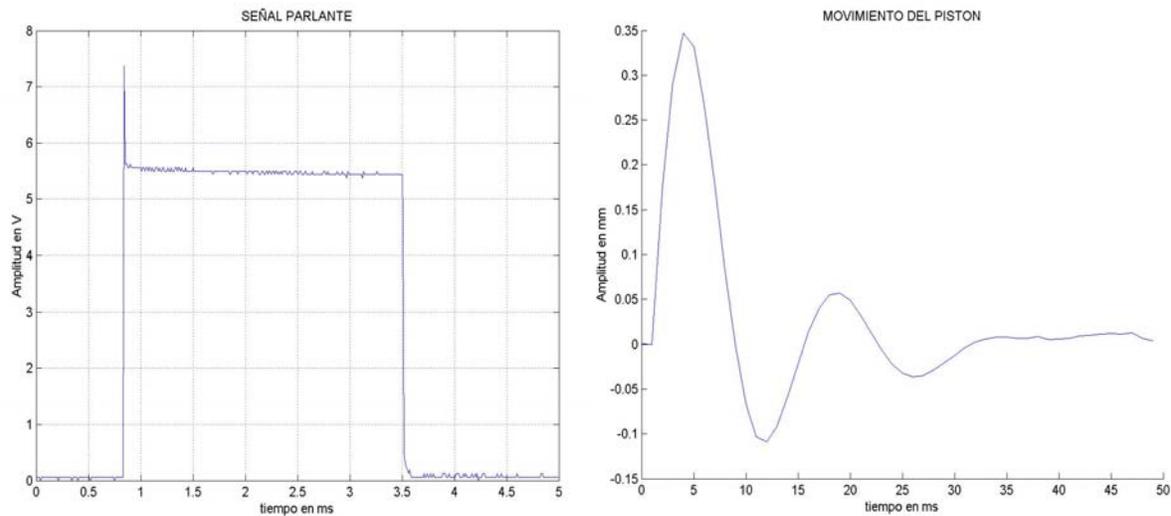


**FIGURA 8:** Montaje experimental. El pistón acoplado al parlante genera ondas de baja frecuencia que se propagan en el gel de agar-gelatina

El parlante utilizado es un Nippon America de 70 W de potencia máxima y  $8 \Omega$  de impedancia. Estas características permiten imprimirle al pistón suficiente energía como para generar vibraciones internas en el gel de agar-gelatina. El pistón acoplado al parlante es cilíndrico y el sistema permite intercambiar entre pistones con radios diferentes. El software permite establecer un retardo temporal entre la señal de excitación del parlante y el inicio de la digitalización de la señal ecográfica. De esta manera, durante este intervalo, el medio permanece en reposo mientras se propagan los primeros pulsos ultrasonoros.

La amplitud de vibración pico a pico del pistón no supera en ningún caso el milímetro y su sentido de vibración es normal a la superficie libre del material. La señal de excitación del parlante es un pulso rectangular de ancho ajustable. En la figura 9 se muestra un ejemplo de esta señal y el movimiento subsiguiente del pistón acoplado. En este caso la señal tiene un ancho de 2,6 ms de duración y el movimiento del pistón

debido a la impedancia del parlante y a su propia inercia es una senoide amortiguada de 65 Hz de frecuencia central. Este movimiento fue registrado con la misma técnica de correlación usada para medir los desplazamientos, explicada más adelante.



**FIGURA 9:** En la izquierda se muestra la señal de excitación del parlante. Es una señal rectangular de ancho 2,6 ms y 5,4 V de amplitud. En la derecha se muestra el movimiento del pistón cuando esta señal es aplicada al parlante. Es una senoide amortiguada.

La parte ultrasonora del montaje utiliza un transductor en modo emisión recepción. En las experiencias presentadas en este capítulo, el transductor se ubica opuesto al pistón sobre el mismo eje como se muestra en la figura 8. La frecuencia central del transductor varía en cada experiencia entre 2.5 MHz y 5MHz. El envío de pulsos y la adquisición de los ecos está controlado por una electrónica fabricada por la sociedad CORELEC. En la emisión el software permite ajustar la amplitud, la frecuencia central del pulso y la cantidad de pulsos a ser enviados. La recepción permite registrar hasta un máximo de 512 A-Scan consecutivos con una frecuencia de recurrencia máxima en el registro de 1KHz. Es decir que el tiempo mínimo entre dos señales es de 1 ms. En cada A-Scan se guardan 2048 puntos muestreados a 40 MHz. Por lo tanto el sistema permite registrar una ventana de  $\approx 50 \mu s$ . Esta ventana corresponde a 38 mm aproximadamente de profundidad en el gel.

### III.6 Algoritmo de correlación

Como mencionamos anteriormente, para reconstruir el campo de desplazamiento del medio utilizaremos un algoritmo de correlación entre las señales de speckle. El objetivo de esta correlación es detectar dos regiones del speckle con la misma firma acústica entre dos señales ecográficas consecutivas. En esta sección describiremos el algoritmo utilizado para estimar los desplazamientos y el tratamiento de señal luego de registradas las señales ecográficas durante la propagación de la onda generada por el pistón. Existen diversos algoritmos propuestos para estimar los desplazamientos [9]. Nosotros elegimos utilizar la covarianza normalizada entre dos señales como un compromiso entre tiempo de calculo y precisión del método. El procedimiento total del tratamiento de señal, se puede dividir en tres pasos.

#### III.6.1 Primer paso del tratamiento de señal

El primer paso consiste en calcular el desplazamiento de un volumen elemental de materia situado a una profundidad dada entre dos tiros ultrasonoros consecutivos. Para ello, se selecciona en la primer señal, una ventana temporal  $X(t)$  entre los instantes  $t_x - \delta t_x$  y  $t_x + \delta t_x$ . Esta señal contiene la contribución de todos los difusores en el volumen  $V_x$  y podemos considerar que contiene entonces una firma acústica única ya que el volumen  $V_x$  es el conjunto de volúmenes isócronos entre  $t_x - \delta t_x$  y  $t_x + \delta t_x$ . Luego, se seleccionan  $n$  ventanas temporales  $[Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)]$  entre los instantes  $[(t_{1y} - \delta t_y, t_{1y} + \delta t_y), (t_{2y} - \delta t_y, t_{2y} + \delta t_y), \dots, (t_{ny} - \delta t_y, t_{ny} + \delta t_y)]$  en la segunda señal ultrasonora en torno al instante  $t_x$ . Para cada par de ventanas  $X(t)$ ,  $Y_j(t)$  se calcula la correlación  $c(X, Y_j)$  como:

$$c(X, Y_j) = \sum_{t=0}^{\Delta t} (X(t) - \bar{X})(Y_j(t) - \bar{Y}) \quad (4)$$

donde  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  son los valores medios temporales de  $X(t)$  e  $Y_j(t)$ . A fin de obtener un coeficiente adimensionado que indique la correlación entre las dos señales  $X$  e  $Y$ , utilizamos el coeficiente de correlación  $R(\tau_j)$  que es función del desplazamiento temporal  $\tau_j = t_x - t_{jy}$  entre las señales correlacionadas:

$$R(\tau_j) = \frac{c(X, Y_j)}{\sqrt{c(X, X)c(Y_j, Y_j)}} \quad (5)$$

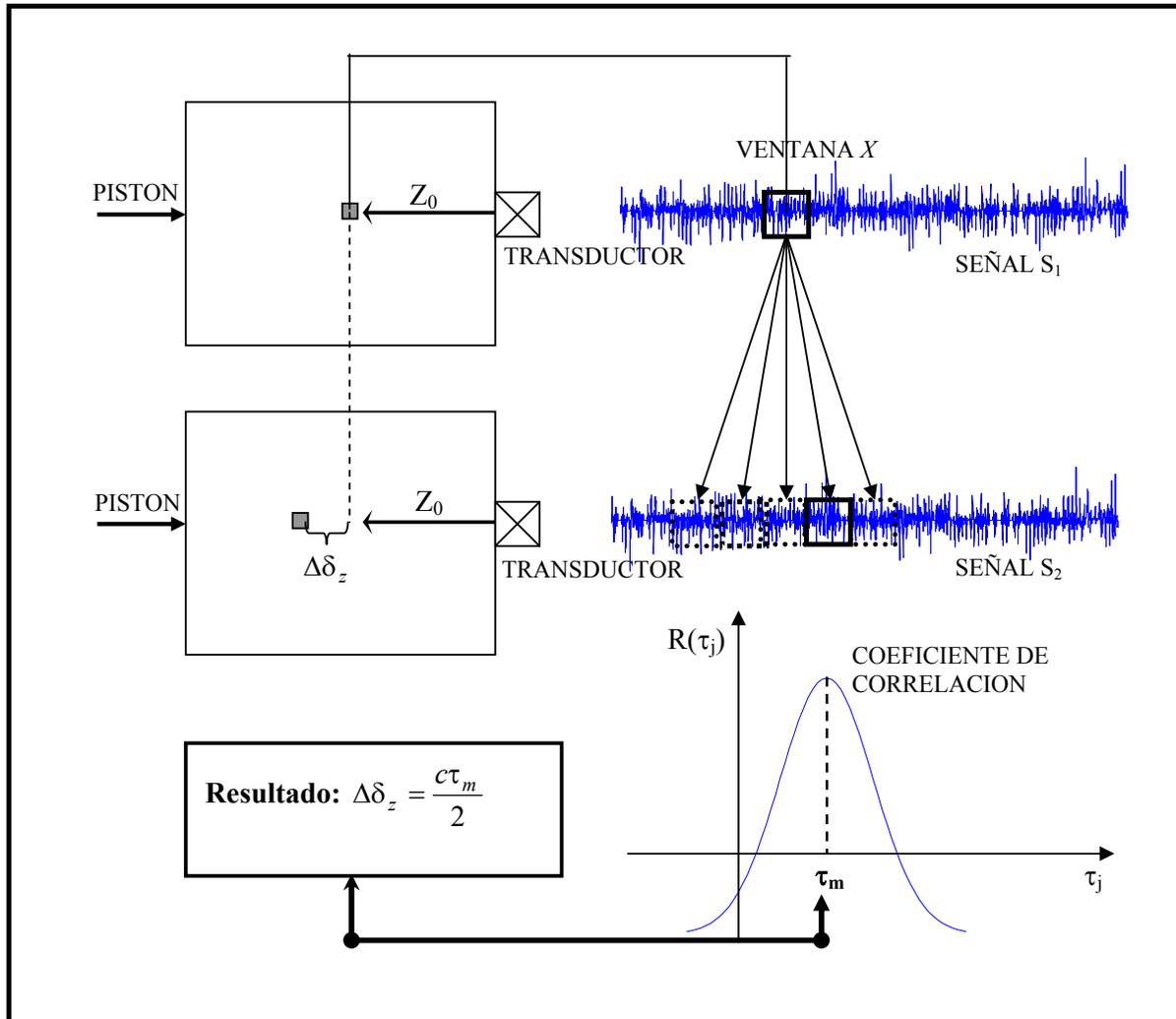
Este coeficiente tiende a 1 a medida que las señales  $X$  e  $Y$  contengan la misma firma acústica. En efecto si  $Y_j(t) = X(t)$  para algún  $j$  en la ecuación (5), entonces  $R(t_j) = 1$ .

Sin embargo, debido a factores que alteran la señal de speckle como el ruido electrónico o el movimiento lateral de los difusores que los puede alejar de la zona de directividad del transductor, el coeficiente de correlación nunca es igual a la unidad. Por lo tanto, la posición del máximo del coeficiente de correlación es quien indica el desplazamiento temporal. Esto permite calcular el desplazamiento entre las ventanas a partir de la fórmula de modo ecográfico:

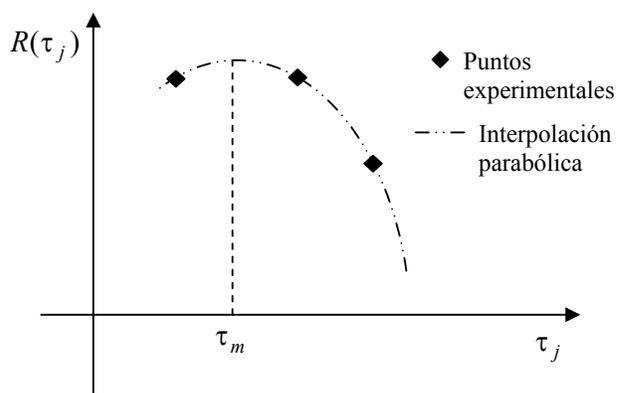
$$\Delta\delta_z = \frac{c\tau_m}{2}$$

Donde  $\tau_m$  es el tiempo correspondiente al máximo valor del coeficiente de correlación  $R(\tau_j)$ . En la figura 10 se muestra gráficamente este procedimiento.

El desplazamiento mínimo que se puede medir de esta manera, está limitado por la frecuencia de muestreo de la señal ecográfica. En este caso donde la frecuencia de muestreo es de 40 MHz, el desplazamiento mínimo es de 19  $\mu\text{m}$  aproximadamente, valor que es bastante inferior a la longitud de onda ultrasonora (300  $\mu\text{m}$  aprox. para una frecuencia ultrasonora de 5 MHz). Además se puede ganar precisión interpolando la señal, de manera que el desplazamiento mínimo disminuya. Se puede mostrar que se obtiene el mismo resultado haciendo la correlación de la señal interpolada que interpolando la correlación entre las señales [10]. Como la segunda opción requiere menos tiempo de cálculo, la utilizaremos a fin de mejorar las medidas. El procedimiento para el cálculo consiste en aislar tres puntos en torno al máximo del coeficiente de correlación. Por estos tres puntos pasa una única parábola cuyo máximo nos da el nuevo valor para el desplazamiento temporal entre las ventanas (figura 11). La elección de una interpolación parabólica se basa en la simpleza y la rápida ejecución del cálculo.



**FIGURA 10:** En esta figura se muestra gráficamente el proceso de correlación entre dos señales para obtener el desplazamiento entre ellas de una región dada del material bajo estudio.



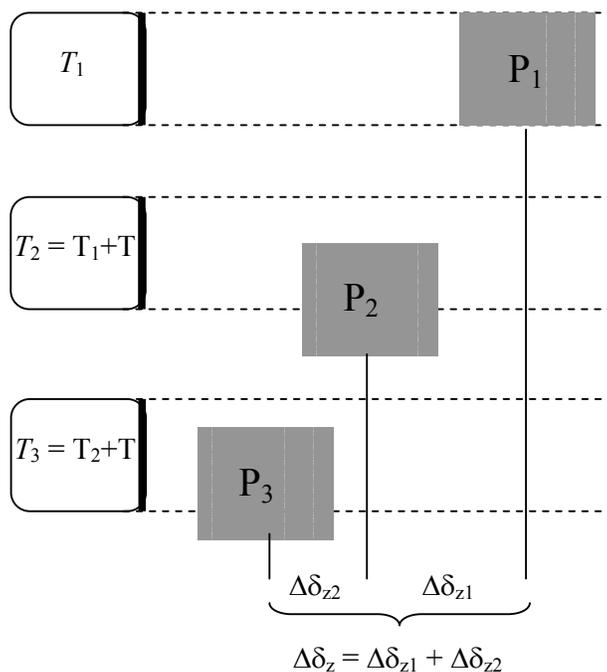
**FIGURA 11:** Interpolación parabólica del coeficiente de correlación, a partir de los puntos experimentales. Esto permite mejorar la precisión del método.

### III.6.2 Segundo paso del tratamiento de señal

El segundo paso del tratamiento de señal consiste en una iteración del primer paso. Una vez obtenido el desplazamiento entre la primer y la segunda señal ultrasonora, es el turno de ésta a ser correlacionada con la tercer señal ultrasonora y luego la tercera con la cuarta y así sucesivamente hasta obtener un vector con los desplazamientos de una misma región del medio en función del tiempo. Si la adquisición de datos consistió en  $N$  señales consecutivas, obtenemos un vector con  $N-1$  valores de desplazamiento. Es importante recordar que con este procedimiento se obtiene la componente de los desplazamientos en la dirección del haz ultrasonoro. Si la configuración experimental es la mostrada en la figura 8, los desplazamientos corresponden a los ocurridos en la dirección del eje del pistón.

#### ¿Desplazamiento o velocidad?

El algoritmo de correlación (5), permite calcular el desplazamiento de una ventana temporal conteniendo la firma acústica de un grupo de difusores, en el intervalo de tiempo entre dos señales consecutivas cualesquiera. El valor del desplazamiento así obtenido es el desplazamiento relativo entre estas dos señales y no está referido a una posición absoluta de los difusores. Para obtener el campo de desplazamientos es necesario referirse al estado de quietud del medio, sumando los desplazamientos relativos anteriores como se muestra en la figura 12.



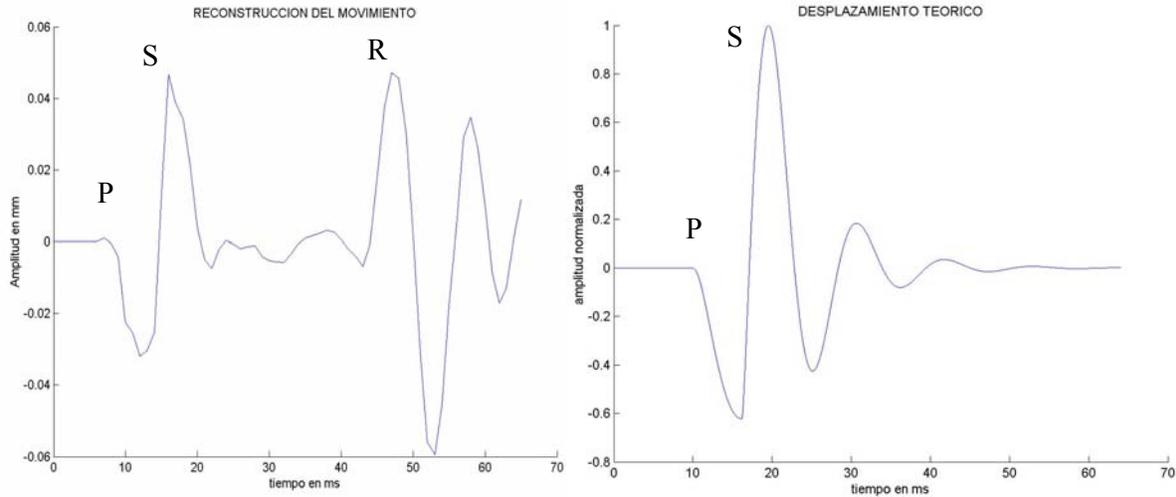
**FIGURA 12:** El cálculo de desplazamiento entre  $P_1$  y  $P_3$  se puede obtener sumando los desplazamientos entre  $P_1$  y  $P_2$  y entre  $P_2$  y  $P_3$ . Sin embargo esto aumenta la incertidumbre del resultado.

Sin embargo este proceso agrega mayor incertidumbre al resultado final debido a la operación suma. Pequeños errores en la estimación del desplazamiento local se propagan de manera que el resultado para tiempos grandes tiene una gran incertidumbre. Por esta razón preferimos calcular la velocidad de los desplazamientos a través de la ecuación (3) que se vuelve a escribir aquí:

$$v_z = \frac{1}{2} \frac{c\tau}{T}$$

El cálculo de la velocidad se hace simplemente calculando el desplazamiento relativo entre dos señales consecutivas, sin necesidad de referirse al estado de quietud. De esta manera el error en cada valor de la velocidad es solamente el cometido al estimar el desplazamiento entre dos señales consecutivas. Teniendo ahora la precisión anterior en mente, cuando nos referimos a desplazamientos estaremos hablando en realidad a la velocidad de los desplazamientos.

En la figura 13 se muestra el desplazamiento (velocidad) en función del tiempo para una profundidad dada en el interior de un gel de agar-gelatina homogéneo e isótropo. Para comparar con el desplazamiento teórico obtenido a través de la función de Green es necesario hacer el producto de convolución con la señal de entrada. Como lo que obtenemos experimentalmente es la velocidad de desplazamiento, el producto de convolución lo hacemos entre la derivada temporal de la función de Green  $\partial G_z^0 / \partial t$  con la señal de entrada similar a la mostrada en la figura 9. La frecuencia de vibración de la señal de entrada utilizada es igual a la calculada utilizando los datos experimentales de la figura izquierda. Este resultado se muestra en la figura derecha. En ambas figuras se marca con P a la onda de compresión y con S a la onda de cizalla. La diferencia entre estas figuras es debido al tamaño finito del gel. La onda de cizalla se refleja en la superficie libre del gel opuesta al pistón y genera desplazamientos internos en el gel que interfieren con los generados por el pistón. A partir de los 47 ms es posible observar en la figura izquierda, esta onda reflejada marcada con R. Más adelante veremos que para calcular la velocidad de la onda de cizalla, es conveniente evitar la onda reflejada en los cálculos.

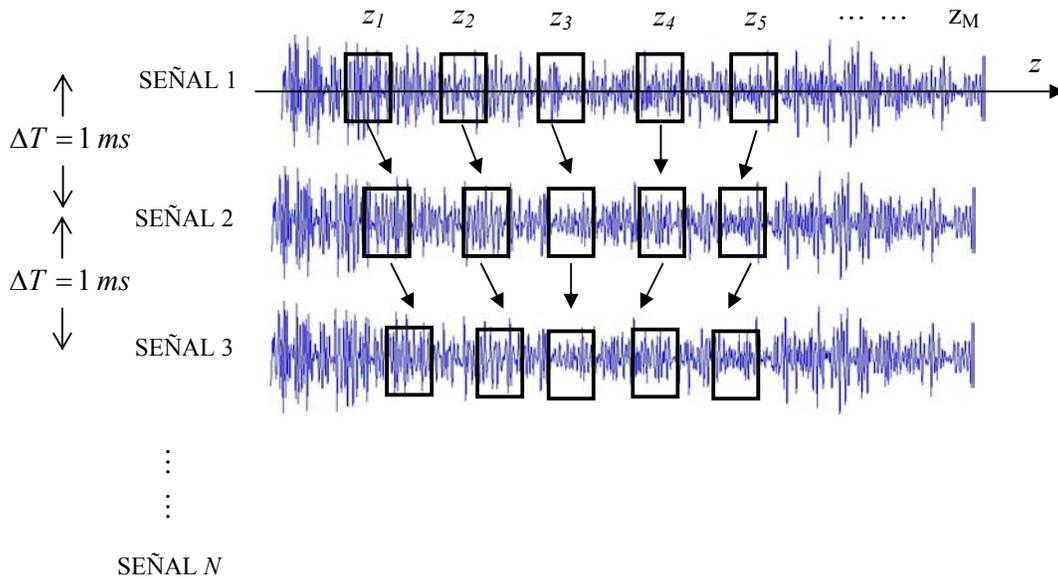


**FIGURA 13:** En la izquierda se muestra la reconstrucción del movimiento a partir del algoritmo de correlación de la ecuación (5). En la derecha se muestra el resultado previsto por la función de Green. En ambas figuras se marca con P a la onda de compresión y con S a la onda de cizalla. En la figura izquierda además se marca con R a la onda reflejada en la superficie libre del gel.

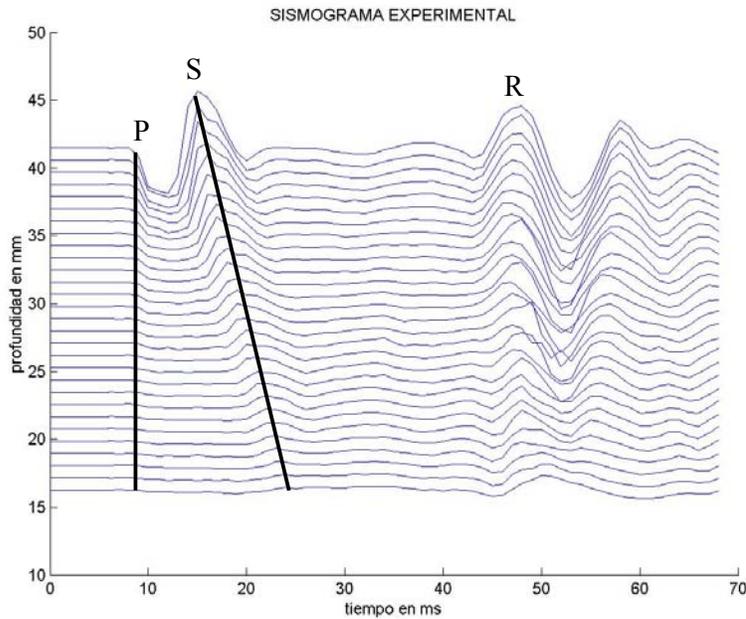
### III.6.3 Tercer paso del tratamiento de señal

Como tercer y último paso en el tratamiento de señal, se seleccionan  $M$  ventanas temporales en la primer señal ultrasonora correspondientes a diferentes profundidades dentro del medio. Cada una de estas ventanas es objeto del tratamiento descrito anteriormente. El resultado final del tratamiento de señal es una matriz  $(N-1) \times M$ , donde cada columna representa la evolución temporal de los desplazamientos de un volumen elemental del medio a una profundidad dada. La figura 14 resume los tres pasos descritos anteriormente.

La matriz final del resultado, se puede representar en forma de sismograma, como se muestra en la figura 15. El eje horizontal en esta figura corresponde al tiempo (lento), mientras que en el eje vertical se muestran los desplazamientos obtenidos para cada profundidad. Los desplazamientos están amplificados para una mejor visualización. La profundidad en estas figuras se mide desde el transductor y la anotaremos como  $p_z$ , reservando la notación  $z$  para la distancia al pistón. El transductor está ubicado en  $p_z = 0$ , mientras que el pistón se encuentra en  $p_z = 60 \text{ mm}$ .



**FIGURA 14:** Resumen de los tres pasos del tratamiento de señal descrito en el texto.

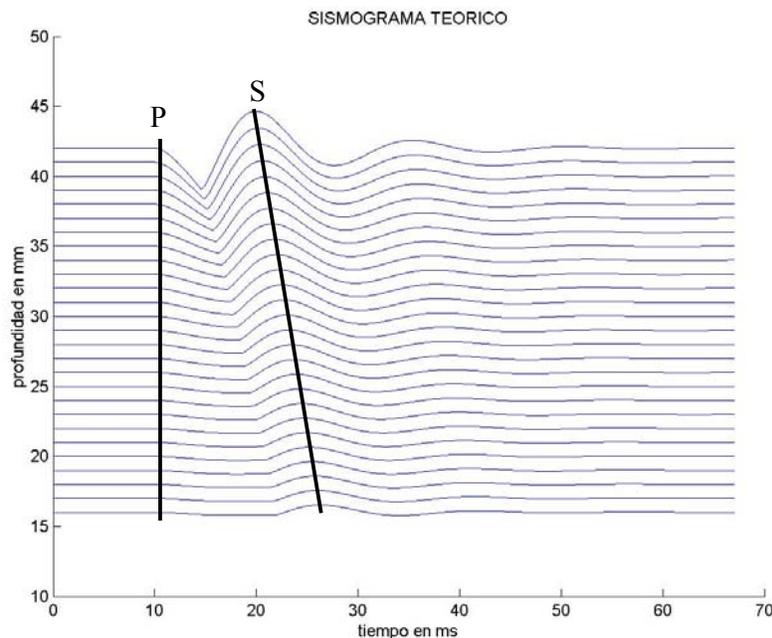


**FIGURA 15:** Representación de la matriz de desplazamientos en forma de sismograma. Se observa la propagación de la onda de compresión (P), la onda de cizalla (S) y de ondas reflejadas (R) en la superficie libre del gel opuesta al pistón.

Hay varios puntos a destacar en esta figura. Primero, se observa que para  $t = 9$  ms, hay una perturbación que parece propagarse en el gel en forma casi instantánea. Se

trata de la onda de compresión P cuya velocidad es aproximadamente 1500 m/s. En segundo lugar se puede observar en la figura la propagación de la onda de cizalla en el gel y su desfasaje con la profundidad. El movimiento de los puntos más lejanos al pistón está retardado respecto a los más cercanos. A partir de este desfasaje se puede obtener la velocidad de propagación de esta onda, que en este caso es de 2.8 m/s. Por último vemos que a partir de los 45 ms (variable con la profundidad) se observa una onda que viaja en sentido contrario (desde el transductor hacia el pistón); se trata de una onda reflejada en la superficie libre del gel opuesta al pistón. Al intervalo de tiempo entre el arribo de la onda de cizalla y el arribo de la onda reflejada lo llamaremos período transitorio. Este intervalo es variable con la profundidad. Este nombre es en contraste a la zona que llamaremos estacionaria donde interfieren la onda directa con la onda reflejada.

En la figura 16 se muestra el sismograma “sintético” obtenido con la función de Green. En  $t = 10$  ms se da el debut de las vibraciones. La fuente de desplazamientos se encuentra en la parte superior de la figura para poder comparar con el sismograma experimental. Nuevamente aquí, las diferencias con el sismograma experimental aparecen por las dimensiones finitas del gel.



**FIGURA 16:** Sismograma obtenido a través de la función de Green sobre el eje de la fuente. Las rectas marcan la propagación de la onda de compresión P y de cizalla S.

### III.7 Velocidad de la onda de cizalla

En el apéndice B se obtuvo una expresión aproximada de la función de Green sobre el eje de la fuente. La expresión final en función del tiempo, se construyó a partir de expresiones aproximadas en torno a los tiempos característicos  $t_p$ ,  $t_s$  y para tiempos mucho mayores a éstos. Para  $t \approx t_s$ , el término correspondiente a la onda P es mucho menor que el correspondiente a la onda S. La expresión para esta última es (ver apéndice B):

$$\frac{\partial G_{zs}^0}{\partial t} \Big|_{t \approx t_s} \cong -\frac{2c_p}{\pi\mu z^2} \frac{\delta(t-t_s)}{\gamma^2} = -\frac{2c_p}{\pi\mu z^2} \frac{\delta(t-z/c_s)}{\gamma^2} \quad (6)$$

donde hemos sustituido  $t_s$  por  $z/c_s$ . Los desplazamientos generados por una excitación arbitraria del tiempo  $E(t)$ , se obtienen a través del producto de convolución de la expresión (6) con la señal de entrada  $E(t)$ . El resultado es:

$$u(z,t) = \frac{u_0}{z^2} E(t-z/c_s) \quad (7)$$

donde  $u_0 = -2c_p / \pi\mu\gamma^2$ . La ecuación (7) muestra que la entrada  $E(t)$  se propaga según el eje  $z$  con velocidad  $c_s$  dentro del medio y que su amplitud decae como  $1/z^2$ .

La transformada de Fourier de los desplazamientos es:

$$\mathcal{F}[u(z,t)] = \frac{u_0}{z^2} \mathcal{F}[E(t-z/c_s)] = \frac{u_0}{z^2} e^{-j\omega z/c_s} \mathcal{F}[E(t)] \quad (8)$$

La transformada de Fourier de la función de entrada se puede expresar como:

$$\mathcal{F}[E(t)] = F(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (9)$$

donde  $F(\omega)$  es el módulo de la transformada y  $\phi(\omega)$  es la fase. Sustituyendo la ecuación (9) en la ecuación (8) encontramos:

$$\mathcal{F}[u(z,t)] = \frac{u_0}{z^2} e^{-j\omega z/c_s} F(\omega) e^{j\phi(\omega)} = A(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (10)$$

donde hemos definido  $A(\omega) = (u_0/z^2) F(\omega)$ ,  $\phi(\omega) = \phi(\omega) - kz$  y  $k = \omega/c_s$ . En la práctica, la señal de entrada es una senoide amortiguada como se muestra en la figura 9. Este pulso que se propaga en el medio tiene una frecuencia central  $\omega_0$ . La velocidad de fase se puede obtener entonces haciendo  $c_s = \omega_0/k$ . El valor de  $k$  se puede obtener notando que:

$$k = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (11)$$

La velocidad de fase de la onda de cizalla es por lo tanto

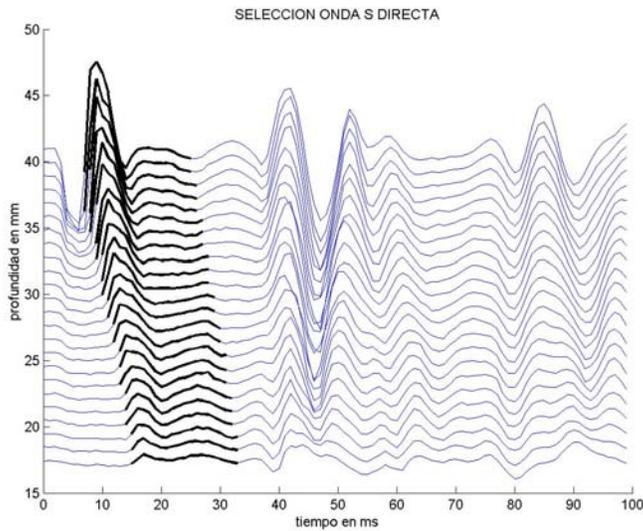
$$c_s = \frac{\omega_0}{k} = -\omega_0 \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^{-1} \quad (12)$$

Esta expresión es una aproximación a la velocidad de fase de la onda. Para llegar a ella partimos de la base de que la ecuación (6) es válida. Sin embargo hay dos puntos a tener en cuenta para darle validez a este resultado. Primero, en el apéndice B se muestra que la respuesta a una excitación monocromática, se compone de tres términos. El término de la onda P que, como vimos, es mucho menor al de la onda S a bajas frecuencias, el término de la onda S, que es el que figura en la ecuación (6) y el término de acoplamiento P+S. Este último término puede no ser despreciable frente al término de la onda S. De hecho estos términos se igualan a una profundidad dada por:

$$z_{sp} = \frac{\gamma c_p}{\omega_0} = \frac{c_s}{\omega_0} = \frac{\lambda_s}{2\pi} \quad (13)$$

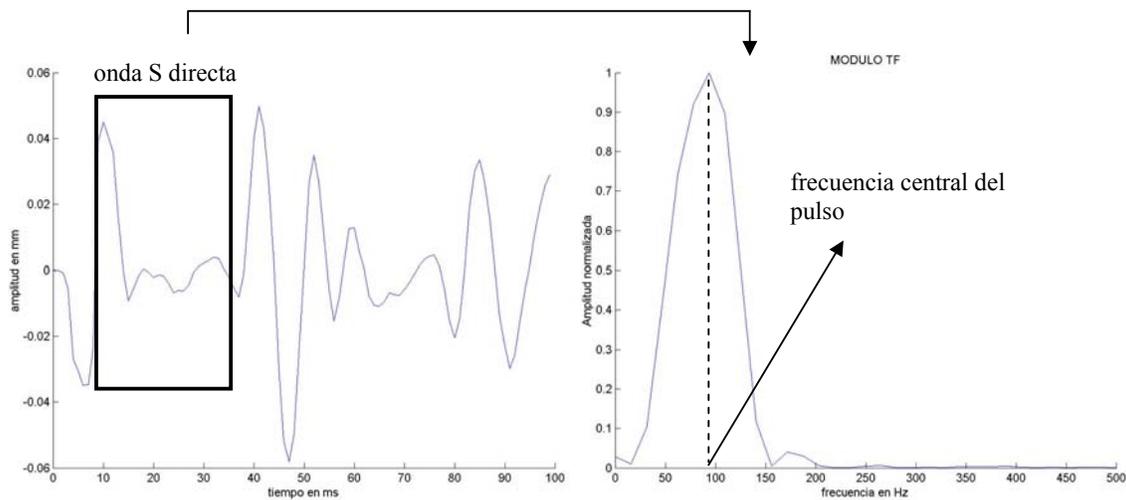
Para valores de  $c_s$  en torno a 3 m/s y frecuencias del orden de 100 Hz, este límite está en torno a los 8 mm de la fuente. Esperamos entonces que para  $z > z_{sp}$ , el modo dominante sea la onda S. El segundo punto es que con el tratamiento de señal descrito en la sección anterior se registra no sólo la onda S sino también la onda P y ondas reflejadas en los bordes. Para calcular correctamente la velocidad de fase de la onda de cizalla, es necesario seleccionar aquella zona del sismograma que corresponde a la propagación de la onda S directa, es decir antes de las reflexiones. El procedimiento consiste en seleccionar una ventana temporal  $[t_1, t_2]$  en la línea del sismograma más próxima al pistón, de manera que el tiempo inicial  $t_1$  coincida con el arribo de la onda de cizalla y el final  $t_2$  sea anterior al de arribo de las ondas reflejadas. Una vez seleccionada la ventana temporal de la zona transitoria en la línea más próxima al pistón, se puede obtener, a través del máximo del coeficiente de correlación, en forma similar al cálculo de los desplazamientos, el retardo temporal entre la primer y la segunda línea del sismograma. Se repite este procedimiento entre las líneas sucesivas hasta llegar a la última línea del sismograma. Como resultado se obtiene una columna de valores de retardos temporales entre las profundidades. De esta manera se determina la zona transitoria para todo el sismograma. La figura 17 muestra la zona transitoria

para el sismograma de la figura 15. Las líneas más gruesas indican la selección de la onda S directa, obtenida a través del algoritmo de correlación.



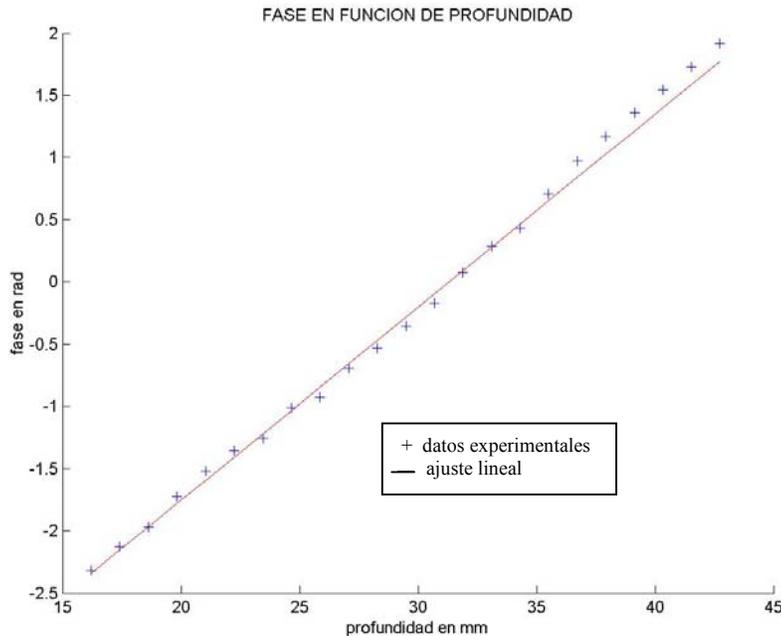
**FIGURA 17:** Se muestra con líneas más gruesas la determinación de la zona transitoria a través del algoritmo de correlación para calcular los retardos temporales entre líneas sucesivas.

Para cada ventana temporal (cada línea gruesa en la figura anterior) obtenida de esta manera, se puede calcular la frecuencia central del pulso y la fase de la onda a través del análisis de Fourier, como se muestra en la figura 18. El valor de la fase para cada profundidad se obtiene a la frecuencia donde el módulo de la transformada de Fourier es máximo. En el ejemplo de la figura esta frecuencia es de 96 Hz. Haciendo un ajuste lineal entre la fase y la profundidad, se obtiene entonces una estimación de la velocidad.



**FIGURA 18:** A la izquierda se muestra la selección de la onda S en una línea del sismograma. A la derecha el módulo de la transformada de Fourier. La frecuencia central es 96 Hz.

Las experiencias realizadas muestran un comportamiento aproximadamente lineal en la zona transitoria. En la figura 19 se muestra la fase en función de la profundidad, obtenida del sismograma de la figura 15 y un ajuste lineal por mínimos cuadrados.



**FIGURA 19:** Fase en función de la profundidad para el sismograma de la figura 13. El pistón se encuentra en  $p_z = 60 \text{ mm}$ .

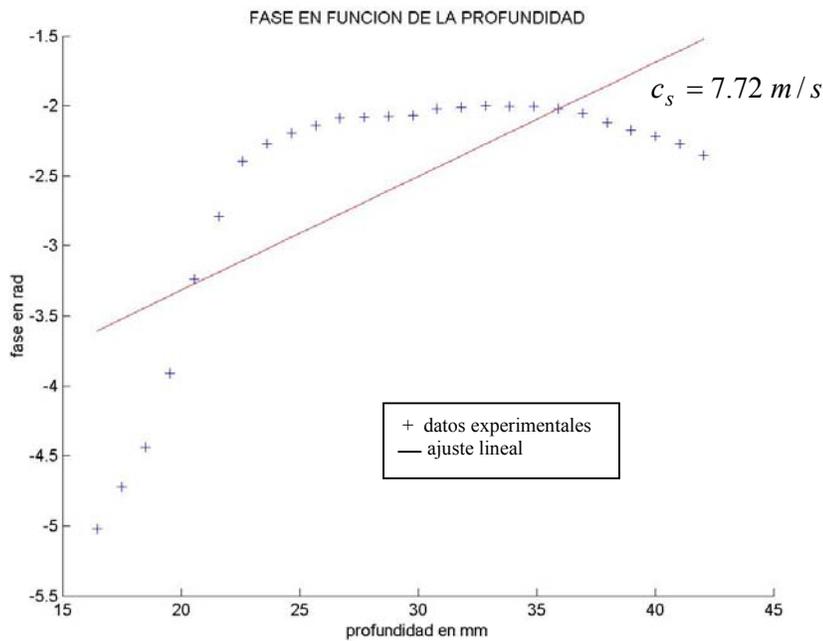
La velocidad de la onda de cizalla se obtiene multiplicando el inverso de la pendiente de la recta ajustada por el método de mínimos cuadrados por la frecuencia angular de vibración de la onda. En este caso el valor de la velocidad de fase encontrado es:

$$c_s = 2.8 \pm 0.1 \text{ m/s}$$

La incertidumbre en el resultado se obtiene a partir de la desviación estándar del ajuste por mínimos cuadrados. El coeficiente de correlación del ajuste lineal para el ejemplo mostrado es  $r = 0.983$ .

Al arribar la onda de cizalla al borde del gel opuesto al pistón se produce una zona de interferencia entre la onda directa y la onda reflejada. Pueden producirse incluso cambios de modo, es decir una onda S que arriba a la interfase puede reflejar al medio una onda P además de una onda S [12]. La interferencia de la onda directa con las ondas reflejadas modifica la fase y la amplitud, de manera que se obtiene un valor

erróneo de la velocidad. La figura 20 muestra la fase en función de la profundidad en la zona estacionaria y el valor calculado de la velocidad.



**FIGURA 20:** Fase en función de la profundidad calculada en la zona estacionaria. En esta zona, el valor calculado para la velocidad es erróneo.

Este tipo de inconvenientes fue el que inspiró a Fink y su grupo [13] a utilizar una excitación del tipo impulsional como la utilizada aquí, y estudiar los movimientos producidos en la zona transitoria, antes de que se contaminen por las ondas reflejadas. De esta manera la determinación de la velocidad es independiente de las condiciones de borde.

Una vez establecido el valor de la onda de cizalla en el medio se puede estimar el módulo elástico  $\mu_1$ . En una primera aproximación podemos suponer que el gel de agar-gelatina se trata de un medio elástico. En esta hipótesis  $\mu_1$  está dado por (ecuación 29 del capítulo II):

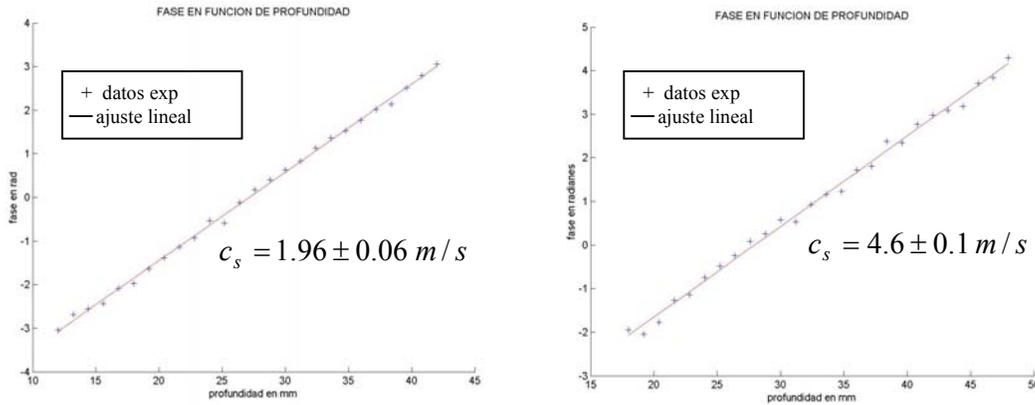
$$\mu_1 = \rho c_s^2$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio. Para el caso de los geles de agar-gelatina esta densidad la estimamos en  $\rho \cong 1010 \text{ Kg/m}^3$  y por lo tanto:

$$\mu_1 = 7.9 \pm 0.5 \text{ KPa}$$

Este valor es similar al registrado en tejidos blandos[14].

Variando la concentración de gelatina en la elaboración de un fantoma, es posible controlar la elasticidad final de la muestra. En la figura 21, se muestra la fase en función de la profundidad para dos geles con diferente concentración de gelatina. La figura izquierda corresponde a un gel construido de 3% de agar y 3% de gelatina, mientras que el de la figura derecha fue construido de 3% de agar y 6% de gelatina. En el primer caso el módulo elástico es  $\mu_1 = 3.9 \pm 0.3 \text{ KPa}$  y en el segundo  $\mu_1 = 21 \pm 1 \text{ KPa}$ .



**FIGURA 21:** La concentración de gelatina controla la elasticidad final de la muestra. La figura muestra los resultados para dos geles con diferentes concentraciones

### III.8 Viscosidad

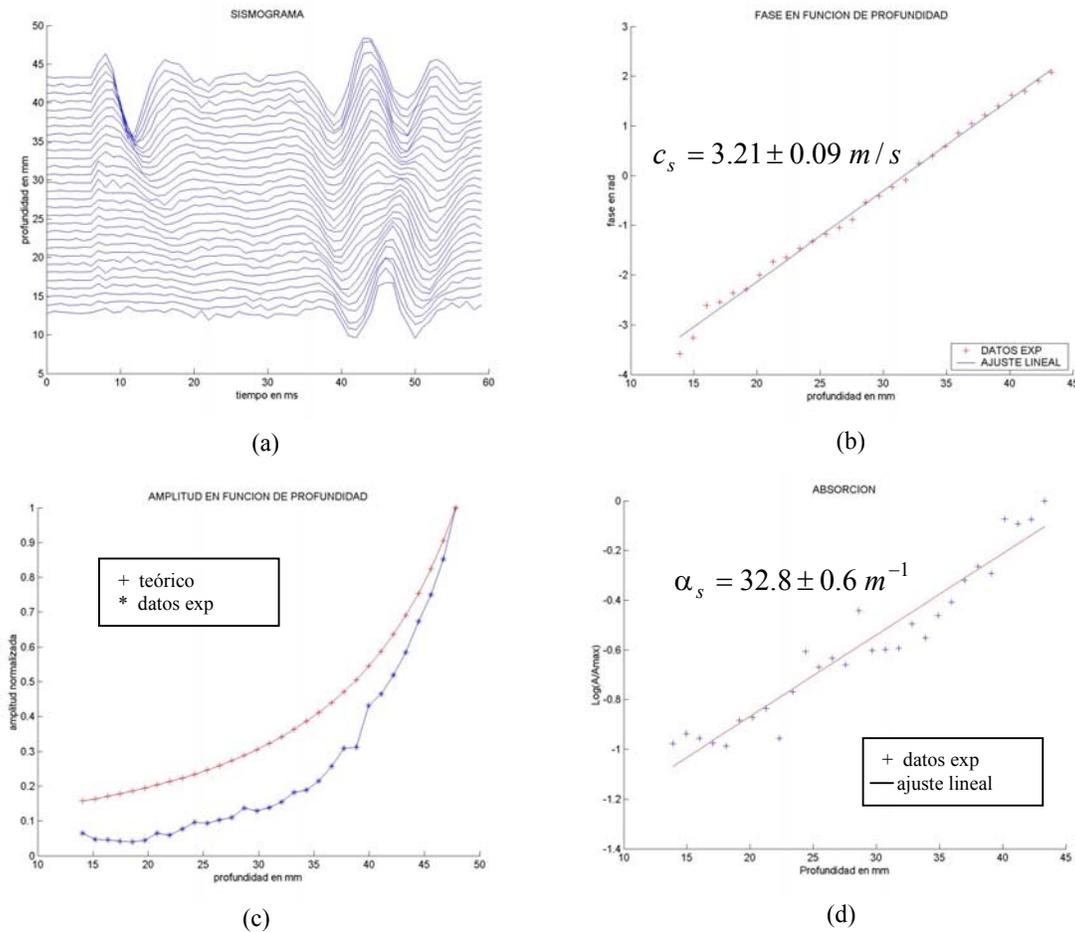
Como se mencionó en el capítulo II, una característica común de los tejidos biológicos es su comportamiento viscoso. El resultado anterior para el módulo de Young se obtuvo suponiendo un medio perfectamente elástico. En el caso del modelo viscoelástico lineal de Voigt introducido en el capítulo II, los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  (coeficiente viscoso de cizalla) se pueden obtener a través de  $c_s$  y  $\alpha_s$  (coeficiente de absorción) de la ecuación (28) del capítulo II:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{\rho c_s^2}{\left(1 - \eta^2\right) \left(\frac{2}{1 - \eta^2} - 1\right)^2} \\ \mu_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\rho \mu_1 c_s^2}{1 - \eta^2} - \mu_1^2} \end{array} \right. \quad (14)$$

donde  $\eta^2 = \left(\frac{\alpha_s c_s}{\omega}\right)^2$ . El coeficiente de absorción  $\alpha_s$  se puede obtener ajustando una caída exponencial de la amplitud de la onda de cizalla con la distancia  $z$  a la fuente:

$$u_s(z) = u_{s0} e^{-\alpha_s z} \tag{15}$$

Pero para tener el valor correcto de  $\alpha_s$  es necesario corregir la atenuación de la onda por la difracción. En el apéndice B se muestra que la amplitud del término S del desplazamiento (velocidad) sobre el eje, decae con la distancia  $z$  a la fuente como  $1/z^2$ .



**FIGURA 22:** Sismograma de un gel homogéneo e isotrópico (a), fase en función de la profundidad (b), amplitud de la onda de cizalla comparado con el decaimiento previsto teóricamente (c) y linealización de la ecuación (14) de donde se obtiene el coeficiente de absorción (d).

La figura 22 muestra (a) un sismograma, (b) la fase en función de la profundidad y (c) la amplitud de la onda de cizalla en función de la profundidad calculada en un gel homogéneo e isotrópico. En la figura (c), se superpone además el decaimiento previsto

teóricamente. Se observa que la amplitud de la onda de cizalla decae más rápido que  $1/z^2$ . Si atribuimos esta pérdida de amplitud a la absorción, se puede calcular el coeficiente de respectivo  $\alpha_s$  a través de la ecuación (15). La figura 22 (d) muestra un ajuste lineal de esta ecuación de donde la pendiente corresponde a  $\alpha_s$  cuyo valor se muestra en la figura. Con estos datos los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son los siguientes:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (9.4 \pm 0.3) \times 10^3 \text{ Pa} \\ \mu_2 &= 5.9 \pm 0.2 \text{ Pa s}\end{aligned}\tag{16}$$

### III.9 EL PISTON

En esta sección abordaremos los efectos de la difracción. En el capítulo II se estudió el campo de desplazamientos generado por una excitación impulsional y puntual. En la práctica sin embargo, la excitación se genera a través de un pistón de radio no nulo. El sistema parlante-pistón de la figura 9 permite intercambiar el pistón cilíndrico acoplado al parlante de manera que se pueden utilizar diferentes radios. Disponemos para este trabajo de tres pistones de radios 2.5 mm, 5 mm y 7.5 mm. La altura de las muestras utilizadas en general no supera los 65 mm. A estas distancias, las dimensiones del pistón no son despreciables. Como el medio es considerado lineal, el desplazamiento en un punto  $z_0$  sobre el eje se debe a la contribución de todos los puntos de la superficie del pistón. La figura 23 muestra la contribución de un punto genérico  $(r', \varphi')$ . El desplazamiento total está dado por la integral de Rayleigh:

$$u_z^0(z, t) = \int_{S'} \frac{\partial G_z^0(z, \mathbf{r}', t)}{\partial t} d^2 r' \tag{17}$$

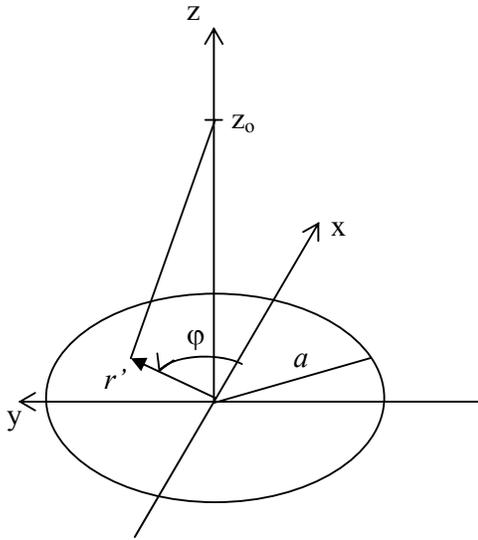
donde  $S'$  es la superficie del pistón. Como no disponemos de una expresión analítica de la función de Green fuera del eje, esta integral se llevó a cabo numéricamente. Dada la simetría del problema, la función no depende de la coordenada  $\varphi$  y la ecuación (17) se escribe:

$$u_z^0(z, t) = 2\pi \int_0^a r' \frac{\partial G_z^0(z, r', t)}{\partial t} dr' \tag{18}$$

donde  $a$  es el radio del pistón.

La amplitud de los desplazamientos en la ecuación (18) depende de la distancia a  $z$  pero también depende del tiempo. Para tiempos menores a  $z_0 / c_s$  no hay contribución

de la onda de cizalla. Para  $t > \sqrt{z_o^2 + a^2} / c_s$  ningún punto contribuye apreciablemente (La contribución no es nula porque la función de Green presenta un “tallo” que decae rápidamente a cero). Por lo tanto para cada posición  $z_o$ , la contribución a la onda S es apreciable para los tiempos comprendidos entre  $t_{\min} = z_o / c_s$  y  $t_{\max} = \sqrt{z_o^2 + a^2} / c_s$ .

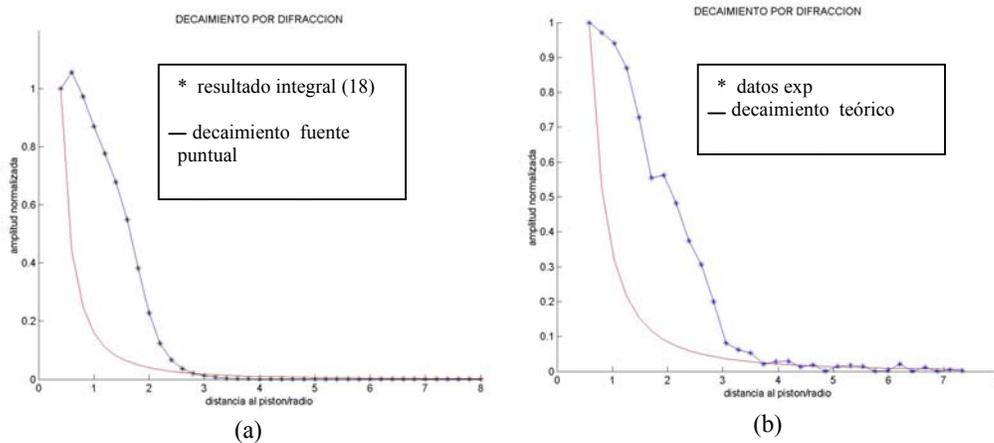


**FIGURA 23:** contribución de un punto genérico de la superficie del pistón al desplazamiento en el punto  $Z_o$  sobre el eje. La contribución de todos los puntos se calcula a partir de la integral dada en la ecuación (18).

Experimentalmente medimos el máximo de la amplitud de la onda S para cada profundidad. Para poder comparar con los resultados experimentales, determinamos el máximo de la amplitud dada en la ecuación (18) para cada posición  $z$ . El resultado se muestra en la figura 24a, en función de  $z/a$ . Este decaimiento se compara con el decaimiento previsto para una fuente puntual de  $1/z^2$ . La figura fue construida utilizando  $c_p = 1500 \text{ m/s}$  y  $c_s = 5 \text{ m/s}$ . Se observa en la figura que para distancias menores a  $3a$ , la amplitud es mayor al decaimiento previsto para una fuente puntual. Para distancias mayores, los dos resultados coinciden aproximadamente. Este hecho se confirma experimentalmente como muestra la figura 24b. Creemos que las diferencias con la curva de la izquierda se pueden deber a la influencia de la onda de cabeza. En efecto, el ángulo crítico  $\theta_c$  para el que se registra la onda de cabeza es prácticamente nulo para sólidos blandos, ya que  $c_s / c_p \cong 0$ . Para puntos cercanos al eje, la velocidad de la onda de cabeza es muy similar a la de la onda de cizalla por lo que no podemos separar en el tiempo estas dos ondas. Como el propio transductor tiene un diámetro de 1

cm, los desplazamientos que detectamos sobre el eje, están “contaminados” por la onda de cabeza. Esto podría explicar por que la curva experimental de la derecha decae más suavemente que la forma predicha por la ecuación (18)

Es decir que para obtener resultados correctos para la absorción y por lo tanto para el coeficiente viscoso de cizalla, medimos la atenuación a partir de distancias al pistón mayores a  $3a$ . Para calcular el coeficiente de absorción mostrado en la figura 22 se tuvo este cuidado ya que el pistón se ubica a una profundidad  $p_z = 65 \text{ mm}$



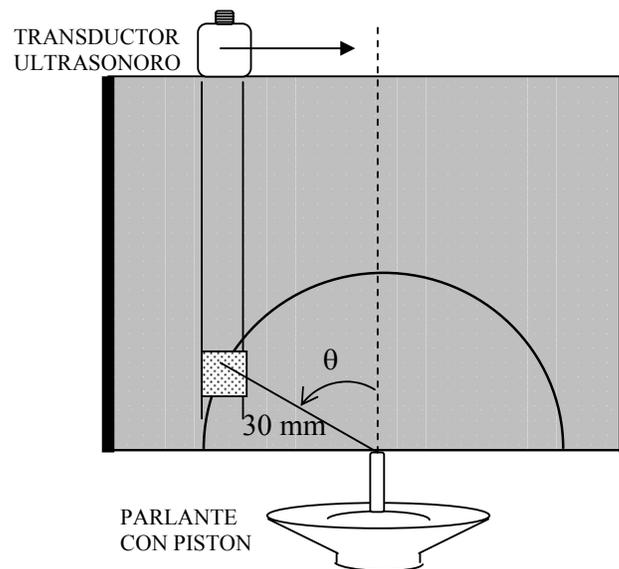
**FIGURA 24:** (a) Decaimiento de la amplitud en función de la distancia a la fuente calculada a partir de la integral (16). Se superpone el decaimiento para una fuente puntual. (b) Resultado experimental obtenido con un pistón de 5 mm de radio

Se desprende del resultado anterior que conviene trabajar con pistones de radio pequeño de manera que la geometría del pistón no sea un factor limitante para obtener resultados correctos. Sin embargo, si la superficie del pistón es demasiado pequeña, la amplitud de las vibraciones al interior del medio resulta también pequeña. En esta situación, la relación señal/ruido es baja y la calidad de los resultados disminuye. Esto supone un compromiso en la elección del radio del pistón. De los pistones utilizados, encontramos que los mejores resultados se obtienen con el de 5 mm de radio.

### III.10 Diagrama de directividad

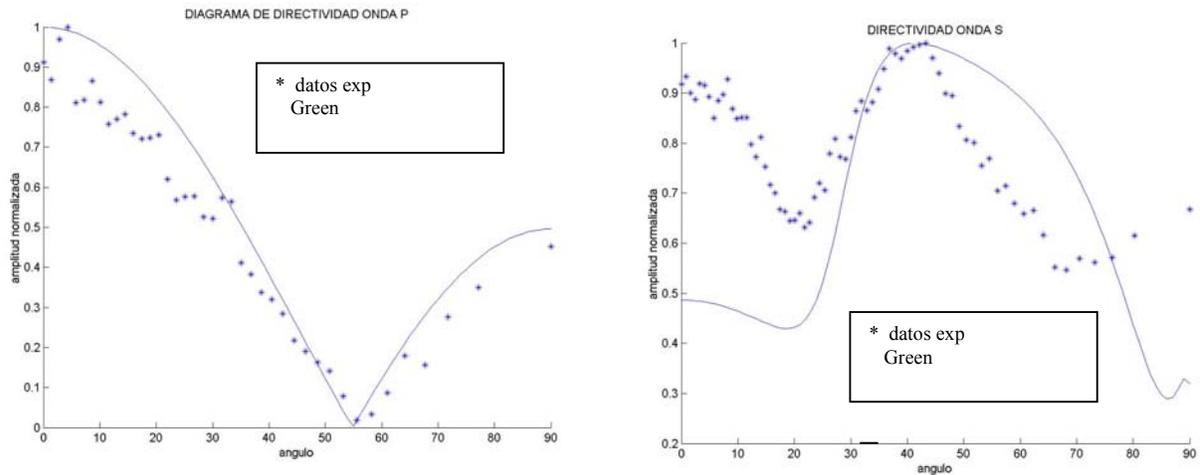
El diagrama de directividad obtenido por Miller y Pursey [11] es utilizado normalmente para calcular la directividad de un transductor de superficie extendida actuando en modo pistón. Sin embargo en el capítulo II se mostró a través de una

integración numérica de las funciones de Green, que en campo cercano el resultado de Miller y Pursey ya no es válido. En esta sección comprobamos experimentalmente este hecho. Para hacerlo, se debió desplazar el transductor mientras el pistón se mantenía en la misma posición, como se muestra en la figura 25. El material es un gel homogéneo e isotrópico de agar-gelatina. En cada posición, se registraron los desplazamientos en función del tiempo situados a 30 mm del pistón, a través del algoritmo de correlación descrito anteriormente.



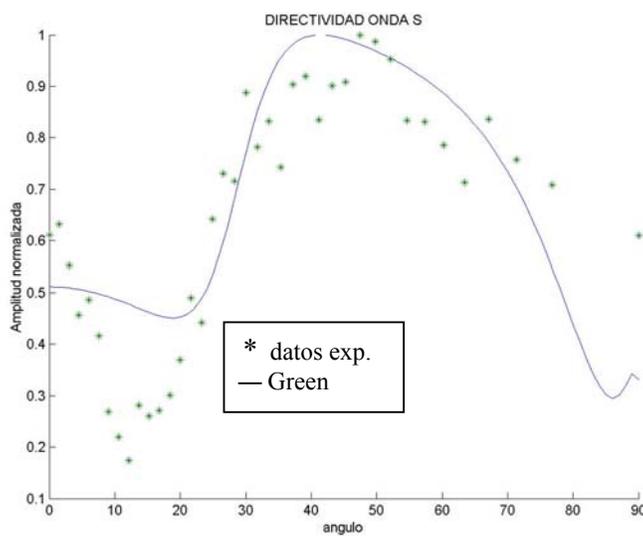
**FIGURA 25:** Montaje utilizado para relevar experimentalmente el diagrama de directividad del pistón en un gel de agar gelatina.

Para cada una de las líneas obtenida, se registra la máxima amplitud de la onda P y de la onda S. Como el método de interferometría speckle registra la componente de los desplazamientos en la dirección del haz ultrasonoro, los resultados se comparan con la componente  $z$  de la función de Green. La figura 26 muestra la comparación entre la función de Green y el diagrama obtenido experimentalmente para las componentes P (izquierda) y S (derecha). En el caso de la onda P, los resultados teórico y experimental están en buen acuerdo. Las mayores discrepancias están en torno al eje del pistón.



**FIGURA 26:** Diagrama de directividad para la onda P (izquierda) y la onda S (derecha). Se compara el resultado experimental con la función de Green.

Para el caso de la onda S, creemos que las discrepancias entre las figuras se deben al tamaño del pistón utilizado de 7.5 mm de radio, si bien procuramos calcular el diagrama a suficiente distancia del mismo (30 mm o  $4a$ ). La figura 27 muestra el mismo diagrama para el mismo gel pero utilizando el pistón de 2.5 mm de radio.

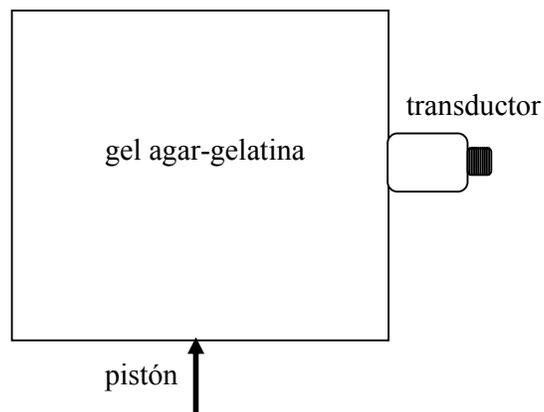


**FIGURA 27:** Diagrama de directividad de la onda S obtenido con un pistón de 2.5 mm de radio.

Un pistón de superficie pequeña genera pequeños desplazamientos y la incertidumbre en su estimación es mayor a grandes distancias de la fuente, por lo que el resultado es más ruidoso. Sin embargo se observa que la amplitud relativa disminuye en los puntos cercanos al eje. Una integración numérica de la función de Green para comprobar este

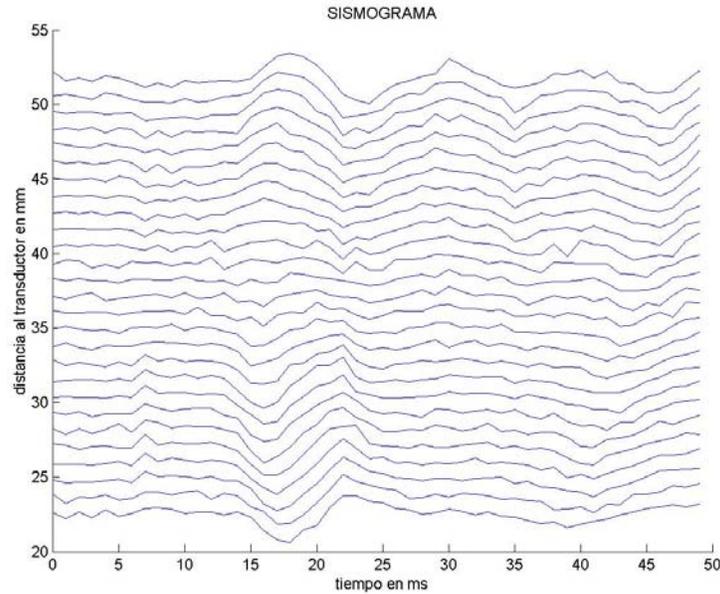
resultado se hace prohibitiva debido a la pérdida de simetría para calcular los desplazamientos fuera del eje. Creemos que para hacer este cálculo, es necesario obtener una expresión analítica para los desplazamientos fuera del eje, aunque sea mediante una función de Green aproximada.

Otra forma de verificar experimentalmente la existencia de los lóbulos laterales es medir los desplazamientos en la dirección radial. De esta manera confirmamos además la interpretación dada en el capítulo II a la componente longitudinal de la onda de cizalla. La figura 28 muestra el montaje experimental para esta medida. El transductor se coloca de manera que el haz ultrasonoro sea perpendicular a la dirección de movimiento del pistón.



**FIGURA 28:** Montaje experimental utilizado para medir la componente radial de los desplazamientos.

El sismograma construido a partir de esta medida se muestra en la figura 29. Allí se puede observar claramente que los desplazamientos en la zona central del sismograma, es decir, sobre el eje del pistón, son prácticamente nulos. Este hecho está previsto por las funciones de Green (ver apéndice A). También se observa que los desplazamientos por encima de la zona central y por debajo, están en oposición de fase, lo que es indicador de la presencia de los lóbulos como se discutió en el capítulo II.

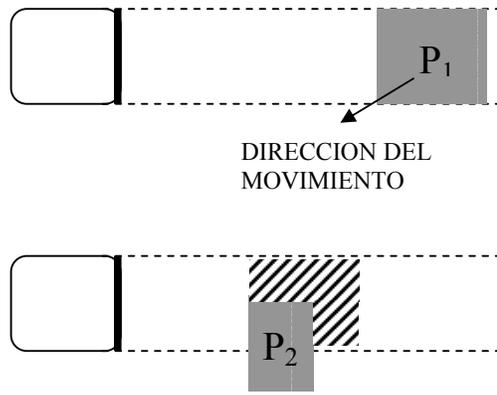


**FIGURA 29:** Sismograma para los desplazamientos en la dirección radial. En la zona central los desplazamientos son prácticamente nulos mientras que por encima y por debajo de esta zona están en oposición de fase.

### III.11 Precisión y límites del método

En esta sección nos proponemos investigar a cerca de los factores que influyen en la calidad de los resultados del método de la interferometría speckle descrito antes. Las fuentes de errores en la estimación del desplazamiento entre dos señales ecográficas consecutivas son básicamente dos. La primera es el ruido del sistema electrónico de emisión recepción de ultrasonido incluyendo ruido en los cables y en la digitalización de la señal. La segunda fuente de incertidumbre no tiene que ver con el ruido sino con la decorrelación que sufre la señal cuando por el medio se propaga la onda de baja frecuencia. En efecto la deformación que provoca esta onda al propagarse en el medio genera no solamente movimientos en la dirección del haz ultrasonoro sino movimientos laterales provocando una deformación en el mismo. A causa de esto, una porción del grupo de difusores contenidos en un volumen  $V$  del material en un instante dado de tiempo, puede desplazarse hacia afuera de la zona de iluminación del ultrasonido en un instante posterior como se muestra en la figura 30. Además el ancho del volumen  $V$  en la dirección del haz ultrasonoro se comprime y se estira a medida que la onda de baja frecuencia se propaga en el medio. Este hecho provoca que la firma acústica de los difusores en  $P_2$  no sea exactamente la misma que en  $P_1$ . Como el ancho de la ventana temporal elegida se mantiene constante para todas las profundidades, esa porción

vacante de difusores la ocuparán otros difusores nuevos que originalmente no estaban en la ventana  $P_1$  (zona rayada en la figura). Debido a esto, la señal recibida no será simplemente una versión desplazada de la señal anterior.



**FIGURA 30:** La precisión en la estimación de los desplazamientos depende de la decorrelación que sufre la señal debido a los movimientos laterales y a la deformación del medio.

En esta sección trataremos entonces de evaluar el error cometido al estimar el desplazamiento incluyendo estas dos fuentes de incertidumbre, el ruido y la decorrelación de la señal.

Un método para estimar un parámetro  $\theta$  a partir de una muestra de  $n$  valores independientes de una variable aleatoria  $X$ , cuya densidad de probabilidad es  $f(x, \theta)$  es el conocido como *método de la máxima verosimilitud*. La probabilidad de que una muestra consista de valores de  $X$  entre los intervalos  $x_i \leq x \leq x_i + dx$  es:

$$f(x_1)dx f(x_2)dx \dots f(x_n)dx = p(x_i, \theta)dx^n$$

Como  $f$  depende de  $\theta$  y los datos  $x_1, \dots, x_n$  son fijos,  $p$  es función de  $\theta$  y se llama función de verosimilitud. La idea es entonces que el mejor estimador para el parámetro  $\theta$  es aquel que haga máximo al valor de  $p$ . Una condición necesaria para que  $p$  tenga un máximo es:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

Dado que  $f$  es una función positiva,  $\ln(p)$  es una función monótona creciente de  $p$  y la condición anterior es equivalente a:

$$\frac{\partial \ln(p)}{\partial \theta} = 0.$$

De la teoría de la estimación sabemos que la varianza de cualquier estimador de  $\theta$  sin “bias” es mayor o igual al límite impuesto por el teorema de Cramér-Rao [4]:

$$\sigma^2(\hat{\theta}) \geq \frac{-1}{E \left\{ \frac{\partial^2 \ln(p(x_i, \theta))}{\partial \theta^2} \right\} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}} \quad (19)$$

donde  $\hat{\theta}$  es la estimación de  $\theta$ ,  $\sigma^2(\hat{\theta})$  es la varianza de la estimación y  $E$  representa el valor esperado. El estimador de máxima verosimilitud descrito antes es el que alcanza la igualdad en la ecuación (19). Si podemos establecer el límite de Cramér-Rao para nuestro caso, es decir para la estimación del retardo temporal entre dos señales de speckle, tendremos una idea de la incertidumbre en el cálculo de los desplazamientos.

Walker y Trahey [15], obtuvieron una expresión analítica para este límite, incluyendo la decorrelación entre las señales debido a la deformación del medio. Para poder hacer un modelo matemáticamente tratable en este caso, es necesario hacer algunas hipótesis acerca de las señales ecográficas recibidas, el proceso de decorrelación entre ellas, y el ruido. Asumiremos que las señales recibidas  $r_1(t)$  y  $r_2(t)$  son de la forma:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= s_1(t) + n_1(t) \\ r_2(t) &= s_2(t) + n_2(t) \end{aligned} \quad (20)$$

En esta expresión,  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$  son las señales que se hubieran recibido en ausencia de ruido,  $n_1(t)$  y  $n_2(t)$  representan ruido aditivo a las señales. Como los difusores están distribuidos aleatoriamente dentro del medio, asumiremos que el proceso de recepción de las señales de speckle es gaussiano. Asumiremos además que este proceso es estacionario de manera que el teorema de Wiener-Khinchine [17] sea válido. También supondremos que  $n_1(t)$  y  $n_2(t)$  representan ruido blanco gaussiano, que no están correlacionadas entre sí ni con las señales  $s_1$  y  $s_2$ . Por último se supone que el espectro de la señal es plano en el rango de frecuencias determinado por:

$$f_{\min} = f_0(1 - B/2); \quad f_{\max} = f_0(1 + B/2) \quad (21)$$

Bajo estas hipótesis, los autores muestran que el límite impuesto por el teorema de Cramér-Rao queda determinado por la expresión:

$$\sigma(\hat{t}) \geq \sqrt{\frac{3}{2Tf_0^3 \pi^2 (12B + B^3)} \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( 1 + \frac{1}{SNR^2} \right)^2 - 1 \right]} \quad (22)$$

donde  $\hat{\tau}$  es la estimación del retardo temporal,  $\rho$  es un coeficiente que tiene en cuenta la decorrelación entre las señales debida a la deformación del medio y  $SNR$  es la relación señal ruido (Signal to Noise Ratio) definida como

$$SNR = \frac{G_{ss}}{G_{nn}}$$

donde  $G_{ss}$  y  $G_{nn}$  son la potencia espectral de la señal y la del ruido respectivamente. La expresión (22) representa el límite inferior para la desviación estándar en la estimación del retardo temporal entre dos señales de speckle. Para llegar a su expresión analítica final se han hecho una serie de hipótesis que no se ajustan del todo con la realidad. Por ejemplo la hipótesis de espectro plano da como resultado una sobre-estimación de la potencia espectral y por lo tanto una sub-estimación en la desviación estándar. Varios autores [16], [17], [18] han mostrado a través de simulaciones numéricas de señales de speckle, que bajo estas hipótesis el límite de Cramér-Rao sólo es válido para relaciones señal/ruido alta ( $SNR > 30$  dB) y un coeficiente de correlación también alto ( $\rho > 0.98$ ). En otros casos el teorema de Cramér-Rao es una subestimación de la incertidumbre en el desplazamiento. Sin embargo no hay hasta el momento otras expresiones analíticas para la desviación estándar con condiciones más realistas.

En la expresión (22) aparecen varios factores que determinan la precisión en la medida de los desplazamientos. En la siguiente tabla se resumen esos parámetros y su impacto en la precisión del método.

Parámetro	Influencia en la precisión
$f_0$ , frecuencia central del transductor	La precisión aumenta con la frecuencia
$B$ , ancho de banda del transductor	Un ancho de banda estrecho disminuye la precisión
$SNR$ , relación señal ruido	Es deseable que sea lo más alta posible. Su influencia en la precisión es determinante
$\rho$ , coeficiente de correlación entre señales	Este coeficiente debe ser máximo. Su valor disminuye fuertemente con la deformación del medio
$T$ , ancho de la ventana temporal	Un gran valor de $T$ aumenta la precisión pero disminuye la resolución espacial

### III.11.1 Optimización de los parámetros

No es fácil elegir una configuración experimental que minimice la expresión (22), ya que los parámetros no son independientes entre sí. Supongamos que aumentamos la frecuencia ultrasonora  $f_0$  a fin de disminuir la desviación estándar. En este caso se observa que disminuye la relación señal ruido  $SNR$ , porque la atenuación aumenta con la frecuencia en los medios biológicos. La evolución de los dos parámetros tiene un impacto opuesto en la precisión de la estimación. Otro ejemplo muestra que existe un compromiso entre disminuir la desviación estándar y la resolución espacial del método. En secciones anteriores se mostró que a una ventana temporal en la señal ecográfica le corresponde un volumen elemental determinado del medio. Una ventana temporal pequeña permite seguir el movimiento de pequeños volúmenes del medio. A esto nos referimos con el término resolución espacial. Pero disminuir el largo de la ventana temporal  $T$  hace aumentar la desviación estándar en (22). Este es un compromiso entre resolución y precisión. Una forma de saltar este compromiso es permitiendo que exista un solapamiento entre dos ventanas temporales consecutivas.

Otro parámetro en juego es el coeficiente de correlación  $\rho$  entre las señales. Walker y Trahey [15] propusieron una expresión para este coeficiente en función de la deformación del medio:

$$\rho = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_s \varepsilon t) \frac{\sin(\pi B_s f_s \varepsilon t)}{\pi B_s f_s \varepsilon t} dt \quad (23)$$

donde

$$f_s = \frac{f_0}{2} \left( 1 + \alpha + (1 - \alpha) \frac{B}{2} \right); \quad B_s = \frac{2 - 2\alpha + B(1 + \alpha)}{1 + \alpha + \frac{B}{2}(1 - \alpha)}; \quad \alpha = \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

y  $\varepsilon$  es la deformación del medio ( $\partial u_z / \partial z$ ) en la dirección del haz ultrasonoro. Las hipótesis detrás de la ecuación (23) son las mismas que llevaron a la obtención del límite de Cramér-Rao. Esta expresión verifica que en los casos extremos donde la deformación es máxima  $\varepsilon = 1$ , o mínima  $\varepsilon = 0$ , el coeficiente de correlación vale 0 y 1 respectivamente. En sonoelastografía es deseable que este coeficiente sea el máximo posible y por lo tanto que las deformaciones sean pequeñas. Sin embargo, pequeñas deformaciones implican pequeños desplazamientos y éstos pueden caer en el límite impuesto por la ecuación (22). Nuevamente hay aquí un compromiso en el método. Como se mencionó con anterioridad, en nuestras experiencias la amplitud pico a pico

del pistón no supera el milímetro. Esto hace que en general la deformación máxima alcanzada en un gel de agar-gelatina sea de un 2 %. Ophir et al [19] trabajando en elastografía estática, propusieron un método para reducir el efecto de la decorrelación entre las señales. Consiste en “estirar” temporalmente (temporal stretching) la señal comprimida de manera de corregir las alteraciones provocadas por la deformación. Este método demanda un conocimiento a priori de la deformación para cada par de ventanas de las señales ecográficas. Como no se dispone de esa información, los autores proponen un método iterativo de convergencia. Si bien este proceso logra mejorar la calidad de los resultados, también es cierto que alarga los tiempos de cálculo computacional.

En nuestro caso la optimización de los parámetros se hizo sobre la base del límite de Cramér-Rao, pero también en base a la experiencia. Para las medidas en geles de agar-gelatina los parámetros elegidos son: un transductor de 5 MHz de frecuencia central con un ancho de banda de 30%, determinado en la línea de -6dB; ventanas temporales de ancho  $T = 2,4 \mu s$  (1.8 mm o 6 longitudes de onda) con un solapamiento del 35%, lo que da una resolución espacial de 1.2 mm. Las experiencias muestran que para un ancho de la ventana temporal inferior a  $1.6 \mu s$  (1.2 mm o 4 longitudes de onda), la ventana no contiene la información necesaria como para contener una firma acústica única, de manera que los resultados son totalmente erróneos. En cuanto a la relación señal ruido, en general en las muestras de agar-gelatina, es superior a los 35 dB. Sustituyendo estos datos en la ecuación (22), encontramos que la incertidumbre en la estimación de los desplazamientos es del orden de  $1 \mu m$ .

El estudio llevado adelante en esta tesis, no se limita a determinar el campo de desplazamientos. Como vimos, la estimación de los parámetros elásticos de un sólido blando requiere calcular la velocidad de la onda S que se propaga en el medio. En este procedimiento hay otros factores que influyen en la precisión final del método que no están incluidos en el análisis que derivó en el límite de la ecuación (22). Uno de ellos es la frecuencia de recurrencia en el registro de las señales. En efecto, como vimos anteriormente, la determinación de la velocidad pasa por determinar el retardo temporal de la onda a medida que se propaga en el medio. El retardo mínimo que podemos medir con la electrónica que disponemos es de 1 ms. Si la velocidad de la onda es alta, se debe aumentar el intervalo espacial de manera que se pueda registrar una variación en la fase entre dos líneas consecutivas de un sismograma; pero esto atenta contra la resolución

espacial del método. Esta no es la única razón para aumentar la frecuencia de registro de las señales. Cuanto mayor es esta frecuencia, se disponen de más puntos en cada ventana del sismograma para hacer el análisis de Fourier del pulso, lo que redundaría en una mejor estimación de la frecuencia central y en la fase del mismo.

Ahora bien, ¿hasta cuando se podría aumentar la frecuencia de registro de las señales? Para contestar a esta pregunta debemos tener en cuenta que el pulso ultrasonoro que se propaga en el medio debe tener tiempo de viajar hasta una profundidad determinada y retornar al transductor antes de enviar un nuevo pulso. Sólo de esta manera podemos identificar unívocamente el registro de un eco con la profundidad de la estructura reflectora que le dio origen. Si fijamos la profundidad en torno a los 40 mm, este tiempo es del orden de los  $55 \mu s$ . Teóricamente la frecuencia de registro podría ser del orden de  $(1/55) \mu s^{-1}$ , es decir de 18 KHz. Por supuesto que en la práctica este valor debe ser menor, ya que existen limitaciones de memoria. El valor expresado es simplemente un límite superior, pero que muestra que se puede mejorar la precisión de la experiencia aumentando la frecuencia de registro de 1KHz que disponemos actualmente.

## **Conclusión**

En este capítulo se ha mostrado la capacidad del método propuesto para determinar la velocidad de la onda de cizalla en un medio isotrópico y homogéneo como los geles de agar-gelatina. El cálculo se basa en la estimación de los desplazamientos (velocidad) en el seno del medio a partir del seguimiento de las señales de speckle. Los valores estimados de los desplazamientos son bastante inferiores a una longitud de onda ultrasonora. En general, la resolución de un sistema de imágenes basadas en ultrasonido (B-Scan por ejemplo), está limitada a media longitud de onda, porque dos reflectores separados una distancia menor generan ecos inseparables. La explicación de esta aparente paradoja es que si estos reflectores se desplazan en forma conjunta, y se registra una nueva imagen, es la comparación entre las dos imágenes la que permite detectar el desplazamiento. La precisión en la comparación de dos imágenes y la precisión del sistema de construcción de las imágenes no se tratan del mismo problema.

Durante el desarrollo del capítulo, se mostraron diversos factores que afectan los resultados finales de las experiencias. En primer lugar las ondas reflejadas alteran la fase de la onda de forma que los resultados obtenidos son en general erróneos. En segundo lugar se estableció claramente que por diversos motivos (difracción, campo muy cercano) los resultados correctos se obtienen evitando el campo muy cercano al pistón. Se ha mostrado también que el método permite reproducir resultados teóricos como el diagrama de directividad de las funciones de Green.

El modelo viscoelástico de Voigt ha mostrado concordar en primera instancia con los resultados experimentales, aunque este asunto será tema de trabajos futuros.

El análisis de la precisión del método se hizo a partir del teorema de Cramér-Rao, a pesar de que su expresión analítica final reúna un conjunto de hipótesis que difícilmente se cumplan en la práctica, y ha permitido optimizar los parámetros que intervienen en la configuración experimental del método. Experimentalmente encontramos que tres de los factores tienen una gran influencia sobre el resultado final a saber: la relación señal/ruido, la deformación del medio (asociada directamente a la decorrelación entre las señales) y el ancho de la ventana temporal que contiene la firma acústica.

En este capítulo se han presentado experiencias en geles de agar-gelatina homogéneos e isotrópicos. ¿Qué se debe esperar de la utilización del método

directamente en tejidos biológicos?, ¿Qué sucede si el medio bajo estudio no es homogéneo? Las respuestas a estas interrogantes son la base del siguiente capítulo.

## REFERENCIAS

- [1] J. Cardozo, M. Fink, “*Echographic diffraction filters and the diffraction function for random media through an instantaneous time frequency approach*”, J. Acous. Soc. Am., **90** 1991.
- [2] P. Stepanischen, “*Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle*”, J. Acous. Soc. Am., **49** (1971).
- [3] D. Dotti, E. Gatti, V. Svelto, A. Ugge, “*Blood flow measurements by ultrasound correlation techniques*”, Ultrasound Med. Bio, **6** (1976).
- [4] C. Knapp, G. Carter, “*The generalized correlation method for estimation of time delay*”, IEEE Trans. Acous. Speech Signal Proc., **24** (1976).
- [5] D. Evans, W. McDicken, “*Doppler Ultrasound. Physics, Instrumentation and signal processing*”, 2nd Ed. John Willey & Sons, Ltd. (2000).
- [6] X. Wu, M. Goodsitt, E. Madsen, “*Microscopic mechanism of attenuation of compressional ultrasonic waves in tissue-mimicking phantom materials*”, Ultrasonic Imaging, **14** (1992).
- [7] I. Céspedes, C. de Korte, A. van der Steen, B. Norder, K. te Nijenhuis, “*Tissue mimicking material and image artifacts in intravascular elastography*”, IEEE Ultrasonics Symposium, pp 1181-1184 (1996).
- [8] L. Yao, J. Zagzebski, E. Madsen, “*Backscatter coefficient measurement using a reference phantom to extract depth-dependent instrumentation factors*”, Ultrasonic Imaging, **12** (1990).
- [9] F. Viola, W. Walker, “*Comparison of time delay estimators in medical ultrasound*”,
- [10] S. Catheline, “*Interferometrie-speckle ultrasonore: Application a la mesure d’elasticite*”, These de doctoract de l’universite Paris VII, (1998).
- [11] G. Miller, H. Pursey, “*The field and radiation impedance of mechanical radiators on the surface of a semi-infinite isotropic solid*”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A223**, (1954).
- [12] K. Aki, P. Richards, “*Quantitative seismology, theory and methods*”, W. H. Freeman and Company, (1980).
- [13] S. Catheline, F. Wu, M.Fink, “*A solution to diffraction bias in sonoelasticity: the acoustic impulse technique*”, J. Acoust. Soc. Am **105** (1999).
- [14] K. Parker, S. Huang, R. Musulin, R. Lerner, “*Tissue response to mechanical vibrations for sonoelasticity imaging*”, Ultrasound in Med. & Biol, **16**, (1990)
- [15] W. Walker, G. Trahey, “*A fundamental limit on the accuracy of speckle signal alignment*”, IEEE Ultrasonic Symposium (1994).

[16] L. E. Reichl, "*A modern course in statistical physics*", University of Texas Press, Texas (1988).

[17] I. Céspedes, M. Insana, J. Ophir, "*Theoretical bounds on strain estimation in elastography*", IEEE Trans. UFFC, **42**, (1995).

[18] W. Walker, G. Trahey, "*A fundamental limit on the performance of correlation based phase correction and flow estimation techniques*", IEEE Trans. UFFC, **41**, (1994).

[19] S. Kaiser, J. Ophir, "*Reduction of signal decorrelation from mechanical compression of tissues by temporal stretching: applications to elastography*", Ultrasound in Med. & Bio., **23**, (1997).

## CAPITULO IV

### ALGUNOS RESULTADOS Y APLICACIONES

---

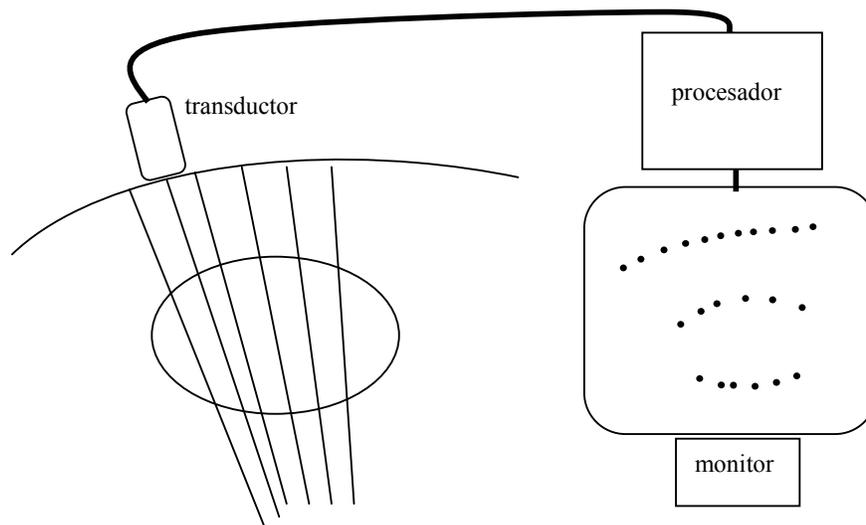
#### IV.1 Introducción

Este capítulo está dedicado a las aplicaciones de la interferometría speckle. Para que el método elastográfico sea útil, debe poder distinguir localmente zonas con valores de elasticidad diferentes. Se muestra aquí su capacidad de producir un mapa elástico de medios inhomogéneos, geles de agar-gelatina fabricados de manera que contengan dos fases diferentes. Estos resultados son un paso previo a la posible aplicación de este método *in vivo*. Se analizan los artefactos que aparecen en las imágenes y se proponen formas de corregirlos. Estos mapas son comparados con imágenes ecográficas convencionales (B-Scan).

En la parte final del capítulo se aplica el método directamente sobre tejidos biológicos, en concreto cortes de carne vacuna.

#### IV.2 B-Scan

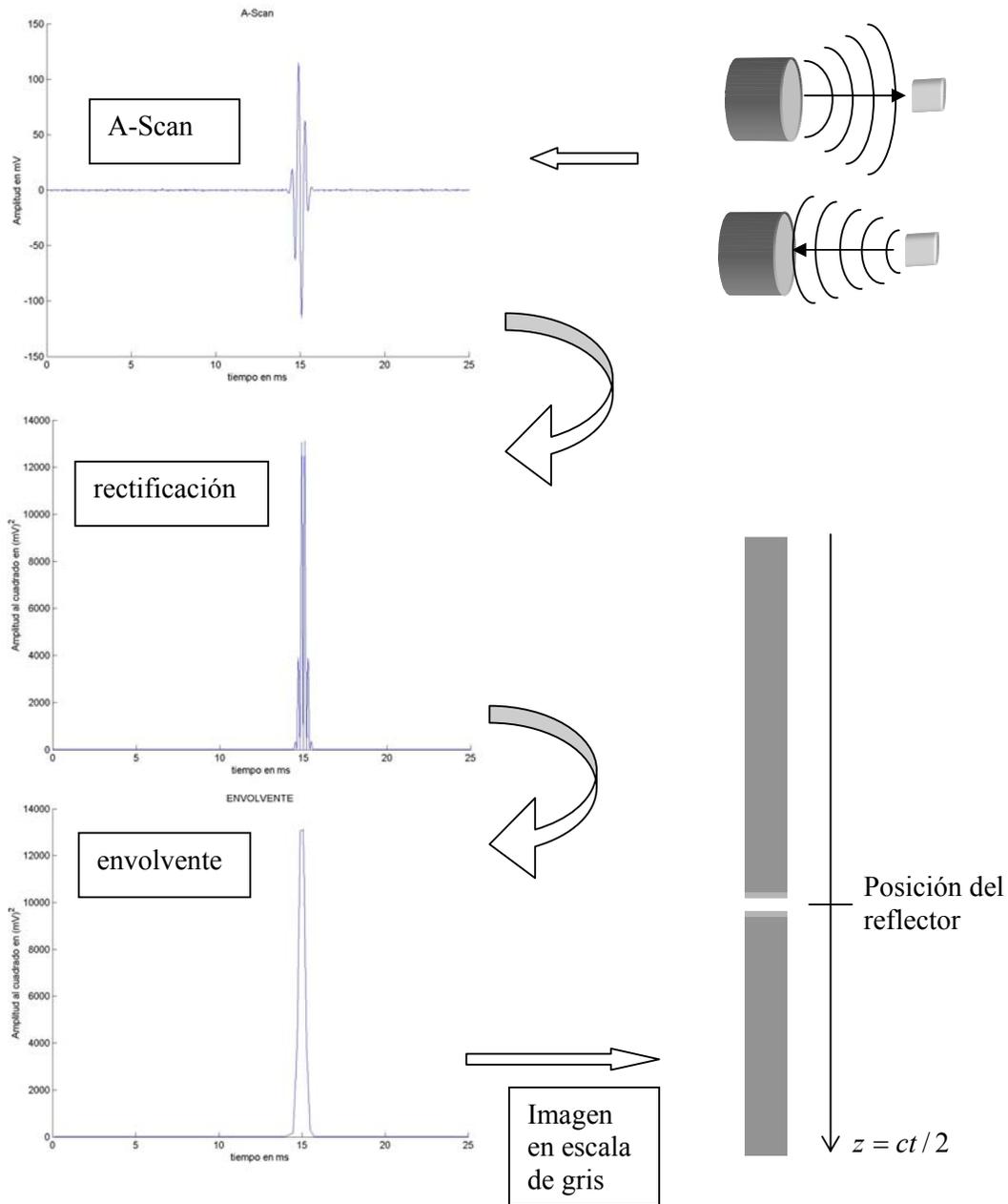
Un A-Scan nos brinda información a cerca de la posición de estructuras reflectoras a lo largo del haz ultrasonoro (ver por ejemplo figura 2 del capítulo III). Esta información junto con la posición y orientación del transductor ultrasonoro, puede ser usada para construir una imagen bidimensional del material bajo estudio. Si se mueve el transductor, de manera que su dirección de movimiento y la dirección del haz ultrasonoro se mantengan confinadas en un plano, se puede formar una imagen de las estructuras reflectoras en ese plano como se muestra en la figura 1. Para cada posición fija del transductor se adquiere una señal ecográfica. Luego se desplaza el transductor y se vuelve a adquirir una nueva señal. Este proceso se repite hasta cubrir la región de interés. Como resultado obtenemos una matriz donde cada columna contiene un A-Scan para una posición fija del transductor. Esta información es objeto de un tratamiento de señal de manera de construir una imagen del medio. Este proceso se conoce como B-Scan estático para diferenciarlo del que se obtiene a tiempo real.



**FIGURA 1:** Para construir una imagen ecográfica se desplaza el transductor de manera que el haz ultrasonoro quede confinado en un plano. A la derecha se muestra la imagen luego del proceso de las señales.

La imagen se forma asignando una escala de grises a las amplitudes recibidas. El procedimiento, consiste en extraer la envolvente de cada señal ecográfica (A-Scan) como se muestra en la figura 2. Para ello primero se rectifica la señal recibida y luego se utiliza un filtro pasabajos. Aplicando este procedimiento a cada señal recibida en la figura 1, se construye la imagen en el monitor.

La amplitud de los ecos recibidos depende de la impedancia de las estructuras reflectoras. Como mencionamos en el capítulo I, en tejidos biológicos un B-Scan corresponde básicamente a un mapa de densidad de estas estructuras. Esperamos que en los geles de agar-gelatina la situación sea similar. En el capítulo III mostramos que variando la concentración de gelatina, la elasticidad final de la muestra también varía. Si fabricamos un medio compuesto de dos fases con diferente concentración de gelatina, cada fase tendrá un módulo elástico diferente, pero su densidad será similar, simulando entonces lo que sucede en tejidos. Sin embargo en este caso la concentración de granos de agar es determinante ya que son ellos los que originan los ecos captados por el transductor. Aunque los medios tengan diferente concentración de gelatina la concentración de agar es la misma en cada fase.

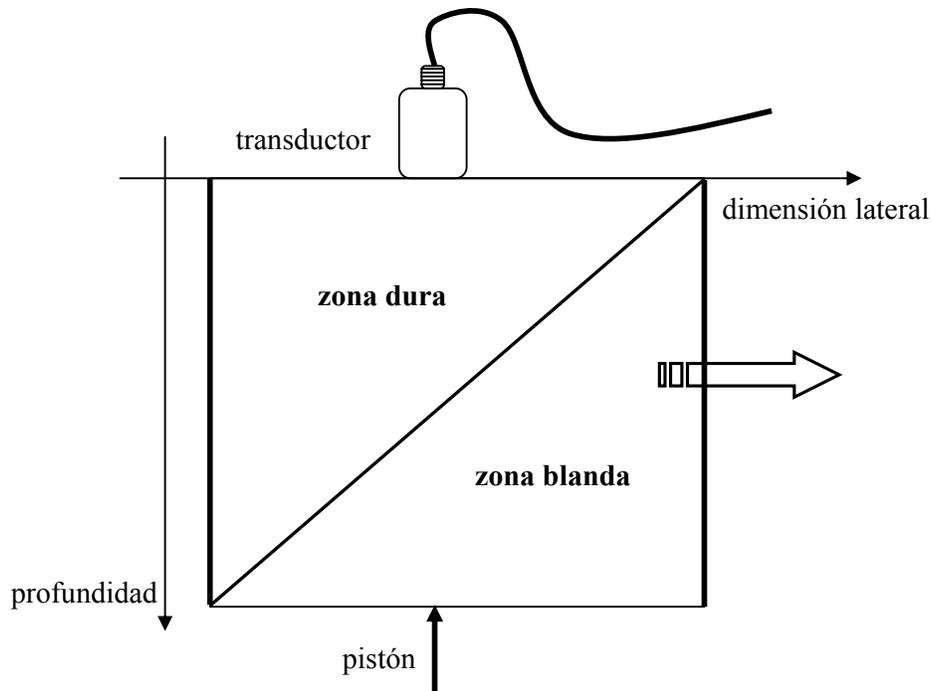


**FIGURA 2:** Tratamiento de señal de cada línea recibida para construir una imagen ecográfica bidimensional.

### IV.3 Mapa elástico

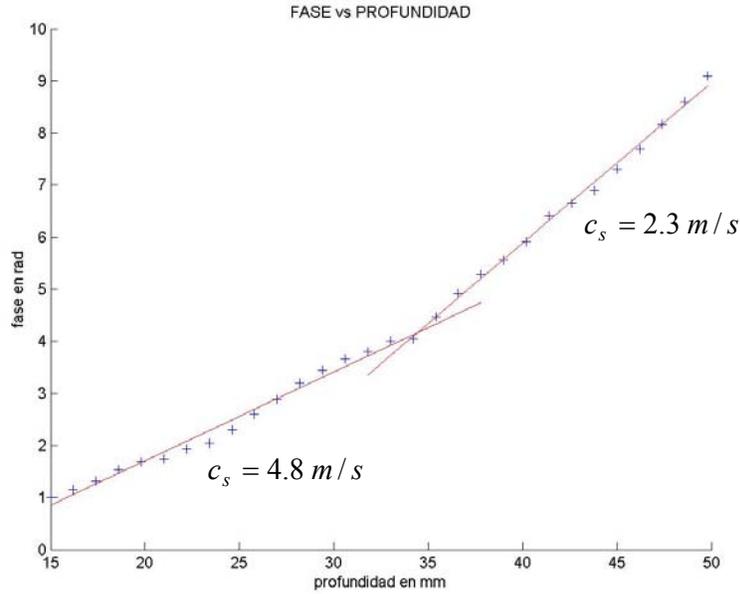
Una de las aplicaciones de la sonoelastografía es construir un mapa con información sobre la elasticidad local de un tejido biológico. Con esta perspectiva,

presentamos aquí los resultados para dos fantasmas. El primero de ellos fue construido de dos zonas de elasticidad diferente limitadas por la diagonal como se muestra en la figura 3.



**FIGURA 3:** Gel construido con dos fases, una zona dura con 6% de gelatina y 3% de agar, y una zona blanda de 3% de gelatina y 3% de agar. El montaje es tal que el gel se puede desplazar mientras el pistón y el transductor se mantienen fijos.

La zona superior consiste en la mezcla de 3% de agar y 6% de gelatina, mientras que en la zona inferior las proporciones son 3% de agar y 3% de gelatina. La figura 4 muestra la fase en función de la profundidad. El origen de la profundidad corresponde a la posición del transductor. Como consecuencia de la diferencia en la concentración de gelatina, la velocidad de la onda de cizalla es diferente en cada medio y por lo tanto la fase presenta dos pendientes diferentes mostradas en la figura. El límite está en torno a los 35 mm.

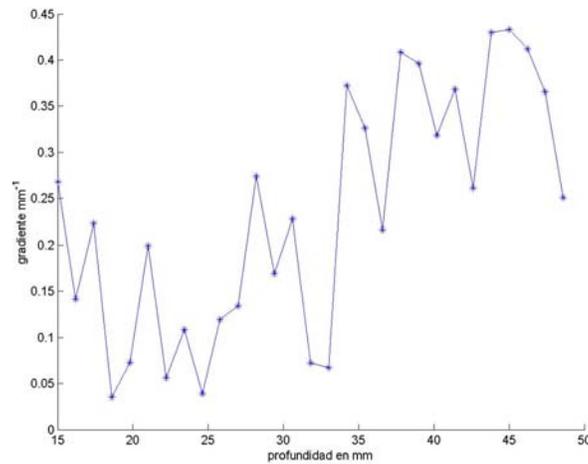


**FIGURA 4:** Fase en función de la profundidad para el gel mostrado en la figura 3. En la zona más cercana al pistón la pendiente es menor y por lo tanto la velocidad es mayor como se muestra.

Para obtener el mapa elástico completo del gel, el montaje experimental fue diseñado de manera que permite desplazar al gel mientras el transductor y el pistón se mantienen fijos. Esto se simboliza con una flecha hacia la derecha en la figura 3. En cada posición, se obtienen  $N$  valores de la fase. Luego de calcular la fase en función de la profundidad en una posición, se obtiene una nueva curva desplazando el gel 1 mm, hasta completar  $M$  medidas. Con este procedimiento se obtiene finalmente una matriz  $N \times M$ , donde cada columna contiene la fase en función de la profundidad para una posición lateral fija. Con esta información se puede construir una imagen en nivel de gris del gradiente de la fase, que físicamente corresponde al inverso de la velocidad. Esta elección se debe a que la velocidad toma un valor infinito si la pendiente se anula localmente y no puede codificarse en un nivel de gris. Como nos interesa la elasticidad a nivel local, calculamos el gradiente de la fase con cada par de puntos como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cong \frac{\phi_2 - \phi_1}{z_2 - z_1} \quad (1)$$

A pesar de que la fase muestra un comportamiento aproximadamente lineal en cada región, el gradiente calculado a partir de la ecuación (1), muestra una amplificación de las pequeñas variaciones debidas al límite del método. La figura 5 muestra este efecto.

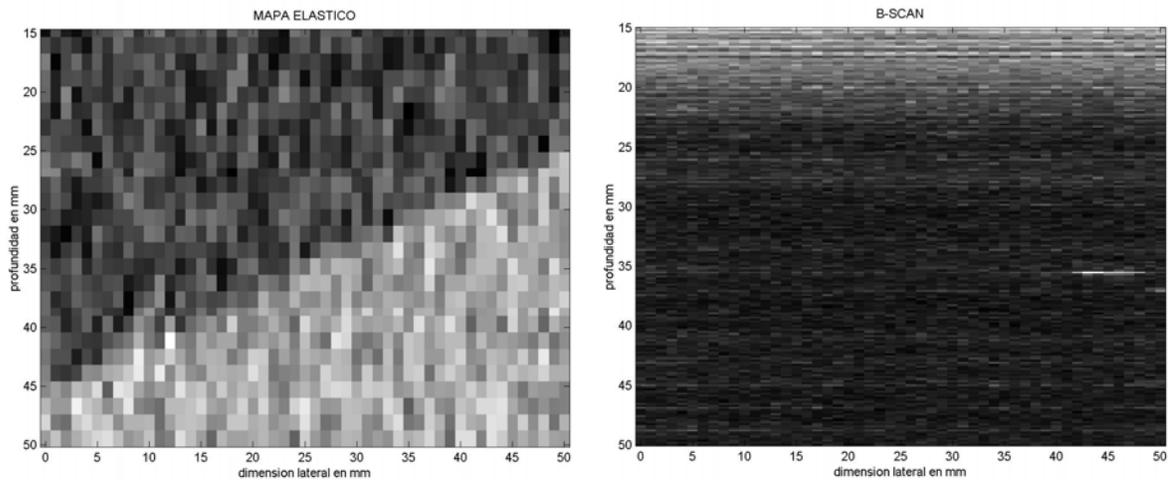


**FIGURA 5:** Gradiente de la fase mostrada en la figura 4, calculado a partir de la ecuación (1).

Una imagen construida directamente a partir del gradiente de la fase permite distinguir las dos zonas, aunque se muestra muy ruidosa. Para suavizar estos efectos, proponemos un ajuste lineal por tramos de la curva  $\phi(z)$ . Este procedimiento consiste en aislar  $n$  puntos en torno a una profundidad determinada y ajustar la fase por:

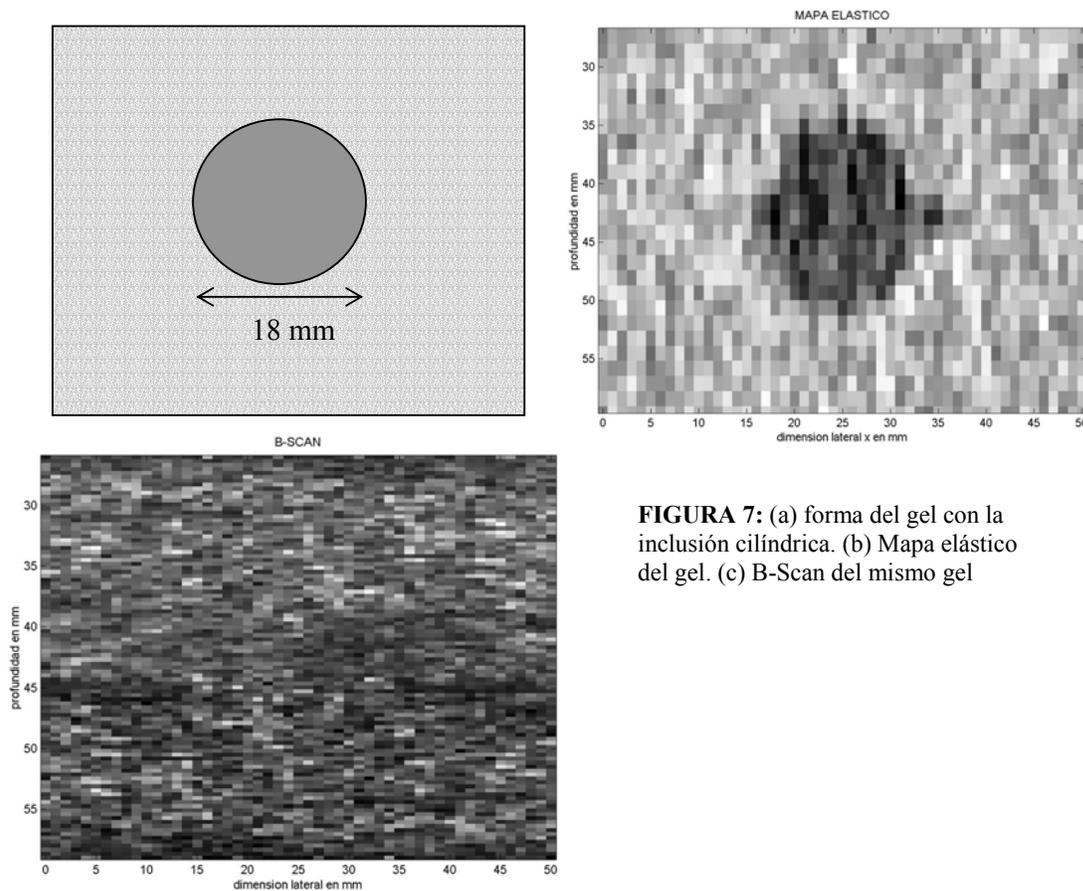
$$\phi_i = az_i + b; \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

donde  $z$  es la profundidad en el medio y  $a$  es una estimación del gradiente a nivel local. La figura 6 muestra el mapa elástico obtenido utilizando este método con  $n=3$  y un solapamiento de dos puntos entre ventanas sucesivas. Si no se permite el solapamiento, la imagen es más homogénea aún, pero se pierde en resolución espacial. Creemos que con la configuración elegida se logra un buen compromiso entre resolución y calidad de la imagen. La figura derecha muestra un B-Scan de un gel de las mismas características que el anterior pero construido sólo con gelatina. En la imagen no se distinguen la interfase entre las dos zonas con diferente concentración de gelatina, mostrando un medio homogéneo. La zona superior de la figura es más clara aparentando un medio diferente. Sin embargo se trata de un artefacto en la imagen. Este hecho se debe a la atenuación de las ondas ultrasonoras en el medio, ya que en la construcción de la imagen no se tuvo en cuenta. Con este ejemplo mostramos que un cambio en el parámetro elástico de cizalla no se revela sistemáticamente en una ecografía.



**FIGURA 6:** La figura izquierda muestra un mapa elástico del gel con dos fases, que se distinguen claramente. La figura derecha es una imagen ecográfica convencional de un gel con las mismas características pero condruido sólo de gelatina.

El segundo gel fue construido con una inclusión cilíndrica de 3% de agar y 6% de gelatina rodeado por otro gel de 3% de agar y 3% de gelatina. Las dimensiones de la inclusión se muestran en la figura 7a. Aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se obtiene un mapa elástico del medio como se muestra en la figura 7b. La figura 7c corresponde a un B-Scan del mismo gel. Esta imagen ecográfica no revela claramente la existencia de la inclusión, lo que confirma lo que preveíamos en relación a las densidades de los medios. En la imagen se observa una zona oscura (ecos de menor amplitud) que insinúa su existencia, aunque también se observan zonas oscuras en otras regiones donde la inclusión no está presente. Si bien la distribución de agar es bastante homogénea, estas zonas oscuras se deben a menor concentración de agar. En la imagen elastográfica por el contrario, se distingue claramente la inclusión de la zona circundante lo que revela la utilidad del método propuesto. Los bordes en la dirección lateral no quedan claramente definidos debido a los escasos puntos presentes para calcular la fase de la onda en esta región. Además, la presencia de ondas reflejadas en esta zona, afecta el calculo de la fase como vimos en el capítulo III. Para construir la imagen elastográfica se utilizó nuevamente el ajuste con mínimos cuadrados con  $n=3$  y un solapamiento de dos puntos.

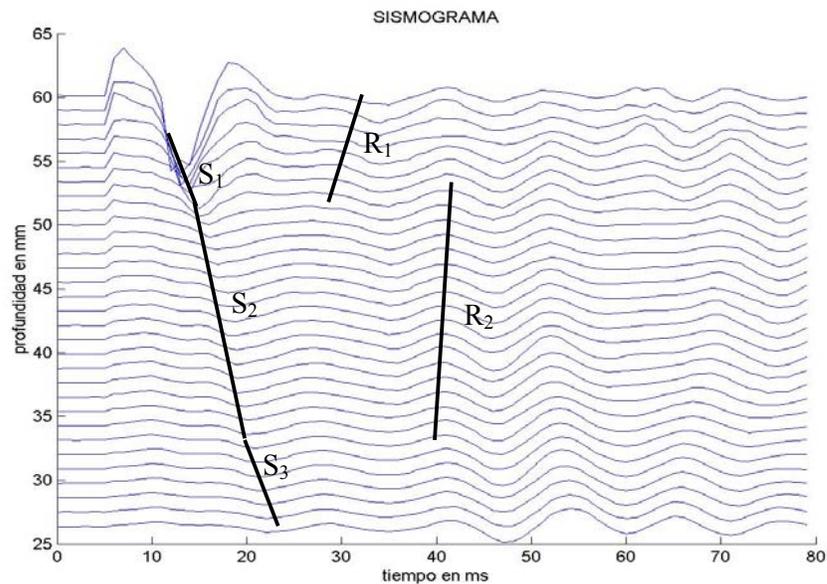


**FIGURA 7:** (a) forma del gel con la inclusión cilíndrica. (b) Mapa elástico del gel. (c) B-Scan del mismo gel

El orden de magnitud de la elasticidad para cada zona en esta figura la podemos estimar a partir del valor de la velocidad de la onda de cizalla en cada uno. La velocidad en la zona blanda es en promedio 1.9 m/s y en la zona dura de 3.2 m/s, por lo que los valores para el módulo de Young en cada zona es, suponiendo que cada medio es perfectamente elástico, de 11 KPa en la zona blanda y 31 KPa en la zona dura, es decir, 3 veces mayor aproximadamente. Este resultado es alentador ya que, para comparación, los fibroadenomas, nódulos duros que aparecen en las mujeres con cáncer de mamás, son en promedio 4 veces más duros que el tejido circundante[1]. Por consecuencia este tipo de imágenes son susceptibles de ser encontradas en experiencias *in vivo*.

Una fuente de artefactos proviene de las ondas reflejadas en la frontera entre los diferentes medios como se muestra en la figura 8. Allí se observa la onda S directa en cada zona, marcadas como  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  y ondas reflejadas al cambiar de medio, una la parte superior de la inclusión y otra en la parte inferior marcadas como  $R_1$  y  $R_2$ . Como

se mostró en el capítulo anterior, la presencia de ondas reflejadas altera la amplitud y la fase pudiendo arrojar resultados erróneos al calcular la velocidad. La extensión temporal de la onda S directa es menor a la que se registraría si no hubiera inclusión. Como consecuencia son pocos los puntos del pulso para el análisis de Fourier lo que resulta a su vez en una mayor dispersión en la determinación de la fase. Una posible solución es aumentar la frecuencia de registro de las señales, aunque en el futuro habrá que seguir estudiando este punto para mejorar los resultados.

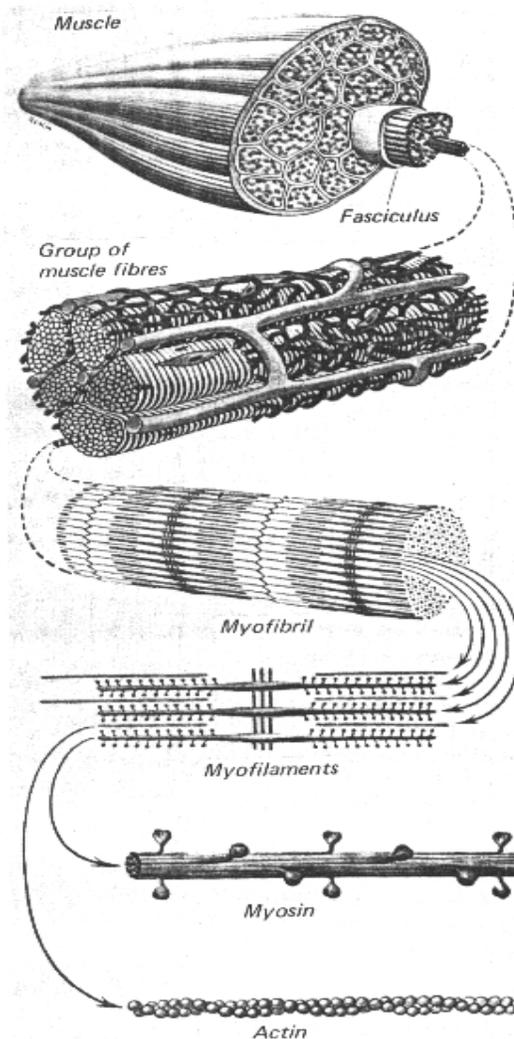


**FIGURA 8:** Sismograma para el gel con inclusión. Se observa la onda directa en cada región y las ondas reflejadas al cambiar de medio.

#### IV.4 Aplicación en tejidos biológicos

Hasta ahora las experiencias mostradas fueron hechas en fantasmas de simulación de tejidos. En esta sección presentaremos resultados obtenidos en carne vacuna. La primera muestra utilizada corresponde a un corte de pecheto, tejido muscular esquelético, comprado en una carnicería. En este tipo de tejido se pone de manifiesto la anisotropía. En efecto, el tejido muscular mirado a diferentes escalas presenta una estructura como la que se muestra en la figura 9. Podemos considerar que la unidad de construcción del músculo son sus fibras. Cada una es una célula simple que contiene varios núcleos. Estas fibras se agrupan en el músculo en conjuntos llamados fascículos. La forma de cada fibra es alargada y tienen un diámetro entre 10 – 60  $\mu m$ . El largo es en general de

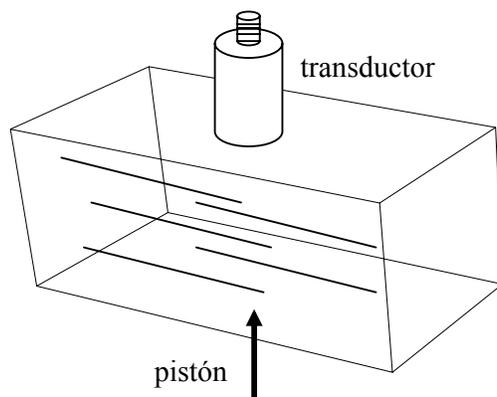
algunos *mm* y puede llegar a medir algunos *cm* en músculos largos. Como las fibras se alinean paralelamente dentro del músculo, es claro que en esta situación definen una orientación preferente en el tejido. En consecuencia el músculo se puede modelar como un medio con simetría hexagonal [2]. En este caso son 5 las constantes elásticas independientes.



**FIGURA 9:** Estructura del músculo esquelético visto a varias escalas. Los filamentos de actina y miosina forman miofilamentos que a su vez se agrupan en miofibrillas que forman las fibras musculares. Las fibras a su vez se agrupan en fascículos que forman el músculo. El espacio entre fibras es tejido conectivo. Tomado de Y. Fung: "Biomechanics: mechanical properties of living tissues", Springer-Verlag, NY, (1993)

Aunque ya hemos hecho algunos trabajos asumiendo esta simetría, los resultados todavía no están procesados de manera que se puedan presentar en esta tesis. En consecuencia, en este trabajo, asumiremos al tejido muscular como homogéneo e

isótropo, al igual que en los geles de agar-gelatina. Para que la sonoelastografía sea aplicable en este caso, es necesario orientar el eje común pistón-transductor en forma perpendicular a la dirección de las fibras como se muestra esquemáticamente en la figura 10. Las razones para elegir esta configuración son en primera instancia que la señal ecográfica en la dirección de las fibras tiene una relación señal/ruido muy baja, casi no se reciben ecos en esta orientación. En segundo lugar, la dirección paralela a las fibras es inaccesible en experiencias *in vivo*.

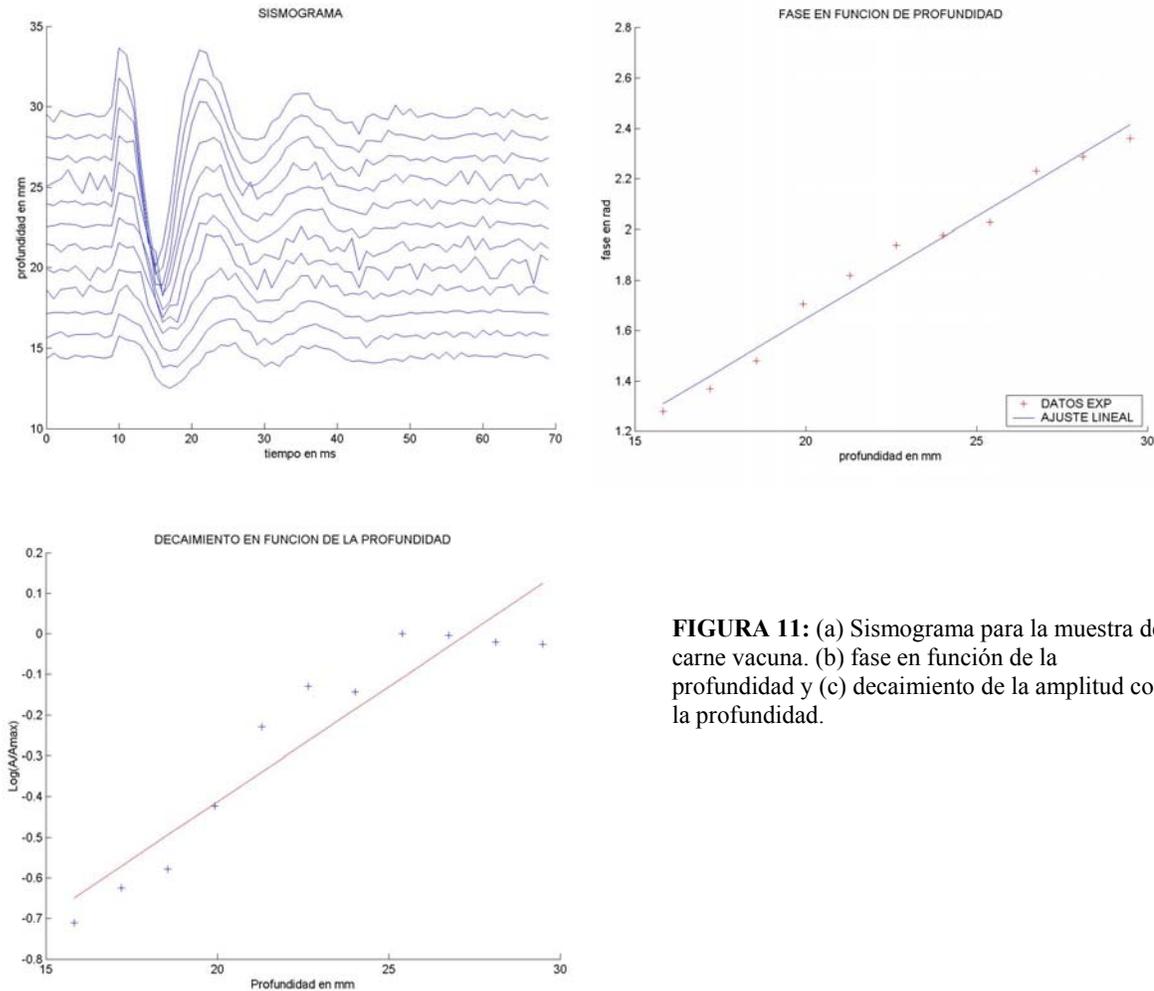


**FIGURA 10:** Representación esquemática de un músculo y disposición de la configuración experimental.

La figura 11 muestra (a) el sismograma obtenido para esta muestra, (b) el ajuste de la fase en función de la profundidad y (c) la atenuación de la onda de cizalla. El sismograma presenta pocas líneas porque la muestra tiene una altura de 40 mm. Como se discutió en el capítulo anterior la zona muy cercana al pistón no debe utilizarse para calcular la velocidad de la onda de cizalla. En este caso tomamos puntos a partir de los 10 mm de distancia al pistón. Por otro lado la atenuación de la onda de cizalla en esta muestra es mayor a la registrada en los geles de agar-gelatina, por lo que al aumentar la distancia al pistón la amplitud de la onda decae de manera que se acerca al límite del método. Comparando con sismogramas obtenidos con muestras de agar-gelatina, se observa que el presentado en la figura 11 es más ruidoso. Esto se debe a que la relación señal/ruido en las señales ecográficas recibidas es menor que para los fantasmas de simulación. En este ejemplo se utilizó un transductor de 5MHz y la atenuación de las ondas ultrasonoras a esta frecuencia es mayor que para los fantasmas. De todas maneras se logró obtener una estimación de los parámetros elásticos con relativamente baja incertidumbre. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$c_s = 5.4 \pm 0.2 \text{ m/s}; \quad \alpha_s = 52 \pm 4 \text{ m}^{-1}; \quad \mu_1 = (15.7 \pm 2) \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\mu_2 = 45 \pm 3 \text{ Pa s};$$



**FIGURA 11:** (a) Sismograma para la muestra de carne vacuna. (b) fase en función de la profundidad y (c) decaimiento de la amplitud con la profundidad.

Estos resultados no fueron objeto de comparación con otras técnicas existentes como por ejemplo el Instron, pero el orden de magnitud obtenido para el módulo elástico coincide con el encontrado en la literatura [3].

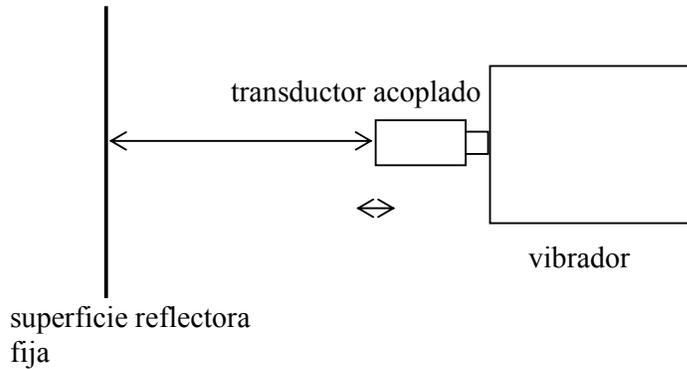
Hicimos experiencias similares en otros dos cortes: nalga y costilla redonda, ambos tejido muscular esquelético al igual que el peceto. La diferencia entre ellos es la penetración de otros tipos de tejido por ejemplo adiposo y conectivo [4]. Hay otros factores que influyen en la terneza de una muestra particular como por ejemplo el tiempo *post-mortem* del tejido y las condiciones de almacenamiento (por ejemplo temperatura) [4]. En estos dos casos utilizamos un transductor de 2.5 MHz debido a la

atenuación de los pulsos de ultrasonido. En el caso de la costilla redonda, la incertidumbre es particularmente alta. La razón radica en que las medidas se hicieron a lo largo de las fibras, ya que en la dirección perpendicular, la presencia de huesos impiden la aplicación de la configuración experimental disponible. La relación señal/ruido en este caso es del entorno de 10 dB, más pobre que en los demás (en torno a los 25 dB). La tabla 1 resume los resultados obtenidos. Estos resultados son los primeros trabajos que realizamos en carne vacuna, y muestran que, en principio, es posible distinguir diferentes grados de ternera.

Corte	$C_s$ (m/s)	Atenuación ( $m^{-1}$ )	$\mu_1$ ( $\times 10^3 Pa$ )	$\mu_2$ (Pa s)
Peceto	$5.4 \pm 0.2$	$52 \pm 4$	$16 \pm 2$	$45 \pm 3$
Nalga	$7.5 \pm 0.4$	$25 \pm 3$	$37 \pm 4$	$22.3 \pm 2$
Costilla	$6.4 \pm 1$	$45 \pm 14$	$21 \pm 6$	$88 \pm 23$

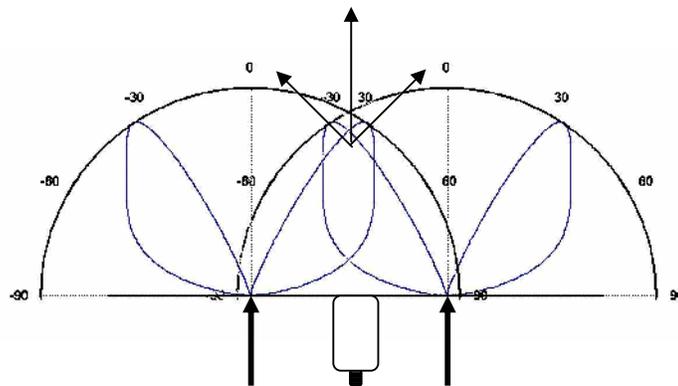
#### IV.5 Consideraciones prácticas

La configuración experimental tal cual fue planteada hasta ahora, es decir, con el pistón y el transductor ubicados en lados opuestos de la muestra, no es aplicable *in vivo*. En efecto, aunque se pudiera encontrar una “ventana” en el cuerpo que permita utilizar esta configuración, la atenuación de las ondas ultrasonoras no permitiría obtener buenos resultados. Para solucionar este problema, L. Sandrin et al han propuesto utilizar el propio transductor como pistón [5]. De esta manera basta con tener acceso a una superficie libre para poder aplicar el método. Esta nueva configuración tiene el inconveniente de que debe tenerse en cuenta el movimiento del transductor a la hora de calcular los desplazamientos dentro del medio, movimiento que no conocemos a priori. Los autores proponen “calibrar” el equipo haciendo mover el transductor mientras una superficie reflectora se mantiene en reposo, como se muestra esquemáticamente en la figura 12. Una vez calibrado, se logra compensar el movimiento del transductor en el algoritmo de correlación de manera que brinde los resultados correctos.



**FIGURA 12:** Montaje utilizado por L. Sandrin para calcular el movimiento del transductor cuando actúa como fuente de los movimientos

Otra posibilidad es explotar en forma conveniente el diagrama de directividad de la onda de cizalla. Como vimos en el capítulo anterior, la onda de cizalla generada por una fuente puntual presenta lóbulos laterales de gran amplitud. Podemos aprovechar este hecho y utilizar dos fuentes de manera que se superpongan los lóbulos sobre el eje del transductor como se muestra en la figura 13

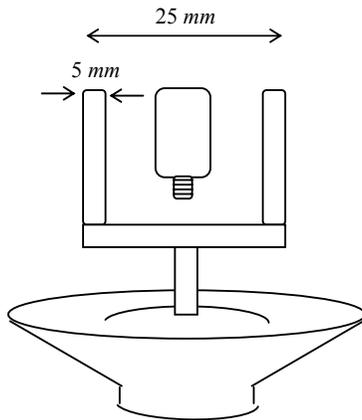


**FIGURA 13:** Esta configuración hace uso de los lóbulos laterales de la onda de cizalla que interfieren constructivamente en el eje del haz ultrasonoro.

De esta manera se logra hacer propagar la onda de cizalla en el medio y medir los desplazamientos en el eje, accediendo a una sola superficie libre. Este método fue utilizado con por S. Catheline et al [6], en experiencias con fantasmas. Los autores mostraron la posibilidad de detectar inclusiones duras rodeados por medios más blandos utilizando esta configuración. Z. Wu et al [7], han propuesto esta configuración con el objetivo de “focalizar” las ondas de cizalla en una zona interior del medio. Al variar la distancia entre los pistones, la región donde las dos ondas se refuerzan también varía.

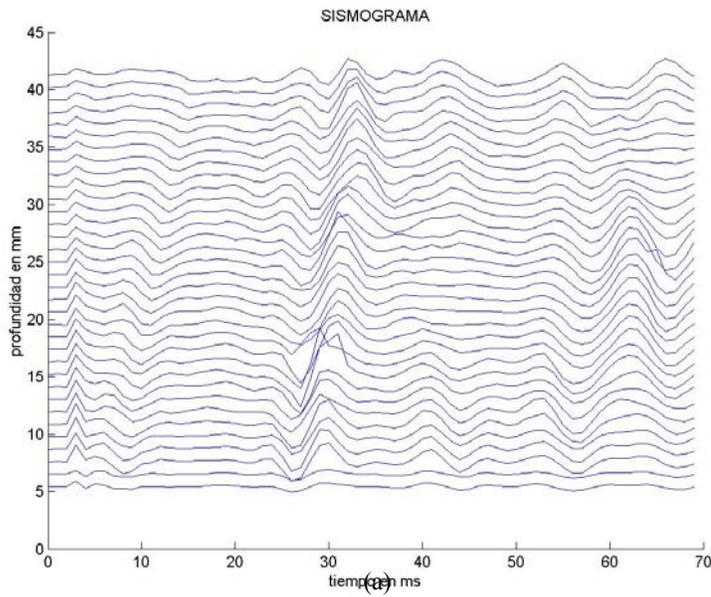
Los autores muestran el resultado de simulaciones numéricas pero no resultados experimentales. Nosotros mostraremos aquí simplemente una experiencia en un gel isótropo y homogéneo con esta configuración para mostrar que es posible su aplicación. Seguramente, trabajos más a fondo sobre este punto quedarán como tema para el futuro.

La figura 14 muestra la configuración utilizada. Los pistones son de 2.5 mm de radio y están separados 25 mm entre sí.

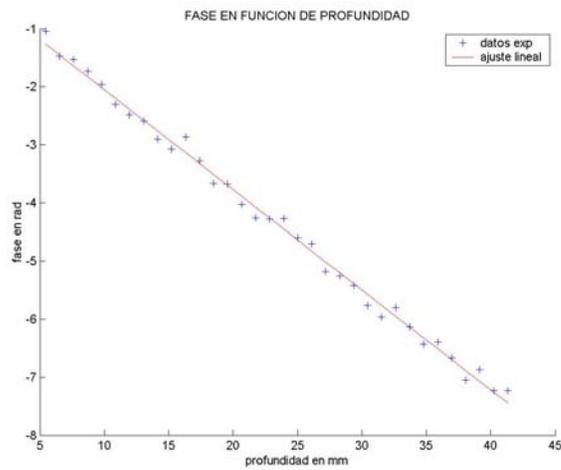


**FIGURA 14:** Configuración utilizada para utilizar el método de interferometría speckle accediendo a una sola superficie de la muestra

En la figura 15a se muestra el sismograma obtenido en un gel homogéneo aplicando esta configuración, y en la figura 15b se muestra la fase en función de la profundidad. La velocidad obtenida en este caso es de 3.6 m/s. Se observa en el sismograma que las mayores amplitudes de la onda S no están próximas a la superficie sino entre 10 y 15 mm de distancia. Esto era de esperar. Si el ángulo del lóbulo principal de la onda de cizalla está en torno a los  $40^\circ$ , esperamos que las ondas que emanan de cada pistón interfieran constructivamente sobre el eje a una distancia en torno a los 15 mm de la superficie como se muestra en la figura 15c. Variando la distancia entre los pistones se puede “focalizar” la onda de cizalla a diferentes profundidades, lo que podría permitir seleccionar una pequeña zona de interés dentro del medio para estimar sus propiedades elásticas.

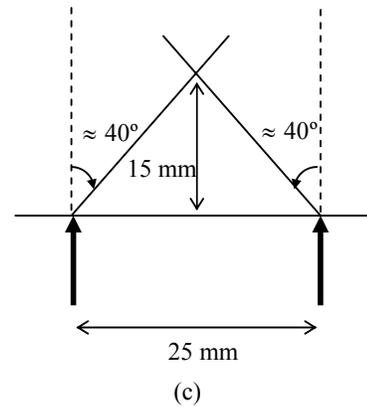


**FIGURA 15a:** Sismograma obtenido con la configuración de la figura 14. Se observa un incremento de la amplitud de la onda de cizalla entre los 12 y 15 mm de distancia a la superficie.



(b)

**FIGURA 15b:** Curva de la fase en función de la profundidad obtenida del sismograma anterior



**FIGURA 15c:** Si los lóbulos laterales de la onda de cizalla para cada pistón están en torno a los  $40^\circ$ , para una separación de 25 mm entre los pistones, las dos ondas focalizan en torno a 15 mm de la superficie.

## **Conclusión**

En este capítulo mostramos un importante resultado, que se debe exigir a cualquier práctica elastográfica, al obtener imágenes de medios inhomogéneos. Estos resultados confirman que un sistema de imágenes basado en el módulo elástico de cizalla revela la existencia de estructuras difícilmente detectables en una ecografía convencional. Aplicando un ajuste lineal por tramos a la curva de fase en función de la profundidad se logró mejorar la relación señal/ruido de estas imágenes, aunque es necesario la profundización de las investigaciones para mejorar su calidad. En particular el método se muestra sensible a las condiciones de borde internas, sobre todo en el caso de la inclusión. Un posible desarrollo futuro de este método es resolver el problema inverso como en sismología, es decir, a partir del campo de desplazamientos reconstruir las características del medio bajo estudio. Otro factor que se debe tener en cuenta a la hora de evaluar la calidad de las imágenes es que fueron realizadas con un transductor monoelemento. En estas circunstancias, es necesario desplazar el transductor y el pistón (o el gel como realmente hicimos) para cubrir la zona de interés, realizando una medida cada vez. Creemos que utilizando un cabezal multielemento de manera de cubrir el área de interés realizando una sola medida, los resultados pueden mejorar. De todas maneras los resultados son alentadores ya que logramos imágenes de situaciones plausibles de ser encontradas en experiencias *in vivo*.

Se ha mostrado también en este capítulo que es posible aplicar el método en carne vacuna, aunque los efectos de la anisotropía y la propia estructura de los músculos hagan que las medidas tengan características diferentes a las obtenidas en geles de agar-gelatina.

Por último, pensando en aplicaciones prácticas del método, se muestra que se puede aprovechar el diagrama de directividad de la onda de cizalla de manera que no es necesario tener acceso a dos superficies del medio para obtener sus características mecánicas.

## REFERENCIAS

- [1] S. Catheline, "*Interferometrie-speckle ultrasonore: Application a la mesure d'elasticite*", These de doctoract de l'universite Paris VII, (1998).
- [2] J. L. Gennisson, S. Catheline, S.Chaffai, M. Fink, "*Transient elastography in anisotropic medium : application to the measurement of slow and fast shear wave velocities in muscles*", J. Acoust. Soc. Am. **114**, 2003
- [3] K. Parker, S. Huang, R. Musulin, R. Lerner, "*Tissue resoponse to mechanical vibrations for sonoelasticity imaging*", Ultrasound in Med. & Biol, **16**, (1990)
- [4] A. J. Bailey, N. light, "*Connective tissue in meat and meat products*", Elsevier Applied Science, New York, (1989).
- [5] L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, M. Fink, "*Shear elasticity probe for soft tissues with 1D transient elastography*", IEEE Trans. UFFC, **49**, (2002)
- [6] L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, M. Fink, "*Shear modulus imaging with 2-D transient elastography*", IEEE Trans. UFFC, **49**, (2002).
- [7] Z. Wu, D. Rubens, K. Parker, "*Shear wave focusing for three-dimensional sonoelastography*", J. Acoust. Soc. Am., **111**, (2002)

## CONCLUSION

---

Este fue el primer trabajo en elastografía que se desarrolla en nuestro laboratorio, abriendo el camino para futuras investigaciones sobre el tema y aspectos relacionados.

En el primer capítulo de esta tesis, repasamos los antecedentes más importantes en elastografía (estática y dinámica). Las principales causas de artefactos en las técnicas allí mencionadas son la geometría de la muestra y las condiciones de frontera. Esta tesis ha contribuido a confirmar el método impulsional utilizado para evitar estos artefactos.

En el capítulo II se mostró a través de las funciones de Green que en acústica ultrasonora, los sólidos blandos (cuyos principales exponentes son los tejidos biológicos), son en general considerados como fluidos. Sin embargo cuando son excitados por una vibración mecánica de baja frecuencia, revelan sus propiedades como sólidos elásticos. El desarrollo de las funciones de Green permitió establecer además que el modo dominante de propagación en estas condiciones es el de una onda de cizalla. Esta onda tiene la particularidad de tener una componente longitudinal a la cual accedemos con la interferometría speckle. El estudio experimental de los desplazamientos en el seno de los geles de agar-gelatina sobre el eje del pistón llevados a cabo en el capítulo III, mostraron una buena concordancia con los resultados teóricos. Se obtuvieron además resultados fuera del eje, en virtud de un montaje experimental especialmente diseñado, mostrando el diagrama de directividad. Estos resultados indican que las expresiones analíticas de Miller y Pursey no son válidas en lo que se ha denominado campo intermedio.

En este capítulo se mostró además en la zona muy cercana al pistón, predomina el término de acoplamiento P+S. Por otro lado, el tamaño finito del pistón, hace que el decaimiento geométrico de la amplitud de la onda de cizalla sobre el eje debido a la difracción, no sea como el previsto para una fuente puntual a distancias menores a tres veces el radio aproximadamente. Este último hecho, confirmado experimentalmente, constituye un aporte a la sonoelastografía. Este punto junto con otras observaciones experimentales formará parte de un artículo a publicarse en una revista arbitrada. En fin, hemos mostrado que se debe evitar el campo muy cercano con el objetivo de “aislar” únicamente la onda de cizalla cuya velocidad y atenuación están relacionados con el módulo elástico. Esta relación la establecimos a través del modelo de Voigt. Se mostró en el mismo capítulo que esta hipótesis concuerda en primera instancia con los

resultados experimentales. Es importante destacar que no todas las técnicas elastográficas relevan sistemáticamente los parámetros viscosos, aunque en la literatura está ampliamente confirmado que los tejidos biológicos presentan este tipo de comportamiento.

El estudio experimental ha permitido identificar los parámetros relevantes que afectan la precisión final del método, guiados por el límite de Cramer-Rao para la estimación de los desplazamientos. Otros factores que influyen de manera directa fueron analizados explícitamente en la sección final del capítulo III. Creemos haber contribuido a identificar todos los aspectos experimentales que afectan la calidad de los resultados, dejando para futuras investigaciones expresiones analíticas más realistas sobre la incertidumbre en la estimación de los desplazamientos.

En el capítulo IV se mostró la utilidad del método propuesto para distinguir el módulo elástico a nivel local. Esta fue la motivación original de los trabajos en elastografía y de esta investigación en particular. Las imágenes elastográficas obtenidas en medios inhomogéneos como el gel mixto, compuesto de dos fases con diferente concentración de gelatina y en el gel con una inclusión cilíndrica, permiten diferenciar estas zonas con un buen grado de precisión y colocan a este trabajo en el “estado del arte” en elastografía. Este tipo de situaciones son plausibles de ser encontradas en experiencias *in vivo*. Es alentador para trabajos futuros haber podido elaborar estos mapas elásticos si se tiene en cuenta que para el trabajo se utilizó una cerámica monoelemento. Hemos contribuido además a verificar que el método es sensible a condiciones de borde internas como ha quedado mostrado en el estudio de la inclusión cilíndrica. Este último punto es una característica intrínseca del método propuesto, más allá de otras consideraciones experimentales que afectan la precisión de las medidas como las estudiadas al final del capítulo III. Se explicitó en el trabajo una posible mejora vía el incremento de la frecuencia de recurrencia en el registro de las señales, aunque creemos que el futuro de la elastografía se encamina por introducir modificaciones al método aquí investigado. Por un lado sería posible resolver el problema inverso como en sismología, es decir, a partir del campo de desplazamientos deducir la conformación del medio. Por otro lado la fuente de movimientos podría aplicarse directamente en el seno del medio con un transductor piezoeléctrico a través de la presión de radiación, evitando de esta manera excitar desde la superficie. Los trabajos que encaremos en nuestro laboratorio en el futuro irán en estas direcciones.

Como ejemplo hemos aplicado el método directamente en tejidos biológicos. En los resultados presentados en esta tesis hemos considerado al tejido muscular como homogéneo e isotrópico, aunque ya estamos trabajando en modificaciones del método para tener en cuenta la anisotropía. Los resultados obtenidos son comparables a los encontrados en la literatura.

**APENDICE A**  
**PROBLEMA DE LAMB**  
**SOLUCION SOBRE EL EJE**

---

En este apéndice buscamos la solución al campo de desplazamientos generados sobre el eje de una fuerza puntual aplicada normalmente a la superficie libre de un sólido elástico, isotrópico y semi-infinito. El problema se muestra en la figura 1. En grandes líneas la estrategia de resolución es modificar la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ con } j = P, S, \text{ utilizando la transformada de Laplace y la transformada}$$

de Fourier. El objetivo de estas transformaciones es eliminar la derivada temporal y el operador laplaciano. Estas mismas transformadas se aplican a las condiciones de borde y las condiciones iniciales del problema. Con esto se obtiene un sistema lineal de ecuaciones cuya solución son las componentes del vector de desplazamientos en el espacio de Laplace y Fourier. La última etapa consiste en invertir las transformadas para obtener la solución en el dominio del tiempo y el espacio. Esta etapa es la más difícil de lograr. Aquí lo haremos con detalle para los desplazamientos sobre el eje de la fuente. La solución para el caso general se muestra en el apéndice C.

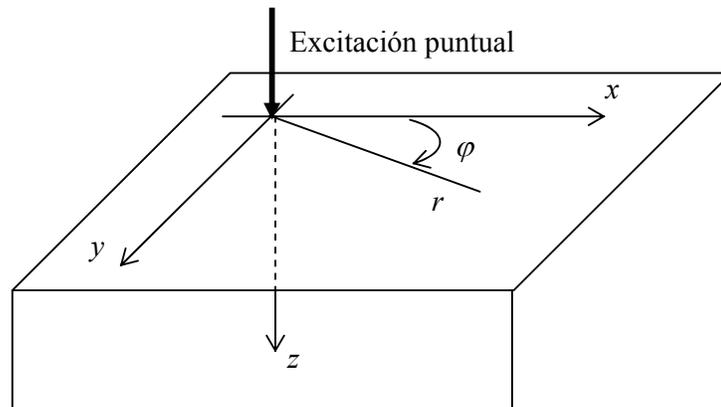


FIGURA A1: *Geometría y definición de las coordenadas del problema planteado.*

En la práctica utilizaremos como dependencia temporal para la fuente la función de Heaviside:  $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$  con el objetivo de evitar singularidades en el

cálculo de desplazamientos al utilizar la función de Dirac:  $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ .

Llamaremos  $u^H(\mathbf{r}, t)$  a la respuesta del medio a la función escalón o de Heaviside y

$G(\mathbf{r}, t)$  a la respuesta al impulso o función de Dirac. Pero notando que  $\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$ ,

podemos obtener la solución buscada haciendo la derivada temporal de los desplazamientos hallados<sup>3</sup>, es decir:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u^H(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

A causa de la simetría cilíndrica del problema, los desplazamientos solo dependen de las coordenadas  $r$  y  $z$  de la figura 1. Por lo tanto:

$$\mathbf{u}(r, z, t) = u_r(r, z, t)\hat{\mathbf{e}}_r + u_z(r, z, t)\hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.1})$$

En términos de los potenciales de Lamé  $\phi$  y  $\Psi = \Psi\hat{\mathbf{e}}_\phi$  la ecuación (A.1) se escribe:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times (\Psi\hat{\mathbf{e}}_\phi) \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones de movimiento para  $\phi$  y  $\Psi$  son entonces:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\Psi - \frac{1}{r^2}\Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (\text{A.3})$$

con:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Es posible reducir la segunda ecuación de (A.3) definiendo:

$$\Psi = \frac{\partial\chi}{\partial r}$$

Con este cambio se obtiene para el potencial vector:

$$\nabla^2\chi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \quad (\text{A.4})$$

El desplazamiento en función de los potenciales  $\phi$  y  $\chi$  es:

---

<sup>3</sup> Ver por ejemplo referencia [4] del capítulo II.

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \\
 u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \\
 u_\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Las componentes relevantes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas se expresan:

$$\begin{aligned}
 \tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right] \\
 \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right]
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

donde se han usado las ecuaciones (A.4) y (A.5) para expresar el esfuerzo en términos de los potenciales.

Las condiciones de borde en  $z = 0$  toman la forma:

$$\begin{aligned}
 \tau_{zz}(r, 0, t) &= \frac{\delta(r)}{2\pi r} H(t) \\
 \tau_{zr}(r, 0, t) &= \tau_{rz} = 0
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Para representar quietud en  $t = 0$ , las condiciones iniciales son:

$$\phi(r, z, 0) = \frac{\partial \phi(r, z, 0)}{\partial t} = \chi(r, z, 0) = \frac{\partial \chi(r, z, 0)}{\partial t} = 0 \tag{A.8}$$

Finalmente, se requiere que los potenciales  $\phi$  y  $\chi$  y sus derivadas espaciales, se anulen en el infinito.

**Solución:**

La estrategia para la solución es entonces hacer la transformada de Laplace y de Fourier de la primera de las ecuaciones (A.3), la ecuación (A.4) y las condiciones (A.7).

**Ecuaciones transformadas:**

La transformada de Laplace:  $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ , se anotará para las

diferentes cantidades involucradas como:

$$\begin{aligned}
 \Phi(r, z, p) &= \mathcal{L}(\phi(r, z, t)); & X(r, z, p) &= \mathcal{L}(\chi(r, z, t)); & T_{ij}(r, z, p) &= \mathcal{L}(\tau_{ij}(r, z, t)) \\
 U_i(r, z, p) &= \mathcal{L}(u_i(r, z, t))
 \end{aligned}$$

Apliquemos la transformada de Laplace a la primera de las ecuaciones (A.4) y a la ecuación (A.5). El resultado es:

$$\nabla^2 \Phi = \left( \frac{p}{c_p} \right)^2 \Phi = k_p^2 \Phi; \quad \nabla^2 X = \left( \frac{p}{c_s} \right)^2 X = k_s^2 X \quad (\text{A.9})$$

La transformada de los desplazamientos y el tensor de esfuerzos es:

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 X}{\partial r \partial z} \\ U_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} \\ T_{zz} &= \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + k_s^2 X \right) \\ T_{zr} &= \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + k_s^2 X \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente la transformada de las condiciones de borde es:

$$\begin{aligned} T_{zr}(r, 0, p) &= 0 \\ T_{zz}(r, 0, p) &= \frac{\delta(r)}{2\pi r} \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aplicaremos ahora la transformada de Fourier a las ecuaciones precedentes. Para ello anotaremos:

$$\tilde{\Phi}(\xi, z, p) = \int_0^{\infty} r \Phi(r, z, p) J_0(\xi r) dr$$

como la transformada de Fourier o transformada de Hankel de orden cero del potencial  $\Phi$ . La notación es similar para las otras cantidades. La transformada de Fourier de las ecuaciones (A.9) queda:

$$\tilde{\Phi}'' - (\xi^2 + k_p^2) \tilde{\Phi} = 0; \quad \tilde{X}'' - (\xi^2 + k_s^2) \tilde{X} = 0 \quad (\text{A.12})$$

donde la prima indica derivada respecto a  $z$ . Estas ecuaciones tienen como solución:

$$\tilde{\Phi} = A_1(\xi, p) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = +\sqrt{\xi^2 + k_p^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{X} = A_2(\xi, p) e^{-\beta z} \quad \text{con } \beta = +\sqrt{\xi^2 + k_s^2} \quad (\text{A.14})$$

Las raíces se toman positivas para que los potenciales se anulen para  $z$  infinito. Falta todavía encontrar la forma de  $A_1$  y  $A_2$ . Para esto necesitaremos las condiciones de borde.

Aplicaremos ahora la transformada a los desplazamientos. Sin embargo a causa de la manera en que opera la transformada en las derivadas respecto a  $r$ , la transformación apropiada para  $U_r$  es la de primer orden y para  $U_z$  la de orden cero. Es decir:

$$\tilde{U}_r(\xi, z, p) = \int_0^{\infty} r U_r(r, z, p) J_1(\xi r) dr$$

$$\tilde{U}_z(\xi, z, p) = \int_0^{\infty} r U_z(r, z, p) J_0(\xi r) dr$$

El resultado es:

$$\tilde{U}_r = -\xi(\tilde{\Phi} - \tilde{X}') \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{U}_z = \tilde{\Phi}' - \tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X}$$

De manera similar la transformada de los esfuerzos es:

$$\tilde{T}_{zz} = \lambda k_p^2 \tilde{\Phi} + 2\mu(\tilde{\Phi}'' - \tilde{X}''' + k_s^2 \tilde{X}') \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{T}_{rz} = -\mu\xi(2\tilde{\Phi}' - 2\tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X})$$

Las condiciones de borde son por lo tanto:

$$\lambda k_p^2 \tilde{\Phi} + 2\mu(\tilde{\Phi}'' - \tilde{X}''' + k_s^2 \tilde{X}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p} \quad (\text{A.17})$$

$$2\tilde{\Phi}' - 2\tilde{X}'' + k_s^2 \tilde{X} = 0$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (A.13) y (A.14) en (A.17) obtenemos:

$$(\lambda k_p^2 + 2\mu\alpha^2)A_1 + 2\mu\beta(\beta^2 - k_s^2)A_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p} \quad (\text{A.18})$$

$$2\alpha A_1 + (2\beta^2 - k_s^2)A_2 = 0 \quad (\text{A.19})$$

Usando que:

$$\lambda k_p^2 + 2\mu\alpha^2 = \mu(k_s^2 + 2\xi^2); \quad \beta^2 - k_s^2 = \xi^2; \quad 2\beta^2 - k_s^2 = 2\xi^2 + k_s^2$$

podemos escribir las ecuaciones (A.18) y (A.19) en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2\xi^2 + k_s^2 & 2\beta\xi^2 \\ 2\alpha & (2\xi^2 + k_s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\pi\mu p)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Como resultado del sistema (A.20) encontramos:

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\mu p} \frac{2\xi^2 + k_s^2}{R}; \quad A_2 = \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{2\alpha}{R} \quad (\text{A.21})$$

$$R = (2\xi^2 + k_s^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2$$

A la función  $R$  se la conoce como función de Rayleigh porque uno de sus polos da origen a la onda superficial de Rayleigh. Los desplazamientos transformados por Laplace y Fourier son entonces:

$$\bar{U}_r = \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{\xi \left[ (2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} + 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right]}{R} \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{U}_z = \frac{1}{2\pi\mu p} \frac{\alpha \left[ (2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{R} \quad (\text{A.23})$$

***Inversión de las transformadas:***

La inversión de Fourier de las ecuaciones (A.22) y (A.23) es:

$$U_r(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[ (2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} + 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right]}{R} J_1(\xi r) d\xi \quad (\text{A.24})$$

$$U_z(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi \left[ (2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{R} J_0(\xi r) d\xi \quad (\text{A.25})$$

Debemos ahora invertir la transformada de Laplace para obtener la solución a los desplazamientos en el dominio temporal. La inversión para  $r$  y  $z$  arbitrarios no es materia sencilla. Su análisis se hace en el apéndice C. En esta sección estamos interesados en obtener los desplazamientos sobre el eje  $z$  de la figura 1, es decir para  $r = 0$ .

Este es el caso más sencillo y el único para el que se puede tener una solución analítica. Como  $J_1(0) = 0$  y  $J_0(0) = 1$ , tenemos de (A.24) y (A.25):

$$U_r(0, z, p) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$U_z(0, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha \xi \left[ (2\xi^2 + k_s^2)^2 e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{pR} d\xi \quad (\text{A.27})$$

De manera que sólo es necesario invertir  $U_z$ . La ecuación (A.27) se puede expresar como:

$$U_z(0, z, p) = U_{zp} + U_{zs}$$

con:

$$U_{zp} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \frac{\alpha\xi(2\xi^2 + k_s^2)e^{-\alpha z}}{pR} d\xi \quad (\text{A.28})$$

$$U_{zs} = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha\xi^3 e^{-\beta z}}{pR} d\xi \quad (\text{A.29})$$

La inversión de cada uno de estos términos se puede hacer a través de la técnica de Cagniard<sup>4</sup>. El procedimiento consiste en manipular la ecuación haciendo cambios de variable de manera se pueda poner en la forma:

$$U(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt$$

de esta manera tenemos simplemente que:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(p)) = h(t)$$

Empecemos con la ecuación (A.28). Por la forma de la ecuación es inmediata la asignación  $\alpha z = pt$ . Recordando que  $\alpha^2 = \xi^2 + (p/c_p)^2$  tenemos entonces:

$$\xi^2 = \left(\frac{p}{c_p}\right)^2 \left( \left(\frac{c_p t}{z}\right)^2 - 1 \right); \quad d\xi = \frac{p}{c_p} \frac{c_p^2 t}{z^2} \left( \left(\frac{c_p t}{z}\right)^2 - 1 \right)^{-1/2} dt$$

Como  $\xi$  es una variable real tenemos como condición para  $t$ :  $t \geq t_p = z/c_p$ .

Distinguimos a  $t_p$  como el tiempo de arribo de la onda de compresión al punto  $z$ .

Sustituyendo este cambio de variable en la ecuación (A.28) encontramos:

$$U_{zp}(0, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu z} \int_{t_p}^{\infty} \frac{\tau^2(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)e^{-pt}}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} dt \quad (\text{A.30})$$

donde  $\tau = c_p t / z = t / t_p$  y  $\gamma = c_p / c_s$ . De esta ecuación surge entonces:

$$u_{zp}^H(0, z, t) = u_{zp}^0 = \frac{1}{2\pi\mu z} \left[ \frac{H(t - t_p) \tau^2 (2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{A.31})$$

donde  $H$  es la función de Heaviside.

La inversión de la ecuación (A.29) se hace en forma análoga. El resultado es:

<sup>4</sup> Ver por ejemplo referencia [4] del capítulo I.

$$u_{zs}^H(0, z, t) = u_{zs}^0 = \frac{-1}{2\pi\mu z} \left[ \frac{2H(t-t_s)\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}}{(2\tau^2 - \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (\text{A.32})$$

donde  $t_s = z/c_s$  es el tiempo de arribo de la onda de cizalla al punto  $z$ , y como antes,

$\tau = c_p t / z$  y  $H$  es la función de Heaviside.

La solución buscada es entonces:

$$G_z(0, z, t) = G_{zp}(0, z, t) + G_{zs}(0, z, t) = G_{zp}^0 + G_{zs}^0 \quad (\text{A.33})$$

con:

$$G_{zp}^0 = \frac{\partial u_{zp}^0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{H(t-t_p)\tau^2(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{A.34})$$

$$G_{zs}^0 = \frac{\partial u_{zs}^0}{\partial t} = \frac{-1}{2\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{2H(t-t_s)\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}}{(2\tau^2 - \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (\text{A.35})$$

## APENDICE B

### EXPRESIONES APROXIMADAS DE LAS FUNCIONES DE GREEN SOBRE EL EJE DE LA FUENTE

---

A partir de las expresiones exactas de las funciones de Green obtenidas en el apéndice A, podemos calcular una solución aproximada en torno a los tiempos característicos, que son los tiempos de arribo de la onda de compresión y de la onda de cizalla, y para tiempos mucho mayores.

Reescribimos aquí la ecuación (A.34):

$$G_{zp}^0 = \frac{1}{2\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{H(t-t_p) \tau^2 (2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)}{(2(\tau^2 - 1) + \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.1})$$

recordemos que  $\tau = c_p t / z$  y  $\gamma = c_p / c_s$ . Esta ecuación se puede escribir como:

$$G_{zp}^0 = \frac{c_p}{2\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t-t_p) t \frac{K_1^p K_3^p}{K_5^p} \right] \quad (\text{B.2})$$

donde:

$$\begin{aligned} K_1^p &= 2 \left( \frac{t^2}{t_p^2} - 1 \right) + \gamma^2; & K_3^p &= \frac{t}{t_p}; & K_5^p &= (K_1^p)^2 - 4K_2^p K_3^p K_4^p \\ K_2^p &= \frac{t^2}{t_p^2} - 1; & K_4^p &= \left[ \frac{t^2}{t_p^2} - 1 + \gamma^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para  $t \approx t_p$ , definimos  $\varepsilon = (t^2 / t_p^2) - 1$  y desarrollamos las expresiones anteriores a primer orden en  $\varepsilon$ . El resultado es:

$$K_1^p \cong \gamma^2; \quad K_2^p \cong \varepsilon; \quad K_3^p \cong 1; \quad K_4^p \cong \gamma; \quad K_5^p \cong \gamma^4$$

Por lo tanto obtenemos:

$$G_{zp}^0 \cong \frac{c_p}{2\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( H(t-t_p) t \frac{\gamma^2}{\gamma^4} \right) = \frac{c_p}{2\pi\mu z^2 \gamma^2} (\delta(t-t_p) t + H(t-t_p)) \quad (\text{B.4})$$

Para  $t \gg t_p$ , definimos  $\varepsilon = t_p / t$  y obtenemos para las ecuaciones (B.3):

$$K_1^p \cong (2/\varepsilon^2) + \gamma^2; \quad K_2^p \cong 1/\varepsilon^2; \quad K_3^p \cong 1/\varepsilon; \quad K_4^p \cong (1/\varepsilon)(1 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{1/2}$$

$$K_5^p \cong (2\gamma/\varepsilon)^2$$

Por lo tanto tenemos:

$$G_{zp}^0 \underset{t \gg t_p}{\cong} \frac{c_p}{2\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H(t-t_p)t}{\gamma^2 \varepsilon} \right) = \frac{c_p}{2\pi\mu z^2 \gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H(t-t_p)t^2}{t_p} \right)$$

Lejos del tiempo característico  $t_p$ , no se puede retener el término  $\delta(t-t_p)$  y por lo tanto:

$$G_{zp}^0 \underset{t \gg t_p}{\cong} \frac{c_p}{\pi\mu z^2 \gamma^2} \frac{H(t-t_p)t}{t_p} \quad (\text{B.5})$$

Combinando (B.4) y (B.5) tenemos para la componente P de la función de Green sobre el eje z:

$$G_{zp}^0(z,t) \cong \frac{c_p}{2\pi\mu z^2 \gamma^2} \left( \delta(t-t_p)t + H(t-t_p) + \frac{2H(t-t_p)t}{t_p} \right) \quad (\text{B.6})$$

De manera similar podemos obtener la componente S de la función de Green.

Reescribimos la ecuación (A.35):

$$G_{zs}^0 = -\frac{1}{\pi\mu z} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{H(t-t_s)\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}}{(\tau^2 - \gamma^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \gamma^2)(\tau^2 - \gamma^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.7})$$

que se puede escribir como:

$$G_{zs}^0 = -\frac{c_p}{\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ H(t-t_s)t \frac{K_2^s K_3^s}{K_5^s} \right] \quad (\text{B.8})$$

con:

$$\begin{aligned} K_2^s &= \gamma^2 \left( (t^2/t_s^2) - 1 \right); & K_3^s &= \left[ \gamma^2 \left( (t^2/t_s^2) - 1 \right) + 1 \right]^{1/2}; & K_5^s &= (K_1^s)^2 - 4K_2^s K_3^s K_4^s \\ K_1^s &= \gamma^2 \left( (2t^2/t_s^2) - 1 \right); & K_4^s &= \gamma t/t_s \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para  $t \approx t_s$ , definimos  $\varepsilon = \frac{t^2}{t_s^2} - 1$ . Desarrollando las expresiones anteriores a primer

orden encontramos:

$$K_1^s \cong \gamma^2; \quad K_2^s \cong \gamma^2 \varepsilon; \quad K_3^s \cong 1; \quad K_4^s \cong \gamma; \quad K_5^s \cong \gamma^4$$

Por lo tanto tenemos:

$$G_{zs}^0 \underset{t \approx t_s}{\cong} -\frac{c_p}{\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( H(t-t_s)t \frac{\gamma^2 \varepsilon}{\gamma^4} \right) \cong -\frac{2c_p}{\pi\mu z^2 \gamma^2} H(t-t_s) \quad (\text{B.10})$$

Si  $t \gg t_s$ , definimos  $\varepsilon = t_s/t$  y las expresiones (B.9) quedan:

$$K_1^s \cong \gamma^2(2/\varepsilon^2 - 1); \quad K_2^s \cong \gamma^2(1/\varepsilon^2 - 1); \quad K_3^s \cong (\gamma/\varepsilon)(1 - \varepsilon^2/2); \quad K_4^s \cong \gamma/\varepsilon$$

$$K_5^s \cong \gamma^4(2/\varepsilon^2 - 1)$$

y por lo tanto:

$$G_{zs}^0 \underset{t \gg t_s}{\cong} -\frac{c_p}{\pi\mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H(t-t_s)t}{2\gamma\varepsilon} \right) = -\frac{c_p}{\pi\mu z^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H(t-t_s)t^2}{2t_s} \right)$$

Lejos del tiempo característico  $t_s$ , no podemos retener el término  $\delta(t-t_s)$ . Entonces:

$$G_{zs}^0 \underset{t \gg t_s}{\cong} -\frac{c_p}{\pi\mu z^2 \gamma} \frac{H(t-t_s)t}{t_s} \tag{B.11}$$

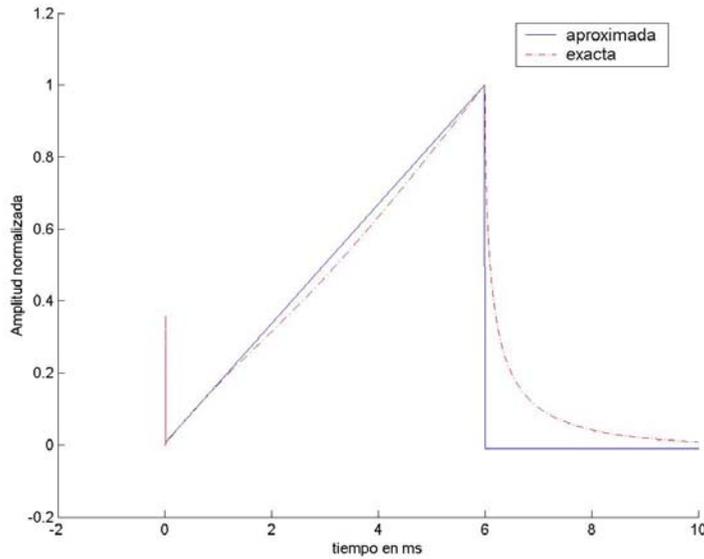
Combinando (B.10) y (B.11) tenemos:

$$G_{zs}^0 \cong -\frac{c_p}{\pi\mu z^2 \gamma^2} \left[ 2H(t-t_s) + \frac{H(t-t_s)t}{t_p} \right] \tag{B.12}$$

La expresión final para el desplazamiento se obtiene como la suma de (B.6) y (B.12):

$$G_z^0 = \frac{c_p}{2\pi\mu z^2 \gamma^2} \left( \delta(t-t_p)t + H(t-t_p) + 2(H(t-t_p) - H(t-t_s))\frac{t}{t_p} - 4H(t-t_s) \right) \tag{B.13}$$

La figura B.1 muestra una comparación entre la función exacta (A.33) y la aproximación (B.13). La mayor diferencia aparece luego del arribo de la onda de cizalla. La función aproximada alcanza el valor asintótico de la solución exacta para  $t = t_s^+$ .



**FIGURA B1:**  
Comparación entre la función de Green exacta obtenida en el apéndice A y la aproximación dada por (B.9)

do la expresión (B.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_z^0}{\partial t} &= \frac{c_p}{2\pi\mu z^2\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \delta(t-t_p)t + H(t-t_p) + 2\left(H(t-t_p) - H(t-t_s)\right)\frac{t}{t_p} - 4H(t-t_s) \right) = \\ &= \frac{c_p}{2\pi\mu z^2\gamma^2} \left( \delta'(t-t_p)t + 2\delta(t-t_p) + 2\left(\delta(t-t_p) - \delta(t-t_s)\right)\frac{t}{t_p} + \frac{2}{t_p}\left(H(t-t_p) - H(t-t_s)\right) - 4\delta(t-t_s) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Para un sólido blando,  $\gamma \gg 1$  y algunos de los términos de la ecuación anterior pueden despreciarse. Los términos:

$$2\delta(t-t_p); \quad 2\frac{t}{t_p}\delta(t-t_p); \quad 4\delta(t-t_s)$$

son todos del orden de  $1/\gamma^2$ . Despreciando estos términos obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial G_z^0}{\partial t} \cong \frac{c_p}{2\pi\mu z^2\gamma^2} \left( \delta'(t-t_p)t - 2\frac{t}{t_p}\delta(t-t_s) + \frac{2}{t_p}\left(H(t-t_p) - H(t-t_s)\right) \right) \quad (\text{B.15})$$

La respuesta a una excitación monocromática se obtiene como:

$$\frac{\partial G_z^0}{\partial t} \otimes \sin(\omega t)$$

La convolución de los diferentes términos es:

$$\delta'(t-t_p)t \otimes \sin(\omega t) = \omega t_p \cos \omega(t-t_p) - \sin \omega(t-t_p)$$

$$\left(H(t-t_p) - H(t-t_s)\right) \otimes \sin(\omega t) = \frac{1}{\omega} \left(\cos \omega(t-t_p) - \cos \omega(t-t_s)\right)$$

$$\delta(t-t_s)t \otimes \sin(\omega t) = t_s \sin \omega(t-t_s)$$

Por lo tanto, una solución analítica aproximada se puede escribir como:

$$s(t) \cong \frac{c_p}{2\pi\mu z^2\gamma^2} \left( \omega t_p \cos \omega(t-t_p) - 2\gamma \sin \omega(t-t_s) + \frac{2\gamma}{\omega t_s} \left(\cos \omega(t-t_p) - \cos \omega(t-t_s)\right) \right)$$

(B.16)

## APENDICE C

### PROBLEMA DE LAMB SOLUCION FUERA DEL EJE

En el apéndice A se obtuvo la función de Green en el dominio espacio-temporal para puntos sobre el eje de la fuente. Aquí obtendremos la solución para puntos arbitrarios del semi-espacio. Sin embargo ahora el resultado final queda expresado en términos de integrales finitas que no tienen solución analítica. Partiremos de las ecuaciones (A.24) y (A.25) del apéndice A:

$$U_r(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[ (2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right]}{R} J_1(\xi r) d\xi \quad (\text{C.1})$$

$$U_z(r, z, p) = \frac{1}{2\pi\mu p} \int_0^\infty \frac{\alpha\xi \left[ -(2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z} + 2\xi^2 e^{-\beta z} \right]}{R} J_0(\xi r) d\xi \quad (\text{C.2})$$

Este último término se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U_z &= U_z^p + U_z^s \\ U_z^p &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha\xi (2\xi^2 + k_s^2) e^{-\alpha z}}{Rp} J_0(\xi r) d\xi \\ U_z^s &= -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha\xi^3 e^{-\beta z}}{Rp} J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La dificultad radica ahora en que la función de Bessel  $J_0(\xi r)$  no toma una forma sencilla para  $r \neq 0$ . La inversión de la transformada de Laplace se hace a través de la técnica de Cagniard modificada, debida a de Hoop<sup>5</sup>. La técnica consiste en expresar la función de Bessel en su forma integral:

$$J_0(\xi r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\xi \cos \varphi} d\varphi$$

y hacer el cambio de variable:

$$\tan(\varphi) = \frac{w}{q}; \quad \xi = \frac{p}{c_p} \sqrt{q^2 + w^2}$$

---

<sup>5</sup> Ver por ejemplo referencia [4] del capítulo II

Sustituyendo en las expresiones (C.3) se obtiene:

$$U_z^p = \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_p m_0 e^{-\frac{p}{c_p}(m_p z - iqr)}}{R} dqdw$$

$$U_z^s = -\frac{1}{\pi^2\mu} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_p (q^2 + w^2) e^{-\frac{p}{c_p}(m_s z - iqr)}}{R} dqdw$$
(C.4)

con:

$$m_p = (q^2 + w^2 + 1)^{1/2}; \quad m_s = (q^2 + w^2 + \gamma^2)^{1/2}; \quad \gamma = c_p / c_s$$

$$m_0 = \gamma^2 + 2(q^2 + w^2); \quad R = m_0^2 - 4m_p m_s (q^2 + w^2)$$

El procedimiento ahora es análogo al que se hizo en el apéndice A. Para invertir  $U_z^p$ , se hace la identificación:

$$t = \frac{1}{c_p} (m_d z - iqr)$$
(C.5)

por lo que:

$$q = q_p^{\pm} = \frac{c_p}{\rho^2} [itr \pm z(t^2 - t_{wp}^2)^{1/2}]$$
(C.6)

para  $t \geq t_{wp}$  donde:

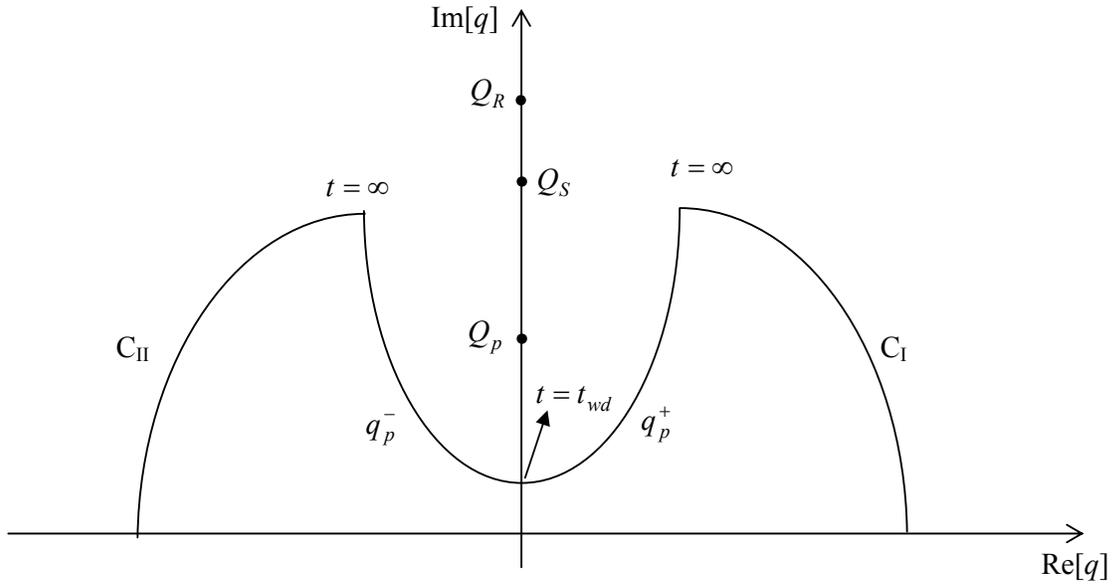
$$t_{wp} = \frac{\rho}{c_p} (w^2 + 1)^{1/2}; \quad \rho = (r^2 + z^2)^{1/2}$$
(C.7)

Las singularidades (en el semiplano  $\text{Im}[q] > 0$ ) del integrando son un polo simple en  $q = Q_R$  y dos puntos de ramificación en  $q = Q_p$  y  $q = Q_s$  donde:

$$Q_R = i(w^2 + \gamma_R^2)^{1/2}; \quad \gamma_R = c_p / c_R; \quad c_R = \text{velocidad onda Rayleigh}$$

$$Q_p = i(w^2 + 1)^{1/2}; \quad Q_s = i(w^2 + \gamma^2)^{1/2}$$

Estas singularidades y el contorno definido por (C.6) se muestran en la figura C1.



**FIGURA C1:** Contorno de integración para  $U_z^p$  en el plano  $q$ -complejo

El contorno definido en (C.6) es una rama de una hipérbola con  $t$  como parámetro. Tiene vértice en:  $q = i(w^2 + 1)^{1/2} r / \rho$ . Como  $r / \rho < 1$ , la hipérbola no interseca el corte entre  $Q_p$  y  $Q_s$  en el eje imaginario. Los arcos  $C_I$  y  $C_{II}$  se introducen de manera de formar un contorno cerrado  $C = \text{Re}[q] + C_I + q_p^+ + q_p^- + C_{II}$ . Aplicando el teorema de Cauchy a la integral (C.4) en el contorno  $C$  obtenemos:

$$U_z^p(r, z, p) = \frac{1}{\pi^2 c_p \mu} \int_0^\infty \int_{t_{wp}}^\infty \text{Re} \left[ \frac{m_p m_0}{R} \frac{dq_p}{dt} \right] e^{-pt} dt dw \quad (\text{C.8})$$

$U_z^p$  es la contribución de  $q_p^\pm$  ya que la contribución a la integral a lo largo de  $C_I$  y  $C_{II}$  es nula cuando el radio de los contornos tienden a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ). Como  $t \leq t_{wp}$  tenemos que  $w \leq T_p = \left( (t/t_p)^2 - 1 \right)^{1/2}$  con  $t_p = \rho / c_p$ . Intercambiando el orden de integración en (C.8), e invirtiendo la transformada de Laplace encontramos:

$$u_{zp}^H(r, z, t) = \frac{H(t-t_p)}{\pi^2 c_p \mu} \int_0^{T_p} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_d m_0}{R} \frac{dq_p}{dt} \right] dw \quad (\text{C.9})$$

Para la inversión de  $U_z^s$  se sigue el mismo procedimiento. La inversión de la ecuación:

$$U_z^s = -\frac{1}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{m_p (q^2 + w^2) e^{-\frac{p}{c_p}(m_s z - iqr)}}{R} dq dw \quad (\text{C.10})$$

se hace identificando:

$$t = \frac{1}{c_p} (m_s z - iqr)$$

de manera que

$$q = q_s^\pm = \frac{c_p}{\rho^2} (itr \pm z(t^2 - t_{ws}^2)^{1/2}) \quad (\text{C.11})$$

$$t \geq t_{ws}; \quad t_{ws} = \frac{\rho}{c_p} (w^2 + \gamma^2)^{1/2}$$

Las singularidades en este caso son las mismas que para la inversión de  $U_z^p$ . La ecuación (C.11) define también una rama de hipérbola con vértice en:

$$q_s = i(w^2 + \gamma^2)^{1/2} \frac{r}{\rho} \quad (\text{C.12})$$

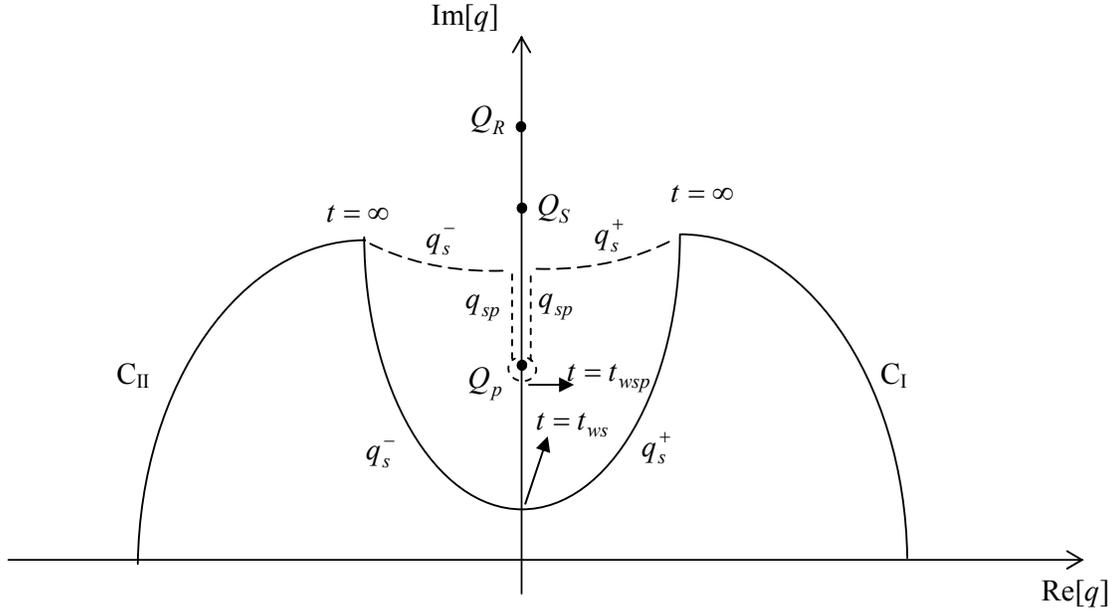
Como  $r/\rho < 1$ , el vértice cae debajo de la singularidad en  $Q_s$ , pero puede caer encima de  $Q_p$ . La condición para que esto se dé es:

$$(w^2 + \gamma^2)^{1/2} \frac{r}{\rho} > (w^2 + 1)^{1/2} \quad (\text{C.13})$$

Esta condición se cumple si:

$$\frac{r}{\rho} \geq \frac{c_s}{c_d} \text{ y } w \in [0, w_1) \text{ con } w_1 = \frac{(r^2 \gamma^2 - \rho^2)^{1/2}}{z}$$

Si se cumplen estas condiciones, es necesario modificar el camino de integración para evitar el corte entre  $Q_p$  y  $Q_s$  en el eje imaginario. Esta modificación da origen a la llamada onda de Von Schmidt, u onda de cabeza (head wave). El contorno de integración en el plano  $q$ -complejo se muestra en la figura C3. Nuevamente se introducen las curvas  $C_I$  y  $C_{II}$  a fin de lograr un contorno cerrado.



**FIGURA C3:** Contorno de integración para  $U_z^S$  en el plano q-complejo

Las singularidades son las mismas que para  $U_z^P$ , pero el contorno tiene dos posibilidades que se muestran en la figura, uno en línea entera y el otro en línea a trazos. Si se cumple  $r/\rho < c_s/c_d$ , o si  $r/\rho > c_s/c_d$  y  $w \in [w_1, \infty)$ , entonces el contorno es el de línea entera anotado como  $q_s^\pm$ , dado por la ecuación (C.11). Sin embargo si  $r/\rho > c_s/c_d$  y  $w \in [0, w_1)$ , el vértice de  $q_s^\pm$  cae entre las singularidades  $q = Q_p$  y  $q = Q_s$ . En este caso el contorno de integración se ve modificado por la línea a trazos indicada con  $q_s^\pm$  más  $q_{sp}$  con:

$$q_{sp} = \frac{ic_p}{\rho^2} \left[ tr - z(t_{ws}^2 - t^2)^{1/2} \right]; \quad \text{para: } t_{ws} \geq t \geq t_{wsp}, \text{ donde:}$$

$$t_{wsp} = \frac{1}{c_p} \left[ (\gamma^2 - 1)^{1/2} z + (w^2 + 1)^{1/2} r \right]$$

Por lo tanto aplicando el teorema de Cauchy a la integral (C.10) obtenemos para  $t \geq t_{ws}$ :

$$U_z^{s1}(r, z, p) = -\frac{1}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{t_{ws}}^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] e^{-pt} dw \quad (\text{C.14})$$

Como  $t \geq t_{ws}$  tenemos  $w \leq T_s = \gamma \left( (t/t_s)^2 - 1 \right)^{1/2}$  con  $t_s = \rho / c_s$ . Intercambiando el orden de integración e invirtiendo la transformada de Laplace obtenemos:

$$u_{zs}^1(r, z, t) = -\frac{H(t-t_s)}{\pi^2 \mu} \int_0^{T_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (\text{C.15})$$

Sin embargo si  $r/\rho > c_s/c_d$  y  $w \in [0, w_1)$  entonces el contorno de integración pasa a ser el contorno punteado en la figura C3 y la aplicación del teorema de Cauchy a la integral en (C.11) queda:

$$U_z^{s2}(r, z, p) = -\frac{H(r/\rho - c_s/c_p)}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty \int_{t_{wsp}}^{t_{ws}} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] e^{-pt} dw \quad (\text{C.16})$$

Como  $t_{ws} \leq t \leq t_{wsp}$  tenemos  $T_s \leq w \leq T_{sp}$  con:

$$T_{sp} = \left[ \left( \frac{c_p(t-t_{sp})}{r} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2}; \quad t_{sp} = \frac{1}{c_p} \left( (\gamma^2 - 1)^{1/2} z + r \right)$$

Además  $w < w_1$  por lo que:

$$t \leq t_B = \frac{\rho^2 (\gamma^2 - 1)^{1/2}}{z c_p}$$

Intercambiando el orden de integración e invirtiendo la transformada de Laplace obtenemos finalmente:

$$u_{zs}^2(r, z, t) = -\frac{H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t)}{\pi^2 \mu} \int_{T_s}^{T_{sp}} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (\text{C.17})$$

Este último término proviene de “bordear” a la singularidad  $Q_p$  en el camino de integración como se muestra en la figura C3. Esto es, su origen se debe a la intersección

superficial de la componente P en  $t = t_p$  y es consecuencia de las condiciones de borde libre. Combinando las ecuaciones C.15 y C.17 tenemos la expresión final para el término  $u_{zs}(r, z, t)$ :

$$u_{zs}^H(r, z, t) = -\frac{H(t-t_s)}{\pi^2 \mu} \int_0^{T_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw - \frac{H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t)}{\pi^2 \mu} \int_{T_s}^{T_{sp}} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_p(q^2 + w^2)}{R} \frac{dq}{dt} \right] dw \quad (\text{C.18})$$

La inversión de la componente  $r$  se hace en forma análoga. El resultado final se puede resumir en la siguiente expresión:

$$u_{\alpha p}^H(r, z, t) = H(t-t_p) \int_0^{T_p} \operatorname{Re} \left[ K_{\alpha p}(q_p, w) \frac{dq_p}{dt} \right] dw$$

$$u_{\alpha s}^H(r, z, t) = H(t-t_s) \int_0^{T_s} \operatorname{Re} \left[ K_{\alpha s}(q_s, w) \frac{dq_s}{dt} \right] dw +$$

$$+ H(r/\rho - c_s/c_p)H(t-t_{sp})H(t_B-t) \int_{T_s}^{T_{sp}} \operatorname{Re} \left[ K_{\alpha s}(q_{sp}, w) \frac{dq_{sp}}{dt} \right] dw$$

donde  $\alpha = r, z$  y

$$K_{rp} = -iqm_0M ; \quad K_{zp} = m_p m_0 M$$

$$K_{rs} = 2iqm_p m_s M ; \quad K_{zs} = -2m_p (q^2 + w^2) M$$

$$M = \frac{1}{\pi^2 c_p \mu} \frac{1}{R}$$

Como en el apéndice A, el resultado buscado es la respuesta al impulso por lo tanto:

$$G_{\alpha p}(r, z, t) = \frac{\partial u_{\alpha p}^H(r, z, t)}{\partial t}; \quad G_{\alpha s}(r, z, t) = \frac{\partial u_{\alpha s}^H(r, z, t)}{\partial t}$$