



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA



GRAFOS UNIFORMEMENTE MÁS CONFIABLES

Una Prueba Simple de la Conjetura de Gross-Saccoman

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Ing. Mauro Martínez Vizoso

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Héctor Cancela Universidad de la República
Dr. Franco Robledo Universidad de la República
Dr. Pablo Romero Universidad de la República

TRIBUNAL

Dra. Flavia Bonomo Universidad de Buenos Aires
Dr. Alberto Castro Universidad de la República
Dr. Martin Matamala Universidad de Chile
Dr. Raúl Tempone KAUST University

DIRECTOR ACADÉMICO

Dr. Héctor Cancela Universidad de la República

Montevideo
viernes 19 mayo, 2023

GRAFOS UNIFORMEMENTE MÁS CONFIABLES
Una Prueba Simple de la Conjetura de Gross-Saccoman

Ing. Mauro Martínez Vizoso

El trabajo del pensamiento se parece a la perforación de un pozo: el agua es turbia al principio, mas luego se clarifica.

PROVERBIO CHINO

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Agradecimientos

Un gran y especial agradecimiento, por su paciencia y dedicación, a Franco Robledo, Pablo Romero y Héctor Cancela.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Resumen

Existe un amplio campo de aplicaciones de las técnicas de confiabilidad en redes, desde la comunicación y la computación, pasando por sistemas de transporte hasta sistemas eléctricos de potencia. En todos ellos sus componentes pueden fallar o degradarse y esto inevitablemente puede conducir a la incapacidad del sistema para soportar una operación requerida.

Si pensamos en un grafo como representación de alguno de los sistemas anteriores, un problema importante en esta área es poder determinar la confiabilidad de dicho sistema a partir de la confiabilidad de sus componentes. La noción de confiabilidad de un grafo tiene distintas variantes y depende del tipo de fallas a considerar, ya sean vértices o aristas, como del modelo de confiabilidad a utilizar. En este trabajo, consideraremos que los vértices son perfectos y las aristas fallan de forma aleatoria e independiente, con probabilidad idéntica e igual a ρ . Además, consideraremos el modelo de confiabilidad *all-terminal*, el cual se define como la probabilidad de que el subgrafo aleatorio resultante de eliminar las aristas que fallan sea conexo.

Una vez que hemos modelado una red y definido una medida de confiabilidad, cabe preguntarse cómo podríamos diseñar una red que alcance la máxima confiabilidad. Podríamos sintetizar el problema de la siguiente manera. Fijados n y e , el problema consiste en encontrar un grafo simple con n vértices y e aristas que minimice la probabilidad de falla del grafo para un valor de ρ fijo. Como hay una cantidad finita de grafos con n vértices y e aristas, dicho grafo siempre existe, asumiendo un valor de ρ fijo.

Siguiendo la misma línea, uno podría también dar un paso más ambicioso y preguntarse si existe un grafo simple que tenga la mayor confiabilidad para todos los valores de ρ dentro del intervalo $[0, 1]$. Entonces, diremos que un grafo es *Uniformemente Más Confiable (UMRG, por sus siglas en inglés)* si tiene la mayor confiabilidad entre todos los posibles grafos, con el mismo número de vértices y aristas, para todos los valores de ρ . Este concepto fue introducido por Boesch en 1986 y posteriormente en 1991 Boesch *et al.* demostraron que siempre existen grafos uniformemente más confiables para todas aquellas clases de grafos simples con n vértices y e aristas tales que $e \leq n + 2$. Más tarde, en 1994, Wang demuestra que en cada clase de grafos simples tales que $e = n + 3$ y $n \geq 6$ existe un único grafo que es UMRG. Trabajos más recientes prueban la existencia o inexistencia

de grafos simples UMRG para valores particulares de e y n .

Inmediatamente surge la pregunta de qué sucede si permitimos aristas múltiples y pasamos a considerar multigrafos. En 1997, Gross y Saccoman prueban que los UMRG dentro de las clases de grafos simples tales que $e \leq n + 2$ también son uniformemente más confiables cuando extendemos las clases para incluir multigrafos. En ese mismo artículo, los autores conjeturan que para el caso en que $e = n + 3$ el UMRG también es óptimo en multigrafos, lo cual es demostrado por Romero en 2020.

En esta tesis se realiza una revisión bibliográfica de los artículos fundamentales del área y se presenta un resultado novedoso que culmina en la publicación de un artículo de co-autoría en la revista *Networks*: “A simple proof of the Gross-Saccoman multigraph conjecture”¹. En el mismo se introduce una prueba simple a la conjetura de Gross-Saccoman y se extiende la misma a pseudografos [1].

Esta tesis se desarrolló en el marco del proyecto Fondo Clemente Estable de la Agencia Nacional de Investigación e Innovación titulado: “Teoría y Construcción de Redes de Máxima Confiabilidad”, presentado por la Facultad de Ingeniería de la UdelAR.

Palabras clave: Teoría de Grafos, Multigrafos, Conjetura de Gross-Saccoman, Confiabilidad de Redes, Grafos Uniformemente Más Confiables, Polinomio de Confiabilidad, Confiabilidad All-Terminal.

¹<https://doi.org/10.1002/net.22110>

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Tabla de contenidos

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Conceptos Básicos	1
1.2. Confiabilidad de Redes	4
1.3. Estructura del Documento	7
2. Grafos Uniformemente Más Confiables	9
2.1. Introducción	9
2.2. Primeros Pasos	9
2.3. Sobre la Existencia de UMRG	13
3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables	23
3.1. Introducción	23
3.2. Trabajos Previos	24
3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Saccoman	35
4. Contribuciones	47
4.1. Introducción	47
4.2. Una Prueba Simple de la Conjetura en Multigrafos de Gross-Saccoman	47
5. Conclusiones	55
Referencias	57

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se brindan las definiciones básicas de la Teoría de Grafos y conceptos específicos que se utilizan en la Teoría de Confiabilidad de Redes.

1.1. Conceptos Básicos

Comenzaremos recordando algunos conceptos importantes respecto a la Teoría de Grafos que nos ayudarán también a fijar la terminología que utilizaremos a lo largo de la tesis. Para aquellos que no estén familiarizados con los conceptos relacionados a la Teoría de Grafos, recomendamos los libros de Bollobas [2], Harary [3] Bondy y Murty [4] o West [5] para un primer abordaje de la temática.

Un grafo simple es un par $G = (V, E)$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman *vértices* y $E(G)$ es una colección de conjuntos formados por dos vértices. A los elementos del conjunto $E(G)$ se le llaman *aristas*. El tamaño de E , es decir, la cantidad de aristas, se denota por e . Mientras que el tamaño de V , es decir, la cantidad de vértices, se denota por n . Una arista cuyos vértices coinciden se denomina *lazo*, y si dos o más aristas tienen asociados el mismo par de vértices, se denominan *aristas múltiples*. En un *grafo simple*, no se admiten lazos o aristas múltiples. En el caso que se admitan aristas múltiples pero no hay lazos, entonces tenemos un *multigrafo*. Si además, permitimos lazos, entonces tendremos *pseudografos*. Dos vértices son *adyacentes* si son extremos de una misma arista. Dicho de otra forma, que nos permite introducir otro concepto, decimos que una arista es *incidente* a sus extremos. El *grado* de un vértice v es la cantidad de aristas incidentes a dicho vértice y lo denotaremos por $d(v)$. Dado que cada arista tiene dos vértices por extremos, la suma de los grados de todos los vértices es exactamente el doble de la cantidad de aristas. Esto se conoce como Lema de *Handshaking*:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e \tag{1.1}$$

Sea G un grafo simple, el grado máximo de todos los vértices se denota por $\Delta(G)$, mientras que el grado mínimo se denota por $\delta(G)$. Si $\Delta(G) = \delta(G)$, entonces

Capítulo 1. Introducción

se dice que el grafo G es δ -regular.

Un *paseo* es una secuencia alternada de vértices y aristas $v_0e_1v_1 \dots v_{l-1}e_lv_l$, no necesariamente distintos, que tiene la propiedad de que cada arista es incidente a los dos vértices contiguos en la secuencia, es decir v_{i-1} y v_i son los extremos de la arista e_i con $1 \leq i \leq l$. Este paseo se dice que va de v_0 a v_l , que conecta v_0 con v_l o que tiene por *extremos* a v_0 y v_l . Un paseo es *cerrado* si sus extremos coinciden y es *abierto* en caso contrario. En el caso de los grafos simples, un paseo queda completamente determinado por sus vértices y por lo tanto puede ser especificado simplemente por la secuencia de estos. Si no permitimos que se repitan vértices (por lo tanto tampoco aristas), entonces tendremos un *camino*. Si además sus extremos coinciden, tendremos un *ciclo*. Denotamos por C_n un grafo ciclo de n vértices. El caso particular de un ciclo de 3 vértices, C_3 , se denomina *triángulo*. Un grafo camino de n vértices se denota por P_n .

Un grafo es *conexo* si para cada par de vértices existe un camino que tiene por extremos a dichos vértices. Un grafo que no es conexo, diremos que es *no conexo*. Los subgrafos conexos maximales se llaman *componentes conexas*. Sea G un grafo con n vértices, e aristas y c componentes conexas, el *rango* de G es $r(G) = n - c$, mientras que el *co-rango* de G es $\mu(G) = e - n + c$.

Si G es conexo y W es un subconjunto propio no vacío de V , entonces W es un *conjunto vértice desconector* (*corte de vértices*) si $G - W$ es no conexo. De la misma forma, si G es conexo y F es un subconjunto no vacío de E , entonces F es un *conjunto arista desconector* (*corte de aristas*) si $G - F$ es no conexo. Si $G \neq K_1$, el mínimo cardinal de un conjunto arista desconector es la *arista conectividad* $\lambda(G)$. El mínimo cardinal de un conjunto vértice desconector es la *vértice conectividad* o simplemente la *conectividad* $\kappa(G)$. Un grafo G es k -arista conexo si $\lambda(G) \geq k$ y es k -conexo si tiene al menos $k + 1$ vértices y $\kappa(G) \geq k$.

Aquel vértice cuya remoción aumenta el número de componentes conexas se denomina *punto de corte*. Análogamente, aquella arista cuya remoción aumenta la cantidad de componentes conexas se denomina *arista puente*. Observar que un grafo es 2-conexo si tiene al menos 3 vértices, es conexo y no tiene puntos de corte. Un *bloque* es un grafo 2-conexo maximal. West demuestra en [5] que un grafo simple G es 2-conexo si y solo si G puede ser obtenido mediante una secuencia de agregado de aristas y subdivisión de aristas a partir de C_3 .

A continuación citaremos una Proposición demostrada por West en [5] que nos será de gran utilidad más adelante.

Proposición 1 (Demostrada en [5]). *Dos bloques en un grafo comparten a lo sumo un vértice.*

Entonces, cuando dos bloques de G comparten un vértice, este debe ser un punto de corte de G . La interacción entre los bloques y los puntos de corte es

1.1. Conceptos Básicos

descripta por un grafo especial denominado *Grafo de Bloques*, el cual se define a continuación. Observemos que si G es un grafo conexo entonces su grafo de bloques es un árbol.

Definición 1 ([5]). *El Grafo de Bloques de un grafo G es un grafo bipartito H en el cual un conjunto consiste en los puntos de corte v_i de G y el otro conjunto contiene un vértice b_i por cada bloque B_i de G . Incluimos $v_i b_i$ como arista de H si y solo si $v_i \in B_i$.*

Un grafo de n vértices tal que todo par de vértices son adyacentes es un *grafo completo* y se denota por K_n . Un *grafo bipartito* refiere a un grafo G cuyo conjunto de vértices es particionado en dos subconjuntos V_1 y V_2 , tal que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y el otro extremo en V_2 . Si G es un grafo bipartito que contiene una arista entre cada vértice de V_1 y cada vértice de V_2 , decimos que es un *grafo bipartito completo* que se denota K_{n_1, n_2} , donde n_1 y n_2 denotan el tamaño de V_1 y V_2 respectivamente. Dentro de los grafos bipartitos se encuentran los *árboles*, que son los grafos simples y conexos que no contienen ciclos.

Teorema 1 (Demostrado en [4]). *Si G es un árbol, entonces $e = n - 1$.*

Dado un grafo $G = (V, E)$, $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$, entonces $G' = (W, F)$ es un *subgrafo* de G si los extremos de todas las aristas de F pertenecen a W . Si G' es subgrafo de G y $G' \neq G$, el subgrafo es *propio*. Si $W = V$ entonces G' es un *subgrafo recubridor* de G . Los subgrafos pueden obtenerse removiendo vértices y aristas, donde se asume que remover un vértice de un grafo incluye remover todas sus aristas incidentes. El *subgrafo inducido* de un conjunto $W \subseteq V$ es el subgrafo formado por todas las aristas cuyos extremos están en W y se denota por $\langle W \rangle$. Si $U \subseteq V$, entonces la notación $G - U$ refiere a $\langle V - U \rangle$. Es decir, el subgrafo inducido por el conjunto $V - U$. Si el subgrafo recubridor es un árbol, entonces decimos que es un *árbol recubridor*. Denotamos el número de árboles recubridores de G como $\tau(G)$.

Un *emparejamiento* es un conjunto $M \subseteq E$ de aristas independientes, es decir, que no tienen vértices comunes. Un *emparejamiento perfecto* es un emparejamiento M tal que todo vértice del grafo es extremo de alguna arista de M .

Sea G un grafo 2-conexo con más aristas que vértices, diremos que una *cadena* es un camino en el cual cada vértice interno tiene exactamente grado 2 y sus vértices extremos tiene grado mayor o igual a 3. El *largo* de una cadena es la cantidad de aristas entre los vértices extremos. Si se tiene una sola arista entre los vértices extremos, entonces se dice que tenemos una *cadena trivial*. Decimos que el grafo $D(G)$ es la *destilación* del grafo G si $D(G)$ resulta de sustituir cada cadena no trivial de G por una arista que une los extremos de la cadena. Observemos que $D(G)$ puede resultar en un multigrafo, aunque G sea un grafo simple.

1.2. Confiabilidad de Redes

El diseño de redes para reducir la probabilidad de falla total o parcial es un problema central para muchos sistemas complejos de ingeniería. Existe un amplio campo de aplicaciones de las técnicas de confiabilidad en redes, desde la comunicación y la computación, pasando por sistemas de transporte hasta sistemas eléctricos de potencia. En todos ellos sus componentes pueden fallar o degradarse y esto inevitablemente puede conducir a la incapacidad del sistema para soportar una operación requerida.

En la literatura existe una clasificación cuidadosa de los tipos de fallas que pueden ocurrir. A continuación, citamos la clasificación de los eventos que llevan a fallas en las redes de comunicación, realizada en el libro de Rak *et al.* [6]:

- Desastres Naturales
 - Desastres Predecibles
 - Inundaciones
 - Incendios
 - Huracanes
 - Tornados
 - Erupción de Volcanes
 - Desastres Impredecibles
 - Terremotos
- Disrupciones Basadas en el Clima
 - Tormentas Fuertes
 - Neblinas
- Desastres Basados en la Tecnología
 - Internos
 - Errores de Software
 - Fallas en Hardware
 - Externos
 - Fallas de Energía Eléctrica
- Ataques Maliciosos
 - Directos
 - Pulsos Electromagnéticos
 - Daño Distribuido al Servicio (DDoS Distributed Denial of Service)

1.2. Confiabilidad de Redes

- Destrucción Física de Vértices o Aristas
- Indirectos
 - Bombardeos
 - Armas de Destrucción Masiva (WMD Weapons of Mass Destruction)

Por lo tanto, el diseño de dichos sistemas debe ser de forma tal que pueda enfrentar dichas fallas y tratar de mitigar el daño o las pérdidas que puedan causar. Los primeros trabajos dedicados a mejorar o maximizar la confiabilidad de las redes surgen junto con el telégrafo y el teléfono. Entre los artículos más influyentes, que proporcionaron las principales herramientas analíticas para lidiar con la confiabilidad, se encuentra el de Moore y Shannon [7] sobre redes conmutadas por relé.

Si pensamos en un grafo como representación de una red de comunicación, un problema importante en esta área es poder determinar la confiabilidad de un sistema a partir de la confiabilidad de sus componentes. Consideramos sistemas en los cuales sus elementos pueden estar en dos posibles estados: operacional o falla (up o down). Aunque uno puede fácilmente imaginarse sistemas en los cuales la falla de un componente afecta las características de otra, particularmente consideraremos que el estado de un elemento es un evento aleatorio independiente del estado de cualquier otro elemento. Asumimos que el estado de la componente i es una variable aleatoria binaria, es decir, tiene una distribución de Bernoulli con probabilidad de operación p_i .

La confiabilidad de un sistema es entonces la probabilidad de que el grafo que lo representa tenga alguna bondad o propiedad deseable. La medida más usada comúnmente es la confiabilidad K -terminal, en la cual consideramos la probabilidad de que un subconjunto K de vértices se puedan comunicar, esto es, que los vértices de K pertenezcan a la misma componente conexa de G . El caso especial en que K contiene todos los vértices de G , la métrica correspondiente, denominada *confiabilidad all-terminal*, es la probabilidad de que G sea conexo. Otro caso de estudio es cuando estamos interesados en la comunicación entre dos vértices particulares, denominados *fuelle* y *terminal*. Si denotamos a estos vértices por s y t , la métrica asociada es conocida como *confiabilidad fuente-terminal* y se define como la probabilidad de que exista en G al menos un camino entre s y t que tenga todas sus aristas operativas.

En su forma más elemental, consideramos un grafo simple G cuyos vértices no fallan, pero sus aristas fallan de forma independiente y con igual probabilidad ρ . La confiabilidad all-terminal del grafo G , $R_G(\rho)$, mide la probabilidad de que el grafo aleatorio resultante sea conexo. Se trata de un polinomio en una variable ρ y se denomina *polinomio de confiabilidad*. Por conveniencia, en general se trabaja con el *polinomio de anti-confiabilidad*, $P_G(\rho) = 1 - R_G(\rho)$ y representa la probabilidad de que el subgrafo aleatorio resultante de la eliminación de las aristas que fallan sea no conexo. Si notamos al total de conjuntos arista desconectores de tamaño k

Capítulo 1. Introducción

como $m_k(G)$, entonces, mediante regla de la suma, podemos expresar el polinomio de anti-confiabilidad como:

$$P_G(\rho) = \sum_{k=0}^{k=e} m_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{e-k} \quad 1 \quad (1.2)$$

Recordemos que e es el número total de aristas de G . El vector $m = (m_0, \dots, m_e)$ se denomina *vector arista desconector* o simplemente *vector de corte*.

Recordemos que el mínimo cardinal de un conjunto arista desconector de un grafo G se denota por λ . Por lo tanto, no hay ningún conjunto arista desconector con menor cardinalidad que λ . Esto implica que:

$$m_k(G) = 0 \quad \forall k < \lambda \quad (1.3)$$

Por otro lado, recordemos que conectar n vértices requiere al menos $e = n - 1$ aristas y el grafo resultante es un árbol. Notamos por $\mu = e - (n - 1) = e - n + 1$ a la diferencia entre el número de aristas del grafo G y el número de aristas de un árbol con n vértices. Por lo tanto, el número de subgrafos conexos que se obtienen al eliminar μ aristas, es el número de árboles recubridores $\tau(G)$ y por ende:

$$m_\mu(G) = \binom{e}{\mu} - \tau(G) \quad (1.4)$$

Finalmente, si quitamos una cantidad de aristas mayor que μ siempre obtenemos un grafo no conexo, y por lo tanto:

$$m_k(G) = \binom{e}{k} \quad \forall k > \mu \quad (1.5)$$

Por desgracia, hallar el vector de corte es una tarea intrínsecamente difícil. De hecho, Ball y Provan [8] formalmente demostraron que calcular el vector de corte pertenece a la clase de problemas de conteo #P-Completos. Estos problemas de conteo son por lo menos tan difíciles como un problema NP-Completo, que son presumiblemente problemas computacionalmente intratables [9]. El lector interesado en aspectos de complejidad computacional puede consultar al clásico libro de Garey y Johnson [10].

Por lo tanto, se requieren buenas estrategias para resolver estos problemas de análisis de confiabilidad de redes. Un posible camino consiste en utilizar las técnicas de Monte Carlo para obtener un valor estimado. Varios autores han transitado este camino y en este sentido recomendamos al lector a ver los trabajos de [11–16].

Una vez que hemos modelado una red y definido una medida de confiabilidad, cabe preguntarse cómo podríamos diseñar una red que alcance la máxima confiabilidad. Podríamos sintetizar el problema de la siguiente manera. Dados dos enteros

¹Cabe destacar que esta ecuación aplica para multigrafos y pseudografos.

1.3. Estructura del Documento

positivos n y e tales que $n \geq 3$ y $1 \leq e \leq \binom{n}{2}$ y dado un número real ρ fijo tal que $\rho \in (0, 1)$, el problema consiste en encontrar un grafo simple con n vértices y e aristas que minimice $P_G(\rho)$, para un valor de ρ fijo. Como hay una cantidad finita de grafos simples con n vértices y e aristas, siempre existe un grafo simple que minimiza $P_G(\rho)$, asumiendo un valor de ρ dado.

En la misma dirección, uno podría también preguntarse si existe un grafo simple que tenga la mayor confiabilidad para todos los valores de ρ . Incluso podríamos cuestionar qué sucede si permitimos aristas múltiples.

Como ya habrá notado el lector, todas estas preguntas son de interés y aplicación. Se ha hecho un gran recorrido en el afán de responder a estas preguntas de más de medio siglo de investigaciones y desarrollo. Aún así muchas de estas preguntas permanecen abiertas al día de hoy.

1.3. Estructura del Documento

- Capítulo 2 - Grafos Uniformemente Más Confiables

En este capítulo se brindan resultados relativos a la existencia e inexistencia de grafos simples uniformemente más confiables, con especial énfasis en los resultados de existencia que brindan Boesch *et al.* [17] y Wang [18].

- Capítulo 3 - Multigrafos Uniformemente Más Confiables

En este capítulo se extiende el estudio realizado anteriormente para el caso en que se consideran multigrafos. En ese sentido, se realiza una revisión completa de los resultados obtenidos por Gross y Saccoman [19], en primera instancia, y luego por Romero [20].

- Capítulo 4 - Contribuciones

En este capítulo se desarrolla de forma detallada un resultado novedoso que culmina con la publicación de un artículo de co-autoría, donde se desarrolla una prueba simplificada y unificada, que reúne los resultados dados en el capítulo anterior y además son extendidos a la clase de pseudografos.

Anticipamos al lector que los Capítulos 2 y 3 requieren un estudio combinatorio extenso e intrincado, lo cual realiza el valor del Capítulo 4 y en definitiva de toda la Tesis.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 2

Grafos Uniformemente Más Confiables

2.1. Introducción

En este capítulo se realiza una revisión de trabajos fundacionales relativos a la confiabilidad uniforme en el modelo all-terminal para grafos simples.

En primer lugar se brindan conceptos específicos sobre confiabilidad uniforme, como también condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea uniformemente más confiable.

Luego, se listan resultados relativos a existencia e inexistencia de grafos uniformemente más confiables, con especial énfasis en los resultados que brindan Boesch *et al.* [17] y Wang [18]. Estos trabajos son de especial interés ya que sientan las bases para el estudio de la temática y refieren a la existencia de grafos uniformemente más confiables para los casos en que $e \in \{n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3\}$.

2.2. Primeros Pasos

Dados dos enteros positivos n y e tales que $n \geq 3$ y $1 \leq e \leq \binom{n}{2}$, denotaremos como $\Omega(n, e)$ al conjunto de todos los multigrafos con n vértices y e aristas y por $\Omega_s(n, e)$ a la subclase de grafos simples.

Boesch en 1986 en su artículo [21] fue el primero en observar que, a priori, aquellos grafos que minimizan el polinomio de anti-confiabilidad para un valor de ρ dado, puede que no sean los mismos para otro valor de ρ en el intervalo $[0,1]$. Bajo este razonamiento, el autor sintetiza el problema bajo la siguiente definición:

Definición 2. *Un grafo $G \in \Omega_s(n, e)$, es uniformemente óptimamente confiable si $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$ para todo $\rho \in [0, 1]$ y para todo grafo $H \in \Omega_s(n, e)$.*

Dichos grafos fueron llamados por Boesch como *Uniformly Optimally-Reliable Graphs* pero más tarde, Myrvold renombró esta clase de grafos como *Uniformly*

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

Most-Reliable Graphs para evitar un trabalenguas [22]. Siguiendo el criterio de la mayoría de autores que trabajan en esta área, usaremos la sigla inglesa *UMRG* para referirnos a dicha clase de grafos. Haciendo una traducción al español, nos referiremos a dicha clase como *Grafos Uniformemente Más Confiables*.

En primer lugar, a partir de la Ecuación (1.2), podemos notar la siguiente condición suficiente para la existencia de UMRG:

Corolario 1. *Dado G un grafo perteneciente a la clase $\Omega_s(n, e)$, si $m_k(G) \leq m_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, e\}$ y para todo grafo $H \in \Omega_s(n, e)$, entonces el polinomio de anti-confiabilidad es uniformemente dominado, es decir, $P_G(\rho) \leq P_H(\rho)$ para todo $\rho \in [0, 1]$ y para todo $H \in \Omega_s(n, e)$ y por lo tanto G es UMRG.*

Boesch conjetura en [21] que el recíproco también es válido, aunque su demostración aún permanece abierta.

Diremos que un grafo $G \in \Omega(n, e)$ es *más fuerte* que un grafo $H \in \Omega(n, e)$ y lo notaremos como $G \geq H$, si se verifica que $m_k(G) \leq m_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, e\}$. También diremos que H es *más débil* que G . Notar que la relación \geq es reflexiva y transitiva. Un grafo G es *el más fuerte* en una clase arbitraria Ω , si $G \geq H$ para todo grafo $H \in \Omega$. Cabe observar que si un grafo $G \in \Omega_s(n, e)$ es más fuerte que todos los grafos de su clase, entonces por el Corolario 1 obtenemos que G es UMRG.

Es fácil ver que una condición necesaria para que un grafo sea UMRG es que este sea localmente óptimo en un entorno de $\rho = 0$ y también en un entorno de $\rho = 1$. En particular, si ρ es suficientemente chico, podemos aproximar el polinomio de anti-confiabilidad por $m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{e - \lambda}$. Por lo tanto, para minimizar la expresión anterior, debemos maximizar λ y minimizar m_λ . Los grafos que satisfacen lo antedicho se denominan λ -óptimos y formalmente se definen como:

Definición 3 (Grafos λ -óptimos). *Sea $\hat{\lambda}$ la máxima arista-conectividad sobre todos los grafos pertenecientes a la clase $\Omega_s(n, e)$. Un grafo $\hat{G} \in \Omega_s(n, e)$ con arista conectividad $\lambda(\hat{G}) = \hat{\lambda}$ se denominará λ -óptimo si $m_\lambda(\hat{G})$ es el mínimo sobre todos los grafos en $\Omega_s(n, e)$ con $\lambda = \hat{\lambda}$.*

Todo grafo localmente óptimo en un entorno de $\rho = 0$ es necesariamente λ -óptimo. Además, los grafos λ -óptimos comparten polinomios de confiabilidad similares en un entorno de $\rho = 0$, cuya diferencia está acotada [23]. Finalmente, en [24] los autores brindan un método para construir grafos λ -óptimos para cualquier n y e dado. No obstante, hasta la fecha no se han clasificado completamente todos los grafos λ -óptimos, y en particular se conocen grafos simples que son localmente óptimos dentro de su clase $\Omega_s(n, e)$ solo para valores especiales de n y e .

Por el Lema de *Handshaking* el grado promedio de todos los vértices es precisamente igual a $2e/n$. Si $\delta(G)$ denota el grado mínimo de todos los vértices de G , entonces $\delta(G) \leq 2e/n$. Además, la arista conectividad $\lambda(G)$ no puede ser mayor

que $\delta(G)$, ya que se obtiene un corte si removemos todas las aristas incidentes a un nodo fijo. Por lo tanto, $\delta(G) \leq \lfloor 2e/n \rfloor$. Harary en [25], construye grafos donde la cota superior es en efecto alcanzada por los mismos. Dichos grafos son denominados, por obvias razones, grafos de Harary.

Por otro lado, si ρ tiende a 1, el polinomio de anti-confiabilidad es equivalente a $m_\mu(G)\rho^\mu(1 - \rho)^{n-1}$, con $\mu = e - n + 1$. Entonces, es necesario minimizar el coeficiente $m_\mu(G)$ o equivalentemente maximizar su complemento $\tau(G)$, es decir el número de árboles recubridores. Un grafo de la clase $\Omega_s(n, e)$ es *t-óptimo* si tiene el máximo número de árboles recubridores en su clase. Se define, entonces:

Definición 4 (Grafo *t-óptimo*). *Un grafo $G \in \Omega_s(n, e)$ es t-óptimo si $\tau(G) \geq \tau(H)$ para todo grafo $H \in \Omega_s(n, e)$.*

Es fácil ver que todo grafo UMRG debe ser *t-óptimo* y λ -óptimo. Boesch conjetura en [21] que, dados dos enteros positivos n y e tales que $1 \leq e \leq \binom{n}{2}$ siempre existe un grafo simple que es UMRG dentro de la clase $\Omega_s(n, e)$. Una forma de refutar dicha conjetura es encontrar un grafo *t-óptimo* $G \in \Omega_s(n, e)$ tal que $\tau(G) > \tau(H)$ para todo $H \in \Omega_s(n, e)$ que no sea λ -óptimo. Una conjetura más débil que postula el mismo autor es que todo grafo *t-óptimo* también es λ -óptimo. Actualmente es sabido que ambas conjeturas son falsas y un contraejemplo se obtiene tomando G_1 y G_2 pertenecientes a la clase $\Omega_s(6, 11)$, presentados en la Figura 2.1, donde se cumple que G_1 es *t-óptimo*, mientras que G_2 es λ -óptimo. El lector puede encontrar mayores detalles en el artículo desarrollado por Myrvold *et al.* [26].

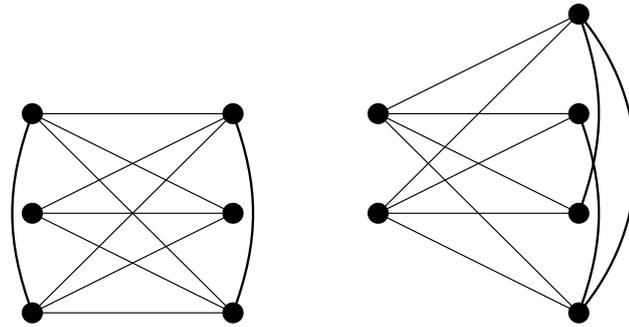


Figura 2.1: El grafo *t-óptimo* G_1 (izq.) difiere de G_2 λ -óptimo (der.) cuando $(n, e) = (6, 11)$.

De hecho, se han encontrado infinitos contraejemplos a la conjetura de Boesch sobre la existencia de UMRG [26–28]. La estrategia utilizada por todos ellos es siempre la misma. Se considera un grafo que es localmente óptimo para ρ en un entorno de 0 o 1. Luego, se muestra que existe otro grafo, distinto, que tiene mayor confiabilidad en el otro extremo del intervalo $[0, 1]$, que el grafo inicialmente considerado. De esta forma se prueba que no existe un grafo que sea uniformemente

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

más confiable.

Kelmans proporciona un esbozo de la prueba respecto a la no existencia de UMRG en su artículo de 1981 [27]. Posteriormente, Myrvold *et al.* realizan una prueba formal [26]. Ellos prueban que para valores de n par, con $n \geq 6$ y $e = \binom{n}{2} - \frac{n+2}{2}$, o para valores de n impar, con $n \geq 7$ y $e = \binom{n}{2} - \frac{n+5}{2}$, no existen UMRG. El caso más pequeño ocurre cuando $n = 6$ y $e = 11$ y se ilustra en la Figura 2.1.

Años más tarde, Brown y Cox [28] cubren otra familia infinita de contraejemplos para valores de (n, e) que satisfacen $\binom{n}{2} - n \leq e < \binom{n}{2} - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $n \geq 6$.

La técnica de demostración de inexistencia suele basarse en el siguiente Lema de Brown y Cox.

Lema 1 ([28]). *Sean G y H pertenecientes a la clase $\Omega_s(n, e)$. Notemos $\mu = e - n + 1$. Consideremos los polinomios de anti-confiabilidad:*

$$P_G(\rho) = \sum_{k=0}^e m_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{e-k}$$

$$P_H(\rho) = \sum_{k=0}^e m_k(H) \rho^k (1 - \rho)^{e-k}$$

Supongamos que para algún entero no negativo j y l con $l \leq j \leq \mu$, $m_k(G) = m_k(H)$ para $0 \leq k < l$ y $m_k(G) = m_k(H)$ para $j < k \leq \mu$. Entonces:

1. $m_l(G) < m_l(H)$ implica que $P_H(\rho) > P_G(\rho)$ para valores de ρ suficientemente cercanos a 0.
2. $m_j(G) < m_j(H)$ implica que $P_H(\rho) > P_G(\rho)$ para valores de ρ suficientemente cercanos a 1.

Demostración. Sean G y H dos grafos pertenecientes a la clase $\Omega_s(n, e)$, consideramos la resta de sus polinomios de anti-confiabilidad:

$$\begin{aligned} P_H(\rho) - P_G(\rho) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\mu} (m_k(H) - m_k(G)) \rho^k (1 - \rho)^{e-k} \\ &= \rho^l (1 - \rho)^{e-j} \sum_{k=l}^j (m_k(H) - m_k(G)) \rho^{k-l} (1 - \rho)^{j-k} \\ &= \rho^l (1 - \rho)^{e-j} \left[(m_l(H) - m_l(G)) (1 - \rho)^{j-l} + \cdots + (m_j(H) - m_j(G)) \rho^{j-l} \right] \end{aligned}$$

A partir de esto, podemos ver que si $m_l(H) > m_l(G)$ entonces para ρ cercanos a 0 tenemos que $P_H(\rho) - P_G(\rho) > 0$, es decir, $P_H(\rho) > P_G(\rho)$. De forma similar, si

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

$m_j(H) > m_j(G)$, entonces, para valores de ρ cercanos a 1 se verifica que $P_H(\rho) - P_G(\rho) > 0$ y por lo tanto $P_H(\rho) > P_G(\rho)$. \square

Para toda familia de grafos simples, siempre existe un grafo t -óptimo para valores de ρ cercanos a 0. De la misma forma, siempre existe un grafo λ -óptimo para valores de ρ cercanos a 1. La clave es notar que para una familia de grafos dada, si existe un grafo que tiene la mayor confiabilidad para valores de ρ cercanos a 0, pero no tiene la mayor confiabilidad para valores de ρ cercanos a 1, entonces no existe un grafo uniformemente más confiable.

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

Centrémonos a continuación en los casos para los cuales se ha demostrado la existencia de UMRG. El primer trabajo hecho al respecto fue en 1991 por Boesch *et al.* [17].

Cabe tener presente que todo grafo conexo con $e = n - 1$ es un árbol (Teorema 1) y todos poseen el mismo polinomio de confiabilidad. Por lo tanto, todos los árboles son UMRG. Observemos que este sencillo ejemplo muestra que un grafo UMRG puede existir, pero no ser único.

En el caso $e = n$ los autores identifican a los ciclos como UMRG, que son los únicos de esta clase que cumplen $m_1 = 0$. Teniendo en cuenta que en esta clase, al remover cualquier cantidad de aristas mayor que uno se tiene siempre desconectores, los ciclos minimizan todas las coordenadas del vector \vec{m} . Por el Corolario 1, resulta que los ciclos son UMRG.

Para $e = n + 1$, tenemos tres términos que deben ser minimizados: m_0 , m_1 y m_2 , ya que $\mu = e - n + 1 = 2$ y por lo tanto, $m_k(G) = \binom{e}{k}$ para todo $k > \mu = 2$. Además, teniendo en cuenta que $\lambda \leq \delta \leq \lfloor 2e/n \rfloor$, el máximo valor de λ es 2, por lo tanto un grafo λ -óptimo también minimiza m_2 . Bauer *et al.* en [24] brinda construcciones de grafos λ -óptimos, a través del Teorema 2.

Teorema 2 ([24]). *Sean n y e dos enteros positivos tales que $\lambda = \lfloor 2e/n \rfloor = 2$, y sea $\mathcal{G}_2(n, e)$ el conjunto de todos los grafos G pertenecientes a $\Omega_s(n, e)$ tales que $\lambda(G) = 2$. Escribiremos $e = p + n = 3ps + l$, donde $0 \leq l \leq 3p$. Entonces, todo grafo $G \in \mathcal{G}_2(n, e)$ que minimiza m_2 tiene $n - 2p$ vértices de grado 2 uniformemente insertados en una destilación 3-regular de $2p$ vértices con arista conectividad 3. Más específicamente, l aristas de la destilación de G tiene s vértices de grado 2 y las restantes $3p - l$ aristas tienen $s - 1$ vértices de grado 2. En particular:*

$$m_2(G) = l \binom{s+1}{2} + (3p-l) \binom{s}{2}$$

Observar que si $G \in \Omega_s(n, n+1)$ cumple con las hipótesis del Teorema 2, entonces G es $\text{min-}m_0$ y $\text{min-}m_1$, puesto que G posee arista conectividad 2 y en

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

particular $m_0(G) = m_1(G) = 0$. Como G es $\text{min-}m_2$, entonces por el Corolario 1 se sigue que todo $G \in \Omega_s(n, n+1)$ que cumpla con las hipótesis del Teorema 2 es UMRG. Específicamente, su construcción comienza con dos vértices unidos por tres aristas. Luego, un total de $n-2$ vértices deben ser insertados en dichas aristas de forma tal que el número de vértices en cada cadena difiere a lo sumo en 1. Esto es únicamente alcanzado escribiendo en primer lugar $n+1 = 3s+l$ para algún $0 \leq l \leq 2$ y luego insertando s vértices en l cadenas y $s-1$ vértices en las restantes $3-l$ cadenas. El resultado es lo que se denomina un grafo θ balanceado.

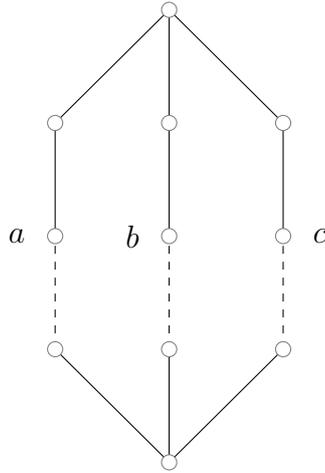


Figura 2.2: El grafo θ .

Otra forma de probar lo antedicho es observar que mediante el teorema de caracterización de West [5], todo grafo 2-conexo es aumentación secuencial de aristas y subdivisiones de aristas de un ciclo. Luego, los grafos θ , también conocidos en literatura como grafos de Monma, son los únicos grafos 2-conexos dentro de la clase $\Omega_s(n, n+1)$. Sean a , b y c las respectivas longitudes de los caminos del grafo θ (ver Figura 2.2). Mediante combinatoria elemental, se deduce que $m_2(a, b, c) = \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2}$, que se debe minimizar bajo la restricción $a + b + c = n + 1$, con a, b y c naturales. Como $m_2(a, b, c)$ es una función invariante bajo la permutación de a , b y c , se puede asumir, sin perder generalidad, que $a \geq b \geq c \geq 1$ y si $a > c + 1$ se obtiene directamente que $m_2(a - 1, b, c + 1) < m_2(a, b, c)$, por lo que a , b y c no pueden diferir en más de una unidad y volvemos a obtener el grafo θ balanceado, que es UMRG en su clase de grafos simples $\Omega_s(n, n+1)$.

El estudio que brindan Boesch *et al.* para $e = n + 2$ es más extenso, y ya brinda evidencias de lo complejo que es la construcción de UMRG y respectivas demostraciones. Si consideramos grafos λ -óptimos, minimizamos el término m_2 , ya que el valor máximo de λ es 2. Luego, un grafo t -óptimo minimizaría el término m_3 , dado que $\mu = e - n + 1 = 3$. Las construcciones que Bauer *et al.*

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

nos proporcionan en este caso para grafos λ -óptimos, se obtienen de la inserción de $n - 2$ vértices en las aristas de K_4 de forma que el largo de las cadenas difieran a lo sumo en 1. El análisis que realizan Boesch *et al.* se basa en probar que estos grafos son también t -óptimos y por lo tanto resultan UMRG. Para definir la correspondiente familia de grafos, la cual notaremos por $K(n, n + 2)$, primero observe que K_4 acepta una arista partición en tres emparejamientos perfectos, $E(K_4) = \{e_1, e_2\} \cup \{e_3, e_4\} \cup \{e_5, e_6\}$. Considere la división natural $n - 4 = 6s + r$ para algún $r \leq 5$. Debemos insertar $n - 4$ vértices en seis aristas de forma que los largos de las cadenas resultantes son $l_{e_i} = s + 2$ si $i \leq r$ o $l_{e_i} = s + 1$ en otro caso. La Figura 2.3 representa el grafo $K(n, n + 2)$ para el caso particular en que $n = 11$.

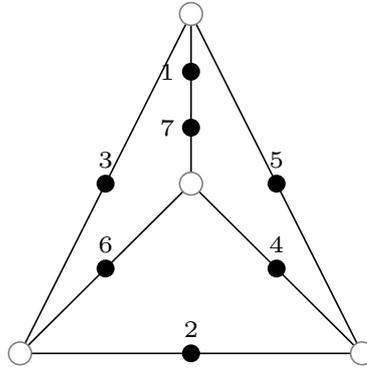


Figura 2.3: Grafo $K(n, n + 2)$. El ejemplo ilustra en particular el grafo $K(11, 13)$.

Para lograr probar que el grafo anteriormente descrito es t -óptimo, los autores de [17] utilizan algunos resultados intermedios respecto a esta clase de grafos, los cuales serán presentados a continuación. Sea u y v cualquier par de vértices de un grafo G . Utilizamos la notación $G/(uv)$ para representar al grafo que se obtiene al identificar los vértices u y v . Notemos que este puede resultar en un multigrafo. Si u y v son extremos de una arista x , también denotamos por (uv) a dicha arista. La notación $G - x$ es usada para denotar al grafo que se obtiene al remover la arista x de G , mientras que $G * x$ denota el grafo que se obtiene al contraer la arista x de G . Se mantiene la misma aclaración anterior. Luego, a partir de la regla de arista sustracción-contracción [29], tenemos que :

$$\tau(G) = \tau(G - x) + \tau(G * x) \quad (2.1)$$

En primer lugar, veamos el Teorema 3, el cual utiliza como concepto base la Proposición 1 del capítulo anterior.

Teorema 3. *Dados dos enteros positivos n y e tales que $e \geq n \geq 3$ y dado G un grafo en $\Omega_s(n, e)$. Si G es t -óptimo, entonces G es 2-conexo.*

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

Idea de la Demostración [17]. Supongamos que G no es 2-conexo y tiene bloques (componentes conexas) B_1, \dots, B_m . Claramente:

$$\tau(G) = \prod_{k=1}^m \tau(B_k)$$

y $\tau(G)$ no depende de cómo estén interconectados los bloques. Como $e > n - 1$, debe haber al menos un bloque que sea 2-conexo, el cual asumiremos sin perder generalidad que es B_1 . Sea B_2 otro bloque que tenga un vértice en común con B_1 . Consideremos la transformación $G' = B_1 \cup B_2 - (uv) + (uw)$, donde (uv) es una arista de B_1 incidente al punto de corte v y $w \neq v$ es cualquier otro nodo de B_2 . Ver Figura 2.4.

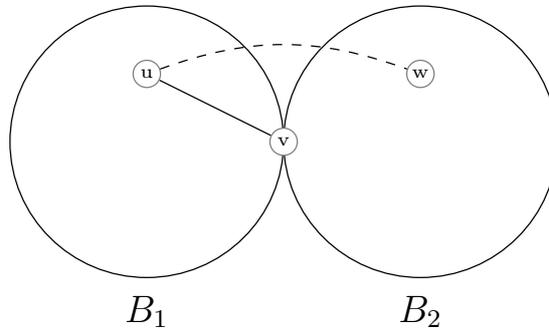


Figura 2.4: Transformación que aumenta el número de árboles.

Se demostrará que $\tau(G') > \tau(B_1 \cup B_2)$, es decir, la transformación considerada aumenta el número de árboles recubridores y por lo tanto contradice la hipótesis de que G es t -óptimo. Se puede repetir la operación para cada una de las componentes conexas y concluir entonces que G debe ser 2-conexo.

Introduciremos una función inyectiva σ que mapea los árboles recubridores de $B_1 \cup B_2$ en los árboles recubridores de G' . Para ello, partiremos el conjunto de árboles de $B_1 \cup B_2$ en \mathcal{T}_x , para aquellos árboles que contienen la arista $x = (uv)$ y $\mathcal{T}_{\bar{x}}$ para aquellos que no contienen la arista x . Para todo árbol T de $\mathcal{T}_{\bar{x}}$, σ es la identidad, ya que T es un árbol de G' . Ahora, para cada árbol T de \mathcal{T}_x , $T - x$ tiene dos componentes: una que contiene a u y otra que contiene a v . En particular, la componente que contiene a v también contiene a $T \cap B_2$. Por lo tanto, $T - x + (uw)$ es un árbol de G' . A continuación, mostraremos que hay un árbol de G' que no es generado por σ . Para ello, notemos que $B_2 - v$ es conexo ya que B_2 es o bien 2-conexo, o bien esta formado por tan solo una arista. En cualquier caso, podemos encontrar un árbol T_2 de $B_2 - v$. Además, como B_1 es 2-conexo, existe un árbol T_1 de $B_1 - x$. Claramente, $T_1 \cup T_2$ es un bosque de dos componentes, con v en una componente y w en otra. Por lo tanto, $T' = T_1 \cup T_2 + (uw)$ es un árbol de G' . Además T' no es generado por σ , ya que todo árbol en \mathcal{T}_x o $\mathcal{T}_{\bar{x}}$ debe contener alguna arista de B_2 que sea incidente a v . \square

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

Diremos que un grafo G tiene dos o más cadenas paralelas, si comparten sus vértices extremos. Los autores prueban, en primer lugar, que si G es t -óptimo, entonces no puede tener cadenas paralelas, a menos que sean triviales.

Teorema 4 ([17]). *Si $G \in \Omega_s(n, e)$ es t -óptimo, con $e \geq n + 2 \geq 6$, entonces si G tiene dos cadenas paralelas, ambas son triviales.*

Luego, sea G un grafo t -óptimo con $e = n + 2$ y $n \geq 5$, consideramos su destilación $D(G)$. Entonces, todo nodo de $D(G)$ tiene grado mayor o igual a 3, ya que todas las cadenas fueron reemplazadas por una arista. Luego, por el Lema de *Handshaking* tenemos que $2(n + 2) = 2e = \sum d(v_i) \geq 3n$, entonces el número de vértices de $D(G)$ debe ser a lo sumo 4. Por ende, hay solo 3 posibles destilaciones de G , las cuales se muestran en la Figura 2.5.

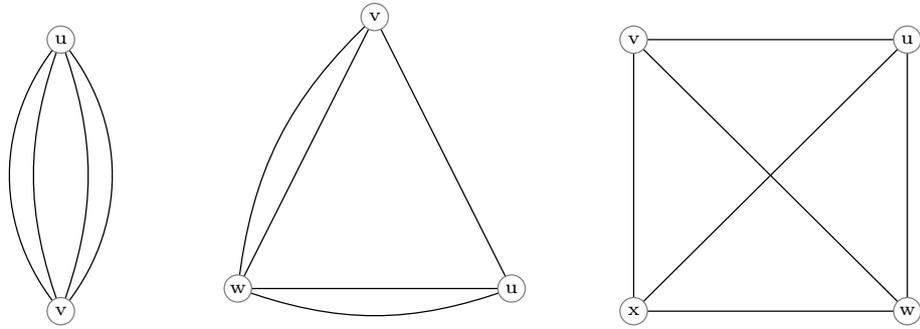


Figura 2.5: Posibles destilaciones $D(G)$

Del Teorema 4, inmediatamente se puede descartar el primer grafo propuesto como destilación de G en la Figura 2.5, puesto que G tendría cadenas no triviales paralelas. Luego, para el caso de la segunda destilación propuesta, los vértices solo se pueden insertar en la arista (vu) . El número de árboles recubridores de dicho grafo es $4(n - 1)$, que es menor que $6n - 11$, siendo este el número de árboles recubridores del grafo que se obtiene al insertar un nodo en la arista (uv) y los restantes vértices en la arista (uv) . Por lo tanto, resulta que $D(G) = K_4$.

Por último, los autores de [17] encuentran la mejor secuencia de inserción de vértices, que resulta ser la anteriormente descripta. Además, conjeturan que una metodología similar de subdivisiones elementales partiendo del grafo bipartito completo $K_{3,3}$ resulta en la familia de UMRG para el caso $e = n + 3$. Esta conjetura fue demostrada formalmente por Wang en [18].

El razonamiento que hay detrás es similar al utilizado por Boesch *et al.* anteriormente. Se prueba que los grafos UMRG no admiten cadenas paralelas, que todas las cadenas deben diferir a lo sumo en 1 y que la destilación debe ser $K_{3,3}$. A continuación daremos una definición explícita de la familia de grafos UMRG obtenida, $G_u(n, n + 3)$. Primero, consideremos una partición arbitraria

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

del conjunto de aristas de $K_{3,3}$ en tres emparejamientos perfectos: $E(K_{3,3}) = \{e_1, e_2, e_3\} \cup \{e_4, e_5, e_6\} \cup \{e_7, e_8, e_9\}$. Consideremos la división natural $n-6 = 9s+r$, para algún $r \leq 8$. Los largos de las respectivas cadenas son $l_{e_i} = s+2$, si $i \leq r$ o $l_{e_i} = s+1$ en el otro caso. En la Figura 2.6 el grafo $G_u(n, n+3)$ es representado para $n = 16$. Los vértices negros representan la inserción de vértices y sus etiquetas el respectivo orden de inserción. El proceso de inserción de vértices es periódico con período 9. En este caso $l_{e_1} = 3$ y $l_{e_i} = 2$ para todo $i \in \{2, \dots, 9\}$.

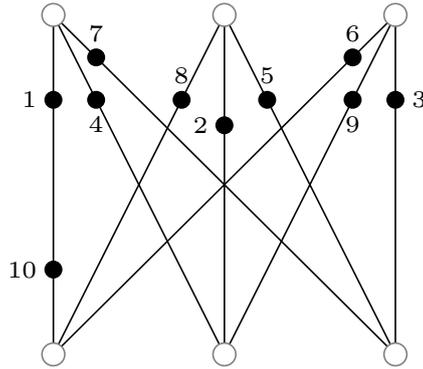


Figura 2.6: Grafo $G_u(n, n+3)$. El ejemplo ilustra en particular el grafo $G_u(16, 19)$.

El progreso respecto a la existencia de grafos UMRG es lento y casos particulares de n y e fueron recientemente cubiertos. Myrvold, en un análisis computacional, determina todos los UMRGs con 8 vértices o menos [30]. A su vez, determina los pares (n, e) con $n \leq 8$ para los cuales no existe UMRG. Ath y Sobel [31] conjeturaron la forma de candidatos a UMRGs para aquellas clases de grafos con co-rango $\mu \in \{5, 6, 7, 8\}$ y cantidad de vértices $n \geq 2\mu - 2$. A partir de evidencia computacional, los autores conjeturan que ciertas subdivisiones de los grafos de Wagner, Petersen, Yutsis y Heawood son UMRG para los respectivos co-rangos. Hasta la fecha solo se ha demostrado que los grafos de Wagner [32], Petersen [33] y Yutsis [34] son UMRGs en las clases $\Omega_s(8, 12)$, $\Omega_s(10, 15)$ y $\Omega_s(12, 18)$, respectivamente. Para la clase $\Omega_s(14, 21)$ solo se tiene evidencia computacional de la t -optimalidad del grafo de Möbius-Kantor [35].

Boesch *et al.* establecen originalmente, sin una prueba matemática, que el grafo $K_{4,4}$ es UMRG. Esta afirmación fue probada de forma computacional en [30] y de forma analítica en [36]. Otro grafo no trivial 4-regular que se prueba que es UMRG es $\overline{K_3} \cap \overline{C_4}$ con 7 vértices.

Salvando los resultados anteriormente presentados, encontraremos resultados de existencia o inexistencia sobre el rango de grafos densos. Para ello, haremos la distinción entre aquellos grafos simples con n vértices y e aristas que verifican $\binom{n}{2} - \lfloor n/2 \rfloor \leq e \leq \binom{n}{2}$ y aquellos que verifican $\binom{n}{2} - n \leq e \leq \binom{n}{2} - \lfloor n/2 \rfloor$.

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

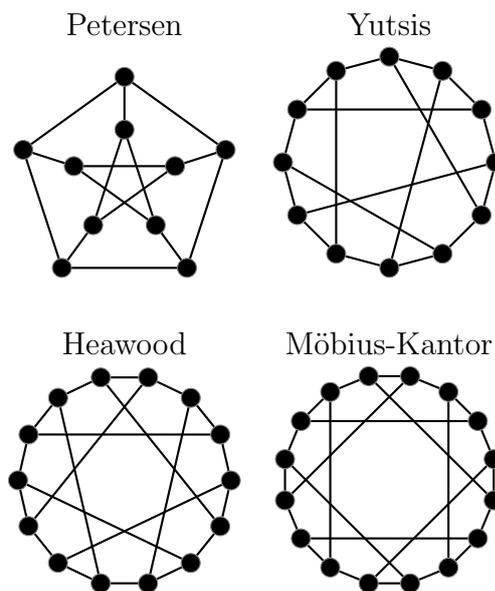


Figura 2.7: Petersen y Yutsis son UMRG. Se presume que los grafos de Heawood y Möbius-Kantor también son UMRG.

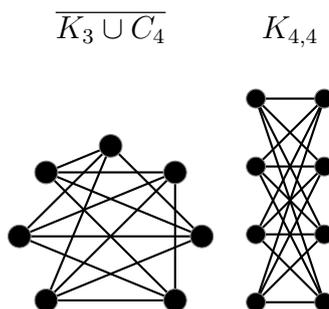


Figura 2.8: Los grafos regulares UMRG conocido son K_5 , K_6 menos un emparejamiento, $\overline{K_3 \cup C_4}$ (izq) y $K_{4,4}$ (der).

Kelmans [27] y Satyanarayana *et al.* [37] encontraron de forma independiente una operación que incrementa la confiabilidad, llamada *swing surgery*. Esta operación, bajo ciertas circunstancias, proporciona un grafo uniformemente más confiable y puede ser combinado con el conteo de conjuntos de corte para encontrar nuevos UMRG.

Una interpretación de la operación *swing surgery* en los grafos complementarios implica que K_n menos un emparejamiento define un UMRG [27]. Esta es una prueba topológica alternativa para la t -optimalidad de K_n menos un emparejamiento, que fue establecida por Shier usando la Teoría Algebraica de Grafos [38].

Continuando con aquellos grafos simples que verifican que $\binom{n}{2} - \lfloor n/2 \rfloor \leq e \leq \binom{n}{2}$, nos encontramos con el resultado de inexistencia que demostraran Kel-

Capítulo 2. Grafos Uniformemente Más Confiables

mans [27] y Myrvold [26] de forma independiente y que plasmaremos en el siguiente teorema.

Teorema 5. *Para $n \geq 6$, n par y $e = \binom{n}{2} - \frac{n+2}{2}$ y para $n \geq 7$, n impar y $e = \binom{n}{2} - \frac{n+5}{2}$, no existe grafo UMRG en la clase $\Omega_s(n, e)$.*

Pasando al otro intervalo sobre el cual hemos hecho la distinción, más recientemente Brown and Cox [28] cubren parcialmente el rango de los pares (n, e) tales que $\binom{n}{2} - n \leq e \leq \binom{n}{2} - \lfloor n/2 \rfloor$. El resultado obtenido por los autores se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sea $n \geq 6$ y $e = \binom{n}{2} - (n - k)$, donde $1 \geq k \geq n/2$, entonces no existe grafo UMRG en la clase $\Omega_s(n, e)$ si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:*

1. $k = 1$ y $n \equiv 1 \pmod{3}$;
2. $n - 2k \equiv 1 \pmod{3}$, $k \neq 1$ y $k \neq (n - 1)/2$
3. $n - 2k \equiv 2 \pmod{3}$ y $k \neq 1$

Luego, Archer *et al.* [39] caracterizaron completamente los grafos simples UMRG para aquellos casos en que $n \geq 5$ es impar y $e = \binom{n}{2} - \frac{n+1}{2}$ o $e = \binom{n}{2} - \frac{n+3}{2}$. Los grafos complementarios a estos UMRG son un emparejamiento más P_3 o C_3 , respectivamente.

De manera sumamente generosa el Dr. Eduardo Canale nos permite usar una figura de su autoría, que ilustra todos los UMRG conocidos hasta ahora en función de los posibles pares (n, e) . Los puntos rojos representan los pares de (n, e) donde es sabido que no existe UMRG, mientras que los puntos verdes representan los pares donde sí existen. Las líneas rectas incluyen los infinitos pares donde se conjetura que existen grafos UMRG [31, 35]. Los UMRG conocidos están representados en cada par (n, e) , exceptuando los grafos completos o casi-completos para evitar superposiciones. Esta constelación se puede apreciar en la Figura 2.9.

2.3. Sobre la Existencia de UMRG

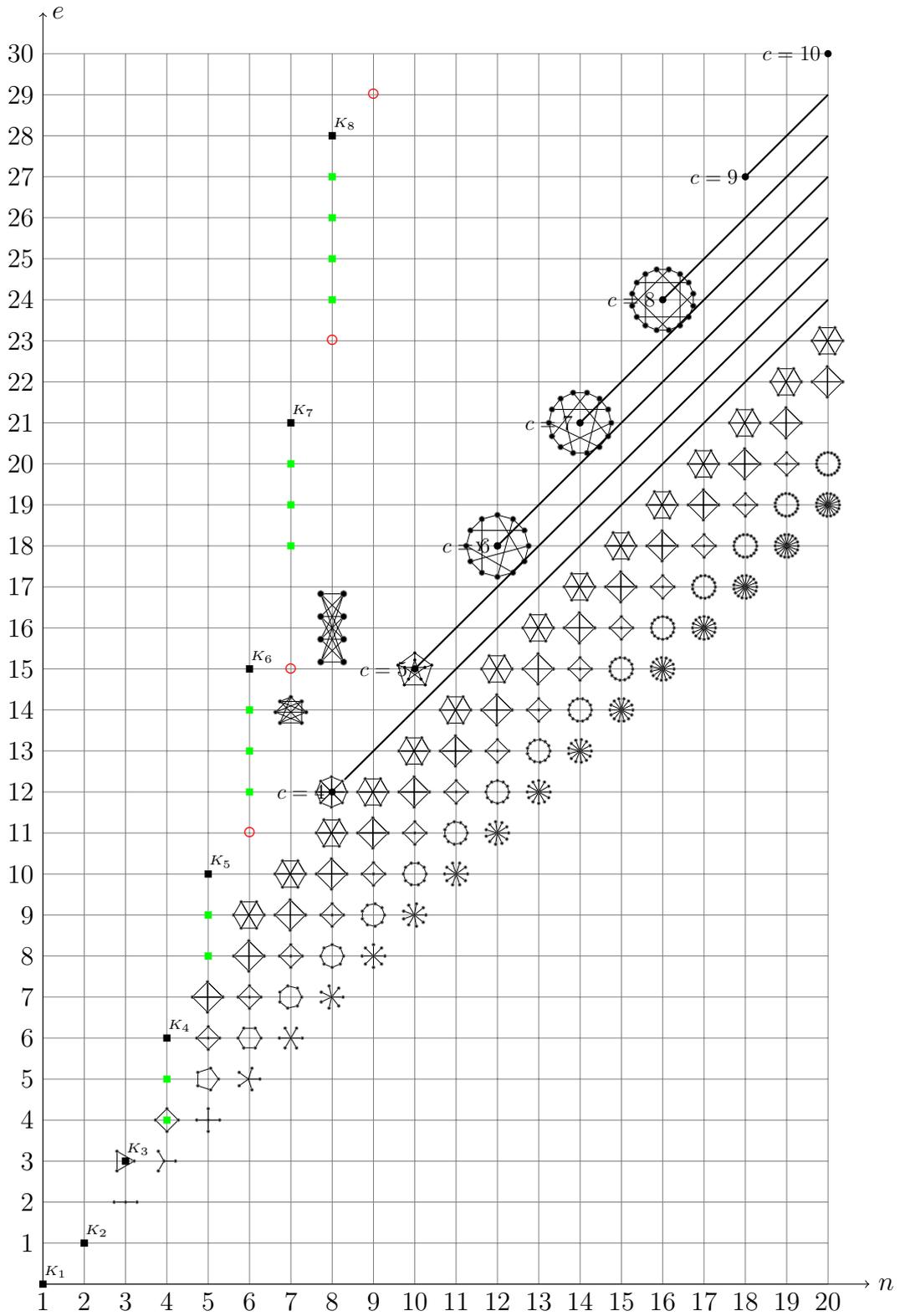


Figura 2.9: Grafos UMRG encontrados hasta ahora en función de (n, e) . (Figura elaborada por Dr. Eduardo Canale).

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 3

Multigrafos Uniformemente Más Confiables

3.1. Introducción

En este capítulo pasaremos a considerar multigrafos, es decir, permitiremos más de una arista entre un par de vértices. En ese caso, nos referiremos a cada una de ellas como arista múltiple. Un arista doble consiste en dos aristas múltiples, una arista triple consiste en tres aristas múltiples y así sucesivamente. Si existe solo una arista entre dos vértices, entonces la llamaremos arista simple. Por lo tanto, usamos el término multigrafo para referirnos a grafos que contienen al menos una arista múltiple pero no contienen lazos y llamaremos grafos simples a los grafos que no tienen aristas múltiples ni lazos.

Cabe preguntarse entonces qué ocurre cuando agregamos redundancia en las aristas. ¿Acaso esto aumenta la confiabilidad respecto a los grafos simples? ¿O por el contrario, quizás la diversidad en las conexiones es lo que determina que un grafo sea UMRG? Los grafos simples UMRG que hemos descrito en el capítulo anterior, ¿seguirán siendo UMRG en esta clase extendida de multigrafos?

En principio, Gross y Saccoman [19] demostraron que los grafos simples uniformemente más confiables dados por Boesch et. al. [17], también son uniformemente más confiables cuando extendemos las clases para incluir multigrafos. A su vez, conjeturaron que para $e = n + 3$ ocurre lo mismo.

Un trabajo de Pablo Romero [20] prueba que la conjetura anterior es correcta. Posteriormente, en un artículo de co-autoría que fuera recientemente publicado [1], se propone una prueba simplificada y unificada, que reúne los resultados dados en los trabajos anteriores. Este último artículo será desarrollado en su totalidad en el Capítulo 4.

3.2. Trabajos Previos

Si bien puede resultar intuitivo y evidente extender la definición hecha para grafos simples de UMRG para el caso en que consideramos multigrafos, nos parece oportuno plasmarla a continuación.

Definición 5. *Un grafo $G \in \Omega(n, e)$ es UMRG en su clase de multigrafos si $R_G(\rho) \geq R_H(\rho)$ para todo $H \in \Omega(n, e)$ y para todo $\rho \in [0, 1]$.*

A continuación, con el objetivo de adentrarnos y entender en profundidad el razonamiento que hay detrás del artículo de Gross y Saccoman, haremos un desarrollo exhaustivo del mismo. El lector puede encontrar mayores detalles en [19].

En primer lugar, demuestran que la ubicación de un puente en un grafo, no tiene relevancia en relación a los coeficientes m_i .

A su vez, establecen que un grafo que contiene un ciclo y una arista colgante, tiene una cantidad de conjuntos de corte m_i mayor o igual que la de un grafo en la misma clase con un ciclo mayor y sin la arista colgante.

A partir de estas dos observaciones, podemos concluir que dado un grafo G que tiene un puente, existe un grafo G' en la misma clase, sin puentes, tal que $P(G', \rho) < P(G, \rho)$, para todo $0 < \rho < 1$. La siguiente proposición es una consecuencia inmediata:

Proposición 2. *Si existe un grafo G sin puentes en la clase $\Omega(n, e)$ tal que $P(G, \rho) \leq P(H, \rho)$ para todo grafo H sin puentes en la clase $\Omega(n, e)$ y para todo ρ , $0 < \rho < 1$, entonces G es UMRG.*

De esta forma, hemos limitado los casos de estudio únicamente a grafos sin puentes.

Nótese que los únicos multigrafos conexos en la clase $\Omega(n, n-1)$ son árboles y todos ellos tienen $m_i = \binom{n-1}{i}$, $i \leq 1$. Por lo tanto, los árboles son UMRG en la clase $\Omega(n, n-1)$.

Por otro lado, no existen multigrafos sin puentes en la clase $\Omega(n, n)$. Los únicos grafos conexos sin puentes en esta clase son los ciclos de n vértices. Por la Proposición 2, C_n es el único grafo uniformemente más confiable en la clase $\Omega(n, n)$.

Estudiaremos ahora la existencia de UMRG en la clase de multigrafos $\Omega(n, n+1)$. A raíz de la Proposición 2, solo debemos considerar los multigrafos sin puentes en esta clase. En primer lugar, notamos que los grafos a considerar deben tener solo una arista repetida y no más de una. Si consideráramos más de una arista repetida, obtendríamos árboles con dos aristas múltiples, los cuales poseen puentes, o directamente obtendríamos grafos no conexos. Por lo tanto, nuestra búsqueda se limita a ciclos con una arista repetida. Se desprende que los únicos grafos posibles

3.2. Trabajos Previos

son: ciclos con n vértices y una arista repetida cualquiera, el cual llamaremos H_1 , o ciclos con $n - 1$ vértices y una arista doble colgante, el cual llamaremos H_2 . Ambos grafos se ilustran en la Figura 3.1.

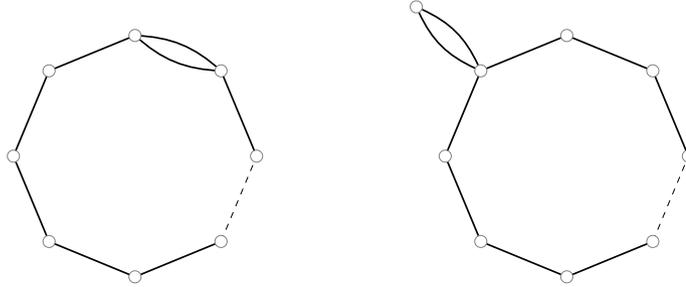


Figura 3.1: Grafos H_1 (izq) y H_2 (der) $\in \Omega(n, n + 1)$.

Si removemos tres o más aristas de cualquier grafo en la clase $\Omega(n, n + 1)$, resulta en un grafo no conexo. Por lo tanto, $m_i = \binom{n+1}{i}$ para todo $i \geq 3$. Además, al considerar grafos conexos y sin puentes, tenemos que $m_0 = m_1 = 0$. Entonces, el único valor que diferencia un grafo conexo y sin puentes, de otro, es el coeficiente m_2 .

Dado que $m_2(H_1) = \binom{n-1}{2} < \binom{n-1}{2} + 1 = m_2(H_2)$, H_1 es el multigrafo uniformemente más confiable de la clase $\Omega(n, n + 1)$ y resta compararlo con el grafo simple UMRG.

En los capítulos anteriores, vimos que el grafo simple UMRG en la clase $\Omega_s(n, n + 1)$ es el grafo θ balanceado. Si denotamos por r , s y t a los largos de los caminos que conforman el grafo θ , decimos que este es balanceado si verifica que $|r - s| \leq 1$, $|r - t| \leq 1$ y $|t - s| \leq 1$.

Para el cálculo del coeficiente m_2 de un grafo θ , tenemos en cuenta que para desconectar dicho grafo debemos remover dos aristas de un mismo camino. Por lo tanto, $m_2(\theta) = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{t}{2}$.

Finalmente, si comparamos el grafo θ balanceado con el multigrafo H_1 , resulta que:

$$m_2(H_1) - m_2(\theta) = \binom{n-1}{2} - \binom{r}{2} - \binom{s}{2} - \binom{t}{2} > 0$$

Corresponde ahora el estudio sobre la existencia de UMRG en la clase de multigrafos $\Omega(n, n + 2)$. Para ello, se describen a continuación cuatro construcciones que conducen a la obtención de todos los multigrafos sin puentes. La estrategia a seguir es la misma que para la clase anterior. Para cada construcción determinaremos el multigrafo uniformemente más confiable, luego buscaremos el mayor

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

multigrafo uniformemente más confiable entre las cuatro construcciones y finalmente lo compararemos con el grafo simple UMRG en la clase $\Omega(n, n + 2)$.

Diremos que un grafo es del TIPO 1, si se construye de la siguiente manera:

1. Comience con tres aristas entre dos vértices
2. Inserte $n - 2$ vértices de forma aleatoria en las 3 aristas
3. Duplique una de las aristas

En la Figura 3.2 podrán observar los multigrafos que se construyen de esta forma. Entre ellos se encuentran:

- M_1 : θ - grafos con una arista repetida
- M_2 : n - ciclos con una arista triple
- M_3 : n - ciclos con dos aristas dobles
- M_4 : n - ciclos con una oreja y una arista repetida
- M_5 : n - ciclos con una oreja doble

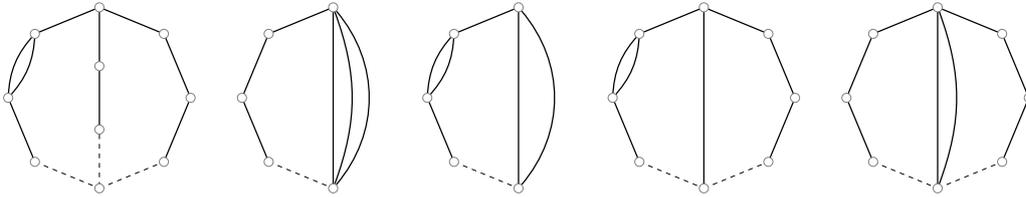


Figura 3.2: Grafos TIPO 1 en $\in \Omega(n, n + 2)$. De izquierda a derecha M_1, \dots, M_5 .

Si removemos cuatro o más aristas de cualquier grafo en la clase $\Omega(n, n + 2)$ resulta en un grafo no conexo. Por lo tanto, $m_i = \binom{n+2}{i}$ para todo $i \geq 4$. Además, al considerar grafos conexos y sin puentes tenemos que $m_0 = m_1 = 0$. Entonces, los únicos valores que diferencian un grafo conexo y sin puentes de otro son los coeficientes m_2 y m_3 .

Denotamos r al número de aristas simples contenidas en el camino que contiene la arista doble, s al número de aristas simples en el segundo camino y $n - r - s$ al número de aristas simples en el tercer camino. La única forma de desconectar un grafo TIPO 1 eliminando dos aristas es removiendo dos aristas simples de un mismo camino. Por lo tanto:

$$m_2 = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n - r - s}{2}$$

3.2. Trabajos Previos

Luego, tenemos tres formas de desconectar removiendo tres aristas. Removiendo tres aristas simples cualesquiera, removiendo dos aristas simples de un mismo camino y una arista de la arista doble, o removiendo la arista doble y una arista simple del mismo camino que contiene dicha arista doble. Por lo tanto:

$$m_3 = \binom{n}{3} + 2 \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n-r-s}{2} \right)$$

Como ya sabemos, ambas expresiones anteriores se minimizan cuando $r = \lfloor n/3 \rfloor$ y $s = \lceil n/3 \rceil$. Es decir, el grafo uniformemente más confiable de TIPO 1 es el grafo θ balanceado con una arista repetida, al cual llamaremos M_1^* . De todos modos, para dar fundamento a esta afirmación y puesto que será de utilidad para los casos subsiguientes, traemos a continuación la siguiente proposición.

Proposición 3 (Proposition 6 [19]). *Sea n un entero positivo fijo y sean r y s dos enteros no negativos. Entonces:*

1. *La expresión $\binom{r}{2} + \binom{n-r}{2}$ se minimiza cuando $r = \lfloor n/2 \rfloor$*
2. *La expresión $\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n-r-s}{2}$ se minimiza cuando $r = \lfloor n/3 \rfloor$ y $s = \lceil n/3 \rceil$*
3. *La expresión $\binom{r}{2} + \binom{n-r}{2} + r/2$ se minimiza cuando $r = \lfloor n/2 \rfloor$*
4. *La expresión $\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n-r-s}{2} + r/2$ se minimiza cuando $r = \lfloor n/3 \rfloor$ y $s = \lceil n/3 \rceil$*

Para el detalle del cálculo de los coeficientes $m_2(M_1^*)$ y $m_3(M_1^*)$ dividimos en 3 casos, en función del valor $k = n \bmod 3 = 0, 1, 2$.

$$k = 0$$

$$m_2 = 3 \binom{\frac{n}{3}}{2} = \frac{n^2 - 3n}{6}$$

$$m_3 = \binom{n}{3} + 6 \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3 - n^2 - 2n}{6}$$

$$k = 1$$

$$m_2 = 2 \binom{\frac{n-1}{3}}{2} + \binom{\frac{n+2}{3}}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{6}$$

$$m_3 = \binom{n}{3} + 2m_2 + \frac{n-1}{3} = \frac{n^3 - n^2 - 2n + 2}{6}$$

$$k = 2$$

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

$$m_2 = \binom{\frac{n-2}{3}}{2} + 2 \binom{\frac{n+1}{3}}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{6}$$

$$m_3 = \binom{n}{3} + 2m_2 + \frac{n-2}{3} = \frac{n^3 - n^2 - 2n}{6}$$

Continuando con las posibles construcciones, diremos que un grafo es del TIPO 2 si se construye de la siguiente manera:

1. Comience con tres aristas entre dos vértices
2. Inserte $n - 3$ vértices de manera aleatoria en las tres aristas de forma que al menos dos de las aristas reciban vértices
3. Conecte una arista doble colgante en cualquiera de los vértices insertados anteriormente

Los multigrafos que pueden obtenerse mediante la construcción descrita anteriormente, se pueden apreciar en la Figura 3.3 y son:

- M_6 . θ - grafos con una arista doble colgante
- M_7 . $(n - 1)$ - ciclos con una oreja y una arista doble colgante

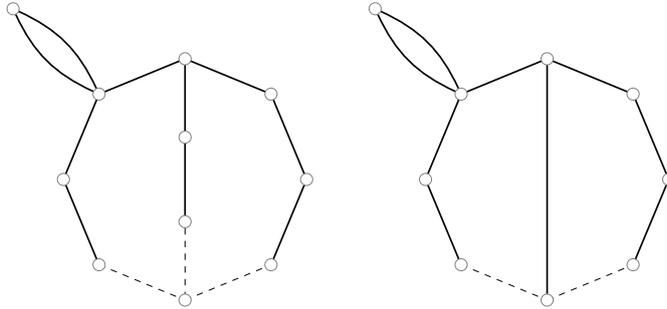


Figura 3.3: Grafos TIPO 2 en $\Omega(n, n + 2)$: M_6 (izq) y M_7 (der)

Hay dos formas de desconectar un multigrafo TIPO 2 mediante la remoción de dos aristas. O bien quitamos dos aristas simples de un mismo camino, o quitamos la arista doble colgante. De esta forma:

$$m_2 = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n - r - s}{2} + 1$$

Por otro lado, existen tres formas de desconectar los multigrafos quitando tres aristas. Removiendo tres aristas simples cualesquiera, o quitando dos aristas simples de un mismo camino y una de las aristas dobles, o quitando la arista doble colgante y cualquier otra arista. Por lo tanto:

$$m_3 = \binom{n}{3} + 2 \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \binom{n-r-s}{2} \right) + n$$

De acuerdo a la Proposición 3, las expresiones obtenidas son minimizadas cuando $r = \lfloor n/3 \rfloor$ y $s = \lceil n/3 \rceil$. De esta forma, el grafo uniformemente más confiable de TIPO 2 es el grafo θ balanceado con una arista doble colgante, al cual denotaremos M_6^* .

Se desprende inmediatamente del cálculo anterior que $m_2(M_6) - m_2(M_6^*) = 1$ y $m_3(M_6) - m_3(M_6^*) = n - r > 0$. Por lo tanto, M_1^* es el multigrafo uniformemente más confiable entre los multigrafos TIPO 1 y TIPO 2.

Continuando con la subdivisión, diremos que un multigrafo es de TIPO 3 si es construido de la siguiente manera:

1. Comience con un camino de largo 2
2. Duplique cada una de las aristas
3. Inserte $n - 3$ vértices de forma aleatoria en las aristas dobles
4. Duplique una de las aristas

Los multigrafos que se pueden obtener de esta forma son presentados en la Figura 3.4 y son:

- M_8 . Bi-ciclos con un arista doble
- M_9 . $(n - 1)$ - *ciclos* con una arista triple colgante
- M_{10} . $(n - 1)$ - *ciclos* con una arista doble y una arista doble colgante

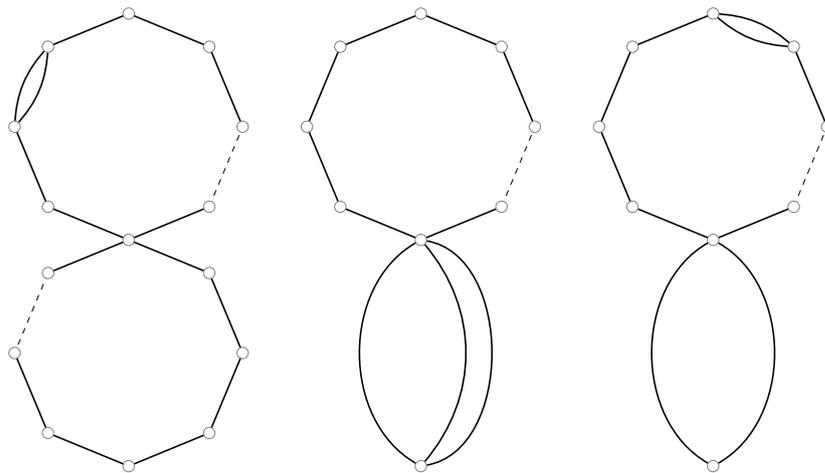


Figura 3.4: Grafos TIPO 3 en $\Omega(n, n + 2)$. M_8 (izq), M_9 y M_{10} (der)

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

Para describir mejor las formulas combinatorias de m_2 y m_3 , si el multigrafo tiene una arista doble colgante, la trataremos como un ciclo formado por dos aristas simples y si el multigrafo tiene una arista triple colgante, la consideraremos como un ciclo formado por una arista doble y una arista simple. Sea r el número de aristas simples en el ciclo que contiene la arista doble, resulta que $n - r$ es el número de aristas simples del otro ciclo.

La única forma de desconectar un multigrafo TIPO 3 quitando dos aristas es cuando removemos dos aristas simples de uno de los ciclos. Por lo tanto:

$$m_2 = \binom{r}{2} + \binom{n-r}{2}$$

Luego, hay tres formas de desconectar un multigrafo TIPO 3, mediante la remoción de tres aristas. O bien, removemos tres aristas simples cualesquiera, o removemos dos aristas simples del mismo ciclo y una de las aristas múltiples o removiendo la arista doble y una arista simple del ciclo que la contiene. De esta forma, obtenemos que:

$$m_3 = \binom{n}{3} + 2 \left(\binom{r}{2} + \binom{n-r}{2} \right) + r$$

A partir de la Proposición 3, se desprende que tanto m_2 como m_3 se minimizan cuando $r = \lfloor n/2 \rfloor$. Por lo tanto, el multigrafo uniformemente más confiable de TIPO 3 es aquel en el cual la cantidad de aristas simples de cada ciclo difiere a lo sumo en uno.

Finalmente, los multigrafos de TIPO 4 son aquellos que se construyen de la siguiente forma:

1. Comience con un árbol de 3 vértices
2. Duplique cada una de las aristas
3. Inserte $n - 4$ vértices de manera aleatoria dejando al menos una arista doble intacta.

La Figura 3.5 muestra los multigrafos que se pueden obtener mediante la construcción anteriormente descrita y los cuales son:

- M_{11}, M_{12}, M_{13} . Bi-ciclos con una arista doble colgante
- M_{14}, M_{15} . $(n - 2)$ - *ciclos* con dos aristas dobles colgantes
- M_{16} . $(n - 2)$ - *ciclos* con un camino doble colgante de largo 2

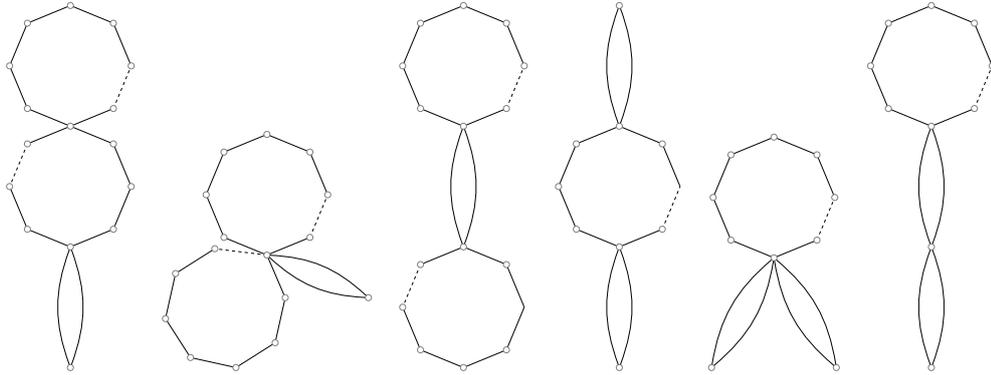


Figura 3.5: Grafos TIPO 4 en $\in \Omega(n, n + 2)$. De izquierda a derecha M_{11}, \dots, M_{16} .

Para poder describir de forma fácil las fórmulas combinatorias para m_2 y m_3 , si los vértices insertados en el Paso 2 de la construcción fueron insertados solamente en una de las aristas dobles, consideraremos una de las dos aristas dobles restantes como un ciclo formado por dos aristas simples. Estos son los casos de M_{14} , M_{15} y M_{16} (ver Figura 3.5). Teniendo en cuenta esto, notaremos por r al número de aristas simples en uno de los ciclos, y por lo tanto $n - r$ es el número de aristas simples en el otro ciclo.

Hay dos formas de desconectar un multigrafo de TIPO 4 quitando dos aristas. Removiendo dos aristas simples de un mismo ciclo, o removiendo la arista doble. Por lo tanto:

$$m_2 = \binom{r}{2} + \binom{n-r}{2} + 1$$

Para desconectar un multigrafo de TIPO 4 removiendo tres aristas, podemos remover tres aristas simples cualesquiera, o remover dos aristas simples de un mismo ciclo y una de la arista doble, o remover la arista doble y una arista simple cualquiera. Nuevamente, aplicando la Proposición 3, obtenemos que las expresiones anteriores se minimizan cuando $r = \lfloor n/2 \rfloor$. Por lo tanto, el multigrafo uniformemente más confiable de TIPO 4 es aquel que se obtiene cuando los vértices son insertados de la forma lo más equidistribuida posible en dos de las aristas dobles. Notaremos este grafo como M_{11}^* .

Se desprende del cálculo anterior que $m_2(M_8) < m_2(M_{11})$ y $m_3(M_8) < m_3(M_{11})$. Por lo tanto, M_8^* es el multigrafo uniformemente más confiable entre todos los multigrafos de TIPO 3 y TIPO 4.

Resta comparar los coeficientes m_2 y m_3 , para los multigrafos M_1^* y M_8^* . Mediante cálculo, se obtiene que:

$$m_2(M_8^*) - m_2(M_1^*) \geq \frac{1}{6}(n^2 + n - 2) = \frac{1}{12}(n - 1)(n + 2) \geq 0 \text{ si } n > 1$$

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

Por lo tanto, M_1^* , el grafo θ balanceado con una arista repetida es el multigrafo uniformemente más confiable. Antes de comparar dicho grafo con el grafo simple UMRG en $\Omega(n, n+2)$ debemos demostrar que las construcciones hechas incluyen todos los posibles multigrafos sin puentes de dicha clase. Para ello consideramos los grafos que se obtienen al eliminar una arista múltiple de un multigrafo sin puentes en $\Omega(n, n+2)$, esto es, los grafos en $\Omega(n, n+1)$ con a lo sumo un puente. Por lo tanto, los multigrafos sin puentes en $\Omega(n, n+2)$ se obtienen, o bien agregando una arista múltiple en cualquier arista si el grafo en $\Omega(n, n+1)$ no tiene puentes, o de lo contrario, debe duplicarse la arista puente.

Bajo este razonamiento es fácil ver que todas las construcciones hechas cubren todos los multigrafos sin puentes en $\Omega(n, n+2)$.

Resta entonces comparar el multigrafo M_1^* con el grafo simple UMRG y concluir la demostración. Para ello, en primer lugar, calcularemos los coeficientes $m_2 [K(n, n+2)]$ y $m_3 [K(n, n+2)]$. La única forma de desconectar al grafo $K(n, n+2)$ quitando dos aristas es removiendo dos aristas de una misma cadena. Entonces, si denotamos por l_1, l_2, \dots, l_6 a los largos de cada una de las cadenas de $K(n, n+2)$ se obtiene que:

$$m_2 [K(n, n+2)] = \sum_{i=1}^{i=6} \binom{l_i}{2}$$

La expresión anterior depende de cómo son insertados los $n-4$ vértices en las seis aristas de K_4 , es decir, depende del valor $k = (n-4) \bmod 6$:

$$k = 0$$

$$m_2 = 6 \binom{\frac{n+2}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n - 8}{12}$$

$$k = 1$$

$$m_2 = 5 \binom{\frac{n+1}{6}}{2} + \binom{\frac{n+7}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n - 3}{12}$$

$$k = 2$$

$$m_2 = 4 \binom{\frac{n}{6}}{2} + 2 \binom{\frac{n+6}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n}{12}$$

$$k = 3$$

$$m_2 = 3 \binom{\frac{n-1}{6}}{2} + 3 \binom{\frac{n+5}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{12}$$

$$k = 4$$

$$m_2 = 2 \binom{\frac{n-2}{6}}{2} + 4 \binom{\frac{n+4}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n}{12}$$

$$k = 5$$

$$m_2 = \binom{\frac{n-3}{6}}{2} + 5 \binom{\frac{n+3}{6}}{2} = \frac{n^2 - 2n - 3}{12}$$

Por otro lado hay tres formas distintas de desconectar al grafo $K(n, n + 2)$ quitando tres aristas: removiendo tres aristas de una misma cadena, removiendo dos aristas de una misma cadena y otra de una cadena distinta, o suprimiendo una arista de cada una de las cadenas adyacentes a un nodo original de K_4 . Si notamos por a la cantidad de formas en que podemos desconectar al grafo $K(n, n + 2)$ suprimiendo tres aristas de una misma cadena, b a la combinaciones posibles que desconectan al grafo removiendo dos aristas de una misma cadena y otra de una cadena distinta y finalmente notamos por c a la cantidad de formas en que podemos desconectar al grafo eliminando una arista de cada cadena adyacente a los vértices originales de K_4 , tenemos que:

$$\begin{aligned} m_3 [K(n, n + 2)] &= a + b + c \\ &= \sum_{i=1}^{i=6} \binom{l_i}{3} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=6} \left[\binom{l_i}{2} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{j=6} l_j \right) \right] \\ &\quad + l_1 l_3 l_5 + l_1 l_4 l_6 + l_2 l_4 l_5 + l_2 l_3 l_6 \end{aligned}$$

La expresión anterior depende del valor que toma $k = (n - 4) \bmod 6$. De esta forma, obtenemos que:

$$k = 0$$

$$\begin{aligned} m_3 &= 6 \binom{\frac{n+2}{6}}{3} \\ &\quad + 6 \binom{\frac{n+2}{6}}{2} \left(\frac{5n + 10}{6} \right) \\ &\quad + 4 \left(\frac{n + 2}{6} \right)^2 \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 30n - 32}{54} \end{aligned}$$

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

$$k = 1$$

$$\begin{aligned} m_3 &= 5 \binom{\frac{n+1}{6}}{3} + \binom{\frac{n+7}{6}}{3} \\ &\quad + 5 \binom{\frac{n+1}{6}}{2} \left(\frac{5n+11}{6} \right) + \binom{\frac{n+7}{6}}{2} \left(\frac{5n+5}{6} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{n+1}{6} \right)^2 \left(\frac{n+7}{6} \right) + 2 \left(\frac{n+1}{6} \right)^3 \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 18n - 16}{54} \end{aligned}$$

$$k = 2$$

$$\begin{aligned} m_3 &= 4 \binom{\frac{n}{6}}{3} + 2 \binom{\frac{n+6}{6}}{3} \\ &\quad + 4 \binom{\frac{n}{6}}{2} \left(\frac{5n+12}{6} \right) + 2 \binom{\frac{n+6}{6}}{2} \left(\frac{5n+6}{6} \right) \\ &\quad + 4 \left(\frac{n}{6} \right)^2 \left(\frac{n+6}{6} \right) \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 18n}{54} \end{aligned}$$

$$k = 3$$

$$\begin{aligned} m_3 &= 3 \binom{\frac{n-1}{6}}{3} + 3 \binom{\frac{n+5}{6}}{3} \\ &\quad + 3 \binom{\frac{n-1}{6}}{2} \left(\frac{5n+13}{6} \right) + 3 \binom{\frac{n+5}{6}}{2} \left(\frac{5n+7}{6} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{n-1}{6} \right)^2 \left(\frac{n+5}{6} \right) + 2 \left(\frac{n-1}{6} \right) \left(\frac{n+5}{6} \right)^2 \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 12n + 4}{54} \end{aligned}$$

$$k = 4$$

$$\begin{aligned} m_3 &= 2 \binom{\frac{n-2}{6}}{3} + 4 \binom{\frac{n+4}{6}}{3} \\ &\quad + 2 \binom{\frac{n-2}{6}}{2} \left(\frac{5n+14}{6} \right) + 4 \binom{\frac{n+4}{6}}{2} \left(\frac{5n+8}{6} \right) \\ &\quad + 4 \left(\frac{n-2}{6} \right) \left(\frac{n+4}{6} \right)^2 \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 18n - 16}{54} \end{aligned}$$

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Saccoman

$$k = 5$$

$$\begin{aligned} m_3 &= \binom{\frac{n-3}{6}}{3} + 5 \binom{\frac{n+3}{6}}{3} \\ &\quad + \binom{\frac{n-3}{6}}{2} \binom{5n+15}{6} + 5 \binom{\frac{n+3}{6}}{2} \binom{5n+9}{6} \\ &\quad + 2 \left(\frac{n-3}{6} \right)^2 \binom{n+3}{6} + 2 \binom{n-3}{6} \binom{n+3}{6}^2 \\ &= \frac{5n^3 + 3n^2 - 36n}{54} \end{aligned}$$

Si observamos los resultados obtenidos en los cálculos anteriores, podemos afirmar el Corolario 2.

Corolario 2 (Corollary 4 [19]). *Sea G el grafo simple UMRG en $\Omega_s(n, n+2)$. Entonces, $m_2(G) \leq (n^2 - 2n + 1)/12$ y $m_3 \leq (5n^3 + 3n^2 - 12n + 4)/54$*

Ahora sí nos encontramos en condiciones de comparar M_1^* , con el grafo simple UMRG. Utilizando el Corolario 2 tenemos que $m_2[K(n, n+2)] \leq (n^2 - 2n + 1)/12$, mientras que $m_2(M_1^*) \leq (n^2 - 3n)/6$. Por lo tanto:

$$m_2(M_1^*) - m_2[K(n, n+2)] \geq (n^2 - 4n - 1)/12 > 0 \quad \text{si } n > 4$$

Luego, como $m_3[K(n, n+2)] \leq (5n^3 + 3n^2 - 12n + 4)/54$ y $m_3(M_1^*) \geq (n^3 - n^2 - 2n)/6$, entonces:

$$m_3(M_1^*) - m_3[K(n, n+2)] \geq (2n^3 - 6n^2 - 3n - 2)/27 > 0 \quad \text{si } n > 3$$

Por lo tanto, $K(n, n+2)$ es el multigrafo uniformemente más confiable para $n > 4$. Cuando $n = 4$, el grafo simple UMRG es justamente K_4 , que tiene $m_2 = 0$ y $m_3 = 4$. Mientras que M_1^* es el multigrafo que se obtiene partiendo de una arista triple, insertando dos vértices en dos de las aristas y luego duplicando una de las aristas nuevas que fueron formadas. Para este multigrafo tenemos que $m_2 = 1$ y $m_3 = 7$. Por lo tanto el grafo simple UMRG también lo es para cuando $n = 4$. Luego, se concluye que $K(n, n+2)$ es UMRG también cuando se extiende para incluir multigrafos en $\Omega(n, n+2)$.

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Saccoman

En la sección anterior vimos con detalle el artículo publicado por Gross y Saccoman en 1997 [19], donde se prueba que los grafos simples UMRG para $e = n - 1$, $e = n$, $e = n + 1$ y $n + 2$, también son óptimos para cuando extendemos las clases para incluir multigrafos. Además, los autores conjeturan que lo mismo ocurre para el grafo simple UMRG con $e = n + 3$. En esta sección veremos en detalle la prueba desarrollada por Pablo Romero en [20] que demuestra que dicha conjetura

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

es verdadera.

Un grafo G es *más fuerte* que H y lo notaremos como $G \geq H$, si ambos grafos tienen la misma cantidad de vértices y aristas y $m_k(G) \leq m_k(H)$ para todo $k \in \{0, \dots, e\}$. También diremos que H es *más débil* que G .

La primera idea, que facilitará luego los casos de estudio, refiere al siguiente lema probado por Wang [18] y redescubierto por Canale [34].

Lema 2. Sean e y n dos enteros positivos tales que $e \geq n \geq 3$. Para todo grafo $G \in \Omega(n, e)$ que no es 2-conexo existe un grafo $G' \in \Omega(n, e)$ que es 2-conexo tal que $m_k(G') \leq m_k(G)$ para todo $k \in \{0, \dots, e\}$.

Primero se prueba que si H tiene un puente, entonces existe un grafo G_1 tal que $m_k(G_1) \leq m_k(H)$ para todo k . Luego, si G_1 no es 2-conexo, podemos encontrar un grafo 2-conexo G_2 tal que $m_k(G_2) \leq m_k(G_1)$ para todo k y se concluye que un grafo no 2-conexo H es más débil que G_2 .

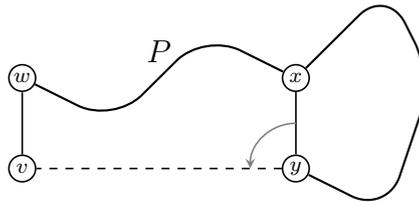


Figura 3.6: Grafo sin puentes G_1 . Reemplazando (xy) por (yv) , se evita el puente (wv) .

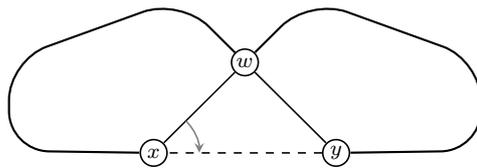


Figura 3.7: Grafo 2-conexo G_2 . Reemplazando (wx) por (xy) , el nodo desconector w es evitado.

En particular esto nos indica que para todo grafo no 2-conexo G existe algún grafo 2-conexo G' tal que $G' \geq G$ (ver Figura 3.7 y 3.6). Si bien el Lema 2 refiere a los grafos simples, la misma transformación sirve para el caso de multigrafos y por lo tanto puede ser fácilmente extendido a esta clase. Esto nos limita a estudiar únicamente los grafos 2-conexos en $\Omega(n, n + 3)$.

La segunda idea, fundamental para la subdivisión de casos, refiere a un trabajo de Whitney [40] en el cual establece que todo grafo 2-conexo se obtiene a partir

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Saccoman

de un ciclo mediante el agregado sucesivo de aristas y subdivisiones elementales.

Observar que los multigrafos 2-conexos pertenecientes a $\Omega(n, n+3)$ se pueden particionar en 4 subclases, según si tienen 0, 1, 2 o 3 aristas repetidas. Sea Ω^{4-i} el conjunto de grafos en $\Omega(n, n+3)$ con i aristas repetidas, donde $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Observemos que estas subclases efectivamente particionan $\Omega(n, n+3)$, es decir que $\cup_{i=0}^3 \Omega^{4-i} = \Omega(n, n+3)$.

La estrategia utilizada para demostrar que el grafo $G_u(n, n+3)$ es uniformemente más confiable en $\Omega(n, n+3)$ sigue una técnica de dominación en escalera, donde se prueba que el conjunto Ω^i es dominado por el conjunto Ω^{i+1} , para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dados dos conjuntos Ω y Ω' , diremos que Ω' domina a Ω y lo denotaremos como $\Omega \rightarrow \Omega'$ si para cada grafo $G \in \Omega$ existe un grafo $G' \in \Omega'$ más fuerte. Esta relación es transitiva, de la misma forma que la relación de confiabilidad entre grafos. Para probar la cadena de dominación $\Omega^1 \rightarrow \Omega^2 \rightarrow \Omega^3 \rightarrow \Omega^4$, consideraremos los siguientes pasos:

1. Probaremos la existencia del grafo más fuerte $C^* \in \Omega^1$
2. Probaremos que C^* es más débil que algún grafo $H \in \Omega^2$
3. Para cada grafo $G \in \Omega^2$ encontraremos un grafo más fuerte $G' \in \Omega^3$
4. Probaremos la existencia del grafo más fuerte $K^* \in \Omega^3$
5. Encontraremos un grafo simple $H_s \in \Omega^4 = \Omega_s(n, n+3)$ tal que $H_s \geq K^*$

En la Figura 3.8 se presentan los tres tipos de grafos que pertenecen a la clase Ω^1 . Cada uno de ellos se identifica con las correspondientes formas de agregar las 3 aristas repetidas y los notaremos por $C^{(3)}$, $C^{(2,1)}$ y $C^{(1,1,1)}$. Vale aclarar que en cada caso la ubicación de las aristas repetidas no cambia la confiabilidad de los grafos y por lo tanto estos efectivamente son los únicos tres tipos de grafos que conforman a esta clase.

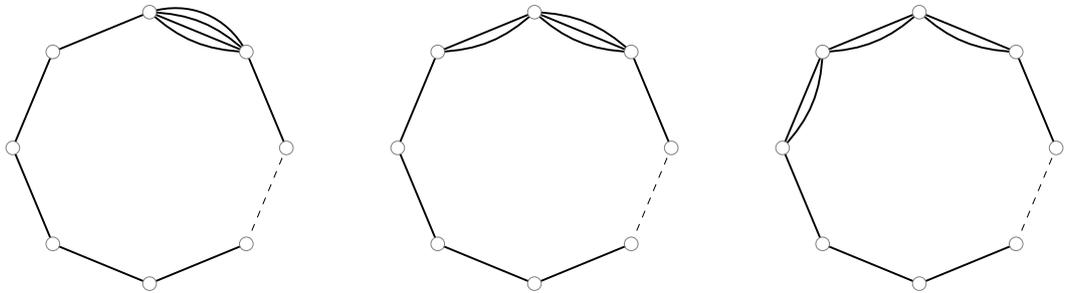


Figura 3.8: Grafos $C^{(3)}$ (izq), $C^{(2,1)}$ y $C^{(1,1,1)}$ (der) $\in \Omega(n, n+3)$.

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

Dado que en los grafos 2-conexos $m_0 = m_1 = 0$ y si removemos cinco aristas o más el grafo resulta desconectado y por lo tanto $m_i = \binom{n+3}{i}$ para todo $i \geq 5$. De esta forma, debemos tan solo comparar los coeficientes m_2 , m_3 y m_4 . Mediante cálculo combinatorio directo, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 m_2(C^{(3)}) &= \binom{n-1}{2} > \binom{n-2}{2} = m_2(C^{(2,1)}) > \binom{n-3}{2} = m_3(C^{(1,1,1)}); \\
 m_3(C^{(3)}) &= \binom{n-1}{3} + 4\binom{n-1}{2} = \binom{n-2}{3} + 5\binom{n-2}{2} + 4(n-2) > m_3(C^{(2,1)}) \\
 &= \binom{n-2}{3} + 5\binom{n-2}{2} + n-2 = \binom{n-3}{3} + 6\binom{n-3}{2} + 5(n-3) + n-2 \\
 &> \binom{n-3}{3} + 6\binom{n-3}{2} + 3(n-3) = m_3(C^{(1,1,1)}); \\
 m_4(C^{(3)}) &= \binom{n-1}{4} + 4\binom{n-1}{3} + 6\binom{n-1}{2} \\
 &= \binom{n-2}{4} + 5\binom{n-2}{3} + 10\binom{n-2}{2} + 6(n-2) > m_4(C^{(2,1)}) \\
 &= \binom{n-2}{4} + 5\binom{n-2}{3} + 10\binom{n-2}{2} + 4(n-2) \\
 &= \binom{n-3}{4} + 6\binom{n-3}{3} + 15\binom{n-3}{2} + 14(n-2) \\
 &> \binom{n-3}{4} + 6\binom{n-3}{3} + 15\binom{n-3}{2} + 12(n-3) = m_4(C^{(1,1,1)})
 \end{aligned}$$

Finalmente, $C^{(1,1,1)}$ es el grafo más fuerte de esta clase y lo notaremos por C^* .

Siguiendo la estrategia de demostración y con la definición anteriormente hecha basta encontrar un grafo $H \in \Omega^2$ que sea más fuerte que C^* para afirmar que toda la clase Ω^1 es dominada por la por Ω^2 . En la Figura 3.9 podemos observar dicho grafo H , que como verán se obtiene de aplicar una transformación sobre el grafo C^* .

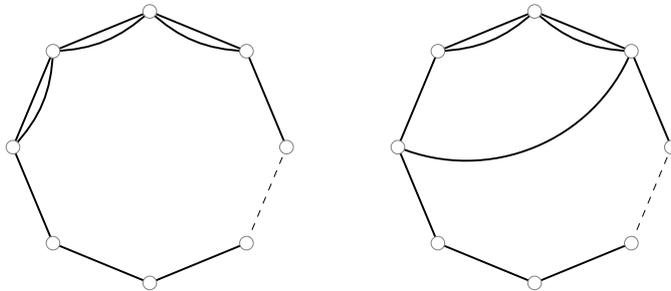


Figura 3.9: Grafos C^* (izq) y H (der) $\in \Omega(n, n+3)$.

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

podrán apreciar los respectivos grafos G'_A , G'_B y G'_C . Intuitivamente, la cadena de la izquierda es más robusta ante fallas en los respectivos grafos pertenecientes a Ω^3 y este es el razonamiento detrás de la presente construcción.

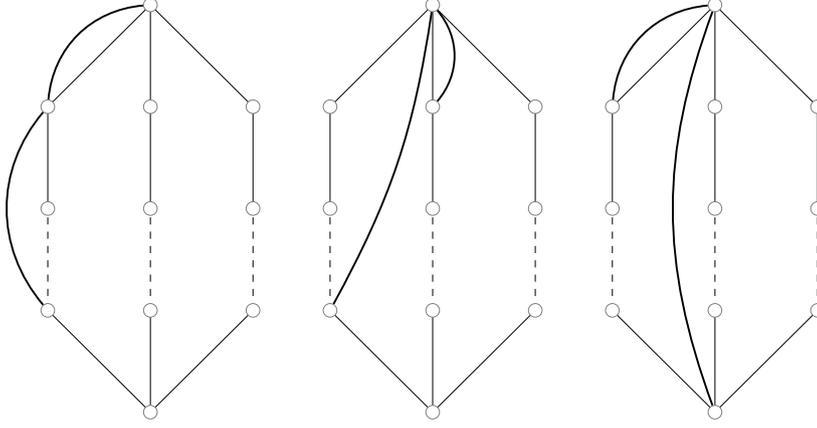


Figura 3.11: Grafos G'_A (izq), G'_B (center) y G'_C (der) $\in \Omega(n, n + 3)$.

Probaremos que $m_k(G'_X) \leq m_k(G_X)$ para todo $k \in \{2, 3, 4\}$ y $X \in \{A, B, C\}$. Para el caso en que fallan dos aristas, observemos que los grafos G'_X fueron contruidos de tal manera que $m_2(G'_X) = m_2(G_X)$ para cada $X \in \{A, B, C\}$. Luego, para comparar los conjuntos de corte con tres aristas, las diferencias ocurren cuando las tres aristas se toman de la cadena de la izquierda, o cuando se toman las tres aristas de distintas cadenas. Sean r , s y t , los largos de las cadenas de la izquierda, centro y derecha respectivamente del grafo θ_n , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 m_3(G_A) - m_3(G'_A) &= \left[\binom{r-2}{3} + 4 \binom{r-2}{2} + 2(r-2) + (r-2)st \right] \\
 &\quad - \left[\binom{r-2}{3} + 4 \binom{r-2}{2} + (r-2) + (1)st + 1 \right] \\
 &= (r-3)(st+1) \geq 0; \\
 m_3(G_B) - m_3(G'_B) &= \left[\binom{r-1}{3} + 2 \binom{r-1}{2} + (r-1) + (r-1)(s-1)t \right] \\
 &\quad - \left[\binom{r-1}{3} + 2 \binom{r-1}{2} + (r-1) + (1)(s-1)t \right] \\
 &= (r-2)(s-1)t \geq 0; \\
 m_3(G_C) - m_3(G'_C) &= \left[\binom{r-1}{3} + 3 \binom{r-1}{2} + (r-1)st \right] \\
 &\quad - \left[\binom{r-1}{3} + 3 \binom{r-1}{2} + r-1 \right] \\
 &= (r-1)(st-1) \geq 0.
 \end{aligned}$$

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Sacconan

Para comparar m_A , por comodidad, compararemos el número de árboles recubridores, que es el complemento. Por lo tanto, debemos probar que $\tau(G'_X) \geq \tau(G_X)$ para cada $X \in \{A, B, C\}$. Recordemos que el número de árboles recubridores es el máximo número de subgrafos acíclicos. Por lo tanto, debemos elegir cuatro aristas de forma de romper todos los ciclos y además los árboles recubridores tampoco pueden tener aristas repetidas. Recordemos también, que el número de árboles recubridores de un grafo θ con largos r, s y t es $\tau[\theta(r, s, t)] = rs + rt + st = \tau_\theta(r, s, t)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\tau(G_A) &= 4\tau_\theta(r-2, s, t) + 4(s+t) = 4\tau_\theta(r, s, t) - 4(s+t); \\ \tau(G'_A) &= 2\tau_\theta(r-1, s, t) + 2(r-2)(st+s+t) + (r-1)(s+t) \\ &\geq 2\tau_\theta(r-1, s, t) + 2\tau_\theta(r-2, s, t) + (r-1)(s+t) \\ &= 4\tau_\theta(r, s, t) + (r-6)(s+t)\end{aligned}$$

Dado que G'_A solo tiene sentido cuando $r \geq 4$, claramente $(r-6)(s+t) \geq -4(s+t)$, y $\tau(G'_A) \geq \tau(G_A)$. Razonando de forma similar, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\tau(G_B) &= 4\tau_\theta(r-1, s-1, t) + 2(t+s-1) + 2(t+r-1) + 1 \\ &= 4\tau_\theta(r-1, s-1, t) + 2(t+s-1) + r+t + (r+t-1); \\ \tau(G'_B) &= 2\tau_\theta(r, s-1, t) + 2(r-1)((s-1)t+s-1+t) + r+t + (r-1)(1+t) \\ &\geq 4\tau_\theta(r-1, s-1, t) + 2(t+s-1) + r+t + (r-1)(1+t).\end{aligned}$$

Como el grafo G'_B solo tiene sentido cuando $r \geq 3$, entonces $(r-1)(1+t) = r+t(r-1) - 1 \geq r+t-1$ y $\tau(G'_B) \geq \tau(G_B)$. Finalmente para el último caso, tenemos:

$$\begin{aligned}\tau(G_C) &= 3\tau_\theta(r-1, s, t) + s+t; \\ \tau(G'_C) &= 2\tau_\theta(r-1, s, t) + s+t + 2(r-1)st + st.\end{aligned}$$

Basta probar que $2(r-1)st + st \geq \tau_\theta(r-1, s, t) = (r-1)s + (r-1)t + st$. Pero esta desigualdad se da si y solo si $2st \geq s+t$, lo cual es cierto, dado que $2st \geq 2 \max\{s, t\} \geq s+t$.

Observe que esta demostración es válida para cuando $r \geq 4$ en los grafos tipo A, $r \geq 3$ en los grafos tipo B y $r \geq 2$ en los grafos tipo C. Discutiremos a continuación los casos particulares para cada caso en función de r y s . Empecemos con los grafos tipo A. Si $r = 3$, tenemos que $G'_A = G_A$. De todos modos, podemos adaptar G'_A y considerar en su lugar al grafo G''_A , según se muestra en la Figura 3.12. El razonamiento anterior funciona con algunas variantes menores y se prueba que dicho grafo es más fuerte que G_A . Está claro que $r \geq 2$ y por lo tanto resta analizar el caso en que $r = 2$. En este caso, consideraremos el grafo G'''_A según se muestra en la Figura 3.12. Mediante cálculo directo, se puede demostrar que G''_A es más fuerte que G_A .

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

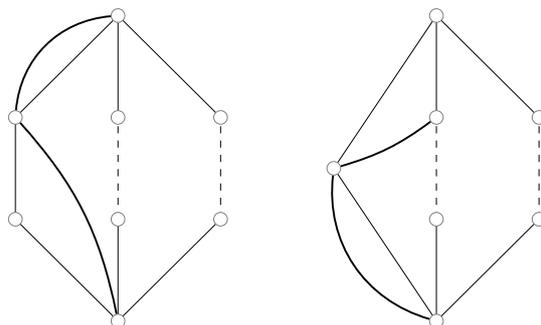


Figura 3.12: Grafos G''_A (izq) y G'''_A (der) $\in \Omega(n, n + 3)$.

Para los grafos tipo B, en particular cuando $r = 2$, tenemos que $G'_B = G_B$. Por lo tanto, consideraremos en su lugar el grafo G''_B que se aprecia en la Figura 3.13. Mediante cálculo directo, también podemos ver que este grafo es más fuerte que G_B . Luego, si $r = 1$ y $s \geq 2$, consideramos G'_C y por simetría este es más fuerte que G_B . De hecho los roles de la cadena izquierda y la central están intercambiados. Finalmente si $r = s = 1$, tenemos que $G_B = C^{(3)} \in \Omega^1$ que no pertenece a Ω^2 . Y además, recordemos que $C^{(3)}$ es más débil que C^* .

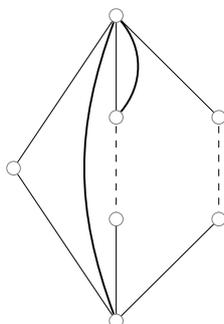


Figura 3.13: Grafo $G''_B \in \Omega(n, n + 3)$.

Por último, para los grafos tipo C, si $r \geq 2$ el razonamiento hecho al principio sirve. Sin embargo, para el caso en que $r = 1$ tenemos que G_C es el ciclo C_n más una arista triple conectada entre dos vértices no adyacentes del ciclo. Consideramos en este caso, el grafo G''_C según se puede apreciar en la Figura 3.14. La arista simple que se agrega en lugar de una de las aristas repetidas, se coloca de forma que s y t difieran a lo sumo en 1. Mediante un cálculo análogo al realizado para probar la dominación de la clase Ω^2 sobre Ω^1 , se puede probar que G''_C es más fuerte que G_C .

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Sacconan

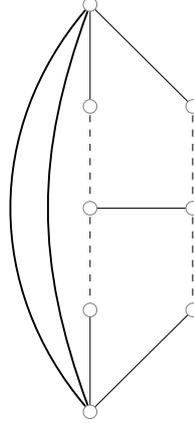


Figura 3.14: Grafo $G''_C \in \Omega(n, n + 3)$.

La clase Ω^3 esta conformada por grafos particulares del conjunto $\Omega_s(n, n + 2)$ con una arista repetida. Dicho esto, a continuación introduciremos el concepto de Auto-Semejanza, para construir el grafo más fuerte de la clase Ω^3 .

Definición 6 (Auto-Semejanza [20]). *Una secuencia de grafos $\{G_n\}_{n \geq n_0}$ satisface la propiedad de auto-semejanza si G_{n+1} se obtiene de la inserción de un nodo en G_n , $\forall n \geq n_0$*

Teniendo en cuenta la definición anterior, consideramos el grafo $K^* = K(n, n + 2) \cup \{e'\}$, donde e' es la arista repetida de e , siendo esta última tal que $K(n, n + 2) * e = K(n - 1, n + 1)$. Probaremos que K^* es el grafo más fuerte en Ω^3 . Pero antes, veremos un Lema para sortear los lazos:

Lema 3 ([20]). *Si $G \geq H$ en $\Omega(n, e)$, entonces $G \cup \{l\} \geq H \cup \{l\}$ en $\Omega(n, e + 1)$, donde $l = (v, v)$ un lazo cualquiera.*

Demostración. El lazo puede aparecer en los conjuntos de corte o no. Si $G \geq H$, entonces $m_{k+1}(G \cup \{l\}) = m_k(G) + m_{k+1}(G) \leq m_k(H) + m_{k+1}(H) = m_{k+1}(H \cup \{l\})$, para todo k . Además, la conectividad no se modifica con los lazos y $m_0(G \cup \{l\}) = m_0(G) \leq m_0(H) = m_0(H \cup \{l\})$, entonces $G \cup \{l\} \geq H \cup \{l\}$. \square

Ahora sí, nos encontramos en condiciones de probar que K^* es el grafo más fuerte de Ω^3 . Para eso, consideramos un grafo arbitrario $G \in \Omega^3$. Entonces, $G = H \cup \{f\}$, donde f es una arista repetida en un grafo simple $H \in \Omega_s(n, n + 2)$. Los conjuntos de corte de $G = H \cup \{f\}$ y $K^* = K(n, n + 2) \cup \{e'\}$ pueden o no contener la arista repetida f o e' respectivamente. Entonces, por la regla de la suma, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i(G) &= m_{i-1}(H) + m_i(H * f \cup \{l\}), \\ m_i(K^*)(n) &= m_{i-1}(K(n, n + 2)) + m_i(K(n - 1, n + 1) \cup \{l\}), \end{aligned}$$

Capítulo 3. Multigrafos Uniformemente Más Confiables

donde $H * f$ denota la arista contracción y l representa un lazo que aparece luego de la contracción de la arista repetida f . Como $H \in \Omega_s(n, n + 2)$ y $K(n, n + 2)$ es el más fuerte en esta clase, $m_{i-1}(H) \leq m_{i-1}(K(n, n + 2))$. Entonces, basta probar que $m_i(K(n - 1, n + 1) \cup \{l\}) \leq m_i(H * f \cup \{l\})$.

Recordemos que Gross y Saccoman ya probaron que $K^*(n - 1, n + 1)$ es la familia de grafos más fuerte, incluso en el conjunto de multigrafos $\Omega(n - 1, n + 1)$ [19]. Como $H * f \in \Omega(n, n + 2)$, tenemos que $K^*(n - 1, n + 1) \geq H * f$. Por el Lema 3, $K^*(n - 1, n + 1) \cup \{l\} \geq H * f \cup \{l\}$ y en particular $m_i(K(n - 1, n + 1) \cup \{l\}) \leq m_i(H * f \cup \{l\})$. Por lo tanto, acabamos de demostrar que K^* es el grafo más fuerte de Ω^3 .

La Clase Ω^3 Está Dominada Por La Clase Ω^4

Recordemos que Ω^4 son los grafos simples $\Omega_s(n, n + 3)$. Por lo tanto, para demostrar que la clase Ω^3 está dominada por Ω^4 , basta con probar que $G_u(n, n + 3) \geq K^*(n)$.

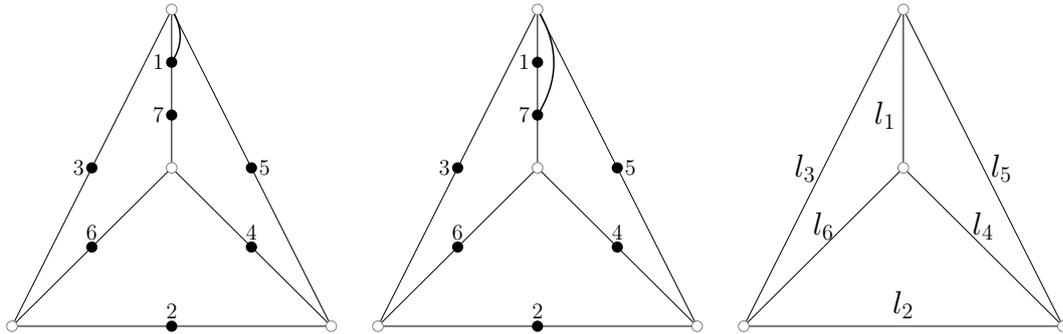


Figura 3.15: Grafos K^* (izq), H_s (centro) y los respectivos largos de las cadenas (der).

Para ello, consideremos la cadena de K^* que contiene la arista repetida, $\mathcal{C} = \{(x_0, x_1), \dots, (x_{l_1-1}, x_{l_1})\}$, donde $e = (x_0, x_1)$ es la arista doble. Entonces, definimos $H_s = (K^* - \{e\}) \cup \{(x_0, x_{l_1-1})\}$. Ambos grafos se pueden apreciar en la Figura 3.15. Es claro, por construcción, que $m_2(H_s) = m_2(K^*)$. Luego, para comparar m_3 y m_4 , la clave es notar que la cadena resultante \mathcal{C}' inducida en H_s es más fuerte que la cadena original inducida en K^* . Si tomamos dos aristas o más de una misma cadena, en ambos casos resulta en un corte. La diferencia se aprecia cuando tomamos tres aristas de cadenas diferentes. Por otro lado, las tres cadenas deben ser adyacentes para que efectivamente resulte en un corte. Por lo tanto, si tomamos una arista de cada tríada de cadenas adyacentes la mayoría de los términos se cancelan y se obtiene la siguiente diferencia:

3.3. Una Prueba a la Conjetura de Gross-Saccomman

$$\begin{aligned}
 m_3(K^*) - m_3(H_s) &= [l_4l_6(l_1 - 1) + l_3l_5(l_1 - 1) + l_2l_3l_6 + l_2l_4l_5] \\
 &\quad - [l_4l_6 \times 1 + l_3l_5 \times 1 + l_2l_3l_6 + l_2l_4l_5] \\
 &= l_4l_6(l_1 - 2) + l_3l_5(l_1 - 2) \geq 0,
 \end{aligned}$$

ya que la cadena \mathcal{C} con al menos un nodo inserto tiene largo $l_1 \geq 2$. De forma similar la diferencia en los conjuntos de corte para m_4 se da cuando las cuatro aristas se toman de cadenas diferentes. Y así:

$$\begin{aligned}
 m_4(K^*) - m_4(H_s) &= \left[\sum_{i=2}^6 \frac{\prod_{j=2}^6 l_j}{l_i} + 2(l_2l_3l_6 + l_2l_4l_5) + (l_1 - 1) \sum_{2 \leq i < j < k \leq 6} l_i l_j l_k \right] \\
 &\quad - \left[\sum_{i=2}^6 \frac{\prod_{j=2}^6 l_j}{l_i} + l_1(l_2l_3l_6 + l_2l_4l_5) + 1 \times \sum_{2 \leq i < j < k \leq 6} l_i l_j l_k \right] \\
 &= (l_1 - 2) \sum_{2 \leq i < j < k \leq 6} l_i l_j l_k - (l_1 - 2)(l_2l_3l_6 + l_2l_4l_5) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m_i(K^*) \leq m_i(H_s)$ para todo i , y $H_s \geq K^*(n)$.

De esta forma se prueba la conjetura de Gross-Saccomman y efectivamente se demuestra que $G_u(n, n + 3)$ es uniformemente más confiable incluso para cuando extendemos al conjunto de multigrafos $\Omega(n, n + 3)$.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 4

Contribuciones

4.1. Introducción

En el capítulo anterior concluimos que los grafos uniformemente más confiables que satisfacen $e \leq n + 3$ son simples. Es decir, incluso si extendemos la clase y pasamos a considerar multigrafos, los grafos uniformemente más confiables siguen siendo grafos simples.

Las pruebas desarrolladas que prueban dicha afirmación requieren una cuidadosa técnica de clasificación combinada con largos cálculos combinatorios.

En el artículo “A Simple Proof of the Gross-Saccoman Multigraph Conjecture” [1] se proporciona una prueba simple y unificada de los casos anteriores. La estrategia utilizada se puede aplicar siempre y cuando el grafo simple uniformemente más confiable satisfaga la propiedad de auto-semejanza. Como consecuencia, podría extenderse el razonamiento a grafos de mayor co-rango.

Como co-autor del artículo y como principal aporte y contribución al resultado de esta tesis, a continuación haré un desarrollo exhaustivo de dicho artículo.

4.2. Una Prueba Simple de la Conjetura en Multigrafos de Gross-Saccoman

El principal resultado de la presente tesis es una prueba simple y unificada respecto a la conjetura en multigrafos, para todos los pares n y e tal que $e \leq n + 3$, en la clase extendida de pseudografos, la cual notaremos por $\Omega_p(n, e)$. La clave para la demostración es combinar la fórmula de sustracción-contracción junto con la propiedad de auto-semejanza.

Denotaremos $\Omega_s(n, e)$, $\Omega(n, e)$ y $\Omega_p(n, e)$ al conjunto de grafos simples, multi-

Capítulo 4. Contribuciones

grafos y pseudografos con n vértices y e aristas, respectivamente.

Definición 7 ([20]). Una secuencia de grafos $\{G_n\}_{n \geq n_0}$ satisface la propiedad de auto-semejanza si G_{n+1} se obtiene de la inserción de un vértice en G_n , $\forall n \geq n_0$

Los siguientes conceptos son conocidos para grafos simples, pero extenderemos su definición a pseudografos. Dado $G = (V, E) \in \Omega_p(n, e)$, la inserción de un vértice en la arista (uv) produce un nuevo pseudografo $G' \in \Omega_p(n + 1, e + 1)$ tal que la arista (uv) es reemplazada por dos aristas (uw) y (wv) , donde w es el nuevo vértice perteneciente a G' . La sustracción de la arista x es $G - x = G(V, E - x)$. Si $x = (uv)$ con $u \neq v$, la contracción de la arista $G * x$ identifica los extremos u y v y elimina la arista x . Es importante destacar que al contraer una arista tanto el número de vértices como de aristas caen en una unidad y si los vértices u y v comparten múltiples aristas x_1, x_2, \dots, x_s y contraemos la arista x_1 , el nuevo vértice tiene $s - 1$ lazos, luego de la contracción, más aquellos posibles lazos que originalmente tuvieron los vértices u y v .

Frank Boesch observó que la siguiente fórmula de sustracción-contracción es válida en multigrafos [21].

$$m_{k+1}(G) = m_k(G - x) + m_{k+1}(G * x)$$

Usando nuestra definición de arista contracción y la regla de la suma, la identidad anterior también es válida para pseudografos.

Los grafos más fuertes en la clase $\Omega_s(n, e)$ cuando $e \leq n + 3$ son conocidos y fueron presentados con detalle en capítulos anteriores. Denotemos P_n , C_n y θ_n al camino, ciclo y grafo θ balanceado de n vértices, respectivamente. Estos resultan ser los más fuertes en sus respectivas clases de grafos simples. Además, denotaremos como $K_u(n)$ y $G_u(n)$ a los grafos más fuertes de las clases $\Omega_s(n, n + 2)$ y $\Omega_s(n, n + 3)$ respectivamente. El lector podrá recordar estos grafos en la figura 4.1.

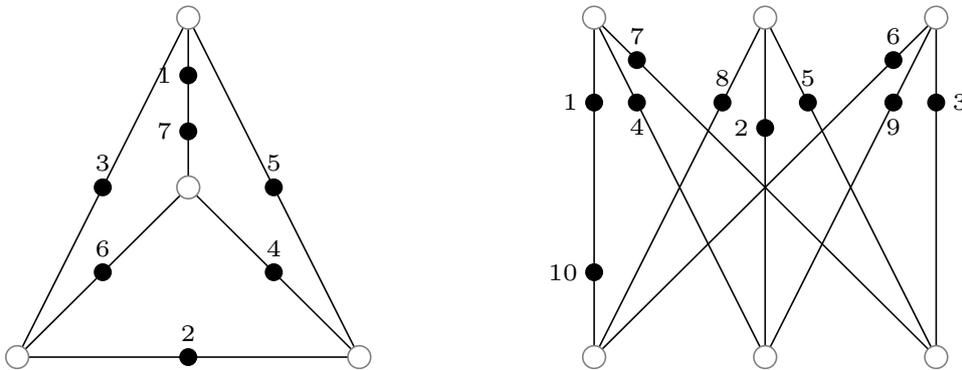


Figura 4.1: Grafos $K_u(11)$ (izq.) y $G_u(16)$ (der.).

4.2. Una Prueba Simple de la Conjetura en Multigrafos de Gross-Sacconan

Observemos que las secuencias de grafos UMRG verifican la Definición 7. Es decir, las secuencias de grafos $\{P_n\}_{n \geq 2}$, $\{C_n\}_{n \geq 3}$, $\{\theta_n\}_{n \geq 4}$, $\{K_u(n)\}_{n \geq 4}$ y $\{G_u(n)\}_{n \geq 6}$, son auto-semejantes ya que por construcción cada secuencia de grafos corresponde a una subdivisión elemental iterativa.

Para cada entero i tal que $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, denotamos $X(n, i)$ al grafo más fuerte en la clase de grafos simples $\Omega^i = \Omega_s(n, n - 1 + i)$. De esta forma, $X(n, i)$ es P_n , C_n , θ_n , $K_u(n)$ y $G_u(n)$ para los respectivos valores de $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

A partir de la definición, $\{X(n, i)\}_{n \geq n_i}$ satisface la propiedad de auto-semejanza para $n_i = i + 2$ y $X(n, i)$ se obtiene de la inserción de un vértice z_n en el grafo simple $X(n - 1, i)$ para todo $n > n_i$. Sabemos que z_n es incidente a precisamente dos aristas en el grafo resultante $X(n, i)$. Tomemos una de esas aristas, la cual llamaremos e_n . Definamos el multigrafo $Y(n, i + 1) = X(n, i) \cup \{e_n\} \in \Omega(n, n + 1)$, que es nada más ni nada menos que el grafo $X(n, i)$ pero con la arista e_n doble. Observe que $Y(n, i + 1) - e_n = X(n, i)$ y además, $Y(n, i + 1) * e_n = X(n - 1, i) \cup \{l\}$, donde l es un lazo. Obsérvese que hay más de una posibilidad de elegir e_n y por lo tanto $Y(n, i + 1)$ no es único. De todas formas, nuestro análisis no va a depender de esta elección.

Está claro que $X(n, 0) = P_n$ es el más fuerte en la clase de pseudografos $\Omega_p(n, n + 1)$, dado que los árboles son los únicos grafos conexos en dicha clase y todos satisfacen $m_0 = 0$ y $m_k = \binom{n-1}{k}$, $\forall k \geq 1$. Para los restantes índices consideraremos el siguiente lema.

Lema 4. $X(n, i)$ es más fuerte que $Y(n, i)$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Demostración. Los casos $i \in \{1, 2\}$ son inmediatos:

- $X(n, 1) = C_n$ es más fuerte que $P_n \cup e_n$, ya que $m_1(C_n) = 0 \leq m_1(P_n \cup e_n)$ y $m_k(C_n) = m_k(P_n \cup e_n) = \binom{n}{k}$, $\forall k \geq 2$
- $X(n, 2) = \theta_n$ es más fuerte que $C_n \cup e_n$. De hecho, el último también es un grafo θ pero desbalanceado.

Para los casos $i \in \{3, 4\}$, consideramos los grafos simples $G(n, 3) = Y(n, 3) - e_n + f$ y $G(n, 4) = Y(n, 4) - e_n + f$ representados en las Figuras 4.2 y 4.3. Probaremos mediante combinatoria que $G(n, 3)$ y $G(n, 4)$ es más fuerte que $Y(n, 3)$ e $Y(n, 4)$, respectivamente. Luego, la demostración se concluye ya que $X(n, 3)$ y $X(n, 4)$ son los más fuertes en la clase de grafos simples y además, la relación de fortaleza es transitiva.

Entonces, comencemos probando que $G(n, 3)$ es más fuerte que $Y(n, 3)$. Dado que $m_k(Y(n, 3)) = m_k(G(n, 3)) = 0$ para $k \in \{0, 1\}$ y $m_k(Y(n, 3)) = m_k(G(n, 3)) = \binom{e}{k}$ para $k \geq 4$, basta con probar que $m_k(G(n, 3)) \leq m_k(Y(n, 3))$ para $k \in \{2, 3\}$.

Capítulo 4. Contribuciones

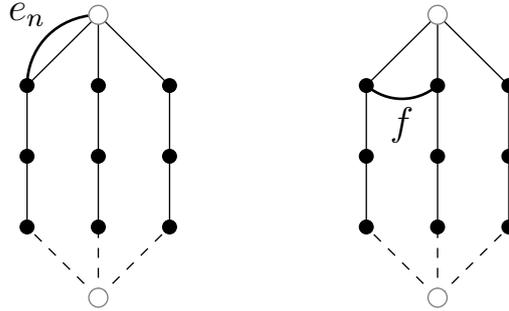


Figura 4.2: Grafos $Y(n, 3)$ a la izquierda y $G(n, 3) = Y(n, 3) - e_n + f$ a la derecha.

Si contamos los conjuntos de corte compuestos por dos aristas, inmediatamente podemos concluir que:

$$m_2(G(n, 3)) = \tau_\theta(r - 1, s - 1, t) \leq \tau_\theta(r - 1, s, t) = m_2(Y(n, 3))$$

Luego, para comparar los conjuntos de corte de tres aristas, procedemos a contar el numero de árboles recubridores de uno y otro grafo:

$$\begin{aligned} \tau(G(n, 3)) &= \tau_\theta(r, s, t) + (r - 1) + (s - 1) + 2\tau_\theta(r - 1, s - 1, t) \\ \tau(Y(n, 3)) &= s + t + 2\tau_\theta(r - 1, s, t) = s + t + 2\tau_\theta(r, s, t) + 2(r - 1 + t) \end{aligned}$$

En el paso base tenemos 5 aristas, es decir, $r = s = 2$ y $t = 1$ en el grafo θ balanceado. Por lo tanto, siempre se verifica que $r + s \geq 3$ y por lo tanto:

$$\tau(G(n, 3)) - \tau(Y(n, 3)) = \tau_\theta(r, s, t) - r - 3t = (r + s - 3)t + r(s - 1) \geq 0$$

Es decir, de esta forma verificamos que $G(n, 3)$ es más fuerte que $Y(n, 3)$.

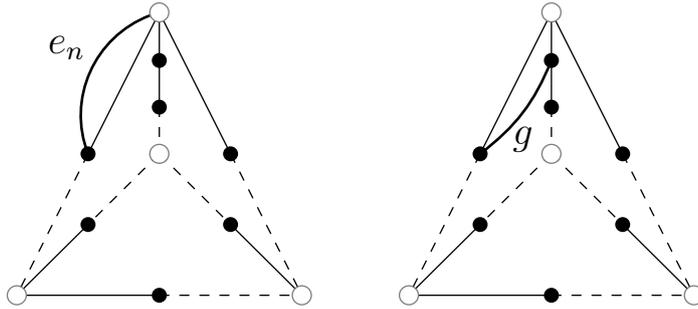


Figura 4.3: Grafos $Y(n, 4)$ a la izquierda y $G(n, 4) = Y(n, 4) - e_n + g$ a la derecha.

Para $Y(n, 4)$ tenemos que $m_k(Y(n, 4)) = m_k(G(n, 3)) = 0$ cuando $k \in \{0, 1\}$. Cuando $k = 2$, inmediatamente se obtiene que $m_2(Y(n, 4)) - m_2(G(n, 4)) = \binom{l_2}{2} - \binom{l_2-1}{2} \geq 0$. Además, $m_k(Y(n, 4)) = m_k(G(n, 4)) = \binom{e}{k}$ para $k \geq 5$. Entonces, resta probar que $m_k(G(n, 4)) \leq m_k(Y(n, 4))$ para $k \in \{3, 4\}$.

4.2. Una Prueba Simple de la Conjetura en Multigrafos de Gross-Sacconan

Para comparar estos casos, en primer lugar, aplicamos de forma repetida la fórmula de arista sustracción-contracción. Esto resulta en comparar los grafos indicados en la Figura 4.4, con sus respectivos conjuntos de corte indicados debajo.

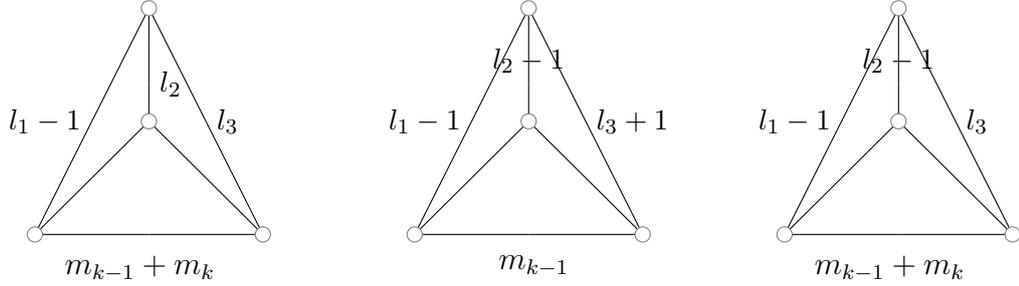


Figura 4.4: Grafos resultantes de aplicar sustracción-contracción a $Y(n, 4)$ (izquierda) y $G(n, 4)$ (centro y derecha)

Para $k = 3$ y considerando únicamente las diferencias entre los conjuntos de corte, tenemos:

$$\begin{aligned}
 m_3(Y(n, 4)) - m_3(G(n, 4)) &= \binom{l_2}{2} - \binom{l_2 - 1}{2} - \binom{l_2 - 1}{2} + \binom{l_3}{2} - \binom{l_3 + 1}{2} \\
 &\quad + l_3(l_1 - 1) + l_4 l_5 + \left[\binom{l_2}{2} - \binom{l_2 - 1}{2} \right] \left(\sum_{i \neq 2} l_i - 1 \right) \\
 &= l_3(l_1 - 2) + l_4 l_5 + \left[\binom{l_2}{2} - \binom{l_2 - 1}{2} \right] \left(\sum_{i \neq 2} l_i \right) - \binom{l_2 - 1}{2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $l_1 \geq 2$, resta verificar que:

$$\begin{aligned}
 \left[\binom{l_2}{2} - \binom{l_2 - 1}{2} \right] \left(\sum_{i \neq 2} l_i \right) - \binom{l_2 - 1}{2} &\geq 0 \\
 \binom{l_2}{2} \left(\sum_{i \neq 2} l_i \right) &\geq \binom{l_2 - 1}{2} \left(\sum_{i \neq 2} l_i + 1 \right) \\
 l_2 \left(\sum_{i \neq 2} l_i \right) &\geq (l_2 - 2) \left(\sum_{i \neq 2} l_i + 1 \right) \\
 2 \left(\sum_{i \neq 2} l_i \right) + 2 &\geq l_2
 \end{aligned}$$

La última desigualdad se verifica teniendo en cuenta que el largo de las cadenas difieren a lo sumo en 1.

Capítulo 4. Contribuciones

Para $k = 4$, como estrategia ya recurrente, vamos a contar árboles recubridores. Recordando el grafo que habíamos obtenido antes, cuidadosamente aplicando la fórmula de sustracción-contracción otra vez y teniendo en consideración que cuando eliminamos una arista de una cadena el grafo resultante tiene el mismo número de árboles recubridores que el grafo que resulta de eliminar la cadena entera, finalmente debemos comparar los siguientes grafos.

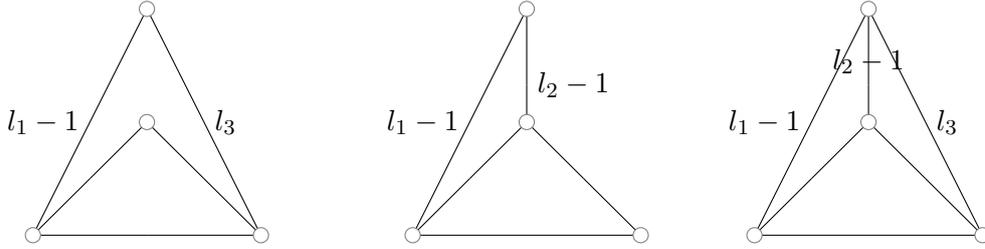


Figura 4.5: Diferencias entre árboles recubridores de $Y(n, 4)$ (izquierda) y $G(n, 4)$ (centro y derecha)

Si consideramos la diferencia entre ellos, tenemos:

$$\begin{aligned} \tau(G(n, 4)) - \tau(Y(n, 4)) &= (l_2 - 1)\tau_\theta(l_1 - 1 + l_3, l_4 + l_5, l_6) + \dots \\ &\quad - \tau_\theta(l_1 - 1 + l_3, l_4 + l_5, l_6) \\ &= (l_2 - 2)\tau_\theta(l_1 - 1 + l_3, l_4 + l_5, l_6) + \dots \geq 0 \end{aligned}$$

Como $l_2 \geq 2$ hemos probado que $G(n, 4)$ es más fuerte que $Y(n, 4)$. \square

El Lema 5 fue probado en [20] y lo traemos a colación ya que nos ayudará a demostrar el teorema principal de esta Tesis.

Lema 5. *Si el grafo G es más fuerte que el grafo H , entonces $G \cup \{l\}$ es más fuerte que $H \cup \{l'\}$ en $\Omega_p(n, e + 1)$, donde l y l' son lazos arbitrarios.*

Se desprende entonces, que la adición de lazos es totalmente inútil a la hora de diseñar redes y lo formalizaremos mediante el siguiente lema.

Lema 6. *Para cada pseudografo $G \in \Omega_p(n, e)$ con $n \geq 2$, existe un multigrafo más fuerte $H \in \Omega(n, e)$.*

Demostración. Si G es no conexo, consideramos un multigrafo arbitrario $H \in \Omega(n, e)$ y el resultado es inmediato. Por otro lado, si G no tiene lazos basta simplemente tomar $H = G$. De lo contrario, G tiene al menos un lazo (vv) . Dado que $n \geq 2$ y G es conexo, existe un vértice w tal que $w \neq v$ y $(vw) \in E(G)$. Consideremos el grafo $G_1 = G - (vv) + (vw)$, que se obtiene de reemplazar el lazo por una arista repetida (vw) . Observe que $G - (vv) = G_1 - (vw)$. Denotaremos $G' = G - (vv)$. Entonces:

$$\begin{aligned} m_{k+1}(G) &= m_k(G') + m_{k+1}(G') \\ m_{k+1}(G_1) &= m_k(G') + m_{k+1}(G_1 * (vw)) \end{aligned}$$

4.2. Una Prueba Simple de la Conjetura en Multigrafos de Gross-Saccoman

donde en la primera igualdad utilizamos la regla de la suma considerando que el lazo (vv) aparece en el conjunto de corte o no. Mientras que en la segunda igualdad utilizamos la fórmula de sustracción-contracción sobre la arista (vw) . Resta probar que $m_{k+1}(G * (vw)) \leq m_{k+1}(G_1 - (vw))$. Pero esto es inmediato por definición, ya que $G_1 - (vw)$ tiene todos los cortes de $G_1 * (vw)$ y posiblemente otros cortes adicionales que desconecten los vértices v y w . Entonces podemos elegir $H = G_1$ si G tiene solo un lazo. Por el contrario, si G tiene $s > 1$ lazos la aplicación reiterada del proceso anterior define una lista finita de grafos G_1, \dots, G_s tal que $G_{i=1}$ es más fuerte que G_i para todo $i \in \{1, \dots, s-1\}$ y G_s es un multigrafo sin lazos en $\Omega(n, e)$. Por lo tanto, se alcanza el resultado considerando $H = G_s$. \square

Recordemos que para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, la secuencia $\{X(n, i)\}_{n \geq n_i}$ satisface la propiedad de auto- semejanza tomando $n_i = i + 2$. Observe además que para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $n > n_i$ los grafos $X(n, i)$ y $Y(n, i)$ están bien definidos. Por lo tanto, el siguiente razonamiento inductivo es válido.

Lema 7. *Para cada $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ el grafo $Y(n, i + 1)$ es el más fuerte en $\mathcal{F}^i = \Omega_p(n, n + i) - \Omega_s(n, n + i) \forall n \geq i + 2$*

Demostración. La prueba se desarrolla por inducción en $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Paso Base: Si $i = 0$ los únicos pseudografos conexos, no simples, son árboles con exactamente una arista repetida. Estos grafos verifican $m_0 = 0$, $m_1 = n - 2$ y $m_j = \binom{n-1}{j}$ para todo $j \geq 2$. En particular, $Y(n, 1) = X(n, 0) \cup \{e_n\} = P_n \cup \{e_n\}$ es el más fuerte en \mathcal{F}^0 para todos los enteros positivos tal que $n \geq 2$ y por lo tanto se verifica el paso base.

Paso Inductivo: Asumimos que la afirmación es válida para un valor fijo $i - 1$ con $i \in \{1, 2, 3\}$. Es decir, $Y(n, i)$ es el más fuerte en \mathcal{F}^{i-1} para todo $n \geq i + 1$. Entonces, basta probar que $Y(n, i + 1)$ es el más fuerte en \mathcal{F}^i para todo $n \geq i + 2$.

Sea G un pseudografo arbitrario, no simple, en \mathcal{F}^i . Por el Lema 6 podemos asumir sin pérdida de generalidad que G no tiene lazos. Por lo tanto, G tiene alguna arista repetida f y $G * f$ tiene al menos un lazo, el cual denotaremos como l' . Llamaremos G' al grafo tal que $G = G' \cup \{f\}$. Observe que tanto G' como $G * f - \{l'\}$ pertenecen a \mathcal{F}^{i-1} . Entonces:

$$m_{k+1}(Y(n, i + 1)) = m_k(X(n, i)) + m_{k+1}(X(n - 1, i) \cup \{l\}) \quad (4.1)$$

$$\leq m_k(Y(n, i)) + m_{k+1}(Y(n - 1, i) \cup \{l\}) \quad (4.2)$$

$$\leq m_k(G') + m_k((G * f - \{l'\}) \cup \{l'\}) \quad (4.3)$$

$$= m_{k+1}(G) \quad (4.4)$$

donde la igualdad (4.1) es la formula de sustracción-contracción sobre la arista repetida en $Y(n, i + 1)$, la desigualdad (4.2) usa que $X(n, i)$ es más fuerte que $Y(n, i)$ (Lema 4) y el Lema 5 para lazos, la desigualdad (4.3) combina la hipótesis

Capítulo 4. Contribuciones

inductiva con el Lema 5 para lazos y la identidad (4.4) es la formula de sustracción-contracción sobre la arista f . \square

Es sabido que el grafo completo K_n y el grafo que se obtiene al quitar un emparejamiento arbitrario sobre el primero son uniformemente más confiables en sus correspondientes clases de multigrafos [27]. En particular, K_4 y K_5 menos 2 aristas independientes son grafos uniformemente más confiables. Dicho esto, nos encontramos en condiciones de probar el resultado principal.

Teorema 7. *Los grafos simples $\{P_n\}_{n \geq 2}$, $\{C_n\}_{n \geq 3}$, $\{\theta_n\}_{n \geq 4}$, $\{K_u(n)\}_{n \geq 4}$ y $\{G_u(n)\}_{n \geq 6}$ son uniformemente más confiables en las clases de pseudografos $\Omega_p(n, n-1+i)$ con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ respectivamente.*

Demostración. Está claro que $X(n, 0) = P_n$ es el más fuerte en la clase de pseudografos $\Omega_p(n, n-1)$ para n tal que $n \geq 2$, ya que los únicos grafos conexos en $\Omega_p(n, n-1)$ son árboles y todos satisfacen $m_0 = 0$ y $\binom{n-1}{k}$ para todo $k \geq 1$. Ahora consideremos $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Combinando los Lemas 4 y 7 podemos concluir que el grafo simple $X(n, i)$ es el más fuerte en $\Omega_p(n, n-1+i)$ para todo n tal que $n \geq i+2$. Existe un caso que no queda cubierto bajo este razonamiento y es el grafo $X(4, 3) = K_4$. De todos modos, sabemos que es uniformemente más confiable [27]. Por lo tanto, se concluye la prueba del Teorema. \square

Vale la pena remarcar que el Teorema 7 cubre todos los pares (n, e) de vértices y aristas tal que $e \leq n+3$ donde existe un grafo simple conexo, excepto para los casos $(n, e) = (1, 0)$ y $(n, e) = (5, 8)$, los cuales serán rápidamente analizados a continuación. Obviamente el grafo K_1 es único en su clase $\Omega(1, 0)$ y por lo tanto es uniformemente más confiable. Luego, si quitamos un par de aristas independientes de K_5 obtenemos un grafo uniformemente más confiable para la clase $\Omega(5, 8)$ [27]. Las propiedades mencionadas anteriormente también son válidas en sus respectivas clases de pseudografos $\Omega_p(1, 0)$ y $\Omega_p(5, 8)$ gracias al Lema 6.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de grafos uniformemente óptimos confiables es de suma utilidad para el diseño de redes con aplicación en diversas áreas. Encontrarlos no es una tarea fácil y aún no es muy bien entendida.

Muchas conjeturas fueron propuestas, las cuales en su mayoría permanecen sin demostrar. Boesch en el artículo que da puntapié a la temática [17] afirma que los grafos UMRG siempre existen, pero infinitos contraejemplos fueron encontrados que demuestran la no existencia. Una condición suficiente para que un grafo sea UMRG es que minimice el vector arista desconector. Sin embargo, el recíproco permanece abierto. Para que un grafo sea UMRG, este debe ser λ -óptimo y t -óptimo. De todos modos, la caracterización de este tipo de grafos es una tarea desafiante y aún no se conoce totalmente.

La existencia y construcción de UMRG solo ha sido estudiada para clases de grafos de bajo co-rango, o clases de grafos casi completos. Para el caso particular en que $e = n + i$ con $i \in \{4, 5, 6, 7\}$, pruebas computacionales sugieren que ciertas subdivisiones particulares de los grafos de Wagner, Petersen, Yutsis y Heawood son UMRG. Esta conjetura es un posible trabajo a futuro.

Por otro lado, vimos qué sucedía si permitíamos interconectar nodos mediante múltiples aristas. Nos preguntamos si los grafos UMRG seguirían siendo óptimos al extender a la clase de multigrafos. Para el caso en que $e \leq n + 3$ la respuesta resulta ser afirmativa.

En esta tesis no solo se pudo abordar la temática de Grafos Uniformemente Más Confiables, sino que da lugar a la publicación de un artículo de co-autoría en la revista *Networks*. Dicho trabajo proporciona una prueba simple de los resultados previamente dados por Gross y Saccoman y Pablo Romero y además son extendidos a la clase de pseudografos. Los ingredientes principales fueron la propiedad de auto-semejanza que comparten los grafos simples más fuertes, una fórmula de arista sustracción-contracción para pseudografos, la regla de la suma y un razonamiento inductivo.

Capítulo 5. Conclusiones

Esta aproximación puede ser fácilmente extendida a los casos donde $e \leq n + 7$, siempre y cuando la conjetura hecha por Ath y Sobel [31] sea cierta. Esos autores construyen una secuencia candidata de grafos uniformemente confiables que también satisface la propiedad de auto-semejanza y por lo tanto, mediante un razonamiento similar al realizado anteriormente se podría extender el resultado a esta clase.

Finalmente, la conjetura general que asevera que los multigrafos uniformemente confiables son simples aún continúa abierta.

Referencias

- [1] Mauro Martínez, Pablo Romero, and Julián Viera. A simple proof of the Gross-Saccoman multigraph conjecture. *Networks*, 80(3):333–337, 2022.
- [2] B. Bollobás. *Graph Theory: An Introductory Course*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1979.
- [3] Frank Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley, 1991.
- [4] John Adrian Bondy, Uppaluri Siva Ramachandra Murty, et al. *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London, 1976.
- [5] D.B. West. *Introduction to Graph Theory*. Featured Titles for Graph Theory. Prentice Hall, 2001.
- [6] J. Rak and D. Hutchison. *Guide to Disaster-Resilient Communication Networks*. Springer International Publishing, 2020.
- [7] E.F. Moore and C.E. Shannon. Reliable circuits using less reliable relays. *Journal of the Franklin Institute*, 262(3):191–208, 1956.
- [8] Michael O. Ball and J. Scott Provan. The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected. *SIAM J. Computing*, 12:777–788, 1983.
- [9] L.G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*, 8(2):189–201, 1979.
- [10] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, USA, 1990.
- [11] Christos Alexopoulos and George S Fishman. Characterizing stochastic flow networks using the Monte Carlo method. *Networks*, 21(7):775–798, 1991.
- [12] Christos Alexopoulos and George S Fishman. Sensitivity analysis in stochastic flow networks using the Monte Carlo method. *Networks*, 23(7):605–621, 1993.
- [13] Adam L Buchsbaum and Milena Mihail. Monte Carlo and Markov chain techniques for network reliability and sampling. *Networks*, 25(3):117–130, 1995.

Referencias

- [14] George S Fishman. A Monte Carlo sampling plan for estimating network reliability. *Operations Research*, 34(4):581–594, 1986.
- [15] Richard M Karp and Michael Luby. Monte-carlo algorithms for the planar multiterminal network reliability problem. *Journal of Complexity*, 1(1):45–64, 1985.
- [16] Rico Zenklusen and Marco Laumanns. High-confidence estimation of small s-t reliabilities in directed acyclic networks. *Networks*, 57(4):376–388, 2011.
- [17] F. T. Boesch, X. Li, and C. Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2):181–194, 1991.
- [18] Guifang Wang. A proof of Boesch’s conjecture. *Networks*, 24(5):277–284, 1994.
- [19] Daniel Gross and John T. Saccoman. Uniformly optimally reliable graphs. *Networks*, 31(4):217–225, 1998.
- [20] Pablo Romero. The Gross–Saccoman conjecture is true. *Networks*, 78(2):164–173, 2021.
- [21] Francis T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *Journal of Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [22] Wendy Myrvold. Reliable network synthesis: Some recent developments. In *Proceedings of the 8th International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications, Volume II*, pages 650–660, 1996.
- [23] D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, and R. Van Slyke. On the validity of a reduction of reliable network design to a graph extremal problem. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(12):1579–1581, 1987.
- [24] D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, and R. Tindell. Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks. *Networks*, 15(2):257–271, 1985.
- [25] Frank Harary. The maximum connectivity of a graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 48(7):1142–1146, 1962.
- [26] Wendy Myrvold, Kim H. Cheung, Lavon B. Page, and Jo Ellen Perry. Uniformly-most reliable networks do not always exist. *Networks*, 21(4):417–419, 1991.
- [27] A. Kelmans. On graphs with randomly deleted edges. *Acta Mathematica Hungarica*, 37(1-3):77 – 88, 1981.
- [28] Jason I. Brown and Danielle Cox. Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability. *Networks*, 63(2):146–153, 2014.

- [29] F. Moskowitz. The analysis of redundancy networks. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics*, 77(5):627–632, 1958.
- [30] Wendy Myrvold. Uniformly-most reliable graphs do not always exist. Technical report, Department of Computer Science, University of Victoria, Victoria, B.C., Canada, 1990. Technical Report #DCS-120-IR.
- [31] Yontha Ath and Milton Sobel. Some conjectured uniformly optimal reliable networks. *Probability in the Engineering and Informational Sciences.*, 14(3):375–383, 2000.
- [32] Pablo Romero. Building uniformly Most-Reliable networks by iterative augmentation. In *International Workshop on Resilient Networks Design and Modeling*, Alghero, Sardinia, Italy, 2017.
- [33] Guillermo Rela, Franco Robledo, and Pablo Romero. Petersen graph is uniformly most-reliable. In *Machine Learning, Optimization, and Big Data*, pages 426–435, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [34] Eduardo A. Canale, Franco Robledo, Pablo Romero, and Julian Viera. Building reliability-improving network transformations. In *Proceedings of the 15th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks*, pages 107–113. IEEE, 2019.
- [35] Mathias Bourel, Eduardo Canale, Franco Robledo, Pablo Romero, and Luis Stábile. Building Highly Reliable Networks with GRASP/VND Heuristics. In *2019 15th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN)*, pages 91–98, 2019.
- [36] Eduardo Canale, Guillermo Rela, Franco Robledo, and Pablo Romero. The complete bipartite graph $K_{4,4}$ is Uniformly Most-Reliable. (*submitted*), 2021.
- [37] A. Satyanarayana, L. Schoppmann, and C. L. Suffel. A reliability-improving graph transformation with applications to network reliability. *Networks*, 22(2):209–216, 1992.
- [38] D. Shier. Maximizing the number of spanning trees in a graph with n nodes and m edges. *Journal of Research of the National Bureau of Standards Sect. B*, 78B:193–196, 1974.
- [39] Kassie Archer, Christina Graves, and David Milan. Classes of uniformly most reliable graphs for all-terminal reliability. *Discrete Applied Mathematics*, 267:12–29, 2019.
- [40] Hassler Whitney. Non-separable and planar graphs. *Proceedings of the National Academy of Sciences.*, 17(2):125–127, February 1931.

Esta es la última página.
Compilado el viernes 19 mayo, 2023.