Trabajo monográfico

Álgebras de Banach asociadas a sistemas dinámicos

Tabaré Roland

Marzo 2023

Orientador:

Fernando Abadie

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

Dado un sistema dinámico topológico $\Sigma = (X, \sigma)$, donde X es un espacio topológico compacto Hausdorff y σ es un homeomorfismo de X, construimos dos álgebras de Banach asociadas a él, las cuales contienen canónicamente a $C(X)$. La primera es $\ell^1(\Sigma)$, una *-álgebra de Banach, y la segunda es $C^*(\Sigma)$, la C^*-álgebra envolvente de $\ell^1(\Sigma)$. Vincularemos las estructuras de ideales de cada álgebra con la dinámica de Σ. Más precisamente, veremos que la libertad topológica, la minimalidad y la transitividad de Σ equivalen a la maximalidad de $C(X)$ como subálgebra abeliana, a la simplicidad y a la primalidad de cada una de las álgebras, respectivamente.

Estudiaremos también la estructura de ideales y la teoría de representaciones de $\ell^1(\Sigma)$. Caracterizaremos aquellos sistemas para los cuales todo ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ es autoadjunto y, cuando X contiene puntos no periódicos, construiremos *-representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ en espacios de Hilbert que son topológicamente irreducibles pero no son algebraicamente irreducibles, lo cual no puede ocurrir en $C^*(\Sigma)$ debido a que es una C^*-álgebra.

Para finalizar, estudiaremos la relación entre las estructuras de ideales de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$. Veremos que la clausura de todo ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$ respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$ sigue siendo un ideal propio, y que en algunos casos podemos recuperar al ideal de su clausura de forma natural intersectándolo nuevamente con $\ell^1(\Sigma)$.

Abstract

Given a topological dynamical system $\Sigma = (X, \sigma)$, where X is a compact Hausdorff space and σ is a homeomorphism of X, we construct two Banach algebras associated to it, which canonically contain $C(X)$. The first one is $\ell^1(\Sigma)$, a Banach *-algebra, and the second one is $C^*(\Sigma)$, the enveloping C^*-algebra of $\ell^1(\Sigma)$. We will link the ideal structures of each algebra to the dynamics of Σ. More precisely, we will see that topological freedom, minimality and transitivity of Σ are equivalent to the maximality of $C(X)$ as an abelian subalgebra, the simplicity and the primality of each of the algebras, respectively.

We will also study the structure of ideals and the theory of representations of $\ell^1(\Sigma)$. We will characterize those systems for which every closed ideal of $\ell^1(\Sigma)$ is selfadjoint and, when X contains aperiodic points, we will construct *-representations of $\ell^1(\Sigma)$ in Hilbert spaces that are topologically irreducible but are not algebraically irreducible, something that cannot occur in $C^*(\Sigma)$ because it is a C^*-algebra.

To conclude, we will study the relation between the ideal structures of $\ell^1(\Sigma)$ and $C^*(\Sigma)$. We will see that the closure of every proper ideal of $\ell^1(\Sigma)$ with respect to the norm of $C^*(\Sigma)$ is still a proper ideal, and that in some cases we can recover the ideal from its closure in a natural way by intersecting it again with $\ell^1(\Sigma)$.

Índice general

Introducción

La mayoría de las interacciones entre la dinámica y la teoría de álgebras de operadores recae en un tipo de estructuras conocidas como *productos cruzados*. Históricamente, los productos cruzados surgen en el contexto de álgebras de operadores en trabajos de von Neumann y Murray en 1936, como un método para crear ejemplos de lo que se conoce como *álgebras de von Neumann*, un tipo particular de C^**-álgebras*.

Estas estructuras fueron estudiadas a lo largo de los años con distintos sabores: una de las formas más estudiada surge de los sistemas dinámicos medibles. Bajo hipótesis adecuadas, la acción de un grupo G por transformaciones medibles, en un espacio de medida (Ω, μ), induce un automorfismo en el álgebra de funciones esencialmente acotadas $L^\infty(\Omega, \mu)$, que es un ejemplo estándar de un álgebra de von Neumann conmutativa. Con estos ingredientes, se construye otra álgebra de von Neumann, el producto cruzado, que no es conmutativa, y que codifica en algún sentido la acción del grupo en el espacio. En esta situación, propiedades dinámicas de la acción pueden verse reflejadas en el producto cruzado.

En un contexto más general, los productos cruzados se construyen en base a un C^**-sistema dinámico*: esto es la acción continua por automorfismos de un grupo localmente compacto en una C^*-álgebra. Un caso simple que sirve de ejemplo en este contexto es la acción de un grupo discreto G en una C^*-álgebra A, donde la topología discreta de G facilita la construcción del producto cruzado, que se suele denotar $A \rtimes_\alpha G$, donde $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ es la acción de G.

Las interacciones entre la dinámica topológica y la teoría de álgebras de operadores son estudiadas en los trabajos [**9**],[**10**] de Tomiyama: dado un sistema dinámico $\Sigma = (X, \sigma)$, determinado por la acción de $\mathbb{Z}$ en un espacio compacto Hausdorff X a través de iterar un homeomorfismo $\sigma : X \to X$, da lugar a un C^*-sistema dinámico considerando la C^*-álgebra $C(X)$, el álgebra de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$, y el automorfismo $\alpha : C(X) \to C(X)$ dado por $\alpha(f) = f \circ \sigma^{-1}$, donde $\mathbb{Z}$ actúa sobre $C(X)$ iterando α.

Brevemente, la construcción del producto cruzado en esta situación es la siguiente: se considera primero

$$\ell^1(\Sigma) = \left\{ f : \mathbb{Z} \to C(X) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(n)\|_\infty < \infty \right\},$$

equipado con un producto que codifica la acción del grupo y que hace de $\ell^1(\Sigma)$ no conmutativa. Se le equipa con una norma natural y una involución de forma que sea una **-álgebra de Banach con unidad*, un tipo de estructura que, con un cambio de norma, puede ser completada a una C^*-álgebra. Es tal completación el producto cruzado $C^*(\Sigma)$ asociado al sistema dinámico Σ. Se tiene además que $C(X)$ está contenido canónicamente en el producto cruzado, siendo una C^*-subálgebra abeliana. Se tiene entonces que $C(X)$ está contenido en su conmutante, que es la subálgebra

$$C(X)' = \{a \in C^*(\Sigma) : af = fa \text{ para toda } f \in C(X)\}.$$

Se verifica que el conmutante es también abeliana, por lo que es una C^*-subálgebra abeliana maximal que contiene a $C(X)$. Una pregunta que surge es bajo qué condiciones el conmutante coincide con $C(X)$, o, en otras palabras, cuándo $C(X)$ es una subálgebra abeliana maximal del producto cruzado, lo cual es una pregunta de carácter más algebraico. En esta situación comienzan las interacciones entre la dinámica de Σ y las propiedades analítico-algebraicas de $C^*(\Sigma)$, pues resulta que la maximalidad de $C(X)$ es equivalente a que los puntos no periódicos de Σ sean densos, una propiedad que llamaremos ser *topológicamente libre*. Más aún, también tiene relación con la estructura de ideales del producto cruzado, pues también resulta ser equivalente a que cualquier ideal cerrado no nulo de $C^*(\Sigma)$ tenga intersección no nula con $C(X)$.

Suponiendo además que el espacio X es infinito, se tienen otras dos equivalencias interesantes: la minimalidad y la transitividad del sistema dinámico equivalen a la simplicidad y a la primalidad del producto cruzado, respectivamente. De nuevo, logramos relacionar propiedades dinámicas de Σ con propiedades sobre la estructura de ideales de $C^*(\Sigma)$.

Una parte del trabajo monográfico estará destinada a mostrar este diccionario entre propiedades dinámicas de Σ y propiedades analítico-algebraicas de $C^*(\Sigma)$. El resto del trabajo que haremos será estudiar cómo propiedades dinámicas se reflejan en otra álgebra de Banach asociada al sistema dinámico.

Un primer intento de asociar un producto cruzado de otro tipo a una dinámica fue en un contexto predominantemente algebraico, en los artículos [**13**],[**14**] y [**15**] por parte de Svensson, Silvestrov y de Jeu. Sin usar nociones analíticas, cambian la condición de convergencia que teníamos por una de finitud y, partiendo de un álgebra abeliana asociativa A, construyen una estructura de tipo producto cruzado, tratando de obtener resultados usando como modelo lo sabido de $C^*(\Sigma)$, la cual fue estudiada antes y con mucha más extensión. Logran en este contexto ver que el conmutante A' de A es abeliano y, por tanto, es maximal dentro de las subálgebras abelianas, un resultado inspirado en el que describimos sobre el conmutante de $C(X)$. Permitiendo además que A sea un álgebra de funciones sobre un conjunto arbitrario X y cambiando la dinámica topológica, que era por homeomorfismos, por simplemente una biyección, consiguen resultados similares a los vistos para el caso de $C^*(\Sigma)$. Luego, introduciendo nuevamente nociones analíticas, trabajan con A un álgebra de Banach (con otras hipótesis técnicas), y logran equivalencias como las descritas antes para un sistema dinámico en el espectro de A.

Siguiendo con la idea de estudiar otro tipo de álgebras que codifiquen la dinámica, la *-álgebra de Banach $\ell^1(\Sigma)$ será nuestro caso de estudio en este trabajo. Fue estudiada inicialmente en [**1**] por de Jeu, Svensson y Tomiyama. Por un lado, parecería más simple que el estudio de $C^*(\Sigma)$, pues la construcción de la última se basa en la de la primera y requiere de un paso extra. Sin embargo, $C^*(\Sigma)$ es una C^*-álgebra y, por tanto, goza de una teoría sumamente rica que facilita su estudio, teoría con la cual no cuenta $\ell^1(\Sigma)$. El ejemplo más claro donde eso se hace evidente es que $\ell^1(\Sigma)$ puede contener ideales cerrados que no sean autoadjuntos, mientras que en $C^*(\Sigma)$ esto no puede ocurrir, dado que todo ideal cerrado de una C^*-álgebra es autoadjunto.

Sin embargo, en [**1**] logran resultados tan buenos como los que se tienen para $C^*(\Sigma)$, y estos resultados, usando el sistema dinámico común subyacente a ambas álgebras, permiten lograr equivalencias entre la estructura de ideales de $\ell^1(\Sigma)$ y la de $C^*(\Sigma)$.

Hasta ese punto, la relación entre las estructuras de ambas álgebras se logra a través del sistema dinámico que hay de fondo, y no a través de un análisis directo entre ellas. Es en [**2**],[**3**],[**4**] y [**5**] donde de Jeu y Tomiyama estudian cómo relacionar de forma más directa estas estructuras, analizando en el proceso la teoría de representaciones de $\ell^1(\Sigma)$, y logrando probar, entre otras cosas, el siguiente resultado que relaciona directamente la estructura de ideales de las dos álgebras: la clausura de todo ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$, respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, sigue siendo un ideal propio. Con esto en mente, el otro objetivo de esta monografía será estudiar a $\ell^1(\Sigma)$, su relación con $C^*(\Sigma)$, y probar este último resultado mencionado sobre la relación entre la estructura de ideales de las dos álgebras.

Describiremos brevemente como estará estructurado el presente trabajo. En el Capítulo 1 presentaremos la teoría básica necesaria para el desarrollo posterior de la monografía. Entre ellos, enunciaremos resultados elementales de topología, dinámica, y álgebra. Luego repasaremos la teoría elemental de álgebras de Banach.

En el Capítulo 2 introduciremos los dos productos cruzados con los que trabajaremos en la monografía, que son $\ell^1(\Sigma)$ y su envolvente C^*, que denotaremos $C^*(\Sigma)$. Caracterizaremos el conmutante de $C(X)$ en cada una de las álgebras, veremos que es una subálgebra abeliana maximal, y probaremos que todo ideal cerrado no nulo de $\ell^1(\Sigma)$ intersecta al conmutante de $C(X)$ en esa álgebra.

En el Capítulo 3 nos centraremos en el estudio de $\ell^1(\Sigma)$. Veremos equivalencias entre propiedades dinámicas del sistema dinámico Σ, y propiedades analítico-algebraicas de $\ell^1(\Sigma)$. Probaremos que la libertad topológica de equivale la maximalidad de $C(X)$ como subálgebra abeliana, que la minimalidad equivale a la simplicidad, y que la transitividad equivale a la primalidad. Veremos además que todo ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ es autoadjunto si y solamente si Σ no tiene puntos periódicos.

En el Capítulo 4 haremos un estudio similar al del capítulo anterior, pero para $C^*(\Sigma)$. Antes de eso, introduciremos brevemente la construción de productos cruzados inducidos por C^*-sistemas dinámicos, y veremos que hay una biyección entre las representaciones covariantes de un C^*-sistema dinámico y las *-representaciones en espacios de Hilbert del producto cruzado que induce. Veremos como toda *-representación de $C^*(\Sigma)$ induce un sistema dinámico en un subconjunto invariante de X. Finalmente, demostraremos para $C^*(\Sigma)$ las mismas equivalencias entre propiedades dinámicas y propiedades analítico-algebraicas probadas en el capítulo anterior, adaptando las técnicas utilizadas.

En el Capítulo 5 estudiaremos la relación entre las estructuras de ideales de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$. Concretamente, probaremos que todo ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$ sigue siendo un ideal propio al clausurarlo con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$. Para lograr esto, estudiaremos como los puntos periódicos y no periódicos de Σ inducen representaciones de dimensión finita e infinita de $\ell^1(\Sigma)$, respectivamente. Probaremos que si Σ tiene algún punto no periódico, entonces existe una *-representación de $\ell^1(\Sigma)$ en un espacio de Hilbert que es topológicamente irreducible pero no es algebraicamente irreducible, algo que no puede ocurrir en $C^*(\Sigma)$ dado que es una C^*-álgebra. Veremos que todo ideal primitivo, que es el núcleo de una representación algebraicamente irreducible, tiene asociado un subconjunto invariante de X, y podremos asociar el ideal con los núcleos de las representaciones asociadas a puntos de X que describimos antes. Usando que la teoría de *-representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$ es la misma, podremos entonces probar que la clausura con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$ de todo ideal primitivo es un ideal propio. Finalmente, veremos que todo ideal maximal es un ideal primitivo, lo que nos permitirá concluir el resultado que buscamos en este capítulo.

La referencia del primer capítulo será mayormente [**11**], y usaremos algunos resultados de [**16**]. En el segundo y tercer capítulo la referencia será principalmente [**1**], y en menor medida

[**6**]. En el cuarto capítulo nos basaremos en [**10**]. Finalmente, en el quinto capítulo nuestras referencias serán mayormente [**4**] y [**5**], y extraeremos algún resultado de [**2**], [**3**] y [**7**].

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es introducir la teoría general que utilizaremos más adelante en el texto, y en el trayecto definir el lenguaje y notación con la que trabajaremos. Enunciaremos resultados y presentaremos construcciones que serán necesarias de topología y sistemas dinámicos, de álgebra y de la teoría de álgebras de Banach y C^*-álgebras.

Más puntualmente, primero recordaremos algunos resultados de topología que serán herramientas esenciales en el trabajo posterior, e introduciremos algunas nociones que nos intereserán de dinámica: la libertad topológica, la minimalidad, y la transitividad. Sobre álgebra, haremos algunos comentarios breves en cuanto a representaciones en un contexto algebraico. Finalmente, repasaremos la teoría básica de álgebras de Banach que usaremos, veremos cómo a una *-álgebra de Banach podemos asociarle una C^*-álgebra, presentaremos la dualidad de Gelfand, que caracteriza las C^*-álgebras conmutativas y, por último, recordaremos algunos resultados sobre espacios de sucesiones.

1. Topología y dinámica

Introduciremos brevemente algunas nociones topológicas y dinámicas que usaremos más adelante, así como algunas propiedades que nos serán útiles.

A lo largo de la monografía, trabajaremos mayoritariamente con espacios topológicos compactos Hausdorff. Estos espacios tienen gran cantidad de propiedades que utilizaremos en todo el trabajo. Iremos mencionándolas en lo que sigue.

En primer lugar, todo espacio compacto Hausdorff es un espacio de Baire. Recordemos que un espacio de Baire es un espacio tal que la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío es un conjunto con interior vacío, o, lo que es equivalente, la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso.

Un espacio compacto Hausdorff es además un espacio normal. Que un espacio sea normal es que, dados dos conjuntos cerrados D, C, disjuntos y no vacíos, existen dos abiertos U, V disjuntos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$; es decir, podemos separar conjuntos cerrados disjuntos por conjuntos abiertos disjuntos. En espacios normales valen dos resultados de extrema utilidad: el lema de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze.

Teorema 1.1 (Lema de Urysohn). Sea X un espacio normal y sean C, D dos subconjuntos no vacíos cerrados y disjuntos. Entonces existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in C$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in D$.

Se dice que la función f del teorema separa los conjuntos C y D. En realidad, el lema de Urysohn puede enunciarse diciendo que un espacio es normal si y solamente si dados dos conjuntos cerrados C, D disjuntos existe una función $f : X \to [0, 1]$ continua que separa a C y D.

Teorema 1.2 (de extensión de Tietze). Sea X un espacio normal y sean C un subconjunto cerrado de X, $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ función continua que extiende a f, es decir, $\widetilde{f}|_C = f$. Si además f está acotada, $\widetilde{f}$ puede tomarse tal que

$$\sup_{x \in X} |\widetilde{f}(x)| = \sup_{y \in C} |f(y)|,$$

es decir, $\widetilde{f}$ puede tomarse acotada y con la misma cota que f.

Que para cualquier función continua definida en un subconjunto compacto existan extensiones continuas a todo el espacio también es equivalente a que el espacio sea normal. Es fácil ver que el teorema de extensión de Tietze puede enunciarse también para funciones con codominio $\mathbb{C}$, simplemente descomponiendo la función en sus partes real e imaginaria y aplicando el teorema dos veces. Por ese mismo motivo lo usaremos para funciones sobre $\mathbb{C}$ directamente, sin hacer una mención explícita.

Trabajaremos con funciones definidas en un espacio compacto Hausdorff a lo largo de todo el trabajo, por lo que los dos teoremas recién mencionados serán herramientas esenciales.

Pasemos ahora a discutir sobre dinámica. Trabajaremos con sistemas dinámicos topológicos. Durante este trabajo, un sistema dinámico será la acción de $\mathbb{Z}$ por un homeomorfismo sobre un espacio topológico X. Denotaremos $\Sigma = (X, \sigma)$ al sistema dinámico, donde $\sigma : X \to X$ es un homeomorfismo. La acción de $\mathbb{Z}$ sobre x está dada por $n \cdot x = \sigma^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in X$.

Definamos y fijemos notación de algunas nociones elementales de dinámica. Diremos que un punto $x \in X$ es *periódico* si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma^n(x) = x$. Si x es un punto periódico, diremos que el *periodo* de x es el menor entero positivo n tal que $\sigma^n(x) = x$. Si un punto $x \in X$ no es periódico diremos que es *no periódico* o *aperiódico*. Denotamos $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ al conjunto de puntos de periodo n, $\mathrm{Per}(\sigma)$ al conjunto de puntos periódicos, y $\mathrm{Aper}(\sigma)$ al conjunto de puntos no periódicos. Es decir, tenemos que:

$$\mathrm{Per}(\sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Per}_n(\sigma) \text{ y } \mathrm{Aper}(\sigma) = X \setminus \mathrm{Per}(\sigma).$$

Definimos además

$$\mathrm{Fix}_n(\sigma) = \{x \in X : \sigma^n(x) = x\},$$

es decir, el conjunto de puntos fijos por σ^n. Evidentemente $\mathrm{Per}_n(\sigma) \subset \mathrm{Fix}_n(\sigma)$, pero la inclusión inversa no siempre vale. Se tiene también que $\mathrm{Fix}_{-n}(\sigma) = \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ y $\mathrm{Per}_{-n}(\sigma) = \mathrm{Per}_n(\sigma)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por último, denotamos como $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ la *órbita* de un punto x. Observemos que el conjunto de las órbitas es una partición de X. El resultado que sigue es elemental, pero lo usaremos constantemente.

Proposición 1.3. Sea Σ un sistema dinámico. Se tiene que $\mathrm{Fix}_n(\sigma)$ es cerrado para todo entero n.

Diremos que Σ es *libre* si no tiene puntos periódicos. Es decir que Σ es libre si $X = \mathrm{Aper}(\sigma)$, o equivalentemente, si $\mathrm{Fix}_n(\sigma) = \emptyset$ para todo entero positivo n.

Inspirados en la definición anterior, diremos que Σ es *topológicamente libre* si los puntos no periódicos son, en un sentido topológico, todo el espacio. Concretamente, diremos que Σ es topológicamente libre si los puntos no periódicos son densos en X. Veremos más adelante que esto es equivalente a que para todo entero entero positivo n el conjunto $\mathrm{Fix}_n(\sigma)$ sea topológicamente chico, en el sentido de que tenga interior vacío.

Las otras dos nociones dinámicas que aparecerán serán la minimalidad y la transitividad. Un sistema dinámico es *minimal* si toda órbita es densa, es decir, si para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$. Un sistema dinámico es transitivo si para todo par de abiertos no vacíos U y V existe un entero n tal que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Ser topológicamente libre es una propiedad que probará ser esencial, en particular porque muchas veces es más débil que la minimalidad o la transitividad, bajo la hipótesis de que el espacio contenga infinitos puntos.

La siguiente proposición da una caracterización usual de la minimalidad que usaremos más adelante.

Proposición 1.4. Sea Σ un sistema dinámico. Entonces Σ es minimal si y solamente si no existe ningún subconjunto cerrado propio invariante por σ.

2. Álgebra

Introduciremos brevemente algunas nociones de álgebra que usaremos. En general, todas las álgebras y espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{C}$; además, siempre que mencionemos ideales de un álgebra asumiremos que son bilaterales, salvo explícita mención de lo contrario. Recordemos que un *ideal principal* es un ideal generado por un solo elemento.

Una *representación* de un álgebra A es un par (π, E), donde E es un espacio vectorial y $\pi : A \to \mathcal{L}(E)$ es un homomorfismo de álgebras, donde $\mathcal{L}(E)$ denota el álgebra de operadores lineales de E. Dado a en A, denotaremos π_a a $\pi(a)$. Si S es un subespacio vectorial de E tal que $\pi(A)S \subset S$, diremos que S es un subespacio invariante. En este caso, tenemos lo que llamamos una *subrepresentación* (π_S, S), dada por restringir $\pi(A)$ a S. Toda representación tiene dos subrepresentaciones triviales puesto que E y $\{0\}$ siempre son subespacios invariantes triviales. Diremos que una representación de un álgebra es *algebraicamente irreducible* si es una representación no nula y no tiene subrepresentaciones no triviales.

El *lema de Schur* es un resultado elemental de la teoría de representaciones, pero extremadamente útil, que tiene múltiples enunciados dependiendo del contexto en el que se esté trabajando. El enunciado que usaremos nosotros será el que sigue.

Teorema 1.5 (Lema de Schur). Sea $\pi : A \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible de un álgebra A en un espacio vectorial E. Entonces los únicos operadores de E que conmutan con $\pi(A)$ son los múltiplos escalares de la identidad.

Usaremos además el siguiente resultado estándar de la teoría de anillos sobre la existencia de ideales maximales en un álgebra con unidad.

Teorema 1.6 (Krull). Sea A un álgebra con unidad, y sea I un ideal propio de A. Entonces existe un ideal maximal M que contiene a I.

El resultado anterior también vale para ideales izquierdos. Es decir, tenemos que todo ideal izquierdo propio de un álgebra con unidad está contenido en un ideal izquierdo maximal.

3. Álgebras de Banach

Veremos ahora la teoría sobre álgebras de Banach que necesitaremos para desarrollar este trabajo. Veremos las definiciones y resultados generales que usaremos, hablaremos sobre la dualidad de Gelfand e introduciremos brevemente los espacios de sucesiones, que más adelante utilizaremos. La mayoría de los resultados que describiremos aquí pueden verse en los libros [**11**],[**12**].

3.1. Definiciones y teoría elemental.

Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial E sobre $\mathbb{C}$, equipado con una norma respecto a la cual es un espacio topológico completo. Un *álgebra normada* es un álgebra A sobre $\mathbb{C}$ equipada con una norma submultiplicativa $\|\cdot\|$, lo que significa que

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \text{ para todo } a, b \in A.$$

Si además A tiene unidad, pedimos que $\|1\| = 1$. Finalmente, un *álgebra de Banach* es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con una norma respecto a la cual es un álgebra normada y un espacio de Banach. Lo siguiente es un resultado elemental sobre álgebras de Banach que será útil.

PROPOSICIÓN 1.7. Sea A un álgebra de Banach, y denotemos $A^\times$ al conjunto de elementos invertibles de A. Entonces se tiene que $B(1,1)$, la bola de centro 1 y radio 1 en A, está incluida en $A^\times$. Además $A^\times$ es un conjunto abierto de A.[1]

Durante este trabajo nos dedicaremos la mayoría del tiempo a estudiar estructuras que son álgebras de Banach pero que además tienen una *involución*. Esto es un mapa $* : A \to A$ que verifica:

- Es antilineal. Esto quiere decir que $(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^*$ para todos $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$;
- Se tiene que $(a^*)^*$ para todo $a \in A$;
- Es antimultiplicativa. Esto quiere decir que $(ab)^* = b^* a^*$ para todos $a, b \in A$;
- Es isométrica. Esto quiere decir que $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in A$.

A un álgebra de Banach con una involución le llamaremos *-álgebra de Banach. Una de las dos estructuras que nos dedicaremos a estudiar será de este tipo.

La otra estructura con la que trabajaremos extensamente es lo que se llama una C^*-álgebra: esto es una *-álgebra de Banach que verifica $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$. A esta condición se le llama *C^*-identidad*.

Uno de los ejemplos más básicos de una C^*-álgebra son lo números complejos $\mathbb{C}$, donde la involución en este caso es simplemente la conjugación. Un ejemplo algo más elaborado, dado X un espacio localmente compacto Hausdorff, es

$$C_0(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es continua y } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\},$$

donde $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K^c$. En $C_0(X)$ el producto y la suma son punto a punto, la involución está dada por $f^*(z) = \overline{f(z)}$ y la norma es $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. En este caso, $C_0(X)$ es una C^*-álgebra conmutativa, y tiene unidad si y solamente si X es compacto, en cuyo caso resulta $C_0(X) = C(X)$. Un resultado fundamental, del cual hablaremos más adelante, es que, de hecho, toda C^*-álgebra conmutativa es isomorfa a $C_0(X)$ para algún espacio topológico X localmente compacto Hausdorff esencialmente único, y en particular si A tiene unidad, resulta isomorfa a $C(X)$ para X además compacto.

[1] De hecho, $A^\times$ es un grupo topológico con el producto.

Todos los ejemplos anteriores son de C^*-álgebras conmutativas. El ejemplo básico de una C^*-álgebra que no es conmutativa es el de

$$B(H) = \{ T : H \to H \mid T \text{ es un operador lineal acotado} \},$$

donde H es un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial con un producto interno tal que es completo con la norma inducida por él. En $B(H)$ usamos la norma de operadores $\|T\| = \sup\{\|Tv\| : \|v\| = 1\}$. La involución es simplemente la adjunción de operadores. En este caso, se tiene que $B(H)$ es no conmutativa siempre que la dimensión de H sea mayor a 1. Además, cualquier subálgebra autoadjunta y cerrada respecto a la norma es una C^*-álgebra. Un teorema debido a Gelfand y Naimark en 1943, dice que de hecho toda C^*-álgebra es isomorfa a una C^*-subálgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H. Enunciaremos este teorema dentro de poco.

En una *-álgebra de Banach, diremos que un elemento a es autoadjunto si $a^* = a$, y diremos que es normal si $a^*a = aa^*$. Diremos que un elemento u es unitario si u es invertible y $u^{-1} = u^*$. Se tiene que $\|u\| = 1$ para todo elemento unitario u.

Un homomorfismo $\phi : A \to B$ entre álgebras con involución A, B, a veces llamado *-homomorfismo, es un homomorfismo de álgebras que además preserva la involución, es decir, $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ para todo $a \in A$. En caso de que las álgebras sean normadas, pedimos además que sea continuo. Si $\phi : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras que preserva la involución, y B es una C^*-álgebra, entonces ϕ es automáticamente contractivo, y por lo tanto también es continuo.

La siguiente proposición es una lista de resultados útiles sobre homomorfismos entre *-álgebras.

Proposición 1.8. Sea A una *-álgebra de Banach, y sean B, C dos C^*-álgebras. Se tiene:
(1) Sea $\phi : A \to B$ un *-homomorfismo. Entonces ϕ es contractivo, es decir, $\|\phi\| \leq 1$.
(2) Sea $\varphi : B \to C$ un *-homomorfismo. Entonces φ es inyectivo si y solo si es isométrico. En particular, todo *-isomorfismo entre C^*-álgebras es un isomorfismo isométrico.

Supongamos que I es un ideal cerrado de un álgebra de Banach A. Se tiene que el cociente A/I tiene una estructura natural de álgebra. Podemos normar A/I de la siguiente forma:

$$\|a + I\| = \text{ínf}\,\{\|a - b\| : b \in I\}\,.$$

Con la norma descrita, se tiene que A/I es un álgebra de Banach. Ahora, si A tiene una involución y el ideal I es cerrado bajo esa involución, podemos definir una involución en el cociente de forma natural:

$$(a + I)^* = a^* + I.$$

Con esto, se tiene que el cociente es una *-álgebra de Banach. Para definir adecuadamente tanto la norma como la involución, pedimos que el ideal I sea cerrado y autoadjunto. Si A fuera además una C^*-álgebra, se puede ver que el cociente A/I también lo es. Si bien para definir la involución en el cociente pedimos que el ideal fuera autoadjunto, el próximo teorema muestra que, en el caso de que estemos trabajando con C^*-álgebras, alcanza con pedir que I sea cerrado.

Teorema 1.9. Sea A una C^*-álgebra, y sea I un ideal cerrado. Entonces I es autoadjunto.

El teorema anterior es un ejemplo de las comodidades que ofrece trabajar con una C^*-álgebra, pues en una *-álgebra de Banach pueden existir ideales cerrados que no son autoadjuntos.

En el contexto de *-álgebras de Banach, podemos definir la noción de **-representación*. Esto es, un *-homomorfismo $\pi : A \to B(H)$ de una *-álgebra de Banach al álgebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert H. Observemos que, de acuerdo a la proposición previa, como $B(H)$ es una C^*-álgebra, tenemos que π es automáticamente contractiva y, por tanto, también continua. Toda *-representación es una representación en el sentido de la sección anterior. Diremos que una *-representación es *topológicamente irreducible* si no existen subespacios cerrados no triviales invariantes por $\pi(A)$.

Teorema 1.10 (Gelfand-Naimark). Sea A una C^*-álgebra. Existe una *-representación fiel $\pi : A \to B(H)$, donde H es un espacio de Hilbert.

Hablando de representaciones de *-álgebras de Banach, tenemos entonces dos nociones de irreducibilidad: una algebraica y otra topológica. Es claro que la irreducibilidad algebraica implica la topológica, pero, en general, pueden existir representaciones de una *-álgebra de Banach en espacios de Hilbert que sean topológicamente irreducibles pero no algebraicamente irreducibles. Sin embargo, como indicará el siguiente resultado, eso no puede pasar en el caso de representaciones de C^*-álgebras.

Proposición 1.11. Sea $\pi : A \to B(H)$ una *-representación de una C^*-álgebra en un espacio de Hilbert H. Entonces π es algebraicamente irreducible si y solamente si es topológicamente irreducible.

En una *-álgebra de Banach A, diremos que un funcional lineal ρ es positivo si $\rho(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in A$. Si además A tiene unidad, se tiene que ρ es automáticamente continuo y $\|\rho\| = \rho(1)$. Dados dos funcionales positivos ρ, τ, diremos que ρ domina a τ, y lo denotaremos $\rho \geq \tau$, si $\rho(a^*a) \geq \tau(a^*a)$ para todo $a \in A$.

Diremos que un funcional lineal positivo ρ es un *estado* si es continuo y $\|\rho\| = 1$. Diremos que un estado ρ es *puro* si dado un estado τ tal que $\tau \leq \rho$, entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $t\tau = \rho$.

Sea $S(A)$ el conjunto de estados de una *-álgebra de Banach con unidad A. En primer lugar, $S(A)$ es un subconjunto compacto con la topología débil-* del dual de A. Segundo, es un conjunto convexo, es decir, si tenemos $\rho, \tau \in S(A)$, se tiene que

$$[\rho, \tau] = \{t\rho + (1 - t)\tau : t \in [0, 1]\} \subset S(A).$$

Teniendo esto en cuenta, que un estado sea puro es equivalente a que sea un elemento extremal de $S(A)$. Ahora, como $S(A)$ es un compacto y cerrado, el teorema de Krein-Milman dice que $S(A)$ tiene elementos extremales, es decir, existen estados puros. Denotamos $PS(A)$ al conjunto de estados puros de A.

En el caso de que estemos trabajando con C^*-álgebras, dado un estado puro en una subálgebra, podemos extenderlo a toda el álgebra. Dejamos eso plasmado en el siguiente teorema, pues será usado más adelante.

Teorema 1.12. Sea B una C^*-subálgebra de una C^*-álgebra A, y sea ρ un estado puro de B. Entonces existe ρ' un estado puro de A que extiende a ρ.

3.2. C^*-álgebra envolvente de una *-álgebra de Banach.

Las C^*-álgebras tienen una teoría sumamente rica, la cual se ve reflejada en varios de los resultados que ya mencionamos. La estructura de C^*-álgebra es esencial, pues muchos de estos resultados no valen si trabajamos simplemente con una *-álgebra de Banach. Teniendo esto en cuenta, lo que sigue es una forma de *completar* a una *-álgebra de Banach como una C^*-álgebra, lo que permite sacar provecho de la vasta teoría disponible que estas tienen.

En esta sección, A denotará una *-álgebra de Banach con unidad. Lo que haremos es definir una norma en A, y en base a esa norma construir una C^*-álgebra. Primero veremos que hay varias formas equivalentes de definir estas normas. La primera de ellas es usando los estados de A. Llamemos P a la familia de funcionales lineales positivos de A con norma menor o igual a 1. Definimos

$$\|a\|' = \sup_{\rho\in P} |\rho(a^*a)|^{\frac{1}{2}} = \sup_{\rho\in PS(A)} |\rho(a^*a)|^{\frac{1}{2}},$$

donde se puede ver que el supremo coincide si se toma sobre P o sobre los estados puros. Otra forma de definirla, que da el mismo valor, es usando representaciones de A

$$\begin{aligned}\|a\|' &= \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ es una *-representación}\}\\ &= \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ es una *-representación topológicamente irreducible}\}.\end{aligned}$$

Es decir, para todo $a \in A$ se tiene que los cuatro supremos descritos coinciden. Si $a, b \in A$, se tiene que $\|\cdot\|'$ verifica que

$$\|ab\|' \le \|a\|'\|b\|', \quad \|a\|' = \|a^*\|', \quad \|a^*a\|' = \|a\|'^2,$$

es decir, parece cumplir lo necesario para que A con esa norma sea una C^*-álgebra. Pero $\|\cdot\|'$ no necesariamente es una norma, porque pueden existir $a \in A$ no nulos tales que $\|a\|' = 0$. Consideramos

$$I = \left\{a \in A : \|a\|' = 0\right\},$$

se tiene que I es un ideal cerrado y autoadjunto de A. Luego, $\|\cdot\|'$ es una norma en el cociente A/I, que ahora cumple todos los axiomas de una C^*-álgebra, excepto que no es completa en general. Llamamos *envolvente* C^* a la completación de A/I respecto a $\|\cdot\|'$, y la denotamos $C^*(A)$. Como completamos, se tiene que $C^*(A)$ es una C^*-álgebra. Nos referiremos a la norma $\|\cdot\|'$ como norma C^*.

Observemos una cosa antes de continuar: en caso de que los supremos descritos arriba para definir la norma sean estrictamente positivos para todo elemento a de A, se tiene que el ideal I es nulo. En ese caso se completa directamente A, sin necesidad de pasar al cociente. Tenemos en esta situación que A es denso en $C^*(A)$ con la norma $\|\cdot\|'$. Si bien el argumento que sigue funciona aunque $I \neq \{0\}$, supondremos que I es nulo de todas formas para simplificar la notación, y porque será suficiente para el caso al cual lo aplicaremos más adelante.[2]

En primer lugar, si tenemos una *-representación $\pi : C^*(A) \to B(H)$ en un espacio de Hilbert, es claro que $\pi|_A : A \to B(H)$ es una *-representación de A. Ahora, en caso de que tengamos una *-representación $\pi : A \to B(H)$, recordemos que automáticamente es contractiva (y, por lo tanto, continua), dado que $B(H)$ es una C^*-álgebra. Como A es denso en $C^*(A)$, podemos extender de forma única la representación a $\widetilde{\pi} : C^*(A) \to B(H)$ de $C^*(A)$. En este caso, se tiene que

$$\overline{\ker(\pi)} \subset \ker(\widetilde{\pi}),$$

donde la clausura es respecto a la norma C^*. Tenemos entonces que la teoría de representaciones en espacios de Hilbert de A y $C^*(A)$ se identifican naturalmente.

[2]En caso de que I no fuera nulo, basta con considerar el mapa cociente $q : A \to A/I$, y se tiene que $q(A)$ es denso en $C^*(A)$. Luego los argumentos son análogos a los descritos.

3.3. Dualidad de Gelfand.

La *dualidad de Gelfand* es una teoría que muestra que las C^*-álgebras conmutativas son, en algún sentido, equivalentes a los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff.

Nosotros ya mencionamos que todo espacio localmente compacto Hausdorff X induce una C^*-álgebra conmutativa $C_0(X)$. Es claro que si X es homeomorfo a Y, entonces las C^*-álgebras $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son isomorfas. Lo que nos interesa es saber si, dada una C^*-álgebra conmutativa A, existe algún espacio topológico localmente compacto Hausdorff X tal que A sea isomorfa como C^*-álgebra a $C_0(X)$.

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Denotamos

$$\widehat{A} = \{h : A \to \mathbb{C} \text{ tal que } h \text{ es un homomorfismo de álgebras no nulo}\}.$$

Llamamos caracteres a los elementos de $\widehat{A}$. Se tiene que $\|h\| \leq 1$ para todo $h \in \widehat{A}$, por lo que son continuos, y $\widehat{A}$ resulta estar incluido en el espacio dual a A. Por lo tanto, podemos fijar una topología en $\widehat{A}$ considerando la restricción de la topología débil-* del espacio dual. El *espacio de Gelfand* es justamente el espacio topológico $\widehat{A}$ con la restricción de la topología débil-*.

Ahora, dado un elemento $a \in A$, definimos $\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ dada por $\widehat{a}(h) = h(a)$. Se tiene en este caso que $\widehat{a}$ pertenece a $C_0(\widehat{A})$. Llamamos *transformada de Gelfand* al mapa $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$ dado por $\mathcal{G}(a) = \widehat{a}$.

Teorema 1.13 (Gelfand-Naimark). Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Logramos entonces asignarle naturalmente a una C^*-álgebra conmutativa A el espacio topológico $\widehat{A}$, tal que A es isomorfa a $C_0(\widehat{A})$. Observemos que en caso de que A tenga unidad, como $C_0(\widehat{A})$ también tiene que tener unidad, resulta que $\widehat{A}$ es compacto y $C_0(\widehat{A}) = C(\widehat{A})$. En la otra dirección, si tenemos un espacio topológico compacto Hausdorff, $C_0(X) = C(X)$ resulta tener unidad. Podemos entonces restringir la dualidad de Gelfand a una dualidad entre C^*-álgebras conmutativas con unidad y espacios topológicos compactos Hausdorff.

Durante el texto, trabajaremos con un espacio compacto Hausdorff X y con la C^*-álgebra conmutativa con unidad $C(X)$ que le corresponde. En este caso, tenemos que

$$\widehat{C(X)} = \{\mu_x : C(X) \to \mathbb{C} \text{ tal que } \mu_x(f) = f(x), x \in X\} \cong X.$$

Por último, recordemos que los estados puros de $C(X)$ son exactamente las evaluaciones μ_x descritas arriba.

3.4. Espacios de sucesiones.

Los *espacios de sucesiones* aparecerán en el trabajo más adelante, por lo que los introduciremos con brevedad. Sea $p \in [1, \infty)$. Dada una sucesión $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, consideramos:

$$\|s\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|^p}.$$

Luego, definimos $\ell^p(\mathbb{Z})$ como el conjunto de sucesiones tales que $\|s\|_p < \infty$. Se tiene que $\ell^p(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial con la suma y el producto coordenada a coordenada, y equipándolo con la norma $\|\cdot\|_p$, resulta que es un espacio de Banach.

En particular, cuando $p = 2$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ es también un espacio de Hilbert, con el producto interno $\langle s, s' \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} s_i \overline{s_i'}$, donde s y s' son dos sucesiones en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

El siguiente resultado elemental, que relaciona $\ell^1(\mathbb{Z})$ con $\ell^p(\mathbb{Z})$ cuando $p \in (1, \infty)$, será usado más adelante.

PROPOSICIÓN 1.14. Sea $p \in (1, \infty)$. Entonces $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un subespacio denso de $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Usaremos el siguiente resultado, que no es para nada trivial, sobre posibles isomorfismos como espacios de Banach entre $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^r(\mathbb{Z})$. Este resultado se encuentra en [**16**, Corolario 2.1.6].

PROPOSICIÓN 1.15. Sean $p, r \in [1, \infty)$, con $p \neq r$. Entonces los espacios de Banach $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^r(\mathbb{Z})$ no son isomorfos.

Vale la pena remarcar que una forma de pensar las sucesiones es como funciones $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, es decir, funciones de los enteros a $\mathbb{C}$. Los enteros $\mathbb{Z}$ forman un grupo topológico localmente compacto Hausdorff con la topología discreta, y por lo tanto tienen una medida de Haar μ, es decir, una medida invariante por traslaciones. Como el grupo es discreto, la medida es la medida de conteo, que podemos suponerla normalizada de forma que $\mu(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dada la medida de Haar, tenemos los espacios $L^p(\mathbb{Z}, \mu)$, que son las funciones tales que

$$\left(\int_{\mathbb{Z}} |s(n)|^p \, d\mu(n) \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s(n)|^p} < \infty,$$

es decir, los espacios $L^p(\mathbb{Z}, \mu)$ coinciden con $\ell^p(\mathbb{Z})$. Tenemos por lo tanto una involución en $\ell^p(\mathbb{Z})$ que está determinada por $s_n^* = \overline{s}_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos además el producto de convolución en $L^1(\mathbb{Z}, \mu)$, de donde $\ell^1(\mathbb{Z})$ es una *-álgebra de Banach.

Lo que nos interesa de este enfoque es la *transformada de Fourier*, en particular cuando $p = 1$. Dada $h \in \ell^1(\mathbb{Z}) = L^1(\mathbb{Z}, \mu)$, su transformada de Fourier es una función $\widehat{h} \in C(\mathbb{T})$ dada por

$$\widehat{h}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^n,$$

donde $\mathbb{T}$ denota los números complejos de módulo 1. La transformada de Fourier es el mapa $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ dado por $\mathcal{F}(h) = \widehat{h}$. Usaremos el resultado que sigue.

PROPOSICIÓN 1.16. La transformada de Fourier en $\ell^1(\mathbb{Z})$ es inyectiva.[3]

Por último, de [**20**, Corolario 7.2.3] y [**20**, Teorema 7.1.2], se desprende la proposición siguiente, que utilizaremos más adelante.

PROPOSICIÓN 1.17. Sea C un subconjunto cerrado propio de $\mathbb{T}$. Entonces existe $\phi \in C(\mathbb{T})$, no nula y que se anula en C, tal que $\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ para todo $z \in \mathbb{T}$, con $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en $\ell^1(\mathbb{Z})$.

[3]Más en general, dado un grupo localmente compacto abeliano G, podemos considerar la medida de Haar en él y la transformada de Fourier en $\mathcal{F} : L^1(G, \mu) \to C_0(\widehat{G})$, donde $\widehat{G}$ es el grupo dual de G. Se cumple que en esa situación la transformada de Fourier es inyectiva.

Capítulo 2

Productos cruzados asociados a sistemas dinámicos

En este capítulo introduciremos los dos productos cruzados con los que trabajaremos durante toda la monografía, $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$, donde el primero es una *-álgebra de Banach y el segundo es su envolvente C^*. Son construidos a partir de una sistema dinámico topológico $\Sigma = (X, \sigma)$. Veremos que ambos productos cruzados contienen canónicamente al álgebra de funciones continuas $C(X)$, y estudiaremos el conmutante de $C(X)$ en cada uno de los dos espacios. Por último, probaremos un resultado sobre la intersección de $C(X)$ con ideales cerrados propios de $\ell^1(\Sigma)$.

La referencia principal para este capítulo es [**1**] en lo relativo a $\ell^1(\Sigma)$ y [**6**] para lo relativo a $C^*(\Sigma)$.

1. Preliminares

Sea X un espacio compacto Hausdorff, y sea $\sigma : X \to X$ un homeomorfismo. Esto es suficiente para tener una acción de $\mathbb{Z}$ en X, definiéndola de la forma $n \cdot x = \sigma^n(x)$, es decir, aplicando n veces el homeomorfismo σ. Llamamos a $\Sigma = (X, \sigma)$ un sistema dinámico topológico.

Consideramos $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$ el conjunto de las funciones continuas de X a $\mathbb{C}$. Podemos considerar $\alpha : C(X) \to C(X)$ el automorfismo dado por $\alpha(f) = f \circ \sigma^{-1}$, y con este automorfismo podemos definir la acción de $\mathbb{Z}$ dada por $n \cdot f = \alpha^n(f)$. Tenemos entonces que Σ induce una acción de $\mathbb{Z}$ en $C(X)$.

Definimos el espacio

$$\ell^1(\Sigma) = \left\{ f : \mathbb{Z} \to C(X) : \|f\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|f(k)\|_\infty < \infty \right\},$$

donde $\|\cdot\|_\infty : C(X) \to \mathbb{R}$ denota la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. En $\ell^1(\Sigma)$ definimos el producto dado por

$$(fg)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\alpha^k(g(n-k)).$$

A este tipo de productos se le suele llamar *convolución torcida*, y es usual en el contexto general de productos cruzados. Definimos además una involución en $\ell^1(\Sigma)$ como:

$$f^*(n) = \overline{\alpha^n(f(-n))}.$$

Con la norma descrita se tiene que * es una involución isométrica. Por lo tanto, $\ell^1(\Sigma)$ con las operaciones descritas es una *-álgebra de Banach, porque la norma es submultiplicativa, como es fácil verificar. Describiremos una forma más amigable de trabajar con los elementos de $\ell^1(\Sigma)$. Dado $f \in \ell^1(\Sigma)$, denotamos $f_k = f(k) \in C(X)$. Consideramos $\chi_{\{n\}} : \mathbb{Z} \to C(X)$ dada por:

$$\chi_{\{n\}}(m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

donde 1 y 0 indican las funciones constantes correspondientes a esos valores en X. Con esta definición tenemos que $\chi_{\{0\}}$ es la identidad en $\ell^1(\Sigma)$. Llamemos $\delta = \chi_{\{1\}}$ y $\delta^0 = \chi_{\{0\}}$. Se verifica directamente que $\delta^* = \delta^{-1} = \chi_{\{-1\}}$, y que $\delta^n = \chi_{\{n\}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es con estos elementos que podemos describir de forma más práctica las operaciones de $\ell^1(\Sigma)$: dado $f \in \ell^1(\Sigma)$, llamamos $f_k = f(k) \in C(X)$. En ese caso podemos escribir f de la siguiente forma:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k$$

Este tipo de notación será más práctica, pues los elementos de la forma $f_k\delta^k$ son más cómodos de manipular. Se tiene que

$$(f_n\delta^n)(g_m\delta^m)(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_n\delta^n)(k)\alpha^k((g_m\delta^m)(l-k)),$$

y para que $(f_n\delta^n)(k)$ sea no nulo necesitamos que sea $n = k$. En ese caso el término de la derecha queda $f_n\alpha^n((g_m\delta^m)(l-n))$, y como α es un automorfismo, para que no sea nulo tiene que ser $l - n = m$, o equivalentemente $l = n + m$. Es decir, el producto dará nulo si $l \neq n + m$ y si $l = n + m$ queda $f_n\alpha^n(g_m)$. Podemos concretar todo esto en la siguiente igualdad:

$$(f_n\delta^n)(g_m\delta^m) = f_n\alpha^n(g_m)\delta^{n+m}$$

Podemos pensar a $\ell^1(\Sigma)$ como que tenemos para cada $k \in \mathbb{Z}$ una copia de $C(X)$, la cual será como una fibra parada sobre k, y un elemento $f \in \ell^1(\Sigma)$ está constituido por sus coordenadas $f_k \in C(X)$ en cada fibra k. La suma de elementos es punto a punto y el producto obedece la convolución torcida, que cuando miramos dos elementos $f_n\delta^n$ y $g_m\delta^m$ en las fibras sobre n y m respectivamente, su producto caerá en la fibra $n + m$ y su coordenada será $f_n\alpha^n(g_m) \in C(X)$, es decir, el producto punto a punto de f_n con lo obtenido de hacer actuar n sobre g_m, como indica la igualdad de antes.

Tenemos entonces el espacio $\ell^1(\Sigma)$, una *-álgebra de Banach, que está asociado al sistema dinámico Σ. Nuestro objetivo principal será tratar de ver cómo distintas propiedades dinámicas de Σ se ven reflejadas como propiedades algebraicas en $\ell^1(\Sigma)$. Sin embargo, hay otro espacio, estrechamente relacionado con $\ell^1(\Sigma)$, que se construye en base a Σ y que históricamente ha sido mucho más estudiado, el cual describiremos a continuación.

Mencionamos en el capítulo de preliminares una construcción estándar que, dada una *-álgebra de Banach con unidad, le asocia una C^*-álgebra. Aplicaremos esto a $\ell^1(\Sigma)$. Sea P la familia de funcionales lineales positivos de norma a lo sumo uno en $\ell^1(\Sigma)$, consideramos:

$$\|f\|' = \sup_{\phi \in P} \phi(f^*f)^{\frac{1}{2}}$$

Como dijimos en los preliminares, esto en general define una seminorma en $\ell^1(\Sigma)$, es decir, podríamos tener elementos no nulos con norma 0, y el proceso a seguir sería considerar el ideal formado por estos elementos, pasar al cociente por este ideal y luego completar con respecto a la norma que $\|\cdot\|'$ induce en el cociente. Sin embargo, veremos que en este caso tenemos suficientes funcionales en P de forma de poder evitar pasar al cociente.

Dado $x \in X$ definimos $\phi_x : \ell^1(\Sigma) \to \mathbb{C}$ como:

$$\phi_x\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = f_0(x)$$

De acuerdo a cómo definimos la involución y a la notación que estamos usando, tenemos que:

$$f^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha^k(f_{-k})}\delta^k$$

Luego:

$$\begin{aligned} f^*f &= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha^i(f_{-i})}\delta^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j\delta^j\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(\overline{\alpha^i(f_{-i})}\delta^i\right)(f_j\delta^j) \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \alpha^i\left(\overline{f_{-i}}\right)\alpha^i(f_j)\delta^{i+j} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \alpha^i\left(\overline{f_{-i}}f_j\right)\delta^{i+j} \\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \alpha^{k-j}\left(\overline{f_{j-k}}f_j\right)\delta^k \end{aligned}$$

Tenemos que la coordenada en δ^0 de f^*f es

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^{-j}\left(\overline{f_j}f_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} [\overline{f_j}\circ\sigma^j][f_j\circ\sigma^j] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|f_j\circ\sigma^j\right|^2, \tag{1}$$

de donde

$$\phi_x(f^*f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|f_j(\sigma^j(x))\right|^2 \geq 0$$

Por lo tanto, dado $f \in \ell^1(\Sigma)$ no nulo, se tiene que algún f_j es no nulo, por lo que tomando x_0 tal que $f_j(\sigma^j(x_0))$ sea no nulo obtenemos que $\phi_{x_0}(f^*f) > 0$, de donde $\|f\|'$ resulta estrictamente positivo.

Debido al argumento de arriba, tenemos que $\|\cdot\|'$ resulta ser una norma, por lo que alcanza simplemente con completar para obtener una C^*-álgebra: denotamos $C^*(\Sigma)$ a lo obtenido de este proceso. Por construcción, evidentemente tenemos que $\ell^1(\Sigma)$ es densa en $C^*(\Sigma)$.

Podemos incluir isométricamente $C(X)$ en $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$ de forma canónica, a través del mapa $f \mapsto f\delta^0$; nos referiremos a la imagen de este mapa simplemente como $C(X)$ para no sobrecargar de notación, y de igual manera dado un elemento $f\delta^0$ muchas veces lo escribiremos simplemente como f. Se tiene que $C(X)$ es cerrada en $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$.

Consideramos el mapa $E_1 : \ell^1(\Sigma) \to C(X)$ la proyección canónica de norma uno en $C(X)$ dada por

$$E_1\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = f_0 \in C(X).$$

Se tiene que E_1 es fiel: esto es que si $E_1(f^*f) = 0$, entonces $f = 0$. Esto se debe a que de acuerdo a la ecuación (1), tenemos que

$$E_1(f^*f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j\circ\sigma^j|^2,$$

de donde es claro que si $E_1(f^*f) = 0$, tiene que ser nulo cada f_j, y por lo tanto también debe serlo f.

Veremos en el Capítulo 4 que E_1 puede extenderse a una proyección E_*, de $C^*(\Sigma)$ en $C(X)$, que también tiene norma uno y es fiel. Sin embargo, iremos usando el mapa E_*, y probaremos lo dicho en el capítulo mencionado.

Dados $c \in C^*(\Sigma)$, $f, g \in C(X)$, se verifica que

$$E_*(fcg) = fE_*(c)g.$$

La forma que tendremos de manipular $C^*(\Sigma)$ es a través de los *coeficientes de Fourier generalizados*. La idea es que, como sabemos que $\ell^1(\Sigma)$ es densa en $C^*(\Sigma)$, dado un elemento $c \in C^*(\Sigma)$ queremos proyectarlo sobre cada fibra $C(X)\delta^k$, y luego sumar lo obtenido para recuperar el elemento c. Ya tenemos la proyección E_* en la fibra $C(X)$ sobre δ^0; lo que haremos para obtener la proyección en la k-ésima fibra es mover k fibras para atrás al elemento c, y aplicar E_* :

$$c(k) = E_*(c \cdot \delta^{-k}) \in C(X);$$

llamaremos a $c(k)$ el k-ésimo coeficiente de Fourier generalizado de c. Se tiene que $c = 0$ si y solamente si $c(j) = 0$ para todo j, por lo que un elemento se encuentra determinado de forma única por sus coeficientes de Fourier. Sin embargo, no podemos sumar los elementos $c(k)$ de forma usual dado que eso no necesariamente convergerá a c. Para resolver esto usaremos lo que se conoce como *sumatoria de Cesàro*: definimos las *medias de Cesàro* como

$$\sigma_N^C(c) = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) c(j)\delta^j,$$

y se tiene que las medias de Cesàro convergen a c en la norma de $C^*(\Sigma)$ cuando N tiende a infinito. Dada $f \in C(X)$ y $c \in C^*(\Sigma)$ se verifica que

$$(f \cdot c)(k) = fc(k) \text{ y } (c \cdot f)(k) = (f \circ \sigma^{-k}) \cdot c(k).$$

Los productos cruzados que acabamos de describir, $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$, serán los que estudiaremos en esta monografía. Históricamente, $C^*(\Sigma)$ ha sido ampliamente estudiado, mientras que $\ell^1(\Sigma)$ se ha mantenido menos popular, a pesar de tener una construcción más simple. Sin embargo, veremos que estas dos estructuras comparten gran cantidad de propiedades analítico-algebraicas, las cuales probaremos utilizando el sistema dinámico subyacente a ambos. En este espíritu, le dedicaremos una mayor atención a $\ell^1(\Sigma)$, pero trataremos de en paralelo realizar un estudio de las propiedades correspondientes en $C^*(\Sigma)$.

Por último, introduciremos la *parte algebraica*, que denotaremos $c_{00}(\Sigma)$:

$$c_{00}(\Sigma) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k = 0 \text{ excepto para finitos valores de } k \right\}.$$

Se tiene que $c_{00}(\Sigma)$ es una *-álgebra densa tanto en $\ell^1(\Sigma)$ como en $C^*(\Sigma)$ con sus respectivas normas, por lo que nos será útil a la hora de tratar de trabajar con ambos espacios. En particular, será cómodo para definir funciones en ellos, pues sus elementos son sumas finitas, y en caso de ser continuas, podremos extenderlas a cualquiera de los dos espacios.

2. El conmutante de $C(X)$

Definiremos y caracterizaremos ahora el conmutante de $C(X)$, el cual será una herramienta muy útil en el estudio de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$.

En general, dada una subálgebra conmutativa, su conmutante es lo obtenido de agregarle a la subálgebra todos los elementos del álgebra que conmutan con sus elementos. En nuestro caso, nos interesa hacer eso para $C(X)$, pensada tanto dentro de $\ell^1(\Sigma)$ como de $C^*(\Sigma)$. Lograremos caracterizarla en ambos casos.

DEFINICIÓN 2.1. Definimos los *conmutantes* como:

$$C(X)'_1 = \{ f \in \ell^1(\Sigma) : fg = gf \text{ para todo } g \in C(X) \} \subset \ell^1(\Sigma)$$

$$C(X)'_* = \{ c \in C^*(\Sigma) : cg = gc \text{ para todo } g \in C(X) \} \subset C^*(\Sigma)$$

$C(X)'_1$ es el conmutante de $C(X)$ en $\ell^1(\Sigma)$ y $C(X)'_*$ es el conmutante de $C(X)$ en $C^*(\Sigma)$.

Veamos ahora cómo se caracterizan los conmutantes. Para eso probaremos antes un lema. Recordemos que decimos que un sistema dinámico es topológicamente libre si el conjunto $\text{Aper}(\sigma)$ de los puntos no periódicos es denso en X, y que denotamos $\text{Fix}_n(\sigma)$ a los puntos $x \in X$ tales que $x = \sigma^n(x)$

LEMA 2.2. Σ es topológicamente libre si y solamente si para todo $k \geq 1$ el conjunto $\text{Fix}_k(\sigma)$ tiene interior vacío.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\text{Aper}(\sigma) = \bigcap_{k \geq 1} \text{Fix}_k(\sigma)^c$$

Como los $\text{Fix}_k(\sigma)$ son cerrados, sus complementos son abiertos, por lo que describimos a $\text{Aper}(\sigma)$ como la intersección numerable de los abiertos $\text{Fix}_k(\sigma)^c$. Como X es compacto y Hausdorff, tenemos que es espacio de Baire, por lo que $\text{Aper}(\sigma)$ es denso si y solo si $\text{Fix}_k(\sigma)^c$ es denso para todo $k \geq 1$, y $\text{Fix}_k(\sigma)^c$ es denso si y solamente si $\text{Fix}_k(\sigma)$ tiene interior vacío.

□

TEOREMA 2.3. El conmutante $C(X)'_1$ es el conjunto:

$$C(X)'_1 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k \in \ell^1(\Sigma) : \text{sop}\,(f_k) \subset \text{Fix}_k(\sigma) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Por lo tanto, $C(X) = C(X)'_1$ si y solamente si el sistema dinámico es topológicamente libre.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k \in C(X)'_1$, y $g \in C(X)$. Recordemos que a g lo estamos pensando como el elemento $g\delta^0 \in \ell^1(\Sigma)$. Veamos cuál es la condición para que conmuten. Tenemos:

$$\begin{aligned} gf &= g\delta^0 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g\delta^0)(f_k \delta^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\alpha^0(f_k)\delta^{0+k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g f_k \delta^k \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k \right) g\delta^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_k \delta^k)(g\delta^0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \alpha^k(g)\delta^{k+0} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k [g \circ \sigma^{-k}] \delta^k \end{aligned}$$

Entonces $gf = fg$ si y solamente si para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $gf_k = f_k[g \circ \sigma^{-k}]$, y evaluando en $x \in X$ nos queda que necesitamos

$$g(x)f_k(x) = f_k(x)g(\sigma^{-k}(x))$$

para todo x y para todo k. Luego si $f_k(x) \neq 0$, para que f esté en el conmutante necesitamos que

$$g(x) = g(\sigma^{-k}(x)) \text{ para todo } g \in C(X).$$

Dado que $C(X)$ separa puntos, tiene que ser $x = \sigma^{-k}(x)$, es decir, $x \in \mathrm{Fix}_k(\sigma)$, por lo que cada f_k está soportada en $\mathrm{Fix}_k(\sigma)$.

Es claro que si $\mathrm{sop}\,(f_k) \subset \mathrm{Fix}_k(\sigma)$ para todo entero k, entonces $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ pertenece a $C(X)'_1$: si $g \in C(X)$, nos queda que $g(x)f_k(x) = f_k(x)g(\sigma^{-k}(x))$, dado que da 0 de ambos lados si $x \notin \mathrm{Fix}_k(\sigma)$, o $g(x) = g(\sigma^{-k}(x))$ si $x \in \mathrm{Fix}_k(\sigma)$.

Teniendo la descripción de $C(X)'_1$ y el lema previo, tenemos la siguiente parte del teorema: si Σ es topológicamente libre, todos los $\mathrm{Fix}_k(\sigma)$ tienen interior vacío, por lo que cualquier función soportada en ellos es idénticamente nula, de donde cualquier $f \in C(X)'_1$ verifica que $f_k = 0$ para todo $k \neq 0$ (recordemos que $\mathrm{Fix}_k(\sigma) = \mathrm{Fix}_{-k}(\sigma)$); luego $C(X) = C(X)'_1$.

Por otro lado, si Σ no es topológicamente libre, existe $k_0 \geq 1$ tal que $\mathrm{Fix}_{k_0}(\sigma)$ tiene interior no vacío. Luego tenemos $f_{k_0} \in C(X)$ soportada en el $\mathrm{Fix}_{k_0}(\sigma)$, y resulta que $f_{k_0}\delta^{k_0}$ pertenece al conmutante, por lo que $C(X)'_1 \neq C(X)$.

□

Observación 2.4. En la demostración anterior vimos lo siguiente: $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ pertenece al conmutante si y solo si para toda $g \in C(X)$ se tiene que $gf_k = \alpha^k(g)f_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Volveremos a utilizar esto dentro de poco.

El resultado correspondiente a la versión C^* es el siguiente:

Teorema 2.5. *El conmutante $C(X)'_*$ es el conjunto:*

$$C(X)'_* = \{\, a \in C^*(\Sigma) : \mathrm{sop}\,(a(k)) \subset \mathrm{Fix}_k(\sigma) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \,\}$$

Por lo tanto, $C(X) = C(X)'_*$ si y solamente si el sistema dinámico es topológicamente libre.

Demostración. Sabemos que en $C^*(\Sigma)$ los elementos están determinados por sus coeficientes de Fourier generalizados, por lo que usaremos esto para hacer un argumento del mismo tipo que el del teorema anterior. Sean $f \in C(X)$ y $a \in C^*(\Sigma)$, sus coeficientes de Fourier son:

$$(fa)(n) = f \cdot a(n), \text{ y } (af)(n) = a(n) \cdot f \circ \sigma^{-n}$$

Luego $fa = af$ si y solamente si $fa(n) = a(n)f \circ \sigma^{-n}$ para todo n. Esta situación es idéntica a la de la demostración del teorema anterior, por lo que repitiendo el argumento obtenemos el resultado.

□

Observación 2.6. Al igual que vimos en la última observación, durante la demostración anterior se ve que $a \in C(X)'_*$ si y solo si para toda $f \in C(X)$ se tiene que $fa(n) = \alpha^k(f)a(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 2.7. Si $f \in C(X)$ es tal que $\mathrm{sop}\,(f) \subset \mathrm{Fix}_k(\sigma)$, se tiene que $\alpha^k(f) = f$:

- Si $x \in \mathrm{Fix}_k(\sigma)$ entonces $\alpha^k(f)(x) = f(\sigma^{-k}(x)) = f(x)$;

- Si $x \notin \mathrm{Fix}_k(\sigma)$, entonces $\sigma^{-k}(x)$ tampoco pertenece a $\mathrm{Fix}_k(\sigma)$, por lo que $f(x) = 0$ y también $f(\sigma^{-k}(x)) = 0$.

En particular, aplicando a esto a la caracterización de los conmutantes, obtenemos que si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ está en $C(X)'_1$, se tiene que $\alpha^k(f_k) = f_k$, y si $a \in C(X)'_*$, entonces $\alpha^k(a(k)) = a(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Veremos ahora que además se tiene que los conmutantes son abelianos y, por lo tanto, también tienen que ser subálgebras abelianas maximales.

Proposición 2.8. El conmutante $C(X)'_1$ es abeliano. Por lo tanto, es la mayor subálgebra abeliana de $\ell^1(\Sigma)$ que contiene a $C(X)$.

Demostración. Suponiendo que el conmutante es abeliano, tiene que ser la mayor subálgebra abeliana que contiene a $C(X)$, dado que cualquier elemento de una subálgebra abeliana que contiene a $C(X)$ tiene que, por definición, pertenecer a $C(X)'_1$. Por lo tanto, tenemos solo que probar que es abeliana.

Tomemos dos elementos $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i$ y $g = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\delta^j$ ambos en $C(X)'_1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\delta^j\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i g_j\delta^j \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_i\alpha^i(g_j)\delta^{i+j} = \sum_{i,k\in\mathbb{Z}} f_i\alpha^i(g_{k-i})\delta^k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\alpha^i(g_{k-i})\right)\delta^k \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos:

$$gf = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\alpha^j(f_{k-j})\right)\delta^k$$

Por lo tanto, $fg = gf$ si para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\alpha^i(g_{k-i}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\alpha^j(f_{k-j})$$

Por la Observación 2.4, como f está en el conmutante tenemos que $f_i\alpha^i(g_{k-i}) = f_i g_{k-i}$. De igual manera, como g está en el conmutante tenemos que $g_j\alpha^j(f_{k-j}) = g_j f_{k-j}$. Luego tenemos

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\alpha^i(g_{k-i}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i g_{k-i} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j f_{k-j} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\alpha^j(f_{k-j}),$$

por lo que f y g conmutan.

□

Probemos ahora el resultado correspondiente para $C(X)'_*$ en $C^*(\Sigma)$.

Proposición 2.9. El conmutante $C(X)'_*$ es abeliano. Por lo tanto, es la mayor subálgebra abeliana de $C^*(\Sigma)$ que contiene a $C(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Que es la mayor subálgebra abeliana que contiene a $C(X)$ es el mismo argumento que utilizamos en la parte anterior. Para probar que es abeliana utilizaremos las medias de Cesàro que mencionamos en los preliminares.

Sean $a, b \in C'_*(X)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_n^C(a)\sigma_n^C(b) &= \left(\sum_{i=-n}^{n}\left(1-\frac{|i|}{n+1}\right)a(i)\delta^i\right)\left(\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)b(j)\delta^j\right)\\ &= \sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|i|}{n+1}\right)a(i)\delta^i\cdot\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)b(j)\delta^j\\ &= \sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|i|}{n+1}\right)\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)a(i)\alpha^i(b(j))\delta^{i+j}\\ &= \sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|i|}{n+1}\right)\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)a(i)b(j)\delta^{i+j},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que, como b pertenece al conmutante, se tiene que $a(i)\alpha^i(b(j)) = a(i)b(j)$. Análogamente, calculamos:

$$\sigma_n^C(b)\sigma_n^C(a) = \sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|i|}{n+1}\right)\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)b(i)a(j)\delta^{i+j},$$

por lo que tenemos $\sigma_n^C(a)\sigma_n^C(b) = \sigma_n^C(b)\sigma_n^C(a)$ para todo n. Tomando límite en n en la norma de $C^*(\Sigma)$ obtenemos que $ab = ba$.

□

2.1. Resultados técnicos.

Nuestro próximo objetivo será probar la siguiente propiedad: para todo ideal no nulo y cerrado I de $\ell^1(\Sigma)$ se tiene que $C(X)'_1 \cap I \neq \{0\}$.

Antes de poder lograr esto tendremos que demostrar algunos resultados técnicos.

LEMA 2.10. Sea $x \in X$ tal que $x \in \mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y $x \neq \sigma^k(x)$ para algún $n \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. Existen un entorno abierto U de x incluido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y una función $g \in C(X)$ tal que g vale 1 en U y se tiene que

$$g(y)\overline{g}\left(\sigma^{-k-jn}(y)\right) = i \in \mathbb{C} \text{ para todo } y \in U, j \in \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $x \neq \sigma^{-k}(x)$, por lo que existen dos entornos abiertos U y U' de x y $\sigma^{-k}(x)$ respectivamente, y cerrados disjuntos C y C', tales que $U \subset C$ y $U' \subset C'$. Podemos suponer que $U \subset \mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y $\sigma^{-k}(U) \subset C'$ cambiando U por $U \cap \mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$, y luego por $U \cap \sigma^k(U')$.

Por el lema de Urysohn, tenemos que existe una función $\widetilde{g} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{g}$ vale 1 en C' y vale 0 en C. Luego si definimos

$$g = \exp\left(\frac{-i\pi\widetilde{g}}{2}\right)$$

cumple lo que buscamos.

□

Observación 2.11. La función g obtenida en el lema anterior es *unimodular*. Esto quiere decir que la imagen de g está contenida en $\mathbb{T}$. En particular, esto implica que $g\overline{g} = 1$.

La siguiente proposición, si bien es sumamente técnica, tiene el siguiente objetivo: a partir de un elemento $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i \in \ell^1(\Sigma)$, llegar a otro elemento f', a través de productos y sumas finitas, tal que algunas de sus coordenadas se anulen en un entorno abierto, pero su coordenada en δ^0 no cambie.

Proposición 2.12. Sean $x \in X$ y $n \geq 0$ tales que $x \in \mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$. Supongamos que para algún $N \geq 1$ existen $k_1, \cdots, k_N \in \mathbb{Z}$ tales que los puntos $\sigma^{k_1}(x), \ldots, \sigma^{k_N}(x)$ son todos diferentes de x. Entonces existen un entorno abierto U de x contenido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y funciones unimodulares $\theta_1, \cdots, \theta_{2^N} \in C(X)$ con la siguiente propiedad: si $f = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\delta^s \in \ell^1(\Sigma)$, consideramos

$$f' = \frac{1}{2^N}\sum_{l=1}^{2^N} \theta_l f \overline{\theta_l};$$

entonces:

1. $f'_0 = f_0$;
2. $f'_{k_l+jn}(y) = 0$ para todo $y \in U, l = 1, \ldots, N$ y $j \in \mathbb{Z}$;

donde los f'_s son los de la descomposición de $f' = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f'_s\delta^s$ en $\ell^1(\Sigma)$.

Demostración. Probaremos el resultado por inducción en N. Realizaremos antes un cálculo que nos será de utilidad en la prueba: sea $f = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\delta^s$, tenemos, para $g \in C(X)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(gf\overline{g} + \overline{g}fg\right) &= \frac{1}{2}\left(g\left[\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\delta^s\right]\overline{g} + \overline{g}\left[\sum_{t\in\mathbb{Z}} f_t\delta^t\right]g\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} gf_s\alpha^s(\overline{g})\delta^s + \sum_{t\in\mathbb{Z}} \overline{g}f_t\alpha^t(g)\delta^t\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\left[g\left(\overline{g}\circ\sigma^{-s}\right) + \overline{g\left(\overline{g}\circ\sigma^{-s}\right)}\right]\right)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\mathrm{Re}\left(g\left(\overline{g}\circ\sigma^{-s}\right)\right)\delta^s,
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{Re}(z)$ indica la parte real de z. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\left(gf\overline{g} + \overline{g}fg\right) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\mathrm{Re}\left(g\left(\overline{g}\circ\sigma^{-s}\right)\right)\delta^s \tag{2}$$

Para $N = 1$, tenemos $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma^{k_1}(x)$ es distinto de x. Aplicando el lema anterior obtenemos un abierto U de x incluido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y una función unimodular $g \in C(X)$ tal que para todo $y \in U$ se tiene que:

$$g(y)\overline{g}(\sigma^{-k_1-jn}(y)) = i \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $\theta_1 = g$, $\theta_2 = \overline{g}$, usando (1) queda

$$f' = \frac{1}{2}\left(\theta_1 f\overline{\theta_1} + \theta_2 f\overline{\theta_2}\right) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s\mathrm{Re}\left(g\left(\overline{g}\circ\sigma^{-s}\right)\right)\delta^s,$$

Luego $f'_0 = f_0$ porque g es unimodular, y si $y \in U$, $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'_{k_1+jn}(y) &= f_{k_1+jn}(y)\mathrm{Re}\left(g(y)\overline{g}\left(\sigma^{-k_1-jn}(y)\right)\right) \\ &= f_{k_1+jn}(y)\mathrm{Re}(i) = 0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que vale para $N-1$. Tenemos $\sigma^{k_1}(x), \dots, \sigma^{k_N}(x)$ todos distintos de x. Por hipótesis inductiva tenemos que existen funciones unimodulares $\widetilde{\theta}_1, \dots, \widetilde{\theta}_{2^{N-1}} \in C(X)$ y un entorno abierto $\widetilde{U}$ de x incluido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ tales que si

$$\widetilde{f} = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{l=1}^{2^{N-1}} \widetilde{\theta}_l f \overline{\widetilde{\theta}_l} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \widetilde{f}_i \delta^i,$$

entonces:

1. $\widetilde{f}_0 = f_0$;
2. $\widetilde{f}_{k_l+jn}(y) = 0$ para todo $y \in \widetilde{U}, l = 1, \dots, N-1, j \in \mathbb{Z}$.

Como x es distinto de $\sigma^{k_N}(x)$, aplicando el lema obtenemos un entorno abierto V de x incluido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ y una función unimodular $g \in C(X)$ que vale 1 en V, tal que para todo $y \in V$ se tiene que $g(y)\overline{g}\left(\sigma^{-k_N-jn}(y)\right) = i$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(g\widetilde{f}\overline{g} + \overline{g}\widetilde{f}g\right) &= \frac{1}{2}\left(g\left[\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{l=1}^{2^{N-1}} \widetilde{\theta}_l f \overline{\widetilde{\theta}_l}\right]\overline{g} + \overline{g}\left[\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{l=1}^{2^{N-1}} \widetilde{\theta}_l f \overline{\widetilde{\theta}_l}\right]g\right) \\ &= \frac{1}{2^N}\left(\sum_{l=1}^{2^{N-1}}\left(g\widetilde{\theta}_l\right) f \overline{\left(g\widetilde{\theta}_l\right)} + \sum_{l=1}^{2^{N-1}}\left(\overline{g}\widetilde{\theta}_l\right) f \overline{\left(\overline{g}\widetilde{\theta}_l\right)}\right) \end{aligned}$$

Definiendo $\theta_l = g\widetilde{\theta}_l$ y $\theta_{l+2^{N-1}} = \overline{g}\widetilde{\theta}_l$ para $l = 1, \dots, 2^{N-1}$, el lado de la derecha de la igualdad es

$$f' = \frac{1}{2^N}\sum_{l=1}^{2^N} \theta_l f \overline{\theta_l};$$

por otro lado, usando nuevamente (1), el lado izquierdo de la igualdad queda

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} \widetilde{f}_s \mathrm{Re}\left(g\left(\overline{g} \circ \sigma^{-s}\right)\right)\delta^s.$$

Si tomamos $U = \widetilde{U} \cap V$, se cumple lo que buscamos:

1. Tenemos $f'_0 = \widetilde{f}_0 \mathrm{Re}\left(g\overline{g}\right) = \widetilde{f}_0 = f_0$ dado que g es unimodular;
2. Si $l = 1, \dots, N-1, j \in \mathbb{Z}, y \in U$, tenemos:
$$f'_{k_l+jn}(y) = \widetilde{f}_{k_l+jn}(y)\mathrm{Re}\left(g(y)\overline{g}\left(\sigma^{-k_l-jn}(y)\right)\right) = 0$$
dado que $\widetilde{f}_{k_l+jn}(y) = 0$;
3. Si $l = N, j \in \mathbb{Z}, y \in U$, tenemos:
$$\begin{aligned} f'_{k_N+jn}(y) &= \widetilde{f}_{k_N+jn}(y)\mathrm{Re}\left(g(y)\overline{g}\left(\sigma^{-k_N-jn}(y)\right)\right) \\ &= \widetilde{f}_{k_N+jn}(y)\mathrm{Re}(i) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Observemos que si el n de la proposición es 1, x sería un punto fijo de σ, por lo que sería el único elemento de su órbita; en particular, no podremos aplicar la proposición dado que $\sigma^k(x) = x$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Además, en caso de tener que la órbita de x no consiste de un solo punto (lo cual ocurre por ejemplo si $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$), podemos aplicarlo para $x \in \mathrm{Fix}_0(\sigma)^\circ = X$, y en ese caso obtenemos un entorno abierto de U de x donde se tiene que vale lo de la proposición.

El principal valor de la proposición anterior recae en que, si tomamos f en un ideal, el f' obtenido sigue perteneciendo al mismo ideal. Esto nos permite, dado un elemento de un ideal, obtener otro tal que determinados coeficientes se anulan en un entorno de x, lo que nos será de utilidad para buscar elementos del ideal que pertenezcan al conmutante. Utilizaremos múltiples veces este resultado en la sección que sigue.

2.2. Ideales principales en $\ell^1(\Sigma)$.

Superado el trabajo técnico, usaremos lo obtenido para estudiar en primer lugar cómo interactúa el conmutante con los ideales principales. Recalcamos que no asumimos que los ideales considerados sean cerrados a menos que digamos explícitamente lo contrario.

Proposición 2.13. Sea $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ell^1(\Sigma)$ tal que $f_k(x) \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$ con $n \geq 1$. Entonces el ideal generado por f en $\ell^1(\Sigma)$ tiene intersección no nula con $C(X)'_1$.

Demostración. Observemos que podemos suponer que el coeficiente en δ^0 de f es no nulo dado que $f\delta^{-k}$ está en el ideal generado por f. En este caso tenemos que $f_0(x) \neq 0$.

Si $n \geq 2$, como $x \in \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$ tenemos que los $\sigma^i(x)$ son todos distintos entre sí para $i = 0, \ldots, n-1$. Usando la Proposición 2.12 obtenemos U entorno de x contenido en $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$, y un elemento f' en el ideal generado por f que verifica:

1. $f'_0 = f_0$
2. $f'_{i+jn}(y) = 0$ para todo $y \in U, j \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Intersectando con $\mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$, podemos además suponer que $U \subset \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$. Sea $\varphi \in C(X)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, está soportada en U y $\varphi(x) = 1$. Tomamos $\widetilde{f} = \varphi f'$, que pertenece al ideal generado por f. Se tiene que $\widetilde{f_i} = \varphi f'_i$, y, como φ está soportada en U, resulta que $\widetilde{f_i} = 0$ si i no es múltiplo de n. Para los $\widetilde{f_{jn}}$, se tiene que

$$\mathrm{sop}\left(\widetilde{f_{jn}}\right) \subset \mathrm{sop}\,(\varphi) \subset U \subset \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ \subset \mathrm{Fix}_{jn}(\sigma),$$

por lo que por el Teorema 2.3 podemos concluir que $\widetilde{f} \in C(X)'_1$.

Resta ver qué pasa si $n = 1$. En este caso, x es un punto interior del conjunto de puntos fijos. Basta con tomar $U = \mathrm{Per}_1(\sigma)^\circ$ y φ soportada en U, con $0 \leq \varphi \leq 1$. Como $\mathrm{Per}_1(\sigma)^\circ \subset \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ para todo n, resulta que φf es un elemento del ideal generado por f que pertenece a $C(X)'_1$.

$\square$

Supongamos que tenemos I un ideal que verifica que $I \cap C(X)'_1 = \{0\}$, y sea $f \in I$. De la proposición anterior no puede ser que $f_k(x) \neq 0$ para ningún $x \in \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$. Luego, por continuidad f_k tiene que anularse en $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ}$. Como esto vale para todo $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.14. Sea I un ideal de $\ell^1(\Sigma)$ tal que $I \cap C(X)_1' = \{0\}$. Entonces para todo $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in I$ se tiene que $f_k(x) = 0$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ}$.

Hay múltiples ejemplos en los cuales el conjunto $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ}$ es todo el espacio X. Por ejemplo, las rotaciones racionales verifican que todos los puntos son periódicos, por lo que en particular son densos. En este caso, lo que el corolario anterior nos está diciendo es que todo ideal de $\ell^1(\Sigma)$ con intersección nula con $C(X)_1'$ verifica que cualquier elemento en él tiene todas las coordenadas nulas, es decir, el ideal tiene que ser nulo. En otras palabras, tenemos que todo ideal, sin importar si es cerrado o no, tiene intersección no nula con el conmutante $C(X)_1'$.

Sin embargo, no podemos concluir tanto en caso de que, por ejemplo, el conjunto de puntos no periódicos tenga interior no vacío. Resolveremos ese problema en lo que sigue, pero para el caso de ideales cerrados. Antes de eso, mencionaremos un resultado general sobre la minimalidad de la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(X)$ con respecto a cualquier otra norma que haga que sea un álgebra normada.

Proposición 2.15. Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma tal que $C(X)$ es un álgebra normada, entonces $\|f\|_\infty \leq \|f\|$ para toda $f \in C(X)$.

La proposición anterior puede verse como consecuencia de [**17**, Teorema 1.2.4].

Proposición 2.16. Sea I un ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ tal que $I \cap C(X)_1' = \{0\}$. Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in I$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ se tiene que $f_k(x) = 0$.

Demostración. Como I es un ideal cerrado, podemos considerar el cociente $\ell^1(\Sigma)/I$, que es un álgebra de Banach con la norma

$$\|f + I\| = \inf_{i\in I} \|f + i\|.$$

Sea $q : \ell^1(\Sigma) \to \ell^1(\Sigma)/I$ el mapa cociente $f \mapsto f + I$. Dado que $I \cap C(X)_1' = \{0\}$, en particular tenemos que $I \cap C(X) = \{0\}$, por lo que q es inyectiva en $C(X)$. Tenemos entonces a $C(X)$ incluida en $\ell^1(\Sigma)/I$ como $q(C(X))$, por lo que $\|g\|' = \|q(g)\|$ resulta una norma en $C(X)$, y, por la proposición anterior, $\|q(g)\| \geq \|g\|_\infty$. Pero además, por cómo está definida la norma en $\ell^1(\Sigma)/I$, q es contractivo, por lo que tiene que ser $\|q(g)\| = \|g\|_\infty$ para todo $g \in C(X)$, es decir, q es una isometría en $C(X)$.

Tomemos $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in I$, $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$. Queremos probar que $f_k(x) = 0$ para todo k, pero como $f\delta^{-k}$ está en el ideal, alcanza con probar que $f_0(x) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos

$$b = \sum_{i=-n}^{-1} f_i\delta^i + \sum_{i=1}^{n} f_i\delta^i$$

tal que $\|f - (b + f_0)\| < \varepsilon$; es decir, podemos escribir $f = f_0 + b + c$, con $\|c\| < \varepsilon$. Como $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$, los puntos $\sigma^i(x)$ con $i = -n, \cdots, n$ son todos distintos entre sí, por lo que podemos aplicar la Proposición 2.12 y obtenemos un abierto U de x y funciones unimodulares $\theta_1, \cdots, \theta_M \in C(X)$ que valen 1 en U. Además podemos tomar $\varphi \in C(X)$ soportada en U con

$0 \leq \varphi \leq 1$. Consideramos

$$\begin{aligned}\widetilde{f} &= \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l f\overline{\theta_l} = \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l(f_0+b+c)\overline{\theta_l}\\ &= \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l f_0\overline{\theta_l} + \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l b\overline{\theta_l} + \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l c\overline{\theta_l}\\ &= \varphi f_0 + \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l c\overline{\theta_l},\end{aligned}$$

donde, por un lado, el término correspondiente a f_0 queda de esa forma debido a que las funciones θ_l son unimodulares. Por otro lado, el término correspondiente a b desaparece, dado que si denotamos

$$b' = \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\theta_l b\overline{\theta_l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b'_k\delta^k,$$

tenemos que b'_k puede ser no nula solamente para $k=-M,\cdots,-1$ y para $k=1,\cdots,M$, y, de acuerdo a la Proposición 2.12, para esos valores de k se tiene que b'_k se anula en U. Finalmente, como φ está soportada en U, podemos concluir que $\varphi b'$ tiene que ser 0, es decir, que efectivamente desaparece el término.

Ahora, si llamamos $\widetilde{c}$ a $\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M}\varphi\theta_l c\overline{\theta_l}$, queda escrito $\widetilde{f} = \varphi f_0 + \widetilde{c}$. Recordemos que, como φ vale 1 en x, se tiene que $\widetilde{f_0}(x) = f_0(x)$.

Como tomamos a f en I tenemos que $\widetilde{f}$ también está en I, por lo que $q(\widetilde{f}) = 0$. Luego $q(\varphi f_0) = -q\,(\widetilde{c})$. Como las θ_l son unimodulares, tenemos que

$$\|\widetilde{c}\| \leq \|\varphi\|_\infty\|c\| \leq \|c\| < \varepsilon.$$

Finalmente:

$$|f_0(x)| = |\varphi(x)f_0(x)| \leq \|\varphi f_0\|_\infty = \|q(\varphi f_0)\| = \|q(\widetilde{c})\| \leq \|\widetilde{c}\| < \varepsilon,$$

donde estamos usando que q es contractiva y que es isométrica en $C(X)$. Como ε era arbitrario, resulta $f_0(x) = 0$.

□

Probaremos un último lema topológico antes de demostrar el resultado objetivo de esta sección.

Lema 2.17. El siguiente conjunto es denso en X:

$$\mathrm{Aper}(\sigma) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ.$$

Demostración. Supongamos que no es denso. Podemos considerar

$$Y = \overline{\mathrm{Aper}(\sigma) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ}^{\,c},$$

que es un abierto no vacío de X. Todos los puntos de Y tienen que ser puntos periódicos no interiores a $\mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$ para ningún n. Por lo tanto:

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \cap \partial \mathrm{Per}_n(\sigma))$$

Pero tenemos que un conjunto con interior no vacío es unión numerable de los conjuntos $Y \cap \partial \mathrm{Per}_n(\sigma)$, que son cerrados con interior vacío, lo que contradice que estemos en un espacio de Baire.

□

Finalmente, si I es un ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ que verifica que $I \cap C(X)'_1 = \{0\}$ y $f \in I$, tiene que ser:

- $f_k(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$;
- $f_k(x) = 0$ para todo $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)^\circ$.

Como por el lema anterior la unión de esos dos conjuntos es densa en X, por continuidad tiene que ser $f_k = 0$. Dado que esto vale para todo k, tiene que ser $f = 0$. Esto nos permite finalmente concluir el teorema que buscábamos.

Teorema 2.18. Se tiene que $I \cap C(X)'_1 \neq \{0\}$ para todo ideal I cerrado y no nulo de $\ell^1(\Sigma)$.

Capítulo 3

Diccionario dinámico-algebraico en $\ell^1(\Sigma)$

El objetivo de esta capítulo es establecer un diccionario entre las propiedades dinámicas de Σ y las propiedades analítico-algebraicas de $\ell^1(\Sigma)$. Introduciremos dos familias de representaciones que serán herramientas fundamentales para probar las equivalencias del diccionario. Con estas representaciones al alcance, probaremos los siguientes resultados: la libertad topológica de Σ equivale a la maximalidad de $C(X)$ como subálgebra abeliana de $\ell^1(\Sigma)$; la minimalidad de Σ equivale a la simplicidad de $\ell^1(\Sigma)$; y, por último, la transitividad de Σ equivale a la primalidad de $\ell^1(\Sigma)$. Podremos determinar además cuándo es que todo ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ es autoadjunto.

La referencia que seguiremos este capítulo es [**1**].

1. Representaciones de $\ell^1(\Sigma)$

Definiremos algunas *-representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ en espacios de Hilbert, que serán herramientas de utilidad para seguir avanzando. Más adelante haremos un estudio un poco más sistemático sobre las representaciones de $\ell^1(\Sigma)$, pero por ahora simplemente definiremos algunas representaciones que serán de utilidad para continuar trabajando en este capítulo.

Dados $x \in \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ y $\lambda \in \mathbb{T}$, definiremos una representación $\pi_{x,n,\lambda} : \ell^1(\Sigma) \to B(H_n)$, donde H_n es el espacio de Hilbert de dimensión n con base ortonormal $\{e_i\}_{i=0}^{n-1}$. En primer lugar, la acción de δ estará dada por $\pi_{x,n,\lambda}(\delta)e_i = e_{i+1}$ si $i = 0, \cdots, n-2$, y $\pi_{x,n,\lambda}(\delta)e_{n-1} = \lambda e_0$, y la acción de $f \in C(X)$ por $\pi_x(f)e_i = f(\sigma^i x)e_i$. Extendiendo queda:

$$\pi_{x,n,\lambda}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi_{x,n,\lambda}(f_k)\pi_{x,n,\lambda}(\delta)^k$$

Observemos que se tiene que $\pi_{x,n,\lambda}(\delta)^n = \lambda Id$. Usaremos esto repetidamente a lo largo del texto.

Ahora, dado $x \in X$ cualquiera, queremos definir una representación $\pi_x : \ell^1(\Sigma) \to B(H)$, donde H es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. La acción de δ estará determinada por $\pi_x(\delta)e_i = e_{i+1}$, y la acción de $f \in C(X)$ por $\pi_x(f)e_i = f(\sigma^i x)e_i$. En un elemento arbitrario queda:

$$\pi_x\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi_x(f_k)\pi_x(\delta)^k$$

Para confirmar que estas representaciones se pueden definir correctamente, basta con definirlas en $c_{00}(\Sigma)$ y observar que son contractivas, por lo que podemos extenderlas a $\ell^1(\Sigma)$ con las fórmulas indicadas.

2. Libertad topológica contra maximalidad de $C(X)$

La libertad topológica es una propiedad topológica con la que ya nos cruzamos en el capítulo anterior, donde probamos que equivale a la maximalidad de $C(X)$ en $\ell^1(\Sigma)$ como subálgebra abeliana. Probaremos ahora que es equivalente a otras propiedades de $\ell^1(\Sigma)$ relacionadas con su estructura de ideales, que seguirá el espíritu de la propiedad de intersección del conmutante ya vista, de la cual nos serviremos durante la demostración.

TEOREMA 3.1. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) $I \cap C(X) \neq \{0\}$ para todo ideal no nulo cerrado de $\ell^1(\Sigma)$;
(2) $I \cap C(X) \neq \{0\}$ para todo ideal no nulo cerrado y autoadjunto de $\ell^1(\Sigma)$;
(3) $C(X)$ es una subálgebra abeliana maximal de $\ell^1(\Sigma)$;
(4) Σ es topológicamente libre.

DEMOSTRACIÓN. Que (1) implica (2) es obvio. En el Teorema 2.3 vimos que (3) es equivalente a (4). Probaremos que (2) implica (4) y que (4) implica (1).

Supongamos que Σ no es topológicamente libre. Entonces existe n_0 tal que $\mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$ tiene interior no vacío. Podemos tomar $f \in C(X)$ tal que $\mathrm{sop}\,(f) \subset \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$. Sea I el ideal cerrado y autoadjunto generado por $f - f\delta^{n_0}$. Queremos probar que $I \cap C(X) = \{0\}$, contradiciendo (2).

Sea $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)^c$, y consideremos la representación $\pi_x : \ell^1(\Sigma) \to B(H)$ descrita en la sección anterior, con $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ base ortonormal del espacio de Hilbert H. Como π es una *-representación, si se anula en $f - f\delta^{n_0}$, entonces se anula en todo I. Se tiene

$$\begin{aligned}\pi_x\left(f - f\delta^{n_0}\right) e_i &= \pi_x(f)e_i - \pi_x(f)\pi_x(\delta)^{n_0}e_i \\ &= f(\sigma^i x)e_i - f(\sigma^{i+n_0}x)e_{i+n_0}.\end{aligned}$$

Como $x \notin \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$, toda su órbita se mantiene fuera de $\mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$, y como f está soportada ahí resulta $f(\sigma^i x) = 0$ y $f(\sigma^{i+n_0}x) = 0$, de donde tenemos que $\pi_x(f - f\delta^{n_0}) = 0$ por anularse en un una base ortornomal de H. Por lo tanto, π_x se anula en I para todo $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)^c$.

Veamos ahora qué pasa si $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$. En este caso, consideramos la representación $\pi_{x,n_0,1} : \ell^1(\Sigma) \to B(H_{n_0})$, con $\{e_i\}_{i=0}^{n_0-1}$ base ortonormal de H_{n_0}. Se tiene que $\pi_{x,n_0,1}(\delta)^{n_0} = Id$. Tenemos

$$\pi_{x,n_0,1}(f - f\delta^{n_0}) = \pi_{x,n_0,1}(f) - \pi_{x,n_0,1}(f)\pi_{x,n_0,1}(\delta)^{n_0} = 0,$$

de donde podemos concluir que $\pi_{x,n_0,1}$ se anula en I, para todo $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$.

Sea $g \in I \cap C(X)$. Si $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)^c$, tenemos

$$0 = \pi_x(g)e_0 = g(x)e_0,$$

de donde $g(x) = 0$. Por otro lado, si $x \in \mathrm{Fix}_{n_0}(\sigma)$, se tiene que

$$0 = \pi_{x,n_0,1}(g)e_0 = g(x)e_0,$$

de donde $g(x)$ también se anula. Por lo tanto, tenemos $g(x) = 0$ para todo x, es decir, $I \cap C(X) = \{0\}$. Esto prueba que (2) implica (4).

Resta ver que (4) implica (1). Supononiendo que Σ es topológicamente libre, usando nuevamente el Teorema 2.3 tenemos que $C(X) = C(X)'_1$. Combinando esto con la propiedad de intersección del conmutante del capítulo anterior tenemos que $C(X) \cap I \neq \{0\}$ para todo I ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$, que es lo que queríamos.

$\square$

La diferencia entre las propiedades (1) y (2) en el teorema es que en una solo consideramos ideales cerrados y en la otra los tomamos además autoadjuntos. En el caso de $C^*(\Sigma)$, esta diferencia es irrelevante, pues es una propiedad de las C^*-álgebras que todo ideal cerrado es automáticamente autoadjunto. Este es de hecho uno de los puntos donde el estudio de $\ell^1(\Sigma)$ parece ser más complicado que el de $C^*(\Sigma)$: la posible existencia de ideales cerrados que no sean autoadjuntos, dado que no es una C^*-álgebra. Sin embargo, veremos que muchas otras equivalencias del estilo de las del teorema anterior no distinguen entre ideales cerrados y autoadjuntos o simplemente cerrados. De todas formas, veremos más adelante que podemos caracterizar cuándo es que todo ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ es autoadjunto.

3. Minimalidad contra simplicidad

Queremos ahora relacionar la minimalidad de Σ con la simplicidad de $\ell^1(\Sigma)$. Recordaremos brevemente qué significan cada una de estas propiedades.

Decimos que Σ minimal si toda órbita es densa, y es equivalente a que no existan subconjuntos propios cerrados e invariantes por σ.

La simplicidad de un álgebra en general dice que no existen ideales propios en dicha álgebra. En nuestro caso, en el que $\ell^1(\Sigma)$ es una *-álgebra de Banach, nos puede interesar en particular la simplicidad respecto a ideales cerrados, y también respecto a ideales que además son autoadjuntos. Veremos que ambas nociones de simplicidad coinciden en $\ell^1(\Sigma)$, y son equivalentes a la minimalidad de $\ell^1(\Sigma)$ bajo la hipótesis extra de que X tenga infinitos puntos.

Comentaremos algunas cosas sobre ideales en $\ell^1(\Sigma)$ antes de seguir con el resultado principal de esta sección. Supongamos que tenemos S un conjunto cerrado en X, e invariante por σ y σ^{-1}, y sea $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i \in \ell^1(\Sigma)$ tal que para todo i se tiene que f_i vale cero en S. Tenemos que

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j\delta^j\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\delta^i\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i\left[f_{k-i}\circ\sigma^{-i}\right]\right)\delta^k$$

y, como S es invariante por σ y su inversa, resulta que las $f_{k-i}\circ\sigma^{-i}$ también se anulan en S. Esto nos dice que el elemento obtenido de multiplicar por un elemento arbitrario a f por la izquierda es un elemento que también cumple que todas sus coordenadas se anulan en S. Haciendo una cuenta similar al multiplicar por derecha, obtenemos que el siguiente conjunto es de hecho un ideal:

$$I = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ell^1(\Sigma) : f_k|_S = 0\right\}.$$

Además I es autoadjunto, pues f^* tiene como coordenadas los elementos $\overline{\alpha^k(f_k)} = \overline{f_k\circ\sigma^{-k}}$ que nuevamente, como S es invariante, también se anulan en él. Lo último que hay que observar es que es cerrado: sea $\{f^n\}$ una sucesión en I que converge a f. Denotamos $f^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k^n\delta^k$ y $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$. Que f^n tienda a f nos dice que

$$\|f^n - f\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\|f_k^n - f_k\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

En particular, para todo k se tiene que $\|f_k^n - f_k\|_\infty$ tiende a 0 con n, por lo que f_k también tiene que anularse en S. Luego I resulta ser un ideal cerrado y autoadjunto de $\ell^1(\Sigma)$, y además claramente es propio si S no es todo X ni $\emptyset$.

El siguiente lema describe cómo son los ideales de $C(X)$. Esto nos será de utilidad pues, a la hora de estudiar los ideales de $\ell^1(\Sigma)$, al intersectar un ideal con $C(X)$ obtendremos un ideal de esa misma álgebra. Este lema también lo utilizaremos en los capítulos siguientes.

Lema 3.2. Sea I un ideal cerrado de $C(X)$. Entonces existe un subconjunto cerrado $S \subset X$ tal que:

$$I = \{f \in C(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}.$$

Además, si I es invariante por α y su inversa, entonces S es invariante por σ y su inversa.

Demostración. Es claro que en caso de existir el conjunto S como indica el lema, tiene que ser el siguiente:

$$S = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\}).$$

Definimos entonces S de esa manera, y consideramos $I_S = \{f \in C(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}$. Queremos probar que I coincide con I_S.

Es claro que $I \subset I_S$. Para ver la otra inclusión, tendremos que aproximar una función de I_S por funciones en I y usar que este último es cerrado. Para eso, definiremos antes una familia de funciones en I que nos serán de utilidad.

Tomemos V un conjunto abierto de X que contenga a S. Para todo $t \in X \setminus V$, como $t \notin S$, existe $g_t \in I$ tal que $g_t(t) \neq 0$. Definimos

$$h_t = |g_t|^2 = g_t\overline{g_t} \in I,$$

y se cumple que $h_t(t) > 0$ y $h_t(x) \geq 0$ para todo x. Como es continua, existe un entorno V_t de t tal que $h_t(x) > 0$ para todo $x \in V_t$. Ahora, como V es abierto, $X \setminus V$ es compacto, por lo que podemos cubrirlo por finitos $V_{t_1}, \cdots, V_{t_n}$. Definimos luego

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} h_{t_i} \in I.$$

Se tiene que g_1 es tal que $g_1(t) > 0$ para todo $t \in X \setminus V$, y, como está en I, vale 0 en S. Además, como $X \setminus V$ es compacto, existe $k > 0$ tal que $g_1(t) > k$ para todo $t \in X \setminus V$. Podemos definir entonces en $X \setminus V$ la función g_2 tal que $g_2(t) = g_1(t)^{-1}$, y extendemos por Tietze a todo X, preservando su norma. Finalmente, definimos:

$$g_V(t) = g_1(t)g_2(t) \text{ para todo } t \in X.$$

Como g_1 está en I, tenemos que g_V también lo está y, por lo tanto, se anula en S. Además verifica que $g_V(t) = g_1(t)g_1(t)^{-1} = 1$ para todo $t \in X \setminus V$, y $|g_V| \leq 1$.

Sea $f \in I_S$, lo que quiere decir que $f(t) = 0$ para todo $t \in S$. Luego, para todo $t \in S$, existe U_t entorno abierto de t tal que $|f| \leq \varepsilon$ en ese entorno, y como S es compacto podemos cubrirlo con finitos $U_{t_1} \cdots, U_{t_m}$. Tomamos V como la unión de los U_{t_i}, y consideramos g_V como describimos antes. Como g_V está en I, entonces fg_V también lo está. Luego, si $t \in X \setminus V$, se tiene:

$$|f(t) - f(t)g_V(t)| = 0 \text{ dado que } g_V(t) = 1.$$

Por otro lado, si $t \in V$, se tiene:

$$|f(t) - f(t)g_V(t)| \leq |f(t)||1 - g_V(t)| \leq 2\varepsilon.$$

Luego $\|f - fg_V\|_\infty \leq 2\varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Es decir, encontramos funciones arbitrariamente cerca de f en I, y como I es cerrado, resulta $f \in I$. Esto prueba que $I = I_S$.

Supongamos ahora que I es invariante por α, y supongamos que S no es invariante por σ^{-1}. Existe entonces $x \in S$ tal que $\sigma^{-1}(x)$ no pertenece a S. Por el lema de Urysohn podemos tomar una función continua f tal que $f(\sigma^{-1}(x)) \neq 0$ y $f(t) = 0$ para todo $t \in S$. Por lo tanto, $f \in I$. Pero $\alpha(f)(x) = f(\sigma^{-1}(x)) \neq 0$, de donde $\alpha(f) \notin I$. Esto contradice que I sea invariante por α, lo que es absurdo. Análogamente, suponiendo que I es invariante bajo α^{-1} obtenemos que S es invariante bajo σ, lo que termina la prueba.

□

Corolario 3.3. Si I es un ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ entonces existe un subconjunto cerrado $S \subset X$, invariante por σ y su inversa, tal que:

$$I \cap C(X) = \{f \in C(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}.$$

Demostración. Como I es un ideal de $\ell^1(\Sigma)$, es claro que $I \cap C(X)$ es un ideal de $C(X)$. Por lo tanto, existe S subconjunto cerrado de X tal que $I \cap C(X)$ son las funciones continuas que se anulan en S. De acuerdo al lema anterior, para ver que S es invariante por σ y su inversa alcanza con verificar que $I \cap C(X)$ es invariante bajo α y su inversa. Sea $g \in I \cap C(X)$, en particular tenemos que $g \in I$. Luego $g\delta^{-1} \in I$, de donde $\delta g \delta^{-1} = \alpha(g)$ también pertenece a I, y obviamente está en $C(X)$. Es decir que $I \cap C(X)$ es invariante bajo α. Análogamente obtenemos que $\delta^{-1}(g\delta)$ obtenemos que $\alpha^{-1}(g) \in I \cap C(X)$.

□

Antes de continuar, observemos lo siguiente: si I es un ideal de $\ell^1(\Sigma)$ tal que $I \cap C(X) = C(X)$, entonces tiene que ser $I = \ell^1(\Sigma)$, dado que $\ell^1(\Sigma)$ y $C(X)$ tienen la misma unidad. Usaremos esto en la prueba que sigue.

Teorema 3.4. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) No existen ideales propios cerrados en $\ell^1(\Sigma)$;
(2) No existen ideales propios cerrados y autoadjuntos en $\ell^1(\Sigma)$;
(3) X tiene infinitos puntos y Σ es minimal.

Demostración. Que (1) implica (2) es obvio. Veamos que (2) implica (3). Supongamos primero que Σ no es minimal. Entonces existe x en X tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} \neq X$, donde recordemos que $\mathcal{O}(x)$ denota la órbita de X. Consideremos

$$I = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k(y) = 0 \text{ para todo } y \in \overline{\mathcal{O}(x)} \right\},$$

que, como comentamos antes, es un ideal cerrado, autoadjunto y propio de $\ell^1(\Sigma)$; esto contradice (2), por lo que Σ tiene que ser minimal. Ahora, en caso de que X tenga finitos puntos, tenemos que todo punto es periódico. Sea x un punto de X de periodo n, y consideremos la representación $\pi_{x,n,1}$ de $\ell^1(\Sigma)$ en H_n. Como H_n tiene dimensión finita, resulta que $\mathrm{Ker}(\pi_{x,n,1})$ es no nulo, y como $\pi_{x,n,1}$ es una *-representación, su núcleo es un ideal cerrado, autoadjunto y propio, lo que contradice (2). Esto concluye la prueba de que (2) implica (3).

Veamos que (3) implica (1). Como X tiene infinitos puntos, no hay ningún punto periódico dado que Σ es minimal. En otras palabras, tenemos que $X = \mathrm{Aper}(\sigma)$, y en particular Σ es topológicamente libre, por lo que $C(X) = C(X)'_1$. Tenemos entonces que si I es un ideal cerrado no nulo de $\ell^1(\Sigma)$, tiene que ser $I \cap C(X) \neq \{0\}$. Ahora, utilizando el lema anterior tenemos que existe S un subconjunto cerrado de X invariante por σ y su inversa tal que

$$I \cap C(X) = \{g \in C(X) : g(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}$$

Pero como Σ es minimal, no existen subconjuntos cerrados propios de X invariantes por σ, de donde tiene que ser $S = \emptyset$, dado que no puede ser $S = X$ porque I es un ideal no nulo. Luego $I = \ell^1(\Sigma)$.

□

4. Ideales cerrados y autoadjuntos

Comentamos antes que algo que distingue una *-álgebra de Banach de una C^*-álgebra es el hecho de pueden existir ideales cerrados que no son autoadjuntos, y nos preguntamos cuándo en $\ell^1(\Sigma)$ ocurre que todo ideal cerrado es autoadjunto. Las equivalencias que hemos visto hasta ahora no nos permiten distinguir eso, puesto que todas valen para ambas situaciones. Veremos que de todas formas podemos decir exactamente cuándo es que todo ideal cerrado es autoadjunto.

Antes de seguir, enunciaremos un lema sobre el álgebra $\ell^1(\mathbb{Z})$:

Lema 3.5. La *-álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$ tiene un ideal cerrado que no es autoadjunto.

Este resultado se desprende del hecho de que el álgebra $L^1(G)$, donde G es un grupo no compacto, localmente compacto Hausdorff y abeliano, siempre contiene un ideal cerrado que no es autoadjunto (ver [**18**, Teorema 7.7.1]). En nuestro contexto, como la medida de Haar es la medida de conteo en $\mathbb{Z}$, resulta que $L^1(\mathbb{Z})$ es $\ell^1(\mathbb{Z})$.

El próximo teorema que probaremos nos dirá que es equivalente que todo ideal cerrado sea autoadjunto a que Σ sea libre. En una de las direcciones de este teorema es que nos será de utilidad el lema anterior: en caso de que tengamos algún punto periódico, digamos de periodo $p \geq 1$, construiremos un *-homomorfismo sobreyectivo de $\ell^1(\Sigma)$ en $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, una *-álgebra de Banach que describiremos más abajo y que veremos que contiene un ideal cerrado que no es autoadjunto, ya que $\ell^1(\mathbb{Z})$ (que es isomorfo a $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$) contiene ideales con tales características. Teniendo ese ideal, su preimagen nos dará un ideal cerrado y no autoadjunto en $\ell^1(\Sigma)$. Vamos a describir estos espacios más precisamente.

$\mathrm{AC}(\mathbb{T})$ es el espacio de funciones continuas en $\mathbb{T}$ con serie de Fourier absolutamente convergente:

$$\mathrm{AC}(\mathbb{T}) = \left\{ \phi \in C(\mathbb{T}) : \phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k \text{ con } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty \right\}.$$

La norma en $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$ es la suma de los módulos de sus coeficientes de Fourier, y la involución está dada por

$$\phi^*(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{a_{-k}} z^k, \text{ donde } \phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k.$$

Con esta norma e involución, $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$ es una *-álgebra de Banach, que es isométrica y *-isomorfa a $\ell^1(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$ tiene un ideal cerrado y no autoadjunto.

Ahora, en $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, si (f_{ij}) es una matriz con coeficientes en $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$, su norma estará dada por $p \cdot \text{máx}\|f_{ij}\|_{\mathrm{AC}(\mathbb{T})}$. Su involución es análoga a la de matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$: dada $(f_{ij}) \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, tenemos que $(f_{ij})^* = (f_{ji}^*)$, es decir, transponemos la matriz y aplicamos la involución de $\mathrm{AC}(\mathbb{T})$ en cada entrada. Con el producto de matrices, $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$ es una *-álgebra de Banach.

Con estos espacios en mente, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.6. Son equivalentes:

(1) Todo ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma)$ es autoadjunto;
(2) Σ es libre.

Demostración. Veamos primero que (2) implica (1). Sea I un ideal cerrado, podemos considerar el cociente $\ell^1(\Sigma)/I$. Consideramos $\mathcal{Q} : \ell^1(\Sigma) \to \ell^1(\Sigma)/I$ el mapa cociente, donde se tiene que $I = \mathrm{Ker}(\mathcal{Q})$. Lo que haremos será factorizar $\mathcal{Q}$, de forma que su núcleo, es decir I, sea el núcleo de un *-homomorfismo y, por lo tanto, autoadjunto.

Como Σ es libre, en particular es topológicamente libre, por lo que $I \cap C(X) \neq \{0\}$. Luego existe un conjunto $X_\pi \subset X$ cerrado e invariante por σ y su inversa tal que

$$I \cap C(X) = \{f \in C(X) : f|_{X_\pi} = 0\}\,.$$

Al ser X_π invariante, la restricción de σ nos da un sistema dinámico $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma|_\pi)$, que tiene asociado su espacio $\ell^1(\Sigma_\pi)$. Podemos definir el *-homomorfismo $\mathcal{R}_\pi : \ell^1(\Sigma) \to \ell^1(\Sigma_\pi)$ dado por

$$\mathcal{R}_\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k|_{X_\pi}\delta_\pi^k \in \ell^1(\Sigma_\pi),$$

donde δ_π^k denota al elemento δ de $\ell^1(\Sigma_\pi)$. El teorema de extensión de Tietze nos dice que toda función $f \in C(X_\pi)$ puede extenderse a una función $\widetilde{f} \in C(X)$ preservando su norma. Podemos considerar entonces el mapa $\psi : \ell^1(\Sigma_\pi) \to \ell^1(\Sigma)/I$ dado por

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta_\pi^k \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{f}_k\delta^k + I \in \ell^1(\Sigma)/I,$$

donde cada $\widetilde{f}_k$ es cualquier extensión que preserva norma de f_k. En caso de estar bien definido, ψ resulta ser un homomorfismo contractivo, puesto que al extender la función mantenemos su norma, y la proyección al cociente $\mathcal{Q}$ es una contracción. Veamos que está bien definido. Para eso consideramos:

$$\mathcal{K}(X_\pi) = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k : f_k|_{X_\pi} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dado $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \mathcal{K}(X_\pi)$, cada f_k está en $I \cap C(X)$. Luego tenemos que $\sum_{i=-N}^{N} f_i\delta^i$ está en I, dado que es una suma finita de elementos en I. Finalmente, el límite cuando N tiende a infinito de lo anterior es $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$, que está en I dado que es un ideal cerrado. Tenemos entonces que $\mathcal{K}(X_\pi)$ está incluido en I.

Ahora, dado $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta_\pi^k$, si para cada k consideramos dos extensiones $\widetilde{f}_k$ y $\widehat{f}_k$, para que ψ esté bien definido tiene que ser

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{f}_k\delta^k + I = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\delta^k + I,$$

lo cual ocurre si $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{f}_k - \widetilde{f}_k)\delta^k$ está en I. Pero de hecho ocurre que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{f}_k - \widetilde{f}_k)\delta^k$ pertenece a $\mathcal{K}(X_\pi)$, por lo que efectivamente está bien definido. Para ver que es un homomorfismo, veremos que $\mathcal{Q} = \psi \circ \mathcal{R}_\pi$. Sea $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ell^1(\Sigma)$. Tenemos que

$$\psi\left(\mathcal{R}_\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{f}_k\delta^k + I,$$

donde $\widetilde{f}_k$ es una extensión de $f_k|_{X_\pi}$. Por otro lado

$$\mathcal{Q}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k + I.$$

Tenemos entonces que $\mathcal{Q}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k) = \psi \circ \mathcal{R}_\pi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k)$ si $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(f_k - \widetilde{f}_k)\delta^k$ está en I. Como $f_k - \widetilde{f}_k$ se anula en X_π para todo entero k, se tiene que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(f_k - \widetilde{f}_k)\delta^k$ está en $\mathcal{K}(X_\pi)$, el cual está incluido en I. Por lo tanto $\mathcal{Q} = \psi \circ \mathcal{R}_\pi$. Que ψ es un homomorfismo se deduce que de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}_\pi$ sean homomorfismos y que $\mathcal{R}_\pi$ sea sobreyectivo.

Ahora, si f está en $\mathrm{Ker}(\psi) \cap C(X_\pi)$, significa que su extensión $\widetilde{f}$ está en $I \cap C(X)$, lo cual equivale a que $\widetilde{f}$ restricta a X_π vale cero, de donde $f = 0$. Pero que Σ sea libre claramente implica que Σ_π también lo es, y en particular es topológicamente libre, lo que nos dice que todo ideal cerrado no nulo intersecta a $C(X_\pi)$. Como $\mathrm{Ker}(\psi)$ es un ideal cerrado cuya intersección con $C(X_\pi)$ es nula, tiene que ser $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$, es decir, ψ es inyectiva. Finalmente, como teníamos $\mathcal{Q} = \psi \circ \mathcal{R}_\pi$, resulta que el núcleo de $\mathcal{Q}$, que es I, coincide con el núcleo de $\mathcal{R}_\pi$, que es un ideal autoadjunto dado que $\mathcal{R}_\pi$ es un *-homomorfismo.

Veamos ahora que (1) implica (2). Supongamos que Σ no es libre, de modo que existe algún punto $x \in X$ con periodo $p \geq 1$. De acuerdo a lo discutido antes del teorema, construiremos un *-homomorfismo sobreyectivo $\Psi : \ell^1(\Sigma) \to M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, y como el codominio contiene un ideal cerrado y no autoadjunto, la preimagen de tal ideal será un ideal cerrado y no autoadjunto de $\ell^1(\Sigma)$, contradiciendo (1).

Dada $f \in C(X)$, definiremos

$$\Psi(f) = \begin{pmatrix} f(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\sigma x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\sigma^{p-1}x) \end{pmatrix} \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T})),$$

y para $\delta \in \ell^1(\Sigma)$ definimos

$$\Psi(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & z \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T})).$$

Podemos definir Φ en $c_{00}(\Sigma)$ como

$$\Psi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Psi(f_k)\Psi(\delta)^k \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T})),$$

y resulta ser contractiva, por lo que podemos extender por continuidad a todo $\ell^1(\Sigma)$.

Observemos que $\Psi(\delta)^p = z \cdot \mathrm{id}$, donde id es la matriz identidad en $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$. Un elemento $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$, separando cada coordenada δ^k según su resto módulo p, podemos escribirlo como

$$\sum_{r=0}^{p-1}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+r}\delta^{lp+r}\right).$$

Combinando ambas cosas nos queda:

$$\begin{aligned}\Psi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) &= \sum_{r=0}^{p-1}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Psi(f_{lp+r})\Psi(\delta)^{lp+r}\right) = \sum_{r=0}^{p-1}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Psi(f_{lp+r})z^l\cdot \mathrm{id}\Psi(\delta)^r\right)\\ &= \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\Psi(f_{lp+r})z^l\cdot\mathrm{id}\right)\Psi(\delta)^r\end{aligned}$$

Observemos que

$$\Psi(\delta)^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & z & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & z\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z\cdot\mathrm{Id}_r\\ \mathrm{Id}_{p-r} & 0\end{pmatrix},$$

donde la primera entrada no nula de la primera columna se da en la fila $r+1$. Es decir, las matrices Id_r y Id_{p-r} son las matrices identidad de tamaño r y $p-r$, respectivamente. Además, se tiene que

$$\Psi\left(f_{lp+r}\right)z^l\cdot\mathrm{id} = \begin{pmatrix} f_{lp+r}(x)z^l & 0 & \dots & 0\\ 0 & f_{lp+r}(\sigma x)z^l & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & f_{lp+r}(\sigma^{p-1}x)z^l\end{pmatrix}.$$

Luego queda:

$$\Psi\left(f_{lp+r}\right)z^l\cdot\mathrm{id}\Psi(\delta)^r =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f_{lp+r}(\sigma x)z^{l+1} & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & f_{lp+r}(\sigma^{r-1}x)z^{l+1}\\ f_{pl+r}(\sigma^r x)z^l & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & f_{pl+r}(\sigma^{p-1}x)z^l & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que para cada resto $r = 0, \dots, p-1$ las entradas no nulas son siempre las mismas y no coinciden si tomamos dos restos distintos, obtenemos:

$$\Psi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right) = \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \Phi(f_{lp+r})\Phi(\delta)^{lp+r} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp}(x)z^l & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp-(p-1)}(x)z^{l+1} & \dots & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+1}(x)z^{l+1} \\ \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+1}(\sigma x)z^l & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp}(\sigma x)z^l & \ddots & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+2}(\sigma x)z^{l+1} \\ \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+2}(\sigma^2 x)z^l & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+1}(\sigma^2 x)z^l & \ddots & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+3}(\sigma^2 x)z^{l+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp-(p-1)}(\sigma^{p-1} x)z^l & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp-(p-2)}(\sigma^{p-1} x)z^l & \dots & \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp}(\sigma^{p-1} x)z^l \end{pmatrix}$$

Ahora, para cada valor del resto r módulo p y cada $k = 0, \dots, p-1$, se tiene que los sumandos de la forma $f_{lp+r}(\sigma^k(x))$ aparecen todos en la misma entrada de la matriz. Esto es lo que nos garantizará la sobreyectividad de Φ. Dada una matriz $(h_{ij}) \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, para cada entrada (i, j) de la matriz se corresponden únicos resto r y valor k tales que

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{lp+r}(\sigma^k(z))z^l \text{ aparece en la entrada } (i,j) \text{ de } \Psi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right).$$

Luego, si $(h_{ij}(z)) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l z^l$, basta con que para cada $l \in \mathbb{Z}$ tengamos $f_{lp+r}(\sigma^k(x)) = a_l$. Como los puntos $x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)$ son todos distintos, y fijado un resto r los sumandos $f_{lp+r}(\sigma^k(x))$ aparecen todos en la misma entrada de la matriz $\Psi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k)$, por el lema de Urysohn obtenemos una función $f_k \in C(X)$ tal que en la órbita de x tome como valor el coeficiente de Fourier que corresponda, y obtenemos $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ tal que $\Psi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k) = (h_{ij}) \in M_p((AC)(\mathbb{T}))$. Como

$$\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\| \leq \sum_{1\leq i<j\leq p} \|h_{ij}\|_{\mathrm{AC}(\mathbb{T})} < \infty,$$

tenemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ efectivamente está en $\ell^1(\Sigma)$, por lo que en efecto Ψ es sobreyectiva. □

Durante la demostración anterior, dado un elemento en $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$ construimos un elemento $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k$ de $\ell^1(\Sigma)$ definiendo adecuadamente lo que valía f_k en la órbita de x, pero en principio puede haber múltiples f_k tales que su imagen por Ψ sea el elemento dado de $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$. Pero si tenemos que el espacio X consiste de simplemente la órbita de x, es decir, $X = \{z, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)\}$, el definir cuánto vale f_k en la óribita de hecho determina quién es f_k, por lo que el mapa Ψ de hecho es además inyectivo y, por lo tanto, un *-isomorfismo. Resumimos esto en el teorema que sigue.

Teorema 3.7. *Si $X = \{x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)\}$ es la órbita de un punto x de periodo $p \geq 1$, entonces el mapa $\Psi : \ell^1(\Sigma) \to M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$ del Teorema 3.6 es un *-isomorfismo entre $\ell^1(\Sigma)$ y $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$.*

Usaremos este teorema en la próxima sección.

5. Transitividad contra primalidad

La última propiedad dinámica cuya traducción a $\ell^1(\Sigma)$ estudiaremos es la transitividad. Como veremos, equivale a que $\ell^1(\Sigma)$ sea prima.

Recordemos que un sistema dinámico Σ es transitivo si para todo par de abiertos U, V no vacíos de X existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, que un álgebra sea prima significa que para todo par de ideales I_1, I_2 se tenga que $I_1 \cap I_2 \neq \{0\}$. En nuestro contexto, nos interesa ver esta propiedad para ideales cerrados y para ideales cerrados y autoadjuntos, y veremos que ambas nociones son equivalentes. Antes de continuar veremos dos lemas que utilizaremos en la prueba.

Lema 3.8. Son equivalentes:

(1) Existen dos abiertos O_1 y O_2 disjuntos en X, invariantes por σ y su inversa, tales que $X = \overline{O_1} \cup \overline{O_2}$;
(2) Σ no es transitivo.

Demostración. Que (1) implica (2) es obvio. Veamos que (2) implica (1). Como Σ no es transitivo, existen dos abiertos U, V tales que $\sigma^n(U) \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$O_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(U),$$

que es un abierto invariante. Se tiene que $V \subset \overline{O_1}^c$, por lo que si definimos $O_2 = \overline{O_1}^c$, resulta ser un abierto invariante no vacío. Estos abiertos verifican (1).

□

Veremos durante la prueba del teorema de esta sección que no alcanza solo con la transitividad de Σ para obtener que $\ell^1(\Sigma)$ es prima, sino que además necesitaremos que X sea infinito. El siguiente lema nos será de utilidad para eso.

Lema 3.9. Si Σ es transitivo y $X = \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ para algún n, entonces X consiste en una única órbita finita.

Demostración. Podemos suponer que n es el menor entero positivo tal que $X = \mathrm{Fix}_n(\sigma)$, y tomar $x \in X$ tal que los puntos $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)$ son todos distintos. Supongamos que $y \in X$ es tal que y no está en la órbita de x. Para cada $k = 0, \ldots, n-1$ podemos tomar U_k y V_k entornos abiertos de $\sigma^k(x)$ e y, respectivamente, tales que $U_k \cap V_k = \emptyset$. Definimos

$$U_x = \bigcap_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(U_i) \text{ y } V_y = \bigcap_{i=0}^{n-1} V_i,$$

que son entornos abiertos de x e y, respectivamente, y tales que $\sigma^k(U_x) \cap V_y = \emptyset$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$. Luego si definimos

$$W_x = \bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma^i(U_x),$$

se tiene que $W_x \cap V_y = \emptyset$, y como $X = \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ tenemos que σ^n es la identidad, de donde W_x es invariante. Luego resulta que $\sigma^k(W_x) \cap V_y = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, contradiciendo que Σ sea transitivo.

□

Con estos dos lemas finalmente podemos dedicarnos a probar que la transitividad de Σ equivale a la primalidad de $\ell^1(\Sigma)$, tanto para ideales cerrados como para cerrados y autoadjuntos.

TEOREMA 3.10. Son equivalentes:

(1) Para todo par de ideales cerrados I_1, I_2 de $\ell^1(\Sigma)$ se tiene que $I_1 \cap I_2 \neq \{0\}$;
(2) Para todo par de ideales cerrados y autoadjuntos I_1, I_2 de $\ell^1(\Sigma)$ se tiene que $I_1 \cap I_2 \neq \{0\}$;
(3) X tiene infinitos puntos y Σ es transitivo.

DEMOSTRACIÓN. Dado un conjunto cerrado S de X, denotaremos

$$\ker(S) = \{g \in C(X) : g|_S = 0\}.$$

Que (1) implica (2) es evidente. Veamos que (2) implica (3). Primero veremos que Σ tiene que ser transitivo: en caso de no serlo, el Lema 3.8 nos dice que existen dos abiertos disjuntos e invariantes tales que $X = \overline{O_1} \cup \overline{O_2}$. Para $i = 1, 2$, definimos:

$$I_i = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k \in \ker(\overline{O}_i) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos que entonces que I_1, I_2 son ideales cerrados y autoadjuntos. Recordemos que E_1 denota la proyección de $\ell^1(\Sigma)$ en $C(X)$. Se tiene entonces que $E_1(I_i) = \ker(\overline{O_i})$ para ambos valores de i. Luego

$$E_1(I_1 \cap I_2) \subset E_1(I_1) \cap E_1(I_2) = \ker(\overline{O_1}) \cap \ker(\overline{O_2}) = \ker(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = \ker(X) = \{0\},$$

de donde resulta que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Esto contradice (2), por lo que tenemos que Σ es transitivo.

Ahora, en caso de que X fuera finito, existiría un n tal que todo punto es fijo para σ^n. Por el Lema 3.9, tenemos que X consiste en una única órbita finita, lo que de acuerdo al Teorema 3.7 significa que $\ell^1(\Sigma)$ es *-isomorfo a $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$, donde p es el tamaño de la órbita. Pero veremos que $M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$ contiene dos ideales no triviales cerrados y autoadjuntos que no se intersectan, contradiciendo (2).

Para eso consideremos $\mathrm{ev}_z : M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T})) \to M_p(\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{ev}_z(f_{ij}) = (f_{ij}(z))$ para todo $(f_{ij}) \in M_p(\mathrm{AC}(\mathbb{T}))$. Es decir, evaluamos cada entrada de la matriz en z. Tomemos C_1, C_2 dos subconjuntos cerrados propios de $\mathbb{T}$ tales que $\mathbb{T} = C_1 \cup C_2$. Definimos

$$J_i = \bigcap_{z \in C_i} \ker(\mathrm{ev}_z) \text{ para } i = 1, 2.$$

Dado que C_i es propio, la Proposición 1.17 nos dice que existe $g \in \mathrm{AC}(\mathbb{T})$ tal que se anula en C_i pero $g \neq 0$. Podemos, por ejemplo, tomar la matriz con g en una entrada y 0 en las demás, y resulta que esa matriz pertenece a J_i. Por lo tanto, $J_i \neq \{0\}$ para $i = 1, 2$. Ahora, como $C_1 \cup C_2 = \mathbb{T}$, se tiene que $J_1 \cap J_2 = \{0\}$. Esto contradice (2).

Nos queda por probar que (3) implica (1). Tenemos que Σ es transitivo y X infinito. Primero veremos que esto implica que Σ es topológicamente libre. Supongamos que no lo es. El Lema 2.2 nos dice que existe n tal que $\mathrm{Fix}_n(\sigma)$ tiene interior no vacío. Luego $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ$ es un abierto no vacío invariante bajo σ y su inversa. Además, si tuviéramos que $X = \mathrm{Fix}_n(\sigma)$, como Σ es transitivo el Lema 3.9 nos dice que X es finito, lo que es absurdo. Por lo tanto, $X \neq \mathrm{Fix}_n(\sigma)$ y, por lo tanto, $\mathrm{Fix}_n(\sigma)^c$ es un abierto invariante no vacío. En este caso tenemos que $\sigma^k(\mathrm{Fix}_n(\sigma)^\circ) \cap \mathrm{Fix}_n(\sigma)^c = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, contradiciendo que Σ sea transitivo. Por lo tanto, Σ tiene que ser topológicamente libre.

Ahora, sean I_1 e I_2 dos ideales cerrados propios tales que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. En primer lugar, como Σ es topológicamente libre, de acuerdo al Teorema 3.1 tenemos que $I_1 \cap C(X)$ e $I_2 \cap C(X)$ son ideales propios cerrados de $C(X)$ e invariantes. Luego existen C_1, C_2 cerrados propios de X invariantes tales que $I_i \cap C(X) = \ker(C_i)$, para $i = 1, 2$. Como $I_1 \cap I_2 = \{0\}$, en particular $I_1 \cap I_2 \cap C(X) = \{0\}$. Luego:

$$\{0\} = I_1 \cap I_2 \cap C(X) = \ker(C_1) \cap \ker(C_2) = \ker(C_1 \cup C_2).$$

Tiene que ser entonces $C_1 \cup C_2 = X$. Esto contradice la transitividad de Σ: como ambos cerrados son propios, sus complementos son abiertos invariantes. En particular, sus interiores también son no vacíos; luego $\sigma^n(C_1^\circ) \cap C_1^c = \emptyset$ para todo n. Esto termina la prueba.

□

Capítulo 4

Diccionario dinámico-algebraico en $C^*(\Sigma)$

En el capítulo anterior nos dedicamos al estudio de $\ell^1(\Sigma)$, identificando un diccionario entre sus propiedades analítico-algebraicas y propiedades dinámicas de Σ. Queremos ahora realizar un trabajo similar para $C^*(\Sigma)$, que, como ya hemos mencionado antes, históricamente ha sido más estudiada que $\ell^1(\Sigma)$. Veremos que muchas de las equivalencias probadas en el capítulo anterior valen en este contexto, pero tendremos que adaptar las técnicas utilizadas. Para lograrlo, introduciremos lo que se llama representaciones covariantes, lo cual haremos brevemente en el contexto de productos cruzados más generales.

Seguiremos principalmente la referencia [**10**]. Varios de los resultados también se encuentran en el libro [**9**].

1. Representaciones covariantes

Describiremos brevemente, por motivos mayormente culturales, lo que es un C^**-sistema dinámico*, que es lo que se usa para la construcción general de productos cruzados, sin entrar en demasiados detalles. El caso concreto en el que venimos trabajando, con $\mathbb{Z}$ actuando sobre $C(X)$, es un caso particular de esta construcción más general.

Un C^*-sistema dinámico es una tripleta (A, G, α) donde A es una C^*-álgebra, G un grupo localmente compacto y $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ un homomorfismo continuo en el siguiente sentido: para todo $a \in A$, se tiene que el mapa $t \mapsto \alpha_t(a)$ es continuo, donde denotamos α_t a $\alpha(t)$.

Supongamos que G es discreto (de forma que la medida de Haar sea la medida de conteo) y que A tiene unidad para simplificar. Consideremos el espacio:

$$\ell^1(G, A) = \left\{ f : G \to A : \sum_{g \in G} \|f(g)\| < \infty \right\}.^1$$

Observemos que, si $A = C(X)$ y $G = \mathbb{Z}$, $\ell^1(G, A)$ coincide con $\ell^1(\Sigma)$ como conjunto. Al igual que como hicimos en $\ell^1(\Sigma)$, descomponemos un elemento $f \in \ell^1(G, A)$ como una sumatoria $f = \sum_{g \in G} a_g \delta_g$, con $a_g = f(g) \in A$, y definimos en $\ell^1(G, A)$ un producto sujeto a la regla $\delta_g a (\delta_g)^* = \alpha_g(a)$. Esta igualdad es lo que llamamos *relación de covarianza*, y $\ell^1(\Sigma)$ la verifica. Con estas definiciones es directo ver que podemos operar de manera análoga a como hacemos en $\ell^1(\Sigma)$, agregando además una operación $*$ tal que $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$, lo cual nos determina que

$$f^* = \sum_{g \in G} \alpha_g(a_{g^{-1}}^*) \delta_g,$$

[1] La convergencia de la serie en este contexto es considerando que a lo sumo numerables sumandos son no nulos.

lo cual nuevamente coincide con la involución en $\ell^1(\Sigma)$ cuando $G = \mathbb{Z}$. Con esta relación de covarianza en mente, se define la noción de *representación covariante* del C^*-sistema dinámico (A, G, α): esto es un par (π, u), donde $\pi : A \to B(H)$ es una *-representación y $u : G \to B(H)$ es una representación unitaria, ambas sobre el mismo espacio de Hilbert H, tales que se verifica:

$$u_g \pi(a) u_g^* = \pi(\alpha_g(a)) \text{ para todo } g \in G, a \in A.$$

Se tiene que toda representación covariante (π, u) induce una representación $\widetilde{\pi}$ de $\ell^1(G, A)$ en H, dada por

$$\widetilde{\pi}\left(\sum_{g\in G} a_g \delta_g\right) = \sum_{g\in G} \pi(a_g) u_g.$$

Recíprocamente, dada una representación $\widetilde{\pi}$ de $\ell^1(G, A)$, podemos obtener una representación covariante (π, u) dada por $\pi(a) = \widetilde{\pi}(a\delta_e)$ y $u_g = \widetilde{\pi}(1_A \delta_g)$, donde e es el neutro de G y 1_A la unidad de A. Es la relación de covarianza la que nos permite verificar que esta correspondencia entre representaciones covariantes de (A, G, α) y *-representaciones de $\ell^1(G, A)$ funciona. Tenemos por lo tanto una correspondencia biyectiva entre las representaciones de $\ell^1(G, A)$ y las *-representaciones covariantes de (A, G, α). Con esto, podemos escribir toda *-representacion $\widetilde{\pi}$ de $\ell^1(G, A)$ como $\widetilde{\pi} = \pi \times u$, donde (π, u) es la representación covariante que le corresponde.

Volvamos ahora al caso concreto que nos concierne. Como fuimos indicando, si en la construcción anterior tomamos $A = C(X)$ y $G = \mathbb{Z}$, y consideramos la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $C(X)$ dada por $n \mapsto \alpha^n$, donde α es el automorfismo inducido por el sistema dinámico $\Sigma = (\sigma, X)$, obtenemos un C^*-sistema dinámico, y en este caso $\ell^1(\mathbb{Z}, C(X))$ es el ya familiar $\ell^1(\Sigma)$. Ahora, como indicamos, toda representación $\widetilde{\pi}$ de $\ell^1(\Sigma)$ podemos pensarla como $\widetilde{\pi} = \pi \times u$, con (π, u) representación covariante de $(C(X), \mathbb{Z}, \alpha)$. Como u es una representación unitaria de $\mathbb{Z}$, queda determinada por su valor en 1: tenemos que $u(n) = u(1)^n$, por lo que simplemente denotaremos u a $u(1)$ y u^n a $u(n)$. Queda entonces:

$$\widetilde{\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi(f_k) u^k.$$

Recordemos que $\ell^1(\Sigma)$ tiene unidad δ^0 y, como indicamos en los preliminares, al ser una *-álgebra de Banach con unidad, tenemos que su teoría de representaciones coincide con la de su envolvente C^*, que es $C^*(\Sigma)$. Que la teoría de representaciones coincide se ve simplemente observando por un lado que, dada una representación de $\ell^1(\Sigma)$, podemos extenderla a $C^*(\Sigma)$ por continuidad, y que si tenemos una representación de $C^*(\Sigma)$, obtenemos una de $\ell^1(\Sigma)$ simplemente restringiéndola. Esto nos dice básicamente que toda representación de $C^*(\Sigma)$ podemos pensarla como una representación covariante $\widetilde{\pi} = \pi \times u$.

Veremos ahora una forma concreta de representar a $C^*(\Sigma)$. Para ello, consideremos primero una representación fiel $\pi : C(X) \to B(H)$, con H espacio de Hilbert, que existe por el teorema de Gelfand-Naimark. Tenemos además la representación regular $\lambda : \mathbb{Z} \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Con estos dos ingredientes queremos construir una representación covariante de $(C(X), \mathbb{Z}, \alpha)$. Consideremos $H \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$, el producto tensorial de espacios de Hilbert de H y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Podemos pensar $H \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$ como

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H) = \left\{ F : \mathbb{Z} \to H : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|F(n)\|^2 < \infty \right\},$$

con las operaciones y producto interno naturales. Dado $v \in H$ y $n \in \mathbb{Z}$ denotamos $v\delta_n$ al elemento de $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$ que vale v en n y 0 en otro caso.

Veamos que las representaciones π y λ inducen una representación covariante en $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$. En primer lugar, tenemos una representación $\pi_\alpha : C(X) \to B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$ dada por

$$\pi_\alpha(a)F(n) = \pi(\alpha^{-n}(a))F(n) \in H \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

En particular, tenemos que $\pi_\alpha(a)(v\delta_n) = \pi(\alpha^{-n}(a))v\delta_n$, para todos $n \in \mathbb{Z}$ y $v \in H$.

Por otro lado, la representación regular de $\mathbb{Z}$ podemos pensarla en $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$ de forma natural: sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\lambda_n \in B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$ está dado por

$$\lambda_n F(m) = F(m - n).$$

En particular, se tiene que $\lambda_n(v\delta_m) = v\delta_{n+m}$, para todos $n, m \in \mathbb{Z}$ y $v \in H$.

Veamos que el par (π_α, λ) es una representación covariante. Sean $a \in C(X), n \in \mathbb{Z}$ y $F \in \ell^2(\mathbb{Z}, H)$. Para todo $k \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda_n \pi_\alpha(a)\lambda_n^* F)(k) &= (\pi_\alpha(a)\lambda_n^* F)(k - n) \\ &= \pi(\alpha^{n-k}(a))(\lambda_n^* F)(k - n) \\ &= \pi(\alpha^{n-k}(a))F(k) \\ &= \pi_\alpha(\alpha^n(a))F(k),\end{aligned}$$

es decir que $\lambda_n \pi_\alpha(a)\lambda_n^* F = \pi_\alpha(\alpha^n(a))F$. Luego (π_α, λ) es una representación covariante y, por lo tanto, $\pi_\alpha \times \lambda$ es una *-representación de $\ell^1(\Sigma)$, que suele ser llamada representación regular. Denotamos Φ a $\pi_\alpha \times \lambda$. Como ya mencionamos, podemos extender Φ a una *-representación de $C^*(\Sigma)$. Ahora, si clausuramos $\Phi(\ell^1(\Sigma))$ en $B(\ell^1(\mathbb{Z}, H))$ con la norma de operadores, obtenemos una C^*-subálgebra de $B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$ que, como consecuencia de [**21**, Teorema 7.13], es isomorfa a $C^*(\Sigma)$.[2]

Teorema 4.1. Se tiene que $\Phi : C^*(\Sigma) \to \overline{\Phi(\ell^1(\Sigma))}$ es un isomorfismo de C^*-álgebras, donde $\overline{\Phi(\ell^1(\Sigma))}$ es la clausura de $\Phi(\ell^1(\Sigma))$ con respecto a la norma de operadores en $B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$.

El teorema anterior nos permite entonces ver $C^*(\Sigma)$ como un álgebra concreta de operadores en un espacio de Hilbert, lo que nos permite manipularla de forma más tangible, contrario a la caracterización abstracta de $C^*(\Sigma)$ que habíamos realizado antes.

Definimos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el mapa $\rho_n : \ell^2(\mathbb{Z}, H) \to H$ dado por

$$\rho_n(F) = F(-n).$$

Se tiene entonces que $\rho_n^* : H \to \ell^2(\mathbb{Z}, H)$ está dado por $\rho_n^*(v) = v\delta_{-n}$, es decir, el elemento de $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$ que vale v en $-n$ y 0 en otro caso. Si denotamos

$$H\delta_n = \left\{v\delta_n \in \ell^2(\mathbb{Z}, H) : v \in H\right\},$$

tenemos que $\rho_n^*\rho_n : \ell^2(\mathbb{Z}, H) \to \ell^2(\mathbb{Z}, H)$ es la proyección sobre el subespacio $H\delta_{-n}$. En particular, $\rho_0^*\rho_0$ es la proyección en $H\delta_0$, que es la forma natural de ver a H incluido en $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$. Recordemos que nosotros tenemos la proyección $E_1 : \ell^1(\Sigma) \to C(X)$, que nos gustaría extender a $C^*(\Sigma)$. Sin embargo, no podemos hacerlo directamente porque no sabemos si E_1 es continua

[2]Que Φ sea un isomorfismo se debe a que $\mathbb{Z}$ es un grupo promediable. En general, dado un grupo localmente compacto Hausdorff G, se puede adaptar la construccion del producto cruzado y la representación Φ descritas, y se tendrá que Φ es un isomorfismo si y solo si el grupo G es promediable.

con la norma de $C^*(\Sigma)$. Para lograr esto, pensaremos a $C^*(\Sigma)$ como un álgebra de operadores concreta actuando en $\ell^2(\mathbb{Z}, H)$, como describimos antes.

Definimos el mapa $\mathcal{E} : B(\ell^2(\mathbb{Z}, H)) \to B(H)$ dado por

$$\mathcal{E}(x) = \rho_0 x \rho_0^* \in B(H).$$

Se tiene que $\|\mathcal{E}(x)\| = \|\rho_0 x \rho_0^*\| \leq \|\rho_0\| \|x\| \|\rho_0^*\| = \|x\|$. Por lo tanto, $\|\mathcal{E}\| \leq 1$. Veamos cuál es el operador de H que obtenemos al aplicar $\mathcal{E}$ a un elemento de $\Phi(c_{00}(\Sigma))$. Sea $v \in H$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi_\alpha(a_k)\lambda_k\right) v &= \left(\rho_0 \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi_\alpha(a_k)\lambda_k\right] \rho_0^*\right) v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_0 \pi_\alpha(a_k)\lambda_k \rho_0^*(v) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_0 \pi_\alpha(a_k)\lambda_k(v\delta_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_0 \pi_\alpha(a_k)(v\delta_k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_0(\pi(\alpha^{-k}(a_k))v\delta_k) \\
&= \pi(a_0)v.
\end{aligned}$$

Denotamos también $\mathcal{E}$ a la restricción de $\mathcal{E}$ a $\overline{\Phi(\ell^1(\Sigma))} \cong C^*(\Sigma)$. Para cada $a \in C(X)$ se tiene que $\pi_\alpha(a)$ deja invariante a $H\delta_0$ (y, de hecho, actúa en él como $\pi(a)$), por lo que identificamos a a con la restricción de $\pi_\alpha(a)$ a H, que está en $B(H)$. Esto nos permite ver a $C(X)$ en $B(H)$. De acuerdo a la cuenta que hicimos antes, resulta que $\mathcal{E}$ es una proyección en $\Phi(c_{00}(\Sigma))$ y, por lo tanto, también en $\overline{\Phi(c_{00}(\Sigma))} = \overline{\Phi(\ell^1(\Sigma))} \cong C^*(\Sigma)$. Vimos también que tiene norma uno. Este mapa es el que nos permitirá ver que la proyección $E_1 : \ell^1(\Sigma) \to C(X)$ se puede extender a una proyección fiel de norma uno, que denotaremos $E_* : C^*(\Sigma) \to C(X)$.

Podemos ahora observar cómo son los coeficientes de Fourier viendo $C^*(\Sigma)$ como una subálgebra de $B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$. Para eso usaremos la proyección $\mathcal{E}$. Dado $a \in C^*(\Sigma)$, el n-ésimo coeficiente de Fourier de a es $a(n) = \mathcal{E}(a\lambda_n^*)$. Se tiene en este caso que un elemento a de $C^*(\Sigma)$ está determinado por sus coeficientes de Fourier, y lo escribiremos como

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\lambda_n.$$

Al igual que pasaba cuando hablamos sobre los coeficientes de Fourier en el Capítulo 2, la suma es simplemente formal, no quiere decir que haya convergencia en norma ni convergencia en la topología fuerte de operadores. Dados $a, b \in C^*(\Sigma)$, los coeficientes de Fourier de la involución y el producto son de la siguiente forma:

$$a^*(n) = \alpha^n(a(-n)^*) = \alpha\left(\overline{a(n)}\right) \in C(X),$$

$$ab(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\alpha^k(b(n-k)) \in C(X).$$

Recordemos que decimos que una proyección P es fiel si $P(a^*a) = 0$ implica que $a = 0$. Vimos en el Capítulo 2 que E_1, la proyección canónica de $\ell^1(\Sigma)$ en $C(X)$, es fiel.

Teorema 4.2. La proyección $E_1 : \ell^1(\Sigma) \to C(X)$ se extiende a una proyección fiel $E_* : C^*(\Sigma) \to C(X)$ que tiene norma uno.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la cuenta que hicimos antes, en $c_{00}(\Sigma)$ (y por lo tanto también en $\ell^1(\Sigma)$) se tiene que $\mathcal{E}\circ\Phi = \pi\circ E_1$. Recordemos que como π es un *-isomorfismo de C^*-álgebras, es automáticamente isométrico. Denotemos $\|\cdot\|_*$ a la norma de $C^*(\Sigma)$, y sea $a \in \ell^1(\Sigma)$. Se tiene

$$\|E_1(a)\| = \|\pi(E_1(a))\| = \|\mathcal{E}(\Phi(a))\| \leq \|\Phi(a)\| = \|a\|_*.$$

Tenemos entonces que E_1 es contractiva con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, por lo que podemos extenderla a una proyeción E_* de $C^*(\Sigma)$ que tiene norma uno. Veamos que es fiel. Sea $a \in C^*(\Sigma)$, pensado como un operador de $B(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(a^*a) = a^*a(0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*(n)\alpha^n(a(-n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^n(a(-n)^*)\alpha^n(a(-n))\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{-n}\left(\overline{a(n)}a(n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)\circ\sigma^n|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

y es igual a 0 si y solo si $a(n) = 0$ para todo entero n. Esto último equivale a que $a = 0$. Luego, como π es inyectiva y $\pi\circ E_* = \mathcal{E}\circ\Phi$, resulta que E_* es fiel.

□

2. Sistema dinámico inducido por una representación

Veremos ahora cómo una representación de $C^*(\Sigma)$ induce un sistema dinámico en un subconjunto cerrado de X que es invariante bajo σ. Esta será una herramienta sumamente útil para luego probar las equivalencias del tipo de las que trabajamos en el capítulo anterior.

Supongamos que tenemos una representación $\widetilde{\pi} = \pi\times u$ de $C^*(\Sigma)$, y consideremos su núcleo $\ker(\pi) = \{f \in C(X) : \pi(f) = 0\}$, que es un ideal cerrado de $C(X)$. Por lo tanto, existe un subconjunto cerrado X_π de X tal que $\ker(\pi) = \{f \in C(X) : f|_{X_\pi} = 0\}$. Además, si $f \in \ker(\pi)$, tenemos

$$\pi(\alpha(f)) = u\pi(f)u^* = 0,$$

de donde $\ker(\pi)$ es invariante por α. Análogamente podemos ver que es invariante bajo α^{-1}, por lo que, de acuerdo al Lema 3.2, resulta que X_π es invariante bajo σ y su inversa.

Consideremos el cociente $C(X)/\ker(\pi)$. Dos funciones f, g coinciden en el cociente si y solamente si coinciden en X_π, es decir, si $f|_{X_\pi} = g|_{X_\pi}$. Por lo tanto, podemos identificar $C(X)/\ker(\pi)$ con $C(X_\pi)$, y el mapa cociente es simplemente mandar una función f en su restricción a X_π, lo cual es sobreyectivo por el teorema de Tietze.

Por otro lado, $\pi(C(X))$ es una C^*-álgebra conmutativa con unidad, por lo que podemos expresarla como $C(X'_\pi)$, el espacio de funciones continuas en un espacio compacto Hausdorff.

Por último, tenemos que $C(X)/\ker(\pi) \cong \pi(C(X))$. Combinando todo lo anterior obtenemos:

$$C(X_\pi) \cong \frac{C(X)}{\ker(\pi)} \cong \pi(C(X)) \cong C(X'_\pi).$$

Por lo tanto, podemos identificar X_π con X'_π, y en este caso $\pi(f)$ es simplemente la restricción de f a X_π. La acción de σ se induce en X_π a través de $u = \widetilde{\pi}(\delta)$:

$$u\pi(f)u^* = \pi(\alpha(f)) = \alpha(f)|_{X_\pi} = f\circ\sigma^{-1}|_{X_\pi}$$

Denotamos σ_π a $\sigma|_{X_\pi}$, de donde obtenemos el sistema dinámico $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$. Este es el sistema dinámico inducido por la representación $\widetilde{\pi} = \pi\times u$.

Proposición 4.3. Sea $\widetilde{\pi} = \pi \times u$ una representación de $C^*(\Sigma)$ en un espacio de Hilbert H. Supongamos que el sistema dinámico inducido $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$ es topológicamente libre. Entonces existe una proyección de norma uno E_π de $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$ en $\pi(C(X))$ tal que se verifica que $E_\pi \circ \widetilde{\pi}(a) = \pi \circ E_*(a)$ para todo $a \in C^*(\Sigma)$. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\Sigma) & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & \widetilde{\pi}(C^*(\Sigma)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle E_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle E_\pi} \\ C(X) & \xrightarrow{\pi} & \pi(C(X)) \end{array}$$

Demostración. Recordemos que $c_{00}(\Sigma)$ es denso en $C^*(\Sigma)$ y, por lo tanto, $\widetilde{\pi}(c_{00}(\Sigma))$ es denso en $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$. Lo que haremos será definir E_π en $\widetilde{\pi}(c_{00}(\Sigma))$ y ver que es una proyección de norma uno en ese espacio. En particular, al ser contractiva, luego podremos extender E_π a $C^*(\Sigma)$.

Dado $\sum_k f_k\delta^k \in c_{00}(\Sigma)$, para que se cumpla el resultado tiene que ser

$$E_\pi\left(\widetilde{\pi}\left(\sum_k f_k\delta^k\right)\right) = \pi\left(E_*\left(\sum_k f_k\delta^k\right)\right) = \pi(f_0).$$

Definimos E_π en $\widetilde{\pi}(c_{00}(\Sigma))$ de la forma descrita arriba. Es claro que $E_\pi^2 = E_\pi$ en $\widetilde{\pi}(c_{00}(\Sigma))$ y, por lo tanto, también ocurrirá en $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$ cuando extendamos por continuidad más adelante. Tenemos que

$$\widetilde{\pi}\left(c_{00}(\Sigma)\right) = \left\{\sum_{k=-n}^{n} \pi(f_k)u^k : f_k \in C(X), n \in \mathbb{Z}\right\},$$

por lo que para que E_π sea una proyección de norma uno alcanza con probar que

$$\left\|\sum_{k=-n}^{n} \pi(f_k)u^k\right\| \geq \|\pi(f_0)\|.$$

Llamemos $a = \sum_{k=-n}^{n} \pi(f_k)u^k$. Si $\pi(f_0) = 0$, ya tenemos la desigualdad de arriba, por lo que podemos suponer que $\pi(f_0) \neq 0$. Además, por el teorema de Tietze podemos suponer que $\|f_0\| = \|\pi(f_0)\|$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\|f_0\| - 2\varepsilon > 0$. Sea $x_0 \in X_\pi$ tal que $|f(x_0)| = \|\pi(f_0)\|$. Definimos un entorno abierto Q de x_0 en X_π como:

$$Q = \{x \in X_\pi : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Como Σ_π es topológicamente libre, se tiene que hay algún punto no periódico y_0 en Q. Podemos tomar además un entorno U_0 de y_0, dentro de Q, tal que $\sigma^j(U_0) \cap \sigma^i(U_0) = \emptyset$ para todos i, j entre $-2n$ y $2n$, con $i \neq j$. Llamamos U_j a $\sigma^j(U_0)$.

Sea g tal que su restricción a X_π está soportada en U_0, tiene norma uno y además $\|\pi(g)\pi(f_0)\| \geq \|\pi(f_0)\| - \varepsilon$ (para esto alcanza con tomar $g(y_0) = 1$). Sea ξ un vector en H tal que $\|\pi(gf_0)\xi\| \geq \|\pi(gf_0)\| - \varepsilon$, y en particular tenemos que:

$$\|\pi(gf_0)\xi\| \geq \|\pi(gf_0)\| - \varepsilon \geq \|\pi(f_0)\| - 2\varepsilon.$$

Veamos ahora que el siguiente conjunto es ortogonal:

$$\left\{\pi(f_k)u^k\pi(g)\xi : -n \leq k \leq n\right\} \subset H.$$

Tomemos $-n \leq i < j \leq n$. Tenemos que:

$$\langle \pi(f_i)u^i\pi(g)\xi, \pi(f_j)u^j\pi(g)\xi\rangle = \langle \left(\pi(f_j)u^j\pi(g)\right)^* \pi(f_i)u^i\pi(g)\xi, \xi\rangle \tag{3}$$

Ahora, operando y utilizando la relación de covarianza obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\pi(f_j)u^j\pi(g)\right)^* \pi(f_i)u^i\pi(g) &= \pi(\overline{g})(u^j)^*\pi(\overline{f_j}f_i)u^i\pi(g) \\
&= (u^j)^* \left[u^j\pi(\overline{g})(u^j)^*\right] \pi(\overline{f_j}f_i)u^i\pi(g) \\
&= (u^j)^*\pi(\alpha^j(\overline{g})\overline{f_j}f_i)u^i\pi(g) \\
&= (u^j)^*\pi(\overline{f_j}f_i)u^i \left[(u^i)^*\pi(\alpha^j(\overline{g}))u^i\right] \pi(g) \\
&= (u^j)^*\pi(\overline{f_j}f_i)u^i\pi(\alpha^{j-i}(\overline{g})g).
\end{aligned}$$

Pero $\alpha^{j-i}(\overline{g})$ está soportada en U_{j-i} y g está soportada en U_0, que son conjuntos disjuntos, por lo que $\alpha^{j-i}(\overline{g})g = 0$. Luego el operador anterior es nulo, y en particular la ecuación (3) vale cero. Por lo tanto, el conjunto resulta ortogonal.

Luego, si calculamos la norma de $a\pi(g)\xi$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|a\pi(g)\xi\|^2 = \left\| \sum_{k=-n}^{n} \pi(f_k)u^k\pi(g)\xi \right\|^2 &= \sum_{k=-n}^{n} \|\pi(f_k)u^k\pi(g)\xi\|^2 \\
&\geq \|\pi(f_0)\pi(g)\xi\|^2 = \|\pi(gf_0)\xi\|^2 \geq (\|\pi(f_0)\| - 2\varepsilon)^2 > 0,
\end{aligned}$$

donde usamos en la segunda igualdad que los vectores son ortogonales. Luego:

$$\|a\pi(g)\xi\| \geq \|\pi(f_0)\| - 2\varepsilon.$$

Este argumento vale para ε arbitrariamente pequeños, de donde $\|a\pi(g)\| \geq \|f_0\|$. Como $\|a\pi(g)\| \leq \|a\|\|\pi(g)\|$ y $\|\pi(g)\| = 1$, concluimos que $\|a\| \geq \|f_0\|$, lo que termina la prueba. □

Un corolario directo de este resultado es el siguiente: si π es fiel, entonces automáticamente la representación $\widetilde{\pi} = \pi \times u$ también lo es. Esto se debe a que si $\widetilde{\pi}(a^*a) = 0$, tenemos

$$E_\pi\left(\widetilde{\pi}(a^*a)\right) = \pi\left(E_*(a^*a)\right) = 0,$$

y, como π es fiel, resulta $E_*(a^*a) = 0$. Ahora, recordemos que E_* es fiel, de donde $a = 0$. Por lo tanto, resulta $\widetilde{\pi}$ que es fiel.

Usando esto mismo podemos ver que $C^*(\Sigma_\pi)$, el producto cruzado asociado al sistema dinámico Σ_π inducido por la representación $\widetilde{\pi} = \pi \times u$, es isomorfo a la imagen de $\widetilde{\pi}$, es decir, $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$.

Corolario 4.4. Se tiene que $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$ es isomorfo a $C^*(\Sigma_\pi)$ si Σ_π es topológicamente libre.

Demostración. De acuerdo a lo recién mencionado, alcanza con encontrar una representación covariante (ϕ, u) de $(C(X_\pi), \mathbb{Z})$ tal que ϕ es inyectiva y la imagen de $\phi \times u$ es $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$.

Definimos $\phi : C(X_\pi) \to \widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$ como $\phi(f) = \pi(\widehat{f})$, donde $\widehat{f}$ es cualquier extensión continua de f a X. El mapa está bien definido, pues dadas dos extensiones de f, la resta de ellas se anula en X_π, por lo que está en $\ker(\pi)$. Utilizamos además la misma representación u de $\mathbb{Z}$ de la representación $\widetilde{\pi} = \pi \times u$.

Ahora, se tiene que $\phi \times u$ es una representación de $C^*(\Sigma_\pi)$, dado que (ϕ, u) es una representación covariante de $(C(X_\pi), \mathbb{Z})$. Esto último es claro debido a que, para toda $f \in C(X_\pi)$, se tiene que $u\phi(f)u^* = u\pi(\widehat{f})u^*$, donde $\widehat{f}$ es una extensión de f, y como (π, u) es una representación covariante, resulta $u\pi(\widehat{f})u^* = \pi(\alpha(\widehat{f})) = \phi(\alpha(f))$. Denotamos $\widetilde{\phi} = \phi \times u$, que resulta entonces ser una representación de $C^*(\Sigma_\pi)$.

Tenemos que ϕ es inyectiva: si $f \in C(X_\pi)$ es tal que $\phi(f) = 0$, tomamos $\widehat{f}$ una extensión a X y resulta $\pi(\widehat{f}) = 0$, de donde $f = \widehat{f}|_{X_\pi} = 0$. Como ϕ es inyectiva, el sistema dinámico que induce coincide con Σ_π, que es topológicamente libre, y de acuerdo a lo comentado antes del corolario, resulta que $\widetilde{\phi}$ también es inyectiva.

Ahora, si $f \in C(X)$, se tiene que $\pi(f) = \pi(\widehat{f|_{X_\pi}})$, donde $\widehat{f|_{X_\pi}}$ es una extensión de $f|_{X_\pi}$, dado que ambas funciones coinciden en X_π y por lo tanto su resta está en $\ker(\pi)$. Luego $\phi(f|_{X_\pi}) = \pi(f)$ y, por consiguiente, $\pi(C(X)) = \phi(C(X_\pi))$. Por lo tanto, $\widetilde{\phi}(C(X_\pi)) = \widetilde{\pi}(C(X))$. Luego resulta entonces que $\widetilde{\phi}$ es un isomorfismo entre $C^*(\Sigma_\pi)$ y $\widetilde{\pi}(C^*(\Sigma))$.

□

3. Propiedades cualitativas

Nos dedicaremos ahora a probar el diccionario de propiedades correspondiente a $C^*(\Sigma)$. Lo que sigue es un comentario previo, que usaremos durante la prueba del primer teorema.

En general, dado un ideal cerrado I de una C^*-álgebra A, tenemos una *-representación de A en un espacio de Hilbert cuyo núcleo es I. Para ver eso, observemos que A/I es una C^*-álgebra, por lo que el teorema de Gelfand-Naimark nos dice que existe una *-representación $\pi : A/I \to B(H)$ en un espacio de Hilbert H. Luego, si $q : A \to A/I$ es el mapa cociente, tenemos que $\pi \circ q$ es una *-representación de A en H. Como π es inyectiva, resulta que $\ker(\pi \circ q) = \ker(q) = I$. Usaremos esto en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 4.5. Supongamos que X tiene infinitos puntos. Entonces $C^*(\Sigma)$ es simple si y solamente si Σ es minimal.

Demostración. Veamos que si Σ es minimal entonces $C^*(\Sigma)$ es simple. Sea $\widetilde{\pi} = \pi \times u$ una representación no nula de $C^*(\Sigma)$. Como Σ es minimal, no existen cerrados invariantes propios, por lo que X_π tiene que coincidir con X. Ahora, como Σ es minimal y X tiene infinitos puntos, tenemos que Σ_π es topológicamente libre. Luego por el Corolario 4.4 tenemos que $\widetilde{\pi}$ es un *-isomorfismo. En particular, $\ker(\widetilde{\pi}) = \{0\}$. De acuerdo al comentario anterior, todo ideal cerrado propio de $C^*(\Sigma)$ es el núcleo de una *-representación. Pero como acabamos de ver, $\ker(\widetilde{\pi}) = \{0\}$ para toda toda representación no nula $\widetilde{\pi}$. Por lo tanto, no puede haber ideales propios cerrados en $C^*(\Sigma)$, es decir, $C^*(\Sigma)$ es simple.

Supongamos que Σ no es minimal, entonces existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x)$ no es denso. Luego $S = \overline{\mathcal{O}(x)}$ es un cerrado propio invariante de X. Sea $I = \{f \in C(X) : f|_S = 0\}$. Como I es un ideal propio, tenemos que $\|f - 1\| \geq 1$ para todo $f \in I$ (recordemos que todo elemento que esté a distancia menor a 1 de la unidad es invertible). Ahora, si consideramos J el ideal generado por I en $C^*(\Sigma)$, tenemos que $E_*(J) = I$. Luego, si tomamos $a \in J$ tenemos

$$\|a - 1\| \geq \|E_*(a - 1)\| = \|E_*(a) - 1\| \geq 1;$$

por lo tanto, J es un ideal propio y por lo tanto $C^*(\Sigma)$ no es simple. Esto prueba que la minimalidad de Σ implica que $C^*(\Sigma)$ es simple.

□

Usaremos el siguiente resultado en la prueba del teorema que le sigue, el cual describe cómo es la situación sobre la extensión de estados puros de $C(X)$ a $C^*(\Sigma)$. Por un estudio detallado de esto, ver [**9**, Capítulo 3].

PROPOSICIÓN 4.6. Sea $x \in X$ y sea $\mu_x : C(X) \to \mathbb{C}$ el estado puro asociado a x, dado por $\mu_x(f) = f(x)$. Se tiene que:

(1) Si x es periódico, entonces por cada $\lambda \in \mathbb{T}$ existe un estado puro $\phi_{x,\lambda} : C^*(\Sigma) \to \mathbb{C}$ de $C^*(\Sigma)$ que extiende a μ_x;
(2) Si x es no periódico, entoces existe un único estado puro $\phi_x : C^*(\Sigma) \to \mathbb{C}$ de $C^*(\Sigma)$ que extiende a μ_x, dado por $\phi_x = \mu_x \circ E_*$.

Usaremos en particular que cada estado puro asociado a un punto no periódico de Σ tiene una única extensión a $C^*(\Sigma)$.

TEOREMA 4.7. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

(1) Σ es topológicamente libre;
(2) Se tiene que $I \cap C(X) \neq \{0\}$ para todo ideal cerrado no nulo de $C^*(\Sigma)$;
(3) $C(X)$ es una C^*-subálgebra abeliana maximal de $C^*(\Sigma)$.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia entre (1) y (3) la probamos en el Teorema 2.5.

Supongamos que Σ es topológicamente libre y que I es un ideal cerrado de $C^*(\Sigma)$ tal que $I \cap C(X) = \{0\}$. Si $I \neq \{0\}$, existe $a \in I$ tal que $E_*(a) \in C(X)$ es una función no nula, y como $\mathrm{Aper}(\sigma)$ es denso en X existe un punto no periódico x tal que $E_*(a)(x) \neq 0$. Ahora, consideremos $q : C^*(\Sigma) \to C^*(\Sigma)/I$ el mapa cociente, y como $I \cap C(X) = \{0\}$, resulta que $q(C(X))$ es un encaje de $C(X)$ en el cociente. Por lo tanto, tenemos el estado puro en $\mu'_x : q(C(X)) \to \mathbb{C}$ dado por $\mu'_x(q(f)) = \mu_x(f) = f(x)$.

Si $\varphi_x : C^*(\Sigma)/I \to \mathbb{C}$ es un estado puro en el cociente que extienda a μ'_x, resulta que $\varphi_x \circ q$ es un estado puro de $C^*(\Sigma)$ que extiende a μ_x. Pero como $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$, hay un único estado puro en $C^*(\Sigma)$ que extiende a μ_x, que es $\mu_x \circ E_*$. Tiene que ser entonces $\varphi_x \circ q = \mu_x \circ E_*$. Pero tenemos por un lado que $\mu_x(E_*(a)) \neq 0$, y como $a \in I$, también tenemos que $\varphi_x(q(a)) = 0$, una contradicción. Esto prueba que (1) implica (2).

Para probar que (2) implica (1), vale la misma prueba que hicimos en el Teorema 3.1, teniendo en cuenta que toda *-representación de $\ell^1(\Sigma)$ en un espacio de Hilbert se extiende a una *-representación de $C^*(\Sigma)$ en el mismo espacio de Hilbert.

□

Para probar el resultado análogo a este para $\ell^1(\Sigma)$, utilizamos la propiedad de intersección del conmutante (Teorema 2.18). Este resultado es, en algún sentido, un primer acercamiento a un resultado equivalente para $C^*(\Sigma)$. Se tiene, de hecho, que la propiedad de intersección del conmutante vale para ideales arbitrarios en $C^*(\Sigma)$ (ver [**6**]).

El próximo resultado muestra que la primalidad de $C^*(\Sigma)$ equivale a la transitividad de Σ.

TEOREMA 4.8. Supongamos que X tiene infinitos puntos. Entonces $C^*(\Sigma)$ es prima si y solamente si Σ es transitivo.

DEMOSTRACIÓN. La prueba del Teorema 3.10 se adapta bien a este caso. En primer lugar, si Σ no es transitivo, hay dos abiertos invariantes no nulos O_1, O_2 tales que $X = \overline{O_1} \cup \overline{O_2}$. Definimos $\ker(\overline{O_i}) = \{f \in C(X) : f|_{\overline{O_i}} = 0\}$ y sea I_i el ideal cerrado en $C^*(\Sigma)$ generado por $\ker(\overline{O_i})$, para

$i = 1, 2$. Luego, como $E_*(I_i) = \ker(\overline{O_i})$, resulta que

$$E_*(I_1 \cap I_2) \subset E_*(I_1) \cap E_*(I_2) = \ker(\overline{O_1}) \cap \ker(\overline{O_2}) = \ker\left(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}\right) = \ker(X) = \{0\},$$

de donde $I_1 \cap I_2 = \{0\}$, por lo que $C^*(\Sigma)$ no es prima. Eso prueba que si $C^*(\Sigma)$ es prima entonces Σ es transitivo.

Vimos en la demostración del Teorema 3.10 que si X es infinito y Σ transitivo entonces Σ también es topológicamente libre. Sean I_1, I_2 ideales cerrados propios de $C^*(\Sigma)$, y supongamos que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Como Σ es topológicamente libre $I_i \cap C(X)$ es propio e invariante, y existe C_i cerrado e invariante tal que $I_i \cap C(X) = \ker(C_i)$, para $i = 1, 2$. Luego

$$\{0\} = I_1 \cap I_2 \cap C(X) = \ker(C_i) \cap \ker(C_2) = \ker(C_1 \cup C_2),$$

de donde $X = C_1 \cup C_2$. Luego los abiertos C_1° y C_1^c contradicen la transitividad de Σ.

$\square$

Capítulo 5

Relación entre las estructuras de ideales de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$

Durante los dos capítulos anteriores nos dedicamos al estudio, por separado, de $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$, respectivamente. En ambos casos nuestra filosofía era la misma: estudiar cómo propiedades dinámicas de Σ se traducen en propiedades analítico-algebraicas en las respectivas álgebras. Vimos las siguientes tres equivalencias (en algunos casos bajo la hipótesis extra de que el espacio X tenga infinitos puntos):

(1) Que Σ sea topológicamente libre corresponde con que $C(X)$ sea abeliana maximal;
(2) Que Σ sea minimal corresponde con que el álgebra sea simple;
(3) Que Σ sea transitivo corresponde con que el álgebra sea prima.

En los tres casos podemos elegir cualquiera de las dos álgebras que estudiamos, $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$, y esto nos da un medio para probar equivalencias entre las álgebras utilizando como puente el sistema dinámico base sobre el que ambas están construidas. Podemos entonces obtener las siguientes tres equivalencias:

(1) $C(X)$ es abeliana maximal en $\ell^1(\Sigma)$ si y solo si es abeliana maximal en $C^*(\Sigma)$;
(2) $\ell^1(\Sigma)$ es simple si y solo si $C^*(\Sigma)$ es simple;
(3) $\ell^1(\Sigma)$ es prima si y solo si $C^*(\Sigma)$ es prima.

Las tres equivalencias son relativas a la relación entre las estructuras de ideales de cada álgebra, pero fueron probadas sin estudiar cómo se relacionan entre sí tales estructuras. Nuestro objetivo ahora es justamente tratar de relacionar de forma más directa las estructuras de ideales $\ell^1(\Sigma)$ y $C^*(\Sigma)$. Esto parece natural de estudiar, puesto que $C^*(\Sigma)$ es la completación de $\ell^1(\Sigma)$ como C^*-álgebra.

Observemos que no es esperable poder traducir toda la estructura de ideales de una álgebra a la otra, puesto que ya vimos, por ejemplo, que $\ell^1(\Sigma)$ puede contener ideales cerrados que no son autoadjuntos, mientras que $C^*(\Sigma)$ no, dado que es una C^*-algebra.

Específicamente, probaremos el siguiente resultado: todo ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$, al clausurarlo con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, sigue siendo un ideal propio. La clave para probar este resultado serán los ideales primitivos, que son los núcleos de representaciones algebraicamente irreducibles. En principio, la noción de ideal primitivo puede depender del contexto en el que trabajemos, pues puede ser puramente algebraica o puede incorporar nociones analíticas. En este capítulo veremos que la noción algebraica nos es más conveniente para probar el resultado descrito antes. Veremos además condiciones para cuándo, una vez clausurado un ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$ con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, podemos recuperarlo de forma natural intersectándolo con $\ell^1(\Sigma)$.

Como dijimos que los ideales primitivos serán la clave para probar lo que queremos, primeramente nos dedicaremos a hacer un estudio más sistemático de las representaciones irreducibles de $\ell^1(\Sigma)$. Si bien son las representaciones algebraicamente irreducibles las que serán claves, también tendremos que relacionarlas con una familia de *-representaciones en espacios de Hilbert inducidas por puntos de X.

Las referencias principales de este capítulo serán [**4**] y [**5**], y en menor medida usaremos resultados de [**2**], [**3**] y [**7**].

1. Representaciones irreducibles de $\ell^1(\Sigma)$

El primer problema al que nos enfrentamos es identificar las distintas nociones de irreducibilidad, y decidir cuáles nos serán de utilidad. Supongamos que tenemos $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$, donde E es un espacio vectorial y $\mathcal{L}(E)$ denota los operadores de E. En este caso, dado que no tenemos topología en E, podemos hablar de que la representación sea algebraicamente irreducible: esto es que que no haya subespacios invariantes no triviales.

Por otro lado, supongamos ahora que tenemos una representación $\pi : \ell^1(\Sigma) \to B(E)$, donde E es un espacio de Banach. Dado que ahora tenemos topología en E, tiene sentido hablar de que la representación sea topológicamente irreducible: esto es que no tenga subespacios invariantes cerrados no triviales. Es claro que ser algebraicamente irreducible implica ser topológicamente irreducible.

Más aún, si la representación es en un espacio de Hilbert, aparece la noción de *-representación, la cual nos dice además que el núcleo de la representación es autoadjunto. Dado que $\ell^1(\Sigma)$ es una estructura analítica, quizás parece más natural estudiar los casos donde la representación es en algún espacio que tenga topología; sin embargo, como veremos más adelante, es el contexto algebraico el que nos será de mayor utilidad. De todas formas, veremos que podemos muchas veces relacionar representaciones de tipo algebraico con representaciones de tipo analítico. La clave de esto es el resultado siguiente. La prueba que presentamos es una adaptación de la demostración de [**19**, Teorema 4.2.7].

Proposición 5.1. Sean A un álgebra de Banach y E un espacio vectorial. Supongamos que $\pi : A \to \mathcal{L}(E)$ es una representación algebraicamente irreducible. Entonces existe una norma en E tal que π es contractiva. En particular, π es continua respecto a esa norma.

Demostración. Fijamos $\xi \in E$ no nulo; como π es algebraicamente irreducible, tenemos que $E = \{\pi(a)\xi : a \in A\}$. Definimos

$$M = \{a \in A : \pi(a)\xi = 0\}.$$

Se tiene que M es un ideal izquierdo de A y, por lo tanto, define una representación $L^{A/M} : A \to \mathcal{L}(A/M)$ dada por

$$L_a^{A/M}(b + M) = ab + M.$$

Como $E = \{\pi(a)\xi : a \in A\}$, el mapa de A en E dado por $a \mapsto \pi(a)\xi$ es sobreyectivo. Claramente es lineal, y su núcleo es M, por lo que induce un isomorfismo $V : A/M \to E$ dado por $V(a + M) = \pi(a)\xi$. Se verifica directamente que $V \circ L_a^{A/M} = \pi(a) \circ V$, de donde las representaciones π y $L^{A/M}$ son algebraicamente equivalentes. Luego, como π es algebraicamente irreducible, $L^{A/M}$ también lo es.

Veamos que, como $L^{A/M}$ es irreducible, M tiene que ser un ideal izquierdo maximal. Sea M' un ideal izquierdo tal que $M \subset M'$, entonces M' también es un subespacio de A y M'/M un subespacio de A/M. Como M es un ideal izquierdo, se tiene que M'/M es invariante bajo $L^{A/M}$ y, como $L^{A/M}$ es irreducible, resulta que M'/M es trivial. Luego $M' = A$ o $M' = M$.

Concluimos que M es un ideal izquierdo maximal. Ahora, como la clausura de M también es un ideal izquierdo propio, resulta que M es cerrado y, por lo tanto, A/M es un espacio de Banach con la norma cociente.

Veamos que $L^{A/M}$ es contractiva. Denotamos $\|\cdot\|_c$ la norma cociente en A/M, que recordemos está definida de la siguiente forma:

$$\|a + M\|_c = \text{ínf}\left\{\|a - m\| : m \in M\right\}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}\|L_a^{A/M}(b + M)\|_c = \|ab + M\|_c &= \underset{m\in M}{\text{ínf}}\|ab - m\| \leq \underset{x\in M}{\text{ínf}}\|ab - ax\| \\ &\leq \|a\| \underset{x\in M}{\text{ínf}}\|b - x\| = \|a\|\|b + M\|_c\end{aligned}$$

Luego $\|L_a^{A/M}\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Ahora, como V es un isomorfismo y A/M un espacio de Banach, podemos definir en E la norma $\|\cdot\|_c' = \|\cdot\|_c \circ V^{-1}$. Con esta norma E es un espacio de Banach y V es una isometría. Como V es un isomorfismo de espacios de Banach e intercambia las representaciones, tenemos que $L^{A/M}$ y π son topológicamente equivalentes. Además $\|\pi(a)\| = \|L_a^{A/M}\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Es decir, π es contractiva.

□

Esto nos dice que podemos ver toda representación algebraicamente irreducible de un álgebra de Banach como una representación continua.

Un comentario que vale la pena hacer es que estas distinciones entre las nociones de irreducibilidad son otra muestra de la dificultad extra que supone estudiar $\ell^1(\Sigma)$ en lugar de $C^*(\Sigma)$: en una C^*-álgebra, como dijimos en los preliminares, las nociones de ser algebraicamente irreducible y ser topológicamente irreducible coinciden para *-representaciones es espacios de Hilbert. El hecho de que $\ell^1(\Sigma)$ no sea una C^*-álgebra hace que tengamos que ser más cuidadosos al respecto.

Antes de continuar, hagamos algún comentario sobre la existencia y unicidad de representaciones de $\ell^1(\Sigma)$. Como mencionamos cuando hablamos de representaciones covariantes, una representación de $\ell^1(\Sigma)$ se encuentra determinada por su valor en δ y por su restricción a $C(X)$. Esto sigue valiendo si consideramos representaciones a espacios de Banach. Concretamente, supongamos que $\pi : \ell^1(\Sigma) \to B(E)$ es una representación continua de $\ell^1(\Sigma)$ en un espacio de Banach E. Entonces π induce una representación continua, llamémosle $\rho : C(X) \to B(E)$, que es la restricción de π a $C(X)$. Además, si llamamos T a $\pi(\delta)$, tenemos que está sujeta a lo que llamamos relación de covarianza: $T\rho(f)T^{-1} = \rho(\alpha(f))$. En el contexto de representaciones covariantes, teníamos que T era un operador unitario, de donde automáticamente tiene norma uno; en el caso de que sea una representación en espacios de Banach, podemos en su lugar afirmar que existe $M \geq 0$ tal que $\|T^n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto surge simplemente de la continuidad de π: sabemos que existe M' tal que $\pi(B(0, M')) \subset B(0, 1)$ en $B(E)$, y definiendo $M = (M')^{-1}$, tenemos que $\pi(B(0, 1)) \subset B(0, M)$. Como $\|\delta^n\| = 1$ para todo n, resulta que $\|T^n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por último, dadas ρ y T que cumplan las condiciones que describimos, existe una única representación continua $\pi : \ell^1(\Sigma) \to B(E)$ tal que $\pi|_{C(X)} = \rho$ y $\pi(\delta) = T$. Dejamos parte de lo observado en el lema que sigue, que lo usaremos luego.

Lema 5.2. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to B(E)$ una representación continua de $\ell^1(\Sigma)$ en el espacio de Banach E. Entonces existe $M \geq 0$ tal que $\|\pi(\delta^n)\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nos será de utilidad que podamos expresar información de una representación en función del espacio X. Con esto en mente, supongamos que tenemos una representación $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ y tomemos $x \in X$. Podemos definir el siguiente subespacio:

$$E_x = \{v \in E : \pi(f)v = f(x)v \text{ para toda } f \in C(X)\}.$$

E_x es un subespacio propio común a toda la familia de operadores $\pi(C(X))$. El siguiente lema nos da información sobre estos subespacios y, además, muestra cómo la acción de δ involucra al sistema dinámico.

Lema 5.3. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación y sea $x \in X$. Para todo entero n se tiene que $\pi(\delta^n)E_x = E_{\sigma^n(x)}$. Además, si $x_1, \dots, x_k$ son puntos distintos de X, entonces la suma $\sum_{i=1}^k E_{x_i}$ es una suma directa de subespacios.

Demostración. Veamos la primera parte. Un elemento arbitrario de $\pi(\delta)E_x$ es de la forma $\pi(\delta)v$, con $v \in E_x$. Sea $f \in C(X)$. Tenemos

$$\begin{aligned}\pi(f)\left(\pi(\delta)v\right) &= \pi(\delta)\left(\pi(\delta^{-1}f\delta)v\right) = \pi(\delta)(\pi(\alpha^{-1}(f))v)\\ &= \pi(\delta)(\alpha^{-1}(f)(x)v) = f(\sigma(x))\left(\pi(\delta)v\right),\end{aligned}$$

y como esto vale para toda $f \in C(X)$, concluimos que $\pi(\delta)v$ pertenece a $E_{\sigma(x)}$. Luego $\pi(\delta)E_x \subset E_{\sigma(x)}$. Haciendo un argumento análogo con δ^{-1} obtenemos $\pi(\delta^{-1})E_x \subset E_{\sigma^{-1}(x)}$. Luego:

$$E_{\sigma(x)} = \pi(\delta)\pi(\delta^{-1})E_{\sigma(x)} \subset \pi(\delta)E_x,$$

que es la inclusión que nos faltaba para tener la igualdad $\pi(\delta)E_x = E_{\sigma(x)}$. Fácilmente vemos por inducción que $\pi(\delta^n)E_x = E_{\sigma^n(x)}$ para todo entero n. Esto prueba la primera parte.

Sean $x_1, \dots, x_k$ puntos distintos de X, y sea $v = \sum_{i=1}^k v_i$, con $v_i \in E_{x_i}$. Para probar que la suma es directa basta con suponer que $v = 0$ y probar que cada v_i es nulo. Fijamos i_0; como los puntos $x_1, \dots, x_k$ son distintos, podemos tomar f continua tal que vale 1 en x_{i_0} y se anula en el resto de x_j, con $j \neq i_0$. Tenemos:

$$\pi(f)v = \pi(f)\left(\sum_{i=0}^k v_i\right) = \sum_{i=0}^k \pi(f)v_i = \sum_{i=0}^k f(x_i)v_i = v_{i_0}.$$

Pero como $v = 0$, en particular tenemos que $\pi(f)v = 0$, de donde $v_{i_0} = 0$. Repitiendo esto para cada $j = 1, \dots, k$, obtenemos que v_j es nulo.

□

Cada vez que escribamos E_x en lo que sigue, nos estaremos refiriendo al espacio descrito arriba.

1.1. Representaciones inducidas por puntos periódicos.

Lo primero que haremos será esclarecer la situación sobre las representaciones algebraicamente irreducibles de dimensión finita. Aquí volverán a aparecer un tipo de *-representaciones que ya nos hemos cruzado, que se encuentran asociadas a puntos periódicos de Σ y números complejos unimodulares. Recordemos brevemente cómo se definen: sea x un punto de periodo n, y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ unimodular. Sea H espacio de Hilbert de dimensión finitia con base ortonormal

$\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$. Dada $f \in C(X)$, definimos $\pi_{x,\lambda}(f)$ como el operador representado en la base anterior por la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} f(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\sigma(x)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\sigma^{n-1}(x)) \end{pmatrix},$$

y definimos $\pi_{x,\lambda}(\delta)$ como el operador representado en la misma base por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\pi_{x,\lambda} : \ell^1(\Sigma) \to B(H)$ queda definida en un elemento genérico de la siguiente forma:

$$\pi_{x,\lambda}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \delta^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi_{x,\lambda}(f_k)\pi_{x,\lambda}(\delta)^k.$$

La situación que encontraremos es la siguiente: toda representación algebraicamente irreducible de $\ell^1(\Sigma)$ de dimensión finita será algebraicamente equivalente a una del tipo $\pi_{x,\lambda}$. Eso nos permitirá además concluir que todo ideal primitivo proveniente de una representación algebraicamente irreducible de dimensión finita es el núcleo de una *-representación y, por lo tanto, es cerrado y autoadjunto.

Primero obtendremos algo más de información al respecto de las representaciones $\pi_{x,\lambda}$. Supongamos que $L \subset H$ es un subespacio no nulo invariante por $\ell^1(\Sigma)$ de $\pi_{x,\lambda}$. Si

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_i \in L$$

es no nulo, entonces existe i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$. Como los puntos de la órbita de x son n distintos, podemos tomar una función $f \in C(X)$ tal que $f(\sigma^{i_0}(x)) = 1$ y f se anula en el resto de la órbita. Como L es invariante, tenemos que $\pi_{x,\lambda}(f)v \in L$. Es decir:

$$\pi_{x,\lambda}(f)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \pi_{x,\lambda}(f) e_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(\sigma^i(x)) e_i = a_{i_0} e_{i_0} \in L.$$

Como $a_{i_0} \neq 0$, obtenemos que e_{i_0} pertenece a L. Luego, dejando actuar $\pi_{x,\lambda}(\delta)$ sobre e_{i_0} obtenemos que e_j pertenece a L para todo $j = 0, \cdots, n-1$. Esto quiere decir que $L = H$, lo cual nos permite concluir que $\pi_{x,\lambda}$ es algebraicamente irreducible. Es claro que eso implica que además es topológicamente irreducible. Resumimos esto en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.4. Sean $x \in \mathrm{Per}_n(\sigma)$ y $\lambda \in \mathbb{T}$. Entonces la *-representación $\pi_{x,\lambda}$ es algebraicamente irreducible.

El siguiente resultado mostrará cuándo dos representaciones de este tipo son equivalentes.

PROPOSICIÓN 5.5. Sean $x, y \in \mathrm{Per}(\sigma)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$. Son equivalentes:

(1) $\pi_{x,\lambda}$ y $\pi_{y,\mu}$ son algebraicamente equivalentes;
(2) las órbitas de x e y coinciden, y $\lambda = \mu$.

Demostración. Llamemos H' al espacio de representación de $\pi_{y,\mu}$ para evitar confusiones con el espacio H de la representación $\pi_{x,\lambda}$. Recordemos que dos representaciones son algebraicamente equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $U : H \to H'$ tal que para todo $f \in \ell^1(\Sigma)$ se tiene que $U \circ \pi_{x,\lambda}(f) = \pi_{y,\mu}(f) \circ U$.

Supongamos primero que las representaciones son algebraicamente equivalentes. Como las dimensiones de H y H' son el periodo de x y el periodo de y, respectivamente, tenemos que x e y tienen que tener el mismo periodo. Sea n el periodo de ambos puntos. Como $\pi_{x,\lambda}(\delta^n) = \lambda Id$ y $\pi_{y,\mu}(\delta^n) = \mu Id$, tiene que ser $\lambda = \mu$.

Sea $\{e_i : i = 0, \dots, n-1\}$ la base ortonormal de H. Por la definición de $\pi_{x,\lambda}$, se tiene que e_i pertenece a $E_{\sigma^i(x)}$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, donde al decir E_x estamos usando la notación del Lema 5.3. Usando el mismo lema, como los puntos $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n-1}(x)$ son todos distintos, tenemos que la suma de subespacios

$$\sum_{i=0}^{n} E_{\sigma^i(x)}$$

es directa. Pero cada uno de esos subespacios tiene dimensión por lo menos 1, y la dimensión de E es n, por lo que resulta que cada uno tiene que tener dimensión exactamente 1 y que E es la suma directa de esos subespacios. Ahora, usando nuevamente el Lema 5.3, podemos concluir que $E_z = \{0\}$ para todo z que no esté en la órbita de x. Repetimos el argumento para $\pi_{y,\mu}$, donde denotamos E'_z a los subespacios de H' para distinguirlos de los asociados a la otra representación. Sea $U : H \to H'$ el isomorfismo obtenido de que las representaciones sean algebraicamente equivalentes, tomemos $f \in C(X)$ arbitraria y $v \in E_x$ no nulo. Tenemos

$$f(x)U(v) = U(\pi_{x,\lambda}(f)(v)) = \pi_{y,\mu}(f)(U(v)),$$

es decir que $U(v) \in E'_x$ y $U(v) \neq 0$. Pero como $E'_z = \{0\}$ a no ser que z esté en la órbita de y, resulta que la órbita de x está incluida en la órbita de y. Haciendo un razonamiento análogo obtenemos que las órbitas coinciden. Esto prueba que (1) implica (2).

Veamos ahora el recíproco. Como las órbitas coinciden, basta con probarlo para $y = \sigma(x)$, es decir, queremos probar que $\pi_{x,\lambda} : \ell^1(\Sigma) \to H$ es equivalente a $\pi_{\sigma(x),\lambda} : \ell^1(\Sigma) \to H'$. Denotemos $\{e_i : i = 0, \dots, n-1\}$ y $\{e'_j : j = 0, \dots, n-1\}$ a las bases ortonormales de H y H', respectivamente. Sea n el periodo de la órbita. Definimos $U : H \to H'$ dado por $U(e_i) = \lambda e'_{i-1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, y $U(e_0) = e'_{n-1}$. Se verifica directamente que U implementa la equivalencia algebraica.

$\square$

Observación 5.6. El operador U que definimos es de hecho una isometría. Esto quiere decir que, en el caso de la familia de representaciones que estamos trabajando, que la equivalencia sea algebraica es equivalente a que sea unitaria o topológica.

Tenemos entonces entendida cómo es la situación con las representaciones inducidas por puntos periódicos y números complejos unimodulares. Veremos ahora que, en realidad, toda representación algebraicamente irreducible de dimensión finita es algebraicamente equivalente a una del tipo $\pi_{x,\lambda}$. Esto completará el panorama de las representaciones de dimensión finita algebraicamente irreducibles de $\ell^1(\Sigma)$.

Proposición 5.7. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible de $\ell^1(\Sigma)$ en un espacio vectorial de dimensión finita E. Entonces existen $x \in \mathrm{Per}(\sigma)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que π es algebraicamente equivalente a $\pi_{x,\lambda}$.

Demostración. Como dijimos en la sección anterior, podemos darle una norma a E tal que π es continua.

Como $\pi(C(X))$ es una familia conmutativa de operadores en un espacio de dimensión finita, existe un vector propio e_0 común a toda la familia. Es decir, para cada $f \in C(X)$ existe μ_f tal que $\pi(f)e_0 = \mu_f e_0$. Ahora, se verifica directamente que:

- $\mu_{\lambda f} = \lambda \mu_f$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C(X)$;
- $\mu_{f+g} = \mu_f + \mu_g$ y $\mu_{fg} = \mu_f \mu_g$ para todas $f, g \in C(X)$;

es decir, el mapa $f \mapsto \mu_f$ es un carácter de $C(X)$. Recordemos que llamamos espacio de Gelfand al conjunto de caracteres de $C(X)$, y lo denotamos como $\widehat{C(X)}$. Recordamos además que en los preliminares comentamos que X es homeomorfo al espacio de Gelfand de $C(X)$, donde el homeomorfismo es el mapa $x \mapsto \mathrm{ev}_x$, con $\mathrm{ev}_x : C(X) \to \mathbb{C}$ dado por $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$. En particular, esto quiere decir que existe $x \in X$ tal que $\mathrm{ev}_x(f) = \mu_f$ para todo $f \in C(X)$. En otras palabras, tenemos que $\mu_f = f(x)$ y, por lo tanto, $\pi(f)e_0 = f(x)e_0$, de donde $e_0 \in E_x$.

Lo que nos interesa del argumento anterior es que concluimos que existe $x \in X$ tal que $E_x \neq \{0\}$. Lo que haremos ahora es ver que x tiene que ser periódico, para luego ver que π es algebraicamente equivalente a una representación inducida por x.

En primer lugar, el Lema 5.3 nos permite ver que los puntos $x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{\mathrm{dim(E)}}(x)$ no pueden ser todos distintos. Como $\pi(\delta)$ es invertible y $\pi(\delta^n)E_x = E_{\sigma^n(x)}$, si los puntos son distintos tenemos que la suma de subespacios $\sum_{i=0}^{\dim(E)} E_{\sigma^i(x)}$ es directa, y entonces tenemos que

$$\dim(E) \geq \dim\left(\sum_{i=0}^{\dim(E)} E_{\sigma^i(x)}\right) = \sum_{i=0}^{\dim(E)} \dim(E_{\sigma^i(x)}) \geq \dim(E) + 1,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, x efectivamente tiene que ser un punto periódico. Sea n el periodo de x.

Tenemos que $\pi(\delta)^n E_x = E_{\sigma^n(x)} = E_x$. Es decir que $\pi(\delta)^n$ es un operador en E_x y, por lo tanto, tiene algún valor propio $\lambda \neq 0$ y un vector propio no nulo e_0 asociado a él. Tenemos

$$\|\pi(\delta)^{kn} e_0\| = |\lambda|^k \|e_0\|,$$

y por otro lado, como π es una representación continua en un espacio normado, por el Lema 5.2 tenemos que existe $M > 0$ tal que $\|\pi(\delta)^k\| < M$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que $|\lambda|^k$ está acotado uniformemente, de donde tiene que ser $\lambda \in \mathbb{T}$. Encontramos $x \in \mathrm{Per}(\sigma)$ y $\lambda \in \mathbb{T}$ que necesitamos.

Para terminar, definimos $e_j = \pi(\delta^j)e_0 \in E_{\sigma^j(x)}$. Como la suma de los subespacios $E_{\sigma^j(x)}$ es directa, el conjunto $\{e_j : j = 0, \dots, n-1\}$ es linealmente independiente. Observemos que cada

e_j es un vector propio de $\pi(C(X))$:

$$\begin{aligned}\pi(f)e_j &= \pi(\delta^j)\pi(\delta^{-j})\pi(f)\pi(\delta^j)e_0 \\ &= \pi(\delta^j)\pi(\alpha^{-j}(f))e_0 \\ &= \alpha^{-j}(f)(x)\pi(\delta^j)e_0 \\ &= \alpha^{-j}(f)(x)e_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} E_{\sigma^i(x)},$$

L es un subespacio cerrado no nulo de E, invariante bajo $\pi(\delta), \pi(\delta^{-1})$ y $\pi(C(X))$ y, como π es continua, resulta invariante bajo toda la acción de $\ell^1(\Sigma)$. Como π es algebraicamente irreducible, resulta que $L = E$ y los e_j forman una base de E. Con respecto a esta base, la acción de π coincide con la de $\pi_{x,\lambda}$. Esto termina la prueba.

□

Observación 5.8. Durante la demostración de la proposición probamos lo siguiente: si S es un subespacio propio común a $\pi(C(X))$, con π representación arbitraria, entonces existe $z \in X$ tal que $S = E_z$. Usaremos esto nuevamente en otro momento.

El resultado anterior quiere decir que si miramos la familia de representaciones de dimensión finita algebraicamente irreducibles de $\ell^1(\Sigma)$ a menos de equivalencia algebraica, podemos parametrizarla por $\mathbb{T} \times (\mathrm{Per}(\sigma)/\mathbb{Z})$. Más aún, tenemos que para cada representación algebraicamente irreducible podemos darle al espacio de representación una estructura de espacio de Hilbert de forma tal que sea una *-representación.

Como hemos mencionado antes, nos interesan las representaciones algebraicamente irreducibles porque los ideales primitivos, que son los núcleos de representaciones algebraicamente irreducibles, nos serán sumamente útiles más adelante. Con eso en mente, calcularemos explícitamente cómo son los núcleos de las representaciones $\pi_{x,\lambda}$ y veremos cómo queda la intersección de todos estos núcleos fijado un $x \in \mathrm{Per}(\sigma)$.

Proposición 5.9. Sean $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ell^1(\Sigma)$ y $x \in \mathrm{Per}_n(\sigma)$.

(1) Sea $\lambda \in \mathbb{T}$, entonces $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^n \in \ker(\pi_{x,\lambda})$ si y solo si

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda^l f_{ln+j}(y) = 0$$

para todo y en la órbita de x y para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

(2) Sea $P_x = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{T}} \ker(\pi_{x,\lambda})$. Entonces $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in P_x$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que f_k se anula en la órbita de x.

Demostración. Veamos la parte (1). Tenemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ker(\pi_{x,\lambda})$ si y solo si $\pi_{x,\lambda}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k)e_i = 0$ para todo $i = 0,\ldots,n-1$. Se tiene:

$$\begin{aligned}0 = \pi_{x,\lambda}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right)e_i &= \pi_{x,\lambda}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{ln+j}\delta^{ln+j}\right)e_i\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \pi_{x,\lambda}(f_{ln+j})\pi_{x,\lambda}(\delta^{ln+j})e_i,\end{aligned}$$

donde estamos usando que $\pi_{x,\lambda}$ es continua.

Fijado j tenemos que $\pi_{x,\lambda}(\delta^{ln+j})e_i$ son todos vectores múltiplos del mismo vector de la base ortonormal de H. Además, la acción de $C(X)$ es diagonal sobre esa base. Por lo tanto, que la suma de arriba sea igual a 0 es equivalente a que para todo $j = 0, 1\ldots, n-1$ se tenga que:

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \pi_{x,\lambda}(f_{ln+j})\pi_{x,\lambda}(\delta^{ln+j})e_i = 0.$$

Operando obtenemos

$$\begin{aligned}0 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \pi_{x,\lambda}(f_{ln+j})\pi_{x,\lambda}(\delta^{ln+j})e_i &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \pi_{x,\lambda}(f_{ln+j})\pi_{x,\lambda}(\delta^{j})\lambda^l e_i,\\ = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda^l \pi_{x,\lambda}(f_{ln+j})e_{i+j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda^l f_{ln+j}(\sigma^{i+j}(x))e_{i+j},\end{aligned}$$

donde $i + j$ lo pensamos módulo n. Como e_{i+j} aparece en todos los sumandos, lo anterior es equivalente a

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda^l f_{ln+j}(\sigma^{i+j}(x)) = 0,$$

y como i varía entre 0 y $n-1$, se tiene que $\sigma^{i+j}(x)$ recorre toda la órbita de x. Luego, como esto vale para todo $j = 0,\ldots,n-1$, queda probada la parte (1).

Para probar la parte (2) usaremos la inyectividad de la transformada de Fourier en $\ell^1(\mathbb{Z}) = L^1(\mathbb{Z})$, donde la medida de conteo en $\mathbb{Z}$ es una medida de Haar. Recordemos que dada $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$, su transformada de Fourier es $\widehat{h} \in C(\widehat{\mathbb{Z}}) = C(\mathbb{T})$ dada por $\widehat{h}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)z^n$ para todo $z \in \mathbb{T}$.

Fijados j y un punto y en la órbita de x, el mapa $\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dado por $l \mapsto f_{ln+j}(y)$ está en $\ell^1(\mathbb{Z})$. Luego, si tomamos $\lambda \in \mathbb{T}$ y vemos la transformada de Fourier de Ψ evaluada en λ, queda

$$\widehat{\Psi}(\lambda) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{ln+j}(y)\lambda^l = 0,$$

donde estamos usando que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ker(\pi_{x,\lambda})$ y la parte (1). Es decir, $\widehat{\Psi} = 0$, y como la transformada de Fourier es inyectiva, tiene que ser $\Psi = 0$. Luego $f_{ln+j}(y) = 0$ para todo l, y esto vale para cualquier y en la órbita de x y $j = 0,\ldots,n-1$. Esto es equivalente a decir que f_k se anula en toda la órbita de x para todo $k \in \mathbb{Z}$.

□

Escribamos explícitamente la igualdad que obtuvimos en la parte (2) de la proposición anterior, pues la usaremos más adelante como herramienta para describir un ideal primitivo arbitrario:

$$\bigcap_{\lambda\in\mathbb{T}} \ker(\pi_{x,\lambda}) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k : f_k(y)|_{\mathcal{O}(x)} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde recordemos que $\mathcal{O}(x)$ denota la órbita de x.

Lo último que veremos en esta sección es que si X es finito, entonces $\ell^1(\Sigma)$ solo admite representaciones algebraicamente irreducibles de dimensión finita. Para eso usaremos el siguiente lema.

Lema 5.10. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación. Supongamos que $\{x\}$ es un conjunto abierto y χ_x es su función característica. En este caso, χ_x es continua, $\pi(\chi_x)$ es una proyección y $\pi(\chi_x)E = E_x$.

Demostración. Sean $\pi(\chi_x)v \in \pi(\chi_x)E$ y $f \in C(X)$. Entonces,

$$\pi(f)\pi(\chi_x)v = \pi(f\chi_x)v = \pi(f(x)\chi_x)v = f(x)\pi(\chi_x)v,$$

de donde $\pi(\chi_x)v \in E_x$. Eso prueba que $\pi(\chi_x)E \subset E_x$. Sea ahora $v \in E_x$. Se tiene $\pi(\chi_x)v \in \pi(\chi_x)E$. Pero además tenemos $\pi(\chi_x)v = \chi_x(x)v = v$. Luego $v \in \pi(\chi_x)E$. Concluimos que $\pi(\chi_x)E = E_x$. Que $\pi(\chi_x)$ es una proyección se verifica directamente.

□

Proposición 5.11. Si X es finito, entonces toda representación algebraicamente irreducible de $\ell^1(\Sigma)$ es de dimensión finita.

Demostración. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ algebraicamente irreducible. Podemos normar el espacio E de forma que π sea continua. Como X es finito tenemos que $1 = \sum_{x\in X} \chi_x$, donde χ_x denota la función característica de $\{x\}$. Luego, como π no es nula, existe $x_0 \in X$ tal que $\pi(\chi_{x_0}) \neq 0$. Como X es finito, x_0 tiene que ser un punto periódico. Sea n el periodo de x_0. Como los puntos $x_0, \sigma(x_0), \ldots, \sigma^{n-1}(x_0)$ son todos distintos, la suma de subespacios

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} E_{\sigma^i(x_0)} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi(\chi_{\sigma^i(x_0)})E = \pi\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\sigma^i(x_0)}\right) E \neq \{0\}$$

es directa. Ahora, cada $E_{\sigma^i(x_0)}$ es invariante por la acción de $C(X)$, por lo que S también lo es. Como además $\pi(\delta)E_{\sigma^i(x_0)} = E_{\sigma^{i+1}(x_0)}$ y el periodo de x_0 es n, resulta que S es invariante por $\pi(\delta)$, y análogamente ocurre con $\pi(\delta^{-1})$. Por lo tanto, como π es continua, resulta que S es un subespacio invariante de $\ell^1(\Sigma)$ y, como la representación es algebraicamente irreducible, tiene que ser $S = E$.

Tenemos que $\pi(\delta^n)E_{\sigma^i(x_0)} = E_{\sigma^{i+n}(x_0)} = E_{\sigma^i(x_0)}$, es decir, cada $E_{\sigma^i(x_0)}$ es invariante por $\pi(\delta^n)$. Luego, si $f \in C(X)$ y $v \in E_{\sigma^i(x_0)}$, tenemos

$$\pi(\delta^n)\pi(f)v = \pi(\delta^n)f(\sigma^i(x_0))v = \pi(f)\pi(\delta^n)v,$$

es decir, $\pi(\delta^n)$ conmuta con $\pi(C(X))$. Claramente $\pi(\delta^n)$ conmuta con $\pi(\delta)$ y $\pi(\delta^{-1})$, de donde por continuidad conmuta con $\pi(\ell^1(\Sigma))$. Luego, como π es algebraicamente irreducible, el Lema de Schur dice que $\pi(\delta^n)$ tiene que ser un múltiplo escalar de la identidad. Es decir que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(\delta^n) = \lambda$. Ahora, el Lema 5.2 nos dice que $\|\pi(\delta^{kn})\| = |\lambda|^k$ se encuentra acotado uniformemente para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que tiene que ser $\lambda \in \mathbb{T}$. Ahora, tomemos $e \in E_{x_0}$ no nulo. Como $\pi(\delta^i)e \in E_{\sigma^i(x_0)}$, siendo la suma de esos subespacios directa y además siendo $\pi(\delta)$ invertible, tenemos que el conjunto $\{e, \pi(\delta)e, \ldots, \pi(\delta^{n-1})e\}$ es linealmente independiente.

Además, la clausura del subespacio generado por dichos vectores es invariante por $\pi(C(X))$, $\pi(\delta)$ y $\pi(\delta)^{-1}$, por lo que, por la continuidad de π, resulta invariante por $\pi(\ell^1(\Sigma))$. Nuevamente, como π es algebraicamente irreducible, resulta que el subespacio generado tiene que ser igual a E. Con esto es claro que π es algebraicamente equivalente a $\pi_{x_0,\lambda}$, lo que termina la prueba. $\square$

1.2. Representaciones inducidas por puntos no periódicos.

Habiendo entendido la situación de las representaciones irreducibles de dimensión finita, nos interesa saber qué ocurre con las de dimensión infinita. Vimos que en el caso de dimensión finita, las representaciones irreducibles eran inducidas por puntos periódicos (donde la dimensión de la representación es el periodo del punto) y, de hecho, encontramos cuáles son todas. En el caso que ahora nos concierne, no podremos obtener una imagen tan clara, pero veremos primero que podemos obtener representaciones de dimensión infinita en distintos espacios de Banach que son inducidas por puntos no periódicos.

Introduciremos ahora una familia de representaciones en espacios de sucesiones. Recordemos brevemente qué son estos espacios. Sea $p \in [1, \infty)$, $\ell^p(\mathbb{Z})$ es el espacio de sucesiones complejas con norma p finita. Es decir, una sucesión $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ está en $\ell^p(\mathbb{Z})$ si

$$\|s\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^p} < \infty.$$

Con esta norma, $\ell^p(\mathbb{Z})$ es un espacio de Banach. Denotemos $e_n \in \ell^p(\mathbb{Z})$ como la sucesión que tiene un 1 en la n-ésima entrada y 0 en todas las demás. Se verifica que el espacio generado por $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Recordemos además que, si $p = 2$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio de Hilbert.

Sea $S : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ el shift a derecha: el operador determinado por $S(e_n) = e_{n+1}$. Ahora, tomemos $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y veamos de qué forma induce una representación de $\ell^1(\Sigma)$. Definimos en $C(X)$ el operador determinado por $\pi_x^p(f)e_n = f(\sigma^n(x))e_n$, para toda $f \in C(X)$. Ahora, extendemos a la representación $\pi_x^p : \ell^1(\Sigma) \to B(\ell^p(\mathbb{Z}))$ de la siguiente forma:

$$\pi_x^p\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_x^p(f_n)S^n.$$

Se tiene que π_x^p es contractiva. Además, si $p = 2$, tenemos que π_x^2 es una *-representación en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Tenemos entonces una familia de representaciones inducidas por puntos no periódicos de Σ. Nos dedicaremos ahora a estudiar cuándo estas representaciones son irreducibles. Veremos que si $p = 1$, π_x^1 siempre es algebraicamente irreducible, pero si $p \in (1, \infty)$, entonces π_x^p no es algebraicamente irreducible pero sí topológicamente irreducible. Observemos que esto es uno de los aspectos en los que $\ell^1(\Sigma)$ es más complicada que $C^*(\Sigma)$: π_x^2 es una *-representación en un espacio de Hilbert que es topológicamente irreducible pero no es algebraicamente irreducible, lo cual es algo que no puede pasar en $C^*(\Sigma)$, pues en una C^*-álgebra ambas nociones son equivalentes.

De la misma forma que vimos cuándo eran equivalentes las representaciones inducidas por puntos periódicos, estudiaremos cuándo las representaciones recién introducidas son equivalentes entre sí. Tenemos aquí una dificultad extra en el hecho de que el espacio de representación varía si cambiamos el valor de $p \in [1, \infty)$. Veamos primero qué pasa con dos representaciones suponiendo que fijamos $p \in [1, \infty)$.

PROPOSICIÓN 5.12. Sean $x, y \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y sea $p \in [1, \infty)$. Son equivalentes:

(1) π_x^p y π_y^p son algebraicamente equivalentes;
(2) π_x^p y π_y^p son topológicamente equivalentes;
(3) Las órbitas de x e y coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que en la Observación 5.8 vimos que todo subespacio propio común de $\pi(C(X))$ es de la forma E_z, con $z \in X$. Ahora, supongamos que E_z es un subespacio propio de la representación π_x^p. Sea $v \in E_z$ no nulo; lo escribimos en la forma $v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$. Como $v \in E_z$, tenemos por un lado que $\pi_x^p(f)v = f(z)v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n f(z) e_n$ para toda $f \in C(X)$. Por otro lado, tenemos que:

$$\pi_x^p(f)v = \pi_x^p(f)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \pi_x^p(f) e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n f(\sigma^n(x)) e_n$$

Luego tiene que ser $\lambda_n f(z) = \lambda_n f(\sigma^n(x))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $v \neq 0$, tenemos algún n_0 tal que $\lambda_{n_0} \neq 0$. En ese caso resulta que $f(z) = f(\sigma^{n_0}(x))$ para todo $f \in C(X)$, y como $C(X)$ separa los puntos de X, resulta que $z = \sigma^{n_0}(x)$. Además, justamente como $C(X)$ separa puntos, λ_{n_0} es el único λ_i no nulo, porque de haber otro tendríamos que x es periódico. Por lo tanto, $E_z = E_{\sigma^{n_0}(x)}$ y es un espacio unidimensional generado por e_{n_0}.

Todo este argumento implica que si π_x^p y π_y^p son algebraicamente equivalentes, entonces las órbitas de x e y deben coincidir. Esto prueba que (1) implica (3). Que (2) implica (1) es evidente.

Resta ver que (3) implica (2). En este caso tenemos que $y = \sigma^j(x)$ para algún entero j. En ese caso es claro que S^{-j} (donde recordemos que S es el shift en $\ell^p(\mathbb{Z})$) implementa la equivalencia topológica.

□

Ahora, en el caso en que tengamos dos representaciones π_x^p, π_y^r con $p < r$, qué ocurre con la equivalencia algebraica no es tan claro. Veremos más adelante que no pueden ser algebraicamente equivalentes si $p = 1$, pero cuando ambos son distintos de 1, no es claro qué puede ocurrir. Sin embargo, si nos fijamos simplemente en la equivalencia topológica de las representaciones, podemos afirmar lo que sigue.

PROPOSICIÓN 5.13. Sean $x, y \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y sean $p, r \in [1, \infty)$. Entonces π_x^p y π_y^r son topológicamente equivalentes si y solamente si $p = r$ y las órbitas de x e y coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Si $p = r$ y las órbitas de x e y coinciden, por la proposición anterior resulta que π_x^p y π_y^r son topológicamente equivalentes. Ahora, si π_x^p y π_y^r son topológicamente equivalentes, tendríamos que $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^r(\mathbb{Z})$ son isomorfos, lo cual ocurre únicamente si $p = r$. Una vez tenemos que $p = r$, la proposición anterior nos dice que las órbitas deben coincidir.

□

Ahora estudiaremos la irreducibilidad, algebraica y topológica, de estas representaciones. Lo que ocurre dependerá del valor de $p \in [1, \infty)$. Si $p = 1$, veremos que π_x^1 es algebraicamente irreducible. Si $p \in (1, \infty)$, π_x^p no será algebraicamente irreducible, pero será topológicamente irreducible.

Veremos primero el caso $p = 1$, que es el más complicado. Probaremos algunos lemas técnicos que necesitaremos.

Lema 5.14. Sea $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y $\rho = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, con $\lambda_0 = 1$. Dados $\tau \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $\varepsilon > 0$, existe $a \in \ell^1(\Sigma)$ tal que $\|\pi_x^1(a)\rho - \tau\| \le \varepsilon$ y $\|a\| \le \|\tau\|$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $\tau = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n e_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Definimos para cada entero positivo N

$$\rho_N = \sum_{n=-N}^{N} \lambda_n e_n, \text{ y } \tau_N = \sum_{n=-N}^{N} \mu_n e_n.$$

Ahora, como $\|\rho - \rho_N\|$ y $\|\tau - \tau_N\|$ tienden ambos a cero, existen $N_1, N_2 > 0$ tales que

$$\|\tau\|\|\rho - \rho_{N_1}\| + \|\tau - \tau_{N_2}\| < \varepsilon.$$

Tomamos ahora una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$, $f(\sigma^j(x)) = 0$ para todo $j = -N_1, \ldots, -1$ y $j = 1, \ldots, N_1$, y $\|f\| = 1$. En ese caso tenemos

$$\pi_x^1(f)\rho_{N_1} = \pi_x^1(f)\left(\sum_{n=-N_1}^{N_1} \lambda_n e_n\right) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \lambda_n f(\sigma^n(x)) e_n = e_0.$$

Ahora, si definimos $a = \left(\sum_{n=-N_2}^{N_2} \mu_n \delta^n\right) f \in \ell^1(\Sigma)$, tenemos que:

$$\pi_x^1(a)\rho_{N_1} = \pi_x^1\left(\sum_{n=-N_2}^{N_2} \mu_n \delta^n\right)\pi_x^1(f)\rho_{N_1} = \pi_x^1\left(\sum_{n=-N_2}^{N_2} \mu_n \delta^n\right) e_0 = \sum_{n=-N_2}^{N_2} \mu_n e_n = \tau_{N_2}.$$

Además tenemos que:

$$\|a\| \le \left\|\sum_{n=-N_2}^{N_2} \mu_n \delta^n\right\| \|f\| = \sum_{n=-N_2}^{N_2} |\mu_n| \le \|\tau\|$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\|\pi_x^1(a)\rho - \tau\| &\le \|\pi_x^1(a)(\rho - \rho_{N_1})\| + \|\pi_x^1(a)\rho_{N_1} - \tau_{N_2}\| + \|\tau_{N_2} - \tau\| \\
&\le \|a\|\|\rho - \rho_{N_1}\| + \|\tau_{N_2} - \tau\| \le \|\tau\|\|\rho - \rho_{N_1}\| + \|\tau_{N_2} - \tau\| \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.15. Sean $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y $\rho = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, con $\lambda_0 = 1$. Dados $\tau \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $\varepsilon > 0$, existe $a \in \ell^1(\Sigma)$ tal que $\pi_x^1(a)\rho = \tau$ y $\|a\| \le (1+\varepsilon)\|\tau\|$.

Demostración. Podemos asumir que $\tau \neq 0$. Fijemos $0 < \gamma < 1$. Primero, probaremos inductivamente que existen $a_n \in \ell^1(\Sigma)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que para todo entero positivo N se tiene que

$$\left\|\pi_x^1\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)\rho - \tau\right\| \le \gamma^N \|\tau\|, \text{ y además } \|a_N\| \le \gamma^{N-1}\|\tau\|. \tag{4}$$

El caso base es simplemente aplicar el lema anterior para $\varepsilon = \gamma\|\tau\|$. Ahora supongamos que tenemos $a_1, \ldots, a_N \in \ell^1(\Sigma)$ tales que para todo $1 \leq n \leq N$ se tiene que

$$\left\| \pi_x^1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \rho - \tau \right\| \leq \gamma^n \|\tau\|.$$

Ahora, podemos tomar $\varepsilon = \gamma^{N+1}\|\tau\|$ y, nuevamente aplicando el lema anterior, obtenemos $a_{N+1} \in \ell^1(\Sigma)$ tal que

$$\gamma^{N+1}\|\tau\| \geq \left\| \pi_x^1(a_{N+1})\rho - \left(\tau - \pi_x^1 \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right) \rho \right) \right\| = \left\| \pi_x^1 \left(\sum_{j=1}^{N+1} a_i \right) \rho - \tau \right\|$$

y, además, $\|a_{N+1}\| \leq \gamma^N \|\tau\|$. Esto completa la inducción. Ahora, si consideramos $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, tenemos que

$$\|a\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^{i-1}\|\tau\| = \|\tau\| \frac{1}{1-\gamma} < \infty,$$

de donde a pertenece a $\ell^1(\Sigma)$. Además, dado $\varepsilon > 0$, como lo anterior vale para todo $0 < \gamma < 1$, podemos lograr $\|a\| \leq (1+\varepsilon)\|\tau\|$. Ahora, como $a = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i$ y π_x^1 es continua, usando (4) tenemos que $\pi_x^1(a) = \tau$, dado que γ^N tiende a 0. Esto termina la prueba.

$\square$

Teniendo en cuenta el último lema, es claro que π_x^1 tiene que ser algebraicamente irreducible. Dado cualquier subespacio no nulo L invariante bajo $\pi_x^1(\ell^1(\Sigma))$, tomando cualquier $\rho' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda'_n e_n$, se tiene que existe n_0 tal que $\lambda'_{n_0} \neq 0$. Como L es invariante se tiene que $\rho = (\lambda'_{n_0})^{-1}(\pi_x^1(\delta^{-n_0})\rho') \in L$, y ρ está en las hipótesis del Lema 5.15, por lo que para cualquier $\tau \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tenemos que existe $a \in \ell^1(\Sigma)$ tal que $\pi_x^1(a)\rho = \tau$. Como L es invariante, resulta $\tau \in L$. Luego $L = \ell^1(\mathbb{Z})$, de donde π_x^1 es algebraicamente irreducible. Dejamos esto escrito en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.16. Sea $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$, entonces la representación π_x^1 es algebraicamente irreducible. En particular, es topológicamente irreducible.

Veamos ahora qué ocurre si $p \in (1, \infty)$. En este caso, el argumento es bastante más directo.

TEOREMA 5.17. Sea $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$ y sea $p \in (1, \infty)$. Entonces la representación π_x^p es topológicamente irreducible pero no es algebraicamente irreducible.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que no es algebraicamente irreducible. Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n \in \ell^1(\Sigma)$, se tiene

$$\pi_x^p \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta^n \right) e_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\sigma^n(x)) e_n.$$

Ahora, si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n \in \ell^p(\mathbb{Z})$ es tal que pertenece a $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))e_0$, tiene que ser

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\sigma^n(x)) e_n$$

Luego, resulta que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(\sigma^n(x))| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\| \leq \infty,$$

dado que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n$ está en $\ell^1(\Sigma)$. Por lo tanto, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$ pertenece a $\ell^1(\mathbb{Z})$, que es un subespacio de $\ell^p(\mathbb{Z})$. Resulta entonces que $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))e_0 \subset \ell^1(\mathbb{Z})$ es un subespacio propio de $\ell^p(\mathbb{Z})$.

De hecho, en realidad tenemos la igualdad $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma)) = \ell^1(\mathbb{Z})$, dado que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$ está en $\ell^1(\mathbb{Z})$, basta con tomar $f_n \in C(X)$ con $\|f_n\| = |\lambda_n|$ tal que $f_n(\sigma^n(x)) = \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En ese caso resulta que $\pi_x^p(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n)e_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$. Concluimos entonces que $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))e_0 = \ell^1(\mathbb{Z})$, que es un subespacio propio invariante de $\ell^p(\mathbb{Z})$ dado que $p > 1$, de donde π_x^p no es algebraicamente irreducible.

Veamos ahora que sí es topológicamente irreducible. Supongamos que L es un subespacio cerrado no nulo invariante por $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))$. Entonces existe $\rho = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$ no nulo y, como L es invariante bajo $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))$, podemos suponer que $\lambda_0 = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos N entero positivo tal

$$\sum_{|n|>N} |\lambda_n|^p < \varepsilon^p.$$

Tomamos una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$, $\|f\| = 1$, y $f(\sigma^j(x)) = 0$ para todo $j = -N, \cdots, -1$ y para todo $j = 1, \cdots, N$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\pi_x^p(f)\rho - e_0\| &= \left\|\pi_x^p(f)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n\right) - e_0\right\| = \left\|\sum_{|n|>N} f(\sigma^n(x))\lambda_n e_n\right\| \\
&\leq \left(\sum_{|n|>N} |\lambda_n|^p\right)^{1/p} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como L es invariante y cerrado, resulta que contiene a e_0, y nuevamente la invarianza nos dice que contiene a $\pi_x^p(\ell^1(\Sigma))e_0 = \ell^1(\mathbb{Z})$. Luego, como L es cerrado y $\ell^1(\mathbb{Z})$ denso en $\ell^p(\mathbb{Z})$, resulta que $L = \ell^p(\mathbb{Z})$. Esto prueba que π_x^p es topológicamente irreducible.

$\square$

Tenemos el siguiente resumen sobre la situación de las representaciones π_x^p inducidas por puntos no periódicos de Σ. Si $p = 1$, tenemos que π_x^1 es algebraicamente irreducible y, por lo tanto, también es topológicamente irreducible. Ahora, si $p \in (1, \infty)$, tenemos que π_x^p no es algebraicamente irreducible pero es topológicamente irreducible. Queremos remarcar en particular que, cuando $p = 2$, tenemos que π_x^2 es una *-representación en un espacio de Hilbert, que es topológica pero no algebraicamente irreducible. Esto es una de las dificultades estructurales extras que presenta $\ell^1(\Sigma)$ respecto a $C^*(\Sigma)$, puesto que, como ya hemos mencionado antes, ambas nociones de irreducibilidad coinciden en C^*-álgebras.

Una observación interesente es que las representaciones π_x^p inducidas por puntos no periódicos forman parte de una clase más general de representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ asociadas a medidas de X invariantes bajo σ. Sin entrar en demasiados detalles, dada una medida de Borel σ-invariante μ en X, induce una representación π_μ^p de $\ell^1(\Sigma)$ en $L^p(X, \mu)$, con $p \in [1, \infty]$, donde $f \in C(X)$ actúa como un operador de multiplicación y la acción de δ está dada por $(\pi_\mu^p(\delta)f)(x) = f(\sigma^{-1}(x))$ para todo $f \in L^p(X,\mu)$. Si la medida μ es la medida de conteo en la órbita de un punto no periódico x, resulta entonces que π_μ^p es isométricamente equivalente a π_x^p. Un estudio algo más detallado de estas representaciones, bajo algunas hipótesis extras, se encuentra en [**8**].

El siguiente resultado describe el núcleo de las representaciones π_x^p. Probará ser de utilidad en la siguiente sección.

Proposición 5.18. Sean $p \in [1,\infty)$ y $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$. Entonces

$$\ker(\pi_x^p) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k : f_k|_{\mathcal{O}(x)} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como consecuencia, el núcleo de π_x^p no depende de p y coincide con el núcleo de una *-representación, por lo que es un ideal autoadjunto.

Demostración. Tenemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k \in \ker(\pi_x^p)$ si y solo si para todo $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\pi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k)e_i = 0$. Luego

$$0 = \pi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\delta^k\right)e_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi(f_k)\pi(\delta)^k e_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(\sigma^{i+k}(x))e_{i+k},$$

lo que equivale a que $f_k(\sigma^{i+k}(x)) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como esto además vale para todo $i \in \mathbb{Z}$, resulta $f_k|_{\mathcal{O}(x)} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

□

2. Clausura de ideales

Gracias a lo estudiado en la sección anterior, contamos con una gran cantidad de representaciones algebraicamente irreducibles con las que trabajar. De hecho, dado cualquier punto $x \in X$, tenemos alguna representación irreducible inducida por él: si $x \in \mathrm{Per}(\sigma)$, para todo $\lambda \in \mathbb{T}$ tenemos la representación $\pi_{x,\lambda}$ de la Sección 1.1, o si $x \in \mathrm{Aper}(\sigma)$, tenemos la representación π_x^1 de la sección anterior.

Recordemos que un ideal primitivo es el núcleo de una representación algebraicamente irreducible. El motivo por el que nos interesan este tipo de ideales es que podemos ver que todo ideal maximal de un álgebra es un ideal primitivo. En vistas de que nos interesa saber qué pasa cuando tomamos un ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$ y lo clausuramos respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, si podemos probar que la clausura de un ideal maximal de $\ell^1(\Sigma)$ sigue siendo propio en $C^*(\Sigma)$, entonces lo mismo pasará para cualquier otro ideal no trivial, pues estará contenido en uno maximal. Esto nos permite entonces centrar la atención en los ideales primitivos. Tenemos ya una cantidad de ideales primitivos en los núcleos de las representaciones algebraicamente irreducibles mencionadas antes pero, en general, estos no tienen por qué ser todos los ideales primitivos de $\ell^1(\Sigma)$.

El argumento anterior por sí solo no será suficiente para nuestros objetivos, pues no es claro que la clausura de un ideal primitivo en la norma de $C^*(\Sigma)$ siga siendo un ideal propio. Lo que haremos para solventar esto es asociar a cada ideal primitivo una familia de *-representaciones en espacios de Hilbert y, usando que la teoría de *-representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ coincide con la de $C^*(\Sigma)$, podremos ver que el ideal primitivo seguirá siendo un ideal propio.

Cómo resolvamos el problema de asociar una familia de *-representaciones a un ideal primitivo dependerá de si este es el núcleo de una representación de dimensión finita o de una representación de dimensión infinita.

Antes de continuar, fijemos la siguiente notación: dado un subconjunto $S \subset \ell^1(\Sigma)$, denotamos $\overline{S}^{C^*} \subset C^*(\Sigma)$ como la clausura de S respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$.

2.1. Ideales primitivos.

Lo primero que haremos es ver que la clausura de ideales primitivos respecto a norma de C^* es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$. El argumento dependerá de si la dimensión de la representación algebraicamente irreducible de la que proviene es finita o infinita.

Dimensión finita. El primer caso que resolveremos es cuando el ideal primitivo es $\ker(\pi)$ con π una representación algebraicamente irreducible de dimensión finita. Este caso es bastante directo con el trabajo que ya hemos hecho: la Proposición 5.7 nos dice que existen $x \in \operatorname{Per}(\sigma)$ y $\lambda \in \mathbb{T}$ tales que π es algebraicamente equivalente a $\pi_{x,\lambda}$. Luego

$$\overline{\ker(\pi)}^{C^*} = \overline{\ker(\pi_{x,\lambda})}^{C^*}.$$

Pero $\pi_{x,\lambda}$ es una *-representación de $\ell^1(\Sigma)$ en un espacio de Hilbert, por lo que se extiende por continuidad a una *-representación $\widetilde{\pi}_{x,\lambda}$ de $C^*(\Sigma)$, y es tal que $\overline{\ker(\pi_{x,\lambda})}^{C^*} \subset \ker(\widetilde{\pi}_{x,\lambda})$. Ahora, como $\pi_{x,\lambda}$ es no nula, $\widetilde{\pi}_{x,\lambda}$ también es no nula, de donde si $\ker(\pi_{x,\lambda})$ era un ideal propio, entonces su clausura $\overline{\ker(\pi_{x,\lambda})}^{C^*}$ es un ideal propio en $C^*(\Sigma)$.

Concluimos que $\overline{\ker(\pi)}^{C^*}$ es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$ si $\ker(\pi)$ es un ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$.

Dimensión infinita. Este caso es más complejo que el anterior. Lo que haremos será un argumento del mismo tipo del que hicimos en la Sección 2 del Capítulo 4, pero para representaciones algebraicamente irreducibles: dada $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ algebraicamente irreducible, veremos que induce un sistema dinámico Σ_π con buenas propiedades, puesto que la representación es algebraicamente irreducible. Repetiremos brevemente cómo se obtiene el sistema dinámico inducido y desarrollaremos un poco más el argumento.

Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible en un espacio vectorial E. Como π es algebraicamente irreducible, podemos normar el espacio E de forma que π sea continua. Tenemos que $\{f \in C(X) : \pi(f) = 0\}$ es un ideal cerrado e invariante por α, por lo que existe un subconjunto X_π cerrado de X e invariante por σ. Eso nos induce un sistema dinámico $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$, donde σ_π es simplemente la restricción a X_π de σ, el cual a su vez induce un producto cruzado $\ell^1(\Sigma_\pi)$. Nos gustaría ver que π induce una representación π' en $\ell^1(\Sigma_\pi)$.

Podemos considerar el mapa $\mathcal{R}_{X_\pi} : \ell^1(\Sigma) \to \ell^1(\Sigma_\pi)$ dado por

$$\mathcal{R}_{X_\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n|_{X_\pi} \delta_\pi^n.$$

Como $\|f_n\|_\infty \geq \|f_n|_{X_\pi}\|_\infty$, el mapa está bien definido y, además, es contractivo y respeta la involución. El teorema de extensión de Tietze nos dice que es sobreyectivo. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{K}(X_\pi) = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta^n \in \ell^1(\Sigma) : f_n|_{X_\pi} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\right\},$$

que es de hecho el núcleo de $\mathcal{R}_{X_\pi}$, por lo que es un ideal cerrado y autoadjunto de $\ell^1(\Sigma)$. Dado un elemento $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n \in \mathcal{K}(X_\pi)$, se tiene que $f_n \in \ker(\pi)$ para todo n y, como π es continua, resulta que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta^n \in \ker(\pi)$. Concluimos que $\mathcal{K}(X_\pi) \subset \ker(\pi)$.

Consideramos además la proyección al cociente $\mathcal{Q}_{X_\pi} : \ell^1(\Sigma) \to \ell^1(\Sigma)/\mathcal{K}(X_\pi)$. Como $\mathcal{K}(X_\pi) \subset \ker(\pi)$, existe $\widetilde{\pi} : \ell^1(\Sigma)/\mathcal{K}(X_\pi) \to \mathcal{L}(E)$ tal que $\pi = \widetilde{\pi} \circ \mathcal{Q}_{X_\pi}$. Por otro lado, como $\ker(\mathcal{R}_{X_\pi}) = \mathcal{K}(X_\pi)$, existe un isomorfismo $\mathcal{R}'_{X_\pi} : \ell^1(\Sigma)/\mathcal{K}_{X_\pi} \to \ell^1(\Sigma_\pi)$ tal que $\mathcal{R}_{X_\pi} = \mathcal{R}'_{X_\pi} \circ \mathcal{Q}_{X_\pi}$. Podemos resumir todo esto en que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\ell^1(\Sigma_\pi) & \ell^1(\Sigma) \arrow[l, "\mathcal{R}_{X_\pi}"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathcal{Q}_{X_\pi}"] & \mathcal{L}(E) \\
& \frac{\ell^1(\Sigma)}{\mathcal{K}(X_\pi)} \arrow[ul, dashed, "\cong", "\mathcal{R}'_{X_\pi}"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\pi}"]
\end{tikzcd}$$

Ahora, podemos definir $\pi' : \ell^1(\Sigma_\pi) \to \mathcal{L}(E)$ como $\pi' = \widetilde{\pi} \circ (\mathcal{R}'_{X_\pi})^{-1}$, y se tiene que $\pi = \pi' \circ \mathcal{R}_{X_\pi}$. Es decir, nos queda el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\ell^1(\Sigma) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathcal{R}_{X_\pi}"'] & \mathcal{L}(E) \\
\ell^1(\Sigma_\pi) \arrow[ur, dashed, "\pi'"]
\end{tikzcd}$$

Veamos que π' es inyectiva en $C(X_\pi)$. Si $f \in C(X_\pi)$ verifica que $\pi'(f) = 0$, tomamos $\widetilde{f} \in C(X)$ una extensión continua de f, y se tiene que $\pi(\widetilde{f}) = \pi'(f) = 0$, de donde $\widetilde{f}|_{X_\pi} = 0$. Es decir, $f = 0$ y, por lo tanto, π' es inyectiva en $C(X_\pi)$. Es claro que como π es algebraicamente irreducible, π' también lo es. Veremos ahora qué es lo que podemos afirmar en caso de que π sea de dimensión infinita.

Lema 5.19. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible en un espacio vectorial E de dimensión infinita. Entonces el sistema dinámico inducido Σ_π es topológicamente libre.

Demostración. Veamos primero que si la representación es algebraicamente irreducible entonces el sistema dinámico Σ_π es transitivo. Como venimos haciendo, podemos normar E de forma de que π sea continua, dado que es algebraicamente irreducible. Si suponemos que Σ_π no es transitivo, tenemos dos abiertos no vacíos U, V de X_π tales que $\sigma^n(U) \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos:

$$S = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \sigma^n\left(X_\pi \setminus V\right);$$

se tiene que S es un subconjunto cerrado de X_π que contiene a U y no intersecta a V. Como S es cerrado, podemos considerar I_S el ideal cerrado de $C(X)$ dado por

$$I_S = \{f \in C(X_\pi) : f|_S = 0\}.$$

Como el complemento de S contiene a V, $I_S \neq \{0\}$. Ahora, como π' es inyectiva en $C(X_\pi)$, tenemos que $\pi'(I_S)E \neq \{0\}$. Es claro que $\pi'(I_S)E$ es invariante por $\pi'(C(X_\pi))$. Veamos que también es invariante bajo $\pi'(\delta_{X_\pi})$, donde denotamos δ_{X_π} al elemento unitario δ de $\ell^1(\Sigma_\pi)$ para evitar confusiones. Sea $\pi'(f)v \in \pi(I_s)E$, con $f \in I_S$. Tenemos

$$\pi'(\delta_{X_\pi})\pi'(f)v = \pi'(\alpha(f))(\pi'(\delta_{X_\pi})v) \in \pi'(I_S)E,$$

dado que I_S es invariante bajo α porque S es invariante bajo σ_π. Análogamente vemos que $\pi'(I_S)E$ es invariante también bajo $\pi'(\delta_\pi^{-1})$, por lo que usando la continuidad de π' tenemos que es invariante bajo $\pi'(\ell^1(\Sigma_\pi))$. Luego $\overline{\pi'(I_S)E}$ es un subespacio cerrado π'-invariante de E, por lo que tiene que ser igual a E. Por lo tanto, todo vector de E es el límite de vectores de la forma $\pi(g)v$ con $g \in I_S$. Pero si tomamos $f \in C(X_\pi)$ no nula y soportada en U, como U está incluido en S resulta que $fI_S = \{0\}$, de donde $\pi'(f)\pi'(g)v = \pi'(fg)v = 0$. Resulta entonces $\pi'(f) = 0$, y esto contradice la inyectividad de π' en $C(X_\pi)$. Por lo tanto, Σ_π tiene que ser transitivo.[1]

Veremos ahora que usando que la representación es de dimensión infinita tenemos que Σ_π es topológicamente libre. En este caso, como π' es algebraicamente irreducible, por la Proposición 5.11 X_π tiene que tener infinitos puntos. Que X_π sea infinito y el sistema dinámico sea transitivo es suficiente para que sea topológicamente libre. Veamos esto.

Supongamos que Σ_π no es topológicamente libre, es decir, que los puntos no periódicos no son densos. Entonces existe un abierto U tal que $\overline{U} \cap \overline{\mathrm{Aper}(\sigma_\pi)} = \emptyset$. Claramente

$$\overline{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{Per}_n(\sigma_\pi) \cap \overline{U}\right),$$

por lo que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Per}_m(\sigma_\pi) \cap \overline{U}$ tiene interior no vacío. Sea m_0 el menor entero positivo que cumple eso. Se tiene que $\mathrm{Per}_{m_0}(\sigma_\pi)^\circ$ es un abierto invariante no vacío y, como Σ_π es transitivo, tiene que ser denso en X_π.

Ahora, si tomamos x un punto interior de $\mathrm{Per}_{m_0}(\sigma_\pi)$ y V un entorno compacto de x tal que $V, \sigma_\pi(V), \cdots, \sigma_\pi^{m_0-1}(V)$ son disjuntos dos a dos, tenemos que la unión de esos conjuntos es invariante y tiene interior interior no vacío. Luego, como Σ_π es transitivo, tiene que ser

$$X_\pi = \bigcup_{i=0}^{m_0-1} \sigma_\pi^i(V).$$

Ahora, si hay algún otro elemento $y \in V$, eligiendo W compacto más pequeño que V tal que no contiene a y obtendríamos que $X_\pi = \bigcup_{i=0}^{m_0-1} \sigma_\pi^i(W)$, lo que es una contradicción, pues $\bigcup_{i=0}^{m_0-1} \sigma_\pi^i(W)$ está contenido estrictamente en $\bigcup_{i=0}^{m_0-1} \sigma_\pi^i(V)$. Concluimos finalmente que Σ_π es topológicamente libre.

□

Tenemos entonces que si π es una representación algebraicamente irreducible, el sistema dinámico Σ_π es topológicamente libre. Tenemos además que π induce una representación $\pi' : \ell^1(X_\pi) \to \mathcal{L}(E)$, que también es algebraicamente irreducible y es inyectiva en $C(X_\pi)$. Ahora, como podemos suponer que π' es continua, $\ker(\pi')$ es un ideal cerrado de $\ell^1(\Sigma_\pi)$, y si tuviéramos que $\ker(\pi') \neq \{0\}$, el Teorema 3.1 nos dice que $\ker(\pi') \cap C(X_\pi) \neq \{0\}$, contradiciendo la inyectividad de π' en $C(X_\pi)$. Por lo tanto, tiene que ser $\ker(\pi') = \{0\}$, es decir, π' es inyectiva. Ahora, tenemos que $\pi' = \widetilde{\pi} \circ (\mathcal{R}'_{X_\pi})^{-1}$, por lo que $\widetilde{\pi} : \ell^1(\Sigma)/\mathcal{K}(X_\pi) \to \mathcal{L}(E)$ resulta inyectiva, lo que equivale a que $\ker(\pi) = \mathcal{K}(X_\pi)$. Es decir, sabemos cómo es el núcleo de la representación algebraicamente irreducible de dimensión infinita π arbitraria. Resumimos esto en el resultado que sigue.

[1] En realidad, lo que probamos es que si tenemos una representación continua topológicamente irreducible en un espacio normado, entonces el sistema dinámico que induce es transitivo. El caso en que la representación es algebraicamente irreducible es una consecuencia.

PROPOSICIÓN 5.20. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible de dimensión infinita. Entonces existe un subconjunto cerrado e invariante X_π de X tal que:

$$\ker(\pi) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k|_{X_\pi} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Con esto, tenemos que cada ideal primitivo proveniente de una representación de dimensión infinita tiene asociado un subconjunto cerrado e invariante, tal que un elemento de $\ell^1(\Sigma)$ está en él si todas sus coordenadas se anulan en el cerrado. Esto será la clave para relacionar el núcleo de π con el de las representaciones algebraicamente irreducibles con las que trabajamos antes. Desarrollaremos ese argumento.

Fijemos π, una representación algebraicamente irreducible de dimensión infinita, y sea X_π como antes. La primera observación es la siguiente:

$$\ker(\pi) = \bigcap_{x \in X_\pi} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k(x) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ahora, todo $x \in X_\pi$ o bien es periódico o no lo es. Además, como X_π es invariante, si $f_k|_{X_\pi} = 0$ y $x \in X_\pi$, entonces f_k tiene que anularse en toda la órbita de x. Pero vimos por un lado que, si $x \in X_\pi \cap \mathrm{Per}(\sigma)$, entonces

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k(y)|_{\mathcal{O}(x)} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} \ker(\pi_{x,\lambda})$$

y, por otro lado, si tenemos que $x \in \mathrm{Aper}(\sigma) \cap X_\pi$, entonces

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta^k : f_k|_{\mathcal{O}(x)} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\} = \ker(\pi_x^2).$$

Teniendo esto en cuenta, podemos describir el núcleo de π de la siguiente forma:

$$\ker(\pi) = \left(\bigcap_{x \in X_\pi \cap \mathrm{Aper}(\sigma)} \ker(\pi_x^2) \right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{x \in X_\pi \cap \mathrm{Per}(\sigma) \\ \lambda \in \mathbb{T}}} \ker(\pi_{x,\lambda}) \right).$$

Logramos entonces describir el núcleo de una representación algebraicamente irreducible de dimensión infinita en términos de los núcleos de las representaciones $\pi_{x,\lambda}$, inducidas por puntos periódicos y complejos unimodulares, y de las representaciones π_x^2, inducidas por puntos no periódicos. Todas estas representaciones son *-representaciones de $\ell^1(\Sigma)$ en espacios de Hilbert, por lo que podemos extenderlas a *-representaciones de $C^*(\Sigma)$. Para cada $x \in X_\pi \cap \mathrm{Aper}(\sigma)$, se tiene que π_x^2 se extiende por continuidad a una *-representación $\widetilde{\pi}_x^2$ de $C^*(\Sigma)$, y se tiene que $\overline{\ker(\pi_x^2)}^{C^*} \subset \ker(\widetilde{\pi}_x^2)$ y $\ker(\widetilde{\pi}_x^2)$ es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$. Similarmente, $\pi_{x,\lambda}$ se extiende por continuidad a una *-representación $\widetilde{\pi}_{x,\lambda}$ de $C^*(\Sigma)$, y $\overline{\ker(\pi_{x,\lambda})}^{C^*} \subset \ker(\widetilde{\pi}_{x,\lambda})$, que es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$. Luego

$$\overline{\ker(\pi)}^{C^*} \subset \left(\bigcap_{x \in X_\pi \cap \mathrm{Aper}(\sigma)} \ker(\widetilde{\pi}_x^2) \right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{x \in X_\pi \cap \mathrm{Per}(\sigma) \\ \lambda \in \mathbb{T}}} \ker(\widetilde{\pi}_{x,\lambda}) \right),$$

que es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$ si $\ker(\pi)$ es un ideal propio, dado que es una intersección de ideales propios. aEsto termina el caso de dimensión infinita.

Teniendo entendido qué ocurre con la clausura de ideales primitivos provenientes de representaciones de dimensión tanto finita como infinita, podemos concluir el resultado siguiente.

Teorema 5.21. Sea $\pi : \ell^1(\Sigma) \to \mathcal{L}(E)$ una representación algebraicamente irreducible tal que $\ker(\pi)$ es un ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$. Entonces $\overline{\ker(\pi)}^{C^*}$ es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$.

2.2. Ideales arbitrarios.

Ahora finalmente probaremos el resultado que buscábamos, que muestra que la clausura de todo ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$ respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$ sigue siendo un ideal propio.

Lo primero a observar es que, dado un ideal propio I de $\ell^1(\Sigma)$, está contenido en un ideal maximal M y, evidentemente, $\overline{I}^{C^*} \subset \overline{M}^{C^*}$. Por lo tanto, basta con probar que la clausura de un ideal maximal es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$.

Veamos ahora que todo ideal maximal M de $\ell^1(\Sigma)$ es un ideal primitivo. Evidentemente, como M es un ideal propio bilátero, también es un ideal propio izquierdo y, como $\ell^1(\Sigma)$ tiene unidad, existe un ideal izquierdo maximal J que contiene a M. Como J es un ideal izquierdo maximal, induce una representación algebraicamente irreducible $L^{A/J} : A \to \mathcal{L}(A/J)$ dada por

$$L_a^{A/J}(b + J) = ab + J.$$

Como $L^{A/J}$ es irreducible, su núcleo es un ideal primitivo. Como $M \subset J$, tenemos que $M \subset \ker(L^{A/J})$. Luego, como $\ker(L^{A/J})$ es un ideal bilátero y M es bilátero maximal, resulta que $M = \ker(L^{A/J})$. Tenemos entonces que M es el núcleo de una representacióna algebraicamente irreducible o, en otras palabras, un ideal primitivo.

Por lo tanto, tenemos que todo ideal maximal M de $\ell^1(\Sigma)$ es el núcleo $\ker(\pi)$ de una representación algebraicamente irreducible π. Luego el Teorema 5.21 nos dice que la clausura de M en $C^*(\Sigma)$ es un ideal propio. Como dijimos antes, esto implica que lo mismo vale para cualquier ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$. Dejamos esto plasmado en el siguiente teorema.

Teorema 5.22. Sea I ideal propio de $\ell^1(\Sigma)$. Entonces $\overline{I}^{C^*}$ es un ideal propio de $C^*(\Sigma)$.

Otra pregunta en una línea similar a la anterior puede ser averiguar cuándo, al clausurar un ideal de $\ell^1(\Sigma)$ con respecto a la norma de $C^*(\Sigma)$, podemos recuperarlo volviendo a intersectar con $\ell^1(\Sigma)$. Con el trabajo que hemos hecho, podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 5.23. Si I es la intersección de ideales primitivos de $\ell^1(\Sigma)$, entonces $I = \overline{I}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma)$.

Demostración. Primero veamos que esto vale cuando I es un ideal primitivo. En ese caso, tenemos que I es la intersección de núcleos de *-representaciones en espacios de Hilbert. Existe entonces una familia de *-representaciones $\{\pi_\alpha, \alpha \in J\}$ tal que:

$$I = \bigcap_{\alpha \in J} \ker(\pi_\alpha).$$

Denotemos $\widetilde{\pi}_\alpha$ la extensión de π_α a $C^*(\Sigma)$, para cada $\alpha \in J$. Luego:

$$\begin{aligned}
\overline{I}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma) &= \overline{\left(\bigcap_{\alpha \in J} \ker(\pi_\alpha)\right)}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma) \subset \bigcap_{\alpha \in J} \overline{\ker(\pi_\alpha)}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma) \\
&\subset \bigcap_{\alpha \in J} \ker(\widetilde{\pi}_\alpha) \cap \ell^1(\Sigma) = \bigcap_{\alpha \in J} \ker(\pi_\alpha) \\
&= I.
\end{aligned}$$

Es decir que $I = \overline{I}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma)$ cuando I es un ideal primitivo. Ahora, haciendo un argumento similar, bajo la suposición de que I es la intersección de ideales primitivos, nos dará el resultado que buscamos. Supongamos que $I = \bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$, con I_α ideal primitivo para todo α. Tenemos:

$$\overline{I}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma) \subset \bigcap_{\alpha \in J} \overline{I_\alpha}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma) = \bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha = I,$$

donde estamos usando que ya lo probamos para ideales primitivos. Luego $I = \overline{I}^{C^*} \cap \ell^1(\Sigma)$.

$\square$

Epílogo

Los productos cruzados aparecieron hace más de 100 años, en un contexto puramente algebraico ([**23**]). Inspirados en tal construcción, en 1936 Murray y von Neumann adaptaron tal construcción a un contexto analítico, en su célebre serie de artículos "Rings of Operators". En el marco de la clasificación de lo que se conoce como *factores*, que son álgebras de von Neumann cuyos centros son los múltiplos escalares de la identidad, construyen un producto cruzado en base a una acción ergódica. Con el paso del tiempo, se empezaron a estudiar productos cruzados de C^*-álgebras por acciones de grupos, con el objetivo principal de construir ejemplos nuevos de C^*-álgebras, dando pie a una teoría inmensa. Durante mucho tiempo, la referencia principal al respecto de estos productos cruzados fue el texto [**22**] de G. K. Pedersen. Más recientemente, fue publicado el libro [**21**] de D. P. Williams.

El pasaje de un producto cruzado algebraico a uno con estructura de álgebra de Banach implica inevitablemente la completación con respecto a una norma adecuada. Históricamente, con excepción de las álgebras de grupos, fueron solo C^*-normas las consideradas en productos cruzados, debido a motivos filosóficos (ver a las C^*-álgebras como espacios topológicos cuánticos) pero también prácticos (la teoría de C^*-álgebras tiene muy buenas propiedades). De naturaleza mucho más reciente es el estudio de productos cruzados que no sean C^*-álgebras, siendo investigados desde finales de la primera década de este siglo por autores como Sergei Silvestrov, Marcel de Jeu, Christian Svensson, Jun Tomiyama y Aki Kishimoto, en múltiples trabajos, como son [**1**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**8**] y [**15**]. Tales trabajos comprenden la mayor parte de la literatura sobre espacios como $\ell^1(\Sigma)$, y es sobre estos que hemos basado la monografía presentada. Esto plantea la evidente pregunta de cómo puede ser continuado el estudio de este tipo de productos cruzados.

Teoría paralela a la de productos cruzados con C^*-normas.
La primera y más evidente pregunta es ver qué pasa con la vasta teoría de existente sobre productos cruzados de C^*-álgebras cuando se consideran normas ℓ^1 en lugar de normas C^*. Ya vimos una versión simple de cómo, cambiando el grupo $\mathbb{Z}$ por un grupo discreto G, y cambiando $C(X)$ por una C^*-álgebra con unidad, se puede construir $\ell^1(G, A)$, un producto cruzado con norma ℓ^1. Esta construcción también puede hacerse para grupos localmente compactos Hausdorff, adaptándola adecuadamente haciendo uso de la medida de Haar.

La pregunta más inmediata en relación a lo trabajado en esta monografía es cómo la dinámica de la acción del grupo G sobre el álgebra A, digamos conmutativa, se ve reflejada en la estructura del producto cruzado.

Acciones parciales de $\mathbb{Z}$ y fibrados de Fell.
En lugar de generalizar cambiando el grupo con el que trabajamos, podemos relajar la condición de tener una acción sobre X. Podemos suponer que tenemos en su lugar una *acción parcial* de $\mathbb{Z}$, que es como tener una acción usual salvo que no siempre podemos actuar con cualquier

entero sobre cualquier elemento de X. Con algo más de detalle, en este contexto topológico, significa que tenemos un par $\sigma = (\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$, donde $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una colección de abiertos de X y $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una colección de homeomorfismos $\sigma_n : X_{-n} \to X_n$, tales que:

(1) $X_0 = X$ y σ_0 es la identidad en X;
(2) $\sigma_n(X_{-n} \cap X_m) = X_n \cap X_{n+m}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$;
(3) $\sigma_n(\sigma_m(x)) = \sigma_{n+m}(x)$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$ y $x \in X_{-m} \cap X_{-m-n}$.

Al igual que una acción en X inducía una acción en $C(X)$, dada una acción parcial sobre X otenemos una acción parcial a nivel de $C(X)$ que denotamos

$$\alpha = (\{C_0(X_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}),$$

donde $\{C_0(X_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de ideales cerrados biláteros, y $\alpha_n : C(X_{-n}) \to C(X_n)$ está dado por $\alpha_n(f)(x) = f(\sigma_{-n}(x))$. Ahora es posible definir un producto cruzado similar a los considerados en el presente trabajo. Es de esperar que también aquí la dinámica (parcial) se vea reflejada en el producto cruzado.

Todo lo anterior puede enmarcarse en la teoría de fibrados de Fell, que es un contexto más general. Ignorando los detalles técnicos, un fibrado de Fell es un fibrado sobre un grupo, digamos $\mathbb{Z}$, donde las fibras son espacios de Banach, y si tomamos dos elementos en las fibras correspondientes a n y m, su producto cae en la fibra correspondiente a $n + m$, y hay una involución que manda los elementos la fibra sobre n en elementos de la fibra sobre $-n$. Esta construcción es más general que la anterior, dado que cuando la fibra sobre la unidad es conmutativa, el fibrado de Fell induce una acción parcial de $\mathbb{Z}$ sobre dicha fibra (ver [**24**]). La pregunta que puede ser interesante es ver que se puede decir del álgebra L^1 del fibrado en este contexto.

Teorema de Wendel y grupoides.

Dados dos grupos localmente compactos Hausdorff G_1 y G_2 con sus respectivas medidas de Haar, es claro que si existe un isomorfismo de grupos topológicos entre ellos, entonces las *-álgebras de Banach $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ serán isométricamente isomorfas. Un teorema de Wendel de mitad del siglo pasado ([**25**]) dice que de hecho, si $L^1(G_1)$ y $L^1(G_2)$ son isométricamente isomorfas, entonces G_1 y G_2 son isomorfos como grupos topológicos localmente compactos Hausdorff. Tenemos entonces que un grupo G localmente compacto Hausdorff está determinado por su álgebra de funciones integrables $L^1(G)$. Esto es interesante porque no ocurre lo mismo con $C^*(G)$, la C^*-álgebra del grupo, que es la completación de $L^1(G)$ con una C^*-norma. Es decir que al completar de forma de obtener una C^*-álgebra, perdemos información del grupo.

Una primera pregunta interesante es si el teorema de Wendel puede generalizarse a este contexto. Dos sistemas dinámicos isomorfos Σ_1 y Σ_2 deberían dar isomorfismos isométricos entre las álgebras $\ell^1(\Sigma_1)$ y $\ell^1(\Sigma_2)$. El equivalente aquí al teorema de Wendel sería averiguar si un isomorfismo isométrico entre las álgebras $\ell^1(\Sigma_1)$ y $\ell^1(\Sigma_2)$ implica que los sistemas dinámicos sean isomorfos en algún sentido. Por ejemplo, podríamos preguntarnos si los grupoides asociados a los sistemas Σ_1 y Σ_2 son isomorfos o equivalentes.

Sin entrar en mayores detalles, un *grupoide* es una estructura que es como un grupo, pero donde no siempre podemos multiplicar dos elementos cualesquiera. Tiene una operación que cumple el papel de invertir elementos de él, y en caso de que podamos multiplicar tres elementos, tenemos que vale la propiedad asociativa. Dada la acción de $\mathbb{Z}$ sobre X a través de un homeomorfismo σ, como tuvimos a lo largo de todo el presente trabajo, podemos construir un grupoide. Como conjunto será $\mathbb{Z} \times X$, y dados dos elementos $(n, x), (m, y) \in \mathbb{Z} \times X$, podremos multiplicarlos si $y = \sigma^n(x)$, y en ese caso será $(m, y)(n, x) = (m + n, x)$. La inversión está dada por $(n, x)^{-1} = (-n, \sigma^n(x))$. Denotemos $\mathcal{G}$ al grupoide con las operaciones descritas. Las topologías de X y $\mathbb{Z}$ inducen la topología producto en $\mathcal{G}$.

Dado el grupoide inducido por la acción, podemos asociarle una álgebra a través de una construcción que generaliza a la C^*-álgebra de un grupo (correspondiente a la acción trivial del grupo en un espacio con un único punto). Para más detalles, ver [**26**]. Nos gustaría ver a $\ell^1(\Sigma)$ como alguna completación conveniente, digamos $B(\Sigma)$, del grupoide asociado a Σ, de modo que un isomorfismo isométrico entre $B(\Sigma_1)$ y $B(\Sigma_2)$ implique algún tipo de isomorfismo entre los sistemas Σ_1 y Σ_2. Otra pregunta interesante puede ser justamente entender como se relaciona la estructura de $B(\Sigma)$ con la dinamica.

Bibliografía

[1] de Jeu, Marcel; Svensson, Christian; Tomiyama, Jun. On the Banach $*$-algebra crossed product associated with a topological dynamical system. J. Funct. Anal. 262 (2012), no. 11, 4746–4765.

[2] de Jeu, Marcel; Tomiyama, Jun. Maximal abelian subalgebras and projections in two Banach algebras associated with a topological dynamical system. Studia Math. 208 (2012), no. 1, 47–75.

[3] de Jeu, Marcel; Tomiyama, Jun. Noncommutative spectral synthesis for the involutive Banach algebra associated with a topological dynamical system. Banach J. Math. Anal. 7 (2013), no. 2, 103–135.

[4] de Jeu, Marcel; Tomiyama, Jun. Algebraically irreducible representations and structure space of the Banach algebra associated with a topological dynamical system. Adv. Math. 301 (2016), 79–115.

[5] de Jeu, Marcel; Tomiyama, Jun. The closure of ideals of $\ell^1(\Sigma)$ in its enveloping C^*-algebra. Adv. Oper. Theory 3 (2018), no. 1, 42–52.

[6] Svensson, Christian; Tomiyama, Jun. On the commutant of C(X) in C^*-crossed products by Z and their representations. J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 7, 2367–2386.

[7] Tomiyama, Jun. Hulls and kernels from topological dynamical systems and their applications to homeomorphism C^*-algebras. J. Math. Soc. Japan 56 (2004), no. 2, 349–364.

[8] Kishimoto, Aki; Tomiyama, Jun. Topologically irreducible representations of the Banach $*$-algebra associated with a dynamical system. Ergodic Theory Dynam. Systems 38 (2018), no. 5, 1768–1790.

[9] Tomiyama, Jun. Invitation to C^*-algebras and topological dynamics. World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1987.

[10] Tomiyama, Jun. The interplay between topological dynamics and theory of C^*-algebras. Lecture Notes Series, 2. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1992.

[11] Dixmier, Jacques. C^*-algebras. Translated from the French by Francis Jellett. North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[12] Davidson, Kenneth R. C^*-algebras by example. (English summary). Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[13] Svensson, Christian; Silvestrov, Sergei; de Jeu, Marcel. Dynamical systems and commutants in crossed products. Internat. J. Math. 18 (2007), no. 4, 455–471.

[14] Svensson, Christian; Silvestrov, Sergei; de Jeu, Marcel. Dynamical systems associated with crossed products. Acta Appl. Math. 108 (2009), no. 3, 547–559.

[15] Svensson, Christian; Silvestrov, Sergei; de Jeu, Marcel. Connections between dynamical systems and crossed products of Banach algebras by Z. Methods of spectral analysis in mathematical physics, 391–401, Oper. Theory Adv. Appl., 186, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[16] Albiac, Fernando; Kalton, Nigel J. Topics in Banach space theory. Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer, New York, 2006.

[17] Sakai, Shôichirô. C^*-algebras and W^*-algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[18] Rudin, Walter. Fourier analysis on groups. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12 Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.

[19] Palmer, Theodore W. Banach algebras and the general theory of $*$-algebras. Vol. I. Algebras and Banach algebras. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49. Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[20] Larsen, Ronald. Banach algebras. An introduction. Pure and Applied Mathematics, No. 24. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[21] Williams, Dana P. Crossed products of C^*-algebras. Mathematical Surveys and Monographs, 134. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[22] Pedersen, Gert K. C^*-algebras and their automorphism groups. London Mathematical Society Monographs, 14. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

[23] Dickson, L. E. Linear associative algebras and abelian equations. Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), no. 1, 31–46.

[24] Abadie, Beatriz; Abadie, Fernando. Ideals in cross sectional C^*-algebras of Fell bundles. Rocky Mountain J. Math. 47 (2017), no. 2, 351–381.

[25] Wendel, J. G. On isometric isomorphism of group algebras. Pacific J. Math. 1 (1951), 305–311.

[26] Renault, Jean. A groupoid approach to C^*-algebras. Lecture Notes in Mathematics, 793. Springer, Berlin, 1980.

[27] Murray, F. J.; Von Neumann, J. On rings of operators. Ann. of Math. (2) 37 (1936), no. 1, 116–229.