

TESIS DE
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Problema circular de tres cuerpos restringido:
órbitas periódicas y superficies de sección
transversales

Favio Pirán

Orientador:
Alejandro Passeggi

Uruguay, 2022



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Resumen

El problema de tres cuerpos es un problema simple de relevancia histórica: determinar el movimiento de tres cuerpos modelados como masas puntuales cuyo movimiento queda determinado por la ley de gravitación universal de Newton. A fines de siglo XX, ante la pregunta sobre la integrabilidad de este problema, Poincaré prueba que bajo ciertas restricciones éste resulta no integrable, dando lugar a los orígenes de la teoría del caos. Para esta prueba construye por métodos perturbativos una superficie de sección transversal que permite una traducción de la dinámica a un mapa de retorno conservativo.

La simplificación del problema que nos interesa consiste en considerar uno de los cuerpos con masa despreciable, restringirse a movimientos en el plano, y asumir que el movimiento de los cuerpos de masa no despreciable queda descrito por círculos concéntricos centrados en su centro de masa. Siguiendo con la filosofía de Poincaré, se piensa a este problema como la perturbación de uno más sencillo y de esta forma Conley construye a mediados de siglo XX un anillo de sección transversal para energías suficientemente bajas, usando como borde del anillo dos órbitas periódicas especiales.

Este problema sigue siendo material de estudio y en este sentido es que en las últimas décadas se ha intentado dar resultados no perturbativos. Un camino en esta dirección surge de la interacción de la teoría de curvas pseudoholomorfas y geometría de contacto.

La tesis intenta dar un recuento histórico con una visión moderna de ciertos abordajes al problema, finalizando con una lectura informal de la aplicación de resultados notables de Wysocki, Hofer y Zehnder en esta búsqueda, no perturbativa, de superficies de sección globales para el problema de tres cuerpos restringido planar-circular

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Racconto histórico	4
1.2. Sobre la tesis	6
1.3. Resumen por capítulos	11
2. Problema de dos cuerpos	12
2.1. Reducción a problema de Kepler	12
2.2. Vector de Runge-Lenz	14
2.3. Regularizaciones	16
2.3.1. Regularización de Levi-Civita	17
2.3.2. Regularización de Moser	23
3. Problema restringido de 3 cuerpos planar	25
3.1. Problema de tres cuerpos restringido en marco inercial	25
3.2. Transformaciones que dependen del tiempo	27
3.3. Coordenadas de rotación en problema circular	27
3.4. Los cinco puntos de Lagrange	29
3.4.1. Puntos equiláteros	29
3.4.2. Puntos colineales	30
3.5. Regiones de Hill	31
3.6. Problema de Kepler en un marco de rotación	32
3.7. Regularización de Moser para el problema de tres cuerpos restringido planar-circular	33
3.8. Problema lunar de Hill	35
3.9. Estructura de contacto en problema de tres cuerpos restringido planar-circular y problema de Hill	38
4. Métodos clásicos	41
4.1. Órbitas periódicas y reducción a dinámica discreta a energías bajas	42
4.1.1. Búsqueda de órbitas periódicas	43
4.1.2. Construcción de anillo de sección	49
4.2. Método de Shooting de Birkhoff en la búsqueda de órbitas periódicas	50
5. Abordaje variacional	56
5.1. Funcional de acción de Rabinowitz	56
5.2. Kernel del hessiano de A^H	58
5.3. Órbitas circulares en problema de Kepler rotatorio	61
5.4. Aproximando Kepler rotatorio a energías bajas	65
5.5. Órbitas directa y retrógrada en problema de Hill	67

6. Superficies de sección global	69
6.1. Reducción a dinámicas discretas: superficies de sección globales	69
6.2. Obstrucciones para la existencia de disco de sección global	70
6.3. Disco de sección en problema de Kepler rotatorio	74
6.4. Estructura de contacto y curvas pseudoholomorfas para la búsqueda de superficies de sección	76
6.4.1. Enunciados de resultados generales	77
6.4.2. Aplicación al problema de tres cuerpos	79
6.4.3. Estructura casi compleja y planos holomorfos	80
6.4.4. Descomposición en libro abierto	85
6.4.5. Interpolación con elipsoide irracional	89
A. Geometría simpléctica y de contacto	95
A.1. Geometría simpléctica	95
A.2. Variedades hamiltonianas y geometría de contacto	98
A.3. Dominios de Liouville	100

Capítulo 1

Introducción

1.1. Racconto histórico

Se puede decir que en términos históricos el entendimiento del cielo y el cosmos nuclea el nacimiento de lo que hoy entendemos por filosofía, física y matemática. Por tanto la voluntad de predecir y describir el movimiento de los cuerpos celestes es más antigua que la matemática tal como hoy la entendemos. El problema de n -cuerpos es una inquietud sumamente simple: dada una disposición de n masas puntuales con ciertas velocidades iniciales, queremos saber el comportamiento del sistema a futuro. La formalización de este problema en lenguaje matemático es a través de la ley de gravitación universal de Newton publicada en su *Principia Mathematica* en 1687, que describe este sistema en términos de fuerzas gravitatorias. No obstante, previo al trabajo de Newton, Kepler lidió con el problema de dos cuerpos sin esta formalización y es quien postula las hoy conocidas tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, las dos primeras publicadas en 1609. De hecho, Newton se basa en las observaciones de Kepler para formular su ley de gravitación universal. Kepler se propone estudiar el movimiento de un planeta alrededor del sol, suponiendo a éste último inmóvil. Con sus leyes Kepler da una descripción precisa del movimiento: la geometría de la órbita del planeta queda descrita por una cónica y en particular las órbitas periódicas describen elipses. Cabe observar aquí que la descripción es geométrica y no a través de una fórmula de posición en función del tiempo, ya que de hecho a la expresión que se llega para esto es una integral cuyo integrando no tiene una primitiva con fórmulas elementales. El tipo de movimiento planetario en este problema se divide en tres: órbitas periódicas (elipses), órbitas que se escapan a pasado y a futuro con velocidad tendiente a una constante distinta de cero (hipérbolas) u órbitas que se escapan con la velocidad justa tendiendo a 0 (parábolas). El problema de dos cuerpos en general, es decir sin fijar uno de ellos, se deduce del problema de Kepler. En particular a energías bajas ambos cuerpos orbitan en elipses con un foco común en su centro de masa.

Todo cambia cuando agregamos una masa. Existen más tipos de movimiento, la dinámica no tiene por qué desarrollarse en un plano y podemos encontrar caos. Entre los pioneros del estudio del problema de tres y n cuerpos en general encontramos a Euler y Lagrange, quienes en el siglo XVIII estudiaron configuraciones centrales y encontraron soluciones homográficas. Éstas soluciones son aquellas en las que las masas puntuales preservan cierta disposición o forma. En este siglo y el siguiente se intentó abordar el tema por medio de la búsqueda de integrales, cantidades conservadas y encontrar soluciones como series de potencias. En este contexto a fines del siglo XIX el rey Oscar II de Suecia, quien en su juventud supo ser estudiante de matemática, en conmemoración por su 60 aniversario

propuso un premio a quien lograra resolver analíticamente el problema de n cuerpos o en su defecto probar que no se puede determinar dicha solución. El entonces joven Poincaré convencido de la irresolubilidad del problema estudia el problema de tres cuerpos restringido, se presenta y gana en 1889 con su memoir titulada “*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*” que años más tarde extiende y corrige en el conocido artículo *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ([36]). Poincaré quiebra con el tipo de abordaje de este problema y propone un estudio geométrico-topológico, buscando describir de forma más cualitativa la dinámica. Para este premio propone encontrar una superficie de sección transversal de forma tal de reducir, en un caso particular del problema de tres cuerpos restringido, la dinámica continua a una discreta y de esta forma dar inicio a la teoría del caos moderno con la noción de intersecciones homoclínicas. Algunos años antes, G.W Hill estudia aproximaciones del problema de tres cuerpos para intentar describir el movimiento de la luna y descubre dos órbitas especiales que son las órbita periódica directa y retrógrada ([20]). Quien además plantea la búsqueda de órbitas periódicas del problema original por métodos perturbativos, partiendo de su aproximación (que hoy llamamos problema lunar de Hill). Poincaré impresionado por los trabajos de Hill, viaja a norteamérica para conocerlo y algunos años más tarde desarrolla el estudio de secciones transversales al flujo para la reducción de la dinámica continua a dinámica discreta con un mapa de retorno. Sigue con la idea de ver al problema de tres cuerpos como un caso perturbativo del problema de dos cuerpos en la búsqueda de órbitas periódicas y llama órbitas periódicas de primer tipo a las que surgen de la perturbación de las órbitas circulares de Kepler y órbitas periódicas de segundo tipo a las que surgen de órbitas elípticas no circulares del problema de Kepler. Justamente encuentra para ciertas masas y energía, un anillo de sección global para el problema de tres cuerpos restringido ([37]) cuyo borde son las órbitas periódicas directa y retrógrada que resultan de perturbaciones de las circulares (directa y retrógrada) de Kepler en coordenadas de rotación. El mapa de retorno que encuentra preserva área, se extiende al borde y presenta una condición de twist en el borde que lleva a conjeturar por Poincaré el hoy conocido “último teorema geométrico de Poincaré”, demostrado poco después de su muerte por Birkhoff. Éste último continúa con la filosofía de buscar superficies de sección global y en [7] muestra que las órbitas que usa Poincaré para la construcción del anillo (la directa y la retrógrada) si bien son no degeneradas a energías bajas, la directa degenera al aumentar la energía. La retrógrada sí permanece como no degenerada, y conjetura que se puede encontrar un disco de sección global cuyo borde es la órbita periódica retrógrada para cualquier nivel de energía por debajo del primer crítico. Hoy en día esto no está probado del todo, pero por métodos que surgen de las teorías de curvas holomorfas, teoría de Floer y geometría de contacto es que se logró probar que para un rango amplio de masas y energía esto es verdad.

El anillo de sección global que encuentra Poincaré se construye bajo ciertas restricciones concretas en la masa y la energía. De hecho, Poincaré supone que una de las dos masas de las primarias es mucho más grande que la otra, y el cuerpo sin masa se encuentra muy cerca de la primaria con más masa. Años más tarde, en 1963 Conley publica [11] donde esta construcción se generaliza para todas las masas y el anillo de sección global también se encuentra cerca de la primaria con menos masa. En este artículo Conley también propone con una filosofía perturbativa, a partir del problema de Kepler en coordenadas en rotación partir de las órbitas directa y retrógrada y ver que estas persisten en el problema de tres cuerpos restringido. La idea perturbativa se debe a que a energías muy bajas el problema de tres cuerpos en coordenadas de rotación, si nos fijamos en la región cercana a una de las primarias, tiende a un problema de dos cuerpos (Kepler). Conley construye y calcula explícitamente los números de rotación de los bordes del anillo para usar el teorema de

Poincaré-Birkhoff y probar la existencia de dos o infinitas órbitas periódicas del problema de tres cuerpos restringido a energías bajas. En éste cálculo hay unos errores menores que corrige Kummer en [31], quien propone otro camino para la construcción del anillo a través de cambios de coordenada que preserven la estructura simpléctica.

En 1961 Sitnikov propone el estudio de una disposición particular del problema de tres cuerpos y prueba la existencia de movimientos oscilatorios ([41]). Este problema consiste en considerar a las dos primarias en el plano $z = 0$ que orbitan en elipses con un foco en su centro de masa (que situamos en el origen) de forma tal que sus posiciones son simétricas respecto a su centro de masa, y el cuerpo de masa despreciable se encuentra en el eje z . Resulta que cuando las elipses son círculos, el problema es integrable, pero si perturbamos un poco estos círculos a elipses, el comportamiento es caótico. Se puede encontrar una prueba de Moser en [35] publicada en 1973 donde se encuentra una superficie de sección transversal (no global) cercana a las órbitas de escape usando unas coordenadas propuestas por McGehee, para la cual se construye una semiconjugación a un shift de Bernoulli de infinitos símbolos. Esto se puede traducir a que se encuentran movimientos oscilatorios y órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes. El tipo de estudio se centra en órbitas con energía suficiente para “escapar” de las primarias y estas técnicas se siguen usando y se ha probado la existencia de movimientos oscilatorios en el caso general. Ver por ejemplo [18, 12]. Distinto es el caso de los problemas en los que venimos hablando que se asume energía muy negativa o por debajo del primer valor crítico y las órbitas quedan confinadas en una región acotada.

Varios años después, volviendo a lo que conjeturó Birkhoff sobre la existencia de discos de sección transversal, es que se ataca el problema con la conjunción de áreas importantes por sí mismas como lo son la teoría de curvas pseudoholomorfas, teoría de Floer y geometría de contacto. Ocurre que por debajo (y apenas por arriba) del primer valor crítico de energía en el problema de tres cuerpos, en las regiones acotadas cerca de las primarias donde la dinámica queda encerrada hay estructura de contacto ([3]). Hofer prueba en 1993 ([21]) la conjetura de weinstein en la esfera: toda dinámica de Reeb definida por una forma de contacto en la esfera admite una órbita periódica. Apenas después, en el notable artículo [24] de Hofer, Wysocky y Zehnder se prueba que la esfera S^3 dotada de una forma de contacto que cumple cierta condición llamada convexidad dinámica, admite una descomposición en libro abierto de forma tal que el lomo del libro es una órbita periódica especial y las hojas del libro son discos de sección global transversal a la dinámica de Reeb. Como el problema de tres cuerpos se regulariza en la esfera S^3 , en el artículo [2] se prueba que en un gran rango de masas y energías se cumple la condición de convexidad dinámica para el problema de tres cuerpos y por lo tanto la existencia de un disco de sección global. El borde del disco es la órbita periódica retrógrada, probando así lo conjeturado por Birkhoff a energías no necesariamente tan bajas. Estas técnicas se siguen usando y se han extendido resultados, como por ejemplo se ha encontrado que el problema de tres cuerpos restringido espacial también admite una descomposición en libro abierto ([34]).

1.2. Sobre la tesis

El problema central en esta tesis es el problema de tres cuerpos restringido planar-circular. El mismo supone que uno de los cuerpos tiene masa despreciable y no afecta a los otros dos, llamados primarios. Nos interesa estudiar el movimiento del cuerpo de masa despreciable ya que los primarios constituyen un problema de dos cuerpos. Los tres cuerpos estarán confinados (sus posiciones y velocidades) en un plano y las primarias se moverán

en círculos concéntricos, de forma tal que si ponemos el centro de masa en el origen, las primarias siempre se encuentran en posiciones simétricas respecto al origen. En este trabajo se recorrerá un poco el encare histórico recién comentado, formalizando al principio los problemas a tratar y cerrando con una revisión del esqueleto de prueba (sin demostraciones) del artículo [24] que permite probar finalmente la conjetura de Birkhoff sobre la existencia de discos de sección global en un rango amplio de masas y energía.

Situamos al problema dentro del formalismo hamiltoniano. En éste, la dinámica queda determinada por una función de energía y una forma simpléctica en el espacio de fase. La función de energía H se llama hamiltoniano y una forma simpléctica es una 2-forma cerrada, antisimétrica y no degenerada ω que permite definir un campo X_H con la siguiente relación

$$\omega(X_H, \cdot) = dH$$

Al campo X_H lo llamamos gradiente simpléctico que se puede entender, si pensamos el espacio de fase como $\mathbb{R}^{2n}$, como elegir un vector ortogonal al gradiente de H en una dirección determinada por ω . La forma canónica simpléctica ω_0 queda dada por la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$$

Por teorema de Darboux siempre existe un cambio de coordenadas en el espacio de fase de forma tal que la forma simpléctica se ve como la forma canónica. Si denotamos con $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ a las posiciones y velocidades de un sistema, el campo X_H determinado por la forma canónica simpléctica queda dada por

$$X_H(q, p) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

y la ecuación diferencial que define es la que llamamos ecuación diferencial hamiltoniana

$$(\dot{q}, \dot{p}) = X_H(q, p)$$

El problema de tres cuerpos se puede expresar como un sistema hamiltoniano en el plano con la forma simpléctica canónica donde, si m_1 y m_2 masas de los primarios, q_i, p_i posiciones y velocidades respectivamente, la función de energía es la energía mecánica del sistema:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m_1}|p_1|^2 + \frac{1}{2m_2}|p_2|^2 - \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|}$$

Fijada una energía, el sistema queda confinado en un conjunto de nivel de energía que asumimos una variedad de dimensión impar. El hamiltoniano es una cantidad que se conserva pues el gradiente simpléctico es perpendicular al gradiente. Este conjunto de nivel tiene estructura de lo que se llama variedad hamiltoniana, de forma que cuando restringimos la forma simpléctica al conjunto de nivel queda no degenerada, siendo la dirección del gradiente hamiltoniano el kernel de la restricción.

Lo primero a observar que en el problema de tres cuerpos el hamiltoniano es no autónomo. Nos interesa estudiar el caso en el que las primarias, quienes conforman un problema de dos cuerpos, describan ambas un movimiento circular con centro de masa en el origen. En este caso, para eliminar el problema de lidiar con un hamiltoniano no autónomo, como las primarias rotan en una circunferencia con velocidad angular constante, ponemos coordenadas en rotación que acompañen ese movimiento. De esa forma obtenemos un hamiltoniano autónomo que llamamos integral de Jacobi. Pensando al problema de tres cuerpos restringido como un sistema Tierra-Luna-Satélite, si escribimos $e = (-\mu, 0)$ y

$m = (1 - \mu, 0)$ a las posiciones de la tierra y la luna respectivamente (que permanecen inmóviles en coordenadas de rotación) escribimos la integral de Jacobi como

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{\mu}{|q - m|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - e|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

El conjunto de nivel para una energía suficientemente chica, resulta tener tres componentes conexas. La proyección de estas componentes en el espacio de configuraciones es lo que llamamos regiones de Hill. Dos de ellas resultan acotadas y corresponden a entornos de las primarias. La tercera, no acotada, corresponde a las trayectorias que llamamos cometas. En la tesis nos centraremos en el estudio de la dinámica de las regiones de Hill acotadas para energías bajas. En un sistema tierra-luna-satélite en el cual el satélite tiene masa despreciable, tener energía baja corresponde a que el satélite con su impulso inicial no alcanza la velocidad de escape necesaria y queda confinado en un entorno de la tierra o la luna.

Lo siguiente a observar es que en el problema de tres cuerpos (así como en dos cuerpos) tenemos colisiones de forma tal que los conjuntos de nivel no quedan compactos. Esto se puede regularizar de más de una forma y veremos cómo hacerlo. Bajo una de esas regularizaciones el conjunto de nivel se puede pensar como S^3 , tanto en el problema de Kepler como en el problema de tres cuerpos restringido planar-circular. Veremos que en el caso de Kepler, bajo esta regularización de colisiones llamada regularización de Levi-Civita, la geometría de las órbitas nos da una fibración particular de S^3 por círculos: la fibración de Hopf. Esto va a permitir construir de forma sencilla en Kepler un anillo de sección global transversal a la dinámica, para la cual el mapa de retorno es la identidad.

Muchas veces estos conjuntos de nivel, variedades hamiltonianas, tienen estructura de contacto. Una forma de contacto básicamente es una 1-forma λ en la variedad de dimensión impar de forma tal que $\ker \lambda = \xi$ genera una distribución de hiperplanos en el tangente altamente no integrable. Formalmente lo que le pedimos a λ es que

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n$$

sea una forma de volumen en la variedad de contacto de dimensión $2n+1$. Esta 1-forma bajo ciertas hipótesis puede ser tomada como la restricción de una primitiva de la forma simpléctica a la variedad hamiltoniana. La forma de contacto define un campo, llamado campo de Reeb R_λ dado por las condiciones

$$d\lambda(R_\lambda, \cdot) \equiv 0, \quad \lambda(R_\lambda) \equiv 1$$

En el caso de un conjunto de nivel de un hamiltoniano cuando la forma de contacto λ es la restricción de una primitiva de ω forma simpléctica, se tiene que R_λ es paralelo al campo hamiltoniano X_H y por lo tanto definen la misma dinámica. En particular la geometría de contacto ignora la parametrización en función del tiempo y hace foco en la geometría de las órbitas de un hamiltoniano. Veremos más adelante que el problema de tres cuerpos admite una estructura de contacto en sus conjuntos de nivel si la energía es suficientemente chica.

A lo largo de la tesis se repetirá cierta estrategia para el problema de tres cuerpos, y ésta consiste en pensar al problema de tres cuerpos como perturbación de otro conocido. De menos a más en nivel de complejidad y aproximación, los principales problemas que veremos con sus respectivos hamiltonianos son los siguientes:

- Problema de Kepler:

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|}$$

- Problema de Kepler en coordenadas de rotación:

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

- Problema lunar de Hill:

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1 - q_1^2 + q_2^2/2$$

- Problema de tres cuerpos restricto-planar en coordenadas de rotación:

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{\mu}{|q-m|} - \frac{(1-\mu)}{|q-e|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

El problema lunar de Hill es una aproximación del problema de tres cuerpos en coordenadas de rotación que aproxima bien la dinámica de la luna alrededor de la tierra en un sistema de tres cuerpos formado por el sol, la tierra y la luna, siendo ésta última la de masa despreciable. La dificultad de este problema es que la tierra se encuentra cerca del cuerpo de menos masa (la tierra), por lo que en términos de fuerza, la que ejerce la tierra sobre la luna se hace fuerte por su corta distancia. Veamos intuitivamente por qué podemos entender el problema de tres cuerpos como perturbación de los anteriores. Si en el problema de tres cuerpos en rotación apagamos una de las dos masas de las primarias, obtenemos un problema de Kepler en rotación. Por otro lado, si la energía del hamiltoniano la hacemos tender a $-\infty$, la componente del conjunto de nivel cerca de las primarias se hace muy pequeño de forma de que en esta situación, el cuerpo al que queremos describir su movimiento se encuentra extremadamente cerca del otro y en el límite podemos despreciar el tercer cuerpo volviendo a un problema de Kepler rotatorio. Más aún, si la energía es tan pequeña, la velocidad de rotación será tan pequeña en comparación con la velocidad de movimiento que dejaremos de ver la rotación de las coordenadas y nos acercaremos al problema de kepler en un marco inercial. El problema de Hill es un paso intermedio en estas aproximaciones y más adelante veremos cómo se llega a la expresión del hamiltoniano. Lo importante a resaltar aquí es que en la regularización entenderemos al problema de tres cuerpos como una perturbación de la dinámica de Hopf. Veremos que, como hace Conley, es más útil partir del problema de Kepler en rotación en donde sí hay órbitas distinguibles especiales (no degeneradas) que corresponden a las órbitas directa y retrógrada, y perturbando éstas llegar a órbitas especiales del problema general.

En el estudio del problema de tres cuerpos estamos interesados en la búsqueda de órbitas periódicas, que así como dijo Poincaré, éstas son el “esqueleto” de la dinámica. Queremos dar información cualitativa sobre éstas. Si existen, cuántas existen, si se anudan, información sobre sus períodos. Empezaremos por distinguir dos tipos de órbitas periódicas: degeneradas y no degeneradas. Informalmente una órbita periódica no degenerada es aquella que no tiene órbitas periódicas de mismo período cerca. Para dar un poquito de formalidad a esta idea hacemos lo siguiente. Consideramos los pares (P, T) donde P es órbita periódica de período T . Nos consideramos una sección transversal a la órbita y el mapa de retorno definido localmente por el flujo de la dinámica en esta sección. Ahora consideramos el diferencial de este mapa, es decir la linearización del retorno. Se prueba que el retorno preserva área por lo que los valores propios de este mapa tendrán norma 1. Si ninguno de estos valores propios es 1 decimos que la órbita periódica es no degenerada. Por ejemplo en el problema de kepler regularizado a energías negativas todas las órbitas son periódicas y degeneradas. Sin embargo en kepler rotatorio ya se distinguen los dos casos, pues se consiguen dos órbitas periódicas especiales no degeneradas que corresponden con órbitas circulares de Kepler. Las órbitas circulares siguen siendo órbitas periódicas en kepler rotatorio pues la rotación deja invariante un círculo centrado en el origen. Pero resultan no degeneradas en un marco de rotación pues las órbitas elípticas

cercanas al rotar las coordenadas se cierran si se cumple cierta condición de resonancia y si no, no se cierra. Si sigue siendo periódica, deberá dar al menos otra vuelta por lo que la circular estará aislada en el conjunto de pares órbita periódica - período. Fijada una constante de energía, las órbitas circulares en la región de Hill son las que llamamos directa y retrógrada, ya que una va en el sentido de las coordenadas de rotación y la otra en el sentido opuesto. Como dijimos en estas órbitas no degeneradas es que se apoya Conley para encontrar dos órbitas periódicas especiales en el problema de tres cuerpos.

Veremos también la traducción de la búsqueda de órbitas periódicas a un lenguaje de cálculo de variaciones y teoría de Morse. Si consideramos el espacio de curvas cerradas con sus respectivos períodos en el espacio de fase, las órbitas periódicas serán los puntos críticos de un funcional sobre el espacio de curvas. Este funcional se llama funcional de acción de Rabinowitz. Veremos por qué ocurre esto y cómo el kernel del hessiano del funcional de rabinowitz nos distingue qué tan aisladas están las órbitas periódicas y en particular si son o no degeneradas. De nuevo con métodos perturbativos en este lenguaje probaremos la persistencia de órbitas periódicas no degeneradas que bifurcan de las circulares de kepler o kepler rotatorio. Para ello, si llamamos K_c al hamiltoniano del problema de tres cuerpos regularizado a energía c , le asociamos el funcional de Rabinowitz A^c . La idea es que cuando $c \rightarrow -\infty$ el hamiltoniano K_c tiende a la regularización de Kepler y estudiando el comportamiento de A^c con $c \rightarrow -\infty$ veremos que los críticos del funcional para Kepler que corresponden a las órbitas circulares persisten a energías bajas y siguen siendo no degeneradas. Cabe aclarar que por otros métodos, no variacionales, Birkhoff prueba que la órbita directa retrógrada sigue existiendo aún cuando la energía no es tan pequeña. Para ello utiliza un método de Shooting que también veremos en un caso simplificado. No obstante Birkhoff observa que la órbita directa sí degenera al aumentar la energía.

Las órbitas directa y retrógrada del problema de tres cuerpos conforman, en la regularización de Levi-Civita, un link no trivial. Es en este link en el que Poincaré encuentra soportado un anillo de sección global y estudia propiedades sobre el mapa de retorno. Ve que el mapa de retorno se extiende al borde y cumple cierta propiedad de twist, conjeturando el hoy conocido y probado luego por birkhoff teorema de Poincaré-Birkhoff. Este teorema nos dice que en una dinámica del anillo discreta que preserva área, en la que los bordes son invariantes y tienen distinto número de rotación, entonces el mapa admite órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes. Este anillo es el que construye Conley con más generalidad que Birkhoff y Poincaré y calcula explícitamente los números de rotación de los bordes del anillo. Como dijimos antes, buscando resolver la conjetura propuesta por Birkhoff sobre la existencia de discos de sección global, es que el problema se ataca con las teorías modernas de curvas pseudoholomorfas y homología de Floer. En un contexto más general que el problema de tres cuerpos, se estudian dinámicas de Reeb en variedades de contacto que son conjuntos estrictamente convexos de $\mathbb{R}^4$. Esta variedad de contacto se simplectiza, que básicamente es considerar un cilindro con base esta superficie y definir en esta nueva variedad de dimensión par una forma simpléctica compatible. Se define en esta simplectización una estructura casi holomorfa y aquí entra en juego la maquinaria de curvas pseudoholomorfas. Para ello se interpola el problema original con uno conocido con buenas propiedades y se busca una órbita periódica especial como borde de un plano holomorfo de energía finita. Ésta órbita periódica especial será el lomo de un libro en la descomposición en libro abierto de la dinámica, en la cual las páginas del libro resultarán discos que a su vez son proyecciones de planos holomorfos de energía finita. Cada una de estas hojas resultan superficies transversales al flujo y el mapa de retorno queda bien definido. En la búsqueda de esta órbita especial se recurre a ciertos conceptos como el índice

de Conley-Zehnder de una órbita periódica, que de cierta forma mide cómo se enrollan las otras órbitas alrededor de ésta. Como la órbita periódica se busca como límite asintótico de un plano holomorfo, también entran en juego las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el operador asociado a estas ecuaciones en un espacio de dimensión infinita. Resulta que a lo largo el plano holomorfo solución la linearización de este operador resulta Fredholm y con teoremas que vinculan índices es que se logra encontrar, con el llamado “bubbling off analysis”, el lomo del libro como borde asintótico de un plano holomorfo.

1.3. Resumen por capítulos

- En el capítulo 2 veremos la reducción del problema de dos cuerpos al problema de Kepler. Hablaremos sobre la integrabilidad del sistema, dos formas distintas de regularizarlo y en particular su vínculo con la fibración de Hopf.
- El capítulo 3 presenta el problema de tres cuerpos con las restricciones que consideraremos en la tesis. Veremos cómo volver el hamiltoniano autónomo, estudiaremos los valores críticos del hamiltoniano para así determinar el rango de energía en el que nos moveremos y dar información sobre los conjuntos de nivel. Se verá una forma de regularizar el problema de tres cuerpos y presentaremos la aproximación al problema lunar propuesta por Hill. Por último veremos que el problema lunar admite estructura de contacto y así también el problema de tres cuerpos.
- El capítulo 4 se divide en dos encares en la búsqueda de órbitas periódicas. Primero veremos la construcción de Conley de éstas por métodos perturbativos en la regularización. Y de esta forma también conseguir un anillo de sección global. Luego veremos un método no perturbativo propuesto por Birkhoff para encontrar a energías no tan bajas la órbita periódica retrógrada.
- En el capítulo 5 veremos cómo entender a las órbitas periódicas como puntos críticos de un funcional. Distinguiremos órbitas periódicas degeneradas y no degeneradas y por último veremos cómo hallar las órbitas directa y retrógrada con el formalismo variacional.
- Por último, el capítulo 6 trata sobre métodos más modernos en la búsqueda de superficies de sección global. Veremos una construcción explícita de un disco de sección global en el problema de Kepler en rotación y luego nos centraremos en el artículo de Hofer, Wysocki y Zehnder [24] que será clave en la construcción de una descomposición en libro abierto del problema de tres cuerpos. En la revisión de este artículo no seremos del todo formales, por lo que no habrá demostraciones y se pretende dar un recorrido de las ideas fundamentales así como algunas ideas de prueba.

Capítulo 2

Problema de dos cuerpos

Intentemos describir el comportamiento de dos cuerpos modelados como masas puntuales, para los cuales la única fuerza que determina sus movimientos es su atracción mutua descrita por la ley de gravitación de Newton. Como la dinámica de estos cuerpos estará confinada en un plano, podemos expresar posiciones y velocidades en $\mathbb{R}^2$. Llamamos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ a las posiciones de los cuerpos y μ_1, μ_2 a sus respectivas masas. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{x}_1 = \mu_2 \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3}, \quad \ddot{x}_2 = \mu_1 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}$$

El sistema corresponde a un sistema Hamiltoniano donde el hamiltoniano está dado por la energía mecánica: si llamamos $y_1 = \mu_1 \dot{x}_1, y_2 = \mu_2 \dot{x}_2$ a los correspondientes momentos lineales, tenemos

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\|y_1\|^2}{2\mu_1} + \frac{\|y_2\|^2}{2\mu_2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\|x_2 - x_1\|}$$

Siendo el dominio del hamiltoniano los puntos de $T^*\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^8$ tales que $x_1 \neq x_2$. Claramente este problema se generaliza para n cuerpos en el espacio, pero por ahora nos detendremos en el caso de 2 cuerpos en el plano: el caso integrable. El primer paso es la reducción de los grados de libertad a la mitad haciendo uso del hecho de que nos alcanza la información de la posición relativa de los dos cuerpos al centro de masa.

2.1. Reducción a problema de Kepler

Observamos que el centro de masa $\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}$ no está acelerado. Esto permite tomarlo como sistema de referencia y por lo tanto suponer que el centro de masa es fijo y se encuentra en el origen. Definiendo $x_0 = x_2 - x_1$ obtenemos el sistema

$$\ddot{x}_0 = -(\mu_1 + \mu_2) \frac{x_0}{\|x_0\|^3}$$

Esto es el problema de Kepler para x_0 : el movimiento de un planeta con posición x_0 con el sol fijo en el origen. Recordamos que en el problema de Kepler tenemos tres posibles tipos de solución (que se discriminan en función de la energía mecánica y momento angular):

- La solución es una elipse con un foco en el origen (periódica).
- La solución es una parábola y cumple $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_0(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{x}_0(t) = 0$

- La solución es una hipérbola y cumple $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_0(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\dot{x}_0|(t) = c > 0$

En función de la solución del problema de Kepler conseguimos las soluciones del sistema original:

$$x_1(t) = \frac{-\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} x_0(t), \quad x_2(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} x_0(t)$$

Reescalando las variables podemos suponer que $\mu_1 = \mu$ y $\mu_2 = (1 - \mu)$ con $\mu \in (0, 1/2]$

Además, si asumimos que estamos en el primer caso y la solución describe una elipse con excentricidad $e_0 \in [0, 1)$, podemos asumir (de nuevo reescalando el tiempo) que el período es 2π y escribimos

$$x_0(t) = (r_0(t) \cos(f(t)), r_0(t) \sin(f(t))), \quad \text{donde} \quad r_0(t) = r_0(t; e_0) = \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos(f(t))}$$

Además, la *anomalía verdadera* $f(t) = f(t; e_0)$ cumple $\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \frac{(1 + e_0 \cos(f(t)))^2}{(1 - e_0^2)^{3/2}}$

Por lo tanto, las posiciones x_1 y x_2 serán

$$x_1(t) = (\mu - 1)r_0(t)(\cos f(t), \sin f(t)), \quad x_2(t) = \mu r_0(t)(\cos f(t), \sin f(t))$$

La energía mecánica (el hamiltoniano) define la dinámica de Kepler, y se expresa

$$H(x_0, \dot{x}_0) = \frac{|\dot{x}_0|^2}{2} - \frac{1}{|x_0|^2}$$

El hamiltoniano H además de ser una cantidad conservada define el campo que determina el movimiento como $X_H = J\nabla H$. La dinámica queda confinada en conjuntos de nivel de H , pero además de la energía mecánica también se conserva el momento angular L . Estas cantidades son independientes, que en este contexto significa que los gradientes de L y H son linealmente independientes y sus conjuntos de nivel se cortan transversalmente (se pierde otro grado de libertad). Cuando tenemos suficientes cantidades conservadas decimos que el sistema es integrable. Por el teorema de Arnol'd-Liouville esto implica que, para energías H negativas, el espacio de fase queda foliado por toros invariantes, donde cada toro es la intersección de $H = cte < 0$, $L = cte \neq 0$, y la dinámica dentro de estos toros es lineal en variables angulares. Una particularidad de este problema es que en estos toros invariantes, todas las órbitas son periódicas, es decir, las órbitas inducen foliaciones por círculos en los toros invariantes. Más aún, como dijimos que la dinámica en los toros es lineal, las órbitas son vistas como rectas de pendiente racional en el cubrimiento universal de cada toro invariante. Para más detalles sobre integrabilidad ver apéndice A.1.

Estos resultados dan cuenta de que un buen sistema de coordenadas clarifica la dinámica en su escritura. Para preservar la estructura simpléctica que nos permite definir de forma intrínseca la dinámica en un espacio de fase en términos de una función de energía es que por lo general buscamos cambios de coordenadas simplécticos. De hecho una de las formas clásicas para probar las leyes de Kepler es utilizar coordenadas polares en el espacio de configuraciones y la transformación simpléctica inducida. De esta forma se prueban las expresiones dadas para la solución x_0 . Veamos brevemente la segunda ley de Kepler usando coordenadas polares y en la sección siguiente veremos otra forma de concluir la primer ley.

Escribimos como (q_1, q_2, p_1, p_2) las coordenadas en el espacio de fase en Kepler. Si consideramos coordenadas polares en el espacio de configuraciones

$$(q_1, q_2) = F(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

La transformación física asociada, que nos da un simplectomorfismo, nos determina los nuevos momentos asociados a (r, ϕ) y estos quedan dados por

$$(p_1, p_2) = DF^{-1}(p_r, p_\phi) = \left(\cos(\phi)p_r - \frac{\sin(\phi)}{r}p_\phi, \sin(\phi)p_r + \frac{\cos(\phi)}{r}p_\phi \right)$$

En las nuevas coordenadas el hamiltoniano se expresa

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r}$$

Y como el cambio de coordenadas es simpléctico se preserva la escritura de las ecuaciones hamiltonianas

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \\ \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \end{cases}$$

En particular se puede ver que $L = q_1 p_2 - q_2 p_1 = p_\phi$ es una cantidad conservada.

Lema 2.1.1 (Segunda ley de Kepler). *El área barrida por una órbita elíptica en tiempo es lineal en el tiempo: en tiempos iguales se barren áreas iguales. Específicamente se verifica*

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}L = \frac{d\text{Área}}{dt}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=0}^{r=r_1(\phi)} r dr d\phi \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r^2(t) \dot{\phi}(t) dt \\ &= \frac{L}{2} (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Usando en la última igualdad que $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2}$. □

Hay más cantidades que se conservan, que si bien no son independientes de H y L (simplemente por un tema dimensional), nos brindan información interesante. Hablemos ahora de las cantidades conservadas correspondientes a las entradas del vector de Runge-Lenz.

2.2. Vector de Runge-Lenz

Pensamos por el momento el problema de dos cuerpos en el espacio (el problema planar se puede pensar en el plano $z = 0$). Escribiendo q a la posición y p al momento, el hamiltoniano del problema de Kepler es

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

Si $L = q \times p$ momento angular, definimos el vector de Runge-Lenz A como

$$A := p \times L - \frac{q}{|q|}$$

Lema 2.2.1. *El vector de Runge-Lenz es preservado por el flujo hamiltoniano: las componentes $A = (A_1, A_2, A_3)$ son cantidades conservadas, o equivalentemente $\{H, A_i\} = 0$.*

Demostración. Recordando que $\dot{L} = 0$

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{p} \times L + p \times \dot{L} - \frac{\dot{q}}{|q|} + \frac{\langle q, \dot{q} \rangle}{|q|} \frac{q}{|q|^2} \\ &= -\frac{q}{|q|^3} \times (q \times p) - \frac{p}{q} + \frac{\langle q, p \rangle}{|q|} \frac{q}{|q|^2} \\ &= \frac{1}{|q|^3} (-q \times (q \times p) - \langle q, q \rangle p + \langle q, p \rangle q) \\ &= 0\end{aligned}$$

La justificación del último paso es la igualdad

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$$

□

El módulo del vector de Runge-Lenz también se relaciona con la energía H y el momento angular L :

Proposición 2.2.1. *El vector de Runge-Lenz satisface la siguiente igualdad:*

$$|A|^2 = 1 + 2H|L|^2$$

Demostración. Observando que p y L son ortogonales y recordando que el producto mixto cumple

$$\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$$

tenemos

$$\begin{aligned}|A|^2 &= |p \times L|^2 - \frac{2}{|q|} \langle q, p \times L \rangle + \frac{|q|^2}{|q|^2} \\ &= |p|^2 |L|^2 - \frac{2}{|q|} |L|^2 + 1 \\ &= 1 + 2 \left(\frac{1}{2} |p|^2 - \frac{1}{|q|} \right) |L|^2 = 1 + 2H|L|^2\end{aligned}$$

□

Si bien pensamos la dinámica en el espacio, ya sabemos que la velocidad y posición están confinadas en un plano. Específicamente el plano perpendicular a $L = q \times p$. Resulta que el vector de Runge-Lenz también se encuentra en este plano.

Lema 2.2.2. *El vector de Runge-Lenz es ortogonal a L*

Demostración.

$$\langle A, L \rangle = \langle p \times L, L \rangle - \frac{1}{|q|} \langle q, L \rangle = 0 + 0$$

□

Otra propiedad interesante, y útil, es que la norma del vector de Runge-Lenz es exactamente la excentricidad de las elipses solución del problema de Kepler. Más aún, se deduce que las soluciones de Kepler son secciones cónicas a partir de la relación de A con el momento angular y la energía mecánica. Para ver esto, con un cambio de coordenadas podemos suponer que $L = (0, 0, \ell)$ para cierto $\ell > 0$ y escribimos

$$A = |A| (\cos(g), \sin(g), 0)$$

Se tiene lo siguiente:

$$|q| + \langle A, q \rangle = \left\langle \frac{q}{|q|} + A, q \right\rangle = \langle p \times L, q \rangle = \langle q \times p, L \rangle = |L|^2 \quad (2.1)$$

Escribiendo la posición en coordenadas polares:

$$q = (r \cos(\phi), r \sin(\phi), 0)$$

Sustituyendo en la igualdad podemos despejar el radio en función del ángulo:

$$r = \frac{|L|^2}{1 + |A| \cos(\phi - g)}$$

Esto es la ecuación de una cónica en coordenadas polares, es decir, la descripción geométrica de las órbitas (primer ley de Kepler). Cuando $|A| < 1$ (equivalentemente cuando $H < 0$) obtenemos elipses siendo $|A|$ la excentricidad de la misma. A la cantidad $f = \phi - g$ se le llama anomalía verdadera. Cuando $L \neq 0$ el punto más cercano al origen (perihelio) se da cuando $\phi = g$.

También podemos ver que las soluciones son secciones cónicas (intersección de un plano con un cono) en coordenadas cartesianas, consecuencia de la igualdad 2.1:

Consideramos el cono dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = |L|^2 - |A|x$. Luego la intersección de estos corresponde con la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |L|^2 - |A|x$$

Observando que $\sqrt{x^2 + y^2} = |q|$ y que $\langle A, q \rangle = |A|r \cos(\phi) = |A|x$, la intersección corresponde exactamente con la ecuación 2.1.

2.3. Regularizaciones

Fijada una energía H , las posiciones y velocidades quedarán confinadas en el conjunto de nivel del valor de H fijado. Sin embargo, en el problema de Kepler, este conjunto de nivel es no compacto: existen órbitas que a futuro o a pasado tienden al origen (colisiones). Formalmente lo que se busca para regularizar las colisiones es compactificar el conjunto de nivel de forma tal que esta compactificación sea el conjunto de nivel de otra energía $\tilde{H}$ y las órbitas determinada por la dinámica de H sean reparametrizaciones de las determinadas por $\tilde{H}$. En términos de campos estamos pidiendo que los campos X_H y $X_{\tilde{H}}$ sean paralelos en el conjunto de nivel. En esta sección veremos dos formas distintas de regularizar el problema de Kepler.

2.3.1. Regularización de Levi-Civita

Espacio de configuraciones complejo y tiempo ficticio:

Como el espacio de configuraciones del problema de Kepler es el plano, es natural modelarlo en los complejos. Es decir, si $x(t) = q_1(t) + iq_2(t)$, la ecuación que determina el sistema (normalizando constantes) es

$$\ddot{q}_1 + i\ddot{q}_2 = -\frac{(q_1 + iq_2)}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}$$

O de forma compacta como

$$\ddot{x} + \frac{x}{|x|^3} = 0$$

En estos terminos expresamos a la energía mecánica del sistema:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{|\dot{x}|^2}{2} - \frac{1}{|x|}$$

En particular, fijando la energía, observamos que la velocidad $\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(H + \frac{1}{|x|}\right)}$ tiende a infinito en las colisiones (cuando $x \rightarrow 0$).

Consideramos el cambio de coordenadas que da lugar a la transformación de Levi-Civita:

$$x = z^2$$

Con este cambio la ecuación de movimiento y la energía adquieren la siguiente forma:

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{z} + \frac{1}{2\bar{z}(z\bar{z})^2} = 0, \quad H = 2|z|^2|\dot{z}|^2 - \frac{1}{z\bar{z}} \quad (2.2)$$

Para evitar que la velocidad tienda a infinito en las colisiones, definimos un tiempo ficticio de tal forma que el nuevo tiempo se dilate a medida que nos acercamos al origen. Definimos $s(t) = \int \frac{1}{|x|} dt$. De esta forma

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{z\bar{z}}$$

Si denotamos por z' a $\frac{\partial z}{\partial s}$ obtenemos

$$\dot{z} = \frac{z'}{z\bar{z}}, \quad \ddot{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \left(\frac{z''}{(z\bar{z})} - \frac{z'}{(z\bar{z})^2} (z'\bar{z} + z\bar{z}') \right)$$

Sustituyendo (2.2) obtenemos

$$\frac{z''}{(z\bar{z})^2} - \frac{(z')^2 \bar{z}}{(z\bar{z})^3} - \frac{z'\bar{z}'z}{(z\bar{z})^3} + \frac{(z')^2}{z(z\bar{z})^2} + \frac{1}{2(z\bar{z})^2 \bar{z}} = 0, \quad H = \frac{2|z'|^2}{(z\bar{z})} - \frac{1}{z\bar{z}}$$

Simplificando la ecuación de movimiento

$$\ddot{z} - \frac{z|z'|^2}{(z\bar{z})} + \frac{z}{2(z\bar{z})} = 0$$

Y sustituyendo por la constante de energía H obtenemos

$$\ddot{z} - \frac{H}{2}z = 0$$

Cuando la energía H es negativa, esto no es más que la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia $\omega = \sqrt{H/2}$. Es decir, las soluciones son combinaciones lineales (complejas) de $e^{i\omega s}$ y $e^{-i\omega s}$. Si observamos solo la geometría de las órbitas, esto nos muestra que las soluciones elípticas del problema de Kepler pueden ser vistas como la proyección de soluciones del oscilador armónico mediante el mapa inducido por $z \rightarrow z^2$.

Reescritura con formalismo simpléctico

Si $x = q_1 + iq_2$, $\dot{x} = y = p_1 + ip_2$, consideramos el Hamiltoniano $H : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y la forma canónica simpléctica ω definidos respectivamente por

$$H(x, y) = \frac{|y|^2}{2} - \frac{1}{|x|} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{1}{2}(dx \wedge d\bar{y} + d\bar{x} \wedge dy)$$

Recordando que $dx = dq_1 + idq_2$ y $d\bar{x} = dq_1 - idq_2$, la escritura en coordenadas cartesianas de la forma simpléctica es

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

De hecho, podemos expresar la 1-forma tautológica como

$$\lambda = q_1 dp_1 + q_2 dp_2 = \operatorname{Re}(x d\bar{y})$$

Luego, si

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} - i \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \end{cases}$$

el problema de Kepler se expresa como un sistema Hamiltoniano donde

$$\dot{x} = 2 \frac{\partial H}{\partial \bar{y}}, \quad \dot{y} = -2 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

Consideramos ahora el cubrimiento doble

$$\mathcal{L} : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(z, w) = (z^2, \frac{w}{\epsilon \bar{z}}) = (x, y)$$

Si consideramos el Hamiltoniano K correspondiente al oscilador armónico

$$K(z, w) = \frac{|z|^2}{2} + \frac{|w|^2}{2}$$

y fijamos en $-1/\epsilon^2$ la energía H , obtenemos que

$$\begin{aligned} \epsilon^2 |z|^2 \left(H(\mathcal{L}(z, w)) + \frac{1}{\epsilon^2} \right) &= \epsilon^2 |z|^2 \left(\frac{|w|^2}{\epsilon^2 |z|^2} - \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{|z|^2}{2} + \frac{|w|^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \\ &= 2(K(z, w) - \epsilon^2/2) \end{aligned}$$

En particular, el cubrimiento $\mathcal{L}$ restringido al nivel de energía $\epsilon^2/2$ de K (esto es topológicamente S^3) nos da un cubrimiento doble del conjunto de nivel $-1/\epsilon^2$ de H :

$$K^{-1}(\epsilon^2/2) \setminus \{z = 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} H^{-1}(-1/\epsilon^2) = \Sigma_\epsilon$$

Observación 2.3.1. El mapa $\mathcal{L}$ es una completación del mapa $z \mapsto z^2$ de tal forma que se preserve la estructura simpléctica. Decimos que el mapa es *conforme-simpléctico*, ya que a menos de un múltiplo escalar preserva la forma simpléctica.

Proposición 2.3.1. *El mapa $\mathcal{L}$ manda curvas soluciones del oscilador armónico restringidas al conjunto de nivel $\epsilon^2/2$ en curvas soluciones del problema de Kepler con energía $-1/\epsilon^2$*

Demostración. Definimos la siguiente función de energía:

$$\tilde{H}_\epsilon(x, y) = \epsilon^2 |x| \left(H(x, y) + \frac{1}{\epsilon^2} \right)$$

Por lo visto anteriormente

$$\tilde{H}_\epsilon(\mathcal{L}(z, w)) = 2(K(z, w) - \epsilon^2/2) := K_\epsilon(z, w)$$

El pullback por $\mathcal{L}$ de la 1-forma de Liouville es

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{L}}(z, w) &= \mathcal{L}^* \lambda(z, w) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\epsilon} z^2 d \left(\frac{\bar{w}}{z} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\epsilon} z^2 \left(\frac{d\bar{w}}{z} - \frac{\bar{w} dz}{z^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Re} (z d\bar{w} - \bar{w} dz) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Re} ((z_1 + iz_2)(dw_1 - idw_2) - (w_1 - iw_2)(dz_1 + idz_2)) \\ &= \frac{1}{\epsilon} (z_1 dw_1 + z_2 dw_2 - w_1 dz_1 - w_2 dz_2) \end{aligned}$$

Luego:

$$\omega_{\mathcal{L}} = d\lambda_{\mathcal{L}} = \frac{2}{\epsilon} (dz_1 \wedge dw_1 + dz_2 \wedge dw_2) = \frac{2}{\epsilon} d\lambda_{\mathbb{C}^2} = \frac{2}{\epsilon} \omega_{\mathbb{C}^2}$$

Por lo tanto, si bien $\mathcal{L}$ no es simpléctico, preserva la forma simpléctica a menos de un múltiplo y es localmente un difeomorfismo. Entonces el mapa

$$\mathcal{L} : (\mathbb{C}^2, K, \omega_{\mathbb{C}^2}) \rightarrow ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}, \tilde{H}_\epsilon, \omega_{\mathbb{C}^2})$$

manda las curvas soluciones del oscilador armónico en curvas soluciones del sistema determinado por $\tilde{H}_\epsilon$, pues las soluciones del sistema $(\mathbb{C}^2, K, \omega_{\mathbb{C}^2})$ y $(\mathbb{C}^2, K, \omega_{\mathcal{L}})$ son las mismas a menos de una reparametrización temporal, ya que los gradientes simplécticos de los respectivos sistemas son múltiplos uno del otro por un factor ϵ (los gradientes simplécticos quedan determinados por la relación $\omega(X_K, \cdot) = DK$)

Solo resta por ver que las soluciones del sistema $((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}, \tilde{H}_\epsilon, \omega_{\mathbb{C}^2})$ con energía $\tilde{H}_\epsilon = 0$ corresponden a las soluciones del problema de Kepler con una reparametrización temporal y con energía $H_\epsilon = H + \frac{1}{\epsilon^2} = 0$.

En el problema de Kepler tenemos:

$$\begin{cases} H_\epsilon(x, y) = \frac{y\bar{y}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x\bar{x}}} + \frac{1}{\epsilon^2} \\ \dot{x} = 2 \frac{\partial H_\epsilon}{\partial \bar{y}} = y \\ \dot{y} = -2 \frac{\partial H_\epsilon}{\partial x} = -\frac{x}{(x\bar{x})^{3/2}} \end{cases}$$

Consideramos el cambio de variable temporal dado por $ds = \frac{dt}{\epsilon^2|x|}$, lo que llamamos el tiempo ficticio s (de esta forma la nueva velocidad en términos de s no tiende a infinito en

las colisiones). Escribimos $x' = \frac{dx}{ds}$ y $y' = \frac{dy}{ds}$. Obtenemos que las ecuaciones del problema de Kepler en función de s son:

$$\begin{cases} x' = \epsilon^2 y |x| \\ y' = \epsilon^2 \frac{x}{|x|^2} \end{cases}$$

Por otro lado, para $\tilde{H}_\epsilon(x, y) = \epsilon^2 \sqrt{x\bar{x}} H_\epsilon(x, y) = \frac{\epsilon^2 |x| |y|^2}{2} + |x| - 1/\epsilon^2$ las ecuaciones hamiltonianas son:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial y} = \epsilon^2 y |x| \\ 2 \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial x} = \frac{x}{|x|} \left(\frac{\epsilon^2 |y|^2}{2} + 1 \right) \end{cases}$$

Si nos restringimos a $\tilde{H}_\epsilon = 0$ tenemos que $|y|^2 = \frac{2}{|x|} - \frac{2}{\epsilon^2}$. Sustituyendo obtenemos

$$2 \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial x} = \frac{x}{|x|} \left(\epsilon^2 \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) + 1 \right) = \epsilon^2 \frac{x}{|x|^2}$$

Es decir, restringidos al conjunto de nivel mencionado, las ecuaciones hamiltonianas son exactamente las mismas que las del problema de kepler con el tiempo ficticio s :

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial y} = \epsilon^2 y |x| \\ 2 \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial x} = \epsilon^2 \frac{x}{|x|^2} \end{cases}$$

□

Una forma más directa, en términos de geometría de contacto, para probar que el mapa $\mathcal{L}$ manda soluciones del oscilador armónico a kepler a menos de reparametrizaciones es observar que se preserva el campo de Liouville. Recordamos que el campo de Liouville X queda definido por la ecuación $\iota_X \omega = \lambda$ y se verifica que el campo de Liouville induce en superficies transversales, por restricción de λ , una forma de contacto. Esta, a su vez, induce un campo de Reeb que es paralelo al flujo hamiltoniano. Para ver detalles sobre esto, ver apéndice A.2.

En $\mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ para la 1-forma $\lambda = q_1 dp_1 + q_2 dp_2$ el campo de Liouville X es radial en el espacio de configuraciones:

$$X = q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

Y en $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ con la 1-forma $\lambda_{\mathcal{L}}$ el campo de Liouville $X_{\mathcal{L}}$ es radial en el espacio de fase:

$$X_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} \right)$$

Lema 2.3.1. *Se verifica $\mathcal{L}^* X = X_{\mathcal{L}}$*

Demostración. Como $\lambda = \iota_X d\lambda$ se tiene

$$\lambda_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^* \lambda = \mathcal{L}^* (\iota_X d\lambda) = \iota_{\mathcal{L}^* X} d(\mathcal{L}^* \lambda) = \iota_{\mathcal{L}^* X} d(\lambda_{\mathcal{L}})$$

Por definición de campo de Liouville $\mathcal{L}^* X = X_{\mathcal{L}}$

□

Como el mapa $\mathcal{L}$ preserva la transversalidad tenemos lo siguiente

Proposición 2.3.2. *Una hipersuperficie $\Sigma \subset T^*S^2 \simeq T^*\overline{\mathbb{C}}$ es estrellada en las fibras (pensando a p en la base y q en las fibras) si y solo si $\mathcal{L}^{-1}(\Sigma)$ es tipo estrella.*

Observar que una hipersuperficie en T^*S^2 estrellada en las fibras es difeomorfa a S^*S^2 y una hipersuperficie tipo estrella en $\mathbb{C}^2$ es difeomorfa a S^3 . Es decir, con esto vemos que S^3 es un cubrimiento doble de S^*S^2 vía el mapa $\mathcal{L}$.

Volviendo al problema original, podemos interpretar a las soluciones de Kepler como proyecciones de soluciones del oscilador armónico. Lo que ganamos es que los casos límites (colisiones) sí pueden ser vistas en el oscilador armónico, donde el conjunto de nivel es compacto. Más aún, ahora veremos que para energías negativas esto nos permite encontrar una superficie de sección transversal: una superficie cuyo borde son órbitas periódicas y el resto de órbitas en el conjunto de nivel atraviesan a esta superficie.

Las ecuaciones del oscilador armónico son

$$\begin{cases} \dot{z} = 2\frac{\partial K_\epsilon}{\partial \bar{w}} = w \\ \dot{w} = -2\frac{\partial K_\epsilon}{\partial z} = -z \end{cases}$$

Si consideramos el cambio de variable $u = w + iz$, $v = \bar{w} + i\bar{z}$, las ecuaciones son

$$\begin{cases} \dot{u} = iu \\ \dot{v} = iv \end{cases}$$

con soluciones de la forma $u(t) = c_1 e^{it}$, $v(t) = c_2 e^{it}$. Habíamos fijado la energía en $\epsilon^2/2 = \frac{|z|^2}{2} + \frac{|w|^2}{2} = \frac{u\bar{u}}{4} + \frac{v\bar{v}}{4} = \frac{1}{4}(|c_1|^2 + |c_2|^2)$, entonces las soluciones en dicho nivel de energía son curvas tales que $u(t)/v(t)$ constante y el par $(u(t), v(t))$ se encuentra en la esfera S^3 . Por lo tanto las soluciones son fibras de la fibración de Hopf: $(u, v) \rightarrow u/v : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Esto vuelve el estudio de la geometría de las órbitas en Kepler casi en un problema algebraico. Veamos un poco más en detalle la fibración de Hopf para encontrar la superficie de sección transversal global al sistema.

Fibración de Hopf

La fibración de Hopf es un fibrado de S^3 con base S^2 y fibra S^1 :

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

Si pensamos $S^3 := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ y $S^2 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definimos

$$\pi : S^3 \rightarrow S^2, \quad \pi(u, v) = u/v$$

La función π es una submersión y verifica que las fibras son círculos: $\pi^{-1}(\alpha) \simeq S^1$. Basta con ver que son la intersección de una recta compleja con la esfera:

$$\pi^{-1}(\alpha) = \{(u, v) : u = \alpha v, |u|^2 + |v|^2 = 1\}$$

La fibración de Hopf queda definida por π . Observamos que podemos pensar a S^2 como el espacio proyectivo de rectas complejas $\mathbb{CP}^1$, es decir, pensar $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

En S^3 podemos encontrar una superficie, específicamente un anillo, para el cual sus bordes son fibras y el resto de las fibras atraviesan transversalmente el interior de este anillo. Interpretando estas fibras como órbitas del oscilador armónico (o del problema de Kepler) estamos diciendo que podemos encontrar una superficie de sección global para la dinámica. Veamos cómo construir este anillo: definimos

$$\begin{aligned} M &:= \overline{\{(u, v) \in S^3 : u \neq 0, v \neq 0, \arg u + \arg v \equiv 0 \pmod{2\pi}\}} \\ &= \{(ae^{it}, be^{is}) \in S^3 : t + s \equiv 0 \pmod{\pi}\} \end{aligned}$$

Observando que:

- La fibra correspondiente a $\alpha = ke^{i\theta} \in S^2$ se parametriza como

$$\gamma_\alpha(s) = \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} e^{i(s+\theta)}, \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} e^{is} \right)$$

- Una parametrización del anillo M está dada por

$$\phi(c, t) = \left(ce^{it}, \sqrt{1-c^2} e^{-it} \right)$$

con $c \in [0, 1]$ y $t \in [0, 2\pi)$

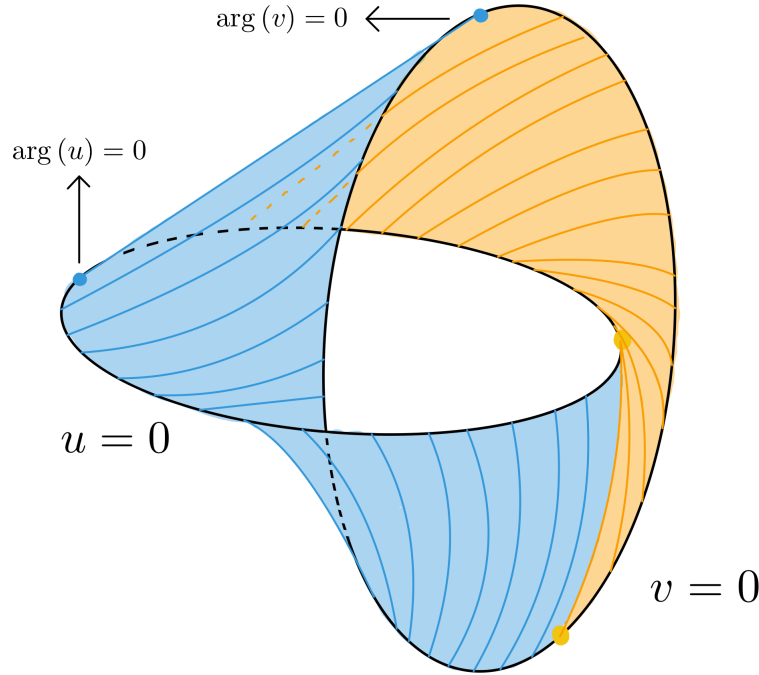


Figura 2.1: El link de Hopf está representado por los círculos negros que no se intersectan. En azul se representa a los segmentos del anillo M que conectan $\arg(u) \in [0, \pi]$ con $\arg(v) \in [-\pi, 0]$. En amarillo el resto.

Podemos verificar que, por un lado los bordes de M correspondientes a $c = 0, 1$ son las fibras correspondientes a $\alpha = 0, \infty$, y por otro lado que el resto de las fibras atraviesan transversalmente el interior de M . Para esto último solo hay que verificar que si $\gamma_\alpha(s_0) = p = \phi(c_0, t_0) \in M$, entonces $\gamma'_\alpha(s_0)$, $\frac{\partial \phi}{\partial c}(c_0, t_0)$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}(c_0, t_0)$ son vectores linealmente independientes.

También con lo observado vemos que las fibras están encajadas en toros que corresponden a $|\alpha| = k = cte$, salvo el caso $k = 0$ y $k = \infty$ que corresponden a las fibras borde de la sección M . Podemos dar parametrizaciones de estos toros como

$$T_k(s, \theta) = \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} e^{is}, \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} e^{i\theta} \right)$$

Volvamos a reinterpretar esto en el problema de Kepler. El momento angular en coordenadas originales es $L = q_1 p_2 - q_2 p_1 = \frac{1}{2i} (\bar{q} p - q \bar{p})$. Por lo tanto, en las coordenadas

(cubrimiento doble) de Levi-Civita tenemos que

$$2i\epsilon = \bar{z}w - z\bar{w}$$

Teniendo esto en cuenta tenemos que

$$\left| \frac{u}{v} \right|^2 = \frac{|w|^2 + |z|^2 - i(\bar{z}w - z\bar{w})}{|w|^2 + |z|^2 + i(\bar{z}w - z\bar{w})} = \frac{K + 2\epsilon L}{K - 2\epsilon L}$$

Por lo que vemos explícitamente que fijar un momento angular en el conjunto de nivel de K nos da un toro invariante que corresponde a $|\alpha| = \left| \frac{u}{v} \right| = cte$. Aquí reaparece el toro invariante por la dinámica de Arnol'd-Liouville, como la intersección de los conjuntos de nivel de las cantidades conservadas independientes.

2.3.2. Regularización de Moser

A energía mecánica fija igual a -1/2

Consideramos nuevamente la función de energía mecánica que determina las ecuaciones de movimiento del problema de Kepler $H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|}$$

Observando que el *switch map* $\mathcal{S} : (p, q) \mapsto (q, -p)$ es un symplectomorfismo, definimos una nueva función de energía dada por

$$K(p, q) = \frac{1}{2} \left(|q| \left(H \circ \mathcal{S}(p, q) + \frac{1}{2} \right) + 1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (|p|^2 + 1) |q| \right)^2$$

El nuevo Hamiltoniano K no es más que la energía cinética con la métrica heredada de la proyección estereográfica (la métrica redonda) donde los papeles de q y p están invertidos, pensamos a p como “posición” y q un “momento”. El flujo Hamiltoniano para K coincide con el flujo geodésico respecto a dicha métrica.

Lo primero que observamos es que si fijamos $H = -1/2$, entonces $H^{-1}(-1/2) = K^{-1}(1/2)$. Llamamos $\Sigma_{1/2}$ a este conjunto. Tenemos lo siguiente:

$$d(H \circ \mathcal{S})|_{\Sigma_{1/2}}(p, q) = p_1 dp_1 + p_2 dp_2 + \frac{q_1}{|q|^3} dq_1 + \frac{q_2}{|q|^3} dq_2$$

$$dK|_{\Sigma_{1/2}}(p, q) = p_1 |q| dp_1 + p_2 |q| dp_2 + \frac{q_1}{|q|^2} dq_1 + \frac{q_2}{|q|^2} dq_2$$

Por lo tanto $dK|_{\Sigma_{1/2}}(p, q) = |q| \left(dH \circ \mathcal{S}|_{\Sigma_{1/2}}(q, -p) \right)$. Dicha relación la heredan los gradientes simplécticos:

$$X_K|_{\Sigma_{1/2}}(p, q) = |q| X_{H \circ \mathcal{S}}|_{\Sigma_{1/2}}(p, q)$$

Como X_K y X_H son colineales en $\Sigma_{1/2}$, determinan el mismo flujo. Sin embargo, al igual que en la regularización de Levi-Civita, la proporción de módulos de los gradientes simplécticos queda determinada por $|q|$. Esto es esperable, pues el flujo geodésico está definido para todo tiempo para cualquier condición inicial, mientras que en el problema de Kepler tenemos que lidiar con las colisiones: cuando $|q| \rightarrow 0$, $|p| \rightarrow +\infty$ (a diferencia del flujo geodésico).

Esto nos permite visualizar las órbitas del problema de Kepler en $T^*(S^2)$ invirtiendo los roles de la posición y el momento. Si pensamos a S^2 como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, el punto ∞ (que corresponde al polo Norte), es la representación de la colisión. Justamente, la colisión se da cuando la posición es 0 y el momento ∞ , que visto en la esfera es la posición ∞ con momento lineal 0. Las órbitas del problema de Kepler que resultan en colisiones, son vistas en $T^*(S^2)$ como aquellas geodésicas que pasan por ∞ (si nos restringimos a la base S^2 , son círculos máximos que pasan por el polo Norte). Más aún, en el flujo geodésico interpretamos a las órbitas que resultan en colisiones como “rebotes” en el origen, y de esta forma todas las soluciones son periódicas (como debe ser en el flujo geodésico de la esfera).

Caso general: energía constante $c < 0$

Para el caso general de energía negativa en el problema de Kepler, también podemos regularizar el problema viéndolo como un flujo geodésico de la esfera. Solo basta trastocar el switch-map para obtener otro simplectomorfismo que haga que las cuentas funcionen igual que en el caso anterior.

Consideramos el simplectomorfismo dado por $\tilde{S} : (p, q) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{-2c}}q, -\sqrt{-2c}p)$. Luego

$$\begin{aligned} K(p, q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{|q|}{-2c} (H \circ \tilde{S}(p, q) - c) + \frac{1}{\sqrt{-2c}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (|p|^2 + 1) |q| \right)^2 \end{aligned}$$

Si nos restringimos a $\Sigma_c = H^{-1}(c) = K^{-1}(-1/4c)$ los gradientes simplécticos tienen la siguiente relación:

$$X_K|_{\Sigma_c}(p, q) = \frac{|q|}{(-2c)^{3/2}} X_{H \circ \tilde{S}}|_{\Sigma_c}(p, q)$$

donde $X_{H \circ \tilde{S}}(p, q) = \left(-\frac{\sqrt{-2c}q_1}{|q|^3}, -\frac{\sqrt{-2c}q_2}{|q|^3}, -2cp_1, -2cp_2 \right)$.

Es decir, de nuevo obtenemos que el flujo geodésico coincide (geométricamente) con el flujo Hamiltoniano del problema de Kepler en el conjunto de nivel Σ_c .

Capítulo 3

Problema restringido de 3 cuerpos planar

El problema de tres cuerpos es un modelo dinámico que describe el comportamiento de tres masas puntuales en el espacio $\mathbb{R}^3$ sujetos a la ley de gravitación de Newton. Si llamamos q_i, p_i, m_i a las posiciones, momentos lineales, y masas de los cuerpos respectivamente, con $i = 1, 2, 3$, el sistema Hamiltoniano que determina la dinámica está dado por

$$H : T^*(\mathbb{R}^6 \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m_i} |p_i|^2 - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

donde $\Delta = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^6 : q_i \neq q_j \text{ si } i \neq j\}$

En este capítulo nos centraremos en estudiar el problema cuando $m_3 = 0$, y a ello se debe el nombre “restringido”. De esta forma buscamos aproximarnos, por ejemplo, a los problemas sol-tierra-luna o tierra-luna-satélite.

3.1. Problema de tres cuerpos restringido en marco inercial

Pensamos en tres objetos en el espacio donde uno de ellos tiene masa despreciable. A los de masa no despreciable los llamamos primarios. Para ilustrar y fijar ideas pensemos en los primarios como la tierra y la luna, y al objeto de masa despreciable como un satélite. Observamos que los primarios no notan la presencia del satélite y por lo tanto la dinámica de éstos es la de un problema de dos cuerpos, que como vimos, se reduce al problema de Kepler. Por lo tanto, lo que nos interesa estudiar es el movimiento del satélite bajo las fuerzas gravitatorias de las primarias. En particular queremos entender los movimientos asintóticos a futuro y pasado. Por ejemplo, nos preguntamos bajo qué condiciones aseguramos que el movimiento del satélite es acotado, periódico, o tiene velocidad asintótica positiva.

Sigamos formalizando el problema. Reescalando podemos suponer que la suma de las masas es 1 y podemos pensar que la masa de la luna será μ y la de la tierra $1 - \mu$ con $\mu \in [0, 1]$. Otra forma de verlo es tomar $\mu = \frac{m_{luna}}{m_{luna} + m_{tierra}}$. Escribimos con $e(t), m(t)$ a las posiciones en función del tiempo de la tierra y la luna respectivamente. Escribimos $q(t)$ y $p(t)$ a la posición y momento lineal de satélite. El Hamiltoniano que define la dinámica del satélite es la energía mecánica y está dada por

$$E_t(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{\mu}{|q - m(t)|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - e(t)|}$$

Lo primero que notamos es que el Hamiltoniano no es autónomo, depende de las posiciones de la tierra y la luna, y por lo tanto del tiempo. Más aún, el dominio de E_t depende del tiempo:

$$E_t : T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{e(t), m(t)\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

En particular, el Hamiltoniano no es una cantidad que se preserve en las órbitas soluciones.

Tampoco estudiaremos este problema con esta generalidad, sino que consideraremos más restricciones. Si el satélite se mueve en el plano generado por la tierra y la luna, bajo un cambio de coordenadas podemos pensar $e(t), m(t), q(t) \in \mathbb{R}^2$. De esta forma

$$E_t : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{e(t), m(t)\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Cuando consideramos esta restricción hablamos del **problema restringido de tres cuerpos planar**, de lo contrario lo llamamos problema restringido de tres cuerpos espacial.

Si además asumimos que el movimiento descrito por la tierra y la luna son órbitas circulares centradas en su centro de masa (una solución particular del problema de dos cuerpos), decimos que se trata del **problema restringido de tres cuerpos planar-circular**. Normalizando el período y colocando el centro de masa en el origen obtenemos que

$$e(t) = -\mu(\cos(t), -\sin(t)), \quad m(t) = (1 - \mu)(\cos(t), -\sin(t))$$

Lo interesante de este problema, es que mediante un cambio de coordenadas que acompañe la rotación de los primarios (dependiente del tiempo) podremos suponer que la tierra y la luna estarán fijas. Por supuesto que esto será posible en un marco de referencia no inercial, por lo que surgirán nuevas fuerzas aparentes.

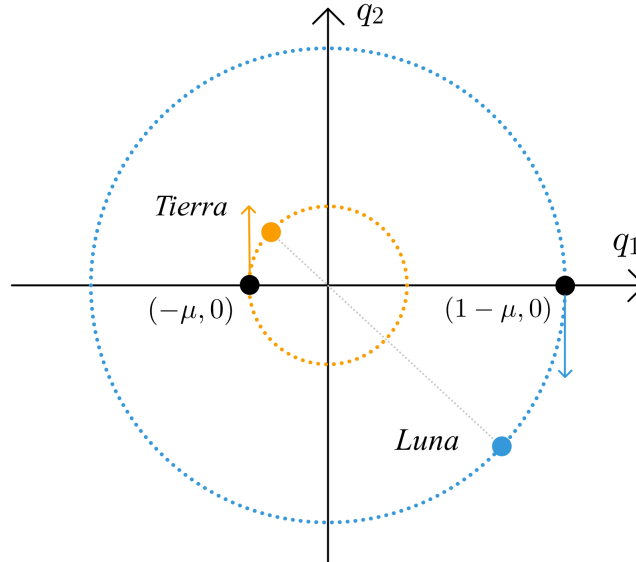


Figura 3.1: Las primarias se mueven en círculos cuyo centro corresponde al centro de masa, que colocamos en el origen.

3.2. Transformaciones que dependen del tiempo

Consideramos (M, ω) una variedad simpléctica, $E, L \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ Hamiltonianos que dependen del tiempo. Por comodidad escribimos $E_t = E(\cdot, t)$, $L_t = L(\cdot, t)$. Dichos Hamiltonianos generan dos campos Hamiltonianos que dependen del tiempo: X_{E_t} y X_{L_t} . Por simplicidad supondremos que los flujos asociados ϕ_E^t y ϕ_L^t están definidos para todo tiempo. Construiremos una nueva función Hamiltoniana cuyo flujo asociado coincida con la composición de los flujos ϕ_E^t y ϕ_L^t .

Consideramos $L \diamond E \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ definido para $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$ como

$$L \diamond E(x, t) = L(x, t) + E((\phi_L^t)^{-1}(x, t))$$

Proposición 3.2.1. *El flujo generado por $L \diamond E$ es $\phi_{L \diamond E}^t = \phi_L^t \circ \phi_E^t$*

Demostración. Dado $x \in M$ escribimos $y = \phi_L^t(\phi_E^t(x))$. Sea $\xi \in T_y M$. Tenemos

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{d}{dt}(\phi_L^t(\phi_E^t(x))), \xi\right) &= \omega(X_{L_t}(y) + d\phi_L^t(\phi_E^t(x)), \xi) \\ &= \omega(X_{L_t}(y), \xi) + \omega(d\phi_L^t(\phi_E^t(x)), \xi) \\ (\phi_E^t \text{ simpléctico}) \quad &= \omega(X_{L_t}(y), \xi) + \omega(\phi_E^t((\phi_L^t)^{-1}(y)), (d\phi_L^t)^{-1}\xi) \\ &= dL_t(y)\xi + dE_t((\phi_L^t)^{-1}(y))((d\phi_L^t)^{-1}(y)\xi) \\ &= d(L_t + E_t \circ (\phi_L^t)^{-1})(y)\xi = d(L \diamond E)(y)\xi \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_{(L \diamond E)_t}(y) = \frac{d}{dt}(\phi_L^t(\phi_E^t(x)))$

□

Observar que, aunque E y L sean autónomos, $L \diamond E$ no necesariamente lo es (a menos que E sea invariante por el flujo de L).

3.3. Coordenadas de rotación en problema circular

Consideramos a E_t la energía del satélite en el problema de tres cuerpos restricto planar-circular antes descrito y L el momento angular:

$$\begin{aligned} E_t(q, p) &= \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{\mu}{|q - m(t)|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - e(t)|} \\ L(q, p) &= q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{aligned}$$

Definimos el Hamiltoniano H como la transformación que induce el flujo composición de la energía mecánica y el momento angular: $H = L \diamond E$. A continuación veremos que el momento angular induce un flujo de rotación antihoraria. Dicha rotación se compensará con la rotación de las primarias (tierra y luna), obteniendo así un Hamiltoniano H autónomo. De esta forma podemos pensar a las primarias como masas puntuales fijas, en un marco de referencia no inercial. Como el flujo del nuevo Hamiltoniano es la composición de los flujos, con las soluciones de H y L podemos recuperar las soluciones de E_t .

Proposición 3.3.1. *El Hamiltoniano $H = L \diamond E$ es autónomo. Por lo tanto es una cantidad conservada en sus órbitas solución y lo llamamos **integral de Jacobi**.*

Demostración. Recordamos que $L \diamond E(q, p, t) = L(q, p, t) + E((\phi_L^t)^{-1}(q, p, t))$

Primero observamos que el flujo generado por el momento angular ϕ_L^t es una rotación antihoraria tanto en la posición como en el momento. Las ecuaciones hamiltonianas asociadas a L son

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -q_2 \\ \dot{q}_2 = q_1 \\ \dot{p}_1 = -p_2 \\ \dot{p}_2 = p_1 \end{cases}$$

Las soluciones son $q(t) = e^{it}q_0$ y $p(t) = e^{it}p_0$

Por otro lado las posiciones de la tierra y luna se expresan como

$$e(t) = -\mu(\cos(t), -\sin(t)) = -\mu e^{-it}$$

$$m(t) = (1 - \mu)(\cos(t), -\sin(t)) = (1 - \mu)e^{-it}$$

Tenemos que

$$|(\phi_L^t)^{-1}(q, p, t) - m(t)| = |q - m(0)|$$

$$|(\phi_L^t)^{-1}(q, p, t) - e(t)| = |q - e(0)|$$

Con el abuso de notacion $e = e(0) = (-\mu, 0)$, $m = m(0) = (1 - \mu, 0)$, escribimos

$$H(q, p, t) = H(q, p) = q_1 p_2 - q_2 p_1 + \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{\mu}{|q - m|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - e|}$$

□

Si definimos el potencial gravitatorio $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$V(q) = -\frac{\mu}{|q - m|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - e|}$$

y el potencial efectivo $U : \mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$U(q) = V(q) - \frac{1}{2}|q|^2$$

completando cuadrados podemos reescribir a la integral de Jacobi:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) + U(q)$$

El miembro adicional $\frac{1}{2}|q|^2$ se justifica por la **fuerza centrífuga** experimentada debido a las coordenadas de rotación. Por otro lado, el otro miembro del Hamiltoniano corresponde a una especie de “energía cinética en rotación” en la que el momento lineal participa. Esto se justifica por una fuerza adicional que se experimenta en estas coordenadas llamada **fuerza de Coriolis**. Así como la fuerza magnética, la fuerza de Coriolis depende de la velocidad y por esto decimos que H es un hamiltoniano magnético.

3.4. Los cinco puntos de Lagrange

Nos interesa encontrar y estudiar la naturaleza de los puntos críticos del hamiltoniano $H = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) + U(q)$. En particular para describir sus conjuntos de nivel. Las derivadas parciales son

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_1} = q_1 + p_2 + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} = q_2 - p_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 - q_2 \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 + q_1 \end{cases}$$

Por lo tanto existe una biyección entre los puntos críticos de H y de U . Si consideramos π la función proyección sobre la base ($\pi(q, p) = q$), $\pi|_{\text{crit}(H)} : \text{crit}(H) \rightarrow \text{crit}(U)$ es una biyección cuya inversa está dada por $(\pi|_{\text{crit}(H)})^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, q_2, q_2, -q_1)$. A continuación veremos que U tiene cinco puntos críticos que llamaremos **puntos de Lagrange**.

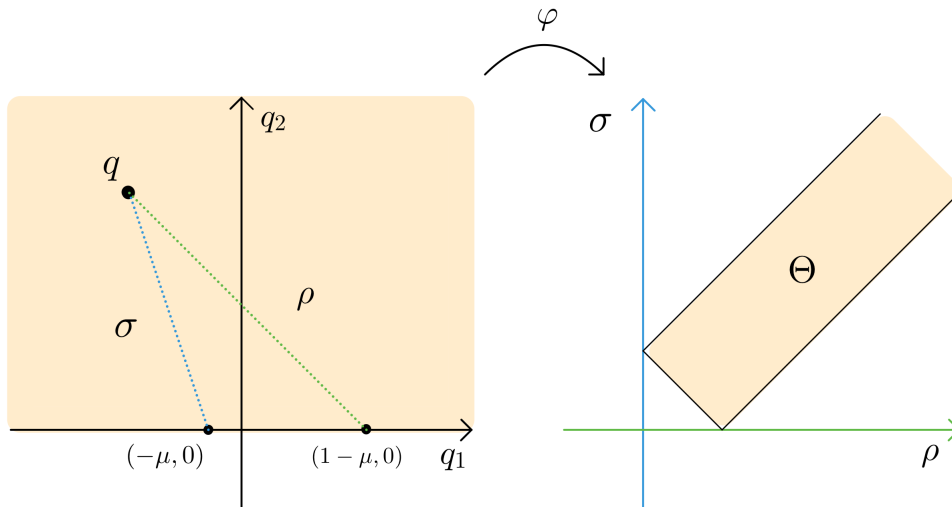
Lo primero que observamos es que U es invariante por la reflexión $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, -q_2)$. Esta simetría implica que los puntos críticos vienen de a pares a menos que se encuentren sobre el eje real. Probaremos que existen tres puntos críticos colineales sobre el eje real, que llamaremos **puntos colineales** y dos puntos simétricos formando un triángulo equilátero con la tierra y la luna que llamaremos **puntos equiláteros**.

3.4.1. Puntos equiláteros

Nos centramos primero en estudiar los críticos de U que no están en el eje real. Por la simetría antes mencionada alcanza con buscarlos en el semiplano superior $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Consideramos el mapa $\varphi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(q) = (|q - m|, |q - e|)$. Observamos que φ es un difeo sobre su imagen, siendo esta el conjunto Θ :

$$\Theta = \{(\rho, \sigma) \in (0, +\infty)^2 : |\rho - \sigma| < 1, \rho + \sigma > 1\}$$



Geométricamente $\varphi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \Theta$ nos da coordenadas en función de las distancias a las primarias. Observar que estas resultan coordenadas ya que consideramos solo el semiplano superior.

Veamos al potencial efectivo en las nuevas coordenadas: si $W = U \circ \varphi^{-1}$, expresaremos $|q|$ en función de (ρ, σ) . Recordamos que $e = (-\mu, 0)$ y $m = (1 - \mu, 0)$. Luego

$$\begin{aligned} |q|^2 &= \mu|q|^2 + (1 - \mu)|q|^2 \\ &= \mu(|q - m|^2 - |m|^2 + 2\langle q, m \rangle) + (1 - \mu)(|q - e|^2 - |e|^2 + 2\langle q, e \rangle) \\ &= \mu\rho^2 - \mu(1 - \mu)^2 + 2\mu(1 - \mu)\langle q, (1, 0) \rangle + (1 - \mu)^2\sigma^2 - (1 - \mu)\mu^2 + 2(1 - \mu)(-\mu)\langle q, (1, 0) \rangle \\ &= \mu\rho^2 + (1 - \mu)\sigma^2 - \mu(1 - \mu)(1 - \mu + \mu) \\ &= \mu\rho^2 + (1 - \mu)\sigma^2 - \mu(1 - \mu) \end{aligned}$$

Por lo tanto la reescritura de $U(q) = -\frac{\mu}{|q-m|} - \frac{(1-\mu)}{|q-e|} - \frac{1}{2}|q|^2$ es

$$W(\rho, \sigma) = -\frac{\mu}{\rho} - \frac{(1 - \mu)}{\sigma} - \frac{1}{2}(\mu\rho^2 + (1 - \mu)\sigma^2 - \mu(1 - \mu))$$

Y su diferencial es

$$dW(\rho, \sigma) = \frac{\mu(1 - \rho)^3}{\rho^2}d\rho + \frac{(1 - \mu)(1 - \sigma^3)}{\sigma^3}d\sigma$$

Luego, el único crítico de W es el punto $(\rho, \sigma) = (1, 1)$, es decir, el punto que está a distancia 1 tanto de m como de e (por lo tanto formando un triángulo equilátero). La matriz Hessiana de W en el punto $(1, 1)$ es $\begin{pmatrix} -3\mu & 0 \\ 0 & -3(1 - \mu) \end{pmatrix}$. Por lo tanto $(1, 1)$ es un máximo para W . Hemos probado, volviendo a las coordenadas originales, que $\varphi^{-1}(1, 1) = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ es un máximo de U . Por simetría el otro máximo será $(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Decimos que ambos son el cuarto y quinto punto de Lagrange respectivamente y los escribimos como ℓ_4, ℓ_5 . También hemos probado que son los únicos críticos que no están en el eje de simetría para $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, -q_2)$.

3.4.2. Puntos colineales

Consideramos u el potencial efectivo restricto a la recta real:

$$u := U|_{\mathbb{R} \setminus \{-\mu, 1-\mu\}} : \mathbb{R} \setminus \{-\mu, 1-\mu\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(r) = -\frac{\mu}{|r + \mu - 1|} - \frac{1 - \mu}{|r + \mu|} - \frac{r^2}{2}$$

Por la simetría de U por la reflexión $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, -q_2)$ los puntos críticos de u serán necesariamente críticos de U , ya que $\frac{\partial U}{\partial x}(q_1, 0) = u'(q_1)$ y necesariamente $\frac{\partial U}{\partial y}(q_1, 0) = 0$.

La segunda derivada de u es

$$u''(r) = -\frac{2\mu}{|r + \mu - 1|^3} - \frac{2(1 - \mu)}{|r + \mu|^3} - 1 < 0$$

Observando que $u(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow -\mu$, $r \rightarrow 1 - \mu$, necesariamente u tiene exactamente tres críticos que son máximos alcanzados en ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tales que $\ell_3 < -\mu < \ell_1 < 1 - \mu < \ell_2$. Estos son los tres puntos colineales de Lagrange.

Proposición 3.4.1. *Los puntos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 son puntos silla para U*

Demostración. Como vimos $\frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, 0) = 0$ y en particular $\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1, 0) = 0$. También vimos que $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}(q_1, 0) < 0$. Por lo tanto solo alcanzaría con probar $\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}(\ell_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$, sin embargo las cuentas no arrojan luz directa sobre esta desigualdad. Un camino para probar esto es estudiar de nuevo la matriz Hessiana del potencial expresado en (ρ, σ) , que llamamos W . Las cuentas se pueden ver en el capítulo 10 de [1]. $\square$

Corolario 3.4.1. *El potencial U alcanza su máximo global en ℓ_4 y ℓ_5 . El valor máximo alcanzado es*

$$U_{\max} = U(\ell_4) = U(\ell_5) = -\frac{3}{2} - \frac{\mu(1-\mu)}{2}$$

Sean L_i los correspondientes críticos de H , es decir, $L_i = (\pi|_{\text{crit}H})^{-1}(\ell_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Recordando que $(\pi|_{\text{crit}H})^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, q_2, q_2, -q_1)$ se tiene que $H(L_i) = U(\ell_i)$. También podemos corroborar que si $\mu(L_i)$ es el índice de Morse de L_i (cantidad de valores propios negativos de $\text{Hess}(H)$), entonces $\mu(L_i) = \mu(\ell_i)$. Además, haciendo las cuentas para U podemos corroborar que se justifica la elección de subíndices para ℓ_i ya que se ordenan de acuerdo a su valor funcional para U . Resumiendo tenemos lo siguiente:

Proposición 3.4.2. *Para $\mu \in (0, 1)$ se cumple $\mu(L_1) = \mu(L_2) = \mu(L_3) = 1$ y $\mu(L_4) = \mu(L_5) = 2$. Además:*

- Si $\mu \in (0, 1/2)$: $H(L_1) < H(L_2) < H(L_3) < H(L_4) = H(L_5)$
- Si $\mu = 1/2$: $H(L_1) < H(L_2) = H(L_3) < H(L_4) = H(L_5)$

3.5. Regiones de Hill

Sea H la integral de Jacobi para el problema de tres cuerpos restringido planar-circular:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) + U(q) \quad (3.1)$$

Fijada una energía $c \in \mathbb{R}$, como H es autónomo, el flujo Hamiltoniano preserva $\Sigma_c = H^{-1}(c) \subseteq T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\})$. Definimos la región de Hill de Σ_c como la proyección de dicho conjunto de nivel en el espacio de configuraciones. Es decir, si π es tal que $\pi(q, p) = q$ entonces la región de Hill $\mathcal{H}_c$ es

$$\mathcal{H}_c := \pi(\Sigma_c) = \{q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\} : \exists (q, p) \in \Sigma_c \text{ tal que } q = \pi(q, p)\}$$

Como en 3.1 los primeros términos son cuadráticos (positivos) podemos escribir a $\mathcal{H}_c$ como la unión de conjuntos de nivel del potencial efectivo U :

$$\mathcal{H}_c = \{q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\} : U(q) \leq c\}$$

Si la energía H es baja, específicamente por debajo del primer valor crítico ($c < H(L_1)$), se tiene que $\mathcal{H}_c$ consta de tres componentes conexas:

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c^e \cup \mathcal{H}_c^m \cup \mathcal{H}_c^u$$

Las dos primeras componentes son acotadas y la notación se debe a que $e \in \mathcal{H}_c^e$, $m \in \mathcal{H}_c^m$. La tercera ($\mathcal{H}_c^u$) es la componente no acotada. Observamos que si el tercer cuerpo comienza con posición en una componente de la región de Hill (a energía c) entonces

permanecerá en esa componente. Esto es esperable, ya que si la energía no es lo suficientemente alta y el tercer cuerpo comienza cerca de la tierra (o de la luna) no podrá “escaparse”. Las trayectorias soluciones correspondientes a la componente no acotada son lo que llamamos “cometas”.

Usamos la misma notación para las componentes del espacio de fase:

$$\Sigma_c = \Sigma_c^e \cup \Sigma_c^m \cup \Sigma_c^u$$

Donde $\Sigma_c^e := \{(q, p) \in \Sigma_c, q \in \mathcal{H}_c^e\}$ y de forma análoga se define el resto.

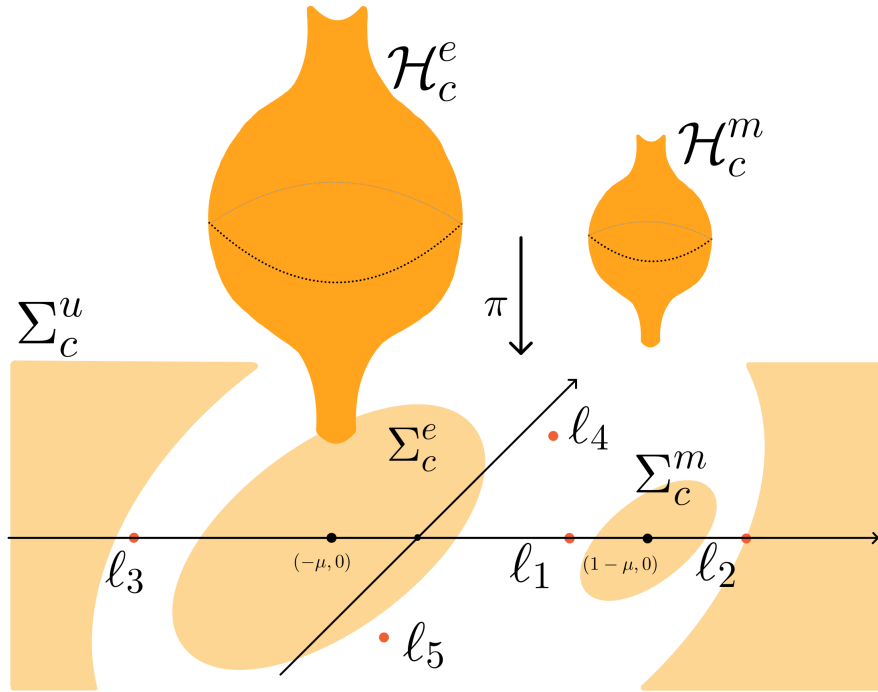


Figura 3.2: Regiones de Hill por debajo del primer valor crítico: proyecciones del conjunto de nivel del hamiltoniano.

3.6. Problema de Kepler en un marco de rotación

Dicho problema es un caso particular del problema de tres cuerpos planar-circular antes estudiado: consideramos a la luna con masa despreciable, es decir $\mu = 0$. De esta forma la tierra y el satélite (la tercer masa) se encuentran en el problema de Kepler. Sin embargo, ahora consideramos el problema con coordenadas en rotación. Explícitamente el Hamiltoniano que define al sistema es la integral de Jacobi con $\mu = 0$:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

Observar que esto no es más que la suma de la energía mecánica $E(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$ más el momento angular $L = q_1 p_2 - q_2 p_1$:

$$H = E + L$$

Este sistema es integrable en el sentido de Arnold-Liouville ya que H y L son cantidades conservadas que conmutan:

$$\{H, L\} = \{E, L\} + \{L, L\} = 0 + 0 = 0$$

También podemos expresar H así:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2 \right) - \frac{1}{|q|} - \frac{1}{2} |q|^2$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2 \right) + U(q)$$

Como U solo depende de $|q|$ escribimos $U(q) = f(|q|)$ para f definida como

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(r) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{2} r^2$$

El único punto crítico de f se da en $r = 1$, cuyo valor funcional es $f(1) = -\frac{3}{2}$. Esto implica que el único valor crítico para el potencial efectivo U para el problema de Kepler en un marco de rotación es $-\frac{3}{2}$ y el conjunto de puntos críticos es el círculo de radio 1 centrado en el origen.

Observación 3.6.1. Como vimos, los puntos críticos de H y de U están en biyección. Además los valores funcionales de los críticos de U y los correspondientes críticos de H coinciden, por lo que concluimos que el Hamiltoniano H del problema de Kepler en un marco de rotación tiene un único valor crítico y es igual a $-\frac{3}{2}$.

Observación 3.6.2. Si $c = H < -3/2$ la región de Hill $\mathcal{H}_c = \{q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : U(q) \leq c\}$ tiene dos componentes: una acotada y una no acotada. La acotada está incluida en la región $|q| < 1$ y la no acotada en la región $|q| > 1$.

3.7. Regularización de Moser para el problema de tres cuerpos restricto planar-circular

Considerando la notación compleja para las coordenadas del tercer cuerpo de masa despreciable podemos escribir al Hamiltoniano (la integral de Jacobi) como $H : T^*(\mathbb{C} \setminus \{-\mu, 1 - \mu\}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{\mu}{|q - 1 + \mu|} - \frac{1 - \mu}{|q + \mu|} + \langle p, iq \rangle$$

Con una traslación en el espacio de configuraciones colocamos a la luna en el origen. Para completar el cambio de coordenadas observar que si (x, y) son las coordenadas en un marco inercial, $(q, p) = (e^{it}x, e^{it}y)$ son las coordenadas en rotación. Luego, como $\dot{x} = y$ tenemos que $\dot{q} = p + iq$ por lo que $p = \dot{q} - iq$. Si $q \mapsto q + (1 - \mu)$, el momento lineal se cambia a $p \mapsto p - i(1 - \mu)$. En definitiva, podemos expresar el Hamiltoniano H con la luna en el origen como

$$H_m(q, p) = H(q + 1 - \mu, p - i + i\mu) + \frac{(1 - \mu)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{\mu}{|q|} - \frac{1 - \mu}{|q + 1|} + \langle p, iq \rangle - (1 - \mu)q_1$$

Definimos para $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de nivel $\Sigma_c = H_m^{-1}(c)$.

Ahora cambiamos los roles entre momento y posición, es decir, pensamos a la coordenada p en la base y a la coordenada q en la fibra del espacio cotangente. Tenemos entonces que $\Sigma_c \subset T^*\mathbb{C} \subset T^*S^2$ viendo $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vía proyección estereográfica.

Nos interesa ver que la clausura $\overline{\Sigma_c}$ es regular en la fibra sobre $p = \infty$. Observar que las colisiones se dan justamente cuando la velocidad $|p|$ tiende a ∞ . Para ver dicha regularidad veamos la expresión de H_m bajo la inversión que invierte el polo norte con el sur dada por

$$\phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \phi(p) = \frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{|p|^2}$$

En notación real tenemos

$$\phi(p_1, p_2) = \left(\frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2}, \frac{-p_2}{p_1^2 + p_2^2} \right)$$

El Jacobiano de ϕ en $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es

$$D_p \phi = \frac{1}{(p_1^2 + p_2^2)^2} \begin{pmatrix} p_2^2 - p_1^2 & -2p_1 p_2 \\ 2p_1 p_2 & p_2^2 - p_1^2 \end{pmatrix}$$

Dicho mapa induce una transformación física:

$$D_* \phi : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, D_* \phi(p, q) = (\phi(p), (D\phi^{-1})^T q)$$

Como

$$(D_p \phi^{-1})^T = \begin{pmatrix} p_2^2 - p_1^2 & -2p_1 p_2 \\ 2p_1 p_2 & p_2^2 - p_1^2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que

$$D_* \phi(p, q) = \left(\frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2}, \frac{-p_2}{p_1^2 + p_2^2}, (p_2^2 - p_1^2)q_1 - 2p_1 p_2 q_2, 2p_1 p_2 q_1 + (p_2^2 - p_1^2)q_2 \right)$$

Veamos la traducción de H bajo este cambio. Observamos primero que $\phi = \phi^{-1}$ por lo que $(D_* \phi)_* = (D_* \phi)^*$. Luego:

- $(D_* \phi)_* \left(\frac{|p|^2}{2} \right) = \frac{1}{2|p|^2}$
- $(D_* \phi)_* \left(\frac{\mu}{|q|} \right) = \frac{\mu}{|p|^2 |q|}$
- $(D_* \phi)_* L = -L = -q_1 p_2 + q_2 p_1$

Por último, si $V : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$V(q) = -\frac{1 - \mu}{|q + 1|} - (1 - \mu)q_1$$

definimos la función

$$W : \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad W(p, q) = V(q)$$

La función W tiene tanta regularidad como V . Consideramos ahora

$$\Omega = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}), \text{ y } F : D_* \phi(\Omega) \cup (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2)$$

Donde

$$F(p, q) = \begin{cases} W(D_*\phi^{-1}(p, q)) & p \neq 0 \\ V(0) & p = 0 \end{cases} = \begin{cases} V((p_2^2 - p_1^2)q_1 - 2p_1p_2q_2, 2p_1p_2q_1 + (p_2^2 - p_1^2)q_2) & p \neq 0 \\ V(0) & p = 0 \end{cases}$$

De esta forma F se extiende de forma suave a $p = 0$. Si escribimos $\tilde{H}_m = H_m \circ D_*\phi$, tenemos

$$\tilde{H}(q, p) = \frac{1}{2|p|^2} - \frac{\mu}{|p|^2|q|} - L(q, p) + F(p, q)$$

Luego, en estas coordenadas, $\Sigma_c = \{(q, p) : \frac{1}{|p|^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{|q|} \right) - L(q, p) + F(p, q) = c\}$.

Como $L(q, 0) \equiv 0$ y $F(q, 0) \equiv V(0) = -(1 - \mu)$, tenemos que la clausura de la superficie Σ_c intersectada con $p = 0$ está dada por los puntos tales que

$$\frac{1}{2} - \frac{\mu}{|q|} = \lim_{p \rightarrow 0} |p|^2 ((1 - \mu) + c) = 0$$

Es decir, la clausura de Σ_c es regular sobre $p = 0$ (que en las coordenadas originales corresponde a ∞). Más aún, la fibra es un círculo de radio 2μ .

Por lo tanto, podemos pensar a la dinámica en T^*S^2 donde el conjunto de nivel admite una compactificación regular. Obviamente seguimos con el problema que en las colisiones la velocidad se dispara a infinito. Para lidiar con esto consideramos un nuevo hamiltoniano cuyo gradiente simpléctico sea paralelo al de Kepler pero con una reparametrización temporal que frene la velocidad en las colisiones. Definimos para $H \equiv c$ por debajo del primer valor crítico

$$K(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{|q|}{-2c} (H \circ \tilde{S}(p, q) - c) + \frac{\mu}{\sqrt{-2c}} \right)^2$$

Con $\tilde{S} : (p, q) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{-2c}}q, -\sqrt{-2c}p)$

Explícitamente obtenemos que

$$K(p, q) = \frac{1}{2} \left(|q| \left(\frac{1}{2}(|p|^2 + 1) + \frac{L}{-2c} - \frac{(1 - \mu)}{-2c|q/\sqrt{-2c} + 1|} - \frac{(1 - \mu)q_1}{(-2c)^{3/2}} \right) \right)^2$$

Observar $\mu = 1$ corresponde con Kepler rotatorio, y si además eliminamos el momento angular L obtenemos la regularización de Moser para Kepler.

3.8. Problema lunar de Hill

El problema de Hill o problema Lunar de Hill consiste en estudiar una aproximación del problema de tres cuerpos restringido planar-circular en un marco de rotación cuando la masa del primer cuerpo es muy grande en comparación a la segunda, y el tercer cuerpo se mueve cerca del segundo. Esto modela el sistema Sol-Tierra-Luna. Es decir, la masa del sol es mucho más grande que la de la tierra y la luna se encuentra muy próxima a la tierra. Si seguimos con la analogía física que veníamos considerando, el sistema será Tierra-Luna-Satélite con una luna de masa muy pequeña y el satélite cerca de la luna.

Colocamos a la luna en el origen como en la sección previa, el Hamiltoniano se expresa como

$$H_m(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{\mu}{|q|} - (1 - \mu) \left(\frac{1}{|q+1|} + q_1 \right) + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

Consideramos el difeomorfismo $\phi_\mu : T^*\mathbb{R}^2 \rightarrow T^*\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi_\mu(q, p) = (\mu^{1/3}q, \mu^{1/3}p)$$

Dicho difeomorfismo es symplecticamente conforme, es decir, preserva la forma symplectica a menos de un múltiplo:

$$\phi_\mu^* \omega = \mu^{2/3} \omega$$

Bajo esta transformación en las coordenadas, el gradiente symplectico se preserva a menos de un múltiplo ($\mu^{2/3}$). Definimos

$$H^\mu : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (-\mu^{-1/3}, 0)\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H^\mu := \mu^{-2/3} (H_m \circ \phi_\mu + 1 - \mu)$$

Para esta energía reescalada y considerando la forma symplectica canónica tenemos

$$X_{H^\mu} = \phi_\mu^* X_{H_m}$$

Con esto logramos que en la función de energía la variable μ no aparezca influyendo en el término con $1/|q|$:

$$\begin{aligned} H^\mu(q, p) = & \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} - \frac{1}{\mu^{2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{q + 2\mu^{1/3}q_1 + \mu^{2/3}|q|^2}} + \mu^{1/3}q_1 - 1 \right) \\ & + q_1 p_2 - q_2 p_1 + \frac{\mu^{1/3}}{\sqrt{q + 2\mu^{1/3}q_1 + \mu^{2/3}|q|^2}} + \mu^{2/3}q_1 \end{aligned}$$

Por taylor tenemos $\frac{1}{\sqrt{1+r}} = 1 - 3/2 + 3r^2/8 + \mathcal{O}(r^3)$. Luego

$$H^\mu(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1 - q_1^2 + q_2^2/2 + \mathcal{O}(\mu^{1/3})$$

Ahora lo que haremos es tomar límite cuando μ tiende a 0. Esto lo podemos pensar, recordando que estamos considerando un cambio de variable que implica multiplicar (q, p) por $\mu^{1/3}$, como poner el sol en el infinito en el sistema Sol-Tierra-Luna o poner a la tierra en el infinito en el sistema Tierra-Luna-Satélite. Cuando $\mu \rightarrow 0$ el hamiltoniano converge uniformemente en compactos en la topología C^∞ al hamiltoniano $H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1 - q_1^2 + q_2^2/2 \quad (3.2)$$

A este hamiltoniano es el que llamamos **hamiltoniano lunar de Hill**. Las ecuaciones de movimiento en un formato de ecuación diferencial de primer orden serían las siguientes

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 - q_2 \\ \dot{q}_2 = p_2 + q_1 \\ \dot{p}_1 = -p_2 + 2q_1 - q_1/|q|^3 \\ \dot{p}_2 = p_1 - q_2 - q_2/|q|^3 \end{cases}$$

y en formato de ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -2\dot{q}_2 + 3q_1 - q_1/|q|^3 \\ \ddot{q}_2 = 2\dot{q}_1 - q_2/|q|^3 \end{cases}$$

La simpleza de esta aproximación trae consigo ciertas simetrías que ayudan en el estudio de órbitas periódicas, siendo relevantes por ejemplo en el método de shooting de Birkhoff para encontrar órbitas directa y retrógrada. Definimos las simetrías ρ_1, ρ_2 en $T^*(\mathbb{R}^2)$ como

$$\rho_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, -q_2, -p_1, p_2), \quad \rho_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = (-q_1, q_2, p_1, -p_2)$$

Ambas simetrías son anti-simplécticas y dejan invariante a H . Además conmutan y al componerlas obtenemos una involución simpléctica:

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = -\text{id}$$

Al igual que hicimos con el estudio del problema de tres cuerpos restringido general, podemos completar cuadrados en la función de energía para estudiar los puntos críticos del hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) - \frac{1}{|q|} - \frac{3q_1^2}{2}$$

Si llamamos $U(q) = -\frac{1}{|q|} - \frac{3q_1^2}{2}$ al potencial efectivo, nuevamente los críticos de H están en correspondencia con los de U vía la proyección en la base. Las derivadas parciales de U son

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{q_1}{|q|^3} - 3q_1 \\ \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{q_2}{|q|^3} \end{cases}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \text{crit}(U) &= \{(3^{-1/3}, 0), (-3^{1/3}, 0)\} \\ \text{crit}(H) &= \{(3^{-1/3}, 0, 0, -3^{-1/3}), (-3^{-1/3}, 0, 0, 3^{-1/3})\} \end{aligned}$$

Los dos críticos de U se pueden pensar como los límites de los puntos ℓ_1, ℓ_2 cuando llevamos el sol al infinito. Los puntos ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5 quedan muy lejos y el problema de Hill ya no los ve. También observamos que los críticos son fijos por ρ_1 y son intercambiados por ρ_2 . En particular, como H invariante por estas simetrías, H vale lo mismo en ambos críticos. Específicamente el valor crítico es

$$H((3^{-1/3}, 0, 0, -3^{-1/3})) = -\frac{3^{4/3}}{2}$$

Si calculamos el Hessiano de U en los críticos obtenemos

$$\text{Hess}(U)_{(\pm 3^{1/3}, 0)} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que los críticos son puntos silla y tienen índice de Morse 1. Tenemos que por debajo del valor crítico ($c < -3^{4/3}/2$) la región de Hill $\mathcal{H}_c$ tiene tres componentes donde dos son no acotadas y una acotada.

3.9. Estructura de contacto en problema de tres cuerpos restringido planar-circular y problema de Hill

En el capítulo 6 introduciremos algunas ideas modernas para la reducción de dinámicas hamiltonianas a sistemas discretos mediante la búsqueda de secciones transversales globales dentro de la hipersuperficie de nivel correspondiente. En particular, para atacar el problema de tres cuerpos restringido planar, necesitamos que la hipersuperficie de nivel a estudiar tenga una estructura de contacto compatible con la dinámica, es decir, que el campo de Reeb asociado a la forma de contacto sea paralelo al campo hamiltoniano. En el artículo [3] se prueba que por debajo del primer valor crítico de energía, o ligeramente por encima de este, el problema de tres cuerpos restringido planar tiene estructura de contacto compatible.

Teorema 3.9.1. *Si $c < H(L_1)$, las dos componentes acotadas de $\overline{\Sigma_c}$ admiten una forma de contacto λ compatible con la dinámica. Más aún, existe $\epsilon > 0$ tal que si $c \in (H(L_1), H(L_1) + \epsilon)$ lo mismo vale para la única componente acotada de $\overline{\Sigma_c}$ (que topológicamente es la suma conexa de las dos componentes $\overline{\Sigma_c}$ para $c < H(L_1)$).*

Para probar la existencia de esta estructura de contacto alcanza con probar que en un entorno de la superficie de nivel existe un campo de Liouville X transversal a la superficie. La restricción de la 1-forma simpléctica de Liouville a la superficie es entonces de contacto y compatible con la dinámica (ver apéndice A.2). En la prueba presentada en [3] se define para $c < H(L_1)$ el campo de Liouville $X = (q - M) \frac{\partial}{\partial q}$ donde $M = (-(1 - \mu), 0)$ es la posición de una de las primarias (digamos la luna) en un marco de rotación. Luego se reescribe el sistema en coordenadas polares y en función de estas coordenadas se calculan las derivadas de orden 1 y 2 del potencial efectivo U . Con esto se prueba que derivar el hamiltoniano H en la dirección de X , es decir $X(H)$, es positivo si nos restringimos a la componente del conjunto de nivel que contiene a la luna M : Σ_c^M . Por último se verifica que la transversalidad en el conjunto de nivel se mantiene si pasamos un poco el primer crítico del nivel de energía.

A continuación una prueba, presentada en [16] y basada en [3], de esta misma idea en el problema lunar de Hill, donde las cuentas se simplifican un poco. Primero observamos que el siguiente campo X es de Liouville con respecto a la forma canónica $\omega = dp \wedge dq$ en $\mathbb{R}^2$:

$$X = \sum_1^2 q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Pues se verifica que la derivada de Lie según X de ω es ω :

$$L_X \omega = (d\iota_X + \iota_X d)\omega = d(-qdp) = -dq \wedge dp = \omega$$

Por lo anteriormente comentado, alcanza con probar que X es transversal a Σ_c^b , la componente acotada de $H^{-1}(c)$ del problema lunar de Hill para c por debajo del primer valor crítico. De esta forma, $\iota_X \omega|_{\Sigma_c^b}$ define una estructura de contacto compatible con la dinámica de H . Recordamos que el hamiltoniano del problema lunar de Hill es

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) + U(q)$$

Donde $U(q) = -\frac{1}{|q|} - \frac{3q_1^2}{2}$ potencial efectivo. Resumimos el objetivo en la siguiente proposición:

Proposición 3.9.1. Si $c < -\frac{3^{4/3}}{2}$, entonces $X \pitchfork \Sigma_b^c$

Demostración. En coordenadas polares $(q_1, q_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ el campo de Liouville X se escribe

$$X = r \frac{\partial}{\partial r}$$

El potencial y el hamiltoniano se escriben

$$U = \frac{-1}{r} - \frac{3}{2}r^2 \cos^2(\theta), \quad H = \frac{1}{2} \left((p_1 - r \sin(\theta))^2 + (p_1 + r \cos(\theta))^2 \right) + U$$

Para probar el enunciado del teorema alcanza con mostrar que

$$dH(X) \Big|_{\Sigma_b^c} > 0$$

Tenemos, usando desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} dH(X) &= -r \sin(\theta)(p_1 - r \sin(\theta)) + r \cos(\theta)(p_2 + r \cos(\theta)) + r \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= \langle (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)), (p_1 - r \sin(\theta), p_2 + r \cos(\theta)) \rangle + r \frac{\partial U}{\partial r} \\ &\geq \left(r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) \right)^{1/2} \left((p_1 - r \sin(\theta))^2 + (p_2 + r \cos(\theta))^2 \right)^{1/2} + r \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= r \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \sqrt{2(H - U)} \right) \end{aligned}$$

Observar que la última expresión no depende de (p_1, p_2) . Por lo tanto, alcanza con mostrar que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \sqrt{2(H - U)} \right) \Big|_{\mathcal{H}_c^b} > 0 \quad (3.3)$$

Consideramos $(r, \theta) \in \mathcal{H}_c^b$, que recordamos que cumple $U(r, \theta) \leq c$. La componente acotada de la región de Hill está contenida en una bola centrada en el origen de radio $3^{-1/3}$ (para la prueba de esto ver sección 4.2). En particular tenemos que

$$U \Big|_{\partial B(3^{-1/3}, (0,0))} \geq -\frac{3^{4/3}}{2}, \quad U \Big|_{\mathcal{H}_c^b} \leq c < -\frac{3^{4/3}}{2}$$

Por lo que tiene que existir $\tau \in [0, 3^{-1/3} - r]$ tal que

$$U(r + \tau, \theta) = c$$

Afirmación 1. Si $q \in \overline{B(3^{-1/3}, (0,0))} \setminus \{(0,0), (0, 3^{-1/3}), (0, -3^{-1/3})\}$, $\frac{\partial U}{\partial r}(q) > 0$

Para ver esto, si $r \leq 3^{-1/3}$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r^2} - 3r \cos^2(\theta) \geq \frac{1}{r^2} - 3r \geq 0$$

En particular la segunda desigualdad es estricta si $r < 3^{-1/3}$ y la primera es estricta si $r \leq 3^{-1/3}$ y $\cos^2(\theta) \neq 1$. Esto pasa justamente en el conjunto de la afirmación.

Afirmación 2. Si $q \in \overline{B(3^{-1/3}, (0,0))} \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(q) \leq -1$

De nuevo, sale inmediato de estimar:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{-2}{r^3} - 3 \cos^2(\theta) \leq \frac{-2}{r^3} \leq -6 \leq -1$$

Con lo observado y las afirmaciones, estimando probaremos 3.3:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) \right)^2 &= \left(\frac{\partial U}{\partial r}(r + \tau, \theta) \right)^2 - \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial r}(r + t, \theta) \right)^2 dt \\ &> -2 \int_0^\tau \frac{\partial U}{\partial r}(r + t, \theta) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r + t, \theta) dt \\ &\geq 2 \int_0^\tau \frac{\partial U}{\partial r}(r + t, \theta) dt = 2(U(r + \tau, \theta) - U(r, \theta)) \\ &= 2(c - U(r, \theta)) \end{aligned}$$

Por último, de nuevo usando afirmación 1 obtenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) > \sqrt{2(c - U(r, \theta))}$$

Que implica 3.3 terminando con la prueba para el caso del problema lunar de Hill.

□

Capítulo 4

Dos métodos clásicos en la búsqueda de órbitas periódicas

Naturalmente uno se pregunta en el estudio de cualquier sistema dinámico sobre existencia y caracterizaciones de órbitas periódicas. Si nos remontamos a los pioneros en el estudio de órbitas periódicas en el problema de tres cuerpos tenemos que hablar de Euler y Lagrange, quienes encontraron soluciones homográficas. Dichas soluciones son aquellas tales que las tres masas mantienen cierta distribución. Explícitamente una solución homográfica es de la forma

$$q_i(t) = r(t)R(\theta(t))q_i(0)$$

donde q_i es el movimiento del cuerpo i -ésimo, r una función escalar positiva, R una rotación y el centro de masa del sistema se encuentra en el origen.

Otro nombre infaltable en la búsqueda de órbitas periódicas del problema de tres cuerpos es Hill, quien motivado por el estudio del movimiento de la luna plantea una aproximación del problema de tres cuerpos restringido que hoy conocemos como problema lunar de Hill. En esta aproximación la luna se encuentra muy cerca de la tierra en comparación con la distancia al sol. Para este problema a energías por debajo del primer crítico Hill encuentra dos órbitas periódicas especiales: órbita directa y retrógrada. De hecho la órbita directa encontrada por Hill es una muy buena aproximación del movimiento de nuestra luna. Sin embargo él busca esta órbita directa para partir de ella y encontrar una órbita periódica directa del problema de tres cuerpos restringido, pensando al problema general como una perturbación del problema lunar. Esta idea, buscar la órbita periódica del problema general como una perturbación del problema original, es recurrente. Delaunay busca lo mismo partiendo desde el problema de Kepler, sin embargo la convergencia que encuentra para la órbita periódica no es tan rápida como la convergencia partiendo desde el problema lunar.

Impresionado por el trabajo de Hill, Poincaré continúa con la filosofía de encontrar órbitas periódicas en aproximaciones como un método intermedio para el problema general, con la idea de que debe existir cierta densidad de órbitas periódicas al perturbar ligeramente el hamiltoniano. La idea brillante de Poincaré, que surge en su trabajo [36], es la de encontrar superficies de sección para la dinámica de forma tal de reducir el estudio a dinámicas discretas de superficies. Años más tarde, Poincaré encuentra un anillo de sección transversal en el problema de tres cuerpos y comienza con el estudio y conjeturas sobre propiedades de la dinámica discreta que se induce en esta superficie de sección, ideas que retoma Birkhoff para terminar probando pocos años después de la muerte de Poincaré lo que hoy conocemos como el teorema de Poincaré-Birkhoff. En generalidades y visiones modernas sobre superficies de sección global nos detendremos en el capítulo 6.

En este capítulo veremos primero la construcción que hizo C.Conley en los 60's de un anillo de sección transversal a energías bajas para el problema de tres cuerpos restringido. Por supuesto que la filosofía de Conley también es heredada de Poincaré y antecesores, para la cual esta búsqueda es por métodos perturbativos, y de aquí surge la necesidad de considerar energías bajas. Por último veremos un método no perturbativo por el cual Birkhoff encuentra la órbita retrógrada del problema de tres cuerpos restringido. La prueba que veremos es para el caso del problema lunar de Hill sin embargo la estrategia es similar.

4.1. Órbitas periódicas y reducción a dinámica discreta a energías bajas

En [9] Chenciner se propone, siguiendo ideas de Conley ([11]), encontrar un anillo de sección transversal para una aproximación del problema de tres cuerpos restringido: el problema lunar de Hill (3.8). El borde del anillo son dos órbitas periódicas enlazadas como un link de Hopf, con cierta condición de twist que permite afirmar la existencia de infinitas órbitas periódicas con variantes del célebre teorema de Poincaré-Birkhoff. Para encontrar estas órbitas periódicas borde se piensa al problema de Hill como un perturbado del problema de kepler rotatorio, recordando que las órbitas del problema de Kepler configuran la fibración de Hopf de S^3 . Como veremos en el próximo capítulo con más detalle, en general cuando la energía tiende a $-\infty$ el problema lunar se aproxima al de Kepler rotatorio que a su vez se aproxima al problema de Kepler en un marco inercial.

En coordenadas complejas podemos expresar la integral de Jacobi (hamiltoniano del problema de tres cuerpos en marco de rotación) de la siguiente forma:

$$H(x, y) = |y|^2 - \frac{2\mu}{|x+1|} - \frac{2(1-\mu)}{|x|} + i(\bar{x}y - x\bar{y}) - \mu(x + \bar{x}) + 2\mu$$

Las ecuaciones hamiltonianas asociadas, con $\omega = d\bar{x} \wedge dy + dx \wedge d\bar{y}$, son

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} H, \quad \dot{y} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}} H$$

Como ya hemos visto, el problema de Hill es un modelo aproximado de un sistema Tierra-Luna-Satélite para el cual el satélite está muy próximo a la luna. En la sección sobre el problema de Hill 3.8 para esta aproximación consideramos un cambio de coordenadas en función de μ (en dicha presentación los valores de μ y $1-\mu$ estan intercambiados en la ecuación) de forma tal que colocamos a la luna en el origen y $\mu \rightarrow 0$ se interpretaba como acercarse mucho a la luna o mover el sol hacia el infinito. Podemos llegar a la misma expresión del problema de Hill, tal como se hace en [9], considerando el desarrollo de taylor truncado cuando $x \rightarrow 0$. Recordar que estamos considerando energía $H = \frac{-1}{\epsilon}$ para ϵ chico, de forma tal que tenemos tres regiones de Hill y nos concentramos en la región acotada de la luna (la que contiene al origen).

Considerando el desarrollo de taylor hasta orden 3 de

$$\frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{(x+1)^{1/2}} \frac{1}{(\bar{x}+1)^{1/2}}$$

y sustituyendo en el hamiltoniano obtenemos

$$H(x, y) = |y|^2 - \frac{2(1-\mu)}{|x|} + i(\bar{x}y - x\bar{y}) - 2\mu \left(\frac{1}{4}|x|^2 + \frac{3}{8}(x^2 + \bar{x}^2) + O_3(x) \right)$$

Observar que si en el último miembro de la igualdad colocamos $\mu = 1$ y despreciamos $O_3(x)$ obtenemos la expresión a la que llegamos en 3.2.

Consideramos ahora el cambio de coordenadas (conforme simpléctico) de Levi-Civita:

$$\mathcal{L} : (z, w) \mapsto \left(2z^2, \frac{w}{\epsilon \bar{z}} \right) = (x, y)$$

Y al igual que en la regularización de Kepler definimos un nuevo hamiltoniano K :

$$K(z, w) = \epsilon^2 |z|^2 \left(H \left(2z^2, \frac{w}{\epsilon \bar{z}} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \right) = f^2(z, w) |z|^2 + |w|^2 - (1 - \mu) \epsilon^2 - \epsilon^2 \mu g(z) \quad (4.1)$$

donde f es la función real definida por

$$f^2(z, w) = 1 + 2i\epsilon(\bar{z}w - z\bar{w})$$

que es a menos de sumar y multiplicar por una constante el momento angular, y g es

$$g(z) = 2|z|^2 \left(\frac{1}{2|z|^2 + 1} - 1 + z^2 + \bar{z}^2 \right)$$

Lo primero a observar es que cuando ϵ es cero, la expresión que nos queda es la del oscilador armónico, o por lo visto anteriormente, el problema de Kepler regularizado. En particular la expresión 4.1 truncada a orden 2 (considerando desarrollo de Taylor) también corresponde con el oscilador armónico. Si truncamos a orden 4 (equivalentemente despreciando el término con g) obtenemos el problema de Kepler rotatorio regularizado, pues solo se agrega el momento angular. Por último si truncamos a orden 6 obtenemos la regularización del problema lunar de Hill:

$$K_6(z, w) = f^2(z, w) |z|^2 + |w|^2 - \epsilon^2(1 - \mu) - \epsilon^2 \mu \left(2|z|^6 + 3|z|^2(z^4 + \bar{z}^4) \right) \quad (4.2)$$

4.1.1. Búsqueda de órbitas periódicas

A continuación, primero buscaremos las dos órbitas periódicas que serán borde del anillo de sección. Luego construiremos el anillo y por último diremos algo de la condición twist en el borde. En todo este desarrollo seguiremos de cerca lo que pasa en Kepler rotatorio regularizado, de forma de buscar el anillo de este problema cercano al anillo de Kepler rotatorio. Recordar que si truncamos el desarrollo a orden 4 obtenemos un hamiltoniano que define un sistema completamente integrable:

$$K_4(z, w) = f^2 |z|^2 + |w|^2 - \epsilon^2(1 - \mu)$$

pues el momento angular $L = \frac{\bar{x}y - x\bar{y}}{2i} = \frac{\bar{z}w - z\bar{w}}{i\epsilon}$ es preservado y es independiente con K_4 en casi todo punto.

En la regularización de Kepler (oscilador armónico) las órbitas periódicas que resultan en un link de Hopf, borde de un anillo, corresponden a $w = \pm iz$. En Kepler rotatorio regularizado las órbitas periódicas, borde de un anillo, son

$$w = \pm if(z, w)z$$

La justificación de esto último se desprende de las cuentas que haremos a continuación, donde en este caso, con un cambio de variable $\xi_1 = w + ifz$, $\xi_2 = \bar{w} + if\bar{z}$ se prueba que

$\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$ son soluciones periódicas. Justamente estas son las órbitas llamadas “directa” y “retrógrada”, nombre que corresponde a la dirección de giro en el marco de rotación.

Con este mismo cambio de coordenadas (y un tiempo ficticio) buscaremos órbitas periódicas para el problema de Hill regularizado “cercanas” a las periódicas del problema de Kepler rotatorio regularizado. Esta es la estrategia que sigue C.Conley en [11].

Al igual que en la regularización del problema de Kepler (2.3.1) consideramos un tiempo ficticio $\tilde{t}$ que se puede interpretar como un “freno” en las colisiones, definido por

$$d\tilde{t} = \frac{dt}{4\epsilon|z|^2} = \frac{dt}{2\epsilon|x|}$$

Como justificación formal para la consideración de este cambio de variable temporal, observar que hay dos operaciones a tener en cuenta en el nuevo hamiltoniano K . Por un lado, está el cambio de coordenadas $\mathcal{L}$ que es conforme simpléctico con un factor $\frac{4}{\epsilon}$. Una transformación conforme simpléctica preserva la geometría de las órbitas pero dilata o contrae el tiempo en el que se recorren por el mismo factor multiplicativo. Por otro lado, estamos considerando el nivel de energía 0 de una nueva función de energía que en coordenadas x, y es

$$\tilde{H}_\epsilon(x, y) = \frac{\epsilon^2|x|}{2} \left(H(x, y) + \frac{1}{\epsilon^2} \right)$$

Cuando $\tilde{H}_\epsilon = 0$, se verifica que

$$\frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\epsilon^2|x|}{2}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_\epsilon}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} \frac{\epsilon^2|x|}{2}$$

Considerando que $K = \tilde{H}_\epsilon \circ L$ y juntando los factores $\frac{\epsilon^2|x|}{2}$ y $\frac{4}{\epsilon}$ tenemos que, definiendo el tiempo $d\tilde{t} = \frac{dt}{4\epsilon|z|^2}$, se preserva la escritura de las ecuaciones hamiltonianas en las nuevas variables:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tilde{t}} z &= \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} &= w - 2i\epsilon|z|^2 z \\ \frac{d}{d\tilde{t}} w &= -\frac{\partial K}{\partial z} &= -f^2 z - 2i\epsilon|z|^2 w + \epsilon^2 \mu \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \end{cases} \quad (4.3)$$

Consideramos un cambio de variable (no simpléctico) que nos coloca en los ejes a las órbitas periódicas directa y retrógrada del problema de kepler rotatorio:

$$\xi_1 = w + ifz, \quad \xi_2 = \bar{w} + if\bar{z}$$

Antes de escribir las ecuaciones hamiltonianas en estas variables, volvemos a considerar un cambio de variable temporal. Definimos un nuevo tiempo τ dado por la ecuación

$$d\tau = f d\tilde{t} = \frac{f dt}{4\epsilon|z|^2}$$

Observar que este tiempo está bien definido pues $f(z, w) = \sqrt{1 + 2i\epsilon(\bar{z}w - z\bar{w})} > 0$. En particular en el caso de kepler rotatorio f es constante (una cantidad conservada). De aquí en más utilizamos la siguiente notación para derivar según τ : $' = \frac{\partial}{\partial \tau}$

Afirmación 3. Se tiene lo siguiente:

- $\beta := \frac{-i}{2} (\xi_1 - \bar{\xi}_2) = fz$
- $\omega := \frac{i}{2} (\bar{\beta}w - \beta\bar{w}) = \frac{1}{4} (|\xi_2|^2 - |\xi_1|^2)$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial}{\partial t} f = O_6(z, w) = O_6(\xi_1, \xi_2)$$

Demostración. La primer igualdad es inmediata. Para la segunda alcanza con observar que

$$\begin{aligned} |\xi_2|^2 &= \xi_2 \bar{\xi}_2 = |w|^2 + f^2 |z|^2 + i(fz\bar{w} - f\bar{z}w) \\ |\xi_1|^2 &= \xi_1 \bar{\xi}_1 = |w|^2 + f^2 |z|^2 - i(fz\bar{w} - f\bar{z}w) \end{aligned}$$

Por último, tenemos $\frac{\partial f}{\partial t} = 2i\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\bar{z}w - z\bar{w})$ y usando las ecuaciones 4.3 tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2i\mu\epsilon^3(\bar{z}g_{\bar{z}} - z\bar{g}_{\bar{z}})$$

Como $g(z) = 2|z|^2 \left(\frac{1}{|2|z|^2+1|} - 1 + z^2 + \bar{z}^2 \right) = 2|z|^6 + 3|z|^2(z^4 + \bar{z}^4) + O_8(z)$, obtenemos la tercer igualdad. $\square$

Ahora escribamos las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas:

Afirmación 4. Las ecuaciones de movimiento se escriben

$$\begin{aligned} \xi_1' &= i\xi_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \\ \xi_2' &= i\xi_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Y la energía se escribe como

$$J(\xi) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + O_6(\xi)$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 2|w|^2 + 2|fz|^2$, que $|\beta|^2 = f^2|z|^2$ y recordando las ecuaciones 4.3:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= w' + i(f'z + fz') = f^{-1} \frac{dw}{dt} + if^{-1} \frac{df}{dt} z + i \frac{dz}{dt} \\ &= \left(-fz - 2i\epsilon|z|^2 w f^{-1} + \epsilon^2 \mu f^{-1} g_{\bar{z}} \right) + if^{-1} \frac{df}{dt} z + iw + 2\epsilon|z|^2 z \\ &= i(w + ifz) + 2\epsilon(-if^{-1}|z|^2 w + |z|^2 z) + \epsilon^2 \mu f^{-1} g_{\bar{z}} + if^{-1} z \left(2i\epsilon^3 \mu(\bar{z}g_{\bar{z}} - z\bar{g}_{\bar{z}}) \right) \\ &= i\xi_1 + 2\epsilon f^{-1}|z|^2(-iw + zf) + \mu\epsilon^2 f^{-1} g_{\bar{z}} + \epsilon^2 O_7(z, w) \\ &= i\xi_1 \left(1 - \frac{2\epsilon|\alpha|^2}{f^3} \right) + \epsilon^2 h(\beta) + \epsilon^2 O_7(\xi) \end{aligned}$$

siendo $h(\beta) = \mu(6|\beta|^4\beta + 3\beta^5 + 15\bar{\beta}^4\beta)$. De forma análoga se obtiene

$$\xi_2' = i\xi_2 \left(1 + \frac{2\epsilon|\beta|^2}{f^3} \right) + \epsilon^2 \overline{h(\beta)} + \epsilon^2 O_7(\xi)$$

Sustituyendo con la definición de $\alpha = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \bar{\xi}_2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \xi_1' &= i\xi_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2f^3} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \\ \xi_2' &= i\xi_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2f^3} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \end{aligned}$$

Considerando desarrollo de taylor:

$$f^{-3} = 1 - 6\epsilon\omega + \epsilon^2 O_4(\xi) = 1 - \frac{3}{4}\epsilon(|\xi_2|^2 - |\xi_1|^2) + \epsilon^2 O_4(\xi)$$

Juntando términos de orden mayor o igual a 5 obtenemos la igualdad de la afirmación:

$$\begin{aligned}\xi_1' &= i\xi_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}|\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \\ \xi_2' &= i\xi_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}|\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\xi)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Por último, como

$$K(z, w) = |w|^2 + f^2|z|^2 + O_6(z) - \epsilon^2(1 - \mu), \quad |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 2(|w|^2 + f^2|z|^2)$$

la integral en estas coordenadas se puede reescribir a menos de un factor 2 como

$$J(\xi) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + O_6(\xi)$$

recordando que estamos estudiando el conjunto de nivel $K = 0$ (equiv. $J = 2\epsilon^2(1 - \mu)$). $\square$

El sistema que acabamos de obtener tiene un punto de equilibrio en $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$. Sin embargo, al linealizar la ecuación obtenemos valores propios con parte real 0. Es decir, la linearización no es una buena aproximación y es por esto que debemos afinar y considerar los siguientes términos. Conley, en [11] propone una generalización del teorema de Lyapunov para lidiar con esto. Pero antes algunas observaciones:

Observación 4.1.1. Si no tenemos en cuenta los términos $O_5(\xi)$ en 4.4, como el caso de Kepler rotacional, tenemos dos familias de soluciones periódicas a un parámetro:

- $\xi_2 = 0$, $|\xi_1| = cte = c_1$. Con solución $\xi_1(\tau) = c_1 e^{i\alpha_1 \tau}$, donde $\alpha_1 = 1 - \frac{\epsilon}{2}|c_1|^2$
- $\xi_1 = 0$, $|\xi_2| = cte = c_2$. Con solución $\xi_2(\tau) = c_2 e^{i\alpha_2 \tau}$, donde $\alpha_2 = 1 + \frac{\epsilon}{2}|c_2|^2$

Buscamos las soluciones periódicas de nuestro sistema cercanas a estas. Conley expresa estas soluciones como series de potencias formales que, para ϵ chico, convergen en el nivel de energía $J = 2\epsilon^2(1 - \mu)$. Específicamente:

Teorema 4.1.1. *Existen series de potencias $\phi_1(\eta)$ y $\phi_2(\eta)$ empezando ambas con términos de orden mayor o igual a 3 en las variables complejas η y $\bar{\eta}$ y una serie real $\alpha(|\eta|^2) = 1 - \frac{\epsilon^2}{2}|\eta|^2 + \dots$ tales que*

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \eta + \phi_1(\eta) \\ \xi_2 &= 0 + \phi_2(\eta)\end{aligned}$$

Es una solución formal de 4.5, donde η verifica $\eta'(\tau) = i\alpha(|\eta(\tau)|^2)\eta(\tau)$

Si $\epsilon \in (0, 1)$ existe $\rho > 0$ independiente de ϵ tal que las series convergen para $|\eta| < \rho$. Además esto nos da una familia de soluciones periódicas de 4.5 con $|\eta| = c$ cte y $\eta(\tau) = ce^{i\alpha\tau}$.

De forma análoga existe una solución formal, también en términos de series de potencias, cercana a la solución de Kepler rotacional en la cual $\xi_1 = 0$ y ξ_2 rota con velocidad constante, es decir, series ψ_1, ψ_2 análogas a las anteriores ϕ_1, ϕ_2 y $\alpha_2(|\eta|^2) = 1 + \frac{\epsilon^2}{2}|\eta|^2 + \dots$ tales que

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0 + \psi_1(\eta) \\ \xi_2 &= \eta + \psi_2(\eta)\end{aligned}$$

nos da una familia de soluciones periódicas.

Observación 4.1.2. Si ϵ suficientemente pequeño, como $J(\xi) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + O_6(\xi)$ es constante, necesariamente $|\xi_1|$ es tan chico como queramos y lo mismo con $|\eta|$. Es decir, si ϵ es suficientemente chico, el teorema nos asegura la convergencia de las series en el conjunto de nivel $J = 2\epsilon^2(1 - \mu)$

Antes de entrar en un resumen de la prueba de Conley, algunas apreciaciones para el entendimiento del enunciado y otro posible encare de prueba. En el caso integrable encontramos las soluciones periódicas en la intersección de una esfera S^3 con uno de los planos $\xi_1 = 0$ o $\xi_2 = 0$. Entendiendo el problema a energías bajas como una perturbación del integrable, buscamos de forma similar las órbitas periódicas. La primera de ellas la buscamos como la intersección del plano $P(\eta) = (\eta + \phi_1(\eta), \phi_2(\eta))$ y el conjunto de nivel S que corresponde a los puntos que verifican $J(\xi) = 2\epsilon^2(1 - \mu)$. Esta intersección es una curva cerrada, y para que esta curva sea solución (periódica) hay que tomar ϕ_1 y ϕ_2 de forma tal que el tangente en cada punto de la curva sea paralelo al campo que define al sistema hamiltoniano. El espacio tangente de la curva se halla como la intersección del espacio tangente de la superficie S y el plano $P(\eta)$. Entonces, escribiendo ϕ_1 y ϕ_2 como series de potencias en η , hay que ver que imponiendo que el campo sea paralelo al tangente de la curva, podemos determinar los coeficientes de las series. Si traemos la dinámica por P a $\mathbb{C}$, entonces podemos parametrizar la solución como $\eta(\tau)$. En el teorema se va más allá y se da una descripción explícita de $\eta(\tau)$, que termina siendo un círculo que por P se manda a la órbita periódica buscada: $\xi(\eta(\tau))$.

En definitiva el teorema nos brinda un nuevo sistema de coordenadas η_1, η_2 que transforman la escritura de las ecuaciones de movimiento 4.5 de forma tal que existen familias de soluciones periódicas contenidas en los planos $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = 0$. Las variables viejas en funcion de las nuevas se escriben así:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \eta_1 + \phi_1(\eta_1, \overline{\eta_1}) + \psi_1(\eta_2, \overline{\eta_2}) \\ \xi_2 &= \eta_2 + \phi_2(\eta_1, \overline{\eta_1}) + \psi_2(\eta_2, \overline{\eta_2})\end{aligned}$$

Las ecuaciones en las variables η_1, η_2 se expresan con misma escritura hasta orden 5:

$$\begin{aligned}\eta_1' &= i\eta_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}|\eta_1 - \overline{\eta_2}|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\eta) \\ \eta_2' &= i\eta_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}|\eta_1 - \overline{\eta_2}|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\eta)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Y la función de energía $M(\eta) = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \epsilon^2 O_6(\eta)$

Resumen de prueba de 4.1.1 en [11]: La segunda parte del teorema es totalmente análoga. Para ver la primer parte, primero se considera una modificación a las ecuaciones 4.5, agregando una expresión F que depende de un parámetro γ :

$$\begin{aligned}\xi_1' &= i\xi_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}|\xi_1 - \overline{\xi_2}|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \\ F(\gamma, \cdot) + \xi_2' &= i\xi_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2}|\xi_1 - \overline{\xi_2}|^2\right) + \epsilon^2 O_5(\xi)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Aquí F también depende de η , es decir, escribimos $F(\gamma(\eta), \eta)$. Para estas ecuaciones se encuentran series en η , con coeficientes que son polinomios en γ , con la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\xi_1(\eta) &= \eta + \sum_{k-l \neq 1} a_{kl} \eta^k \bar{\eta}^l = \eta + \xi_1^*(\eta) \\
\xi_2(\eta) &= \gamma\eta + \sum_{k-l \neq 1} b_{kl} \eta^k \bar{\eta}^l = \gamma\eta + \xi_2^*(\eta) \\
\alpha(|\eta|^2) &= 1 + \sum_{r \geq 1} \alpha_r |\eta|^{2r} = 1 + \alpha^* \\
F(\gamma, \eta) &= \left(\sum_{r \geq 1} f_r |\eta|^{2r} \right) \eta
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Las series en cuestión se construyen de forma tal que las siguientes expresiones sean soluciones algebraicas de 4.7:

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= i\alpha \left(\eta + \sum_{k-l} a_{kl} (k-l) \eta^k \bar{\eta}^l \right) \\
\xi_2' &= i\alpha \left(\gamma\eta + \sum_{k-l} b_{kl} (k-l) \eta^k \bar{\eta}^l \right)
\end{aligned}$$

En particular estas expresiones se obtienen derivando 4.8 asumiendo que α es real, $\eta(t) = e^{i\alpha\tau}$ y $\gamma' = 0$. Por último, se elige $\gamma(\eta)$ de forma tal que $F(\gamma, \eta) = 0$ y se prueba que $\eta(t)$ es una rotación con velocidad angular α . Resumiendo, los pasos de la prueba son los siguientes:

1. Probar que formalmente los coeficientes de las series en 4.8 quedan determinados si imponemos que se cumplan las ecuaciones diferenciales 4.7
2. Probar convergencia de series si $|\eta|$ suficientemente chico.
3. Se determina $\gamma(\eta)$ de forma tal que $F(\gamma, \eta) = 0$. Se construye $\gamma(\eta)$ como serie de potencias en $|\eta|^2$.
4. Se prueba que α es real. De esto último se deduce que tomando $\eta(\tau) = \eta_0 e^{i\alpha\tau}$, se tiene $|\eta|^2 = cte$, lo que implica que $\gamma = cte$ y $\xi(\eta(\tau))$ solución periódica.

Para encontrar estas órbitas periódicas, en el artículo [9] de Chenciner se va por otro camino aunque no tan distinto: con un cambio de variable se pone el campo que define las ecuaciones 4.5 en forma normal a orden tres, idea que se remonta a Poincaré. De esta forma las ecuaciones (manteniendo la notación para las variables) se puede llevar a esta forma:

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= i\xi_1 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \right) + \epsilon^2 O_5(\xi) \\
\xi_2' &= i\xi_2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \right) + \epsilon^2 O_5(\xi)
\end{aligned}$$

Donde recordando que $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$ es casi constante, las soluciones se aproximan a soluciones lineales periódicas. Para encontrar las periódicas en este sistema hay que trabajar un poquito más: se plantean dos ecuaciones que en conjunto implican que una curva solución sea periódica y a su vez cada una de ellas define una variedad algebraica. Se muestra que estas superficies algebraicas son transversales y justamente en su intersección encontramos a la órbita periódica.

4.1.2. Construcción de anillo de sección

Siguiendo con nuestro objetivo, una vez que tenemos las órbitas periódicas hay que construir el anillo de sección transversal a la dinámica.

Como ya sabemos, para ϵ chico la superficie de nivel $M = 2\epsilon^2(1 - \mu)$ es topológicamente S^3 . Para esta esfera encontramos dos órbitas periódicas que corresponden a $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = 0$. Sin perder de vista el caso integrable, consideramos la superficie dada por la siguiente ecuación (igual a la ecuación que define un anillo de sección en la fibración de Hopf):

$$\chi = \arg(\eta_1) + \arg(\eta_2) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (4.9)$$

Para ver que el resto de las soluciones intersectan a esta superficie transversalmente, por 4.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \arg(\eta_1)(\tau) &= \tau(1 - \frac{\epsilon}{2}|\eta_1 - \overline{\eta_2}|^2) + \epsilon O_2(\eta) \\ \arg(\eta_2)(\tau) &= \tau(1 + \frac{\epsilon}{2}|\eta_1 - \overline{\eta_2}|^2) + \epsilon O_2(\eta) \end{aligned}$$

Luego

$$\chi' = 2 + \epsilon O_2(\eta)$$

Por lo que la cantidad χ es monótona creciente en las órbitas para ϵ chico. En particular esto muestra que toda órbita corta a $\chi = 0 \pmod{2\pi}$. Más aún, la foliación inducida por $\chi = cte \pmod{2\pi}$ es un conjunto de hojas cuyo borde son las órbitas periódicas (esta es la estructura de libro abierto) y el resto de órbitas corta transversalmente a cada hoja. Por lo que ya tenemos la superficie de sección global transversal al flujo, que define un mapa de retorno. Además tenemos que el retorno se da en un tiempo aproximado π y la variable χ se aproxima a menos de un múltiplo a la variable temporal τ .

Abreviando las ecuaciones de 4.6 escribimos

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= f_1(\eta) \\ \eta'_2 &= f_2(\eta) \end{aligned}$$

Ahora consideramos coordenadas polares r_j, θ_j para η_j con $j = 1, 2$ y reescribimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} n_j &= r_j e^{i\theta_j} \\ r'_j &= \operatorname{Re} \left(\frac{\overline{\eta_j}}{|\eta_j|} f_j(\eta) \right) \\ \theta'_j &= \operatorname{Im} \left(\frac{f_j(\eta)}{\eta_j} \right) \\ M &= r_1^2 + r_2^2 + \epsilon^2 O_6(\eta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Recordando que

$$f_j(\eta) = i\eta_j(1 + (-1)^j \frac{\epsilon}{2}|\eta_1 - \overline{\eta_2}|^2) + \epsilon^2 O_5(\eta)$$

Tenemos que la ecuación para θ'_j está bien definida incluso para $r_j = 0$. Observar que $r_j = 0$ corresponden a los bordes del anillo. Luego tenemos que $M(r, \theta) = 2\epsilon^2(1 - \mu)$ determina una variedad de dimensión tres que en estas variables es topológicamente un toro sólido ahuecado, es decir, $S^1 \times S^1 \times I$ donde I intervalo abierto. El interior de esta variedad esta en correspondencia uno a uno con los puntos interiores de la esfera

S^3 correspondiente a $M(\eta) = 2\epsilon^2(1 - \mu)$ sacando las dos órbitas periódicas borde. Las superficies externas de este toro sólido ahuecado corresponden con las órbitas periódicas. Para esta variedad podemos tomar las siguientes coordenadas: r_1 , $\chi = \theta_1 + \theta_2$, $\phi = \theta_1 - \theta_2$. El anillo corresponde a la ecuación $\chi \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Es decir, cada vez que $\theta_1 + \theta_2$ aumente 2π , es una vuelta y un retorno al anillo de sección y podemos tomar como coordenadas del anillo las variables r_1, ϕ .

El último ingrediente es calcular los números de rotación del borde del anillo. Si bien el mapa de retorno no está definido en el borde, sí se puede extender por continuidad debido a lo observado en las ecuaciones 4.10. Recordando que la variable χ en las órbitas se comporta igual que el tiempo τ , calculamos los números de rotación del borde del anillo de la siguiente forma:

$$\rho_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\phi(\tau)}{\chi(\tau)} \bigg|_{r_j=0}, \quad j = 1, 2 \quad (4.11)$$

Mostrando que $\rho_1 \neq \rho_2$ estamos habilitados a usar una versión del teorema de Poincaré-Birkhoff [6] que se redacta a continuación. En definitiva el teorema nos dice que existen órbitas periódicas con período arbitrariamente grande:

Teorema 4.1.2 (Poincaré-Birkhoff). *Sea T un homeo del anillo cerrado que no manda abiertos propiamente sobre si mismos tal que los números de rotación en los bordes son distintos. Entonces el conjunto de puntos fijos de los iterados de T son infinitos. En particular, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe $N \geq n$ y un punto p en el interior del anillo tal que $T^N(p) = p$ y $T^m(p) \neq p$ para m entre 1 y N .*

Para el cálculo de los números de rotación en el borde es necesario ser aún más explícitos en las ecuaciones de movimiento de 4.6 y escribir los términos de orden 5. En el cálculo de los números de rotación hay algunos pequeños errores de cuenta, corregidos por Kummer en [31] que no afectan el resultado del teorema pues solo queremos probar que son números de rotación distintos. Cabe aclarar que en el artículo de Kummer mencionado también se encuentra el anillo de sección transversal y se computan los números de rotación por otro camino usando, a diferencia de Conley, cambios de coordenadas simplécticos. Con las correcciones de Kummer podemos expresar la diferencia de los números de rotación con el siguiente teorema:

Teorema 4.1.3. *Los números de rotación ρ_1, ρ_2 del borde del anillo para el mapa de retorno T son distintos y su diferencia se puede escribir como*

$$\rho_1 - \rho_2 = 6(1 - \mu)^2(1 - \mu/4)\epsilon^6 + O\left((1 - \mu)^2\epsilon^8\right)$$

4.2. Método de Shooting de Birkhoff en la búsqueda de órbitas periódicas

El método de Shooting es una estrategia usada por Birkhoff para encontrar una órbita retrógrada para el problema lunar de Hill. A diferencia de lo visto en la sección anterior que funciona a energías bajas, Birkhoff encuentra la órbita para energías por debajo del valor crítico. Recordamos que el hamiltoniano del problema de Hill, completando cuadrados, se puede escribir como

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) - \frac{1}{|q|} - \frac{3}{2}q_1^2 \quad (4.12)$$

Y la ecuación diferencial en formato de primer orden o segundo orden son

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 - q_2 \\ \dot{q}_2 = p_2 + q_1 \\ \dot{p}_1 = -p_2 + 2q_1 - q_1/|q|^3 \\ \dot{p}_2 = p_1 - q_2 - q_2/|q|^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{q}_1 = -2\dot{q}_2 + 3q_1 - q_1/|q|^3 \\ \ddot{q}_2 = 2\dot{q}_1 - q_2/|q|^3 \end{cases} \quad (4.13)$$

Por lo que la constante de energía se escribe

$$c = \frac{1}{2} \left((\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 \right) - \frac{1}{|q|} - \frac{3}{2} q_1^2 \quad (4.14)$$

El siguiente teorema que se debe a Birkhoff y se encuentra en [7], garantiza la existencia de una órbita periódica retrógrada. Por un argumento de continuidad se encuentra una curva en el tercer cuadrante que es solución y que arranca con velocidad perpendicular al eje q_1 y termina con velocidad perpendicular al eje q_2 . Con argumentos de simetría para este problema esta órbita se completa y se cierra. Cabe destacar que el argumento es para encontrar la órbita retrógrada, es decir, una órbita de la luna alrededor de la tierra con un giro en dirección contraria al giro de la tierra alrededor del sol.

Teorema 4.2.1. *Para energías por debajo del valor crítico del problema lunar de Hill ($c < -\frac{1}{2}3^{4/3}$) existe un tiempo $\tau > 0$ y una curva*

$$q = (q_1, q_2) : [0, \tau] \rightarrow (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$$

que es solución del problema de Hill (verifica 4.12 y 4.13) y cumple

$$q_2(0) = 0, \quad q_1(\tau) = 0, \quad (q_1)'(0) = 0, \quad (q_2)'(\tau) = 0$$

Demostración. Consideramos $f_c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_c(r) = c + \frac{1}{r} + \frac{3}{2}r^2$$

Su derivada es $f'_c(r) = -\frac{1}{r^2} + 3r$ y tiene un único cero en $r = 3^{-1/3}$ para el cual se tiene

$$f'_c|_{(0, 3^{-1/3})} < 0, \quad f'_c|_{(3^{-1/3}, +\infty)} > 0$$

Esto implica que f_c tiene un mínimo en su único punto crítico y este vale

$$f_c(3^{-1/3}) = c + \frac{1}{2}3^{4/3} < 0$$

Por lo tanto existe un único $r_c \in (0, 3^{-1/3})$ que es un cero de f : $f_c(r_c) = 0$.

Para $r \in (0, r_c]$ fijo, llamamos $q^r : [0, T_r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la solución de 4.13 con las siguientes condiciones iniciales:

$$(q_1^r, q_2^r)(0) = (-r, 0), \quad (q_1^r, q_2^r)'(0) = \left(0, -\sqrt{2f_c(r)}\right)$$

Como la energía se preserva (4.14), y la energía para esta órbita es $c < -\frac{1}{2}3^{4/3}$, vemos que q^r se encuentra en la parte acotada de la región de Hill. Recordar aquí que los críticos del potencial efectivo (que están en correspondencia con los críticos del hamiltoniano) son $\text{crit}(U) = \{(3^{-1/3}, 0), (-3^{1/3}, 0)\}$. La única posibilidad que la órbita q^r sea no compacta es que corresponda a una colisión en el origen. Si este es el caso y se llega en tiempo finito al

origen, tomamos $T_r \in (0, +\infty)$ tal que $\lim_{t \rightarrow T_r} q^r(t) = 0$. Definimos $\tau(r)$ como el primer corte con algún eje

$$\tau(r) := \inf\{t \in (0, T_r) : q_2^r(t) = 0 \text{ o } q_1^r(t) = 0\}$$

entendiendo que si el corte con algún eje no existe $t(r) = T_r$. Si $r < r_c$, observando que $\dot{q}_2^r(0) < 0$ tenemos que necesariamente $\tau(r) > 0$. Consideramos la siguiente afirmación:

Afirmación 5. Si $r < r_c$ entonces $\tau(r) < +\infty$

Probemos la afirmación: integrando la primer ecuación de la ecuación dif. de segundo orden en 4.13 y usando las condiciones iniciales de q^r tenemos

$$\begin{aligned} (q_1^r)'(t) &= \dot{q}_1^r(0) - 2q_2^r(t) + 2q_2^r(0) + \int_0^t q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) ds \\ &= -2q_2^r(t) + \int_0^t q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por la definición de $\tau(r)$ y por las condiciones iniciales de q^r tenemos que

$$q_1^r(t) < 0, \quad q_2^r(t) < 0 \quad \forall t \in (0, \tau(r)) \quad (4.16)$$

La región de Hill acotada $\mathcal{H}_c^b$ que contiene al origen verifica

$$\mathcal{H}_c^b \subset B_{3^{-1/3}}(0, 0) \quad (4.17)$$

Para ver esto suponemos

$$(q_1, q_2) \in \partial B_{3^{-1/3}}(0, 0)$$

es decir $|q| = 3^{-1/3}$. Tenemos que

$$\frac{-1}{|q|} - \frac{3}{2}q_1^2 \geq \frac{-1}{|q|} - \frac{3}{2}|q|^2 = -\frac{1}{2}3^{4/3} > c$$

Recordando que la región de Hill se caracteriza por estar compuesta de los puntos tales que $U(q) \leq c$ donde U es el potencial efectivo, tenemos que

$$\partial B_{3^{-1/3}}(0, 0) \cap \mathcal{H}_c^b = \emptyset$$

Como $\mathcal{H}_c^b$ es conexo y contiene al origen obtenemos la inclusión 4.17. Esto sumado a que se verifica 4.16, concluimos que

$$q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) (t) > 0, \quad \forall t \in (0, \tau(r))$$

Más aún, como $q_1^r(0) = -r$, existe un $t_0 \in (0, \tau(r))$ y una constante $\mu > 0$ tal que

$$q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) (t) \geq \mu > 0, \quad \forall t \in (0, t_0)$$

Ahora, para un $t \in [t_0, \tau(r))$ y usando las últimas dos desigualdades en 4.15 tenemos

$$(q_1^r)'(t) = -2q_2^r(t) + \int_0^t q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) ds \geq \int_0^{t_0} q_1^r \left(3 - \frac{1}{|q^r|^3} \right) ds \geq \mu t_0 \quad (4.18)$$

Esto implica que

$$q_1^r(t) \geq q_1^r(0) + \mu t_0(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, \tau(r))$$

Luego, como $\mathcal{H}_c^b$ es acotado, necesariamente $\tau(r) < +\infty$ y la afirm. 5 queda probada. Definimos ahora

$$\rho := \inf \{r \in (0, r_c) : q_1^r(\tau(r)) = 0, q_2^r(\tau(r)) = 0\}$$

Con la convención de que si el conjunto es vacío $\rho = r_c$

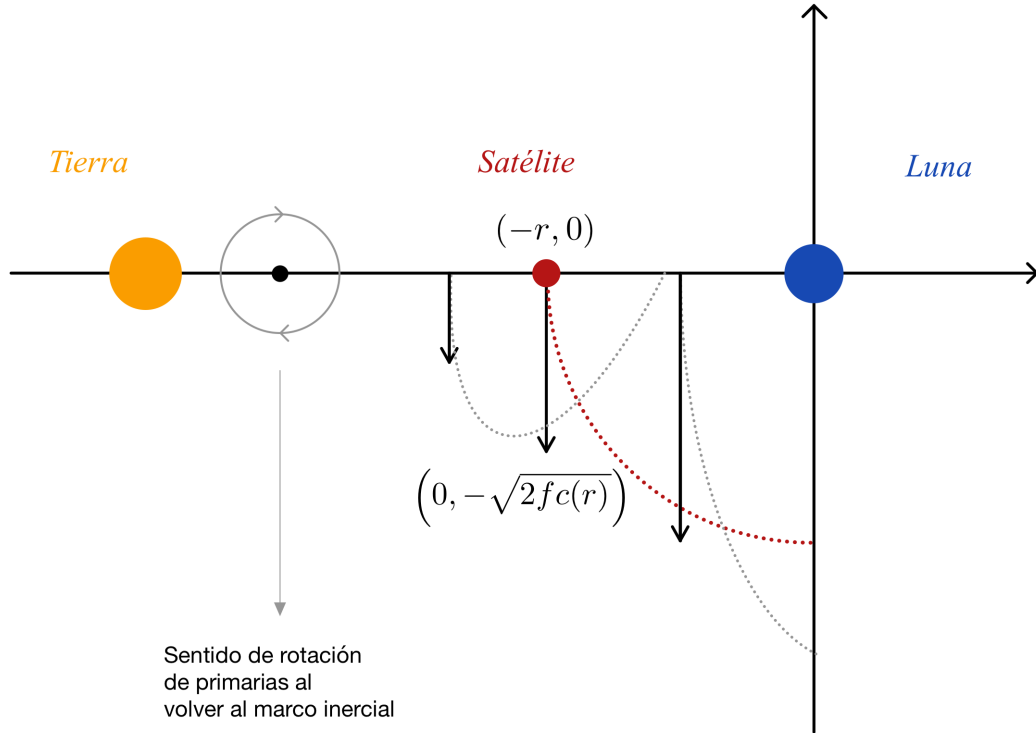


Figura 4.1: Órbitas de distintos disparos desde el eje x

Afirmación 6. Si $r \in (0, \rho)$ entonces $q_1^r(\tau(r)) = 0$

Para la prueba de la afirmación definimos

$$r_0 := \inf \{r \in (0, \rho) : q_2^r(\tau(r)) = 0\}$$

Seguimos con la convención de tomar $r_0 = \rho$ si el conjunto es vacío. Tenemos que probar que $r_0 = \rho$.

Si r es muy cercano a 0 la órbita q_1^r se encuentra muy cerca del origen y nos aproximamos al problema de Kepler. Por lo que podemos concluir que si r cerca de 0, $q_1^r(\tau(r)) = 0$ y en particular $r_0 > 0$. Ahora, si asumimos que $r_0 < \rho$, observar que para todo $r \in (0, r_0)$

el próximo corte con los ejes se da en el eje x y en r_0 el primer corte se da en el eje y , pero sin pasar por el origen pues $r_0 < \rho$. Esto implica que

$$q_2^{r_0}(\tau(r_0)) = 0, \quad (q_2^{r_0})'(\tau(r_0)) = 0, \quad (q_2^{r_0})''(\tau(r_0)) \leq 0$$

Por 4.18 tenemos que

$$(q_1^{r_0})'(\tau(r_0)) > 0$$

Esto contradice la ecuación diferencial de orden 2 que describe al problema en 4.13, por lo que queda probado $r_0 = \rho$ y con ello la afirmación 6.

La tercer afirmación a considerar es la siguiente

Afirmación 7. Se tiene que $\rho < r_c$.

Para la prueba, observar que las condiciones iniciales para q^{r_c} son las siguientes:

$$(q_1^r, q_2^r)(0) = (-r_c, 0), \quad (q_1^r, q_2^r)'(0) = (0, 0)$$

La última ecuación de 4.13 implica que

$$(q_2^{r_c})''(0) = 2(q_1^{r_c})'(0) - \frac{q_2^{r_c}(0)}{|q^{r_c}(0)|^3} = 0$$

Usando que la derivada en 0 se anula y derivando en 4.13 tenemos, recordando que $r_c \in (0, 3^{-1/3})$

$$\begin{aligned} (q_2^{r_c})'''(0) &= 2(q_1^{r_c})''(0) \\ &= -4(q_2^{r_c})'(0) + q_1^{r_c}(0) \left(3 - \frac{1}{|q^{r_c}(0)|^3} \right) \\ &= -2r_c \left(3 - \frac{1}{r_c^3} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Juntando información sobre la segunda coordenada obtenemos

$$q_2^{r_c}(0) = 0, \quad (q_2^{r_c})'(0) = 0, \quad (q_2^{r_c})''(0) = 0, \quad (q_2^{r_c})'''(0) > 0$$

Por lo que existe $\epsilon > 0$ de forma tal que si $t \in (0, \epsilon)$, $q_2^{r_c}(t) > 0$

De nuevo, para llegar a una contradicción suponemos que $r_c = \rho$. Como vimos, si $r \in (0, \rho)$ se verifica

$$q_1^r(\tau(r)) = 0, \quad r \in (0, r_c)$$

Podemos tomar a ϵ tan chico de forma tal que $\tau(r) > \epsilon$ para $r \in [r_c/2, r_c)$. Como $q_2^r(t) \leq 0$ para $t \in (0, \epsilon)$ y $r \in [r_c/2, r_c)$ se tiene que

$$q_2^{r_c}(t) \leq 0, \quad t \in (0, \epsilon)$$

Que contradice la suposición de que $q_2^{r_c}(t) > 0$ para $t \in (0, \epsilon)$. Esto prueba la afirmación 7.

Para el remate de la prueba, observamos que para r cerca de 0, porque nos acercamos al problema de Kepler se tiene que $(q_2^r)'(\tau(r)) > 0$. Por otro lado si r cerca de ρ se tiene que $(q_2^r)'(\tau(r)) > 0$. Por teorema de valor medio necesariamente existe un $r \in (0, \rho)$ para el cual

$$(q_2^r)'(\tau(r)) = 0$$

Lo que prueba el teorema

□

Observar que en la demostración del teorema, no solo encontramos un segmento de órbita, sino que también se encuentra una órbita de colisión. Para completar la órbita periódica retrógrada basta con recordar que tenemos dos simetrías en este problema:

$$\rho_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, -q_2, -p_1, p_2), \quad \rho_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = (-q_1, q_2, p_1, -p_2)$$

Por lo tanto, simetrizando la curva hallada con ρ_1 y ρ_2 obtenemos otras soluciones que, como la solución hallada es ortogonal a los ejes, obtenemos una única órbita que “se pega bien en los ejes”.

Con argumentos del estilo pero con más cuidados y con un doble shooting, se puede encontrar la órbita periódica retrógrada del problema de tres cuerpos restringido (por debajo del primer valor crítico) para cualquier $\mu < 1$. Esto también se debe a Birkhoff y con doble shooting nos referimos a que debemos disparar posibles órbitas simultáneamente desde el lado positivo y negativo del eje q_1 . La razón por la que no alcanza solo con disparar desde un lado del eje, es que en el problema restringido de tres cuerpos ρ_2 ya no es una simetría.

Para formalizar el enunciado del teorema general para $\mu \in (0, 1)$ en el problema de tres cuerpos, escribimos

$$\kappa_\mu := H_\mu(L_1^\mu) = U_\mu(\ell_1^\mu)$$

donde L_1^μ es el primer punto de Lagrange y ℓ_1^μ su proyección en las coordenadas q . Recordamos que el hamiltoniano en cuestión se podía escribir como

$$H_\mu(q, p) = \frac{1}{2} \left((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2 \right) + U_\mu(q)$$

siendo U_μ el potencial efectivo:

$$U_\mu(q) = -\frac{1}{2}|q|^2 - \frac{\mu}{|q - (1 - \mu, 0)|} - \frac{(1 - \mu)}{|q - (-\mu, 0)|}$$

Por lo tanto podemos enunciar el teorema demostrado por Birkhoff en [7] de la siguiente forma

Teorema 4.2.2. *Dado $\mu \in (0, 1)$ y $c \in (-\infty, \kappa_\mu)$, existen $\tau > 0$ y $(q_1, q_2) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que define H_μ , con c la energía del sistema*

$$c = \frac{1}{2}|q'|^2 + U_\mu(q)$$

y las siguientes condiciones de borde:

$$q_2(0) = q_2(\tau) = 0, \quad q_1'(0) = q_1'(\tau) = 0, \quad q_1(0) \in (\ell_3^\mu, -\mu), \quad q_1(t) \in (-\mu, \ell_1^\mu)$$

Si bien el argumento de Birkhoff para la demostración es un doble argumento de shooting, Conley en [10] lo demuestra con un único shooting. Para esto lo que hace es usar la regularización de Levi-Civita donde vuelve a tener dos simetrías que le permiten considerar solo “un cuarto de vuelta” para el disparo.

Capítulo 5

Abordaje variacional y métodos perturbativos

5.1. Funcional de acción de Rabinowitz

Consideramos (M, ω) variedad simpléctica, $\Sigma = H^{-1}(0)$ hipersuperficie regular del hamiltoniano H . Entendiendo al círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definimos:

Definición 5.1.1. Una **órbita periódica parametrizada** (de aquí en más o.p.p) en Σ es un loop $\gamma \in C^\infty(S^1, \Sigma)$ para el cual existe $\tau > 0$ tal (γ, τ) verifique

$$\gamma'(t) = \tau X_H(\gamma(t))$$

para todo $t \in S^1$. Al escalar τ lo llamamos período de la órbita.

Observación 5.1.1. Reparametrizando $\bar{\gamma}(t) := \gamma(\frac{t}{\tau})$ se verifica $\bar{\gamma}'(t) = X_H(\bar{\gamma}(t))$ y $\bar{\gamma}(t + \tau) = \bar{\gamma}(t)$

A continuación veremos que las órbitas periódicas parametrizadas se pueden ver como puntos críticos de un funcional de acción. Asumimos que la variedad simpléctica es exacta con $\omega = d\lambda$.

Definición 5.1.2. Si $\mathcal{L} = C^\infty(S^1, M)$ espacio de curvas cerradas suaves, definimos el **funcional de acción de Rabinowitz** como $A^H : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$A^H(\gamma, \tau) = \int_{S^1} \gamma^* \lambda - \tau \int_{S^1} H(\gamma)$$

Lema 5.1.1. *Los puntos críticos de A^H son precisamente los pares (γ, τ) donde γ es una órbita periódica parametrizada de período τ .*

Antes de demostrar el lema, veamos cómo se entiende el espacio tangente de $\mathcal{L}$. Dada $\gamma \in \mathcal{L}$, $w \in T_\gamma \mathcal{L}$ es una “velocidad de una curva de curvas”, es decir, si γ_s es un camino de curvas con $\gamma_0 = \gamma$, tenemos que el vector $w := \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s \Big|_{s=0}$ es un elemento del espacio tangente en γ (y así lo son todos).

Si fijamos $t \in S^1$, $\gamma_s(t)$ es una curva en M (variando s) con $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Luego

$$w(t) := \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t) \Big|_{s=0} \in T_{\gamma(t)} M$$

Concluyendo que

$$T_\gamma \mathcal{L} = \{w : S^1 \rightarrow TM \text{ tal que } w(t) \in T_{\gamma(t)} M\}$$

En palabras, el tangente en γ se entiende como los campos de TM sobre γ . A continuación la demostración del lema:

Demostración. Consideramos $(\gamma, \tau) \in \mathcal{L} \times \mathbb{R}$ y $(v, w) \in T_{(\gamma, \tau)}(\mathcal{L} \times \mathbb{R})$. El campo v se puede extender en un entorno de γ por lo que define un flujo ϕ_v . Definimos (γ_s, τ_s) curva con $(\gamma_0, \tau_0) = (\gamma, \tau)$ tal que $\gamma_s = \phi_v^s \circ \gamma$ y $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \tau_s = \tau$. En particular tenemos $v = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \gamma_s$. Buscamos estudiar críticos, por lo que computamos el diferencial evaluado en (v, w) :

$$\begin{aligned} dA_{(\gamma, \tau)}^H(v, w) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} A^H(\gamma_s, \tau_s) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left[\int_{S^1} \gamma_s^* \lambda - \tau_s \int_0^1 H(\gamma_s) \right] \end{aligned}$$

Por definición de derivada de Lie

$$L_v \lambda = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\phi_v^s)^* \lambda - \lambda}{s} = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\phi_v^s)^* \lambda$$

Entonces

$$\gamma^* L_v \lambda = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\phi_v^s \circ \gamma)^* \lambda = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s^* \lambda$$

Usando fórmula de Cartan para derivadas de Lie

$$\begin{aligned} dA_{(\gamma, \tau)}^H(v, w) &= \int_{S^1} \gamma^* L_v \lambda - w \int_0^1 H(\gamma) - \tau \int_0^1 dH_\gamma(v) \\ &= \int_{S^1} \gamma^* (i_v d + di_v)(\lambda) - w \int_0^1 H(\gamma) - \int_0^1 \omega_\gamma(v, \tau X_H(\gamma)) \\ &= \int_{S^1} \gamma^* i_v \omega + \int_{S^1} d(\gamma^* i_v \lambda) - w \int_0^1 H(\gamma) - \int_0^1 \omega_\gamma(v, \tau X_H(\gamma)) \\ &= \int_{S^1} \omega_\gamma(v, \gamma' - \tau X_H(\gamma)) - w \int_0^1 H(\gamma) \end{aligned}$$

Concluimos que $dA_{(\gamma, \tau)}^H(v, w) = 0$ para todo (v, w) si se verifica

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \tau X_H(\gamma(t)) \\ \int_0^1 H(\gamma(t)) dt = 0 \end{cases}$$

Observar que la primer condición implica que γ está incluída en un conjunto de nivel de H , por lo que $H(\gamma(t)) = cte$ y podemos reescribir las condiciones de punto crítico así:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \tau X_H(\gamma(t)) \\ H(\gamma(t)) = 0 \end{cases}$$

Es decir, (γ, τ) crítico si y solo si es una órbita periódica de período τ en $\Sigma = H^{-1}(0)$. $\square$

Tenemos una acción natural de S^1 sobre $\mathcal{L} = C^\infty(S^1, M)$ que consiste en una reparametrización de la curva. Si $r \in S^1$

$$r \cdot \gamma(t) := \gamma(r + t)$$

Esta acción se extiende a $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^+$ actuando trivialmente en el segundo factor.

En particular, bajo esta acción, A^H es S^1 -invariante:

Definición 5.1.3. A las clases $[\gamma]$ de órbitas periódicas parametrizadas de $C^\infty(S^1, \Sigma)$ las llamamos **órbitas periódicas no parametrizadas** (de aquí en más o.p.n.p.).

También tenemos otra acción natural del monoide $\mathbb{N}$ sobre el espacio de curvas que consiste en “dar más vueltas”, es decir

$$n \cdot \gamma(t) := \gamma(nt)$$

Esta acción se extiende a $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^+$ como $n \cdot (\gamma, \tau) := (n \cdot \gamma, n\tau)$ y se verifica que el funcional A^H es homogéneo de grado 1 para la acción de $\mathbb{N}$: $A^H(n \cdot (\gamma, \tau)) = nA^H(\gamma, \tau)$

En particular, el conjunto de puntos críticos de A^H también es invariante por la acción de $\mathbb{N}$.

Definición 5.1.4. Decimos que una órbita periódica parametrizada γ está **cubierta con multiplicidad** si existe γ_1 órbita periódica parametrizada tal que $\gamma = n \cdot \gamma_1$ para cierto $n \geq 2$. De lo contrario decimos que la órbita periódica parametrizada es **simple**.

Que una órbita sea simple no depende de la parametrización, por lo que este concepto también se extiende a o.p.n.p. Lo que sí ocurre es que la parametrización de una curva simple debe ser inyectiva, es decir, si γ o.p.p, $\gamma(t) = \gamma(t')$ sii $t = t'$.

En general, para toda o.p.p existe una única o.p.p simple γ_1 y un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = k \cdot \gamma_1$. En este caso decimos que k es **el número de cubrimiento de γ** y lo escribimos como $cov(\gamma)$. Otra forma de definir a este número es

$$cov(\gamma) := \max\{k \in \mathbb{N} : \gamma(t + 1/k) = \gamma(t) \ \forall t \in S^1\}$$

El número $cov(\gamma)$ no depende de la parametrización por lo que también podemos asociar este número al espacio cociente, es decir, a las o.p.n.p. Podemos redefinir a las órbitas periódicas simples como aquellas tales que su número de cubrimiento sea 1.

El período de la órbita simple asociada a una órbita periódica (param. o no param.) es lo que llamamos el **período minimal** que escribimos como $\tau_0(\gamma)$. En particular, si $\tau(\gamma)$ período de γ , se tiene

$$\tau(\gamma) = cov(\gamma)\tau_0(\gamma)$$

Le decimos órbita periódica a la traza de una órbita periódica paramétrica. Observar que hay una correspondencia uno a uno entre órbitas periódicas y órbitas periódicas no parametrizadas simples. Si pensamos en $(\Sigma, \omega|_\Sigma)$ variedad hamiltoniana, una órbita periódica es una hoja cerrada de la foliación $\ker \omega$ en Σ .

5.2. Kernel del hessiano de A^H

Como vimos, las órbitas periódicas parametrizadas son los puntos críticos del funcional A^H , pero estos críticos nunca son aislados en el espacio de curvas $\mathcal{L} = C^\infty(S^1, M)$ (or ejemplo ya vimos que el conjunto de puntos críticos es invariante por la acción de S^1). Lo que ocurre es que el kernell del hessiano de A^H nunca es trivial. Nos centraremos ahora en el estudio del kernel del hessiano para ver “por cuánto” no son aislados los críticos.

Veamos primero qué entendemos por hessiano. Sea (γ, τ) crítico de A^H , el hessiano de A^H sobre (γ, τ) es

$$\text{Hess}(A^H) : T_{(\gamma, \tau)}(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^+) \times T_{(\gamma, \tau)}(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left((\hat{\gamma}_1, \eta), (\hat{\gamma}_2, \xi) \right) \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right|_{(s_1, s_2) = (0, 0)} A^H(\gamma_{s_1, s_2}, \tau + s_1\eta + s_2\xi)$$

donde γ_{s_1, s_2} es tal que

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial s_1} \right|_{s_1=0} \gamma_{s_1, s_2} = \hat{\gamma}_1 \\ \left. \frac{\partial}{\partial s_2} \right|_{s_2=0} \gamma_{s_1, s_2} = \hat{\gamma}_2 \end{cases}$$

Recordamos que a los elementos del tangente $\hat{\gamma}_1$ y $\hat{\gamma}_2$ los pensamos como campos sobre la curva γ . Se puede ver que la definición del hessiano no depende de la elección de γ_{s_1, s_2}

Lema 5.2.1. *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$Hess(A^H)_{(\gamma, \tau)}((\hat{\gamma}_1, \eta), (\hat{\gamma}_2, \xi)) = \int_0^1 d\lambda(\gamma)(\hat{\gamma}_1, L_{\tau X_H}(\hat{\gamma}_2) - \xi X_H(\gamma)) - \eta \int_0^1 dH(\hat{\gamma}_2)$$

Demostración. En una variedad simpléctica (M, ω) una conexión simpléctica ∇ en M es una conexión tal que

- Es libre de torsión: Si X, Y campos, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- ω es paralelo: Si, X, Y, Z campos, $X(\omega(Y, Z)) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z)$

Para ver más sobre conexiones simplécticas se puede consultar [5] y [19]. En particular se tiene que toda variedad simpléctica admite una conexión simpléctica, aunque no única. En función de una conexión libre de torsión podemos definir el Hessiano independientemente de las coordenadas:

$$\begin{aligned} Hess f(X, Y) &:= \nabla \nabla f(X, Y) = \nabla_Y(\nabla f(X)) \\ &= XY(f) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= YX(f) - (\nabla_Y X)(f) \end{aligned}$$

Como además la conexión es simpléctica tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Hess H(X, Y) &= YX(H) - (\nabla_Y X)(H) \\ &= Y(dH(X)) + dH(\nabla_Y X) \\ &= Y(\omega(X, X_H)) - \omega(\nabla_Y X, X_H) \\ &= \omega(X, \nabla_Y(X_H)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Volvamos un momento a las coordenadas. Recordamos que la definición de A^H es

$$A^H(\gamma, \tau) = \int_{S^1} \gamma^* \lambda - \tau \int_{S^1} H(\gamma)$$

Para calcular el Hessiano A^H , primero calculamos las derivadas parciales de orden 2 del primer integrando de

$$\left. \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right|_{(s_1, s_2)=(0,0)} A^H(\gamma_{s_1, s_2}, \tau + s_1 \eta + s_2 \xi)$$

Para ello, podemos extender los campos $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ a campos en un entorno de la curva tales que sus flujos asociados conmuten. Más aún, podemos suponer que si ϕ_1 y ϕ_2 flujos asociados a las extensiones de $\hat{\gamma}_1$ y $\hat{\gamma}_2$ respectivamente, entonces $\phi_1^{s_1} \circ \phi_2^{s_2} \circ \gamma = \gamma_{s_1, s_2}$. Luego, las derivadas del primer término son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \Big|_{(s_1, s_2)=(0,0)} \gamma_{s_1, s_2}^* \lambda &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \Big|_{(s_1, s_2)=(0,0)} (\phi_1^{s_1} \circ \phi_{s_2}^2 \circ \gamma)^* \lambda \\
&= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \Big|_{(s_1, s_2)=(0,0)} \gamma^* (\phi_2^{s_2})^* (\phi_1^{s_1})^* \lambda \\
&= \gamma^* L_{\hat{\gamma}_2} L_{\hat{\gamma}_1} \lambda = L_{\hat{\gamma}_2} L_{\hat{\gamma}_1} \lambda_\gamma(\dot{\gamma}) \\
&= L_{\hat{\gamma}_1} \lambda_\gamma(\nabla_{\dot{\gamma}} \hat{\gamma}_2) = d\lambda_\gamma(\hat{\gamma}_1, \nabla_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2) + d\iota_{\hat{\gamma}_1} \lambda(\nabla_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2)
\end{aligned}$$

Observar que al integrar en S^1 el segundo término integra 0 por Stokes. Luego

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \Big|_{(s_1, s_2)=(0,0)} (\tau + s_1 \eta + s_2 \xi) H(\gamma_{s_1, s_2}) = \eta dH_\gamma(\hat{\gamma}_2) + \xi dH_\gamma(\hat{\gamma}_1) + \tau Hess_\gamma H(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$$

Utilizando esta igualdad y sustituyendo obtenemos que

$$Hess(A^H)_{(\gamma, \tau)}((\hat{\gamma}_1, \eta), (\hat{\gamma}_2, \xi)) = \int_0^1 \omega(\hat{\gamma}_1, \nabla_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2 - \tau \nabla_{\hat{\gamma}_2} X_H - \xi X_H) - \eta \int_0^1 dH(\hat{\gamma}_2)$$

Como

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2 - \tau \nabla_{\hat{\gamma}_2} X_H &= \nabla_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2 - \nabla_{\hat{\gamma}_2} \tau X_H \\
&= [\tau X_H, \hat{\gamma}_2] \\
&= L_{\tau X_H} \hat{\gamma}_2
\end{aligned}$$

Concluimos con la expresión presentada en el lema:

$$Hess(A^H)_{(\gamma, \tau)}((\hat{\gamma}_1, \eta), (\hat{\gamma}_2, \xi)) = \int_0^1 d\lambda(\gamma)(\hat{\gamma}_1, L_{\tau X_H}(\hat{\gamma}_2) - \xi X_H(\gamma)) - \eta \int_0^1 dH(\hat{\gamma}_2)$$

□

Del lema se deduce que $(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \in \ker(Hess(A^H))$ si se verifica $\begin{cases} L_{\tau X_H}(\hat{\gamma}) = \hat{\tau} X_H(\gamma) \\ \int_0^1 dH(\hat{\gamma}) = 0 \end{cases}$

Para $(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \in \ker(Hess(A^H))$ en el punto crítico (γ, τ) consideramos

$$v : [0, 1] \rightarrow T_{\gamma(0)} M, \quad v(t) = d\phi_H^{-\tau t}(\gamma(t)) \hat{\gamma}(t)$$

. Como $\hat{\gamma}$ es un loop, se tiene que

$$\begin{aligned}
v(1) &= d\phi_H^{-\tau}(\gamma(1)) \hat{\gamma}(1) \\
&= d\phi_H^{-\tau}(\gamma(0)) \hat{\gamma}(0) = d\phi_H^{-\tau}(\gamma(0)) v(0)
\end{aligned}$$

Es decir, se verifica $v(0) = d\phi_H^\tau(\gamma(0)) v(1)$

Usando definición de derivada de Lie y que H es invariante por el flujo ϕ_H , podemos mediante un pullback expresar la condición hallada para pertenecer al kernel del hessiano en $\gamma(0)$ como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t) = \hat{\tau} X_H(\gamma(t)) \\ \int_0^1 dH_{\gamma(0)} v(t) dt = 0 \end{cases}$$

Integrando primer ecuación obtenemos $v(t) = v(0) + t\hat{\tau}X_H(\gamma(0))$ y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que, como $dH(X_H) = 0$, $\int_0^1 dH_{\gamma(0)}(v(0))dt = 0$. Como el integrando no depende de t podemos reescribir las condiciones de pertenecer al kernel así:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(t) = \hat{\tau}X_H(\gamma(0)) \\ dH_{\gamma(0)}v(0) = 0 \end{cases}$$

Esto nos permite dar una identificación del kernell del hessiano. Definimos para γ órbita periódica parametrizada en $H^{-1}(0)$ de período τ el espacio

$$\mathfrak{K}(\gamma) = \left\{ (v_0, \hat{\tau}) \in T_{\gamma(0)}M \times \mathbb{R} : dH_{\gamma(0)}(v_0) = 0, \frac{\partial}{\partial t}v(t) = \hat{\tau}X_H(\gamma(0)) \right\}$$

Observamos que como A^H es invariante por la acción de S^1 dada por una rotación de la parametrización, los kernel del hessiano de dos puntos críticos que pertenecen a la misma órbita de la acción de S^1 son isomorfos. En otras palabras, si bien $\mathfrak{K}(\gamma)$ da condiciones en $\gamma(0)$, podría ser en cualquier punto: $\mathfrak{K}(\gamma) = \mathfrak{K}(\gamma')$ si γ' es una reparametrización de γ . Para ver esto, si $s \in S^1$ tenemos que el siguiente es un isomorfismo

$$\psi_s : \mathfrak{K}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{K}(s \cdot \gamma), \quad \psi_s(v_0, \hat{\tau}) = (d\phi_H^{s\tau}(\gamma(0))v_0 + s\hat{\tau}X_H(\gamma(s\tau)), \hat{\tau})$$

Esto esta bien definido, pues $\phi_H^{s\tau}(\gamma(0))$ no depende del representante de $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X_H(\gamma(0)) &= X_H(\gamma(\tau)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi^\tau \phi^t(\gamma(0)) \\ &= d\phi^\tau(\gamma(0))X_H(\gamma(0)) \end{aligned}$$

Podemos ver que el par $(v_0, \hat{\tau}) = (X_H(\gamma(0)), 0) \in \mathfrak{K}(\gamma)$, pues $(X_H(\gamma(0)), 0)$ es el generador infinitesimal de la acción de S^1 en (γ, τ) y ya sabíamos que los críticos no eran aislados. En función de esto distinguiremos a las órbitas periódicas en las que su hessiano tenga dimensión uno.

Definición 5.2.1. Decimos que una órbita periódica parametrizada γ es **transversalmente no degenerada** si $\mathfrak{K}(\gamma) = \langle (X_H(\gamma(0)), 0) \rangle$

La noción de no degeneración también se extiende a órbitas periódicas no parametrizadas, pues como vimos el kernel del hessiano no depende de la reparametrización por rotaciones. Sin embargo, con la acción de $\mathbb{N}$ (cubrimientos) hay que tener cuidado: si γ es órbita periódica parametrizada y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\psi_n : \mathfrak{K}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{K}(n \cdot \gamma)$ dado por $\psi_n(v_0, \hat{\tau}) = (v_0, n\hat{\tau})$ es inyectiva pero no necesariamente sobreyectiva. Lo que sí permite decir este morfismo es que si γ es no degenerada, su órbita periódica simple asociada es también no degenerada. En general decimos que una **órbita periódica es no degenerada** si todos sus representantes parametrizados son órbitas periódicas parametrizadas no degeneradas.

5.3. Órbitas circulares en problema de Kepler rotatorio

Como ya hemos visto, la búsqueda de órbitas periódicas adquiere gran relevancia cuando buscamos una superficie compacta con borde que es transversal a todas las órbitas del sistema, cuyo borde está formado justamente por órbitas periódicas. En el problema de tres cuerpos restricto planar existen dos órbitas periódicas “especiales” que llamamos órbita directa y retrógrada, que también se encuentran en el problema lunar de Hill o en el

problema de Kepler rotatorio. En este último estas órbitas especiales son justamente órbitas circulares (tanto en el marco de rotación como en el inercial). En esta sección iremos en la búsqueda de las órbitas circulares en el problema de Kepler rotatorio para finalmente probar que solo hay tres de ellas para una energía fija.

Si llamamos E a la energía del problema de Kepler y L al momento angular, el hamiltoniano del problema de Kepler rotatorio es

$$H = E + L = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

. El vector de Runge-Lenz A , cuyas entradas son cantidades conservadas para el problema de Kepler (y Kepler rotatorio), verifica que $|A|^2 = 1 + 2L^2 E$ y $|A|$ corresponde con la excentricidad de las elipses en Kepler. Observando que

$$0 \leq |A|^2 = 1 + 2E(H - E)^2 = 1 + 2H^2 E - 4HE^2 + 2E^3 := p(H, E)$$

Tenemos que las órbitas son circulares en Kepler cuando la excentricidad es 0, equivalentemente $p(H, E) = 0$.

Recordamos que como queremos estudiar las órbitas periódicas nos centramos en el caso de energía negativa: $E < 0$. Como $\{E, L\} = 0$, los flujos de X_E y X_L conmutan, en particular $H = E + L = E \diamond L$ con $\phi_H^t = \phi_L^t \circ \phi_E^t$ donde el flujo ϕ_L^t es una rotación en q y en p . Escribimos $\epsilon_\tau : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la componente q de una solución de período τ para la energía E . Rotando esta parametrización obtenemos una solución para Kepler rotatorio:

$$\epsilon_\tau^R(t) = e^{it} \epsilon_\tau(t)$$

Observar que si ϵ_τ es un círculo, también lo es ϵ_τ^R (a menos que $\tau = 2\pi$ y la rotación que genera L compense a la que genera E en el círculo). Por otro lado, si ϵ_τ es una elipse tenemos que ϵ_τ^R será periódica si se verifica una condición de resonancia para ciertos enteros k, ℓ :

$$2\pi\ell = \tau k$$

Si estamos en este caso (órbita periódica de segundo tipo), ϵ_t presenta una simetría rotacional:

$$\epsilon_\tau^R(t + \tau) = e^{it} e^{i\tau} \epsilon_\tau(t) = e^{i2\pi\ell/k} \epsilon_\tau^R(t)$$

Nos centraremos ahora en el estudio de las órbitas circulares. Observar que

$$p(H, E) = 1 + 2H^2 E - 4HE^2 + 2E^3$$

es de grado 3 en E y grado 2 en H . Además ya sabemos que el único valor crítico de H es $-\frac{3}{2}$. Si fijamos $H = -\frac{3}{2}$ entonces el polinomio con esta restricción y factorizado nos queda

$$p_{-3/2}(E) = 2(E + 2)(E + 1/2)^2$$

En función del signo del discriminante Δ de un polinomio de grado 3 podemos distinguir tres casos sobre sus raíces:

- $\Delta > 0$: tres raíces reales distintas
- $\Delta = 0$: una raíz real doble y otra simple

- $\Delta < 0$: una raíz real y dos complejas conjugadas

Si $P = ax^2 + bx^2 + cx + d$ el discriminante es

$$\Delta(P) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

Para p_H tenemos $\Delta(p_H) = -32H^3 - 108$ por lo tanto

$$\begin{cases} \Delta(p_H) > 0 & \text{si } H < -3/2 \\ \Delta(p_H) = 0 & \text{si } H = -3/2 \\ \Delta(p_H) < 0 & \text{si } H > -3/2 \end{cases}$$

Entonces, para $H < -3/2$ escribimos $E^1(H) < E^2(H) < E^3(H)$ a los tres ceros de p_H . Observar que las raíces como funciones de H se extienden de forma continua hasta $-3/2$. De hecho E^1 se extiende a todo $\mathbb{R}$, indicando la única raíz real cuando $H > -3/2$. Las funciones

$$E^i : (-\infty, -3/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

extendidas continuamente cumplen $E^1(-3/2) = -2$, $E^2(-3/2) = E^3(-3/2) = -1/2$.

Por otro lado tenemos que $p_E(H)$ es un polinomio de grado 2 en H y su discriminante es $\nabla(p_E) = -8E$. Por lo que si $E < 0$, p_E tiene dos raíces reales.

Lema 5.3.1. *Se tiene que E^1 y E^2 son monótonas crecientes y E^3 monótona decreciente. Además, si $I = (-\infty, -3/2]$,*

$$E^1(I) = (-\infty, -2], \quad E^2(I) = (-\infty, -1/2], \quad E^3(I) = [-1/2, 0)$$

Por último, para $H < -3/2$ existen exactamente tres órbitas circulares, de las cuales dos de ellas se encuentran en la región de Hill acotada y la otra en la no acotada.

Demostración. Primero tres observaciones:

- Se tiene que $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial E} = 0 & \text{sii } H = E, \quad H = 3E \\ \frac{\partial p}{\partial H} = 0 & \text{sii } H = E \end{cases}$
- En la región $H = E$ no hay raíces y en la región $H = 3E$ el único cero es $(-1/2, -3/2)$
- Sabemos que por cada $H < -3/2$ hay tres raíces de p , para $H = -3/2$ hay dos raíces y para $H > -3/2$ hay solo una. Además para $E < 0$ hay dos raíces y para $E > 0$ ninguna.

Por teorema de la función implícita $P^{-1}(0)$ se puede ver localmente como un gráfico de H en función de E , pues $\frac{\partial p}{\partial H} \neq 0$ donde p se anula. De hecho podemos decir que $P^{-1}(0)$ está formado por dos curvas que son los gráficos de $H(E)$ (donde $E < 0$). Si pensamos a $P^{-1}(0)$ como un conjunto de curvas de gráficos de E en función de H , serían tres curvas, dos de las cuales se cortan en $(-1/2, -3/2)$ (que es cuando $\frac{\partial p}{\partial E} = 0$). Estas tres curvas son los gráficos de las funciones $E^i(H)$. Incluso sabemos que

$$\frac{\partial E^i}{\partial H} = -\frac{\partial p / \partial H}{\partial p / \partial E}$$

Sabiendo el signo de esta derivada tenemos información de la monotonía de las funciones E^i y podemos hacer un dibujo bastante preciso de los gráficos de $E^i(H)$. Con esto queda probada la primer parte del lema.

- Órbita periódica circular directa interna a $E^2(c)$
- Órbita periódica circular directa externa a $E^3(c)$

Con directa y retrógrada hacemos referencia al sentido de la órbita, marcado por el momento angular correspondiente.

5.4. Aproximando Kepler rotatorio a energías bajas

Si vamos considerando energías cada vez más bajas, veremos que el problema de Kepler rotatorio se aproxima al problema de Kepler usual, donde este último se interpreta, vía regularización de Moser, como un flujo geodésico en la esfera. A continuación mostraremos como las órbitas circulares a energías bajas se bifurcan del flujo geodésico de la esfera y para esto, como las órbitas periódicas son críticos del funcional de Rabinowitz, consideraremos una familia de funcionales indexados en energías cada vez más negativas para estudiar como se bifurcan estos puntos críticos. Antes veamos el caso finito dimensional:

Consideramos X una variedad diferenciable, $f \in C^\infty(X \times [0, 1], \mathbb{R})$ que pensamos como una familia de funciones $f_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ indexadas en $r \in [0, 1]$. Suponemos $C \subseteq \text{crit} f_0$ es una componente de Morse-Bott, es decir, $C \subseteq X$ es una subvariedad cerrada que corresponde a una componente conexa del conjunto de puntos críticos de f_0 donde para todo $x \in C$ se tiene $T_x C = \ker \text{Hess}_x(f_0)$.

Lema 5.4.1. Si $f_0^\circ = \frac{\partial f_r}{\partial r}|_{r=0}$ asumimos $f_0^\circ|_C$ es una función de Morse, entonces existe $\epsilon > 0$, un entorno U de C en X y una función suave

$$x : \text{crit}(f_0^\circ|_C) \times [0, \epsilon) \rightarrow U$$

que verifica

1. Si $\iota : \text{crit}(f_0^\circ|_C) \rightarrow U$ inclusión y $x_0 := x(\cdot, 0)$, entonces $x_0 = \iota$.
2. Para todo $r \in (0, \epsilon)$ $f_r|_U$ es Morse y $\text{crit}(f_r|_U) = \text{im}(x_r)$ con $x_r := x(\cdot, r)$.

El lema también vale para espacios de dimensión infinita.

Volviendo al problema en cuestión, recordamos que el Hamiltoniano del problema de Kepler rotatorio es

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

Regularizamos este problema para energías $c < 0$ de la siguiente manera: definimos

$$\begin{aligned} K^c(p, q) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{|q|}{2c} (H(q/2c, \sqrt{-2cp})) + 1 \right)^2 - 1/2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + |p|^2)}{2} + \frac{(q_1 p_2 - q_2 p_1)}{(-2c)^{3/2}} \right)^2 |q|^2 - 1/2 \end{aligned}$$

Como vimos, este hamiltoniano se extiende de forma suave a un hamiltoniano definido en T^*S^2 para $c < 2$. Queremos estudiar el comportamiento cuando $c \rightarrow -\infty$. Consideramos el cambio de variable $c = -1/2r^{2/3}$:

$$K_r(p, q) = K^{-1/2r^{2/3}}(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + |p|^2)}{2} + (q_1 p_2 - q_2 p_1)r \right)^2 |q|^2 - 1/2$$

Este hamiltoniano se extiende a $r = 0$ donde

$$K_0(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + |p|^2)}{2} \right)^2 |q|^2 - 1/2$$

que es exactamente la regularización de Kepler. Esta energía es la energía cinética de la esfera por lo que la dinámica inducida es la del flujo geodésico.

Si $\mathcal{L}$ es el espacio de curvas suaves libres $S^1 \rightarrow T^*S^2$ definimos la familia de funcionales

$$A_r := A^{K_r} : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Los puntos críticos de A_0 corresponden con las geodésicas de la esfera. Observar que las órbitas periódicas no parametrizadas simples del flujo geodésico están en correspondencia biyectiva con los círculos máximos. A su vez, los círculos máximos parametrizados por longitud de arco están determinados por un punto y una dirección en el tangente sobre dicho punto, por lo que el espacio de círculos máximos parametrizados es difeomorfo al tangente unitario de la esfera $S^*S^2 \simeq \mathbb{R}P^3$. A su vez, S^1 actúa en este espacio reparametrizando las órbitas periódicas con rotaciones, por lo que el espacio de órbitas periódicas no parametrizadas es difeomorfo a $\mathbb{R}P^3/S^1 \simeq S^2$.

Si γ es una órbita periódica parametrizada solución del campo Hamiltoniano inducido por K_0 , como corresponde a una geodésica cerrada, su período es 2π , por lo que $(\gamma, 2\pi)$ es un punto crítico de A_0 . Escribimos

$$C \subset \text{crit}(A_0)$$

el espacio de estos pares. En particular, por lo observado antes, $C \simeq \mathbb{R}P^3$ es una componente de Morse-Bott de A_0 . como A_r invariante por la acción de S^1 podemos definir

$$\overline{A_r} : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^+)/S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

Observar que la acción de S^1 es libre en $C \subset \mathcal{L} \times \mathbb{R}^+$. Escribimos

$$\overline{C} = C/S^1 \subset \text{crit}(\overline{A_0})$$

La idea será ahora aplicar el lema donde el papel de f_r lo juega $\overline{A_r}$. Observar que $\overline{C} \simeq S^2$ por lo antes observado. Escribimos

$$\overline{A_0}^\circ := \frac{\partial \overline{A_r}}{\partial r} \Big|_{r=0}, \quad K_0^\circ := \frac{\partial K_r}{\partial r} \Big|_{r=0}$$

En particular

$$K_0^\circ(p, q) = \frac{1}{2}(1 + |p|^2)(q_1 p_2 - q_2 p_1)|q|^2 = \left(\sqrt{2K_0 + 1} \right) L|q|$$

$$A_0^\circ(\gamma, \tau) = -\tau \int_{S^1} K_0^\circ(\gamma) dt$$

Si $(\gamma, \tau) = ((p, q), 2\pi) \in C$ entonces $K_0(\gamma) = 0$ y

$$A_0^\circ(\gamma, 2\pi) = -2\pi \int_{S^1} L(\gamma)|q| dt = -2\pi L(\gamma(0)) \int_{S^1} |q| dt$$

pues L es constante en las órbitas de Kepler.

Recordamos que en la regularización de Moser (3.7) las órbitas solución quedan multiplicadas por un factor $|q|$. Específicamente $X_K = |q|X_H$ restricto al nivel de energía $-1/2$

donde H es la energía para Kepler y K la energía cinética con la métrica de la esfera. Por lo tanto $\int_{S^1} |q| dt$ es el cociente entre el período de una elipse de energía $-1/2$ antes y luego de la regularización. Como en ambos casos el período es 2π obtenemos que $\int_{S^1} |q| dt = 1$ y

$$A_0^\circ(\gamma, 2\pi) = -2\pi L(\gamma(0))$$

Resulta que el mapa $\bar{L}$ inducido por L en el cociente $S^*S^2/S^1 \simeq S^2$ es el mapa altura en la esfera. En particular $\bar{L}$ es Morse con solo dos críticos: la altura máxima y mínima. Aplicando el lema aquí es donde bifurcan los críticos de $\bar{A}_0^\circ$. En particular, por la teoría de multiplicadores de Lagrange, el máximo y mínimo de L restringido a $K_0^{-1}(0)$ se da cuando los gradientes de L y K_0 son paralelos, o equivalentemente, sus gradientes simplécticos son paralelos. Esto se da justamente en las órbitas circulares del problema de Kepler: para una energía fija, hay exactamente dos órbitas circulares que giran en sentidos opuestos.

5.5. Órbitas directa y retrógrada en problema de Hill

Acabamos de ver como en el problema de Kepler rotatorio, a energías bajas, existe una órbita periódica directa y otra retrógrada que bifurcan del flujo geodésico (problema de Kepler regularizado). Veamos ahora que podemos concluir lo mismo en el problema lunar de Hill o más generalmente si agregamos un potencial V a la función de energía.

Si V potencial suave definido en una región del plano Ω para el cual el origen es un punto crítico, definimos para $\mu > 0$

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{\mu}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1 + V(q)$$

Como caso particular tenemos el hamiltoniano lunar de Hill

$$H_h(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + q_1 p_2 - q_2 p_1 - q_1^2 + q_2^2/2$$

o incluso el hamiltoniano del problema de tres cuerpo restringido colocando a la luna en el origen (en un sistema Tierra-Luna-Satélite) dado por

$$H_m(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{\mu}{|q|} - (1 - \mu) \left(\frac{1}{|q + 1|} + q_1 \right) + q_1 p_2 - q_2 p_1$$

Para energías negativas $c < 0$ regularizamos H definiendo

$$\begin{aligned} K^c(p, q) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{|q|}{2c} \left(H(q/2c, \sqrt{-2cp}) - c - V(0) \right) + \mu \right)^2 - \mu^2/2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + |p|^2}{2} + \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{-2c^{3/2}} - \frac{(V(-q/2c) - V(0))}{2c} \right)^2 |q|^2 - \mu^2/2 \end{aligned}$$

Como en el problema de Kepler rotatorio consideramos el cambio de variable $c = -r^{-2/3}/2$ obteniendo para $K_r := K^{-r^{-2/3}/2}$

$$K_r(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + |p|^2}{2} + r(q_1 p_2 - q_2 p_1) + (V(qr^{2/3}) - V(0))r^{2/3} \right)^2 |q|^2 - \mu^2/2$$

En particular

$$K_0(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + |p|^2}{2} \right)^2 |q|^2 - \mu^2/2$$

es la energía cinética en la esfera por lo que el sistema que induce es el flujo geodésico. Observar que K_0 no depende de V .

Si escribimos para abreviar $G_r(p, q) = \frac{1+|p|^2}{2} + r(q_1p_2 - q_2p_1) + (V(qr^{2/3}) - V(0))r^{2/3}$ entonces

$$K_r(q, p) = \frac{1}{2} G_r(p, q) |q|^2 - \mu^2/2$$

Para computar la derivada de la energía según r primero calculamos la de G

$$\frac{\partial G_r}{\partial r}(p, q) = (q_1p_2 - q_2p_1) + \frac{2r^{1/3}}{3} \langle \nabla V(qr^{2/3}), q \rangle + \frac{2(V(qr^{2/3}) - V(0))}{3r^{1/3}}$$

La segunda derivada respecto a r es

$$\frac{\partial^2 G_r}{\partial r^2}(p, q) = \frac{4}{9} \langle \text{Hess}_V(qr^{2/3}), q, q \rangle + \frac{2}{3r^{2/3}} \langle \nabla V(qr^{2/3}), q \rangle - \frac{2(V(qr^{2/3}) - V(0))}{9r^{4/3}}$$

Por lo tanto,

$$\left. \frac{\partial G_r}{\partial r} \right|_{r=0} = q_1p_2 - q_2p_1 = L$$

recordando que 0 es crítico de V y escribiendo $H_V := \text{Hess}_V$ tenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 G_r}{\partial r^2} \right|_{r=0} &= \frac{4}{9} \langle H_V(0)q, q \rangle + \frac{2}{3} \langle H_V(0)q, q \rangle - \frac{1}{9} \langle H_V(0)q, q \rangle \\ &= \langle H_V(0)q, q \rangle \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial K_r}{\partial r}(p, q) = G_r(p, q) |q|^2 \frac{\partial G_r}{\partial r}(p, q) = \sqrt{(2K_r(p, q) + \mu^2)} |q| \frac{\partial G_r}{\partial r}(p, q)$$

y

$$\left. \frac{\partial K_r}{\partial r} \right|_{r=0}(p, q) = \sqrt{2K_0 + \mu^2} |q| L$$

Computando la derivada segunda tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_r}{\partial r^2}(p, q) &= \frac{|q|}{\sqrt{2K_r + \mu^2}} \frac{\partial K_r}{\partial r} \frac{\partial G_r}{\partial r} + \sqrt{2K_r + \mu^2} |q| \frac{\partial^2 G_r}{\partial r^2} \\ &= |q|^2 \left(\left(\frac{\partial G_r}{\partial r} \right)^2 + G_r \frac{\partial^2 G_r}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

En particular como G_r es dos veces diferenciable en r , también lo es K_r

Ahora la estrategia es igual a la que se siguió en el problema de Kepler rotatorio: definimos una familia de funcionales indexados en el parámetro r

$$A_r := A^{K_r} : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Tenemos que K_r es dos veces diferenciable, K_0 no depende de V y $K_0^\circ = \left. \frac{\partial K_r}{\partial r} \right|_{r=0}$ tampoco. Luego exactamente el mismo razonamiento que hicimos en Kepler rotatorio funciona: A_0° es un múltiplo del momento angular que en el espacio cociente del conjunto crítico C induce la función altura, que ya sabemos que es Morse. Aplicando el lema visto tenemos que en $r = 0$ el flujo geodésico bifurca en dos órbitas periódicas que llamamos órbita directa y retrógrada.

Capítulo 6

Superficies de sección global- Geometría de contacto y curvas pseudoholomorfas

6.1. Reducción a dinámicas discretas: superficies de sección globales

La idea de superficie de sección global se remonta a Poincaré, donde en [36] describe como una órbita atraviesa un semiplano infinitas veces. Con una visión nueva para la época, Poincaré hace énfasis en la geometría de las órbitas más allá de fórmulas de movimiento para el entendimiento de una dinámica y en particular la del problema de tres cuerpos. Ya con esta visión madurada, poco tiempo antes de su muerte en [37] encuentra un anillo de sección y estudia algunas propiedades. En dicho artículo es donde formula la conjetura hoy conocida como “el último teorema geométrico de Poincaré”, probado por Birkhoff poco tiempo después. Ya hemos visto en 4.1 cómo Conley construye un anillo de sección transversal en el problema de tres cuerpos restringido, o Kummer en [31] con algunas correcciones y coordenadas simplécticas.

La reducción a dinámicas discretas en superficies, además de reducir un grado de libertad, nos permite usar toda la maquinaria desarrollada en dimensión 2. Incluso en contextos en los que no hemos ahondado, como por fuera de regiones de Hill. Con este tipo de estrategia se prueba que con muy pocos grados de libertad se puede tener comportamientos caóticos, tal es el caso del problema de Sitnikov, una disposición particular del problema de tres cuerpos muy cercana a un problema integrable. En [35] prueba este comportamiento caótico encontrando una sección transversal (no global) cercana a las órbitas de escape, para la cual la dinámica era semiconjugada a un shift de Bernoulli de infinitos símbolos, lo que en particular implica la existencia de órbitas con movimientos oscilatorios (órbitas que no son acotadas pero que siempre vuelven).

Volviendo a superficies de sección global, el anillo que encuentra Conley tiene como bordes las órbitas directa y retrógrada en el problema de tres cuerpos. Sin embargo este anillo se encuentra a energías bajas. Birkhoff muestra en [7] que si la energía no es tan baja, por debajo del primer valor crítico, la órbita directa se vuelve degenerada lo que imposibilita la construcción del anillo de sección. Sin embargo, también prueba que la órbita retrógrada persiste y conjetura la existencia de un disco de sección global para cualquier energía por debajo del primer valor crítico. Teniendo esto en cuenta es que en particular nos vamos a interesar por discos de sección transversales.

Definición 6.1.1. Consideramos X campo que no se anula en una variedad compacta diferenciable M de dimensión 3. Una superficie de sección global S en M para el flujo ϕ_X inducido por X es una superficie que verifica

1. X es transversal al interior de S
2. X es tangente al borde ∂S
3. Para todo $x \in M \setminus \partial S$, existe un tiempo $t^+ > 0$ y un tiempo $t^- < 0$ tales que $\phi_X^{t^\pm}(x) \in S$

Observar que la segunda condición implica que las componentes de borde de S son órbitas periódicas. De forma análoga se define una hipersuperficie de sección transversal en una variedad M de dimensión n como una subvariedad $S \subseteq M$ de codimensión 1 que verifique los mismos puntos mencionados.

Para una superficie de sección global S se define el **mapa de retorno de Poincaré** de la siguiente forma: para $x \in \text{int}(S)$ consideramos

$$\tau(x) := \min\{t > 0 : \phi_X^t(x) \in \text{int}(S)\}$$

Entonces el mapa retorno ψ es

$$\psi : \text{int}(S) \rightarrow \text{int}(S), \quad \psi(x) = \phi_X^{\tau(x)}(x)$$

El mapa retorno preserva área:

Proposición 6.1.1. Si (M, ω) es una variedad hamiltoniana, X un campo hamiltoniano (sección no nula de $\ker \omega$) y S superficie de sección global para el flujo generado por X , que llamamos ϕ_X . Entonces el mapa de retorno ψ es un *symplectomorfismo*:

$$\psi^* \omega|_{\text{int}(S)} = \omega|_{\text{int}(S)}$$

Demostración. El diferencial del mapa retorno es

$$d\psi(x)(v) = d\phi_X^{\tau(x)}(x)(v) + (d\tau(x)(v))X(x)$$

Luego, como $X \in \ker \omega$,

$$\psi^* \omega(x)(v, w) = \omega(\psi(x)) \left(d\phi_X^{\tau(x)}(v), d\phi_X^{\tau(x)}(w) \right) = \phi^* \omega(x)(v, w) = \omega(x)(v, w)$$

Pues ϕ preserva ω . □

6.2. Obstrucciones para la existencia de disco de sección global

Nos enfocaremos en dinámicas hamiltonianas en S^3 , visto que podemos ver el problema de tres cuerpos regularizado aquí (vía la transformación de Levi-Civita). En particular, debido a los comentarios al principio del capítulo, nos interesa encontrar discos de sección transversal para estas dinámicas.

Consideramos X un campo que no se anula en S^3 . Antes de la búsqueda del disco de sección, lo primero que uno se pregunta es cuándo una órbita periódica γ puede ser el borde de un disco de sección global. Observamos que una órbita periódica en S^3 se puede ver como un nudo, es decir, un encaje $S^1 \rightarrow S^3$. En esta sección veremos tres

obstrucciones para que un nudo sea borde de un disco de sección global. Antes de ello, algunas definiciones y observaciones sobre nudos.

Pensamos a S^3 como una compactificación de $\mathbb{R}^3$. Si α y β son dos nudos en S^3 disjuntos y orientados, definimos el mapa

$$f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2, \quad f(t, s) = \frac{\alpha(t) - \beta(s)}{\|\alpha(t) - \beta(s)\|}$$

Definimos el número de enlace o *linking number* entre α y β como el grado de f :

$$\text{link}(\alpha, \beta) := \deg(f)$$

Esta definición es invariante por isotopías de los nudos. Además, hay varias definiciones equivalentes. Una de ellas es usando *superficies de Seifert*. Para K un nudo o link (conjunto de nudos que no se intersectan) orientado, llamamos superficie de Seifert asociada a K a cualquier superficie S compacta, conexa y orientada tal que $\partial S = K$ y la orientación de S sea compatible con la de K .

Dados α y β nudos disjuntos orientados y sea S_α superficie de Seifert asociada a α . Podemos tomar S_α de forma tal que la intersección de β con S_α sean finitos puntos. Luego, se tiene que $\text{link}(\alpha, \beta)$ coincide con el conteo con signo (en función de las orientaciones) de estas intersecciones y de hecho se puede tomar como definición equivalente, pues esta definición no depende de la elección de la superficie de Seifert.

Las superficies de Seifert definen el *género* de un nudo de la siguiente forma. Si α es un nudo, el género de α se define como

$$g(\alpha) := \min\{g(S_\alpha) : S_\alpha \text{ superficie de Seifert para } \alpha\}$$

Donde $g(S_\alpha)$ es el género de la superficie. En particular los nudos que son borde de un disco tienen género 0, pues están “desanudados”. Para más detalles sobre generalidades de nudos se puede consultar [40].

Para la definición de número de autonelazamiento o *self-linking number* asumimos que X es el campo de Reeb para λ forma de contacto en S^3 . Escribimos $\xi = \ker \lambda$ a la distribución de planos en T^*S^3 . Distinguimos dos tipos de nudos $\gamma : S^1 \rightarrow S^3$ en geometría de contacto:

- El nudo γ es *legendriano* si $\forall t \in S^1 \quad \partial_t \gamma(t) \in \xi_{\gamma(t)}$.
- El nudo γ es *transversal* si $\forall t \in S^1 \quad \partial_t \gamma(t) \notin \xi_{\gamma(t)}$.

En particular una órbita periódica de Reeb siempre es un nudo transversal, por lo que es para este tipo de nudo el que definimos el self-linking number.

Consideramos γ nudo transversal de género 0. Luego, consideramos el mapa inducido por la superficie de Seifert de γ que es el encaje del disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en S^3 :

$$\bar{\gamma} : D \rightarrow S^3$$

En particular tomamos $\bar{\gamma}$ de forma tal que $\bar{\gamma}(e^{2\pi i t}) = \gamma(t)$. Observar que $\bar{\gamma}$ induce un fibrado por planos en T^*D . Escribimos $\bar{\gamma}^* \xi \rightarrow D$. Como D es contractible, el fibrado es trivial (es un fibrado producto). Esto nos permite tomar X una sección que no se anula $X : D \rightarrow \bar{\gamma}^* \xi$. Lo que hacemos ahora es fluir la curva por el campo X , y para esto tomamos g una métrica Riemanniana en S^3 y definimos

$$\gamma_X : S^1 \rightarrow S^3, \quad \gamma_X(t) = \exp_{\gamma(t)} X(t)$$

Como el nudo es transversal podemos tomar X suficientemente chico de forma tal que $\gamma \cap \gamma_{rX} = \emptyset$ para $r \in (0, 1]$. Definimos el self-linking number de γ como

$$sl(\gamma) := link(\gamma, \gamma_X)$$

Por invariancia por homotopía del linking number esta definición no depende de X ni de la métrica g . Tampoco depende de la elección del disco encajado $\bar{\gamma}(D)$, ya que como $\pi_2(S^3) = 0$, cualquier otro disco es homotópico.

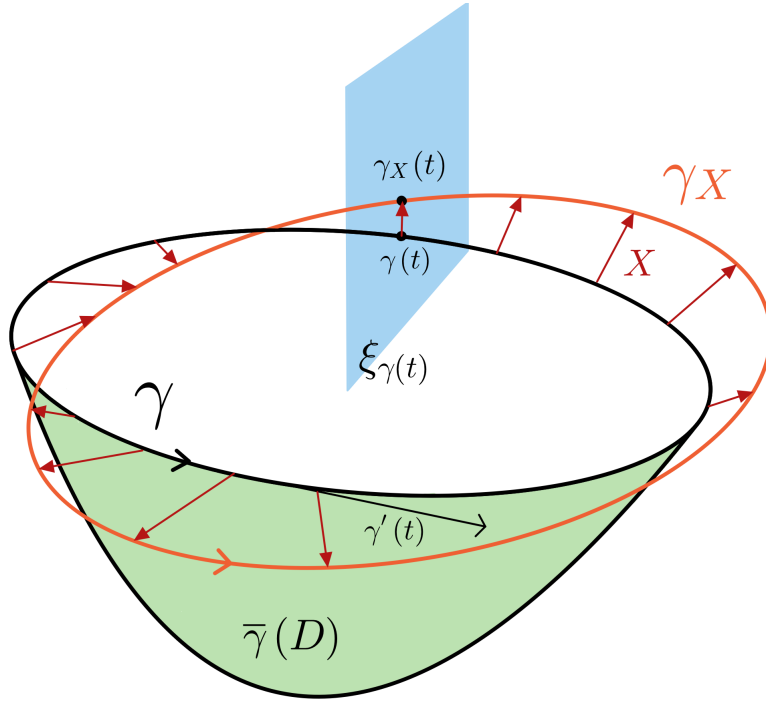


Figura 6.1: Las curvas γ y γ_X forman un link no trivial

También se puede definir self-linking number para nudos transversales con género distinto de 0. En este caso hay que cambiar el disco por la superficie de Seifert correspondiente.

Proposición 6.2.1. *Sea γ una órbita periódica que además es borde de un disco de sección transversal en S^3 . Entonces*

1. γ no está anudada pues tiene género de Seifert $g(\gamma) = 0$.
2. Si γ' es otra órbita periódica, γ y γ' están enlazadas, es decir $link(\gamma, \gamma') \neq 0$.
3. Si X es el campo de Reeb para cierta forma de contacto en S^3 , entonces el self-linking number de γ es -1 : $sl(\gamma) = -1$.

Demostración.

1. Esta obstrucción es trivial por definición de género de un nudo.

2. Como γ delimita un disco de sección global, podemos tomar este disco como superficie de Seifert asociada a γ . El campo X no se anula y es transversal al disco, lo que implica que siempre atraviesa al disco en la misma dirección. Como γ' es una órbita periódica distinta de γ , tiene que atravesar finitas veces en la misma dirección a la superficie de Seifert asociada a γ . Esto implica que $\text{link}(\gamma, \gamma') \neq 0$ ya que el linking number entre γ y γ' se puede definir contando (con signo) estas intersecciones.
3. Llamamos S al disco de sección transversal cuyo borde es γ . Tenemos dos fibrados de rango 2 sobre S que corresponden al tangente y a la estructura de contacto, es decir

$$TS \rightarrow S, \quad \xi|_S \rightarrow S$$

Escribimos $\pi : TS^3 \rightarrow \xi$ proyección en dirección del campo de Reeb R . Como R es transversal al interior de S obtenemos un isomorfismo de los fibrados en el interior del disco:

$$\pi|_S : T\dot{S} \rightarrow \xi|_{\dot{S}}$$

Si $(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi) \rightarrow S$ coordenadas polares de S definimos

$X : S \rightarrow \xi$ sección que no se anula

$Y : S \rightarrow \xi$ sección que no se anula tal que $Y := \pi(r\partial_r)$

Como ∂S es una órbita periódica para el campo de Reeb R , se tiene que $\partial_\theta|_{\partial S}$ es paralelo a R . Esto justifica que Y no se anula en ∂S .

El self-linking number de γ corresponde, tomando X suficientemente chico, a las vueltas de la curva resultante de fluir γ por el campo X alrededor de γ . Esto es igual a las vueltas que da el campo X alrededor de la dirección radial Y , es decir, el *winding number* asociado a X, Y :

$$sl(\gamma) = \text{wind}_{\partial S}(Y, X) = -\text{wind}_{\partial S}(X, Y)$$

Observando que Y solo se anula en el punto correspondiente a $r = 0$ y el winding number es invariante por homotopías en el camino γ . Escribimos $S_r \subseteq S$ al disco de radio r medido en S dado por la restricción de las coordenadas polares. Entonces tenemos que, para todo $r \in (0, 1]$ se tiene

$$sl(\gamma) = -\text{wind}_{\partial S_r}(X, Y)$$

Por lo tanto, si tomamos $r = \delta$ pequeño y p el punto correspondiente a $r = 0$ se tiene que en S_δ el campo X es casi constante igual a $X(p) \neq 0$ y el campo Y , que es radial, da una vuelta alrededor de $X(p)$. Por lo tanto el winding number es 1 y

$$sl(\gamma) = -1$$

□

6.3. Disco de sección en problema de Kepler rotatorio

A continuación veremos la construcción de McGehee ([32]) de un disco de sección global y el mapa retorno para el problema de Kepler rotatorio. El hamiltoniano en coordenadas complejas es el siguiente

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p\bar{p} - \frac{i}{2}(q\bar{p} - \bar{q}p) - \frac{1}{\sqrt{q\bar{q}}}$$

definido en $(T^*\mathbb{C}, \omega)$, siendo ω la forma simpléctica canónica, que en coordenadas complejas se expresa

$$\omega = \frac{1}{2}(dp \wedge d\bar{q} + d\bar{p} \wedge dq)$$

Consideramos la regularización de Levi-Civita (aquí la presentamos ligeramente cambiada a la presentada en capítulo 3) dada por

$$q = 2z^2, \quad p = \frac{w}{\bar{z}}$$

y definimos para $H = -c$ con $c > 3/2$ el hamiltoniano

$$K(q, p) := |z|^2(H + c) = \frac{1}{2}(w\bar{w} + 2z\bar{z}(c - i(z\bar{w} - \bar{z}w)) - 1)$$

Observando que $H = E - L = -c$ y que $L = \frac{i}{2}(q\bar{p} - \bar{q}p) = i(z\bar{w} - \bar{z}w)$ tenemos que

$$-2E = 2(c - i(z\bar{w} - \bar{z}w))$$

El pullback de ω_0 por la transformación de Levi-Civita es

$$\frac{1}{2} \left(d \left(\frac{w}{\bar{z}} \right) \wedge d(2\bar{z}^2) + d \left(\frac{\bar{w}}{z} \right) \wedge d(2z^2) \right) = 2(dw \wedge d\bar{z} + d\bar{w} \wedge dz) = 4\omega$$

Para las ecuaciones de movimiento seguimos usando la misma forma simpléctica ya que el campo hamiltoniano solo se ve afectado por un factor 4. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} \dot{z} &= 2 \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} &= w - 2iz|z|^2 \\ \dot{w} &= -2 \frac{\partial K}{\partial \bar{z}} &= 2Ez - 2iw|z|^2 \end{cases}$$

Consideramos ahora las coordenadas (no simpléticas) dadas por

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= w + i\sqrt{-2E}z \\ \zeta_2 &= \bar{w} + i\sqrt{-2E}\bar{z} \end{aligned}$$

Observar que el cambio de variable es el mismo que utiliza Conley, que presentamos en el capítulo 4.1

Lema 6.3.1. *Los puntos (ζ_1, ζ_2) pertenecen a una esfera de radio $\sqrt{2}$.*

Demostración. Como estamos viendo el conjunto de nivel $K = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 &= |w|^2 - 2E|z|^2 + i \frac{-2E}{(z\bar{w} - \bar{z}w)} + |w|^2 - 2E|z|^2 - i\sqrt{-2E}(z\bar{w} - \bar{z}w) \\ &= 2(|w|^2 - 2E|z|^2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

Ahora expresamos las ecuaciones en las nuevas variables:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \dot{w} + i\sqrt{-2E}\dot{z} = 2Ez - 2iw|z|^2 + i\sqrt{-2E}w + \sqrt{-2E}2z|z|^2 \\ &= i\left(\sqrt{-2E} - 2|z|^2\right)\zeta_1 \\ \dot{\zeta}_2 &= \dot{\bar{w}} + i\sqrt{-2E}\dot{\bar{z}} \\ &= i\left(\sqrt{-2E} + 2|z|^2\right)\zeta_2\end{aligned}$$

Definimos $\psi := \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{-4E} = \frac{2\text{Re}(z\bar{w})}{-4E}$ y consideramos otro cambio de variable:

$$\begin{aligned}\xi_1 &:= e^{-i\psi}\zeta_1 \\ \xi_2 &:= e^{i\psi}\zeta_2\end{aligned}$$

Para las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas primero calculamos $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{1}{-2E}\text{Re}(\dot{z}\bar{w} - z\dot{\bar{w}}) = \frac{1}{-2E}\text{Re}\left(2\bar{w} - z\bar{w}2i|z|^2 + 2E|z|^2 + 2i\bar{w}z|z|^2\right) \\ &= \frac{1}{-2E}\left(|w|^2 + 2E|z|^2\right) \\ &= \frac{1}{-2E}\left(1 + 4E|z|^2\right)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Por lo tanto, las nuevas ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= i\left(\sqrt{-2E} - 2|z|^2 - \dot{\psi}\right)\xi_1 = i\left(\sqrt{-2E} - \frac{1}{4E^2}\right)\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= i\left(\sqrt{-2E} + 2|z|^2 + \dot{\psi}\right)\xi_2 = i\left(\sqrt{-2E} + \frac{1}{4E^2}\right)\xi_2\end{aligned}$$

Observar que al igual que antes se verifica $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 2$, por lo que tenemos el flujo regularizado en una esfera S^3 (de radio $\sqrt{2}$). En estas coordenadas el flujo es una rotación de velocidad angular constante en ξ_1 y en ξ_2 . Específicamente las velocidades angulares son $\left(\sqrt{-2E} - \frac{1}{4E^2}\right)$ y $\left(\sqrt{-2E} + \frac{1}{4E^2}\right)$ respectivamente.

Existen dos órbitas periódicas obvias: $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$. Justamente estas corresponden a las órbitas circulares:

Proposición 6.3.1. *La órbita periódica $\xi_2 = 0$ es la órbita circular retrógrada del problema de Kepler rotatorio. La órbita $\xi_1 = 0$ es la órbita circular directa.*

Demostración. Como ya hemos visto en 5.3 las órbitas periódicas circulares del problema de Kepler son las de excentricidad 0, equivalentemente son aquellas tal que su vector de Runge-Lenz se anula. Como $\|A\|^2 = 1 + 2EL^2$, basta con verificar que las órbitas $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$ verifican esta ecuación.

Si $\xi_1 = 0$, recordando que $0 = K = \frac{1}{2}(|w|^2 - 2|z|^2E - 1)$

$$0 = |\xi_1|^2 = |\zeta_1|^2 = |w|^2 - 2E|z|^2 + \sqrt{-2E}i(z\bar{w} - \bar{z}w) = 1 + \sqrt{-2E}L$$

De esto se deduce que $-2EL^2 = 1$ y por lo tanto $\xi_1 = 0$ órbita circular. Para $\xi_2 = 0$ obtenemos $1 - \sqrt{-2E}L = 0$ de donde se deduce lo mismo.

Por último, para ver que $\xi_1 = 0$ directa y $\xi_2 = 0$ retrógrada alcanza con ver que L es positivo en el primer caso y negativo en el segundo.

□

Construiremos ahora un disco de sección global cuyo borde será la órbita periódica circular retrógrada $\xi_2 = 0$. Definimos

$$T_\theta : \mathbb{D}_{\sqrt{2}}^2 \rightarrow S_{\sqrt{2}}^3 \quad \text{como} \quad T_\theta(r, \phi) = (re^{i\phi}, \sqrt{2-r^2}e^{i\theta})$$

Donde $\mathbb{D}_{\sqrt{2}}^2$ es el disco de radio $\sqrt{2}$ en el plano y $S_{\sqrt{2}}^3 \subset \mathbb{C}^2$ es la esfera de radio $\sqrt{2}$

Si escribimos γ_{ret} a la órbita circular retrógrada, se tiene que el interior de la superficie parametrizada por T_θ es la fibra correspondiente al ángulo θ de

$$S^3 \setminus \gamma_{ret} \rightarrow S^1, \quad (\xi_1, \xi_2) \mapsto \frac{\xi_2}{|\xi_2|}$$

Proposición 6.3.2. *Para cualquier $\theta \in S^1$ se tiene que $D_\theta = T_\theta(\mathbb{D}_{\sqrt{2}}^2)$ es un disco de sección global cuyo borde es la órbita circular retrógrada*

Demostración. Como el borde de D_θ corresponde a $\xi_2 = 0$, ya sabemos que ∂D_θ es la órbita periódica circular retrógrada.

Luego, para ver que todas las órbitas son transversales basta recordar que el flujo son rotaciones en cada coordenada con velocidad angular constante, en particular la velocidad angular de ξ_2 es positiva, por lo que su argumento crece.

Por último, y consecuencia de la misma observación, todas las órbitas vuelven a cortar el disco: si $v(E) = \sqrt{-2E} + \frac{1}{4E^2}$ entonces el tiempo de retorno es exactamente $2\pi/v(E)$ $\square$

6.4. Estructura de contacto y curvas pseudoholomorfas para la búsqueda de superficies de sección

Lo primero a remarcar es que los resultados obtenidos con estrategias relacionadas a curvas pseudoholomorfas son no perturbativos, a diferencia de las estrategias antes vistas en las que pensamos los sistemas no integrables cerca de otro integrable cuando la energía es muy baja. Antes de ir a buscar las superficies de sección necesitamos asegurar, o encontrar, órbitas periódicas. Aquí nos centraremos en el estudio de hipersuperficies en $\mathbb{R}^4$.

En [22] Hofer prueba que el campo de Reeb asociado a una forma de contacto en S^3 siempre tiene una solución periódica. Rabinowitz prueba en [39] que para cualquier hipersuperficie tipo estrella existe una órbita periódica asociada al campo de Reeb. Luego en [13] Ekeland y Hofer prueban que cualquier hipersuperficie estrictamente convexa que contenga al origen admite al menos dos órbitas periódicas. Este tipo de superficie que garantiza dos órbitas periódicas es la que se estudia en [24], trabajo de Hofer, Wysocki y Zehnder, donde muestran que un flujo Hamiltoniano en una hipersuperficie de nivel S compacta estrictamente convexa en $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ admite un disco de sección global. En particular, esto combinado con resultados de Franks en [15] sobre homeomorfismos que preservan área en el anillo, nos da que si existen más de dos órbitas periódicas, existen infinitas. La noción de convexión dinámica es una condición que refiere a cierto índice que se le asocia a órbitas periódicas, el índice de Conley-Zehnder. Resulta que el problema de tres cuerpos restringido entra en estas hipótesis en un rango amplio de variaciones de la masa μ y la energía por debajo del primer crítico (llamado rango de convexidad). Este resultado, que es una extensión de lo anteriormente desarrollado, se prueba en [2]. Además del disco de sección global se encuentra una descomposición de libro abierto en la dinámica del problema de tres cuerpos. En la construcción de este disco de sección transversal es que entran en juego las estructuras complejas, curvas holomorfas e índices como el de Conley-Zehnder asociados a órbitas periódicas.

6.4.1. Enunciados de resultados generales

Para escribir los enunciados de estos resultados precisemos algunas definiciones.

Definición 6.4.1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^4$ hipersuperficie. Decimos que S es estrictamente convexa si existe $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $S = \phi^{-1}(\{0\})$ es un conjunto de nivel regular
- $W = \phi^{-1}(-\infty, 0]$ es acotado y contiene al origen
- El hessiano de ϕ verifica que $\forall z \in S, v \neq 0 \in T_z S$ se verifica $\nabla^2 \phi_z(v, v) > 0$

Observar que en particular una hipersuperficie estrictamente convexa es tipo estrella. Escribimos como λ_0 a la 1-forma canónica en $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (q_i dp_i - p_i dq_i)$$

Recordamos que la restricción de esta forma a hipersuperficies tipo estrella nos da una forma de contacto, que con un abuso de notación también la escribimos como λ_0 . El teorema principal probado en [24] es el siguiente

Teorema 6.4.1. *Si $S \subset \mathbb{R}^4$ hipersuperficie estrictamente convexa y λ_0 forma de contacto en S , entonces el flujo asociado al campo de Reeb tiene dos o infinitas órbitas periódicas.*

Como dijimos, la idea es conseguir una superficie de sección global y utilizar resultados de dinámicas de superficies. Para ello primero se reduce al problema a la esfera y aquí es donde entran técnicas de curvas holomorfas y teorías de índice. Cabe aclarar que aquí la hipótesis de convexidad dinámica es necesaria, ya que para hipersuperficies tipo estrella en general es falso que admite una superficie de sección global. Sin embargo agregando hipótesis si es cierto. El siguiente teorema de Hryniewicz ([27], [28]) apunta a esto:

Teorema 6.4.2. *Consideramos $S \subset \mathbb{R}^4$ hipersuperficie tipo estrella dinámicamente convexa y λ_0 forma de contacto en S . Supongamos que γ es una órbita periódica de período T para el campo de Reeb, tiene género de Seifert 0 (no anudada) y $sl(\gamma) = -1$. Entonces γ es borde de un disco de sección global. Además toda otra órbita periódica que corresponda con un punto fijo en el mapa de retorno de la sección global, también tiene género de Seifert 0 y self-linking number igual a -1.*

Veamos una aproximación informal a la definición de índice de Conley-Zehnder para definir la convexidad dinámica. Si (S, λ) variedad de contacto, $\xi = \ker \lambda$ y R campo de Reeb, tenemos la siguiente descomposición del tangente

$$TpS = \mathbb{R}R(p) \oplus \xi(p)$$

Si ϕ_R flujo asociado al campo de Reeb, se tiene $\phi_R^* \lambda = \lambda$, por lo que el diferencial del flujo preserva la descomposición del tangente y en particular la estructura de contacto:

$$D\phi_R^t(p) : \xi(p) \rightarrow \xi(\phi_R^t(p))$$

Más aún, este diferencial restringido es simpléctico respecto a $d\lambda(p)$

Supongamos que γ órbita periódica de período T del flujo de Reeb y que existe $u : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \rightarrow S$ encaje tal que $u(e^{2\pi i t/T}) = \gamma(t)$. Como el disco es

contractible la estructura de contacto restringida al disco es un producto, por lo que tomamos la trivialización simpléctica

$$\beta : u^*\xi \rightarrow D \times \mathbb{R}^2$$

considerando la estructura simpléctica canónica en el codominio.

Recordamos que una matriz simpléctica es la matriz asociada a transformaciones lineales que preservan cierta forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$. Podemos pensar que la forma simpléctica es la canónica y la matriz asociada a esta forma simpléctica es $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$. Entonces definimos

$$Sp(n) = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : M^T \mathbb{J} M = \mathbb{J}\}$$

Usando el diferencial del flujo construimos el camino de matrices simplécticas

$$\Phi : [0, T] \rightarrow Sp(1), \quad \Phi(t) = [\beta(e^{2\pi i t/T}) \circ D\phi_R^t|_{\xi(\gamma(0))} \circ \beta(1)^{-1}]$$

Se tiene que $\Phi(0) = Id$ y que 1 no es valor propio de $\Phi(T)$ si y solo si la órbita periódica (de período T) γ es no degenerada (ver sección 5.2). En este caso, para órbitas no degeneradas, se le puede asociar a la clase de homotopías de arcos de $\Phi(0)$ a $\Phi(T)$ un entero $\mu(\Phi)$ relacionado a $\pi_1(Sp(1))$ (esta asociación es usando índice de Maslov). Para órbitas degeneradas se define el índice de Conley-Zehnder por otro camino más largo (que coincide en el caso no degenerado) en función del comportamiento de valores propios asociados a cierto operador. Si γ órbita periódica de período T para el campo de Reeb, escribimos el índice de Conley-Zehnder asociado como $\mu_{CZ}(\gamma, T)$. La definición más general que vale también para órbitas periódicas degeneradas, se piensa a la órbita γ como borde de un disco encajado. El índice depende de la clase de homotopía de este encaje y por eso en general, si u es el encaje, al índice lo escribimos como $\mu_{CZ}(\gamma, T, [u])$. Cuando estamos en la esfera S^3 , como $\pi_2(S^3) = 0$, el índice de Conley-Zehnder no depende del disco encajado y en este caso escribimos $\mu_{CZ}(\gamma, T)$.

Definición 6.4.2. Decimos que una forma de contacto λ en S^3 es *dinámicamente convexa* si para toda órbita periódica del flujo de Reeb (γ, T) verifica $\mu_{CZ}(\gamma, T) \geq 3$

Lo siguiente a ver es que un flujo Hamiltoniano en una hipersuperficie S tipo estrella con punto base de la forma estrella en origen, es equivalente a un flujo de Reeb en S^3 . Consideramos $\psi : S^3 \rightarrow S$ dada por la proyección por los rayos $z \mapsto h(z)z$, donde $h : S^3 \rightarrow (0, \infty)$ función C^∞ . Asumiendo que S inmersa en $\mathbb{R}^4$ con forma canónica simpléctica $\omega_0 = d\lambda_0$, definimos

$$\lambda = \psi^*(\lambda_0|_{S^3}) = h^2 \lambda_0|_{S^3}$$

Por lo tanto, ψ identifica a menos de reparametrizaciones temporales la dinámica Hamiltoniana de H en (S, λ_0) con la del flujo de Reeb de (S^3, λ) . En A.2 se puede ver en detalle por qué el campo de Reeb es paralelo al gradiente simpléctico. En [24] se prueba que si S es estrictamente convexa y definimos como arriba $\lambda = h\lambda_0$ forma de contacto en S^3 con h suave dada por la proyección, entonces λ es dinámicamente convexa. Dicho esto podemos enunciar el teorema de [24], con el que se muestra 6.4.1:

Teorema 6.4.3. *Asumimos $\lambda = f\lambda_0$ forma de contacto en S^3 dinámicamente convexa con $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ de clase C^∞ . Si R es el campo de Reeb asociado a λ entonces existe γ_0 órbita periódica de período (minimal) T_0 tal que*

$$\blacksquare \quad \mu_{CZ}(\gamma_0, T_0) = 3$$

- γ_0 es borde de un disco de sección global $\mathcal{D} \subset S^3$ y el mapa de retorno es simpléctico. En particular toda otra órbita periódica γ verifica $\text{link}(\gamma_0, \gamma) \neq 0$
- Existe al menos otra órbita periódicas. Si existen más de dos, contando a γ_0 , entonces hay infinitas.

El último punto de la tesis del teorema es consecuencia de la conjunción de los siguientes teoremas. El primero es el célebre resultado de punto fijo de Brouwer en el disco ([8]):

Teorema 6.4.4. *Todo homeomorfismo del disco abierto que preserve área tiene un punto fijo*

Y el segundo se debe a Franks ([14], [15]):

Teorema 6.4.5. *Si un homeomorfismo que preserva área finita del anillo abierto tiene un punto periódico, entonces tiene infinitos*

Por lo tanto si tenemos un homeomorfismo del disco con un punto fijo, al sacarlo obtenemos un anillo. Es decir, como corolario de estos dos resultados tenemos que un homeomorfismo del disco abierto o bien admite un punto periódico (de hecho fijo), o bien admite infinitos puntos periódicos. Recordamos que toda forma simpléctica define una forma de volumen y el mapa de retorno a una superficie de sección global preserva la forma simpléctica. Es decir, tenemos el siguiente corolario

Corolario 6.4.1. *Supongamos que $\mathcal{D} \subseteq S^3$ disco de sección global para el campo de Reeb R asociado a una forma de contacto λ en S^3 . Entonces el flujo generado por R tiene dos o infinitas órbitas periódicas.*

6.4.2. Aplicación al problema de tres cuerpos

En 3.9 vimos que por debajo del primer valor crítico del hamiltoniano del problema circular de tres cuerpos restringido planar, la componente acotada de la región de hill Σ_c admite una estructura de contacto compatible con la dinámica. Este resultado se encuentra en [3]. Combinando con 6.4.3 se consigue probar en [2] la existencia de un disco de sección transversal en la dinámica de tres cuerpos para cierto rango de masas y energía (siempre por debajo del primer valor crítico). Recordemos el hamiltoniano en cuestión y, similar a como se hizo en 4.1, la regularización de Levi-Civita para el problema de tres cuerpos restringido planar. El hamiltoniano del problema de tres cuerpos restringido planar, en un marco de rotación, poniendo a la luna en el origen se puede escribir

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{(1-\mu)}{|q|} - \frac{\mu}{|q-1|} + (p_2q_1 - p_1q_2) - \mu p_2$$

Con el objetivo de [2], hay ligeros cambios en comparación con las coordenadas que usamos en 4.1. A energía $H = c$ por debajo del primer crítico, regularizamos considerando el mapa de Levi-Civita $(z, w) \mapsto (2z^2, w/\bar{z}) = (q, p)$ y definiendo

$$K_{\mu,c}(z, w) := |z|^2(H(2z^2, w/\bar{z}) - c)$$

Escribimos $\Sigma_{\mu,c}$ a la componente conexa de la región de Hill que contiene a la luna de $H^{-1}(c)$ y $\mathcal{K}_{\mu,c}$ a su correspondiente levantado en $K_{\mu,c}^{-1}(0)$. Observar que $K_{\mu,c}^{-1}(0)$ es una hipersuperficie difeomorfa a la esfera S^3 . El resultado principal de [2] es el siguiente:

Teorema 6.4.6. *Para todo $c < -3/2$ existe $\mu_0 = \mu_0(c) \in [0, 1)$ tal que para todo $\mu \in (\mu_0, 1)$ existe un disco de sección global para $\mathcal{K}_{\mu,c}$.*

En [24] se prueba que si $S \subset \mathbb{R}^4$ es estrictamente convexa con forma de contacto usual, entonces admite disco de sección global para la dinámica de Reeb, pues se garantiza la convexidad dinámica. Por lo tanto la prueba del teorema recién mencionado se reduce a probar lo siguiente

Proposición 6.4.1. *Para $c < -3/2$ existe $\mu_0(c) \in (0, 1)$ de forma tal que*

$$\{(c, \mu) : c < -3/2, \mu \in (\mu_0(c), 1)\} \subset \mathfrak{C}$$

Donde $\mathfrak{C}$ es el rango de convexidad, definido como el conjunto de todos los pares (c, μ) para los cuales $K_{\mu, c}^{-1}(0)$ es estrictamente convexo.

6.4.3. Estructura casi compleja y planos holomorfos

Para la demostración del teorema 6.4.3 luego de encontrar una órbita periódica con índice de Conley-Zehnder igual a 3 y enlazada al resto de órbitas periódicas, se considera la simplectización de la esfera y se considera una familia de planos holomorfos que tienden asintóticamente a esta órbita periódica. Con esta familia de planos holomorfos proyectando en S^3 se consigue una descomposición en libro abierto donde la órbita periódica será el lomo del libro. Seguimos profundizando con definiciones

Una variedad de contacto se puede simplectizar, que básicamente es considerar el producto por $\mathbb{R}$ y en algún sentido extender la forma de contacto para obtener una primitiva de la forma simpléctica. Si (S, λ) variedad de contacto, su simplectización es $(\mathbb{R} \times S, d(e^t \lambda))$. Recordamos que el campo de Reeb asociado a λ en S es aquel que verifica

$$\iota_{R_\lambda} d\lambda = 0, \quad \iota_{R_\lambda} \lambda = 1$$

Para más detalles se puede ver apéndice A.2. Si $M = \mathbb{R} \times S$ simplectización, $\xi = \ker \lambda$ distribución de hiperplanos y R_λ campo de Reeb asociado, podemos escribir

$$TM = \xi \oplus \langle \partial_t, R_\lambda \rangle$$

Recordamos que en la simplectización el campo de Liouville es $X = \partial_t$. Consideramos la siguiente noción para simplectizaciones

Definición 6.4.3. Una estructura SFT (Symplectic Field Theory) casi compleja compatible con λ es un endomorfismo $J : TM \rightarrow TM$ que satisface

- $J^2 = -\text{Id}$. Es decir, J es como “multiplicar por i ”
- $J(\xi) = \xi$ y $J(\partial_t) = R_\lambda$
- J es invariante bajo traslaciones $(t, p) \mapsto (t + s, p)$.
- $g = d\lambda_p(\cdot, J\cdot)$ es un producto interno en $\xi(p)$

Otra forma de pensar a una estructura SFT casi compleja en $M = \mathbb{R} \times S$ es la siguiente. Consideramos $\tilde{J} : \xi \rightarrow \xi$ estructura compleja compatible con la estructura de contacto. Es decir, que verifique $\tilde{J}^2 = -\text{Id}$ y que en cada punto $\underline{p} \in S$, $d\lambda_p(\cdot, \tilde{J}\cdot)$ define un producto interno en $\xi(p)$. Se sabe que siempre existe un mapa $\tilde{J}$ de este tipo. Tomando uno de estos, definimos para $(t, p) \in M = \mathbb{R} \times S$ y $(\tau, v) \in T_{(t, p)}M$:

$$J_{(t, p)}(\tau, v) = (-\lambda_p(v), \tilde{J}_p(\pi(v)) + \tau R_\lambda(p)) \quad (6.2)$$

Donde π proyección a ξ y R_λ campo de Reeb. Esta construcción verifica la definición de estructura SFT casi compleja, y de hecho es equivalente.

En general, definimos una curva pseudoholomorfa de la siguiente manera

Definición 6.4.4. Sea R una superficie de Riemann compacta, $\Gamma \subset R$ subconjunto finito. Si escribimos como i a la estructura compleja de R y $\dot{R} := R \setminus \Gamma$, definimos una J -curva pseudoholomorfa en la variedad con estructura casi compleja (M, J) como un mapa $\tilde{u} : \dot{R} \rightarrow M$ diferenciable que verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$J \circ d\tilde{u} = d\tilde{u} \circ i$$

En particular, cuando $R = \hat{\mathbb{C}}$, $\Gamma = \{\infty\}$, $\dot{R} = \mathbb{C}$, se tiene

$$\tilde{u} : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (M, J)$$

y decimos que la curva es un plano J -complejo:

Para la simplectización $M = \mathbb{R} \times S$ con estructura SFT casi compleja, podemos escribir $\tilde{u} = (a, u)$ con $u : \mathbb{C} \rightarrow S$, $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Si escribimos $z = x + iy$ a los elementos de $\mathbb{C}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + J_u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0$$

Si J es como 6.2, explícitamente las ecuaciones son

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \lambda_u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\lambda_u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \pi_u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \tilde{J}_u \left(\pi_u \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Existen muchas soluciones para estas ecuaciones, aunque no todas serán de nuestro interés. Por ejemplo, si $(\alpha, p) \in M$ podemos tomar

$$\tilde{u}(x, y) = (a(x, y), u(x, y)) := (x + \alpha, \varphi_y^{R_\lambda}(p))$$

Donde $\varphi_y^{R_\lambda}(p)$ es fluir tiempo y por el flujo de Reeb desde el punto p . Como $\pi R_\lambda = 0$ y $\lambda(R_\lambda) = 1$ las ecuaciones se verifican trivialmente. Sin embargo, las soluciones que nos interesan son los llamados planos de energía finita. Veamos

Consideramos la familia de funciones Γ dada por

$$\Gamma = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' > 0\}$$

Definición 6.4.5. Si escribimos $\lambda^\phi(t, p) = \phi(t)\lambda(t, p)$ para $\phi \in \Gamma$, definimos la *energía de Hofer* para el plano $\tilde{u}$ como

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \tilde{u}^*(d\lambda^\phi)$$

En la definición se considera un supremo en la familia Γ ya que esto permite que la definición de energía sea invariante por reparametrizaciones del mismo plano, es decir, componer $\tilde{u}$ con una transformación de Möbius.

Se puede ver que $E(\tilde{u})$ es no negativa, es decir, $E(\tilde{u}) \in [0, +\infty]$. La definición de energía de Hofer se extiende para curvas J -pseudoholomorfas, donde el dominio de integración es la superficie de Riemann pinchada $\dot{R}$. Una propiedad importante de los planos J -holomorfos de energía finita es que convergen en “el infinito” a órbitas periódicas. El siguiente teorema se debe a Hofer y se prueba en [22]:

Teorema 6.4.7. Si $\tilde{u} = (a, u)$ es un plano J -holomorfo no constante de energía finita en $M = \mathbb{R} \times S$ donde (S, λ) variedad de contacto de dimensión 3, entonces $T = \int_{\mathbb{C}} u^*(d\lambda) \in (0, \infty)$ y existe una sucesión r_k tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(r_k e^{2\pi i t}) = \gamma(tT)$$

con γ una órbita periódica para el campo de Reeb y la convergencia en la topología C^∞ .

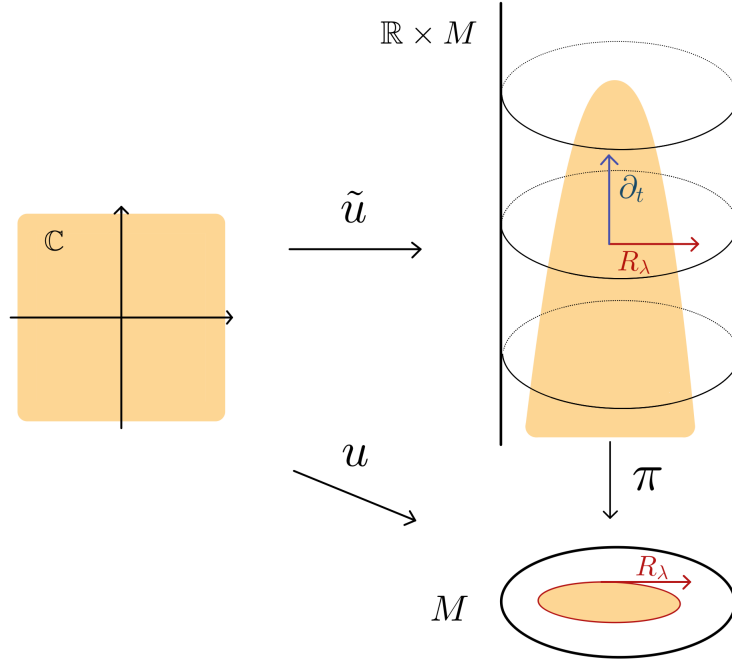


Figura 6.2: Un plano de energía finita tiende asintóticamente a una órbita periódica

Si bien en el teorema se asume la existencia de un plano de energía finita, tenemos garantizada la existencia en el caso que nos compete (y en otros). Si λ cualquier forma de contacto en S^3 , en [21] Hofer prueba que (S^3, λ) admite un plano de energía finita no trivial.

Las propiedades de la órbita periódica límite tienen influencia sobre la geometría del plano holomorfo. En [23] se prueba que si la órbita periódica límite γ para el campo de Reeb es no degenerada y el índice de Conley-Zehnder de γ es 3, entonces $u(\mathbb{C}) \cap \gamma(\mathbb{R}) = \emptyset$ y $u : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \gamma(\mathbb{R})$ es un encaje.

Además, este resultado tiene su extensión para el caso de curvas pseudoholomorfas en general, es decir, cuyo dominio es una superficie de Riemann R compacta pinchada en $\Gamma \subset R$ (conjunto finito de puntos). Si $p \in \Gamma$, un entorno de p en $\dot{R} = R \setminus \Gamma$ se puede ver como un entorno del infinito en $\mathbb{C}$, es decir, como el complemento de un compacto en $\mathbb{C}$. Adaptando el teorema, se tiene que si la energía de $\tilde{u} : \dot{R} \rightarrow \mathbb{R} \times S$ es finita en un entorno de la pinchadura p , entonces, también cerca de la pinchadura p que entendemos como $\infty \in \mathbb{C}$, se tiene que el siguiente límite es finito

$$T = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S^1} u(re^{2\pi i t})^* \lambda$$

Cuando $T > 0$ se dice que la pinchadura p es positiva, y cuando $T < 0$ negativa. Por otro lado cuando $T = 0$ el teorema de remoción de singularidad de Gromov asegura que justamente la singularidad puede ser removida. Volviendo al caso de planos J -holomorfos, en estos casos la pinchadura (es decir ∞) siempre es positiva y en general toda curva pseudoholomorfa tiene una pinchadura positiva. En [23] se profundiza en esto.

A continuación un ejemplo que sintetiza el uso que le queremos dar a la herramienta de planos holomorfos. El ejemplo es el oscilador armónico, que corresponde a la regularización de Levi-Civita de Kepler (2.3.1).

Ejemplo de foliación por planos holomorfos: Hopf - oscilador armónico

Consideramos $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$. Escribimos $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ como $z_i = q_i + ip_i$. En estas coordenadas la forma canónica simpléctica se escribe

$$\lambda_0 = \frac{i}{2} \sum_1^2 (z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i)$$

Escribimos $\omega_0 = d\lambda_0$ forma canónica simpléctica. El campo de Liouville X es quien cumple $\lambda_0 = \iota_X \omega$ y está dado por

$$X = \frac{1}{2} (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}) = \sum_1^2 q_i \partial_{q_i} + p_i \partial_{p_i}$$

La restricción de λ_0 a S^3 nos da una forma de contacto pues el campo de Liouville es radial. El campo de Reeb en S^3 (que está dado por las condiciones $\lambda_0(R) = 1$ y $\iota_R \omega_0 = 0$) coincide con el hamiltoniano del oscilador armónico $H(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$. Es decir, en coordenadas el campo de Reeb en S^3 es

$$R(z_1, z_2) = R(q_1, p_1, q_2, p_2) = (-p_1, q_1, -p_2, q_2) = (iz_1, iz_2)$$

En general en estas coordenadas la forma canónica simpléctica ω_0 verifica

$$\omega_0(z_1, z_2)(v, w) = v\mathbb{J}w$$

Donde $\mathbb{J}$ es la siguiente matriz cuadrada que corresponde con la multiplicación por i

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora symplectizamos y consideramos una identificación natural con los complejos que nos da la estructura SFT casi compleja:

Proposición 6.4.2. *El siguiente mapa es un symplectomorfismo*

$$\psi : (\mathbb{R} \times S^3, d(e^t \lambda_0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \omega_0), \quad (t, x) \rightarrow e^{t/2} x$$

Más aún, la estructura compleja standard nos define una estructura SFT casi compleja en $\mathbb{R} \times S^3$.

Demostración. Ver que es un symplectomorfismo es simplemente computar el diferencial de ψ y corroborar que $\psi^*\omega_0 = d(e^t\lambda_0)$.

Veamos ahora que con un pullback se induce la estructura casi compleja J dada por

$$J_{(t,x)}(v) = d\psi_{e^{t/2}x}^{-1}(id\psi_{(t,x)}(v))$$

Podemos verificar las condiciones para la estructura SFT casi compleja en $\mathbb{C}^2$. Primero vemos que la multiplicación por i es una estructura compleja en $\mathbb{C}^2$. Se tiene que $iX = R$ campo de Reeb y que si $\xi = \ker \lambda_0$ se cumple $i\xi = \xi$. Por último hay que ver que multiplicar por i es invariante por traslación. Trasládase en la simplectización es moverse en la coordenada de $\mathbb{R}$, que vía ψ esto se traduce a moverse radialmente (es decir, por homotecias). Cualquiera de estas dos acciones corresponde a fluír por el campo de Liouville en los dominios correspondientes. En $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ el flujo radial generado por X es simplemente una homotecia de razón $e^{t/2}$. Luego, trivialmente se verifica

$$(d\phi_X^t)^{-1}\mathbb{J}(d\phi_X^t) = \mathbb{J}$$

□

Por lo tanto, con la traducción ψ podemos construir curvas holomorfas en la simplectización definiéndolas en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Observar que la inversa de ψ está dada por

$$\begin{aligned} \psi^{-1} &:= (\pi_{\mathbb{R}}, \pi_{S^3}) : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^3 \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left(\log(|z_1|^2 + |z_2|^2), \frac{(z_1, z_2)}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Si tomamos f, g funciones meromorfas con singularidades en $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}$ definimos

$$u : \mathbb{C} \setminus \{q_1, \dots, q_k\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad z \mapsto (f(z), g(z))$$

Y componiendo con ψ^{-1} obtenemos una curva holomorfa en la simplectización. Si alguna de las funciones meromorfas tiene una singularidad esencial en z_0 entonces el mapa $\pi_{\mathbb{R}} \circ u(z_0 + re^{2\pi it})$ oscila entre $-\infty$ y ∞ . Sin embargo, si f, g son funciones racionales, cerca de la singularidad sí hay convergencia a un infinito en la componente real y convergencia a una órbita periódica en la componente de S^3 , que corresponde con una fibra de la fibración de Hopf. Justamente es porque en este caso la energía de Hofer asociada es finita.

Para este ejemplo, fijado $a \neq 0 \in \mathbb{C}$ definimos

$$u_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad u_w(z) = (z, w)$$

Si sumamos u_0 definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ obtenemos una foliación de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ por curvas holomorfas. Si consideramos coordenadas cilíndricas para $\mathbb{C}$ dadas por

$$c : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad c(\theta, r) = e^{r+i\theta}$$

definimos

$$\widetilde{U}_w : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^3, \quad \widetilde{U}_w(r, \theta) = \psi^{-1} \circ u_w \circ c(r, \theta)$$

En particular se tiene

$$U_w := \pi_{S^3} \circ \widetilde{U}_w(\theta, r) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + e^{-2r}|w|^2}}, \frac{e^{-r}w}{\sqrt{1 + e^{-2r}|w|^2}} \right)$$

Observar que $\lim_{r \rightarrow -\infty} U_w(\theta, r) = (0, 0)$ y $\lim_{r \rightarrow +\infty} U_w(\theta, r) = (e^{i\theta}, 0)$. Es decir, U_w parametriza un disco cuyo borde es la fibra de Hopf $(e^{i\theta}, 0)$ (ver 2.3.1). Esto es independiente de w por lo que la familia de planos holomorfos $\{U_w\}_{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$ nos da una foliación por planos holomorfos que comparten un borde correspondiente a una órbita periódica del flujo de Reeb. Más aún, cada uno de estos discos es transversal al flujo (recordar que las fibras de Hopf corresponden a las preimágenes de $(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$). De hecho, el mapa de retorno en cualquiera de estos discos es la identidad, pues todas las órbitas del oscilador armónico son periódicas y del mismo período. Formalmente lo que conseguimos es una descomposición en libro abierto S^3 donde las páginas son discos y el lomo del libro S^1 .

Caso de no degeneración: elipsoide irracional

Cabe destacar que la órbita periódica límite de la descomposición por planos holomorfos de arriba es una órbita periódica degenerada. Modificando un poco el oscilador armónico tenemos el caso del elipsoide, que en el caso irracional sí obtenemos una órbita periódica no degenerada como lomo de una descomposición en libro abierto y borde de un disco de sección transversal. La dinámica en el elipsoide es la dinámica hamiltoniana en el conjunto de nivel 1 del hamiltoniano

$$H(z_1, z_2) = \frac{|z_1|^2}{a} + \frac{|z_2|^2}{b}$$

El elipsoide $H^{-1}(\{1\})$ es una variedad de contacto ya que el campo de Liouville, que es radial, es transversal. El flujo de Reeb (que recordamos es una reparametrización del flujo hamiltoniano) queda dado por

$$\phi_t^H(z_1, z_2) = (e^{2it/a} z_1, e^{2it/b} z_2)$$

Cuando a/b es irracional, tenemos solo dos órbitas periódicas (no degeneradas) que corresponden a tomar $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$. La familia de planos holomorfos en Hopf teniendo como lomo a la órbita periódica $(e^{it}, 0)$ tiene su análogo en el caso del elipsoide, donde en este caso el lomo será $(\sqrt{a}e^{2it/a}, 0)$ órbita periódica no degenerada. Veremos esto más adelante.

A continuación profundizamos en el concepto de descomposición en libro abierto.

6.4.4. Descomposición en libro abierto

Definición 6.4.6. Sea M variedad diferenciable cerrada y $B \subseteq M$ subvariedad encajada con fibrado normal trivial (es decir que B admite un entorno tubular encajado en M). Una *descomposición en libro abierto* (concreta) para M con lomo B es un fibrado $\pi : M \setminus B \rightarrow S^1$ de forma tal que en un entorno tubular de B la proyección π en coordenadas polares es

$$\pi(b, r, \theta) = \theta, \quad b \in B, \quad r \in (0, \delta), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

A las fibras clausuradas $P_\theta := \overline{\pi^{-1}(\theta)}$ las llamamos *páginas del libro abierto*. En particular los bordes de las páginas son el lomo del libro: $\partial P_\theta = B$

Decimos que la definición de arriba es de una descomposición concreta ya que también se puede definir de forma abstracta dando información topológica del pegado de las páginas:

Definición 6.4.7. Consideramos P variedad con borde $B := \partial P$ y $\varphi : P \rightarrow P$ difeomorfismo con $\varphi \equiv 1$ en entorno de B . Si P_φ es el mapping torus asociado:

$$P_\varphi = \frac{P \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}$$

definimos el libro abierto de página P y monodromía φ como

$$M = OB(P, \varphi) := (B \times \mathbb{D}^2) \cup_{\partial} P_\varphi$$

Donde el pegado por el borde es a través de la fibración obvia $P_\varphi \rightarrow S^1$ con el mapa $(b, r, \theta) \mapsto \theta$.

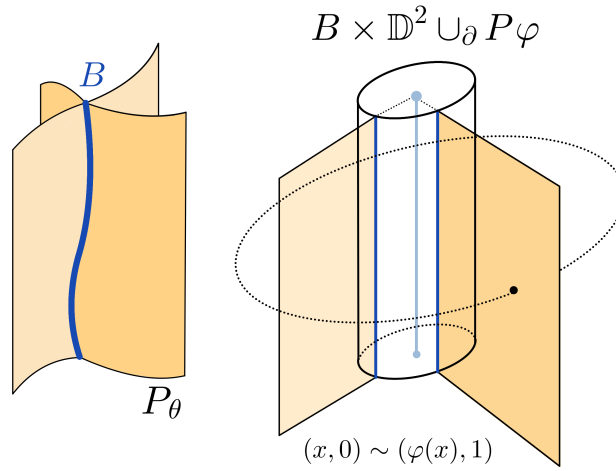


Figura 6.3: Descomposición en libro abierto

Observación 6.4.1. La noción abstracta de libro abierto naturalmente cumple con la definición concreta. Recíprocamente toda descomposición en libro abierto concreta se puede expresar en términos de la versión abstracta donde la elección de la monodromía es a menos de isotopías.

Recién identificamos una descomposición en libro abierto de la fibración de Hopf, donde las hojas son discos y en particular el interior de estos discos son la imagen de planos holomorfos. Antes, ya habíamos encontrado una descomposición en libro abierto concreta de S^3 cuando probamos la existencia de discos de sección transversal en el problema de kepler rotatorio regularizado (6.3), donde las páginas también son discos. De hecho, toda descomposición en libro abierto con discos como páginas tiene que ser una descomposición trivial, es decir, donde la monodromía es isotópica a la identidad y la variedad resulta la esfera:

$$S^3 = OB(\mathbb{D}^2, Id)$$

Esto es consecuencia de que todo mapa del disco en el disco que fije el borde es isotópico a la identidad. Volvamos a construir la descomposición concreta que es la misma que aparece en 6.3: Si $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ y $B = \{(z_1, z_2) : z_1 = 0, |z_2| = 1\}$ es el lomo (que corresponde a la órbita retrógrada en la regularización de kepler rotatorio o kepler usual), consideramos la proyección a la fibra

$$\pi : S^3 \setminus B \rightarrow S^1, \quad \pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{|z_1|}$$

Las páginas de esta proyección son discos que son todos transversales a la fibración de Hopf.

No es la única descomposición en libro abierto de S^3 . En la fibración de Hopf también nos aparece naturalmente una descomposición en libro abierto donde las páginas son anillos, y ésta descomposición es la que aparece en el estudio del problema de Kepler regularizado (2.3.1). La versión abstracta de esta descomposición se puede escribir como

$$S^3 = OB(\mathbb{D}^*S^1, \tau)$$

Donde $\mathbb{D}^*S^1 \simeq S^1 \times [0, 1]$ anillo y τ es el Dehn twist. La versión concreta, que es la que aparece naturalmente en el fibrado, está dada por

$$\pi : S^3 \setminus L \rightarrow S^1, \quad \pi(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|}$$

Siendo $L = \{(z_1, z_2) : z_1 z_2 = 0\}$ el link de Hopf. Recordamos que el anillo de sección transversal que encontramos en 2.3.1 está dado por

$$M = \{(z_1, z_2) : \arg(z_1) + \arg(z_2) = 0\}$$

Y el mapa π en notación polar para $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ es justamente

$$\tilde{\pi}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \theta_1 + \theta_2$$

En particular $M = \tilde{\pi}^{-1}(0)$.

Como comentario, es claro que la monodromía determina el pegado y por lo tanto la variedad resultante en la versión abstracta de libro abierto. Si bien todos los mapas que fijan el borde del disco son isotópicos, no así con el anillo. Por ejemplo, si tomamos como página a un anillo pero ahora tomamos como monodromía a la identidad, obtenemos otra variedad:

$$S^1 \times S^2 = OB(\mathbb{D}^*S^1, Id)$$

En cuanto a la existencia de descomposición en libro abierto en variedades de dimensión tres en general, se prueba en [4] lo siguiente:

Teorema 6.4.8. *Toda variedad cerrada de dimensión 3 orientada admite una descomposición en libro abierto.*

En relación a un flujo en una variedad M , definimos descomposición en libro abierto adaptada:

Definición 6.4.8. Dado $\phi_t : M \rightarrow M$ flujo en una variedad diferenciable orientada M de dimensión impar y (π, B) descomposición concreta en libro abierto de M , decimos que el libro abierto está adaptado a la dinámica ϕ_t si se verifica

- B es ϕ_t invariante
- ϕ_t es positivamente transversal en el interior de las páginas
- $\forall x \in M \setminus B$ y P página, la órbita de x intersecta a P a pasado y a futuro.

En particular el último punto implica que todas las páginas son hipersuperficies de sección transversal. Volviendo al contexto de la geometría de contacto y simpléctica, veamos cómo se ajusta la estructura de contacto a la descomposición en libro abierto. La definición que sigue es equivalente a la de libro abierto adaptado cuando la dinámica es la inducida por un campo de Reeb en una variedad de contacto.

Definición 6.4.9. Dada (M, ξ) variedad de contacto orientada y (π, B) descomposición concreta en libro abierto de M , decimos que ξ está *soportada* por la descomposición (π, B) si existe una forma de contacto positiva α para ξ (que llamamos forma de Giroux) tal que

1. $\alpha_B := \alpha|_B$ es una forma de contacto positiva en B
2. $d\alpha_P$ es una forma simpléctica positiva en el interior de cada hoja P .

Recordar que en general una forma de contacto positiva α en una variedad de contacto de dimensión $2n - 1$ es aquella tal que la forma de volumen $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ toma valores positivos en una base positiva. Si escribimos R_α al campo de Reeb las condiciones de la definición son equivalentes respectivamente a

1. $R_\alpha|_B$ es tangente a B
2. R_α es transversalmente positivo en el interior de las hojas

En los dos ejemplos arriba mencionados en S^3 , el campo de Reeb corresponde a la regularización del campo Hamiltoniano correspondiente al problema de Kepler regularizado o Kepler en rotación regularizado. Se puede ver que en ambos casos la estructura de contacto está soportada en la descomposición en libro abierto.

Recordando que dos estructuras de contacto son isotópicas si existe un camino de estructuras de contacto que las conecta, se tiene el siguiente resultado probado por Giroux en [17]:

Teorema 6.4.9. *Toda estructura de contacto admite una descomposición en libro abierto soportada en dicha estructura. Recíprocamente, toda descomposición en libro abierto soporta una única clase de isotopía de estructuras de contacto.*

Como hemos dicho, para probar el teorema 6.4.3 se busca una descomposición en libro abierto, para el cual las hojas serán planos holomorfos de energía finita que tiendan asintóticamente al lomo del libro. Para la construcción de esta descomposición nos apoyamos en el siguiente teorema (6.4.10) que aplica para el elipsoide. Este se basa en encontrar una órbita periódica especial. En función de esta órbita se encuentra otra órbita especial para (S^3, λ) que a su vez también garantizará una descomposición en libro abierto.

Teorema 6.4.10. *Consideramos (M, λ) variedad de contacto compacta, orientada y conexa de dimensión 3. Asumimos que existe B órbita periódica de período (minimal) T que es borde de un disco encajado D cuyo interior es transversal al flujo de Reeb R . Además asumimos $\mu_{CZ}(B, T, D) = 3$ y que T es el período más chico de todas las órbitas periódicas contractibles. Entonces, dada una estructura compleja compatible J en $\xi = \ker \lambda$, existe un difeomorfismo*

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow M \setminus B$$

de forma tal que cada mapa $u = \Phi(\tau, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow M \setminus B$ es un encaje transversal a R y converge asintóticamente en $C^\infty(S^1)$ a B :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(re^{2\pi it}) = B(Tt)$$

Además, u es la proyección de un plano de energía finita en M y $d\lambda|_{u(\mathbb{C})}$ es no degenerada y satisface $\int_{\mathbb{C}} u^ d\lambda = T$.*

Como dijimos, la estrategia para probar 6.4.3 será, en el caso no degenerado, primero ver que el caso del elipsoide irracional entra en las hipótesis del teorema 6.4.10. Luego interpolar la dinámica original con la del elipsoide haciendo uso de la descomposición en libro abierto del elipsoide. Esto permitirá encontrar una órbita especial para la dinámica original que también implicará por un teorema (a enunciar) en [23] la existencia de una descomposición en libro abierto por planos holomorfos con lomo esta órbita periódica especial.

6.4.5. Interpolación con elipsoide irracional

El objetivo es encontrar una órbita especial P para el problema original de forma de entrar en las hipótesis del siguiente teorema que se encuentra en [23], similar a 6.4.10.

Teorema 6.4.11. *Consideramos (S^3, λ) variedad de contacto con $\lambda = f\lambda_0$ con $f > 0$ suave. Asumimos que existe una órbita P_0 no degenerada para campo de Reeb R_λ con período T_0 , que es borde de un disco encajado transversal a R_λ y $\mu_{CZ}(P_0, T_0) = 3$. Si toda otra órbita periódica P de período $T < T_0$ es también no degenerada y $\mu_{CZ}(P, T) \geq 3$, entonces P_0 genera la siguiente descomposición en libro abierto.*

Si $\tilde{J}$ estructura casi compleja para $\xi = \ker \lambda$ compatible con $d\lambda$, entonces existe un difeomorfismo

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^3 \setminus P_0$$

que verifica lo siguiente: Para todo $\tau \in S^1$ el encaje $u := \Phi(\tau, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow S^3 \setminus P_0$ satisface

$$\begin{aligned} u(\mathbb{C}) &\pitchfork R_\lambda \\ d\lambda|_{u(\mathbb{C})} &\text{ no degenerada y } \int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda = T_0 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} u(re^{2\pi it}) &= P_0(T_0 t) \text{ en } C^\infty(S^1) \end{aligned}$$

Además, el mapa u verifica

$$\pi u_x + J(u)\pi u_y = 0, \quad d[(u^* \lambda) \circ i] = 0$$

La estrategia es la siguiente:

- Primero veremos que en el elipsoide irracional tenemos una órbita especial borde de un disco que corresponde a la proyección de un plano holomorfo
- Luego, interpolamos con el elipsoide en el cilindro $\mathbb{R} \times S^3$ de forma tal que en $(-\infty, -2) \times S^3$ estemos en el caso de la simplectización de (S^3, λ) y en $(2, +\infty)$ estemos en el caso de la simplectización del elipsoide irracional
- En esta interpolación queremos empujar el plano holomorfo especial del elipsoide por el cilindro de forma tal que en el límite encontremos una curva pseudoholomorfa cuyo borde asintótico corresponda a una órbita periódica especial del problema original (S^3, λ)
- Por último vamos a generar otro plano holomorfo que tienda asintóticamente a esta órbita especial y esté enteramente contenido en la región del cilindro que corresponde a la dinámica de (S^3, λ)

Escribimos al elipsoide irracional como

$$E = \{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{|z_1|^2}{r_1^2} + \frac{|z_2|^2}{r_2^2} = 1\}$$

asumiendo que $r_1 < r_2$ y r_1^2/r_2^2 irracional. Se tiene que (E, λ_0) es variedad de contacto y la dinámica de Reeb es equivalente (proyectando por rayos) a la dinámica de la esfera (S^3, λ_E) donde

$$\lambda_E = f_E \lambda_0, \quad f_E = \left(\frac{|z_1|^2}{r_1^2} + \frac{|z_2|^2}{r_2^2} \right)^{-1/2}$$

Escribimos R_E al flujo de Reeb para λ_E en S^3 . Existen exactamente dos órbitas periódicas que escribimos como $P_0 = S^1 \times \{0\}$ y $P_1 = \{0\} \times S^1$. Son no degeneradas y los períodos de P_0 y P_1 son $T_0 = \pi r_1^2$ y $T_1 = \pi r_2^2$ respectivamente. Sus índices se pueden calcular y son

$$\mu_{CZ}(P_0, T_0) = 3, \quad \mu_{CZ}(P_1, T_1) = 2k + 1 \geq 5$$

donde k queda determinado por $k < 1 + (r_2/r_1)^2 < k + 1$.

En particular P_0 es el borde del disco encajado $\mathcal{D} \subset S^3$ dado por

$$\mathcal{D} = \{z \in S^3 : z = (z_1, t), t \in [0, 1]\}$$

Este disco es transversal al flujo de Reeb. Más aún, la órbita periódica P_0 verifica todas las hipótesis del teorema 6.4.10. Para ver el cómputo de estos índices y más detalles ver [23]. Por lo tanto P_0 es el límite asintótico de un plano de energía finita.

La estructura SFT casi compleja en la simplectización del elipsoide es la siguiente. En $M = \mathbb{R} \times S^3$ definimos $J_E(a, p) : T_{(a,p)}M \rightarrow T_{(a,p)}M$ como

$$J_E(a, p)(\alpha, v) = \left(-\lambda_E(p)(v), \tilde{J}(p)\pi(v) + \alpha R_E(p) \right) \quad (6.4)$$

Donde π es la proyección sobre ξ y $\tilde{J}$ estructura compleja compatible en ξ . Se deduce de 6.4.10 y resultados de [23] la siguiente proposición que organiza lo que venimos diciendo:

Proposición 6.4.3. *Sea (P_0, T_0) la órbita periódica para R_E en (S^3, λ_E) con índice $\mu_{CZ}(P_0, T_0) = 3$. Entonces existe un plano de energía finita $\tilde{v} = (a, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ con las siguientes propiedades*

- *Verifica ecuaciones de Cauchy-Riemann: $\tilde{v}_x + J_E(\tilde{v})(v_y) = 0$*
- *La energía de Hofer nos da el período: $E(\tilde{v}) = T_0 = \int_{\mathbb{C}} v^* d\lambda_E$*
- *La parte real diverge: $a(re^{2\pi it}) \rightarrow +\infty$*
- *Se tiende asintóticamente a P_0 : $\lim_{r \rightarrow +\infty} v(re^{2\pi it}) = P_0(T_0 t)$ en $C^\infty(S^1)$*

Además $v(\mathbb{C}) \cap P_0 = \emptyset$ y v es un encaje transversal al flujo de Reeb.

El plano $\tilde{v}$ no es el único que verifica esto. En [23] se muestra que existe una familia compacta de estas soluciones indexadas en S^1 que dan lugar a una descomposición en libro abierto de $S^3 \setminus P_0$.

Para usar el teorema 6.4.10 hay que encontrar una órbita especial que verifique las hipótesis. Para encontrarla en (S^3, λ) es que nos apoyamos en el caso del elipsoide. Específicamente interpolaremos con una función monótona las formas dinámicamente convexas $\lambda = f\lambda_0$ y λ_E .

Dada $\lambda = f\lambda_0$ con $f > 0$, podemos considerar un elipsoide irracional suficientemente grande de forma tal que se verifique que $f < f_E$. Luego tomamos una función $h : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ que verifique lo siguiente

$$\begin{aligned} f(p) &\leq h(a, p) \leq f_E(p) \\ h(a, p) &= f(p), \quad a \leq -2 \\ h(a, p) &= f_E(p), \quad a \geq 2 \\ \partial_a h(a, p) &\geq 0, \quad a \in \mathbb{R} \\ \partial_a h(a, p) &\geq \sigma > 0, \quad a \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Definimos para cada $a \in \mathbb{R}$ la forma de contacto λ_a en S^3 dada por

$$\lambda_a := h(a, \cdot)\lambda_0$$

Si escribimos $R_a := R_{\lambda_a}$ campo de Reeb asociado, observar

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda, \quad R_a = R_\lambda \quad \text{si } a \leq -2 \\ \lambda_a &= \lambda_E, \quad R_a = R_E \quad \text{si } a \geq 2 \end{aligned}$$

Apuntamos a que el cilindro $\mathbb{R} \times S^3$ coincida en $+\infty$ con la simplectización del elipsoide y en $-\infty$ con la simplectización de (S^3, λ) . Seguimos construyendo este cilindro.

La estructura de contacto $\ker \lambda_a = \ker \lambda_0$ definida en S^3 es independiente de a . Escribimos como ξ a esta estructura de contacto y definimos la proyección

$$\pi_a : TS^3 = \xi \oplus \mathbb{R}R_a \rightarrow \xi$$

Tomamos una familia $a \mapsto J_a$ de estructuras casi complejas en ξ compatibles con la estructura simpléctica $d\lambda_a$ en ξ que verifiquen

$$\begin{aligned} J_a &= J_{-2} \quad \text{si } a \leq -2 \\ J_a &= J_E \quad \text{si } a \geq 2 \end{aligned}$$

donde J_E es la definida en 6.4. Con esto definimos una estructura SFT casi compleja en $\mathbb{R} \times S^3$ dada por $\hat{J}$:

$$\hat{J}(a, p)(\alpha, v) = (-\lambda_a(p)v, J_a(p)\pi_a v + \alpha R_a(p))$$

Por razones técnicas en la prueba luego se relajan las condiciones que se le pide a $\hat{J}$ y se toma una estructura SFT casi compleja $\bar{J}$ que verifica $\bar{J} = \hat{J}$ para $|a| \geq 1$ y en el medio, cuando $|a| < 1$ se le pide a $\bar{J}$ que sea compatible con la estructura simpléctica $d(h\lambda_0)$ en $[-1, 1] \times S^3$.

Por lo tanto tenemos un cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ dotado de una estructura SFT casi compleja $\bar{J}$ que coincide con las estructuras de las simplectizaciones del elipsoide irracional cuando $a \geq 2$ y con el caso original (S^3, λ) cuando $a \leq -2$.

El siguiente paso es el estudio de planos holomorfos en este cilindro. Es decir, consideramos mapas

$$\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$$

que, escribiendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\tilde{u}_x + \bar{J}(\tilde{u})\tilde{u}_y = 0$$

Tenemos que redefinir lo que es la energía para estos planos holomorfos pues lo teníamos definido para simplectizaciones. Escribimos

$$\Lambda = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1) \mid \varphi'(s) \geq 0, \varphi|_{[-1, 1]} \equiv \frac{1}{2} \text{ cte}\}$$

Considerando las siguientes 1-formas en $\mathbb{R} \times S^3$

$$\begin{aligned}\tau_\varphi(a, p)(\alpha, v) &= \varphi(a)\lambda_a(p)(v) \\ \tau(a, p)(\alpha, v) &= \lambda_a(p)(v)\end{aligned}$$

Definimos la energía de Hofer de $\tilde{u}$ como

$$E(\tilde{u}) := \sup_{\varphi \in \Lambda} \int_{\mathbb{C}} \tilde{u}^* d\tau_\varphi$$

En particular $\tilde{u}^* d\tau_\varphi$ es no negativa si $\tilde{u}$ verifica Cauchy-Riemann, y por lo tanto también la energía.

Definición 6.4.10. Un *plano generalizado de energía finita* es un plano $\bar{J}$ -holomorfo $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ que verifique $E(\tilde{u}) < +\infty$

El conjunto de planos $\bar{J}$ -holomorfos de energía finita es no vacío. Para ver esto, si $\tilde{v} = (b, v)$ es la solución del caso del elipsoide en 6.4.3, tenemos que b acotada inferiormente. Por lo tanto existe $c > 0$ constante de forma tal que $a(z) = b(z) + c > 2$. Como J_E es independiente de a , el mapa $\tilde{u} = (a, v)$ también es una solución para el caso del elipsoide en 6.4.3. Luego, $\tilde{u}$ queda metido en la parte del cilindro que coincide con la simplectización del elipsoide irracional y aquí la definición de energía para el plano generalizado coincide con la clásica, por lo tanto tiene energía finita.

También se recupera la siguiente propiedad para planos generalizados de energía finita, cuya demostración se puede encontrar en [24].

Proposición 6.4.4. Si $\tilde{u} = (a, u)$ plano generalizado de energía finita, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow +\infty} a(re^{2\pi it}) &= +\infty \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} u(re^{2\pi it}) &= P(Tt)\end{aligned}$$

donde la convergencia es en $C^\infty(S^1)$, P es una órbita periódica de período T para el campo de Reeb R_E del elipsoide irracional (S^3, λ_E) . Además

$$T = E(\tilde{u}) = \int_{\mathbb{C}} \tilde{u}^* d\tau$$

Recordamos que las dos órbitas periódicas del elipsoide irracional son no degeneradas. Por lo comentado anteriormente sobre la existencia de algún plano generalizado de energía finita podemos tomar $\tilde{u}$ como un trasladado del plano de energía finita especial que nos da la proposición 6.4.3, que tiende asintóticamente a la órbita periódica P_0 . Llamamos $\tilde{u}_E$ a este plano que sabemos que es un encaje. De hecho, usando un argumento con homotopías se puede probar que todo plano generalizado de energía finita que tiende asintóticamente a P_0 resulta un encaje. Consideramos el conjunto de los planos generalizados de energía finita que tiendan asintóticamente a esta órbita periódica

$$\Theta = \{\tilde{u} : E(\tilde{u}) < +\infty, a(re^{2\pi it}) \rightarrow +\infty, u(re^{2\pi it}) \rightarrow P_0(T_0 t)\}$$

En particular se tiene que $E(\tilde{u}) = T_0$ para todo $\tilde{u} \in \Theta$.

Proposición 6.4.5. *Todo elemento $\tilde{u} \in \Theta$ es un encaje y si $\tilde{v}, \tilde{u}$ dos planos distintos de Θ , tienen imágenes disjuntas: $\tilde{v}(\mathbb{C}) \cap \tilde{u}(\mathbb{C}) = \emptyset$.*

Luego de considerar algunas propiedades y lemas técnicos sobre el conjunto Θ , se prueba lo siguiente:

Proposición 6.4.6. *Existe una sucesión $(\tilde{u}_k) = (a_k, u_k) \subset \Theta$ que verifica*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\nabla \tilde{u}_k| \xrightarrow{k} +\infty, \quad \inf_{z \in \mathbb{C}} a_k(z) \xrightarrow{k} -\infty$$

De hecho reparametrizando y normalizando podemos asumir que

$$\begin{aligned} a_k(0) &= \min_{z \in \mathbb{C}} a_k(z) \xrightarrow{k} -\infty \\ a_k(z) &\text{ acotada para todo } z \text{ con } |z| > 1 \\ \max_{|z| > 1+\epsilon} |\nabla \tilde{u}_k(z)| &\leq C \text{ cte} \end{aligned}$$

Si z_k sucesión de complejos tales que $|\nabla(\tilde{u}_k)| \rightarrow +\infty$, como z_k debe estar en el disco clausurado (a menos de tomar subsucesión) se tiene que z_k acumula. A estos puntos de acumulación los llamamos *bubble points*. Se puede ver que estos son finitos por un tema de pérdida de energía y escribimos Γ al conjunto de bubble points.

A menos de tomar subsucesión, tenemos que $\tilde{u}_k$ converge en $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ a una superficie casi compleja de energía finita (no constante) que llamamos

$$\tilde{u} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$$

Recordamos que estamos asumiendo que las órbitas periódicas de R_λ son todas no degeneradas. Esto, además de asumir que λ es dinámicamente convexa, implicará que la geometría de $\tilde{u}$ es muy simple. Se prueba que $\tilde{u}$ es un encaje. Lo que ocurre con $\tilde{u} = (a, u)$ es que en las pinchaduras $\Gamma = \{z_1, \dots, z_m\}$ y en ∞ la componente a tiene el siguiente comportamiento

$$\lim_{z \rightarrow z_i} a_i(z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} a(z) = +\infty$$

En particular, cerca de las pinchaduras la superficie casi compleja se encuentra en la región del cilindro $\mathbb{R} \times S^3$ que corresponde con la dinámica (S^3, λ) .

Lema 6.4.1. *Dado $R > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} a(z) &\leq -R \text{ si } 0 < |z - z_j| \leq \epsilon \\ a(z) &\rightarrow +\infty \text{ si } |z| \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

donde $z_j \in \Gamma$ bubble point.

Luego, podemos tomar ϵ de forma que la superficie $\bar{J}$ -holomorfa límite $\tilde{u}$ satisface

$$\tilde{u}(U_\epsilon(\Gamma) \setminus \Gamma) \subset (-\infty, -2) \times S^3$$

Donde U_ϵ es la unión de bolas de radio ϵ cuyos centros son los bubble points de Γ . Como en esta región del cilindro la forma τ coincide con la inducida por λ , el mapa $\tilde{u}$ restringido a este dominio satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann para J inducida por la simplectización de (S^3, λ) .

Si escribimos $\dot{S} = \mathbb{C}, \dot{\Gamma} = \Gamma \cup \{\infty\}, \dot{S} = S \setminus \dot{\Gamma}$, tenemos que $\tilde{u} : \dot{S} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ es un encaje. Se tiene por tanto que $\tilde{u}(\dot{S})$ es una superficie casi compleja que tiende asintóticamente en la

parte positiva del cilindro a una curva cuya proyección en S^3 es P_0 y en la parte negativa del cilindro a un conjunto de curvas cerradas que corresponden a órbitas periódicas de (S^3, λ) .

Resulta que por teoría de Fredholm sobre la linealización del operador de Cauchy-Riemann a lo largo de $\tilde{u}$ (que resulta Fredholm) que se puede asociar a $\tilde{u}$ un índice denotado por $Fred(\tilde{u}) \in \mathbb{N}$ (ver [25]). Si escribimos $\mu^-(\tilde{u})$ a la suma de todos los índices de Conley-Zehnder de los órbitas periódicas correspondientes a las pinchaduras negativas y $\mu(P_0)$ al índice de Conley-Zehnder de la órbita periódica (P_0, T_0) no degenerada especial del elipsoide (que es la única correspondiente a pinchadura positiva), entonces

$$Fred(\tilde{u}) = \mu(P_0) - \mu^-(\tilde{u}) - \chi(S^2) + 1 + \#\Gamma \geq 0$$

Como asumimos que todos los índices de Conley-Zehnder son mayores a tres, que al menos hay un bubble point (es decir $\#\Gamma \geq 1$), que $\chi(S^3) = 2$ y que $\mu(P_0) = 3$ se deduce

$$\#\Gamma = 1$$

Llamamos P a la órbita periódica que corresponde a la única pinchadura negativa. Observar que $\tilde{u}(\dot{S})$ conecta las órbitas periódicas P_0 de (S^3, λ_E) y P de (S^3, λ) . En particular por la fórmula de índices para el operador de Fredholm se tiene que $\mu_C Z(P, T) = 3$.

Esta órbita es la candidata a órbita periódica especial que estamos buscando para el campo R_λ . Lo que falta por ver para aplicar 6.4.11 es ver a esta órbita como borde de un disco de sección transversal global. Para la construcción de este anillo como proyección de un plano holomorfo es que entra en juego el bubbling off analysis ([23]), que permite construir a partir de la familia $\tilde{u}_k$ un plano de energía finita $\tilde{v} : \mathbb{C} \rightarrow (-\infty, -2) \times S^2$ que resulta un encaje que tiende asintóticamente a la órbita periódica P .

La aplicación del bubbling off analysis sigue aproximadamente la siguiente idea. Tenemos una sucesión de puntos $z_k \in \mathbb{C}$ que verifican que $|z_k| \leq 1$, $z_k \rightarrow \tilde{z}$ siendo $\tilde{z}$ el único bubble off point y que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla \tilde{u}_k(z_k)| = +\infty$. Se prueba que podemos tomar δ_k sucesión de radios de tal forma que $\tilde{u}_k(B(z_k, \delta)) \subset (-\infty, -2) \times S^3$ y reparametrizando obtenemos mapas

$$\tilde{v}_k : B(0, r_k) \rightarrow (-\infty, -2) \times S^3, \quad \tilde{v}_k(z) = u_k \left(\frac{\delta_k z}{r_k} + z_k \right)$$

Donde $r_k \rightarrow +\infty$. Con una sucesión del estilo se consigue el plano holomorfo $\tilde{v}$.

La construcción del plano holomorfo límite $\tilde{v}$ nos deja en las hipótesis de 6.4.11 y conseguimos una descomposición en libro abierto para (S^3, λ) donde las hojas del libro son discos correspondientes a planos holomorfos que, a la vez, tienden asintóticamente al lomo del libro P . Luego se muestra que no solo $\tilde{u}(\mathbb{C})$ es transversal al flujo de R_λ , sino que todas las hojas de la descomposición lo son y tenemos bien definido un mapa de retorno. Con esta construcción y teoría de dinámica de superficies se cierra con el teorema 6.4.3.

Cabe aclarar que en toda la construcción de esta última parte, se asume que las órbitas periódicas de (S^3, λ) son no degeneradas. La última parte del artículo [24] se encarga de extender el resultado a órbitas periódicas no degeneradas.

Apéndice A

Geometría simpléctica y de contacto

A.1. Geometría simpléctica

Definición A.1.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $x \in M$. Entonces

- Un **vector cotangente** de M en x es una 1-forma definida en $T_x M$
- El **espacio cotangente** de M en x es el espacio dual de $T_x M$, y lo denotamos como $T_x^* M$
- El **fibrado cotangente** de M es la variedad resultante de la unión disjunta de los espacios cotangentes $(\sqcup_{x \in M} T_x^* M)$. Lo denotamos como $T^* M$

Definición A.1.2. Sea P una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y ω una 2-forma en P antisimétrica, no degenerada y cerrada. A la forma ω la llamamos **forma simpléctica** y al par (P, ω) **variedad simpléctica**.

Ejemplo A.1.1. Si $P = T^* \mathbb{R}^n$ y escribimos las coordenadas de P como (q, p) entonces la forma $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ es una forma simpléctica que además es exacta. A esta forma la llamamos forma canónica.

Proposición A.1.1. Sea $P = T^* M$ fibrado cotangente con M una n -variedad. Luego (P, ω_0) es variedad simpléctica. Consideramos los siguientes mapas:

- $\Pi_M : P \rightarrow M$ tal que $\Pi_M(T_q^* M) = \{q\}$
- $D\Pi_M : TP \rightarrow TM$ donde $D\Pi_M(T_x P) = T_{\Pi_M(x)} M$

Entonces la 1-forma λ_0 definida por

$$\lambda_0(Y(x)) = x(D\Pi_M(Y(x)))$$

cumple que $d\lambda_0 = -\omega_0$, donde $Y : P \rightarrow TP$ es un campo arbitrario. Esta definición es independiente de las cartas pues utiliza la estructura natural del fibrado cotangente.

A λ_0 la llamamos **1-forma tautológica** o **1-forma de Liouville**.

Observación A.1.1. En coordenadas la 1-forma tautológica no es más que $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$

Definición A.1.3. Sean (P, ω) y (Q, ρ) variedades simplécticas de la misma dimensión y $F \in C^1(P, Q)$

- Decimos que F es **simplético** si $F^*\rho = \omega$
- Decimos que F es **simplectomorfismo** si es un difeomorfismo simplético.

Definición A.1.4. Sean M, N variedades diferenciables, $f \in C^1(M, N)$. Definimos el **levantado cotangente** de f como el mapa $D^*f : T^*N \rightarrow T^*M$ tal que $D^*f(\beta_n)(v) = \beta_n(Df(v))$ para $\beta_n \in T_n^*N$, $v \in T_mM$ y $n = f(m)$

Proposición A.1.2. Sea M variedad diferenciable, $f \in C^1(M, M)$ difeomorfismo y D^*f su levantado cotangente. Entonces D^*f deja invariante la 1-forma de Liouville en T^*M , es decir, $(D^*f)^*(\lambda_0) = \lambda_0$.

El resultado anterior también implica que el levantado cotangente deja invariante a la forma canónica simplética, y por lo tanto es un simplectomorfismo. Invirtiendo el levantado cotangente de T^*N a T^*M conseguimos un mapa que funciona como analogía al diferencial, es decir, de T^*M a T^*N :

Definición A.1.5. Sea M variedad diferenciable, $f \in C^1(M, N)$ difeomorfismo y D^*f su levantado cotangente. Definimos la **transformación física** asociada a f como el mapa $D_*f : T^*M \rightarrow T^*N$ donde si $\alpha_m \in T^*M$ (con $\Pi(\alpha_m) = m$ proyección sobre M) y $w \in T_nN$

$$D_*f(\alpha_m)(w_n) := (D^*f)^{-1}(\alpha_m)(w_n) = \alpha_m(D_n(f^{-1})(w_n))$$

Definición A.1.6. Sea M variedad diferenciable, X campo vectorial en M , ω una k -forma en M .

- Definimos el **producto interno entre X y ω** como la $(k-1)$ -forma

$$\iota_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

- Definimos la **derivada de Lie de ω respecto a X** ($L_X\omega$) como la k -forma

$$L_X\omega := (\iota_X d + d\iota_X)\omega$$

Observación A.1.2. La definición usual de derivada de Lie es otra, pero en este contexto es equivalente. La fórmula de derivada de Lie de ω respecto a un campo expresada anteriormente se conoce por fórmula de Cartan.

Proposición A.1.3. Sea M variedad diferenciable, X campo vectorial en M , ω una k -forma y ρ una l -forma en M . Entonces:

$$d(L_X(\omega)) = L_X(d\omega) \quad y \quad L_X(\rho \wedge \omega) = L_X(\rho) \wedge \omega + \rho \wedge L_X(\omega)$$

Proposición A.1.4. Sea X_t campo vectorial en M que varía según t y define la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}F_t = X_t \circ F_t$ con $F_0 = Id$ y $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in I$. Entonces, para toda forma diferenciable ω_t :

$$\frac{d}{dt}(F_t^*\omega_t) = F_t^*\left(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right)$$

En particular, si X es constante en el tiempo y ω también, $F_t = \Phi_t$ flujo solución y obtenemos $\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\omega) = \Phi_t^*(L_X\omega)$.

Teorema A.1.1. Teorema de Darboux

Sea (P, ω) una variedad simplética de dimensión $2n$, $x \in P$. Entonces existe un entorno U de x y una carta local (U, φ) , tal que si $\varphi = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ se tiene $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i = \omega_0$, la forma canónica simplética.

Proposición A.1.5. Sea M una $2n$ -variedad compacta sin borde. Entonces M no admite una 2-forma antisimétrica que sea a la vez no degenerada y exacta.

Definición A.1.7. Sea (P, ω) variedad simpléctica. Decimos que un campo $X : P \rightarrow TP$ es un **campo Hamiltoniano** si $\omega(X, \cdot)$ es una 1-forma exacta, y decimos que es un campo localmente Hamiltoniano si la 1-forma es cerrada.

Una función diferenciable $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ define un campo vectorial X_f dado por la ecuación $\omega(X_f, \cdot) = df$. Al campo X_f lo llamamos campo Hamiltoniano generado por f , y a la terna (P, ω, f) la llamamos **sistema Hamiltoniano**.

Definición A.1.8. Sea (M, ω) variedad simpléctica, $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definimos el **corchete de Poisson** de f y g como

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

donde X_f y X_g campos inducidos por f y g respectivamente.

Podemos pensar al corchete de Poisson entre f y g en términos geométricos como “derivar” f en la dirección X_g . Basta con observar lo siguiente:

Proposición A.1.6. Dada (M, ω) variedad simpléctica, $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces

$$\{f, g\} = -L_{X_f}g = L_{X_g}f$$

Esto implica que, dada f , la correspondencia $g \mapsto \{f, g\}$ es una derivación, pues satisface la regla de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Observación A.1.3. En coordenadas canónicas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de una variedad simpléctica (para las cuales $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$) se tiene que

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Recordando que en estas coordenadas $(X_f)_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$ y $(X_f)_{i+n} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$

En particular, $\{p_i, p_k\} = \{q_i, q_k\} = 0$ y $\{q_i, p_k\} = \delta_{i,k}$

Teorema A.1.2. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Entonces se tiene que

$$d\{f, g\} = -\iota_{[X_f, X_g]}\omega = -\omega([X_f, X_g], \cdot)$$

Es decir, el campo Hamiltoniano asociado a $\{f, g\}$, es $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$.

Proposición A.1.7. El corchete de Poisson es antisimétrico y cumple la identidad de Jacobi. Es decir, Dadas $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, se tiene que:

$$\begin{cases} \{f, g\} = -\{g, f\} \\ \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \end{cases}$$

Y por lo tanto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ con el corchete de Poisson conforman un Álgebra de Lie.

Observación A.1.4. Por lo visto anteriormente, conseguimos un morfismo entre los espacios $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\cdot, \cdot\})$ y $(\chi^\infty(M), [\cdot, \cdot])$ como álgebras de Lie, dado por la correspondencia

$$f \rightarrow X_f$$

Teorema A.1.3 (Teorema Arnol'd-Liouville). Sea (P, ω, F_1) sistema hamiltoniano en variedad simpléctica de dimensión 2 y $\{F_1, \dots, F_n\}$ funciones de energía que verifican: $\{F_i, F_j\} = 0$ y los campos generados X_{F_i} conforman un conjunto linealmente independiente en cada punto del tangente. Asumimos que $h = (h_1, \dots, h_n)$ valor regular de $F = (F_1, \dots, F_n)$ y $M = F^{-1}(h)$ compacta. Entonces:

- M es difeomorfa a $T^n := (S^1)^n$ y $\omega|_M \equiv 0$
- Si D^n bola de radio 1 en $\mathbb{R}^n$, existe entorno tubular $V_M \simeq T^n \times D^n$ y coordenadas (θ, I) en $T^n \times D^n$ tales que

1. $\Phi^* \omega = \sum_1^n d\theta_i \wedge dI_i$
2. Las coordenadas I_i solo dependen de $F_1, \dots, F_n$
3. El flujo solución es lineal en estas coordenadas:

$$\Phi^{-1} \circ \phi_{F_i}^t \circ \Phi(\theta, I) = (\theta + t\beta(I), I)$$

Estas coordenadas son las llamadas ángulo-acción

A.2. Variedades hamiltonianas y geometría de contacto

En el contexto de la dinámica de sistemas hamiltonianos en variedades simplécticas, la geometría de contacto hace foco en los conjuntos de nivel del hamiltoniano, ya que es aquí donde viven las soluciones. En lugar de estudiar las soluciones en función del tiempo, nos interesaremos simplemente por la geometría de las órbitas.

Definición A.2.1. Una **variedad Hamiltoniana** es un par (Σ, ω) donde Σ es una $2n-1$ variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^2(\Sigma)$ una 2-forma antisimétrica y cerrada tal que $\ker \omega$ define una distribución de dimensión 1 en $T\Sigma$. A la forma ω la llamamos **estructura hamiltoniana** en Σ .

Veamos cómo se conecta esta definición con la dinámica Hamiltoniana:

Consideramos (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano con M variedad simpléctica y 0 un valor regular de H . Definimos $\Sigma = H^{-1}(0) \subseteq M$. Observamos que $\ker \omega|_{\Sigma}(p)$ es el espacio generado por $X_H(p)$, cuya dirección determina la distribución en $T\Sigma$. Entonces $(\Sigma, \omega|_{\Sigma})$ es una variedad Hamiltoniana. En particular las trayectorias del flujo Hamiltoniano son las hojas de la distribución definida por $\ker \omega|_{\Sigma}$ en Σ .

El campo $X_H|_{\Sigma}$ del ejemplo anterior también tiene una generalización abstracta:

Definición A.2.2. Sea (Σ, ω) una variedad hamiltoniana. Un campo hamiltoniano es una sección (que no se anula) de $\ker \omega$

Observar que por la fórmula de Cartan si X campo hamiltoniano en Σ entonces $L_X \omega = 0$. Esto implica que ω es preservada por el flujo de X ya que

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* \omega) = \Phi_t^*(L_X \omega)$$

siendo ϕ_t flujo asociado a X .

Sin embargo otro camino, quizás más natural y restrictivo, para generar por analogía un estudio “simpléctico” de variedades diferenciales de dimensión impar es el que entendemos por geometría de contacto.

Definición A.2.3. Sea (Σ, ω) una variedad hamiltoniana de dimensión $2n-1$. Una **forma de contacto** en (Σ, ω) es una 1-forma $\lambda \in \Omega^1(\Sigma)$ tal que $d\lambda = \omega$ y $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ sea una forma de volumen en Σ . Al par (Σ, λ) lo llamamos **variedad de contacto**.

Observación A.2.1. No toda variedad hamiltoniana admite una forma de contacto. La hipótesis que (Σ, ω) sea variedad hamiltoniana realmente no es necesaria pues con la condición $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \neq 0$ automáticamente $(\Sigma, d\lambda)$ es una variedad hamiltoniana.

Además la restricción de $d\lambda$ a $\xi = \ker \lambda$ nos da un fibrado tangente simpléctico de rango $2n-2$ en Σ , es decir, $d\lambda_\xi$ es no degenerada.

Justamente la condición de que $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ sea forma de volumen nos dice que la distribución determinada en $T\Sigma$ por $\ker \lambda$ es completamente no integrable, es decir, que no existe ninguna subvariedad encajada en $T\Sigma$ cuyo fibrado tangente coincida con dicha distribución de hiperplanos de dimensión $2n-2$. Para entender esto recordamos que el teorema de Frobenius asegura que bajo la condición $\lambda \wedge d\lambda = 0$ tenemos que $\ker \lambda \subseteq T\Sigma$ es integrable, lo que es equivalente a pedir $d\lambda|_{\ker \lambda} = 0$. La condición que define la forma de contacto es casi la negación de esto, ya que pedimos que $d\lambda|_{\ker \lambda}$ sea no degenerada.

Proposición A.2.1. Sea (Σ, λ) variedad de contacto de dimensión $2n-1$ y $L \subseteq \Sigma$ una subvariedad encajada tal que $TL \subseteq \ker \lambda = \xi$. Entonces $\forall q \in L$, $T_q L$ es un subespacio isotrópico del espacio vectorial simpléctico $(\xi(q), d\lambda(q))$. Además $\dim L \leq n-1$

Cuando L es de dimensión máxima $(n-1)$ decimos que L es **Legendriana**.

Demostración. Sean $X, Y, [X, Y]$ campos de L . Como $TL \subseteq \xi$, se tiene que $\iota_X \lambda = \iota_Y \lambda = \iota_{[X, Y]} \lambda = 0$. Recordando la igualdad

$$d\lambda(X, Y) = L_X(\lambda(Y)) - L_Y(\lambda(X)) - \lambda([X, Y])$$

tenemos que $d\lambda|_{TL} \equiv 0$, es decir, $T_q L$ isotrópico para todo $q \in L$.

La desigualdad $\dim L \leq n-1$ es debido a que $d\lambda(q) = \omega(q)$ es una forma simpléctica en el espacio $T_q \Sigma / \ker \omega_q$ de dimensión $2n-2$, por lo que, como $d\lambda$ no degenerada, no puede existir un subespacio de dimensión mayor a $n-1$ para el cual la forma se anule. $\square$

A continuación dos ejemplos donde “naturalmente” tenemos una forma de contacto:

- Definimos la **forma de contacto canónica** en $\mathbb{R}^{2n-1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ como

$$\lambda_0 = dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dq_i$$

escribiendo a los elementos de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ como (z, q, p)

- Sea (M, ω) una variedad simpléctica exacta, es decir, $\omega = d\lambda$ para cierta 1-forma λ . Definimos entonces la **contactización** de M como la variedad de contacto $(\mathbb{R} \times M, \alpha)$ donde si $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ y $\pi(t, x) = x$

$$\alpha = dt + \pi^* \lambda$$

Observar que el ejemplo anterior es la contactización de $\mathbb{R}^{2n-2}$ con $-\lambda$ la forma tautológica.

La forma de contacto induce un campo en Σ que juega el papel por analogía de X_H en la dinámica hamiltoniana. De hecho cuando la forma simpléctica ω cumple $\omega|_\Sigma = d\lambda$ entonces el campo inducido por λ será paralelo a $X_H|_\Sigma$.

Definición A.2.4. Sea (Σ, λ) variedad de contacto. Llamamos **campo de Reeb** al campo R inducido por las condiciones

$$\iota_R d\lambda = 0, \quad \lambda(R) = 1$$

Observar que el campo de Reeb es un campo Hamiltoniano en $(\Sigma, \omega) = (\Sigma, d\lambda)$ donde

$$\ker \omega = \langle R \rangle$$

Si la variedad hamiltoniana es $\Sigma = H^{-1}(0)$ con 0 valor regular del hamiltoniano H , entonces R y X_H son colineales, pues $\langle R \rangle = \ker \omega = \langle X_H \rangle$. En particular el flujo generado por R es una reparametrización del flujo hamiltoniano generado por X_H .

Si (Σ, λ) es una variedad de contacto y $\xi := \ker \lambda \subseteq T\Sigma$ campo de hiperplanos, tenemos una descomposición del fibrado tangente:

$$T\Sigma = \xi \oplus \langle R \rangle$$

A la distribución ξ la llamamos **estructura de contacto**. Si bien la estructura de contacto queda determinada por λ , no vale el recíproco ya que si $f \in C^\infty(\Sigma)$ es tal que $f > 0$ entonces λ y $\lambda_f = f\lambda$ (que también es forma de contacto) determinan la misma estructura de contacto. Sin embargo los campos de Reeb generados por estas dos formas de contacto no son necesariamente paralelos. Es por esto que la geometría de contacto no permite recuperar la estructura hamiltoniana ω . De todas formas al par (Σ, ξ) también lo llamamos variedad de contacto.

También existe un análogo al teorema de Darboux para variedades de contacto, es decir, localmente toda forma de contacto puede ser vista en ciertas coordenadas como la forma de contacto canónica:

Teorema A.2.1 (Teorema de Darboux). *Sea (M, λ) una variedad de contacto y $p \in M$. Entonces existe una carta local (U, φ) para $U \simeq \mathbb{R}^{2n-1}$ entorno de p tal que si $\varphi(t, q_1, \dots, q_{n-2}, p_1, \dots, p_{n-2}) = x$ entonces*

$$\varphi^*(\lambda|_U)(t, q, p) = \lambda_0(t, q, p) = dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dq_i$$

A.3. Dominios de Liouville

Consideremos nuevamente una variedad simpléctica (M, ω) y $\Sigma \subset M$ una variedad hamiltoniana. Como vimos, si X_H es un campo asociado a un hamiltoniano H entonces $X_H \in T\Sigma$ y $L_{X_H}\omega = 0$ lo que implicaba que ω se preserva por el flujo de X_H . De hecho esto lo cumple cualquier campo hamiltoniano en $T\Sigma$. Supongamos ahora que tenemos un campo X definido en un entorno de Σ pero que cumple

$$L_X\omega = \omega$$

Como $\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\omega) = L_X\omega$ para el flujo Φ inducido por X , obtenemos que

$$(\Phi_t)^*\omega = e^t\omega$$

Es decir, la forma simpléctica ω se expande en las direcciones de X . Luego $(\Phi_t)^*\omega^n = e^t\omega^n$ lo que significa que el volumen crece exponencialmente por el flujo que induce X . Cuando este campo es transversal a Σ ocurre que este induce una forma de contacto. Esta propiedad toma relevancia a la hora de definir una estructura de contacto en hipersuperficies de nivel de un hamiltoniano: basta que sea transversal a un campo de Liouville.

Definición A.3.1. Sea (M, ω) variedad simpléctica de dimensión $2n$ y Σ una hipersuperficie de M de codimensión 1. Decimos que X campo definido en entorno de Σ es un **campo de Liouville** si cumple $L_X \omega = \omega$.

Un campo de Liouville induce una 1-forma λ en un entorno de Σ dada por la relación

$$\lambda = \iota_X \omega$$

A esta forma la llamamos **forma de Liouville**. Bajo la hipótesis de que X sea transversal a Σ se tiene que esta es una forma de contacto para Σ :

Teorema A.3.1. Sea X campo de Liouville definido en entorno de Σ en (M, ω) variedad simpléctica tal que X es transversal a Σ , es decir, $\forall x \in \Sigma \ T_x \Sigma \oplus \langle X(x) \rangle = T_x M$. Entonces $\lambda|_\Sigma$ con $\lambda = \iota_X \omega$ es una forma de contacto para Σ .

Demostración. Dado $x \in \Sigma$ consideramos $\{v_1, \dots, v_{2n-1}\}$ base de $T_x \Sigma$. Luego

$$\begin{aligned} \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}(v_1, \dots, v_{2n-1}) &= \iota_X \omega \wedge \omega^{n-1}(v_1, \dots, v_{2n-1}) \\ &= \frac{1}{n} \omega^n(X(x), v_1, \dots, v_{2n-1}) \end{aligned}$$

Como X es transversal a Σ , $\{X(x), v_1, \dots, v_{2n-1}\}$ es base de $T_x M$. Por lo tanto

$$\omega^n(X(x), v_1, \dots, v_{2n-1}) \neq 0$$

□

Por otro lado, naturalmente si partimos de una variedad de contacto (Σ, λ) encajada en la variedad simpléctica (M, ω) con $d\lambda = \omega$, obtenemos un campo de Liouville X transversal a Σ definido por la relación $\lambda = \iota_X \omega$, pues

$$L_X \omega = (d\iota_X + \iota_X d)\omega = d(\iota_X \omega) = d\lambda = \omega$$

Definición A.3.2. Sea Σ hipersuperficie en (M, ω) . Decimos que Σ es una **hipersuperficie de tipo-contacto** si existe un campo X de Liouville en un entorno de Σ transversal a Σ .

Sea (M, ω) una variedad simpléctica exacta ($d\lambda = \omega$). Luego, la forma de volumen ω^n también es exacta: $d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \omega^n$. Si suponemos que M no es cerrada pero sí compacta entonces necesariamente tiene borde, pues una variedad cerrada no admite una forma de volumen exacta (ya que esto contradice el teorema de Stokes). Bajo ciertas hipótesis, este tipo de variedades admite una hipersuperficie de tipo-contacto que será justamente el borde.

Definición A.3.3. Sea $(M, \omega = d\lambda)$ variedad simpléctica exacta compacta. Decimos que (M, ω) es un **dominio de Liouville** si el campo de Liouville X (definido por $\iota_X d\lambda = \lambda$) es transversal a ∂M con dirección exterior.

Por la proposición antes demostrada tenemos que el borde de un dominio de Liouville $(M, d\lambda)$ es de tipo-contacto donde $\lambda|_{\partial M}$ forma de contacto.

Proposición A.3.1. Sea $(M, d\lambda)$ dominio de Liouville y X campo de Liouville. Entonces $L_X \lambda = \lambda$

Demostración. Observando que $\iota_X \lambda = \iota_X \iota_X \omega = \omega(X, X) = 0$ tenemos

$$L_X \lambda = d\iota_X \lambda + \iota_X d\lambda = \iota_X \omega = \lambda$$

□

Ejemplo A.3.1. Consideramos $\mathbb{R}^{2n}$ y $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ forma canónica simpléctica. Luego, el siguiente campo es de Liouville:

$$X = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Basta verificar que $L_X \omega = d\iota_X \omega = \omega$.

Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ tiene forma de estrella (es decir, delimita un dominio compacto D con forma de estrella) entonces como X es radial es transversal a Σ . Por el teorema visto X induce forma de contacto en Σ y esta dada por la restricción a Σ de

$$\lambda = \iota_X \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i dp_i - p_i dq_i$$

Ejemplo A.3.2. Consideramos para $a, b > 0$ el elipsoide $E(a, b)$ dado por

$$E(a, b) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 : \frac{|z_1|^2}{a} + \frac{|z_2|^2}{b} \leq 1\}$$

Aquí escribimos $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Con la restricción de la forma canónica simpléctica a $E(a, b)$ obtenemos $(E(a, b), \omega)$ variedad simpléctica compacta con borde. Como vimos el campo de Liouville está dado por

$$X = \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$$

Como el borde $\partial E(a, b)$ es transversal al campo de Liouville (tiene forma de estrella) entonces $\Sigma = \partial E(a, b)$ es una superficie de tipo-contacto y $E(a, b)$ un dominio de Liouville. La forma de contacto es $\lambda|_\Sigma$ con $\lambda = \frac{1}{2} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2)$

Además, podemos pensar $\Sigma = \partial E(a, b)$ como el conjunto de nivel 1 del Hamiltoniano

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} + \frac{y_2^2}{b}$$

Como vimos, el campo de Reeb en este caso es un múltiplo de

$$X_H = (y_1/a) \frac{\partial}{\partial x_1} + (y_2/b) \frac{\partial}{\partial x_2} - (x_1/a) \frac{\partial}{\partial y_1} - (x_2/a) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

De la condición $\lambda(R) = 1$ para el campo de Reeb deducimos

$$\begin{aligned} R &= -2X_H = -2 \left(\frac{y_1}{a}, \frac{y_2}{b}, -\frac{x_1}{a}, -\frac{x_2}{b} \right) \\ &= -2 \left(\frac{y_1 - ix_1}{a}, \frac{y_2 - ix_2}{b} \right) = \left(\frac{2iz_1}{a}, \frac{2iz_2}{b} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo de Reeb está dado por

$$\phi_t(z_1, z_2) = (e^{2it/a} z_1, e^{2it/b} z_2)$$

Observamos que si $a/b \notin \mathbb{Q}$ entonces el flujo de Reeb solo tiene dos órbitas periódicas que corresponden a $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$. Además, si $a = b = 1$ se tiene que $\Sigma = S^3$ y las órbitas del flujo de Reeb $\phi_t(z_1, z_2) = e^{2it}(z_1, z_2)$ corresponden exactamente a las fibras de la fibración de Hopf.

Ejemplo A.3.3. Sea N variedad diferenciable compacta y $M = T^*N$ el fibrado cotangente. Consideramos $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ forma tautológica en M . Luego $(M, -d\lambda)$ variedad simpléctica exacta. Se puede verificar que el campo de Liouville X es

$$X = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Ahora supongamos que $\Sigma \subseteq T^*N$ es una hipersuperficie de codimensión 1 que tiene **forma de estrella en las fibras**, esto es, para todo $x \in N$ se tiene $\Sigma \cap T_x^*N$ delimita un dominio compacto D_x tipo estrella en T_x^*N . Entonces X es transversal a Σ y $D = \bigcup_{x \in N} D_x$ es un dominio de Liouville con $\partial D = \Sigma$.

Este tipo de construcciones no es artificial. Consideramos $H : T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltoniano dado por $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|_g^2 + V(q)$ donde g es una métrica Riemanniana en N y V un potencial C^∞ (a este tipo de Hamiltonianos los llamamos Hamiltonianos mecánicos). Consideramos $c > \max V$ y $\Sigma = H^{-1}(c)$. Entonces $H^{-1}(c)$ tiene forma de estrella en las fibras. Efectivamente podemos ver en este caso que X es transversal a $H^{-1}(c)$ pues si $(q, p) \in H^{-1}(c)$

$$dH(X)(q, p) = |p|_g^2 > 0$$

ya que, como $c > \max V$, necesariamente $|p|_g^2 > 0$.

Así como existe la contactización de una variedad simpléctica, existe la simplectización de una variedad de contacto:

Definición A.3.4. Sea (Σ, λ) una variedad de contacto. Definimos la **simplectización** de (Σ, λ) como la variedad simpléctica (M, ω) con

$$M = \mathbb{R} \times \Sigma, \quad \omega = d(e^t \lambda)$$

El campo de Liouville para la simplectización de (Σ, λ) es $X = \frac{\partial}{\partial t}$ que es trivialmente transversal a las hojas $\{t\} \times \Sigma$. Además, a menos de un múltiplo escalar, la dinámica de Reeb es igual en cada hoja $\{t\} \times \Sigma$. Más aún, si Σ es una hipersuperficie de tipo-contacto en (M, ω) variedad simpléctica, existe entorno de Σ y coordenadas tales que ese entorno sea la simplectización de Σ :

Proposición A.3.2. Sea $\Sigma \subseteq (M, \omega)$ una hipersuperficie de tipo-contacto tal que $\omega = d\lambda$ en un entorno de Σ . Entonces existe $\epsilon > 0$ y un encaje $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ tal que $\Phi^* \omega = d(e^t(\lambda|_\Sigma))$

Si (M, ω) es una variedad simpléctica, decimos que $\rho \in \text{Diff}(M)$ es una involución anti-simpléctica si verifica $\rho^2 = \text{Id}$ y $\rho^* \omega = -\omega$. Si (M, λ) es un dominio de Liouville con $d\lambda = \omega$ decimos que ρ es una involución anti-simpléctica y exacta si además $\rho^* \lambda = -\lambda$. A esto le ponemos nombre:

Definición A.3.5. Decimos que (M, λ, ρ) es un **dominio real de Liouville** si (M, λ) es un dominio de Liouville y ρ es una involución anti-simpléctica exacta.

Observación A.3.1. La involución ρ en (M, λ, ρ) preserva el campo de Liouville definido por $\iota_X \omega = \lambda$, es decir, $\rho^* X = X$. Simplemente verificamos la cuenta:

Para probar $\rho^* X = X$ alcanza con probar $\iota_X \omega = \iota_{\rho^* X} \omega$. Luego, dado $q \in M$ y $v \in T_q M$

$$\begin{aligned} \iota_{\rho^* X} \omega(q)(v) &= \omega(q) \left(D_{\rho(q)} \rho(X(\rho(q))), v \right) \\ &= -\omega(\rho(q)) (X(\rho(q)), D_q \rho(v)) \\ &= -\lambda(\rho(q)) (D_q \rho(v)) = \lambda(q)(v) \\ &= \iota_X \omega(q)(v) \end{aligned}$$

El conjunto $\text{Fix}(\rho)$ de puntos fijos para ρ en (M, λ, ρ) es una subvariedad Lagrangiana. Esto se debe a que, como $d_x\rho$ es una involución lineal de T_xM para $x \in \text{Fix}(\rho)$ tenemos la descomposición

$$T_xM = \ker(d_x\rho - \text{id}) \oplus \ker(d_x\rho + \text{id})$$

Luego, tomando una métrica Riemanniana g en M que sea ρ -invariante podemos construir una carta local para un entorno de $x \in \text{Fix}(\rho)$ simplemente restringiendo el mapa exponencial $\exp_x$ al subespacio $\ker(d_x\rho - \text{id})$.

Más aún, tenemos que $T_x\text{Fix}(\rho) = \ker(d_x\rho - \text{id})$. Como ρ es antisimpléctico, tanto $\ker(d_x\rho - \text{id})$ como $\ker(d_x\rho + \text{id})$ son subespacios isotrópicos de T_xM (la restricción de la forma simpléctica es la forma nula). Luego necesariamente ambos subespacios son Lagrangianos y por lo tanto $\text{Fix}(\rho)$ es una subvariedad Lagrangiana.

Ejemplo A.3.4. Consideramos $(\mathbb{C}^n, \lambda, \rho)$ donde $\lambda = \frac{1}{2} \sum_1^n x_i dy_i - dy_i dx_i$ y ρ es la conjugación compleja. Observamos que λ es ρ anti-invariante y por lo tanto ρ es una involución anti-simpléctica.

Si $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad con forma de estrella invariante por ρ , entonces Σ encierra un dominio Real de Liouville.

Ejemplo A.3.5. Sea N una variedad diferenciable e $I \in \text{Diff}(N)$ un difeomorfismo involutivo ($I^2 = \text{Id}$). Consideramos $D_*I : T^*N \rightarrow T^*N$ el levantado cotangente (o transformación física). Luego D_*I es una involución simpléctica exacta, pues $(D_*I)^*\lambda = \lambda$ siendo λ la 1-forma tautológica,

Definimos $\rho : T^*N \rightarrow T^*N$ tal que en coordenadas canónicas

$$\rho(q, p) = (q, -p)$$

El mapa ρ es una involución antisimpléctica exacta y cumple

$$\rho \circ D_*I = D_*I \circ \rho$$

Llamamos ρ_I a $\rho \circ D_*I$. Observamos que $(q, p) = \rho_I(q, p)$ si y solamente si

$$(q, p) = (I(q), -D_q I(p))$$

Es decir, (q, p) está en $\text{Fix}(\rho_I)$ si $q \in \text{Fix}(I)$ y $p \in \ker(D_q\rho + \text{id})$. Por lo tanto $\text{Fix}(\rho_I)$ es el fibrado conormal de $\text{Fix}(I)$:

$$\text{Fix}(\rho_I) = \{(q, p) \in T^*N : q \in \text{Fix}(I), \forall v \in T_q\text{Fix}(I) \ p(v) = 0\}$$

Si $\Sigma \subset T^*N$ tiene forma de estrella en las fibras y es invariante por ρ_I , entonces Σ delimita un dominio real de Liouville.

En particular, si tomamos $I = \text{Id}$, $\rho_I = \rho$, que Σ sea ρ -invariante se traduce a que Σ sea simétrico en las fibras. Por ejemplo, un Hamiltoniano mecánico H es invariante por ρ . Por lo visto en A.3.3 tenemos que, si consideramos Σ hipersuperficie de nivel de H para cierta energía mayor al máximo del potencial, entonces Σ delimita un dominio real de Liouville.

Definición A.3.6. Si (M, λ, ρ) es un dominio real de Liouville con borde $\Sigma = \partial M$ y tomamos las restricciones de ρ y λ a Σ , decimos que (Σ, λ, ρ) es una variedad real de contacto. Es decir, λ es forma de contacto en Σ y ρ es una involución anti-contacto ($\rho^*\lambda = -\lambda$).

También podemos ver que si R es el campo de Reeb en $T\Sigma$ se verifica $\rho^*R = -R$. De forma análoga vemos que los fijos de ρ en Σ (también los escribimos como $\text{Fix}(\rho)$) son una subvariedad de Legendre, es decir, una subvariedad tal que su fibrado tangente sea un subfibrado Lagrangiano del fibrado simpléctico $\ker(\lambda)$.

Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. Marsden. Foundations of mechanics, second edition. 1987.
- [2] Peter Albers, Joel W. Fish, Urs Frauenfelder, Helmut Hofer, and Otto van Koert. Global surfaces of section in the planar restricted 3-body problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 204(1):273–284, oct 2011.
- [3] Peter Albers, Urs Frauenfelder, Otto Koert, and Gabriel Paternain. The contact geometry of the restricted 3-body problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65, 02 2012.
- [4] James W. Alexander. Note on Riemann spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26(8):370 – 372, 1920.
- [5] Pierre Bieliavsky, Michel Cahen, Simone Gutt, John Rawnsley, and Lorenz Schwachhofer. Symplectic connections, 2005.
- [6] George D. Birkhoff. An extension of Poincaré’s last geometric theorem. *Acta Mathematica*, 47(4):297 – 311, 1926.
- [7] George David Birkhoff. The restricted problem of three bodies. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 39:265–334.
- [8] L.E.J. Brouwer. Beweis des ebenen translationssatzes. (mit 9 figuren im text). *Mathematische Annalen*, 72:37–54, 1912.
- [9] Alain Chenciner. Montreal asi : Sms july 2007 4 lectures on the n-body problem. 2007.
- [10] C. C. Conley. The retrograde circular solutions of the restricted three-body problem via a submanifold convex to the flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16(3):620–625, 1968.
- [11] C.C. Conley. On some new long periodic solutions of the plane restricted three body problem. In Joseph P. LaSalle and Solomon Lefschetz, editors, *International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pages 86–90. Academic Press, 1963.
- [12] Amadeu Delshams, Vadim Kaloshin, Abraham de la Rosa, and Tere M. Seara. Global instability in the elliptic restricted three body problem, 2015.
- [13] I. Ekeland and H. Hofer. Convex Hamiltonian energy surfaces and their periodic trajectories. *Communications in Mathematical Physics*, 113(3):419 – 469, 1987.
- [14] John Franks. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. *Inventiones mathematicae*, 108(2):403–418, 1992.

- [15] John Franks. Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero. *The New York Journal of Mathematics* [electronic only], 2:1–19, 1996.
- [16] U. Frauenfelder and O. Van Koert. *The Restricted Three-Body Problem and Holomorphic Curves*. Pathways in Mathematics. Springer International Publishing, 2018.
- [17] Emmanuel Giroux. Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures. 2003.
- [18] Marcel Guardia, Tere M. Seara, Pau Martín, and Lara Sabbagh. Oscillatory orbits in the restricted elliptic planar three body problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 37(1):229–256, 2017.
- [19] Simone Gutt. Remarks on symplectic connections. *Letters in Mathematical Physics*, 78:307–328, 12 2006.
- [20] G. W. Hill. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1(1):5–26, 1878.
- [21] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(3):515–564, 1993.
- [22] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(3):515–564, 1993.
- [23] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations ii: Embedding controls and algebraic invariants. *Geometric and functional analysis*, 5(2):270–328, 1995.
- [24] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Annals of Mathematics*, 148(1):197–289, 1998.
- [25] Helmut Hofer, Krzysztof Wysocki, and Eduard Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations iii: Fredholm theory. 1999.
- [26] Philip Holmes. Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”. *Physics Reports*, 193(3):137 – 163, 1990.
- [27] Umberto Hryniewicz. Fast finite-energy planes in symplectizations and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(4):1859–1931, apr 2012.
- [28] Umberto Hryniewicz. Systems of global surfaces of section for dynamically convex reeb flows on the 3-sphere, 2015.
- [29] Umberto L. Hryniewicz and Pedro A. S. Salomão. Global surfaces of section for reeb flows in dimension three and beyond, 2017.
- [30] A. Knauf and J. Denzler. *Mathematical Physics: Classical Mechanics*. UNITEXT. Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- [31] Martin Kummer. On the stability of hill’s solutions of the plane restricted three body problem. *American Journal of Mathematics*, 101(6):1333–1354, 1979.

- [32] Richard McGehee. Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem. *Thesis (Ph.D.) – The University of Wisconsin – Madison*, 1969.
- [33] Agustin Moreno. Contact geometry in the restricted three-body problem, 2021.
- [34] Agustin Moreno and Otto van Koert. Global hypersurfaces of section in the spatial restricted three-body problem. *Nonlinearity*, 35(6):2920–2970, may 2022.
- [35] Jurgen Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics*. Annals of Mathematics Studies 77. Princeton University Press, 1st edition, 1973.
- [36] Henri Poincare. *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste [microform] / par H. Poincare*. Gauthier-Villars et fils Paris, 1892.
- [37] Henri Poincaré. Sur un théorème en géométrie. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33:375–407, 1912.
- [38] Paul H. Rabinowitz. Periodic solutions of hamiltonian systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31(2):157–184, 1978.
- [39] Paul H Rabinowitz. Periodic solutions of a hamiltonian system on a prescribed energy surface. *Journal of Differential Equations*, 33(3):336–352, 1979.
- [40] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Mathematics lecture series. Publish or Perish, 1976.
- [41] K. A. Sitnikov. The existence of oscillatory motions in the three-body problem. *Soviet physics. Doklady*, 5:647, 1961.