UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE AGRONOMIA
MONTEVIDEO - URUGUAY

COMPARACION DE ECUACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE TABLAS DE VOLUMENES STANDARD DE PINO MARITIMO *(Pinus pinaster Ait.)*

POR

José A. BONILLA

•

Boletín Nº 109 Octubre 1969

COMPARACION DE ECUACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE TABLAS DE VOLUMENES STANDARD DE PINO MARITIMO *(Pinus pinoster Ait.)*[1, 2]

JOSÉ A. BONILLA[3]

I.— INTRODUCCION

La utilización de tablas para estimar volúmenes de madera para árboles de dimensiones especificadas, es una técnica universalmente difundida (tablas de volúmenes). El concepto básico en el cual se apoya su construcción es la relación gráfica o matemática, entre el volumen y alguna o algunas medidas que caracterizan las dimensiones de un árbol. Así, existen tablas de entrada simple (locales), en las cuales el volumen se relaciona solamente con el diámetro; las de doble entrada ("standard") en las cuales, además del diámetro, interviene la altura y, finalmente, las de entrada múltiple, donde se considera también la forma y, a veces, otros elementos, como porcentaje de corteza, etc. En todas estas relaciones, el volumen ocupa la posición de variable dependiente, mientras que diámetro, altura, forma, etc., constituyen las variables independientes. El método de construcción de las tablas, como ya se expresó, puede ser gráfico o matemático. Ambos presentan cierta subjetividad, el gráfico debido a que la relación volumen-variable(s) independiente(s) genera solamente puntos, siendo el ajuste de la curva manual, variando por lo tanto, con cada operador. En el método matemático, la subjetividad depende de la fórmula escogida, siendo necesario efectuar comparaciones entre las diversas ecuaciones propuestas, con el fin de determinar sus precisiones relativas.

El presente trabajo, tiene, precisamente, como objetivo básico, la construcción de una tabla de volúmenes standard para Pino Marítimo (*Pinus pinaster* Ait.) por métodos matemáticos y la comparación posterior de las ecuaciones utilizadas (una aritmética y otra logarítmica).

---

1. Este trabajo fue presentado para su publicación en fecha 15 de abril de 1968.

2. Resumen de la tesis presentada por su autor para optar al título de Magister Scientiae en Estadística y Experimentación de la Universidad de San Pablo. (Escuela Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Piracicaba.)

3. Ingeniero Agrónomo. Docente del Departamento Forestal, Facultad de Agronomía, Montevideo, Uruguay.

II.— REVISION DE LA LITERATURA

La primera tabla de volumen "moderna" es atribuida a Heinrich Cotta, quien publicó una para *Fagus* ("beech") en 1804, desarrollando posteriormente —1817— una serie de tablas de volúmenes standard. Se presume, sin embargo, que la primera tabla de volúmenes debe haber sido construida durante la segunda mitad del siglo XVIII.

Gottlob König, en su "Forest Mathematik", publicada en 1846, dio la primer idea clara acerca del estado de conocimiento de las tablas de volúmenes en Alemania. Un mayor desarrollo de la construcción de estas tablas, ocurrió en el mismo año, con la publicación de las famosas Tablas Bavarianas, construidas a partir de 40.000 árboles, las que fueron transformadas al sistema métrico decimal en 1872 por Behm. Tablas de mayor envergadura aún, han sido publicadas posteriormente, tal como la de Grudner y Schwappach en 1928, basadas en más de 70.000 árboles. Es interesante señalar que con un número tan elevado de árboles, no es práctico el uso de métodos matemáticos, ya que el trazado de las curvas por el método gráfico no presenta dificultad, dando como resultado una subjetividad prácticamente inexistente. Por esta razón, y también debido a que los métodos estadísticos y/o computacionales no estaban suficientemente desarrollados, todas esas tablas fueron construidas a partir de métodos gráficos. Recién ya en pleno siglo XX, comenzaron a desarrollarse ecuaciones que estudiaban la relación entre el volumen por un lado y la altura por otro. Dichas ecuaciones son muy numerosas, presentándose seguidamente, sólo algunas de ellas, clasificadas en dos categorías:

1. *Aritméticas:*

= Factor de forma constante: $V = a.D^2.H$
= Variable combinada: $V = a + b.D^2H$
= Stoate o Australiana (1945): $V = a + bD^2 + cH + dD^2H$
= Nasslund (1941): $V = a + bD^2 + cD^2H + dH^2 + eDH^2$
= Comprensiva: $V = a + bD + cDH + dD^2 + eH + fD^2H$
= Citada por Honer (1965): $V = \frac{D^2}{a} + \frac{b}{H}$
= Takata: $V = \frac{D^2.H}{a + b.D}$

2. *Logarítmicas:*

= Schumacher (1933): $\log. V = a + b\log. D + c \log. H$
= Dwight (1948): $\log. V = a + b \log. D + (3\text{-}b) \log. H$
= Variable combinada logarítmica: $\log. V = a + b \log. D^2H$
= Thomber: $\log. V = a + b \log. (H/D) + \log. D^2H$

En todas las ecuaciones enumeradas *V* significa volumen; *D,* diámetro a la altura del pecho; *H,* altura; *a, b, c, d, e, f,* son coeficientes.

Estudios realizados referentes a diversas fórmulas han sido efectuados, pudiendo citarse los siguientes resultados:

Simpfendorfer (1959) trabajó con una muestra de 107 árboles de *Pinus radiata* D. Don., comparando 12 ecuaciones, la mayoría de ellas, incluyendo medida de la forma. Dentro de las fórmulas para la construcción de tablas standard menciona únicamente la de Stoate (Australiana), la cual condujo a los resultados más pobres.

Honer (1965) estudió la aplicación de 9 ecuaciones en 8 especies de coníferas y 3 de latifoliadas, sobresaliendo la ya citada:

$$V \quad \frac{D^2}{a} + \frac{b}{H}$$

Spurr (1951) realizó un estudio muy interesante de comparación de fórmulas aplicadas a árboles de *Picea,* llegando a las conclusiones siguientes:

(a) Entre las aritméticas, la australiana (Stoate) y la variable combinada, son superiores a la del factor de forma constante.

(b) Entre las logarítmicas, la de Schumacher es la mejor. La variable combinada logarítmica presenta altos y bajos, según la serie estudiada. La de Dwight se muestra inferior a ambas.

(c) Entre las de Schumacher y las dos mejores aritméticas no hay diferencias significativas.

En definitiva, Spurr recomienda las aritméticas, dado que los beneficios teóricos de la solución logarítmica están sobrebalanceados por los problemas inherentes al manejo de los logaritmos y además, por involucrar mayor trabajo.

Por otro lado, Spurr refiere que Stoate, trabajando en Australia con *Pinus radiata* D. Don, obtuvo resultados similares a los suyos.

Golding y Hall (1961) compararon 25 ecuaciones en *Pinus banksiana, Picea glauca* y *Populus tremuloides,* considerando diámetro y altura como variables independientes. De todas ellas destacaron la fórmula de la Variable Combinada, atendiendo simultáneamente a su precisión y facilidad de uso.

De la revisión del material bibliográfico y en especial de *"Forestry Abstracts",* se desprende la inexistencia de trabajos sobre comparación de ecuaciones para tablas de volúmenes de coníferas en América Latina.

Con respecto a tablas de volúmenes de coníferas latinoamericanas, se encuentran pocas, pero interesantes contribuciones, entre las que citamos la de Leighton (1957) sobre *Pinus radiata* D. Don en Chile y la de Heinsdijk (1959) en *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze. Otra contribución importante es la tabla de entrada triple del *Instituto Forestal* (1962) de Chile, también sobre *Pinus radiata*. También cabe citar la tabla fotogramétrica de Vervette Fuentes (1962) sobre coníferas mexicanas.

Con relación a la especie estudiada en este trabajo, *Pinus pinaster* Ait., aparte de los trabajos realizados en Uruguay y que son mencionados más adelante, no se tiene noticia de ningún trabajo realizado en América Latina.

En Europa existen varias tablas, pudiendo citarse las de: Souloumiac (1947) en Francia, Longhi (1952) en Italia, Ruiz-Dana Larrarte (1963) en España.

Muy recientemente, de 1964 para acá, se comenzó a trabajar en el Uruguay sobre tablas de volumen de Pino Marítimo. La primera contribución, Bonilla y Bottazzi (1964), es un trabajo provisorio en el cual se calcula una tabla local de volumen por medio del método de las curvas armonizadas.

Posteriormente, Laffitte, Mezzottoni y Bonilla (1964) construyeron la primer tabla de volúmenes standard de Pino Marítimo en América Latina, a partir de la fórmula logarítmica de Schumacher, la cual dio los resultados siguientes:

$$\log. V = \log. 0{,}00012568 + 2{,}2944 \log. D + 0{,}2490 \log. H$$

Finalmente, Bonilla, Ross y Buxedas, construyeron dos tablas locales de volúmenes comerciales para Pino Marítimo, una para madera de sierra (diámetro tope: 20 cm.) y otra para pulpa (entre 10 y 20 cm.).

III.— MATERIALES Y METODOS

La totalidad de los árboles —816— fueron cortados en el Parque Nacional "Franklin D. Roosevelt", Carrasco (Departamento de Montevideo), situado en el km. 17 de la carretera que une Montevideo con Punta del Este.

La descripción de las características del bosque, del suelo, del clima y de la vegetación de la zona, son omitidas aquí, ya que están ampliamente referidas en: Bonilla y Bottazzi (1964) y Bonilla, Rava y Rolfo (1964).

De acuerdo con un inventario realizado por Beckmann, según Bonilla y Beckmann (1964), las características dasométricas medias del bosque, en la época del corte de los árboles que sirven de base a este estudio eran las siguientes, aproximadamente:

D.A.P.	29,1 cm.
Altura total	21,5 m.
Número de árboles por há.	708
Area basal	48,0 m^2/há.
Volumen	467 m^3/há.
Edad	34 años
Incremento anual medio ..	14,0 m^3/há./año

La clasificación de los 816 árboles por clase diamétrica es ofrecida en el cuadro siguiente:

CUADRO Nº 1

CLASIFICACION DE LOS ARBOLES POR CLASE DIAMETRICA

Clase diamétrica (cm.)	Número de árboles	D.A.P. medio (cm.)	Altura comercial promedio (cm.)	Volumen promedio (m^3)
14 (13-14,9)	3	13,7	4,0	0,046
16 (15-16,9)	18	15,8	6,3	0,083
18 (17-18,9)	26	17,8	8,5	0,131
20 (19-20,9)	43	19,7	11,4	0,203
22 (21-22,9)	64	21,8	13,7	0,280
24 (23-24,9)	108	23,7	15,4	0,358
26 (25-26,9)	92	25,7	16,8	0,427
28 (27-28,9)	118	27,5	17,5	0,518
30 (29-30,9)	95	29,7	18,5	0,610
32 (31-32,9)	80	31,6	18,9	0,695
34 (33-34,9)	47	33,6	19,9	0,830
36 (35-36,9)	41	35,7	20,1	0,955
38 (37-38,9)	31	37,5	19,5	1,015
40 (39-40,9)	11	39,8	21,6	1,226
42 (41-42,9)	11	41,8	20,4	1,362
44 (43-44,9)	8	43,9	23,0	1,657
46 (45-46,9)	9	45,5	23,1	1,825
48 (47-48,9)	4	47,9	23,0	1,928
50 (49-50,9)	7	50,0	24,3	2,290
Total	816			
Media ponderada ...		28,1	16,8	0,582

Requisitos de las tablas de volúmenes standard

De acuerdo con Chapman y Meyer (1949), el grado de error en una tabla de volúmenes standard aumenta en los casos siguientes:

(a) Cuando el volumen de especies individuales es tomado de una tabla para grupos de especies, tal como latifoliadas o coníferas en general, o de una tabla universal para todas las especies.
(b) Cuando disminuye el área a ser relevada.
(c) Cuando disminuye el número de árboles.
(d) Cuando el volumen es estimado en pies madereros, dado que el error standard es mayor en este caso, que cuando se trata de volúmenes cúbicos (pies o metros).

En el presente trabajo, el error está altamente reducido en los puntos (a), (c) y (d), ya que:

En el ítem (a): La tabla es para una sola especie: Pino Marítimo.
En el ítem (c): El número de árboles: 816, es realmente elevado.
En el ítem (d): Se estima el volumen en metros cúbicos y no en pies madereros.

Con respecto al ítem (b), cabe señalar que el total de árboles fue cortado en una sola localidad (Parque Nacional de Carrasco), debido a la imposibilidad de conseguir un número satisfactorio de árboles para ser volteados, en otras localidades del país. De cualquier manera, la zona citada es suficientemente representativa de los bosques de Pino Marítimo en nuestras dunas costeras (ocupan un área menor a los 10.000 km^2), que es precisamente donde se planta más intensamente esta especie. Por lo tanto, estimamos que con los datos presentados puede construirse una tabla de volumen que proporcione una idea suficientemente aproximada de la realidad volumétrica de la citada conífera.

Métodos

La cubicación de los árboles fue efectuada, aplicando la fórmula de Huber con intervalos de 2 m., por lo que el volumen de cada árbol fue calculado por la simple fórmula: $V = 2 \sum Ai$, donde Ai es el área transversal correspondiente a cada uno de los diámetros medidos. Se tomó como altura comercial la comprendida entre la superficie de corte y un diámetro tope de 10 cm.

De acuerdo con la revisión bibliográfica efectuada y teniendo en cuenta principalmente los trabajos de Simpfendorfer (1959), Spurr (1951), Golding y Hall (1961), se puede apreciar que mucha investigación es necesaria para recomendar fórmulas con una precisión aceptable, existiendo, muchas veces, contradicciones entre los resultados de diversos autores. En este trabajo, teniendo en cuenta la complejidad del problema, resolvimos comparar solamente dos ecuaciones, una, logarítmica y la otra, aritmética. En base a los resultados obtenidos por los investigadores antes mencionados, seleccionamos las dos fórmulas siguientes:

LOGARÍTMICA:

Fórmula de Schumacher: $\log. V = a + b.\log. D + c.\log. H$

ARITMÉTICA:

Variable Combinada: $V = a + b.D^2H$

Análisis estadístico

Las computaciones efectuadas para obtener los resultados estadísticos necesarios para llegar a las conclusiones deseadas, fueron grandemente simplificadas por el uso de un programa Fortran, estructurado por los Ings. Agrs. Roberto Moraes y Vivaldo da Cruz, a quienes agradecemos sinceramente su colaboración, el cual fue procesado en el computador electrónico IBM 1620 del Instituto de Investigaciones Matemáticas de la Universidad de San Pablo.

El análisis estadístico se desarrolló de acuerdo a los pasos siguientes:

1. *Determinación de los parámetros y sus variancias, covariancias, significancias e intervalos de confianza.*

1.1. *Ecuación de la Variable Combinada.*

1.1.1. Determinación de los parámetros:

$$V = \hat{a} + \hat{b}.D^2H$$

Desde el punto de vista estadístico, el diámetro y la altura actúan como una variable única: D^2H, la cual, para simplificar, llamaremos X.

Por lo tanto: $V = \hat{a} + \hat{b}.X$, correspondiendo a esta ecuación el siguiente modelo matemático:

$$Yi = a + bXi + ei$$

O sea, expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$Y \qquad X \qquad B \quad + \quad \varepsilon$$

Para determinar los estimadores de los parámetros *a* y *b*, debemos minimizar el residuo, dado por $Z = \Sigma\, e_i^2 = \varepsilon'\varepsilon$. Dado que $\varepsilon = Y - XB$, tendremos:

$$Z = (Y—XB)'(Y—XB) = (Y'—B'X')\,(Y—XB) \therefore$$

$$Z = Y'Y - Y'XB - B'X'Y' + B'X'XB$$

Siendo $Y'XB$ y $B'X'Y$ matrices de dimensiones 1×1 y transpuestas entre sí, son iguales.

Por lo tanto:

$$Z = Y'Y - 2B'X'Y + B'XXB$$

Diferenciando respecto a Z, tendremos:

$$dZ = \varnothing - 2dB'X'Y + dB'X'XB + B'X'XdB$$

Como $dB'X'XB = B'X'XdB$, por ser transpuestas 1×1, tendremos:

$$dZ = -\ 2\ dB'X'Y + 2\ dB'X'XB = 2\ dB'(X'XB\text{-}X'Y)$$

Para obtener el valor de B que minimice la suma de cuadrados del residuo, debemos hacer $dZ \equiv 0$, pero como dB' es arbitrario, esto exige:

$$X'X\ B \qquad X'Y \tag{1}$$

X' X es una matriz simétrica a la cual llamamos para simplificar, S.

Por lo tanto:

$$S\hat{B} = X'Y \therefore S^{-1}\, S\hat{B} = S^{-1}X'Y$$

y finalmente:

$$\hat{B} = S^{-1}\, X'Y \qquad (2)$$

Puede probarse fácilmente que $\hat{B}$ es una estimación imparcial de B. Invirtiendo entonces la matriz S no existen dificultades para obtener estimadores de los parámetros *a* y *b*, que serán:

$$\hat{a} = \frac{(\Sigma X^2)\,(\Sigma Y) - (\Sigma Y)\,(\Sigma XY)}{W} = \overline{Y} - \hat{b}\,\overline{X} \qquad (3)$$

$$\hat{b} = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)\,(\Sigma Y)}{W} \qquad (4)$$

Donde $W = N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2$ (5)

1.1.2. *Determinación de las variancias y covariancias.*

Se efectúa por medio de la llamada matriz de dispersión D, la cual puede calcularse a partir de:

$$D = E\,[(\hat{B}\text{-}B)\,(\hat{B}\text{-}B)'] \qquad (6)$$

Cuando la matriz S es no-singular, como en este caso, la obtención de D, es relativamente sencilla, siendo su valor final:

$$D = S^{-1}.\sigma^2 \qquad (7)$$

Por lo tanto, calculamos fácilmente:

$$\hat{V}\,(\hat{a}) = \frac{\Sigma X^2}{W}\, s^2 \qquad (8)$$

$$\hat{V}\,(\hat{b}) = \frac{N}{W}\, s^2 \qquad (9)$$

$$\hat{Cov}\,(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-N\overline{X}}{W}\, s^2 \qquad (10)$$

1.1.3. *Prueba de significancia y límites de confianza.*

Una prueba t puede ser aplicada tanto para $\hat{a}$ como para $\hat{b}$ con el propósito de determinar la significancia de los parámetros.

$$t_a = \frac{\hat{a}}{s(\hat{a})} \tag{11}$$

$$t_b = \frac{\hat{b}}{s(\hat{b})} \tag{12}$$

con los grados de libertad correspondientes a s^2 (que serán calculados más adelante).

Los límites de confianza de los estimadores de los parámetros pueden ser calculados, aplicando las fórmulas:

$$L_a = \hat{a} \pm t_a \, .s(\hat{a}) \tag{13}$$

$$L_b = \hat{b} \pm t_b \, .s(\hat{b}) \tag{14}$$

El número de grados de libertad es el correspondiente a s^2.

1.2. *Ecuación de Schumacher.*

1.2.1. *Determinación de los parámetros:*

$$\log. V = \hat{a} + \hat{b} \log. D + \hat{c} \log. H$$

Esta expresión puede ser simplificada, sustituyendo log. V, log. D y log. H por Yi, Xi y Zi, respectivamente. De esta manera tenemos el modelo lineal:

$$Yi = a + b\ Xi + c\ Zi + e_i$$

Los cálculos se pueden simplificar grandemente sustituyendo las variables Xi y Zi, e introduciendo: $x_i = (Xi - X)$ y $zi = (Zi - Z)$, de manera que el modelo matemático toma finalmente la forma:

$$Yi = \hat{a} + \hat{b}\ xi + \hat{c}\ zi + e_i$$

La obtención de los estimadores $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$, se hace aplicando la fórmula general (2): $\hat{B} = S^{-1}X'Y$

Efectuando la inversión, obtenemos:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sum z^2}{W} & \dfrac{-\sum xz}{W} \\ 0 & \dfrac{-\sum xz}{W} & \dfrac{\sum z^2}{W} \end{bmatrix}$$

donde $W = (\sum x^2 . \sum z^2) - (\sum x . z)^2$ (15)

Por lo tanto:

$$\hat{a} = \overline{Y} \tag{16}$$

$$\hat{b} = \frac{(\sum z^2 . \sum xY) - (\sum xz . \sum zY)}{W} \tag{17}$$

$$\hat{c} = \frac{(\sum x^2 . \sum zY) - (\sum xz . \sum xY)}{W} \tag{18}$$

1.2.2. *Determinación de variancias y covariancias.*

$$\hat{V}(\hat{a}) = s^2/n \tag{19}$$

$$\hat{V}(\hat{b}) = \frac{\sum z^2}{W} . s^2 \tag{20}$$

$$\hat{V}(\hat{c}) = \frac{\sum x^2}{W} . s^2 \tag{21}$$

$$\text{Cov.}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{Cov.}(\hat{a}, \hat{c}) = 0 \tag{22}$$

$$\text{Cov.}(\hat{b}, \hat{c}) = \frac{-\sum xz}{W} \tag{23}$$

Antes de seguir adelante, debemos hacer un comentario: utilizando $xi = (Xi - \overline{X})$ y $zi = (Zi - \overline{Z})$ simplificamos grandemente el cálculo, al facilitar la inversión de la matriz S, llegando a obtener por ese camino Cov. $(\hat{a}, \hat{b})$ = Cov. $(\hat{a}, \hat{c}) = 0$, dado que $\sum x = 0$.

El programa Fortran, sin embargo, fue estructurado teniendo en cuenta las variables originales *Xi* y *Zi*, ya que la simplificación en la inversión de la matriz tiene poca importancia en el proceso de computación electrónica. Por esa razón, cuando presentamos los resultados obtenidos, podremos observar que Cov. (a, b) y Cov. (a, c) no son nulas, lo que, en virtud de la explicación ofrecida, no implica una contradicción.

1.2.3. *Pruebas de significancia y límites de confianza.*

Se calculan en la misma forma que para la ecuación de la Variable Combinada.

2. *Análisis de variancia de la regresión.*

El análisis de variancia de la regresión para cada una de las ecuaciones en consideración, se calcula en base a la minimización del residuo. Como sabemos SCR = $\varepsilon'\varepsilon$, donde SCR es la suma de cuadrados del residuo.

Dado que $\varepsilon = (Y - \hat{Y})$, se demuestra que:

$$\varepsilon'\varepsilon = SCR = Y'Y - \hat{B}'X'Y \qquad (24)$$

2.1. *Ecuación de la Variable Combinada.*

Usando el modelo, ya mencionado: $Yi = a + bx_i + ei$, llegamos a:

$$SCR = (\Sigma Y^2 - C) - \left[\frac{(\Sigma xY)^2}{\Sigma x^2}\right] \qquad (25)$$

La deducción de los grados de libertad se obtiene, calculando la esperanza matemática de la SCR, la cual se demuestra que es igual a $(N-2)\sigma^2$. Por lo tanto, el análisis de variancia puede ser presentado por medio del cuadro siguiente:

Causas de Variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Variancia
Regresión lineal	$\frac{(\Sigma xY)^2}{\Sigma x^2}$	1	S^2RL
Residuo	SCT-SCRL	(N-2) = 814	S^2R
Total	$\Sigma Y^2 - C$	(N-1) = 815	—

2.2. *Ecuación de Schumacher.*

Partiendo del modelo ya mencionado: $Yi = a + bx_i + cz_i + e_i$, y teniendo en cuenta la fórmula general (24): $SCR = Y'Y - \hat{B}'X'Y$, deducimos:

$$SCR = (\Sigma Y^2 - C) - (\hat{b}\Sigma xY + \hat{c}\Sigma zY)$$

La deducción de los grados de libertad, se hace también en base a E(SCR), pero es más compleja que en el caso anterior, pudiendo encontrarse solución por medio del siguiente método general.

Es relativamente fácil llegar a esta demostración:

$$E(SCR) = E(Y'Y - BX'Y) = N\sigma^2 - E(\varepsilon'XS^{-1}X'\varepsilon) \quad (26)$$

A partir de ella procedemos así: denominando A a la matriz $X S^{-1}X'$, podemos aplicar la propiedad:

$$E(\varepsilon'A\varepsilon) = \sigma^2.\ \text{tr. } A.$$

donde tr. A es el trazo de la matriz cuadrada A, o sea, la suma de los términos de la diagonal de la mencionada matriz. Por otro lado, se puede demostrar que:

$$\text{tr. } (BC) = \text{tr. } (CB)$$

o sea, en este caso:

$$\text{tr. } (XS^{-1}X') = \text{tr. } (S^{-1}X'X)$$

Por lo tanto:

$$E(SCR) = \sigma^2 [N - \text{tr. } (S^{-1}X'X)] = \sigma^2 [N - \text{tr. } (I)]$$

La matriz I tiene, en este caso, trazo igual a 3, por lo tanto:

$$E(SCR) = \sigma^2 (N-3) \quad (27)$$

En definitiva, el cuadro de análisis de variancia será:

Causas de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Variancia
Regresión lineal	$\hat{b}\ x\ Y + \hat{c}\ z\ Y$	1	S^2RL
Residuo	SCT — SCRL	(N—3) = 813	S^2R
Total	$\Sigma Y^2 - C$	(N—1) = 815	—

3. *Coeficientes de correlación.*

Los coeficientes de correlación proporcionan medidas relativas al grado de precisión. En la ecuación de la Variable Combinada, sólo existe un coeficiente de correlación, dado que hay una variable dependiente (V) y una independiente (D^2H). Por otro lado, en la ecuación de Schumacher existen cuatro coeficientes de correlación: tres simples, o sea: V en relación a D; V en relación a H y D en relación a H y uno múltiple, teniendo en cuenta las tres variables conjuntamente.

3.1. *Ecuación de la Variable Combinada.*

Si designamos por V el volumen y por X la expresión D^2H (diámetro al cuadrado por la altura) y si consideramos que ambas son variables aleatorias con distribución normal (m_1, σ_1^2) y (m^2, σ_2), respectivamente, basándonos en Pimentel Gomes y Nogueira (1964), podemos deducir el coeficiente de correlación *r*, por medio de cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$r = \frac{\sum x_i \, y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)\,(\sum y_i^2)}} = \sqrt{\frac{\text{SC Regresión lineal}}{\text{SC Total}}} \qquad (28)$$

La significancia del coeficiente r, puede ser obtenida a través de una prueba F y que por tratarse de un único grado de libertad para la regresión lineal, coincide con la prueba t, de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (29)$$

3.2. *Ecuación de Schumacher.*

Si consideramos: Y = log. V; X = log. D; Y = log. H y si admitimos que X, Y y Z son variables aleatorias con distribución normal (m_1, σ_1), (m_2, σ_2), (m_3, σ_3), respectivamente, de acuerdo con Pimentel Gomes y Nogueira (1964), obtenemos los siguientes coeficientes de correlación simples, similares al calculado para la ecuación de la Variable Combinada.

Entre volumen y diámetro: $r_{xy} = \dfrac{\sum x_i \, y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$ (30)

Entre diámetro y altura: $$r_{xz} = \frac{\sum x_i z_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum z_i^2)}} \qquad (31)$$

Entre volumen y altura: $$r_{yz} = \frac{\sum y_i z_i}{\sqrt{(\sum y_i^2)(\sum z_i^2)}} \qquad (32)$$

Falta determinar el valor del coeficiente de correlación múltiple R. De acuerdo con Pimentel Gomes y Nogueira (1964), puede demostrarse que:

$$R = \sqrt{\frac{\text{SC Regresión lineal}}{\text{SC Total}}} \qquad (33)$$

La significancia de R, puede ser verificada por medio de diversos métodos, entre ellos la prueba F:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N-3}{2} \qquad (34)$$

El valor de F obtenido en (34) debe ser confrontado con el de la tabla respectiva con 2 y (N—3) grados de libertad.

4. *Comparación de las dos ecuaciones.*

El índice clásico de comparación de ecuaciones es el error standard residual (la raíz cuadrada de SCR), el cual puede ser utilizado cuando las ecuaciones a comparar tienen la misma variable dependiente, pero no es conveniente cuando éstas difieren.

En el presente trabajo, las dos ecuaciones estudiadas: la de Schumacher ($\log. V = a + b \log. D + c \log. H$) y la de la Variable Combinada ($V = a + b\, D^2H$), presentan diferentes variables dependientes (*log. V* y *V*, respectivamente). Cuando este caso se presenta, debe efectuarse una ponderación de los mencionados errores.

El método de ponderación es desarrollado por Furnival (1961) consistiendo el procedimiento usual en formar el producto lógico de la función de densidad en el espacio muestral de la variable dependiente. Las funciones construidas de esa manera son comparables solamente en el mismo espacio muestral, pero una función de densidad en el espacio muestral de alguna función de volumen f(V), puede ser transformada en el espacio del volumen (V), por multiplicación de la derivada primera de f(V).

En el presente trabajo, las funciones de densidad son las siguientes:

Variable Combinada:

$$P_1(V) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e - \frac{(V - a - b\,D^2H)^2}{2\sigma_1^2}$$

Schumacher:

$$P_2(\log. V) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \quad e - \frac{(\log. V - a - b \log. D - c \log. H)^2}{2\sigma_2^2}$$

donde los residuos para cada ecuación son supuestos con distribución normal, independientes y homocedásticos.

La transformación del espacio muestral (log. V) a (V) en la ecuación de Schumacher, se logra, como ya dijimos, por multiplicación por:

$$\frac{d\,(\log. V)}{d\,(V)} = \frac{\log. e}{V}$$

Por lo tanto:

$$P_2(V) = \frac{\log. e}{V \cdot \sigma_2\sqrt{2\pi}} \cdot e - \frac{(\log. V - a - b \log. D - c \log. H)^2}{2\sigma_2^2}$$

Con las dos funciones de densidad en el mismo espacio muestral, las funciones de máxima verosimilitud pueden ser formadas a través de sus productos lógicos o sea:

$$L_1\ (V) = \Pi\ P_1(V) = \frac{1}{(\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi})^n} \cdot e - \frac{\Sigma (V - a - b\,D^2H)^2}{2\sigma_1^2}$$

$$L_2\ (V) = \Pi\ P_2(V) = \frac{(\log. e)^n}{(\Pi\ V)(\sigma_2\sqrt{2\pi})^n} \cdot e - \frac{\Sigma (\log. V - a - b \log. D - c \log. H)^2}{2\sigma_2}$$

Las máximas verosimilitudes L_1 y L_2 pueden ser obtenidas sustiyendo σ^2 por su estimador s^2, el cual en general, es igual a:

$$s^2 = \frac{SCR}{n - r}$$

donde n = número de observaciones
r = número de parámetros de la ecuación de regresión.

Por lo tanto:

$$SCR = (n - r)\, s^2$$

Como el numerador del exponente del número *e* es $\sum e_i = SCR$, tendremos que el exponente todo será igual a:

$$\frac{(n - r)\, s^2}{2\, s^2} = \frac{(n - r)}{2}$$

Por lo tanto:

$$L_1 = \frac{1}{(s_1 . \sqrt{2\pi})^n} . e - \left(\frac{n - r}{2}\right)$$

$$L_2 = \frac{(\log. e)^n}{(II\ V) . (s^2 \sqrt{2\pi})^n} . e - \left(\frac{n - r}{2}\right)$$

Como en este caso interesan más los valores relativos que los absolutos podemos eliminar la parte común a ambas fórmulas, resultando así una función unívoca de la de máxima verosimilitud. Así obtenemos:

$$K_1 = 1/s_1^n$$

$$K_2 = (\log. e)^n / II\ V . s_2^n$$

Invirtiendo los términos y extrayendo la raíz enésima, obtenemos finalmente:

$$I_1 = s_1 \qquad (35)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt[n]{II\ V}\quad s_2}{\log. e} = \frac{\bar{V}}{\log. e}\quad s^2 \qquad (36)$$

donde V = media geométrica.

Los índices de ajuste (I) son de orden inversa en comparación con los de máxima verosimilitud: un valor grande indica un ajuste pobre y viceversa.

De lo expuesto anteriormente, resulta que para el caso de la ecuación de la Variable Combinada, el índice de ajuste es $I_1 = s_1 = \sqrt{S^2_R}$, mientras que para la ecuación de Schumacher, el índice necesita una ponderación, expresada en (36), en cuyo caso la media geométrica V, debe ser calculada de la siguiente manera:

$$\overline{V} = \text{antilog.} \left(\frac{\Sigma \log. V}{n} \right)$$

En definitiva, aquel de los índices I_1 y I_2 que tenga un valor menor, nos indicará la ecuación más precisa.

IV.— RESULTADOS

1. *Ecuación de la Variable Combinada* ($V = a + b.D^2H$)

Ecuación obtenida: $V = 0{,}02984 + 0{,}0000361.D^2.H$

	Parámetros	
	a	b
Estimadores	0,02984	0,0000361
Variancias	0,00001986	$5{,}8549 \times 10^{-14}$
Prueba t	$6{,}70^{xxx}$	$149{,}11^{xxx}$
Límites de confianza inferiores	0,02122	0,00003561
Límites de confianza superiores ..	0,03846	0,00003655
Covariancia	—0,0000000008953	

ANALISIS DE VARIANCIA

Causas de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Variancia	Prueba F
Regresión lineal	111,84	1	111,84	$22.233{,}27^{xxx}$
Residuo	4,09	814	0,00503	
Total	115,93	815		

Coeficiente de correlación: $r = 0{,}991^{xxx}$
Error standard de estimación: $I_1 = 0{,}0709$

2. *Ecuación de Schumacher* (log. V = a + b log. D + c log. H)

Ecuación obtenida: — 3,9356 + 1,8192 log. D + 0,8265 log. H

	Parámetros		
	a	b	c
Estimadores	— 3,9356	1,8192	0,8265
Variancias	0,003691	0,000823	0,000478
Prueba t	149,15 xxx	63,41 xxx	37,79 xxx
Límites de confianza inferiores	— 3,8156	1,7543	0,7814
Límites de confianza superiores	— 4,0556	1,8741	0,8716

Covariancias: Cov. (a, b) = — 0,001357
Cov. (a, c) = 0,000295
Cov. (b, c) = — 0,000491

ANALISIS DE VARIANCIA

Causas de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Variancia	Prueba F
Regresión lineal	332,60	2	166,30	11.897,18 xxx
Residuo	11,36	813	0,01398	
Total	343,96	815		

Coeficientes de correlación: Total: $R = 0{,}992^{xxx}$

$r_{VD} = 0{,}953^{xxx}$

$r_{VH} = 0{,}899^{xxx}$

$r_{DH} = 0{,}782^{xxx}$

Error standard de la estimación: $I_2 = 0{,}1084$

CUADRO Nº 2

TABLA DE VOLUMENES STANDARD DE PINO MARITIMO

(Volumen expresado en metros cúbicos)

Ecuación obtenida: $V = 0{,}02984 + 0{,}0000361\ D^2H$

Clase diamétrica (cm.)	Altura (m.)				
	10	15	20	25	30
16	0,122	0,169	0,215		
18	0,147	0,205	0,264		
20	0,174	0,247	0,319		
22	0,205	0,292	0,379		
24	0,238	0.342	0,446	0,550	
26	0,274	0,396	0,518	0,640	
28	0,313	0,455	0,596	0,738	
30		0,517	0,680	0,842	
32		0,584	0,769	0,954	1,139
34		0,656	0,865	1,073	1,282
36		0,732	0,966	1,200	1,434
38		0,812	1,073	1,333	1,594
40		0,896	1,185	1,474	1,753
42			1,310	1,622	1,940
44			1,428	1,777	2,127
46			1,558	1,940	2,322
48			1,693	2,109	2,525
50			1,835	2,286	2,738

CUADRO Nº 3

TABLA DE VOLUMENES STANDARD DE PINO MARITIMO

(Volumen expresado en metros cúbicos)

Ecuación obtenida: $\log. V = -3{,}9356 + 1{,}8192 \log. D + 0{,}8265 \log. H$

Clase diamétrica (cm.)	Altura (m.)				
	10	15	20	25	30
16	0,121	0,168	0,209		
18	0,150	0,209	0,265		
20	0,181	0,253	0,321		
22	0,215	0,301	0,382		
24	0,252	0,352	0,448	0,539	
26	0,292	0,407	0,518	0,622	
28	0,334	0,467	0,593	0,713	
30		0,529	0,672	0,807	
32		0,595	0,756	0,908	1,054
34		0,664	0,843	1,014	1,175
36		0,736	0,936	1,125	1,306
38		0,813	1,033	1,242	1,442
40		0,891	1,132	1,362	1,581
42			1,239	1,489	1,730
44			1,352	1,626	1,888
46			1,462	1,758	2,042
48			1,581	1,901	2,208
50			1,746	2,099	2,438

V.— DISCUSION Y CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, las ecuaciones estimadas fueron las siguientes:

Variable Combinada:

$$V = 0{,}02984 + 0{,}0000361\ D^2H$$

Schumacher:

$$\log.\ V = —3{,}9356 + 1{,}8192\ \log.\ D + 0{,}8265\ \log.\ H$$

Todos los estimadores de los parámetros obtenidos, presentaron pruebas t significativas al nivel de 0,1 %.

Los intervalos de confianza para los estimadores de los parámetros indican una excelente precisión (amplitud de intervalo $< 10\ \%$), excepto para $\hat{a}$ en la ecuación de la Variable Combinada (amplitud del intervalo $\approx 30\ \%$).

La prueba F del análisis de variancia de la regresión, presenta, para las dos ecuaciones, resultados significativos al nivel 0,1 %.

Finalmente, el coeficiente de correlación para la ecuación de la Variable Combinada, es significativo al nivel 0,1 %, del mismo que el coeficiente de correlación total y los simples, en la ecuación de Schumacher.

De lo expresado anteriormente, se deduce la gran precisión con que este trabajo fue desarrollado, lo cual es debido, sin duda, al hecho de que el número de árboles analizados es muy alto: 816. Por otra parte, la variabilidad entre árboles está también considerablemente reducida, dado que todos los árboles en estudio fueron cortados en un área limitada, con condiciones muy homogéneas.

En los cuadros Nos. 2 y 3, se presentan las tablas de volúmenes standard calculadas por las ecuaciones de la Variable Combinada y de la Schumacher, respectivamente. Como se puede observar, existen diferencias de importancia variable, en la estimación de los volúmenes. Para la clase diamétrica 16, se nota una leve superioridad de la Variable Combinada, pero para diámetros mayores, la de Schumacher proporciona estimaciones más altas, las que en la clase altimétrica 10, se presentan en forma ascendente, siendo las diferencias del orden de 2-7 %.

En la clase altimétrica 15, cuando el diámetro alcanza los 40 cm., la Variable Combinada comienza a proporcionar estimaciones ligeramente mayores del orden de 2 a 3 %. En la clase altimétrica 20, la ecuación de Schumacher presenta volúmenes mayores aunque de poca importancia, solamente en la faja comprendida entre los 18 y 26 cm., luego se invierte la situación, con diferencia entre 2 a 5 %. En las clases altimétricas 25 y 30, la ecuación de la Variable Combinada proporciona, siempre, estimaciones mayores: 4 a 9 % y 8 a 12 %, respectivamente. En general, cuando el diámetro es mayor de 40 cm., o la altura mayor de 20 m., la ecuación de la Variable Combinada ofrece valores considerablemente mayores que la de Schumacher (más del 5 %).

De acuerdo con lo expresado en párrafos anteriores, la comparación entre las dos ecuaciones se efectúa, considerando los errores standard respectivos, debidamente ponderados. Los valores obtenidos para el presente trabajo son los siguientes:

Variable Combinada	I_1	0,0709
Schumacher	I_2	0,1084

Por lo tanto, se concluye que la ecuación de la Variable Combinada presenta una mejor estimación de los volúmenes, en comparación con la de Schumacher.

Los resultados obtenidos concuerdan con los de Golding y Hall (1961), los que realizaron comparaciones de 25 ecuaciones en *Pinus banksiana, Picea glauca* y *Populus tremuloides* y destacaron la fórmula de la Variable Combinada, atendiendo simultáneamente a la precisión y a su facilidad de uso.

En comparación con los resultados de Spurr (1951) en *Picea,* existen discrepancias, ya que en el conjunto de la serie de datos estudiados, no verificó diferencias significativas entre dichas fórmulas.

Respecto a la facilidad de uso de ambas fórmulas, cuando la determinación de las ecuaciones es efectuada usando la computación electrónica, como en este trabajo, el tiempo requerido es prácticamente el mismo para las dos fórmulas. Sin embargo, cuando no se dispone de esa facilidad, la ecuación de Schumacher, por requerir el manejo de logaritmos y además por tener tres parámetros en vez de dos, demanda un tiempo considerablemente mayor (no menos del triple), lo que lo hace poco recomendable, en comparación con la Variable Combinada.

La procedencia de la semilla y las condiciones ambientales influyen, sin duda, sobre los hábitos de crecimiento de una especie determinada, modificando, por lo tanto, la relación: volumen vs. diámetro y altura. Por otro lado, esta relación también es diferente de especie en especie. Como ya fue visto en la revisión bibliográfica, algunos esfuerzos fueron realizados con el propósito de esclarecer esta situación y determinar si existe una ecuación que sea la mejor para todos los casos, o si cada caso o grupo de casos, exige una solución particular. Los resultados obtenidos indican, sin embargo, que muchas investigaciones en todas las regiones forestales son todavía necesarias para disipar las dudas existentes.

Conclusión final

Se determinó para la especie "Pino Marítimo" (*Pinus pinaster* Ait.) del Parque Nacional de Carrasco (Uruguay), que una tabla de volúmenes standard es obtenida de una manera más precisa y generalmente más rápida, utilizando la ecuación de la Variable Combinada, en comparación con la de Schumacher. Más investigaciones son necesarias considerando otras fórmulas, especies y condiciones ambientales.

VI.— RESUMEN

Se comparan dos ecuaciones para la construcción de tablas de volúmenes standard: la de la Variable Combinada ($V = a + b\ D^2H$) y la de Schumacher ($\log. V = a + b \log. D + c \log. H$), con el objetivo de determinal cuál de ellas tiene mayor precisión para estimar los volúmenes comerciales (diámetro del tope = 10 cm.) de "Pino Marítimo" (*Pinus pinaster* Ait.).

El material experimental está constituido por 816 árboles cortados en el Parque Nacional de Carrasco (Uruguay), los que tienen las siguientes características dasométricas, en promedio: DAP: 28,1 cm.; altura comercial, 16,8 m.; volumen comercial (con corteza): 0,582 m^3.

La determinación del volumen de cada árbol fue efectuada usando la fórmula de Huber, con intervalos de mensura de 2 m.

Se determinó, para el caso en estudio, que una tabla de volúmenes standard es obtenida de una manera más precisa y generalmente más rápida, usando la fórmula de la Variable Combinada, en comparación con la de Schumacher. Las diferencias más grandes entre las dos fórmulas ocurren para árboles grandes (más de 40 cm. de diámetro o 20 m. de altura), en los cuales se registran diferencias favorables a la Variable Combinada, del orden de 5-12 %. Para árboles con dimensiones menores, las diferencias no van más allá del 4 %, favorable a una u otra fórmula.

VII.— SUMMARY

Two equations for the calculation of standard tables of volumes are compared, namely, the equation of Combined Variable ($V = a + b\ D^2H$), and Schumacher's equation (log. $V = a + b$ log. $D + c$ log. H), with the aim of determining which one is better to estimate comercial volumes, with top diameter equal to 10 cm. in trees of "*Pinus pinaster* Ait.".

The data studied were obtained from 816 trees, cut down from the Parque Nacional de Carrasco (Uruguay), with the following dasometric averages: diameter (at breast height): 28,1 cm.; commercial height (top diameter = 10 cm.): 16,8 m.; commercial volume (with bark): 0,582 m^3.

The volume of each tree was determined by Huber's formula with measures at intervals of 2 m.

For the case studied, the standard table of volumes can be obtained more precisely, and generally quicker, with the aid of the equation of Combined Variable, as compared to Schumacher's formula. The highest differences between these equations occur for big trees (over 40 cm. in diameter, or 20 m. in height), when the equation of Combined Variable gives values 5 to 12 % higher. For trees of smaller dimensions differences are less then 4 % between the formulas.

VIII.— BIBLIOGRAFIA

1. BONILLA, J. A. y BOTTAZZI, J. A. (1964).— Primera contribución dasométrica. Evaluación de los rendimientos del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco. Fac. Agr. Montevideo. *Bol. Dep. For.*, 9: 1-20.
2. BONILLA, J. A.; ROLFO, M. y RAVA, C. (1964).— Quinta contribución dasométrica. Evaluación de la calidad de sitio del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco en base a características edafológicas. Fac. Agr. Montevideo. *Bol. Dep. For.*, 12: 1-9.
3. BONILLA, J. A. y BECKMAN, R. (1964).— Sexta contribución dasométrica. Evaluación de los rendimientos del Pino Marítimo en la Zona de Carrasco (2ª parte). Fac. Agr. Montevideo. *Bol. Dep. For.*, 12: 10-19.
4. BONILLA, J. A.; ROSS, P. y BUXEDAS, M.— Tablas de volúmenes comerciales de Pino Marítimo (*Pinus pinaster* Ait.). Fac. Agr. Montevideo, 13 p. (En prensa.)
5. BRUCE, D. and SCHUMACHER, F. X. (1950).— *Forest Mensuration,* 3ª ed. Mc Graw-Hill, 483 p.
6. CHAPMAN, H. y MEYER, W. (1949).— *Forest Mensuration.* Mac Graw-Hill, 522 p.

7. FURNIVAL, G. M. (1961).— An index for comparing equations used in costructing volumes tables. *Forest Science*, 7: 337-41.
8. GOLDING, D. L. and HALL, O. F. (1961).— Tests of precision of cubic foot tree volume equations. *Forest Chronicle*, 37: 123-32.
9. HEINSDIJK, D. (1959).— Volumes do Pinheiro. Serviço Florestal. Rio de Janeiro. *Bol. Serv. Flor.*, 1: 1-40.
10. HELIRIGL, B. (1964).— Observazioni teoriche sulle equazioni stereometriche. *Ital. For. Mont.*, 19: 225-53.
11. HONER, T. G. (1965).— A new total cubic foot volume function. *Forest Chronicle*, 41: 476-93.
12. HUSCH, B. (1963).— *Forest mensuration and statistics*. The Ronald Press, 474 p.
13. IMPERIAL FORESTRY BUREAU (1940/1966). *Forestry Abstracts*. Oxford.
14. INSTITUTO FORESTAL (1962).— Tablas de volumen para *Pinus radiata* en Chile. Santiago. *Boletín Técnico*, 1: 1-30.
15. KORSÜN, F. (Stem volume as a function of height and D.B.H.) (1965).— Vuzkum. Ost. Lesn. C.R.S. Nº 8. Citado en *Forestry Abstracts*, 19. (Resumen Nº 3.270.)
16. LAFFITTE, J. C.; MEZZOTTONI, C. y BONILLA, J. A. (1964).— Segunda contribución dasométrica. Tablas de volumen standard para *Pinus pinaster*. Fac. Agr. Montevideo. *Bol. Dep. For.*, 10: 1-9.
17. LEIGHTON, J. G. (1967).— Tablas de volumen para Pino Insigne. Chile. *Bosq. Maderas*, 1: 39-44.
18. LOJAN, L. (1966).— Una fórmula para estimar volúmenes de un bosque tropical húmedo. *Turrialba*, 16: 67-72.
19. LONGHI, G. (1952).— Tavola di cubatura dei Pino Nero, Pino Domestico e Pino Marittimo dei Boschi Emiliani. *Ital. For. Mont.*, 7: 104-5.
20. MORETTI FILHO, J. (1962).— Normas e recomendações para a Preparação de Trabalhos Cientificos. E.S.A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba. *Boletim de Divulgação Nº 2,* 1-34.
21. PARDE, J. (1961).— *Dendrométrie*. Ecole National des Eaux et Fôrets. 350 p.
22. PIMENTEL GOMES, F. y NOGUEIRA, I. R. (1963).— *Cálculo diferencial,* 4ª ed. E.S.A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba, 118 p.
23. PIMENTEL GOMES, F. e NOGUEIRA, I. R. (1964).— *Regressao e covariancia*. E.S.A. "Luiz de Queiroz". Piracicaba, 45 p.
24. PIMENTEL GOMES, F. (1966).— *Curso de estatistica experimental*, 3ª ed. 404 p. + 15 tablas. Piracicaba SP.
25. REIS, J. (1966).— *Preparo de artigos técnicos*. Redação técnica. E.S.A. "Luiz de Queiroz", 46 p.

26. RUIZ-DANA LARRARTE. J. M. (1963).— Estudio de los cocientes de forma de *Pinus sylvestris y Pinus pinaster* en Galicia. Tablas de volúmenes para estas especies. *Montes,* 19: 485-96.

27. SCHUMACHER, F. X. and SANTOS HALL, F. (1963).— Logarithmic expression of timber — Tree volume. *Journ. Agr.* Res., 47: 719-34.

28. SIMPFENDORFER, K. J. (1959).— Tree volume equations. For. Comm. of Victoria. Australia. *For. Techn. Pap.,* 2: 15-19.

29. SOEST, J. Van. (1959).— Stem form and volume of Japanese Larch in the Netherlands. Wageningen. *Uitver. Versl. Bosbou.,* 4: 1-75.

30. SOULOUMIAC, P. (1947).— Application des méthods statistiques a l'Etablissement d'un tarif de cubage. *Rev. Eaux. For.,* 85: 649-67.

31. SPURR, S. (1951).— *Forest Inventory. The Ronald Press,* 1ª ed., 476 p.

32. VERUETTE FUENTES, J. (1963).— Elaboración de una tabla fotogramétrica de volúmenes para los bosques de coníferas del Estado de Durango. Inst. Nac. Inv. For. México. *Boletín Técnico,* 5: 1-36.

33. WAUTHOZ, L. (1964).— Du cubage des Arbres en function du Paramètre de Forme. *Bull. Soc. For. Belg.,* 71: 365-93.