

PEDECIBA Informática
Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Reporte Técnico RT 08-03

Métodos cuasi Monte Carlo

Sergio Nesmachnow

2008

Métodos cuasi Monte Carlo
Nesmachnow, Sergio
ISSN 0797-6410
Reporte Técnico RT 08-03
PEDECIBA
Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo, Uruguay, 2008

Métodos cuasi Monte Carlo

Sergio Nesmachnow

Resumen

Los métodos cuasi Monte Carlo constituyen una alternativa al método Monte Carlo tradicional para alcanzar resultados aproximados a problemas numéricos utilizando técnicas estadísticas. Este documento presenta conceptos básicos sobre los métodos cuasi Monte Carlo. Se analizan los principales aspectos teóricos involucrados en la definición del método, las formulaciones para el error cometido por el método y se presenta el análisis de dos trabajos que aplican técnicas estadísticas útiles en la práctica para obtener estimaciones del error.

1. Introducción

Un método Monte Carlo tradicional utiliza N puntos aleatorios para hallar una estimación de la solución de un problema con un error promedio de orden $O(1/\sqrt{N})$. Sin embargo, existen conjuntos de N puntos para los cuales el valor absoluto del error es inferior que el valor promedio de orden $O(1/\sqrt{N})$. Los métodos cuasi Monte Carlo proponen trabajar sobre la idea de construir explícitamente conjuntos de N puntos que permitan alcanzar una mayor precisión que en un método Monte Carlo tradicional.

El esquema algorítmico de un método cuasi Monte Carlo es similar al de un método Monte Carlo tradicional, salvo que se utiliza un conjunto de puntos construido *determinísticamente* para evaluar la función relevante para el problema a resolver. Como ejemplo, para un problema de estimación de la integral de una función $f(\mathbf{u})$, la formulación de un método cuasi Monte Carlo se corresponde con la expresión presentada en la Ecuación 1.

$$\int_B f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ \mathbf{x}_n \in B}}^N f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

En la Ecuación 1, B es un subconjunto del dominio de integración $I = [0, 1]^s$ y $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in I$ es un conjunto de puntos seleccionados determinísticamente para tratar de minimizar el error de aproximación en la estimación.

Para el problema de integración de funciones con un nivel de regularidad relativamente bajo, la elección apropiada del conjunto de puntos en un método cuasi Monte Carlo permite alcanzar una cota de error determinística de orden $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$, siendo s la dimensión de I . En casos especiales es posible alcanzar mejores valores de precisión cuando se trabaja con integrandos suficientemente regulares.

Las ventajas de los métodos cuasi Monte Carlo respecto a los métodos Monte Carlo tradicionales pueden resumirse en:

- La existencia de cotas de error determinísticas para los métodos cuasi Monte Carlo, derivadas de la naturaleza determinista de los procedimientos algorítmicos involucrados.
- La mayor precisión alcanzada en la estimación por los métodos cuasi Monte Carlo para un esfuerzo computacional prefijado (por ejemplo, un número determinado de evaluaciones de la función a integrar) respecto a la precisión alcanzada por un método Monte Carlo tradicional.
- Se evitan los problemas relacionados con la generación de números aleatorios, necesarios en los métodos Monte Carlo tradicionales, ya que en los métodos cuasi Monte Carlo los puntos se generan mediante procedimientos algorítmicos constructivos y deterministas.

Al igual que para los métodos Monte Carlo tradicionales, además del esquema estándar para la resolución de problemas de integración existen variantes de los métodos cuasi Monte Carlo para resolver problemas de optimización y de conteo. En general, siempre que se disponga de un esquema de método Monte Carlo tradicional (pseudoaleatorio), será posible diseñar un método cuasi Monte Carlo como su contraparte determinista, mediante una elección de puntos conveniente tomando en cuenta el problema a resolver.

Los principales aspectos teóricos involucrados en el estudio de los métodos cuasi Monte Carlo comprenden el análisis de las formulaciones para el error cometido por el método (en particular, desarrollado para el problema de estimación de integrales) y la construcción explícita de conjuntos de puntos que garanticen errores pequeños para el problema en cuestión. El resto del documento aborda estos aspectos, organizándose del modo que se describe a continuación: la Sección 2 describe la formulación genérica de un método cuasi Monte Carlo para la resolución de un problema de integración numérica, analizando el concepto de *discrepancia*, utilizado para cuantificar las relaciones entre valores de una secuencia de números cuasialeatorios y los conceptos relacionados con la cota de error para el problema. La Sección 3 presenta algunos mecanismos clásicos para la construcción de secuencias de baja discrepancia para ser utilizadas en los métodos cuasi Monte Carlo y da una visión general sobre los conceptos de mallas y secuencias con distribuciones regulares. La Sección 4 presenta el análisis de dos trabajos que aplican técnicas estadísticas útiles en la práctica para obtener estimaciones del error cometido por el método cuasi Monte Carlo. Por último, la sección 5 presenta breves conclusiones sobre los conceptos estudiados en las secciones precedentes.

2. Métodos cuasi Monte Carlo para integración numérica

2.1. Formulación genérica

La formulación genérica de un método cuasi Monte Carlo para la resolución de un problema de integración numérica corresponde a la aproximación presentada en la Ecuación 2.

$$\int_{I^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) \quad (2)$$

En la Ecuación 2, el dominio de integración es el hipercubo cerrado de dimensión s , $I^s = [0, 1]^s$ y los puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in I^s$. En una formulación genérica los puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ se consideran como una secuencia infinita $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en I^s . El requisito fundamental para la utilidad del método es su *convergencia* al valor de la integral que se desea calcular, siendo necesario contar con una secuencia de puntos $\{\mathbf{x}_n\}$ que garantice que se cumpla la expresión de la Ecuación 3 para una clase razonable de integrandos (por ejemplo, las funciones continuas en I^s).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) = \int_{I^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (3)$$

La condición para que se verifique la convergencia de un método cuasi Monte Carlo aplicado al problema de integración implica que la secuencia de puntos $\{\mathbf{x}_n\}$ sea *uniformemente distribuida* en I^s .

En lenguaje coloquial, para garantizar la convergencia en el problema de estimación de la integral un método cuasi Monte Carlo debe utilizar puntos “parejamente distribuidos” en el dominio de integración. Los puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ deben ser escogidos tal que su distribución empírica sea cercana a la distribución uniforme en I^s . Para formalizar estas ideas se utiliza el concepto de *discrepancia* respecto a la distribución uniforme, que se presenta en la siguiente sección.

2.2. Discrepancia

El concepto de discrepancia proporciona una métrica cuantitativa de la desviación de una secuencia de números respecto a la distribución uniforme. La discrepancia juega un rol fundamental en los métodos cuasi Monte Carlo, dado que es considerada como uno de los criterios fundamentales para la selección de puntos para el problema de integración numérica, e interviene en las formulaciones de las cotas de error determinísticas del método.

Sea un conjunto de puntos $P = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in I^s$. Para un subconjunto arbitrario B en I^s se define la función de conteo que indica cuántos elementos de P pertenecen a B mediante la expresión en la Ecuación 4, donde c_B es la función característica del conjunto B ($c_B(\mathbf{x}) = 1$ si y solo si $\mathbf{x} \in B$).

$$A(B; P) = \sum_{n=1}^N c_B(\mathbf{x}_n) \quad (4)$$

Para una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{B} \subseteq I^s$ medibles en el sentido de Lebesgue, la métrica *discrepancia* para un conjunto de puntos P se define mediante la expresión presentada en la Ecuación 5, donde λ_s es la medida de Lebesgue s -dimensional.

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right| \quad (5)$$

El concepto genérico de discrepancia presentado en la Ecuación 5 se especializa para definir dos métricas útiles utilizando familias de subconjuntos \mathcal{B} :

- La *discrepancia estrella* $D_N^*(P) = D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de un conjunto de puntos P se define mediante la expresión $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}^*; P)$, considerando a \mathcal{J}^* , la familia de subintervalos de I^s de la forma $\prod_{i=1}^s [0, u_i]$.
- La *discrepancia extrema* $D_N(P) = D_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de un conjunto de puntos P se define mediante la expresión $D_N(P) = D_N(\mathcal{J}; P)$, considerando a \mathcal{J} , la familia de subintervalos de I^s de la forma $\prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$.

Si los puntos de P están en I^s (como ocurre en la mayoría de los casos de interés práctico), se cumple que $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}_c^*; P)$ y que $D_N(P) = D_N(\mathcal{J}_c; P)$, siendo \mathcal{J}_c^* la familia de subintervalos de I^s de la forma $\prod_{i=1}^s [0, u_i]$ y \mathcal{J}_c la familia de subintervalos de I^s de la forma $\prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$.

Para cualquier conjunto P de puntos en I^s , las métricas de discrepancia definidas anteriormente cumplen la relación presentada en la Ecuación 6.

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*(P) \quad (6)$$

Existen expresiones simples para las discrepancias estrella y extrema en el caso monodimensional, que son útiles para comprender qué cantidad es cuantificada por la métrica de discrepancia. Considerando un conjunto de puntos P ordenado ($0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$), las expresiones para la discrepancia estrella y extrema presentadas en las Ecuaciones 7 y 8 corresponden a resultados presentados por Niederreiter y de Clerk, respectivamente [10].

$$D_N^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left| x_n \frac{2n-1}{2N} \right| \quad (7)$$

$$D_N(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{n}{N} - x_n \right) - \min_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{n}{N} - x_n \right) \quad (8)$$

Para una secuencia de elementos $S \in I^s$, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. S es uniformemente distribuida en I^s .
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(S) = 0$.
3. $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(S) = 0$.

El resultado previo relaciona las métricas de discrepancia estrella y discrepancia extrema con una medida cuantitativa de la distancia a la distribución uniforme. Conceptualmente, en el caso multidimensional puede interpretarse que una secuencia de números de baja discrepancia tiende a no agrupar puntos y por tanto a lograr un mejor cubrimiento del hipercubo de dimensión s . El concepto de discrepancia puede extenderse para dominios de integración más genéricos que el hipercubo unidimensional I^s [10].

2.3. Cotas de error

Utilizando el concepto de discrepancia, es posible formular cotas determinísticas para el error de un método cuasi Monte Carlo aplicado a la resolución de un problema de integración. La formulación más simple corresponde al caso unidimensional, derivada por Koksma, que se presenta en la Ecuación 9.

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_n) \quad (9)$$

En la Ecuación 9, $V(f)$ es una variación acotada del integrando f . En el caso unidimensional, la definición de variación fue introducida por Jordan [6], siendo posteriormente extendida para el caso multidimensional por Hardy [5]. La cota de error presentada en la Ecuación 9 es válida para cualquier conjunto de puntos $P = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in [0, 1]$.

En el caso multidimensional, la formulación para la cota de error es análoga a la presentada en la Ecuación 9, pero considerando la definición de variación total en múltiples dimensiones. La expresión del error se presenta en la Ecuación 10, fue derivada por Hlawka, y habitualmente se la denomina desigualdad de Koksma-Hlawka.

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n) - \int_0^1 f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (10)$$

Las cotas de error presentadas conducen a la conclusión de que aquellos conjuntos de puntos con valores bajos de discrepancia son los que garantizan errores pequeños para un método cuasi Monte Carlo aplicado a un problema de integración en el dominio I^s . Un resultado análogo se manifiesta para dominios de integración genéricos.

La utilidad práctica de los resultados teóricos presentados en esta sección está limitada por la dificultad para obtener valores exactos de la variación total de una función f . Existen referencias bibliográficas que han propuesto mecanismos de aproximación por discretización y cotas superiores para la variación de funciones, que pueden ser útiles en la práctica para la estimación del error cometido por un método cuasi Monte Carlo aplicado a un problema de integración [10].

Otra alternativa consiste en estimar el error mediante un procedimiento estadístico que incorpore un mecanismo probabilístico en la generación de la estructura del conjunto de puntos del método cuasi Monte Carlo, o diseñando algoritmos híbridos que combinen un método cuasi Monte Carlo con un Monte Carlo tradicional. La Sección 4 presenta el análisis de un procedimiento sencillo para estimar el error cometido para el problema de integración utilizando mecanismos estadísticos, basado en el trabajo de Morohosi y Fushimi [9], y una propuesta de hibridación entre un método cuasi Monte Carlo con un Monte Carlo tradicional, presentada por Tuffin [14].

3. Secuencias de baja discrepancia

Tal como se expuso en el capítulo precedente, un conjunto de puntos con baja discrepancia tiene la propiedad de cubrir un espacio de dimensión n de una manera más uniforme que una secuencia de puntos aleatorios. En un conjunto de puntos de baja discrepancia (o de números *cuasialeatorios*), cada nuevo punto es generado por un mecanismo que considera la restricción de alta correlación con números precedentes, evitando los fenómenos de agrupamiento y baja cobertura de las secuencias de puntos generadas por mecanismos pseudoaleatorios. De manera informal, un conjunto de puntos P se considera de baja discrepancia si tiene valores “pequeños” de las métricas $D_N^*(P)$ o $D_N(P)$, definidas en la Sección 2.

En la práctica, es conveniente permitir la variación del número de puntos N al resolver un determinado problema utilizando un método cuasi Monte Carlo. Por este motivo, es útil considerar procedimientos que permitan aprovechar los cálculos previamente realizados al variar el valor de N . En este contexto, la noción de *secuencia de baja discrepancia* se define para considerar secuencias de elementos S para los cuales las métricas D_N^* o D_N tienen valores “pequeños” para todo $N \geq 1$. Este tipo de secuencias son extremadamente útiles para la resolución de problemas en los cuales se computan valores en una estructura regular o grilla para la cual no es posible conocer de antemano la separación entre sus elementos necesaria para obtener resultados de alta precisión. Utilizando una secuencia de baja discrepancia es posible diseñar un algoritmo automático que varíe el número de puntos hasta alcanzar la precisión deseada, reutilizando los cálculos previos para no degradar la eficiencia computacional del método de resolución [12].

A continuación se presentan algunos mecanismos tradicionales para la construcción de secuencias de baja discrepancia. Dado que el concepto de discrepancia se relaciona con la propiedad de cubrimiento uniforme del dominio de trabajo, los métodos para generar secuencias de baja discrepancia intentan evitar los agrupamientos de puntos utilizando un esquema que considera a los puntos ya generados como “repelentes” para cada nuevo punto de la secuencia a construir. En este esquema, el objetivo de cada nuevo punto será tratar de cubrir los mayores espacios vacíos existentes entre los números previamente generados.

El mecanismo clásico para la generación de secuencias de baja discrepancia fue presentado por van der Corput en 1935, siguiendo el esquema básico de “completar los huecos” [2]. Este método continúa hoy en día siendo la base para varios generadores de secuencias de baja discrepancia utilizados en la práctica, que se presentan en las subsecciones siguientes.

3.1. Secuencias de van der Corput

Para el caso unidimensional, el resultado presentado en la Ecuación 7 permite derivar una expresión para el conjunto de puntos x_n , ya que el mínimo valor de $D_N^*(x_1, \dots, x_n)$ se alcanza para $x_n = (2n - 1)/(2N)$, con $1 \leq n \leq N$. Utilizando este conjunto de puntos para resolver el problema de integración, el método cuasi Monte Carlo resultante se corresponde con el método clásico del punto medio a trozos, en el intervalo $[0, 1)$.

Considérese la representación en base b de un entero positivo $n > 1$ utilizando dígitos d_k ; $0 \leq d_k(n) < b$, presentada en la Ecuación 11.

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n).b^k \quad (11)$$

La secuencia de van der Corput queda definida por $g_b(1), \dots, g_b(N)$, donde $g_b(n)$ es la función que revierte la representación en base b del entero n (*radical-inverse function*), presentada en la Ecuación 12.

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n).b^{(-k-1)} \quad (12)$$

La función que revierte la representación en base b del entero n corresponde a una reflexión simétrica en el punto decimal de la expresión en la Ecuación 11.

Para cualquier valor de la base b , los elementos de una secuencia de van der Corput están uniformemente distribuidos en el intervalo unitario $[0, 1]$ y forman un conjunto denso (dado un número real en $[0, 1]$, existe una subsecuencia de la secuencia de van der Corput original que converge hacia ese número).

En términos de la métrica de discrepancia, una secuencia de van der Corput cumple la propiedad de distribución presentada en la Ecuación 13.

$$D_N^*(g_b(1), \dots, g_b(N)) \leq C \cdot \frac{\log N}{N} \quad (13)$$

La secuencia binaria de van der Corput (con base $b = 2$) es el método básico que se utiliza como componente fundamental para construir secuencias de baja discrepancia en el caso multidimensional. El mecanismo de construcción de secuencias de baja discrepancia se basa en aplicar sucesivas subdivisiones del hipercubo multidimensional en sub-volúmenes de volumen constante (denominados *cajas*), cuyas caras sean paralelas a las del hipercubo original. La idea consiste en asignar un número a cada uno de los sub-volúmenes como paso previo al refinamiento de la grilla multidimensional. El refinamiento debe seguir el criterio de evitar la formación de clusters multidimensionales causada por las correlaciones existentes entre las dimensiones, teniendo como objetivo primordial la generación de secuencias sin correlaciones para cada par de dimensiones.

3.2. Secuencias de Halton

Las secuencias de Halton son una generalización de las secuencias de van der Corput para espacios multidimensionales [3]. Para un espacio de dimensión s , una secuencia de Halton se define mediante la expresión $X(n) = g_{b_1}(n), \dots, g_{b_s}(n)$, tomando como base un conjunto de números b_1, \dots, b_s primos entre sí ($b_i > 1, 0 \leq i \leq K$). En términos de la métrica de discrepancia, una secuencia de Halton cumple la propiedad de distribución presentada en la Ecuación 14.

$$D_N^*(X(1), \dots, X(N)) \leq C' \cdot \frac{(\log N)^s}{N} \quad (14)$$

Las secuencias de Halton utilizan un número primo por cada dimensión del espacio a muestrear. Tradicionalmente se utiliza la lista creciente de números primos (2 para la primer dimensión, 3 para la segunda, 5 para la tercera, etc.). Obviamente, el tiempo de cómputo necesario para la generación de la secuencia se incrementa linealmente al crecer la dimensión del espacio.

La Figura 1 presenta un ejemplo comparativo de cubrimiento del hipercubo unitario de dimensión 2 utilizando una secuencia cuasialeatoria de Halton y una secuencia pseudoaleatoria tradicional. En los gráficos se observa una mejor distribución de los puntos de la secuencia de Halton, que logra un cubrimiento más regular del espacio.

Aún cuando se comienza con un entero mayor que 1, las secuencias de Halton preservan sus propiedades básicas de distribución y baja discrepancia. Sin embargo, se han proporcionado evidencias teóricas y empíricas sobre la sensibilidad de los patrones de cubrimiento de las secuencias de Halton para espacios de altas dimensiones (como consecuencia de que la reflexión sobre el punto decimal tiende a generar una secuencia más densamente poblada cerca del origen, con

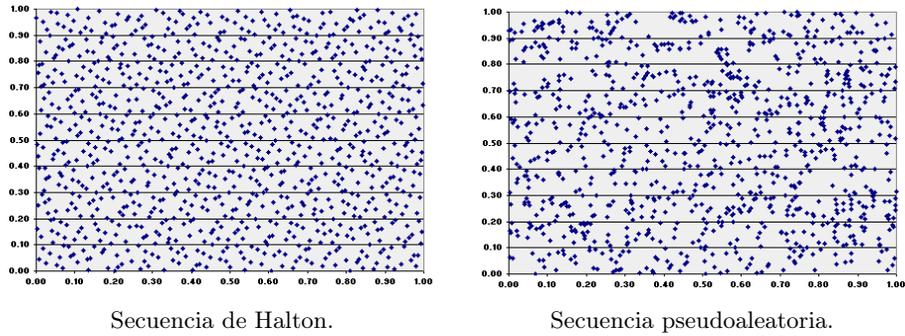


Figura 1: Cubrimiento en el hipercubo de dimensión 2.

puntos formando clusters cerca de cero). Por este motivo, se han investigado alternativas que permitieron deducir argumentos sobre las ventajas de iniciar una secuencia de Halton en un valor arbitrario $n > 1$ (o despreciar los primeros n^* términos de la secuencia) para mejorar la uniformidad de la distribución cuando se trabaja en espacios de altas dimensiones [13].

El principal problema del método tradicional de Halton es su degradación a medida que se incrementa la dimensión s del espacio en el que se trabaja. El procedimiento de generación basado en puntos uniformemente distribuidos en la región $[0, 1]^s$ se va haciendo cada vez más difícil a medida que se incrementa la dimensión, debido a que el espacio a cubrir es cada vez más amplio. Una secuencia de Halton multidimensional tiene un ciclo muy largo, dado que utiliza el enésimo número primo, por lo cual se requiere de varios pasos para completar una “caminata” en $[0, 1]^s$ para generar un refinamiento de la malla. En la práctica, debido al fenómeno de correlación que surge entre las coordenadas, el método de Halton está limitado a un tamaño máximo de dimensión s entre 6 y 8.

La Figura 2 presenta los ejemplos de secuencia de van der Corput (dimensión $s = 1$, base $b = 2$) y de Halton (dimensión $s = 2$, base $b = 3$).

van der Corput			Halton	
0	1/2		0	1/3 2/3
1/4	3/4		1/9	4/9 7/9
1/8	5/8		2/9	5/9 8/9
3/8	7/8		1/27	10/27 19/27
1/16	9/16		4/27	13/27 22/27
5/16	13/16		7/27	16/27 25/27
3/16	11/16		2/27	11/27 20/27
7/16	15/16		5/27	14/27 23/27
			8/27	17/27 26/27

Figura 2: Ejemplo de secuencias de van der Corput y Halton.

3.3. Conjunto de Hammersley

El conjunto de Hammersley de tamaño N para un espacio de dimensión s se define utilizando una secuencia de Halton, mediante la expresión $X(n) = g_{b_1}(n), \dots, g_{b_{s-1}}(n)$; para $1 \leq n \leq N$ [4].

Los puntos del conjunto de Hammersley proporcionan un mejor cubrimiento que los de la secuencia de Halton para un espacio de dimensión s . En términos de la métrica de discrepancia, los puntos del conjunto de Hammersley cumplen la propiedad presentada en la Ecuación 15.

$$D_N^*(X(1), \dots, X(N)) \leq C' \cdot \frac{(\log N)^{s-1}}{N} \quad (15)$$

3.4. Secuencias de Faure y Sobol

Las secuencias de Faure y Sobol tienen una formulación similar a las secuencias de Halton, pero utilizan una única base para todas las dimensiones, e incorporan un mecanismo de reordenamiento de elementos.

La base utilizada en una secuencia de Faure es el menor número primo mayor o igual a la dimensión del espacio del problema (se utiliza base 2 para el caso unidimensional). Esta elección reduce la demanda computacional requerida para la generación de secuencias cuasialeatorias por parte del método de Halton. Por ejemplo, para un espacio de dimensión 50 la secuencia de Halton requiere utilizar el quincuagésimo número primo (229), mientras que el método de Faure utiliza como base el primer número primo superior a 50 (53). De esta manera, el mecanismo de “rellenar los huecos” para evitar clusters es más eficiente desde el punto de vista computacional para el método de Faure que para el método de Halton.

Las secuencias de Sobol se definen mediante una generalización de las secuencias de van der Corput. La formulación genérica de una *secuencia de van der Corput generalizada* usando una base b corresponde a la expresión presentada en la Ecuación 16.

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} \sigma(d_k(n)) \cdot b^{(-k-1)} \quad (16)$$

Una secuencia de Sobol utiliza la base $b = 2$ para todas las dimensiones. En el caso multidimensional la secuencia se obtiene mediante una reordenación de los valores para el caso unidimensional, evitando ciertos problemas de agrupamiento en clusters que pueden ocurrir con las secuencias de Halton y Faure en altas dimensiones. Aún cuando las secuencias de Sobol se presentan como más resistentes a la degradación a medida que se incrementa la dimensión del espacio de trabajo, existe un cierto patrón repetitivo en múltiples dimensiones, que puede llevar a la formación de clusters, y que hace necesario descartar los primeros n puntos de una secuencia de Sobol para mejorar sus valores de discrepancia.

En el caso de la construcción multidimensional de las secuencias, los métodos de Faure y de Sobol utilizan un reordenamiento de los vectores cuasialeatorios, aplicándolo para cada dimensión considerada.

Tomando en cuenta el teorema que demuestra la validez teórica de la desigualdad de Koksma-Hlawka (Ecuación 9), la utilización de las secuencias de

Halton (y sus variantes de Faure y Sobol) y los puntos de los conjuntos de Hammersley conduce a una dramática reducción en el orden de magnitud de la cota tradicional del error del método Monte Carlo $O(1/\sqrt{N})$. Para un conjunto de puntos de Hammersley de N elementos la cota del error tiene orden $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$ y para una secuencia de Halton de N términos el error tiene orden $O(N^{-1}(\log N)^s)$.

3.5. Redes y secuencias con distribución regular

Los resultados teóricos sobre las cotas de los valores de discrepancia para los métodos de generación de secuencias cuasialeatorias presentados previamente involucran términos con coeficientes que tienen un crecimiento exponencial a medida que crece la dimensión del espacio de trabajo. En la práctica, este resultado limita su aplicabilidad a espacios de dimensión muy baja. Para resolver aplicaciones genéricas, es necesario contar con conjuntos de puntos y secuencias que satisfagan resultados más precisos sobre la cota de discrepancia. Las *redes* (t, m, s) y las *secuencias* (t, s) son conjuntos de puntos que por definición cuentan con muy buenas propiedades de distribución, permitiendo derivar cotas precisas y útiles para sus valores de discrepancia.

El concepto de red (t, m, s) está motivado por una propiedad especial de toda secuencia de van der Corput x_0, \dots, x_N en una base b . Dados dos enteros $k \leq 0$ y $m \leq 1$, considérense los b^m puntos x_n que cumplen $kb^m \leq n < (k+1)b^m$. Cada intervalo $[ab^{-m}, (a+1)b^{-m}]$, siendo $a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < b^m$ contiene exactamente un punto x_n , con $kb^m \leq n < (k+1)b^m$.

Fijando la dimensión $s \geq 1$ y la base $b \geq 2$. Un *intervalo elemental en base b* es un subintervalo E de $[0, 1]^s$ dado por la expresión de la Ecuación 17, donde $a_i, d_i \in \mathbb{Z}, d_i \geq 0, 0 \leq a_i \leq b^{d_i}$ para todo $1 \leq i \leq s$.

$$E = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i}] \quad (17)$$

Dados $t, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq m$, una *red* (t, m, s) ó *malla* (t, m, s) en base b es un conjunto P de b^m puntos en $[0, 1]^s$ tal que cada intervalo elemental de volumen b^{t-m} contiene exactamente b^t puntos de P .

Dado $t \in \mathbb{Z}, t \leq 0$, un conjunto de puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ es una *secuencia* (t, s) en base b si para todo par de enteros $k \geq 0, m > t$, el conjunto de puntos \mathbf{x}_n que cumple $kb^m \leq n < (k+1)b^m$ es una *red* (t, m, s) en base b .

Como fue mencionado, la estructura de las redes (t, m, s) y secuencias (t, s) permite derivar cotas precisas para sus valores de discrepancia [10]. El principal resultado sobre la discrepancia de una secuencia (t, s) corresponde a la expresión presentada en la Ecuación 18.

$$D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \leq C \cdot \frac{(\log N)^s}{N} + O\left(\frac{(\log N)^{(s-1)}}{N}\right) \quad (18)$$

El resultado previo fundamenta la utilidad de las redes (t, m, s) y secuencias (t, s) como estructuras base para la aplicación de métodos cuasi Monte Carlo. Considerando la formulación de la desigualdad de Koksma-Hlawka, los valores más pequeños para las cotas de discrepancia se traducen en valores de cotas más pequeños para el error efectivo al utilizar un método cuasi Monte Carlo.

Las redes (t, m, s) y las secuencias (t, s) constituyen la elección óptima para minimizar las cotas de error del método [10].

El mecanismo genérico para la construcción de redes- (t, m, s) utiliza la representación en dígitos de base b y un grupo de biyecciones entre $Z_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$ y \mathbb{R} para definir los puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ [10].

4. Métodos para la estimación del error

Los conceptos presentados en la sección precedente confirman la dificultad de utilizar los resultados teóricos para determinar el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo. La aplicabilidad de la desigualdad de Koksma-Hlawka para derivar una cota práctica del error cometido está severamente limitada a problemas donde sea posible calcular la variación total de la función en cuestión, un cálculo prácticamente imposible para la mayoría de los problemas usuales. Aún trabajando con las secuencias cuasialeatorias que garantizan valores de discrepancia de orden $O((\log N)^s/N)$, asintótico para $N \rightarrow \infty$, los resultados teóricos no permiten derivar una estimación práctica del error. Este hecho constituye un grave obstáculo para la aplicabilidad de las cotas teóricas del error para los métodos cuasi Monte Carlo, a diferencia de lo que ocurre para el método Monte Carlo tradicional, para el cual existen varias formulaciones estadísticas para obtener cotas de los errores cometidos en términos de intervalos de confianza.

Considerando las dificultades mencionadas, se han propuesto técnicas para obtener estimaciones teóricas y prácticas para el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo. Los investigadores han buscado estimaciones que sean precisas numéricamente, eficientes desde el punto de vista computacional y sencillas de implementar. Esta sección presenta una reseña de dos técnicas que se basan en hibridizar la estructura de un método cuasi Monte Carlo con la de un método Monte Carlo tradicional, induciendo una estructura probabilística en los conjuntos de puntos de baja discrepancia utilizados que permite derivar estimaciones estadísticas del error cometido. Los métodos han sido estudiados en el trabajo de Morohosi y Fushimi [9], quienes derivaron cotas teóricas de error para dos técnicas de aleatorización. Siguiendo una línea de trabajo similar, el trabajo de Tuffin [14] propone una hibridación de un método cuasi Monte Carlo con un método Monte Carlo tradicional para producir un esquema aleatorizado que permite derivar estimaciones estadísticas del error cometido, basadas en formulaciones de intervalos de confianza.

4.1. Secuencias de baja discrepancia aleatorizadas

Los métodos estadísticos que permiten estimar el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo se basan en una hibridación que combina técnicas probabilistas con las secuencias determinísticas de baja discrepancia generadas por los métodos presentados en la Sección 3. El esquema genérico consiste en definir una estructura probabilística en el conjunto de puntos de una red (t, m, s) y utilizar los puntos de la red aleatorizada para definir estimadores similares a los que habitualmente se utilizan en un método Monte Carlo tradicional.

Considérese el problema clásico de integración numérica cuya formulación se presenta en la Ecuación 19.

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (19)$$

Para resolver el problema de integración numérica, un método híbrido cuasi Monte Carlo propone un esquema que utiliza j secuencias de alta discrepancia aleatorizadas $\{\mathbf{x}_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,N}$, con $j = 1, \dots, M$. Para cada secuencia se calcula la estimación puntual del valor de la integral utilizando esa secuencia, cuya formulación se presenta en la Ecuación 20.

$$\hat{I}^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i^{(j)}) \quad (20)$$

Por último, el valor estadístico estimado para la integral se obtiene mediante el promedio de los estimadores puntuales previamente calculados para cada secuencia $\{\mathbf{x}_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,N}$, con $j = 1, \dots, M$, cuya formulación se presenta en la Ecuación 21.

$$\hat{I} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{I}^{(j)} \quad (21)$$

Para estimar el error se puede utilizar la varianza de los valores evaluados, dada por la expresión presentada en la Ecuación 22.

$$\hat{I} = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{j=1}^M \left(\hat{I}^{(j)} - \hat{I} \right)^2 \quad (22)$$

Dado que el método híbrido tiene un componente aleatorio en la elección de las secuencias $\{\mathbf{x}^{(j)}\}$, para obtener un valor más preciso del error es posible derivar un intervalo de confianza basado en el Teorema Central del Límite, tal como se procede en un método Monte Carlo tradicional.

La técnica de hibridación presentada puede verse como un caso particular del método antitético, que utiliza variables aleatorias correlacionadas para lograr una reducción de la varianza del estimador puntual calculado. En un método antitético el estimador puntual de la integral se calcula mediante la expresión presentada en la Ecuación 23, siendo ω una biyección en $[0, 1]^s$.

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\omega(\mathbf{x}_i)) \quad (23)$$

En un método híbrido cuasi Monte Carlo, la función ω queda definida por el mecanismo de elección de las secuencias aleatorizadas $\{\mathbf{x}^{(j)}\}$.

4.1.1. Redes (t, m, s) con estructura probabilística

Los investigadores del área han propuesto diversos esquemas para introducir aleatoriedad en el conjunto de puntos de baja discrepancia. Como ejemplo, los trabajos que se relevan en esta sección estudian dos tipos de estructuras probabilísticas: las *redes permutadas* (*scrambled nets*) y las *redes aleatoriamente desplazadas* (*randomly shifted nets*), aunque existen otras técnicas como las *secuencias de Halton de comienzo aleatorio*.

En su trabajo de 1998 [9], Morohosi y Fushimi presentaron dos métodos estadísticos para estimar el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo para el problema clásico de integración numérica. El trabajo estudia las estructuras de redes permutadas y redes aleatoriamente desplazadas, derivando resultados teóricos para la estimación del error y presentando resultados experimentales para un conjunto de funciones de prueba. El trabajo de Tuffin [14] analiza el método híbrido cuasi Monte Carlo, estudiando la tasa de convergencia del error y la aplicación de aproximaciones basadas en el Teorema Central del Límite para derivar intervalos de confianza que acoten el error cometido. Una descripción de los métodos estudiados en ambas propuestas se presenta a continuación.

Redes permutadas

Las redes permutadas son una estructura de puntos en un espacio multidimensional de baja discrepancia propuesta por Owen en 1997 [11]. Sea $\{\mathbf{z}_i\}$ una red (t, m, s) en base b , donde $\mathbf{z}_i = (z_i^1, \dots, z_i^s)$, siendo cada $z_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} z_{ijk} b^{-k}$ para $z_{ijk} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq z_{ijk} < b$. Una red permutada $\{\mathbf{x}_i\}$, $\mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^s)$ se define por $x_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ijk} b^{-k}$, siendo $x_{ijk} \in \mathbb{Z}$ una permutación aleatoria de los valores z_{ijk} . Las permutaciones aplicadas para definir los x_{ijk} deben ser independientes entre sí, y por tanto la red permutada resultante es también una red (t, m, s) en base b .

Conceptualmente, el procedimiento de generación de una red permutada puede resumirse en la aplicación iterativa del mecanismo que a partir del conjunto de puntos original, divide en partes iguales cada eje del hipercubo unitario en b partes, permuta estas partes en un orden aleatorio, y continúa aplicándose a cada pequeña parte generada.

Redes aleatoriamente desplazadas

Las redes aleatoriamente desplazadas tienen una estructura sugerida por Cranley y Patterson, en un trabajo de 1976 [1]. Sea $\{\mathbf{z}_i\}$ una red (t, m, s) en base b , y considérese un vector aleatorio $\mathbf{X} \in [0, 1]^s$. Una red aleatoriamente desplazada $\{\mathbf{x}_i\}$ queda definida por $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{X}_i$. La técnica de aleatorización considera a la variable aleatoria Z definida por la expresión de la Ecuación 24, donde $\{\mathbf{X}\}$ es el vector de las partes fraccionales de las coordenadas de \mathbf{X} .

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\{\mathbf{x}_i\}) \quad (24)$$

Secuencias de Halton de inicio aleatorio

Una idea diferente para aleatorizar secuencias de baja discrepancia consiste en seleccionar diversos puntos de inicio. Siguiendo este enfoque, es posible definir una estructura aleatoria sobre una secuencia de Halton de dimensión s , $\{\mathbf{z}^{(n)}\} = (\mathbf{z}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{z}_s^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ (o de modo más general, sobre una red (t, m, s) en base b) mediante la elección aleatoria de un punto de inicio $T \in \mathbb{N}$ y calculando $\{\mathbf{X}^{(n)}(T)\} = \{\mathbf{z}^{n+T}\}$. La secuencia aleatorizada (dependiendo de la elección de T) se utiliza para calcular el estimador presentado en la Ecuación 25, que tiene convergencia asintótica al valor de I para $N \rightarrow \infty$.

$$\hat{I}(T, N) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{X}^{(n)}(T)) \quad (25)$$

Utilizando K replicas independientes, es posible obtener una estimación del error mediante la varianza de los valores evaluados, cuya expresión se presenta en la Ecuación 26.

$$\hat{I}(T, N, K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{X}^{(n)}(T)). \quad (26)$$

Considerando que el estimador puntual del valor de la integral se calculó mediante un mecanismo aleatorizado, es posible obtener una mejor estimación del error considerando un intervalo de confianza para el estimador, mediante el procedimiento habitualmente utilizado en el método Monte Carlo tradicional.

4.2. Estimaciones teóricas del error

El trabajo de Morohosi y Fushimi presenta resultados teóricos para estimar el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo con secuencias de baja discrepancia aleatorizadas para resolver el problema de integración numérica. Los autores analizan las técnicas basadas en redes permutadas y redes aleatoriamente desplazadas, pero considerando la relación entre una red $(t, m, s)\{\mathbf{z}_i\}$ en base b y una red aleatorizada $\{\mathbf{x}_i\}$ como definida por una biyección π , $\pi(\mathbf{z}_i) = \mathbf{x}_i$, elegida aleatoriamente en el espacio de biyecciones. La biyección π encapsula la definición de la estructura probabilística sobre la red (t, m, s) , que queda definida implícitamente.

Las estimaciones teóricas presentadas por Morohosi y Fushimi ofrecen resultados para el error cuadrático medio y para el error absoluto medio, tanto en el caso unidimensional como en el multidimensional. Los resultados teóricos son comparados mediante un análisis experimental que consiste en calcular las estimaciones de error para integrales multidimensionales de seis funciones con diferentes características (oscilatorias, con picos, gaussianas, discontinuas, etc.). El análisis comparativo permite concluir que ambos métodos reportan similares valores de precisión en la estimación de las métricas de error evaluadas.

Los autores concluyen que ambos métodos estudiados son capaces de alcanzar resultados precisos para las estimaciones de error. Analizando ambas técnicas de aleatorización de secuencias, los autores argumentan que el método basado en redes permutadas requiere una implementación compleja y demanda grandes esfuerzos computacionales, dificultándose su aplicación a problemas de gran escala. Por otra parte, el método basado en redes aleatoriamente desplazadas es conceptualmente más simple, rápido y eficaz, constituyendo, según el criterio de los autores, una mejor alternativa práctica para la estimación del error cometido por un método cuasi Monte Carlo.

4.3. Método cuasi Monte Carlo híbrido

El trabajo de Tuffin plantea utilizar como técnica de aleatorización las redes aleatoriamente desplazadas, mediante un procedimiento que se corresponde con un método antitético con función $\omega(\mathbf{z}_i) = \mathbf{z}_i + \mathbf{X}_i$. El principal objetivo del

trabajo de Tuffin consiste en determinar si existe una reducción efectiva de la varianza al utilizar el método cuasi Monte Carlo híbrido, es decir si se cumple la relación presentada en la Ecuación 27.

$$\sigma^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(\{\mathbf{z}_i + \mathbf{X}_i\})\right) < \frac{1}{N}\sigma^2(f(\mathbf{X})) \quad (27)$$

El propio Tuffin probó en un trabajo previo que el método aleatorizado tiene una velocidad de convergencia que cumple la relación presentada en la Ecuación 28, tanto para funciones con variación acotada como para no acotada [16].

$$\sigma^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(\{\mathbf{z}_i + \mathbf{X}_i\})\right) = O(N^{-2}(\log N)^{2s}) \quad (28)$$

En base a los resultados de un análisis presentado en otro artículo sobre el tema, Tuffin argumenta que la tasa de convergencia del método aleatorizado puede ser aún más rápida que la presentada en la Ecuación 28 cuando se trabaja con ciertas clases de funciones especiales [17]. Sin embargo, el contraejemplo presentado en el artículo relevado muestra que el método cuasi Monte Carlo híbrido que utiliza secuencias de baja discrepancia desplazadas puede llegar a tener una convergencia tan lenta como el método Monte Carlo tradicional. Como contrapartida, aún en los casos en que el método híbrido tiene una convergencia tan lenta como el método tradicional, se obtienen valores más reducidos de la varianza y además es posible mejorar el desempeño computacional de la técnica de estimación, ya que el método híbrido requiere un menor número de invocaciones al generador de números pseudoaleatorios que el Monte Carlo tradicional. Por estos motivos la técnica de estimación basada en el método híbrido es presentada por Tuffin como una interesante alternativa para mejorar los resultados y la eficiencia del método tradicional.

Luego de presentar la técnica del método cuasi Monte Carlo híbrido que utiliza secuencias de baja discrepancia desplazadas, Tuffin analiza cómo aplicar la aproximación de la distribución normal, utilizada en el método Monte Carlo tradicional, para obtener un intervalo de confianza para la estimación hallada por el método híbrido.

La principal diferencia entre un método cuasi Monte Carlo y el método Monte Carlo tradicional consiste en que en este último la aproximación depende del número de réplicas utilizadas (K), mientras que en un método cuasi Monte Carlo la dependencia es respecto a dos parámetros: el número de réplicas y el número de puntos en la secuencia de alta discrepancia (N). En un método Monte Carlo tradicional, para mejorar la convergencia a la aproximación normal se suele incrementar el número de réplicas K , mientras que en un cuasi Monte Carlo se suele incrementar el producto KN . En la práctica, al utilizar métodos cuasi Monte Carlo suele trabajarse con un número fijo de réplicas K , y sólo se incrementa el número de puntos N en la secuencia de baja discrepancia. El valor de K solo se utilizaría para obtener un intervalo de confianza basado en la aproximación de la distribución normal y el Teorema Central del Límite. Sin embargo, en los trabajos previos ningún investigador había incluido un estudio sobre la eficacia de este procedimiento, y por tanto no existían evidencias reales sobre si el mecanismo que mantiene un valor de K constante e incrementa

los valores de N permite que el estimador converja probabilísticamente a la distribución normal, o que siquiera mantenga la aproximación normal acotada.

El análisis de Tuffin prueba que la estrategia de mantener un valor de K constante e incrementar los valores de N no mejora la convergencia a la aproximación normal, e inclusive puede introducir errores adicionales. Los argumentos teóricos son ratificados mediante el análisis experimental considerando varias clase de funciones. Dado que la aproximación a la distribución normal no tiende a cero cuando $N.K \rightarrow \infty$, Tuffin sugiere dos alternativas para definir un intervalo de confianza para el método cuasi Monte Carlo híbrido que sea útil en la práctica: utilizar aproximaciones para la desviación estándar y para el momento absoluto centrado de orden tres, o incorporar un mecanismo de crecimiento dinámico de N y K que permita utilizar la formulación tradicional de un intervalo de confianza basado en la distribución normal.

Habiendo explorado los tópicos comentados, Tuffin sugiere como direcciones de trabajo futuro el investigar los mecanismos de variación de los parámetros N y K para hallar intervalos de confianza más precisos para un criterio de esfuerzo computacional prefijado, y explorar la utilización de las secuencias de Halton de inicio aleatorio en métodos cuasi Monte Carlo híbridos, realizando un estudio comparativo con el método basado en redes aleatoriamente desplazadas.

5. Conclusiones

Este trabajo presentó los fundamentos básicos sobre los métodos cuasi Monte Carlo. Se han descrito los mecanismos para la definición de secuencias de baja discrepancia, que caracterizan a los métodos cuasi Monte Carlo, y se han presentado las formulaciones teóricas sobre cotas del error cometido al utilizar el método. Complementariamente, se han relevado dos trabajos que presentan técnicas útiles en la práctica para estimar el error cometido al utilizar un método cuasi Monte Carlo.

Anexo

Este anexo plantea dos ejercicios cuya resolución puede ayudar a comprender los principales conceptos sobre la generación de secuencias cuasi aleatorias, la utilización del método cuasi Monte Carlo para resolver el problema de integración y la utilidad del método híbrido propuesto por Tuffin como técnica de reducción de la varianza.

Ejercicio 1

1. Implementar algoritmos para la generación de secuencias cuasialeatorias de Sobol, Halton, Faure y Niederreiter.
2. Calcular valores de discrepancia para diferentes valores de largo de la secuencia (en dimensión 1) y comparar con los resultados de un generador pseudoaleatorio (rand o Mersenne Twister).
3. Utilizar los generadores implementados para calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (29)$$

y evaluar el error cometido por cada método, considerando el valor exacto de la integral.

Ejercicio 2

Implementar el método híbrido de Tuffin para la resolución de la integral planteada en el ejercicio 5.1 del curso *Estimación Numérica Monte Carlo* (disponible en <http://www.fing.edu.uy/inco/cursos/mmc/posgrado/>) utilizando números cuasialeatorios. Comparar los resultados con los obtenidos por el método antitético (del ejercicio 5.1) y el método Monte Carlo tradicional (del ejercicio 4.2) para determinar si efectivamente se logra una reducción de varianza al utilizar el método cuasi Monte Carlo híbrido de Tuffin.

Referencias

- [1] R. Cranley, T. Patterson. Randomization of number theoretic methods for multiple integration. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 13, No. 6, pp. 904-914, 1997.
- [2] J. van der Corput. Verteilungsfunktionen I & II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Vol. 38, pp. 813-820, 1058-1066, 1935. Citado en The van der Corput Quasirandom Sequence, disponible en http://people.scs.fsu.edu/~burkardt/f_src/van_der_corput. Consultado en febrero de 2008.
- [3] J. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, Vol. 2, pp. 84-90, 1960. Citado en The van der Corput Quasirandom Sequence, disponible en http://people.scs.fsu.edu/~burkardt/f_src/van_der_corput. Consultado en febrero de 2008.
- [4] J. Hammersley. Monte Carlo methods for solving multivariable problems. *Proceedings of the New York Academy of Science*, Vol. 86, pp 844-874, 1960. Citado en The van der Corput Quasirandom Sequence, disponible en http://people.scs.fsu.edu/~burkardt/f_src/van_der_corput. Consultado en febrero de 2008.
- [5] G.H. Hardy. On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters, *The Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 37, pp. 53-79, 1905. Citado en Springer Online Reference Works, disponible en <http://eom.springer.de/h/h046400.htm>. Consultado en diciembre de 2007.
- [6] C. Jordan. Sur la série de Fourier. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie Mathematique*, Vol. 92, No. 5, pp. 228-230, 1881. Citado en Springer Online Reference Works, disponible en <http://eom.springer.de/f/f041090.htm>. Consultado en diciembre de 2007.
- [7] J. Li, P. Winker. Time series simulation with quasi Monte Carlo methods. *Computational Economics*, Vol. 21, No. 1-2, pp. 23-43, 2003.
- [8] D. Mcleish. Computer intensive methods for stochastic models in finance. Disponible en línea en <http://www.stats.uwaterloo.ca/~dlmcleis/s906/>. Consultado en febrero de 2008.
- [9] H. Morohosi, M. Fushimi. A practical approach to the error estimation of quasi-Monte Carlo integrations. In *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods*, H. Niederreiter and J. Spanier (eds.), pp. 377-390, Springer, 1998.
- [10] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [11] A. Owen. Monte Carlo variance of scrambled net quadrature. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 34, No. 5, pp. 1884-1910, 1997.
- [12] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling. Quasi- (that is, sub) random sequences. §7.7 in *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., Cambridge University Press, pp. 299-306, 1992.

- [13] S. K. Sen, T. Samanta, A. Reese. Quasi- versus pseudo-random generators: discrepancy, complexity and integration-error based comparison. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 2, No. 3, pp. 621-651, 2006.
- [14] B. Tuffin. Randomization of quasi-Monte Carlo methods for error estimation: survey and normal approximation. *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 10, No. 3-4, pp 617-628, 2004.
- [15] B. Tuffin. On the use of low discrepancy sequences in Monte Carlo methods. *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 2, No. 4, pp 295-320, 1996.
- [16] B. Tuffin. Variance reductions applied to product-form multi-class queuing network. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol. 7, No. 4, pp. 478-500, 1997.
- [17] B. Tuffin. Variance reductions order using good lattice points in Monte Carlo methods. *Computing*, Vol. 61, No. 4, pp. 371-378, 1998.