



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

DINÁMICA SECULAR DE SISTEMAS RESONANTES COPLANARES

Aplicaciones en el Sistema Solar y en sistemas
extrasolares

Juan Andrés Pons Vuolo

Programa de Posgrado en Física, opción Astronomía
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Setiembre de 2022



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

DINÁMICA SECULAR DE SISTEMAS RESONANTES COPLANARES

Aplicaciones en el Sistema Solar y en sistemas
extrasolares

Juan Andrés Pons Vuolo

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, opción Astronomía, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magister en Física, opción Astronomía.

Director:

D.Sc. Tabaré Gallardo

Montevideo – Uruguay

Setiembre de 2022

Pons Vuolo, Juan Andrés

DINÁMICA SECULAR DE SISTEMAS
RESONANTES COPLANARES / Juan Andrés Pons
Vuolo. - Montevideo: Universidad de la República,
Facultad de Ciencias, 2022.

XI, 101 p. 29, 7cm.

Director:

Tabaré Gallardo

Tesis de Maestría – Universidad de la República,
Programa en Física, opción Astronomía, 2022.

Referencias bibliográficas: p. 88 – 94.

1. Dinámica orbital, 2. Resonancias, 3. Semi-analítico,
4. Secular. I. Gallardo, Tabaré, . II. Universidad de
la República, Programa de Posgrado en Física, opción
Astronomía. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Lic. Prof. Julio Fernández

D.Sc. Arturo Martí

D.Sc. Adrián Rodríguez

D.Sc. Cecilia Mateu

D.Sc. Tabaré Gallardo

Montevideo – Uruguay
Setiembre de 2022

*A Adriana Vuolo, Juan Lorenzo
Pons y Andrea Amorena.*

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a todos los que me apoyaron y dieron energías positivas para que lograra culminar esta tesis.

Primero que nada agradecer a mi familia y amigos que han estado presente. En particular a Andrea Amorena, Adriana Vuolo, Adriana Gomes, Martín Amorena, Ruth “Lita” Gomes, Emilio Cortés, Sofía Peduto, Joaquín Oliveira y Rafael Velazquez.

Luego, quiero dar las gracias a mi genial tutor Tabaré Gallardo, que estuvo presente a lo largo de toda la tesis y planteó preguntas clave que me hicieron pensar y repensar muchos aspectos de la investigación.

Quisiera agradecer a todo el comité resonante que supimos disfrutar en plena pandemia. Gracias a ellos y a sus críticas constructivas pude ir forzándome a conseguir cada vez mejores resultados. Sus miembros, además del autor y del tutor, solían ser: Cristian Giuppone, Matías Cerioni, Adrián Rodríguez y Fernando Roig. También formó parte del comité Cristian Beaugé, pero quisiera hacer una mención especial debido a su gran disposición a contestar dudas y a los múltiples recursos compartidos para ayudarnos a realizar nuestro estudio.

También quiero reconocer a algunos profesores cuyos cursos y consejos fueron fundamentales en mi formación que son Romina Di Sisto, Lucía Gramajo y, nuevamente, Cristian Giuppone.

Por último quiero agradecer a lo que fue lo más parecido a un compañero de maestría, Emilio Viera por las incontables conversaciones por chat dándonos apoyo mutuo.

*“Equipado con sus cinco
sentidos, el Hombre explora el
Universo que lo rodea y a sus
aventuras las llama Ciencia.”*

Edwin Powell Hubble

RESUMEN

En esta tesis investigamos la evolución secular resonante de un sistema en el marco del problema de 3 cuerpos elíptico y plano. Comenzamos el estudio atacando el problema restringido, es decir, el de un asteroide orbitando una estrella el cual es perturbado por un planeta. Luego extendemos el estudio al problema general en donde 2 planetas se perturban mutuamente. En ninguno de los 2 casos se imponen restricciones sobre la excentricidad en la órbita de ninguno de los objetos.

La metodología utilizada se basa en un modelo semi-analítico (Gallardo, 2020; Gallardo, T. et al. 2021) que consiste en promediar numéricamente la función perturbadora resonante y en la conservación del invariante adiabático, la cual permite predecir el comportamiento a largo plazo. Para excentricidades bajas obtenemos resultados similares a los de otros trabajos en donde los centros de libración se mantienen constantes. Por otro lado, para excentricidades de moderadas a altas encontramos una representación gráfica tridimensional que puede ser útil para entender y predecir la evolución secular tanto de los elementos orbitales de los objetos como del centro de libración, el cual en general ya no se mantiene constante.

Utilizando otras técnicas numéricas adiabáticas exploramos los espacios completos de las familias de resonancia de co-rotación apsidal, en especial en el caso asteroidal. Como aplicación del caso asteroidal estudiamos brevemente como puede ser la evolución de un TNO lejano en resonancia con el hipotético planeta 9 y como aplicaciones del caso planetario, seleccionamos algunos sistemas exoplanetarios resonantes para analizar su evolución utilizando el modelo.

A lo largo de toda la tesis se compararon las predicciones del modelo con integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento, obteniendo en la gran mayoría de los casos resultados satisfactorios.

Palabras clave:

Dinámica orbital, Resonancias, Semi-analítico, Secular.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the resonant secular evolution of a system in the framework of the elliptic and planar 3-body problem. We begin the study by approaching the restricted problem, that is, an asteroid orbiting a star which is perturbed by a planet. We then extend the study to the general problem where 2 planets perturb each other. No restrictions are imposed in the orbits' eccentricity of any object in neither of both cases.

The methodology used is based on a semi-analytical model (Gallardo, 2020; Gallardo, T. et al. 2021) that consists of numerically averaging the resonant disturbing function and the conservation of the adiabatic invariant, which allows predicting long-term behaviour. For low eccentricities, we obtain similar results to those of other works where the libration centers remains constant. On the other hand, for moderate to high eccentricities, we find a three-dimensional graphical representation that can be useful to understand and predict the secular evolution of both, the orbital elements of the objects and the center of libration, which in general no longer remains constant.

Using other adiabatic numerical techniques, we explore the complete space of the apsidal co-rotation resonance families, especially in the asteroidal case. As an application of the asteroidal case, we briefly study the evolution of a distant TNO in resonance with the hypothetical planet 9, and as applications of the planetary case, we select some real resonant exoplanetary systems to analyze their evolution using the model.

Throughout this thesis, the predictions of the model were compared and validated with numerical integrations of the exact equations of motion, obtaining satisfactory results in the vast majority of the example cases.

Keywords:

Orbital Dynamics, Resonances, Semi-analytical, Secular.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
2	Fundamentos teóricos	5
2.1	Problema de 2 cuerpos	5
2.2	Problema restringido de 3 cuerpos: caso coplanar y resonante . .	8
2.2.1	Descripción del problema	8
2.2.2	El hamiltoniano y la función perturbadora	9
2.2.3	Evolución secular de la resonancia: el invariante adiabático	12
2.3	Problema general de 3 cuerpos: caso coplanar y resonante	14
2.3.1	Descripción del problema	14
2.3.2	Variables canónicas	14
2.3.3	Puntos de equilibrio	16
2.3.4	Modelo secular	17
3	Metodología	18
3.1	Caso asteroidal	18
3.1.1	Condición resonante	18
3.1.2	Resonancia de co-rotación apsidal	19
3.1.3	Mapas $\mathcal{R}(e, \sigma)$ y $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$	19
3.1.4	Mapas $\mathcal{R}(e, \varpi)$	21
3.1.5	Superficies $\mathcal{H}(e, \varpi, \sigma)$	24
3.2	Caso planetario	28
3.2.1	Método 1: estudio general	30
3.2.2	Método 2: estudio particular	31
4	Resultados	33
4.1	Caso asteroidal	33
4.1.1	Resonancias internas	34

4.1.2	Resonancias externas	48
4.1.3	Resonancia coorbital	52
4.1.4	Limitaciones del modelo	56
4.2	Caso planetario	60
4.2.1	Estudio general	60
4.2.2	Aplicación: sistemas exoplanetarios resonantes	72
5	Conclusiones	84
5.1	Discusión de los resultados	84
5.2	Trabajo a futuro	87
	Bibliografía	88
	Apéndices	95
	Apéndice A Desarrollos matemáticos	96
	A.1 Estabilidad de las libraciones resonantes	96
	A.2 Variables canónicas del caso planetario	97
	A.3 Ley de estructura numérica en el caso asteroidal	98
	Apéndice B Recursos y material complementario	100
	B.1 Programas utilizados	100
	B.2 Recopilación de mapas	100

Capítulo 1

Introducción

Las resonancias, en el contexto de la mecánica celeste, han sido objeto de intenso estudio durante muchas décadas debido a los diversos efectos que pueden producir en la evolución de las órbitas y que eran observados en poblaciones de cuerpos menores en el Sistema Solar. Los esfuerzos iniciales en el desarrollo de teorías analíticas perturbativas dieron como resultado el primer y segundo modelo fundamental de las resonancias¹ (Garfinkel, 1966; Henrard y Lemaître, 1983) que eran aplicables al problema de 3 cuerpos restringido circular y coplanar, es decir, una partícula en resonancia de movimientos medios (resonancia o MMR² de aquí en más) con un perturbador en órbita circular y en el mismo plano que la partícula. Tenían la ventaja de ser totalmente integrables ya que son sistemas hamiltonianos de un grado de libertad.

Un aspecto central en las teorías que abordan estos problemas de la dinámica orbital es el del cálculo de la función perturbadora. Para una excentricidad del perturbador e_p ³ y de la partícula e pequeñas pero distintas de cero, existen varias expansiones analíticas en e_p y e para la función perturbadora \mathcal{R} . Algunos ejemplos clásicos de estos se encuentran en Wisdom (1982, 1985). Naturalmente, estos desarrollos tienen problemas de convergencia para excentricidades altas, por lo tanto, son válidos para valores pequeños de las mismas, lo que constituye su principal limitación. Como alternativa, existen otro tipo de expansiones denominadas expansiones asimétricas (Ferraz-Mello, 1987) que se realizan en torno a un valor general $e > 0$. Si la variación de e es demasia-

¹También conocidos como FRM y SFRM del inglés *Fundamental Resonant Model* y *Second Fundamental Resonant Model*.

²Del inglés *Mean Motion Resonance*.

³En el caso restringido utilizaremos siempre el subíndice “p” para distinguir al planeta de la partícula.

do grande con respecto al valor central de la expansión, se puede hacer otra expansión en otro punto para extender el rango de validez del modelo.

Existen otros trabajos, por ejemplo Moons y Morbidelli (1993) y Moons y Morbidelli (1995), que solo expanden en e_p , permitiendo aplicar el modelo a cualquier valor de e , con la restricción $e > e_p$. Sidorenko (2006) va un paso más allá y utiliza una única expansión laplaciana en e_p sin ninguna restricción para e . Su método se basa en un doble promediado numérico que le permitió estudiar la evolución secular de los asteroides dentro de la MMR 3:1 con Júpiter. En el caso restringido también existen trabajos que no usan ningún desarrollo, como por ejemplo el de Yoshikawa (1989) donde se calcularon los cambios seculares de las excentricidades de asteroides en varias MMR con Júpiter. Allí, se considera a Júpiter en una órbita de tamaño y forma fijos pero con la longitud del perihelio ϖ_p variando linealmente con el tiempo. Con una metodología similar, Beust y Morbidelli (1996) presentaron varios diagramas de fase en el dominio (e, ϖ) para algunas MMR.

Más recientemente, Pichierri et al. (2017) estudiaron el problema elíptico restringido también sin expansiones analíticas y desarrollaron un enfoque similar al que presentaremos aquí. Nuestro trabajo va en la misma línea de descartar expansiones analíticas con el objetivo de tener un método válido para variaciones extremas de e y valores arbitrarios de e_p . También estamos interesados en la evolución a largo plazo del centro de libración¹ σ_c . Ya se han observado variaciones de σ_c en sistemas con inclinación mutua, por ejemplo, en Gallardo (2006b). En esta tesis, mostraremos que el mismo fenómeno puede ocurrir para sistemas coplanares de alta excentricidad.

Con respecto a las técnicas numéricas puras, existen varios trabajos que abordan el estudio de las resonancias en el marco del problema restringido de 3 cuerpos tanto circular como elíptico, utilizando diferentes metodologías. Algunos ejemplos son Antoniadou y Libert (2018) quienes estudiaron las familias de órbitas periódicas de varias MMR e investigaron su estabilidad utilizando un indicador de caos, Haghighipour et al. (2003) estudiaron el problema mediante la búsqueda de órbitas periódicas resonantes con un método llamado método de continuación diferencial, Celletti et al. (2002) resolvieron numéricamente las ecuaciones diferenciales buscando lo que se conoce como *mirror stable configurations*, etc. Estos son trabajos interesantes con la desventaja de que a veces requieren mucho poder de cómputo y debido a su naturaleza, puede ser difícil

¹Oscilación.

analizar los resultados obtenidos. Todos los estudios mencionados hasta ahora son de alguna manera complementarios y contribuyen a la comprensión de los diferentes aspectos dinámicos de la MMR.

En este trabajo, partimos del enfoque de Gallardo (2020) y aplicamos el principio de invariancia adiabática para estudiar la evolución secular del sistema. Este principio se ha aplicado en dinámica orbital desde trabajos como el de Peale (1976) hasta ejemplos más recientes como el de Batygin y Morbidelli (2017). Nosotros lo aplicaremos específicamente para entender la evolución secular del caso resonante coplanar restringido para cualquier excentricidad de ambos cuerpos. Esto nos permitirá encontrar la evolución secular de la terna (e, ϖ, σ_c) . Adicionalmente, podremos localizar las soluciones estacionarias (Beaugé et al. 2003) también conocidas como resonancias de corotación apsidal (ACR¹ de aquí en más) para casos particulares. A partir de estas localizaciones podremos construir las familias de curvas de ACR explorando todo el espacio al variar e_p . Validaremos el modelo mediante la comparación de los resultados con integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento.

La única desventaja de nuestro método es que los resultados pueden ser erróneos (especialmente para MMRs de primer orden) cuando e y e_p son muy pequeños. Esto ocurre porque en esos casos $\dot{\varpi}$ es demasiado alto e invalida el uso del principio de invariancia adiabática. En dicha situación además existen otros inconvenientes de índole técnico que afectan el valor nominal² del semi-eje que discutiremos en los siguientes capítulos.

El problema de 3 cuerpos general, elíptico, resonante y coplanar (2 cuerpos masivos en resonancia de excentricidades e_1 y e_2 orbitando un cuerpo central) también es un problema que ha sido muy estudiado en las últimas décadas. Algunos ejemplos de esto son Batygin y Morbidelli (2013), Beaugé y Michtchenko (2003), Ferraz-Mello et al. (2006), Lee y Peale (2002a), Lee y Peale (2002c) y Michtchenko et al. (2006). Muchos de estos trabajos utilizan técnicas de promediado como la utilizada por nosotros, lo cual permite evitar restricciones en e_1 y e_2 . Sin embargo, dichos trabajos en general no consideran a σ_c como una variable secular sino que se considera un parámetro fijo. En dicho aspecto es que nosotros proponemos un enfoque diferente que permite entender que le ocurre a largo plazo no solo a $e_{1,2}$ y $\Delta\varpi$ sino que también a σ_c .

En cuanto a aplicaciones del modelo consideraremos al hipotético Planeta

¹Del inglés *Apsidal Corotation Resonance*.

²Valor donde el objeto estaría en resonancia exacta.

9 y mostramos que podría ser responsable de algunas características orbitales en TNOs¹ distantes. Esa es la única aplicación del caso restringido que investigaremos ya que el resto de los planetas del Sistema Solar poseen e_p pequeños y en ese contexto ya existen, como mencionamos anteriormente, un sin fin de modelos analíticos que predicen muy bien la evolución. No obstante, en un futuro se podría aplicar a exoasteroides/exocometas (a medida que las técnicas de observación permitan determinar sus elementos orbitales) en MMR con un exoplaneta de órbita excéntrica. En el caso general lo aplicaremos a algunos sistemas reales con 2 exoplanetas en resonancia.

El siguiente capítulo desarrolla los principales fundamentos teóricos en los que se basa este trabajo. Luego, en el capítulo 3, se muestran las diferentes metodologías utilizadas para estudiar los sistemas coplanares y resonantes de 3 cuerpos. Más adelante, en el capítulo 4 se encuentran los resultados más interesantes que hemos obtenido y finalmente en el último capítulo están las conclusiones de este trabajo. A lo largo de esta tesis dividimos cada capítulo básicamente en 2 partes, una para el caso restringido y otra para el general. En los capítulos finales utilizaremos indistintamente los términos *asteroidal* y *planetario* para referirnos a los casos *restringido* y *general* respectivamente.

¹Del inglés *Trans Neptunian Object*.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Problema de 2 cuerpos

Esta sección tiene como objetivo repasar rápidamente como se definen los elementos orbitales Keplerianos sin entrar en el detalle de las deducciones de las ecuaciones típicas del movimiento de 2 cuerpos.

A partir de las ecuaciones de atracción gravitatoria de Newton aplicadas al problema de 2 cuerpos se puede deducir que cada uno de los objetos describe una sección cónica alrededor del otro (con este otro en uno de los focos) e incluso alrededor del baricentro del sistema. Nos limitaremos al caso de órbitas elípticas. Si uno de los cuerpos es mucho más masivo que el otro, entonces tendremos que el cuerpo más masivo estará prácticamente fijo en uno de los focos de la elipse que conforma la órbita que el otro cuerpo recorre alrededor de él. A continuación definimos los 6 elementos orbitales comúnmente usados para describir la posición del objeto menos masivo.

Consideremos el dibujo de la figura 2.1. En él se define un plano de referencia xy y una dirección de referencia \mathbf{x} . En el origen o asumiremos que está posicionada una estrella de masa m_s alrededor de la cual orbita un objeto de masa m , cuya órbita está contenida en un plano que posee cierta inclinación i con respecto al plano xy . La cantidad Ω es la longitud del nodo y se define como el ángulo entre la dirección \mathbf{x} y la línea de nodos¹. Luego está ω , el argumento del pericentro que es el ángulo entre la línea de nodos y el pericentro². Finalmente definimos la anomalía verdadera f como el ángulo entre

¹Intersección entre el plano de la órbita con el plano xy

²Punto de la órbita con distancia mínima al punto o .

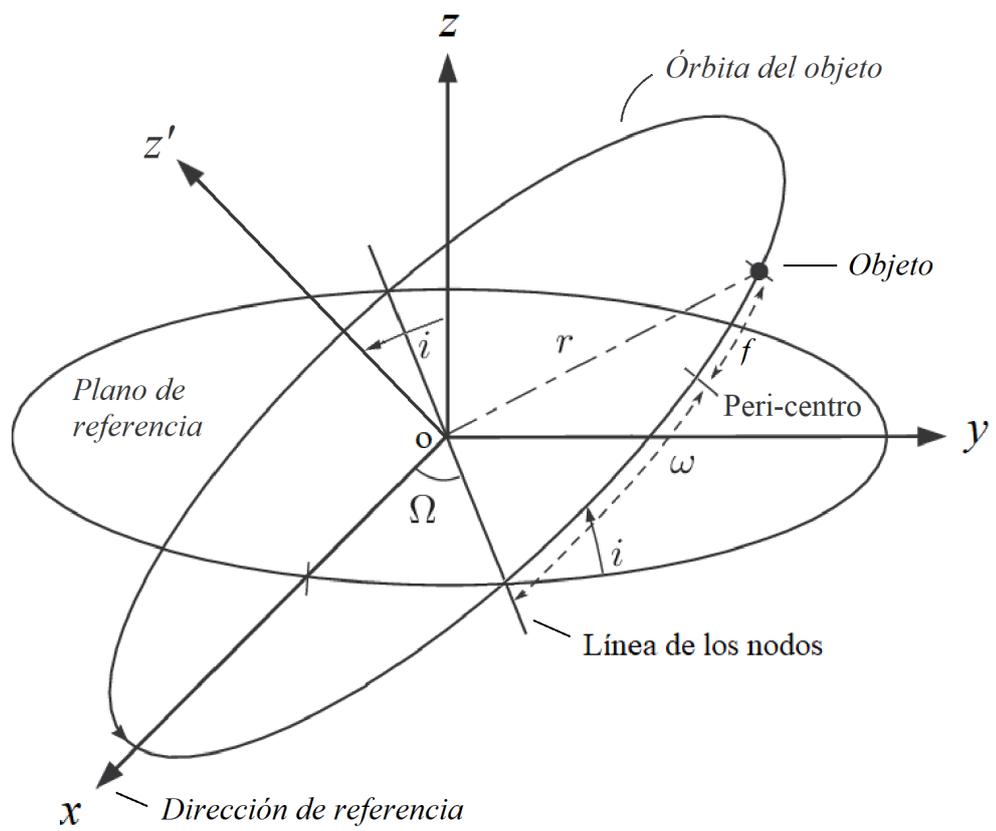


Figura 2.1: Órbita en el espacio con la definición de los elementos orbitales.

el pericentro y la posición actual del objeto. Dado que la órbita es una elipse, nos falta definir el semi-eje a y la excentricidad e . El primero se define como la distancia del centro de la elipse al pericentro mientras que e se define como el cociente entre la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y a . A continuación mostramos las ecuaciones más importantes del movimiento de 2 cuerpos, que se pueden encontrar por ejemplo en Roy (2005).

La magnitud del radio-vector posición r cumple con la siguiente relación:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (2.1)$$

mientras que las velocidades (radial y tangencial respectivamente) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left(\frac{\mu}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} e \sin f \\ r \dot{f} &= \left(\frac{\mu}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} (1 + e \cos f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $\mu = G(m_s + m) \simeq Gm_s$ siendo G la constante de gravitación universal. Con 2.1 podemos calcular la energía potencial mientras que con las ecuaciones 2.2 la energía cinética. Sumándolas (suponiendo $0 \leq e < 1$) obtenemos la energía E , la cual se conserva:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.3)$$

De la mecánica hamiltoniana se tiene que la energía es el hamiltoniano, es decir, $\mathcal{H} = E$. En ausencia de perturbaciones externas, estas ecuaciones siempre serán válidas. En el resto del trabajo utilizaremos preferentemente la longitud del pericentro definida como $\varpi = \omega + \Omega$ en lugar del argumento del pericentro. En la siguiente sección comenzamos a describir que sucede al agregar un 3^{er} cuerpo.

2.2. Problema restringido de 3 cuerpos: caso coplanar y resonante

2.2.1. Descripción del problema

En esta sección vamos a considerar el primer problema de interés estudiado en este trabajo. Consideraremos una partícula (asteroide, cometa, etc) de masa m que orbita una estrella de masa $m_s = 1M_\odot$. Además, supondremos que existe un planeta de masa $m_p = 0,1M_J$, que perturba a la partícula y el cual obviamente se mueve según las ecuaciones vistas en la sección 2.1, ya que $m_s \gg m_p \gg m \approx 0$.

Además, asumiremos una configuración coplanar, es decir, $\Delta i = i - i_p = 0^\circ$. Sin perder generalidad asumiremos también que tanto la longitud del pericentro del planeta como su anomalía media inicial son nulas, es decir, $\varpi_p = M_p(t = t_i) = 0^\circ$, siendo t_i el tiempo inicial (usaremos de aquí en más el subíndice “i” para referirnos a “inicial” salvo que se indique otro significado).

La última suposición será que la partícula se encuentra en resonancia $k_p : k$ con el planeta. Esto significa que existe una conmensurabilidad entre los períodos P de la partícula y P_p del planeta. Matemáticamente esto es $kn \simeq k_p n_p$ donde $n = 2\pi/P$ y $n_p = 2\pi/P_p$ son los movimientos medios de los objetos y $k, k_p \in \mathbb{Z}^+$. Esta condición es necesaria pero no suficiente para asegurar que la partícula está en resonancia. Formalmente, la misma se encontrará en resonancia si el *ángulo crítico*, definido a continuación, libra en torno a un valor de equilibrio σ_c (también conocido como centro de libración):

$$\sigma = k\lambda - k_p\lambda_p + (k_p - k)\varpi \quad (2.4)$$

donde $\lambda = M + \varpi$ y $\lambda_p = M_p + \varpi_p$ son las longitudes medias. Para que la resonancia sea dinámicamente relevante, los enteros k y k_p no deben ser muy grandes. También importa que tan distintos sean entre si, lo cual se mide con el parámetro conocido como *orden* q de la resonancia el cual se define como $q = |k - k_p|$. Las resonancias más fuertes suelen ser las de menor orden (Gallardo, 2019).

Más adelante veremos que existen 2 escalas de tiempo fundamentales llamadas escala de tiempo resonante y escala de tiempo secular. La primera será

la más corta¹ y corresponderá a escalas de tiempo en donde e y ϖ se mantienen esencialmente constantes. Esto asegurará que σ_c también lo sea. Por otro lado, en la escala secular (que suele ser varios órdenes mayor que la resonante) e y ϖ podrán sufrir grandes variaciones (veremos que esto pasará en general si e_p no es cercano a 0). Esto podría o no provocar que σ_c también se modifique.

2.2.2. El hamiltoniano y la función perturbadora

De acuerdo a Saillenfest et al. 2016 el hamiltoniano semi-secular de la partícula que surge de promediar en las variables rápidas λ y λ_p sin eliminar los términos resonantes en σ es:

$$\mathcal{H}(a, e, \varpi, \sigma) = -\frac{\mu}{2a} - n_p \frac{k_p}{k} \sqrt{\mu a} - \mathcal{R}(a, e, \varpi, \sigma) \quad (2.5)$$

donde $\mu = Gm_s$. El primer y segundo término corresponden a la parte Kepleriana del movimiento (ecuación 2.3) y al pasaje del espacio de fase extendido (para que \mathcal{H} sea autónomo), respectivamente. El tercer término \mathcal{R} es la función perturbadora promediada que es calculada siguiendo el enfoque adoptado por Gallardo (2006a, 2019, 2020):

$$\mathcal{R}(\sigma) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} R(\lambda_p, \lambda(\lambda_p, \sigma)) d\lambda_p \quad (2.6)$$

donde asumimos que durante k revoluciones del perturbador (y por tanto k_p revoluciones de la partícula) a , e y ϖ son constantes, lo cual es razonable ya que las variaciones de dichos elementos suelen ser mucho más lentas que las de σ (Lei, 2019). Para este cálculo fijaremos a en el valor nominal dado por la resonancia, es decir, $a = a_p(1 + m_p/m_s)^{-1/3}(k/k_p)^{2/3} \equiv a_{nom}$. La función R es la función perturbadora instantánea:

$$R = Gm_p \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}}{r_p^3} \right) \quad (2.7)$$

siendo \mathbf{r}_p y \mathbf{r} las posiciones astrocéntricas del planeta y la partícula respectivamente. El primer término corresponde a la perturbación directa mientras que el segundo a la indirecta. La relación $\lambda(\lambda_p, \sigma)$ se obtiene de la ecuación 2.4, la cual constituye la *condición resonante*².

¹Siempre y cuando $e \rightarrow 0$.

²Formalmente la condición es que σ libre.

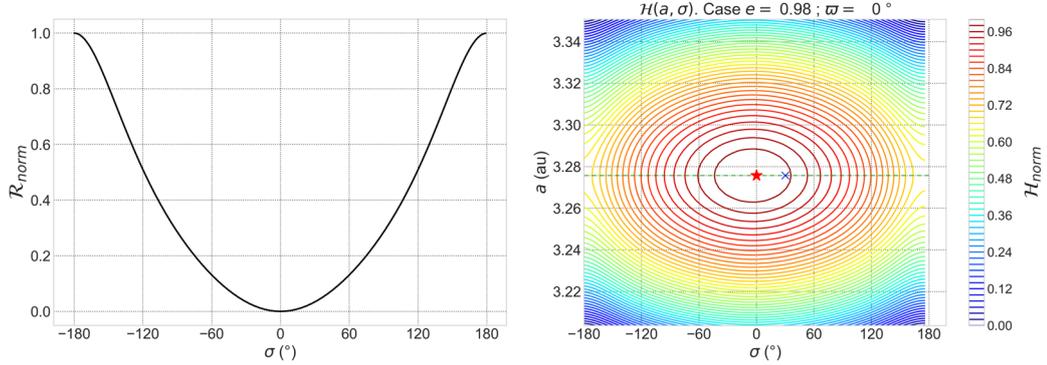


Figura 2.2: *IZQ.:* $\mathcal{R}(\sigma)$ para la MMR 2:1 con $\varpi = \varpi_p = 0^\circ$, $e = 0.98$ y $e_p = 0.3$ (perturbador excéntrico). *DER.:* Curvas de nivel de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ para el mismo caso. La estrella roja marca el lugar exacto del punto de equilibrio mientras que la línea horizontal verde es el corte en $a = a_{nom}$ que se corresponde al gráfico de $\mathcal{R}(\sigma)$. La cruz azul marca el par (a, σ) inicial de la integración numérica de la figura 2.3

El objetivo es hallar los puntos de equilibrio (a_c, σ_c) del sistema. Para ello pasamos momentáneamente a las siguientes variables canónicas (Gallardo, 2020):

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\mu a}}{k} \quad ; \quad \sigma \quad (2.8)$$

De esta manera tenemos que las ecuaciones canónicas para nuestro hamiltoniano de 1 grado de libertad son las siguientes:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \quad ; \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Sigma} \quad (2.9)$$

donde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma, \sigma) = \mathcal{H}_0(\Sigma) - \mathcal{R}(\sigma)$, es decir, tenemos un hamiltoniano desacoplado en una parte que depende solo de a y otra solo de σ .

Los puntos de equilibrio de este sistema están dados por:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

Por un lado, usando 2.9 y despreciando el término $\partial \mathcal{R} / \partial \Sigma$ (lo cual es razonable ya que los que dominan al derivar según Σ son los otros 2 términos¹) llegamos a que $a_c = a_{nom}$. Por otro lado, dado que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}$ llegamos a que un punto es de equilibrio si:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.11)$$

¹Esto es porque los otros 2 términos son no perturbativos.

En realidad nosotros estamos en busca de los puntos de equilibrio *estables*. Estos se dan cuando el extremo en la función \mathcal{R} es un mínimo local, debido a que ahí la perturbación es mínima en relación a los puntos del entorno próximo a σ_c . Los cálculos detallados que llegan a esta conclusión se pueden ver en el apéndice A.

En la figura 2.2 se muestra un ejemplo de $\mathcal{R}(\sigma)$ y de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ para el caso $e_p = 0.3$, $e = 0.98$ y $\varpi = 0^\circ$. Se puede observar 1 único punto de equilibrio estable (a partir de ahora omitiremos la palabra “estable”), en $\sigma = 0^\circ$. A veces puede ocurrir que un punto de equilibrio esté en condición de encuentro, en cuyo caso no lo tendremos en cuenta. El criterio que tomaremos para determinar si hay encuentro es verificar si se cumple:

$$\Delta < \xi R_{Hill} \quad (2.12)$$

siendo $\Delta = \min |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$, ξ un parámetro de tolerancia y R_{Hill} el radio de Hill definido de la siguiente manera:

$$R_{Hill} = a_p \left(\frac{m_p}{3m_s} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

Un valor típico para ξ es 3 pero, dependiendo del caso, puede ser conveniente usar otro valor entre 2 y 4 (Gallardo, 2020). Obsérvese que un mínimo de \mathcal{R} se corresponde con un máximo de \mathcal{H} , por lo tanto, se puede usar cualquiera de los 2 criterios al buscar un punto de equilibrio.

Tanto la forma de $\mathcal{R}(\sigma)$ como la topología de las curvas de nivel de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ pueden cambiar si cambiamos los valores fijados para e y ϖ . Si colocamos a la partícula inicialmente en un punto de equilibrio y realizamos integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento¹, vemos que en escalas de tiempo resonantes se producen libraciones del ángulo crítico en donde el modelo predice al punto de equilibrio. Sin embargo, al llevar las integraciones a escalas de tiempo seculares, la evolución de e y/o ϖ puede llevar a que σ_c también evolucione.

Lo expuesto en el párrafo anterior se ilustra en la figura 2.3 donde se pueden ver 2 integraciones numéricas, cuyas condiciones iniciales son las mismas pero difieren en el tiempo de integración. La de la izquierda muestra que en una

¹Al comienzo del capítulo 4 se detallan los integradores que fueron utilizados en todo el trabajo.

ventana de tiempo de 20 kyrs el objeto libra en torno a $\sigma_c = 0^\circ$. Sin embargo, si aumentamos el tiempo de integración en 2 órdenes de magnitud, se produce una evolución secular para e , ϖ y σ_c , es decir, σ libra en torno a un $\sigma_c(t)$.

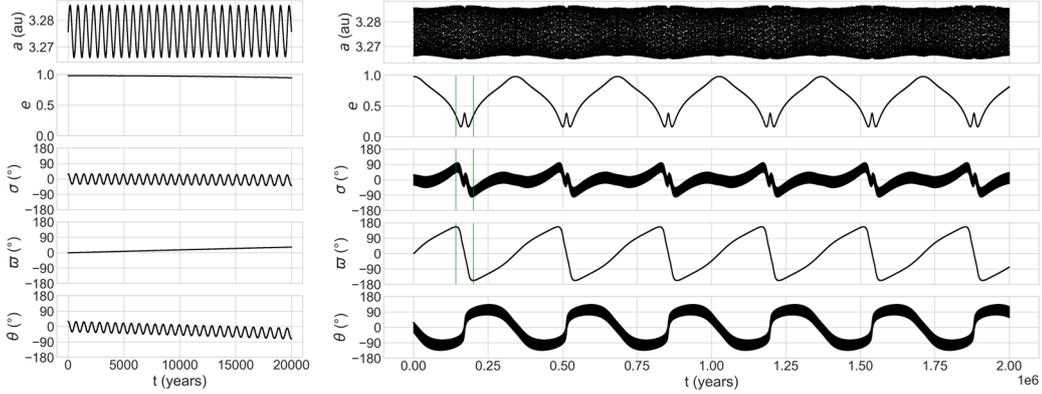


Figura 2.3: *IZQ.*: Integración numérica de una partícula en la MMR 2:1 con $\varpi = \varpi_p = 0^\circ$, $e = 0.98$ y $e_p = 0.3$ por 20 kyrs. *DER.*: Misma integración extendida a 2 Myrs. Las líneas verdes verticales se relacionan con la figura 2.4. $\theta = k\lambda - k_p\lambda_p$.

Esta evolución secular está relacionada al cambio de topología que mencionamos anteriormente. La explicación de porque σ_c evoluciona de la manera que lo hace a largo plazo radica en el principio del invariante adiabático.

2.2.3. Evolución secular de la resonancia: el invariante adiabático

Existe una cantidad llamada *invariante adiabático* (la cual es una acción) que bajo ciertas condiciones se conserva. A continuación se da una definición:

$$J = \oint \Sigma d\sigma \quad (2.14)$$

donde Σ y σ son las variables canónicas definidas en 2.8.

La definición dada en 2.14 refiere a que la integral se hace en torno a una curva cerrada en el espacio (Σ, σ) . Dado que Σ solo depende de a , podemos pensar en calcular J en el espacio (a, σ) . Por lo tanto, J no es más que el área encerrada por una de las curvas como las de $\mathcal{H} = cte$ en la figura 2.2. En este contexto, el principio de invarianza adiabática dice que, si las variaciones de e y ϖ son mucho más lentas que las libraciones de σ y a , entonces J se conservará a lo largo de toda la evolución. Las condiciones y demostraciones matemáticas

formales de la invarianza de J se encuentran por ejemplo en Henrard (1993). Para simplificar el análisis supondremos que $J \simeq 0$, es decir, consideraremos solo los casos con una amplitud de libración muy pequeña. A este estado se le conoce como *resonancia profunda* o *resonancia exacta*.

En la figura 2.4 se muestran 3 ejemplos de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ relacionados con la integración mostrada en la figura 2.3 donde podemos ver que el cambio en el centro de libración se debe al cambio en la topología de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ inducido por las lentas variaciones de e y ϖ . Este no es un ejemplo de resonancia profunda ya que existe cierta amplitud de libración no nula en a y σ .

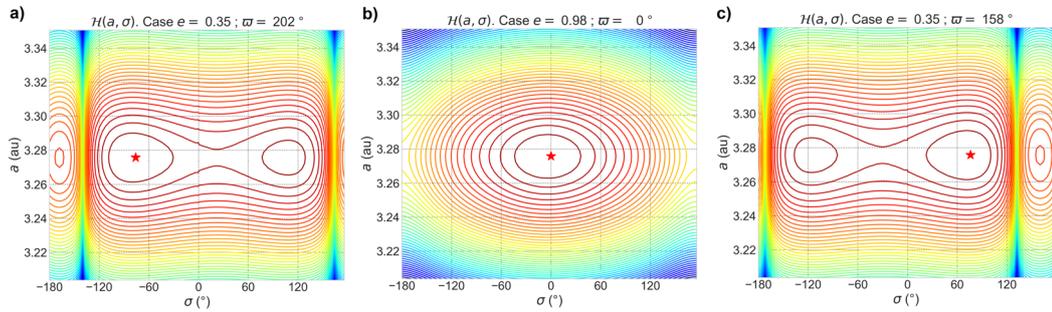


Figura 2.4: Mapas $\mathcal{H}(a, \sigma)$ en la MMR 2:1 para 3 pares (e, ϖ) : a) $(0.35, 202^\circ)$. b) $(0.98, 0^\circ)$. c) $(0.35, 158^\circ)$. Los casos a) y c) se corresponden con líneas verdes verticales de la figura 2.3 mientras que el caso b) es el mapa de la condición inicial de la integración numérica de dicha figura. Las estrellas rojas marcan los centros de libración de interés.

En resumen, si la evolución secular de e y ϖ es lo suficientemente lenta (que es lo usual), entonces la invarianza de J provocará que el centro de libración resonante “siga” al punto de equilibrio en el espacio (a, σ) , como si esto fuera una guía para dicho centro. Por lo tanto, si tuviésemos mapeados todos los puntos de equilibrio del espacio (a, σ) (o solo σ ¹) para cualquier posible par de (e, ϖ) y además supiésemos los valores de \mathcal{H} para cada punto, entonces es factible que podamos mapear trayectorias en el espacio (e, ϖ, σ) que indiquen como sería la evolución secular para todas las variables. De hecho, en el próximo capítulo iremos construyendo diferentes mapas con curvas de nivel que nos irán aproximando al mapa más general posible que nos permitirá predecir la evolución de e , ϖ y σ_c .

¹Esto es porque al asumir $J = 0$ estamos diciendo que $a = a_{nom}$.

2.3. Problema general de 3 cuerpos: caso coplanar y resonante

2.3.1. Descripción del problema

En esta sección desarrollaremos el modelo para estudiar el caso planetario coplanar, es decir, 2 planetas de masas m_1 y m_2 comparables orbitando una estrella de masa m_0 en un mismo plano. Asumiremos que los semi-ejes cumplen $a_1 < a_2$ y que existe la siguiente relación entre ellos debido a la hipótesis resonante:

$$a_1 = a_2 \left(\frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_2} \right)^{1/3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{2/3} \equiv a_{1nom} \quad (2.15)$$

donde a_2 será fijado en el mismo valor para todos los casos mientras que el valor nominal de a_1 estará dado por las masas y la resonancia $k_2 : k_1$ en cuestión.

2.3.2. Variables canónicas

Para hacer uso de las ecuaciones de Hamilton buscaremos trabajar siempre con variables canónicas. Además, escogiéndolas adecuadamente, podremos encontrar constantes de movimiento, lo cual simplificará el problema. Partiremos de las coordenadas de Poincaré, que consisten en tomar posiciones astro-céntricas y velocidades baricéntricas. Mediante una transformación canónica podemos obtener las variables modificadas de Delaunay en función de los elementos orbitales (que son calculados en el marco de referencia de Poincaré). Seguiremos el desarrollo realizado en Gallardo, T. et al. (2021) pero restringiéndonos al caso plano. De esta manera, tenemos que los elementos (del i -ésimo planeta) son:

$$\begin{aligned} \lambda_i & ; & L_i & = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i} \\ \varpi_i & ; & \Gamma_i & = L_i (\sqrt{1 - e_i^2} - 1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde la masa reducida $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$, $\mu_i = k^2 (m_0 + m_i)$, a_i es el semi-eje, e_i la excentricidad y k la constante gravitacional de Gauss. En dicho

conjunto de variables canónicas, el hamiltoniano del sistema viene dado por:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2L_2^2} - R \quad (2.17)$$

donde R es la función perturbadora, que en variables de Poincaré se expresa así:

$$R = \frac{k^2 m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \frac{m_1 m_2}{m_0} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (2.18)$$

siendo \mathbf{r}_i las posiciones y \mathbf{v}_i las velocidades.

A priori tenemos que en general $R = R(\lambda_i, L_i, \Gamma_i, \varpi_i)$. Sin embargo, utilizando las reglas de D'Alembert (Morbidelli, 2002) se puede demostrar que en realidad la dependencia es $R = R(\lambda_i, L_i, \Gamma_i, \Delta\varpi)$ donde $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$. Esto tiene sentido, ya que las perturbaciones entre los planetas dependen de la orientación de una órbita con respecto a la otra y no de como se oriente cada una por separado con respecto a una dirección fija.

Es conveniente por lo tanto buscar una transformación canónica donde aparezca $\Delta\varpi$ como coordenada pero también deberíamos hacer aparecer a θ (definido a continuación) debido a la condición resonante:

$$\theta = k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2 \quad (2.19)$$

Si logramos esto, tendríamos que $R = R(\lambda, L_i, \Gamma_i, \Delta\varpi, \theta)$ donde λ es una de las dos longitudes medias y la dependencia con la otra longitud media se daría a través del ángulo θ . Es fácil ver que el ángulo θ es de variación lenta (comparado con λ_i), debido a la resonancia.

A continuación mostramos el juego de variables obtenido al realizar la transformación canónica que hace aparecer a $\Delta\varpi$ y θ :

$$\begin{aligned} \theta = k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2 & \quad ; & \quad I_1 = L_1/k_1 \\ \lambda_2 & \quad ; & \quad I_2 = L_2 + k_2 L_1/k_1 \\ \Delta\varpi & \quad ; & \quad \mathcal{K}_1 = \Gamma_1 \\ -\varpi_2 & \quad ; & \quad \mathcal{K}_2 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esta transformación resulta ser muy útil, ya que, como mencionamos, R no depende de ϖ_2 (solo depende a través de $\Delta\varpi$). Por lo tanto, $\mathcal{K}_2 = cte$. Esta integral de movimiento no es más que el opuesto del *Déficit de Momento*

Angular (AMD¹) cuya expresión para el caso coplanar es la siguiente (Laskar, 1997):

$$AMD = \sum_{i=1}^2 \beta_i \sqrt{\mu_i} \left(1 - \sqrt{1 - e_i^2}\right) \quad (2.21)$$

En el apéndice A se encuentra la demostración de canonicidad de las variables 2.20.

2.3.3. Puntos de equilibrio

El objetivo de esta sección es mostrar como se calculan los puntos de equilibrio en el caso planetario. Como primer paso realizaremos un promediado de R análogo al realizado en la sección 2.2.2, donde sustituimos λ_p por λ_2 , λ por λ_1 y k por k_1 . De esta manera \mathcal{H} pierde la dependencia con λ_2 y por lo tanto $I_2 = cte$. A esta constante se le conoce como parámetro de espaciado (Michtchenko et al. 2008) y resulta de utilidad en los modelos que permiten amplitudes de resonancia no nulas. Sin embargo, nosotros no utilizaremos la conservación de esta constante ya que continuaremos asumiendo que el sistema se encuentra en resonancia profunda. Para el promediado asumimos que los períodos de libración resonante de a_i y θ son mucho más cortos que los períodos de evolución secular de e_i y $\Delta\varpi$. Es decir que supondremos constantes estos últimos. Sustituyendo en \mathcal{H} las variables canónicas 2.20 tenemos que:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I_1; I_2) - \mathcal{R}(\theta, I_1 = I_{1nom}; I_2, \mathcal{K}_i, \Delta\varpi) \quad (2.22)$$

donde \mathcal{R} es la función perturbadora promediada, fijamos I_1 en $I_{1nom} = I_1(a_1 = a_{1nom})$ valor que está dado por I_2 , k_1 y k_2 (valor nominal de la resonancia) y todo lo que está después del punto y coma son parámetros constantes. Esta expresión permitiría construir mapas similares al de la figura 2.2 mostrado en el caso restringido.

Para hallar los puntos de equilibrio aplicamos las ecuaciones de Hamilton, obteniendo así que los mismos se dan cuando:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.23)$$

La primer igualdad conduce simplemente a $n_1 k_1 = n_2 k_2$ mientras que la

¹Del inglés *Angular Momentum Deficit*.

segunda nos dice que los puntos de equilibrio se dan en los extremos de la función $\mathcal{R}(\theta)$. En particular los mínimos nos dan los puntos de equilibrio estables (omitiremos la demostración para el caso planetario).

Al igual que en el caso restringido, utilizaremos un criterio para detectar si existe o no encuentro entre los planetas. Este criterio será análogo al de la desigualdad 2.12 pero con una definición algo diferente para el radio de Hill, el cual se conoce como radio de Hill mutuo (Gladman, 1993):

$$R_{Hill} = \frac{a_1 + a_2}{2} \left(\frac{m_1 + m_2}{3m_0} \right)^{1/3} \quad (2.24)$$

En general seguiremos utilizando $\xi = 3$ salvo en algunos casos donde utilizaremos un ξ algo mayor para beneficio de la representación que estemos realizando (en general será para mejor visualización de la superficie \mathcal{H}).

2.3.4. Modelo secular

Al igual que en el caso restringido, nos interesa conocer la evolución secular del sistema. Para eso seguiremos la misma metodología que en dicho caso, es decir, aplicamos el principio de invarianza adiabática descrito en la sección 2.2.3 y para simplificar el análisis, consideramos el caso de amplitud de libración nula ($J = 0$), de manera que supondremos los semi-ejes de los planetas fijos en los valores nominales dados por la resonancia (ec. 2.15). En este caso tenemos que el hamiltoniano tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{R}(\theta, \mathcal{K}_1, \Delta\varpi; \mathcal{K}_2) \quad (2.25)$$

donde $\mathcal{H}_0 = cte$ ya que depende solo de μ_i , β_i y L_i . Entonces, como $\mathcal{H} = cte$ (por ser la energía de un sistema conservativo), se deduce que $\mathcal{R} = cte$, siempre y cuando se mantenga la hipótesis de $J = 0$. Obsérvese que \mathcal{K}_2 aparece como parámetro, el cual relaciona las excentricidades e_1 y e_2 .

En lugar de trabajar con el ángulo θ , pasaremos al más utilizado ángulo crítico σ , definido en analogía a la ecuación 2.4:

$$\sigma = k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 + (k_2 - k_1)\varpi_1 \quad (2.26)$$

Más adelante utilizaremos estos desarrollos para construir curvas de nivel que serán muy útiles para entender la evolución de estos sistemas.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Caso asteroidal

3.1.1. Condición resonante

Para el caso asteroidal asumiremos que la estrella tiene $m_s = 1M_\odot$ mientras que al planeta lo tomaremos con $m_p = 0.1M_J$ y $a_p = 5.2$ ua, es decir, el mismo que Júpiter. Adicionalmente, supondremos que $\varpi_p = M_p = 0^\circ$, como mencionamos en la sección 2.2.1. Con estas consideraciones, es fácil ver que el asteroide evolucionará en resonancia si su anomalía media inicial cumple con la siguiente relación:

$$M = \frac{\sigma - k_p \varpi}{k} \quad (3.1)$$

donde $\sigma = \sigma_c$. Esta ecuación parece decirnos que una sola M puede hacer que el objeto esté en resonancia, lo cual es verdad si $k = 1$. Si $k = 2$, podemos considerar un nuevo $\sigma' = \sigma + 2\pi$ que produciría una $M' \neq M$ que también cumpla la condición resonante donde $|M' - M| = \pi$. En general, dado un k cualquiera, podemos decir que existen k anomalías medias que cumplen la condición resonante donde $|M_{i+1} - M_i| = 2\pi/k$. La razón detrás de esto es geométrica y se encuentra explicada por ejemplo en Wang y Malhotra (2017) en donde utilizan la diferencia angular entre los objetos como una de las variables para representar el espacio de fases.

En lo que resta de la tesis utilizaremos el sub-índice i en los elementos orbitales para referirnos a la condición *inicial* de una integración numérica. Además, será usual presentar a todas las variables angulares de una integración en un mismo gráfico. En dichos casos las distinguiremos con colores, usando

siempre el color azul para ϖ , el negro para σ y el rojo para θ .

3.1.2. Resonancia de co-rotación apsidal

Existe un tipo de resonancia llamada de co-rotación apsidal, también conocida como ACR¹, que es de gran interés estudiar (Beaugé et al. 2003; Zhou et al. 2004) debido a la implicación que tiene en la evolución secular de los sistemas que se encuentran en ella.

Diremos que un asteroide se encuentra en ACR con un planeta cuando la diferencia entre su longitud de perihelio y la del planeta, es decir, $\Delta\varpi$, libra. Debido a que ϖ_p está fijo, el comportamiento de ϖ definirá si el sistema está o no en ACR. En este último caso ϖ circulará mientras que si ϖ libra con amplitud nula de libración, diremos que el asteroide se encuentra en el punto exacto o nominal del ACR.

A estas soluciones también se le conocen como soluciones estacionarias ya que si el sistema se encuentra en el punto exacto del ACR, ningún elemento orbital de los cuerpos sufrirá modificaciones.

En general que un objeto se encuentre en un ACR o no es independiente de si el mismo objeto se encuentra en MMR o no. Es decir, tanto en la evolución secular pura como en la resonante pueden (y en general lo hacen) existir uno o más ACRs en los diagramas de fases que describen la evolución del sistema.

3.1.3. Mapas $\mathcal{R}(e, \sigma)$ y $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$

En esta sección construiremos 2 tipos de mapas que pueden ser útiles como primer herramienta para hallar los ACR. En realidad más adelante veremos una representación gráfica más general que permite hallarlos de una manera más directa.

En la sección 2.2.2 vimos que si estamos exactamente en un punto de equilibrio entonces $a = a_{nom}$. Como estamos en el contexto de amplitudes de libración nulas, entonces estamos suponiendo que $a = a_{nom} = cte$ siempre. Por lo tanto, según la ecuación 2.5 estudiar \mathcal{H} o \mathcal{R} es equivalente. Además, como \mathcal{H} es una integral de movimiento, tenemos que $\mathcal{R}(e, \varpi, \sigma)$ es constante. En realidad, si nos aseguramos que la condición inicial es tal que partimos de un mínimo de $\mathcal{R}(\sigma)$, tendríamos que $\mathcal{R}(e, \varpi, \sigma_c)$ es constante. Sin embargo,

¹Del inglés *Apsidal Corotation Resonance*

como construiremos estos mapas asumiendo a σ como una variable angular en su máximo rango de variación (es decir, de 0 a 360°), mantendremos la primer notación.

Consideremos que por ejemplo, $e = cte$. Entonces, es inmediato ver que podemos construir curvas de nivel a partir de:

$$\mathcal{R}(\varpi, \sigma) = cte \quad (3.2)$$

Por otro lado, si tuviésemos que $\varpi = cte$ (que ocurre solo en los ACR) entonces podemos construir curvas de nivel a partir de:

$$\mathcal{R}(e, \sigma) = cte \quad (3.3)$$

Los mapas $\mathcal{R}(e, \sigma)$ y $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$ se construyen simplemente variando ϖ y e en todos sus valores posibles respectivamente. En cada paso de dicha variación se calcula $\mathcal{R}(\sigma)$ utilizando la ecuación 2.6. Las curvas de nivel que surgen en los mapas nos serán útiles para predecir la evolución secular del sistema siempre y cuando e o ϖ sea suficientemente constante en un período de tiempo suficientemente largo. Una observación importante es que si un mínimo en $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$ coincide con un mínimo en $\mathcal{R}(e, \sigma)$ entonces significa que encontramos un mínimo en el espacio de variables (e, ϖ, σ) . Estos puntos son los ACR, es decir, si colocamos a la partícula con condiciones iniciales en esos puntos, la misma se quedará ahí en el largo plazo. Sin embargo, si la condición es un mínimo en un mapa pero no en el otro, entonces la variable supuesta constante no lo será y eventualmente los mapas dejarán de ser válidos.

En la figura 3.1 hay un ejemplo de mapas $\mathcal{R}(e, \sigma)$ y $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$ que permitieron encontrar un ACR en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha) = (0.73, 0^\circ, 0^\circ)$ ¹ para una partícula en la MMR 2:1 con un planeta de $e_p = 0.01$. Se puede observar que al integrar numéricamente con condición inicial en el ACR, los elementos orbitales prácticamente no cambian en el largo plazo.

En este momento uno diría que es natural generalizar la construcción a *superficies* de nivel a partir de $\mathcal{R}(e, \varpi, \sigma) = cte$, con la aspiración de que expliquen la evolución secular de todas las variables a la vez. El problema con estas superficies es que al construirlas a partir de la ecuación anterior, no se está imponiendo en ningún lado que los puntos que la constituyen sean

¹Donde utilizaremos el subíndice " α " para referirnos a un ACR. En caso de existir más de uno, se colocará un subíndice numérico luego del paréntesis.

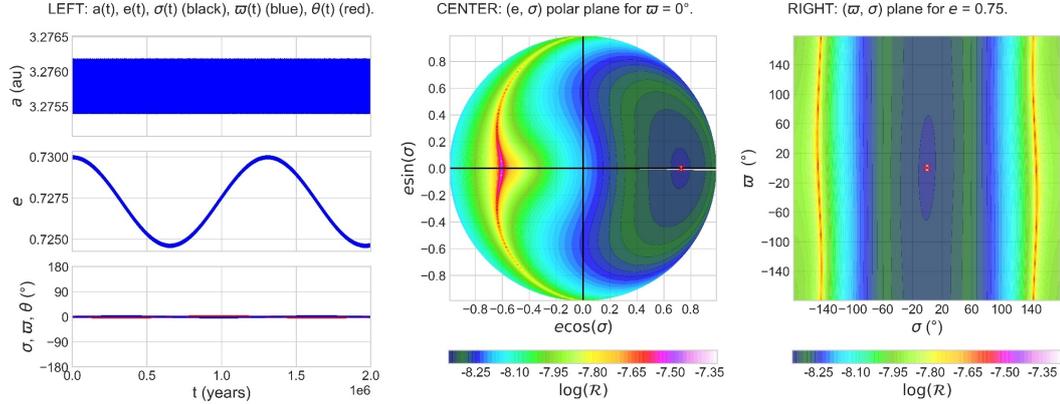


Figura 3.1: *IZQ.*: Integración numérica de una partícula en la MMR 2:1 con $\varpi_i = \varpi_p = 0^\circ$, $e_i = 0.73$ y $e_p = 0.01$ por 2 Myrs. *CEN.*: Mapa polar $\mathcal{R}(e, \sigma)$ para $\varpi = 0^\circ$. *DER.*: Mapa $\mathcal{R}(\varpi, \sigma)$ para $e = 0.75$. La cruz roja en ambos mapas es la condición inicial de la integración numérica la cual se encuentra en rosado.

puntos de equilibrio, por lo que la misma tendrá más puntos de los que debería (puntos donde $J > 0$). Por lo tanto, al compararlas con las integraciones numéricas cuyas condiciones iniciales son de resonancia profunda ($J = 0$), lo que se obtiene son curvas en el espacio (e, ϖ, σ) que están contenidas en las superficies dadas por $\mathcal{R}(e, \varpi, \sigma) = cte$ las cuales suelen ser topológicamente cerradas (como una esfera). Sin embargo, no nos dicen nada de porqué la curva es como es y no es otra diferente que también esté contenida en dicha superficie.¹

En la sección 3.1.5 impondremos la condición de equilibrio y construiremos otro tipo de superficie que si nos ayudará a entender la evolución secular de e , ϖ y σ_c a la vez, lo cual será conveniente en ciertos casos complicados.

3.1.4. Mapas $\mathcal{R}(e, \varpi)$

Como el título lo sugiere, esta vez supondremos que el centro de libración $\sigma_c = cte$. Bajo esta hipótesis podemos construir mapas con curvas de nivel dadas por:

$$\mathcal{R}(e, \varpi) = cte \quad (3.4)$$

¹De hecho hay infinitas curvas cerradas en esa superficie.

En este contexto es muy usual realizar el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} h &= e \sin \varpi \\ k &= e \cos \varpi \end{aligned} \tag{3.5}$$

para luego construir los mapas (polares) mediante:

$$\mathcal{R}(h, k) = cte \tag{3.6}$$

En la figura 3.2 se muestran 4 integraciones numéricas comparadas con el mapa $\mathcal{R}(e, \varpi)$ para $\sigma = 0^\circ$ en el caso de la MMR 2:1 con $e_p = 0.01$. En dicha figura también se encuentran los mapas $\mathcal{H}(a, \sigma)$, introducidos en la sección 2.2.2, para el par (e_i, ϖ_i) de cada caso. En esta oportunidad se resalta en negro algunas curvas de nivel para poder observar mejor la topología de dichas curvas. Además, se marca la separatriz con una curva blanca punteada, la cual divide las regiones donde ϖ pasa de circular a librar ($e \simeq 0.6$) y luego a circular de nuevo ($e \simeq 0.83$), a medida que aumentamos e desde 0. En los mapas $\mathcal{R}(e, \varpi)$ también se solapan las integraciones numéricas en rosado donde marcamos con una cruz roja las condiciones iniciales mientras que en los mapas $\mathcal{H}(a, \sigma)$ las integraciones están en negro. Estos últimos 4 mapas parecen sugerir que siempre tenemos un centro de libración en $\sigma_c = 0^\circ$. De hecho, en este caso ($e_p = 0.01$) ocurre eso, lo cual comprobaremos con un procedimiento explicado más abajo. Es interesante notar como las curvas de nivel en el espacio (e, ϖ) predicen correctamente el resultado de las integraciones numéricas. Además, si comparamos con otros trabajos como el de Pichierri et al. (2017), podemos ver que en su figura 3a) obtienen resultados similares al nuestro.

Una manera de chequear la validez de estos mapas es graficar los σ_c obtenidos con la ecuación 2.11 para cualquier par (h, k) . Si para todos estos pares vemos que tenemos siempre el mismo σ_c entonces estaremos seguros de que el mapa $\mathcal{R}(h, k) = cte$ será siempre válido, debido al principio de invariancia adiabática (asumiendo $J = 0$). En la figura 3.3 hay un ejemplo de gráfico de los centros de libración, donde vemos que existen 2 familias de puntos de equilibrio, una ubicada en $\sigma_c = 0^\circ$ y la otra en $\sigma_c = 180^\circ$.

En realidad, la condición necesaria para la validez es menos restrictiva que la descrita, ya que alcanzaría con tener siempre el mismo σ_c solo en el rango de variación de (h, k) que la evolución secular induzca.

En el caso de que $\dot{\sigma}_c \neq 0$, si se compara con una integración numérica, esta

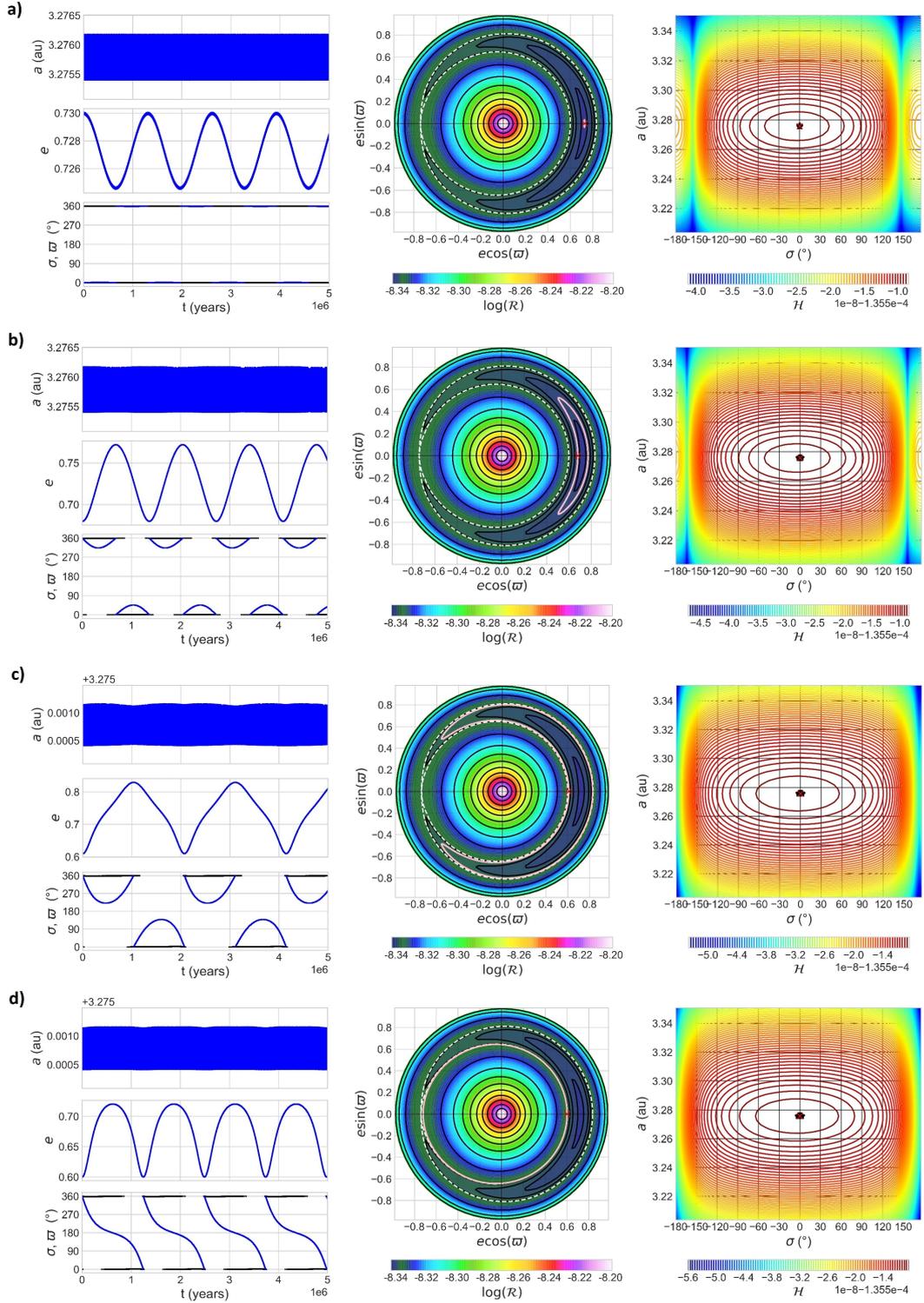


Figura 3.2: *IZQ.*: Integración numérica de una partícula en la MMR 2:1 con $\varpi_i = 0^\circ$ y $e_p = 0.01$. *CEN.*: Mapa polar $\mathcal{R}(h, k)$ para $\sigma = 0^\circ$. *DER.*: Mapa $\mathcal{H}(a, \sigma)$ para las condiciones iniciales. De arriba abajo cambia e_i : **a)** 0.73 **b)** 0.68 **c)** 0.61 **d)** 0.6.

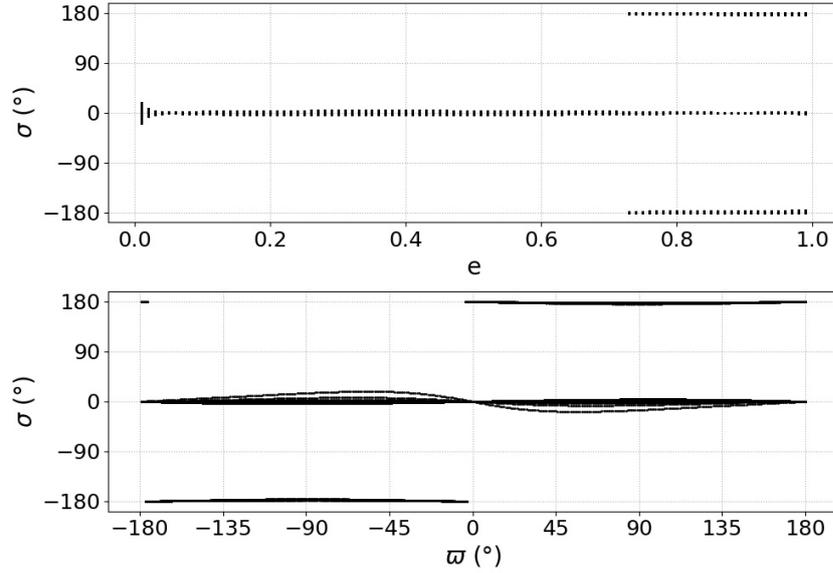


Figura 3.3: MMR 2:1, $e_p = 0.01$. *SUP.*: Conjunto de σ_c Vs. e . *INF.*: Conjunto de σ_c Vs. ϖ .

no tiene por qué coincidir con una curva de nivel del mapa $\mathcal{R}(h, k)$. En esta situación recurriremos a la técnica desarrollada en la siguiente sección.

3.1.5. Superficies $\mathcal{H}(e, \varpi, \sigma)$

3.1.5.1. Algoritmo de construcción

Para tratar el problema de centro de libración variable ($\dot{\sigma}_c \neq 0$) construiremos una superficie bi-dimensional en el espacio (e, ϖ, σ) , la cual llamaremos superficie \mathcal{H} . Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Partimos de una semilla (e^*, ϖ^*) , normalmente tomada como $(0, 0^\circ)$.
2. Calculamos $\mathcal{R}(\sigma)$.
3. Buscamos los mínimos locales obteniendo así n centros de libración: $(\sigma_{c_1}, \dots, \sigma_{c_n})$.
4. Graficamos estos puntos en el espacio (e, ϖ, σ) , asignándole a cada uno un color según sea el valor de \mathcal{H} en cada punto.
5. Variamos e o ϖ en una cantidad muy pequeña y repetimos el proceso, hasta haber recorrido todos los valores posibles para ambas variables, es decir, $e \in [0, 1)$ y $\varpi \in [0^\circ, 360^\circ)$.

Una vez completado el proceso se formarán unas superficies compuestas por curvas de nivel (una curva para cada color) que serán las que nos ayuden a entender la evolución secular de e , ϖ y σ_c .

En la figura 3.4 se puede apreciar un ejemplo para la MMR 2:1 con $e_p = 0.3$. Este caso difiere de los ejemplos anteriores en que el planeta ya no se encuentra en una órbita cuasi-circular sino en una excéntrica. En las resonancias internas, esto provoca que σ_c dependa de los valores de (e, ϖ) , por lo tanto, resulta muy útil la construcción de la superficie \mathcal{H} . En este ejemplo se puede ver que existen 2 superficies desconexas conformadas por puntos de equilibrio que modificaron levemente su posición con respecto a la posición que tenían en las familias de puntos de equilibrio encontradas en la figura 3.3, debido al aumento de e_p desde 0.01 a 0.3. De hecho se puede ver como una superficie es más grande ya que existe para cualquier par de (e, ϖ) mientras que la otra es más chica, existiendo solo para valores altos de e con ϖ cercano a 180° . Luego definiremos bien un criterio para nombrar estas superficies.

3.1.5.2. Comparación con integraciones numéricas

Siguiendo con este caso, comparamos el modelo contra 3 integraciones numéricas en la superficie grande obteniendo buenos resultados, ya que existe buena coincidencia entre las curvas de nivel tridimensionales y las curvas formadas por las propias integraciones. La superficie grande tiene en su centro un ACR en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_1 = (0.7, 0^\circ, 0^\circ)$ mientras que la pequeña en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_2 = (0.99, 180^\circ, 180^\circ)$. Si colocamos una partícula en este último ACR, los elementos de la misma se quedan estáticos, como sucede con el otro ACR. Sin embargo, si desviamos las condiciones iniciales un poco, sucede lo que predicen las curvas de nivel, es decir, e alcanza el valor de 1. Veremos más adelante que si subimos e_p , e_{α_2} será menor, lo que causará que haya curvas cerradas a su alrededor.

Una opción para asegurarse de que existe coincidencia entre modelo y simulación, es filtrar según el valor de \mathcal{H} de una partícula para ciertas condiciones iniciales y comparar curva vs. curva en lugar de superficie vs. curva, como se muestra en la imagen izquierda de la figura 3.5. En ese gráfico se compara modelo vs. integración para el caso de la derecha de la figura 3.4 donde agregamos como extra las proyecciones de ambas curvas en cada plano, para constatar el buen ajuste.

Una superficie complementaria y que nos ayudará a estimar la estabilidad

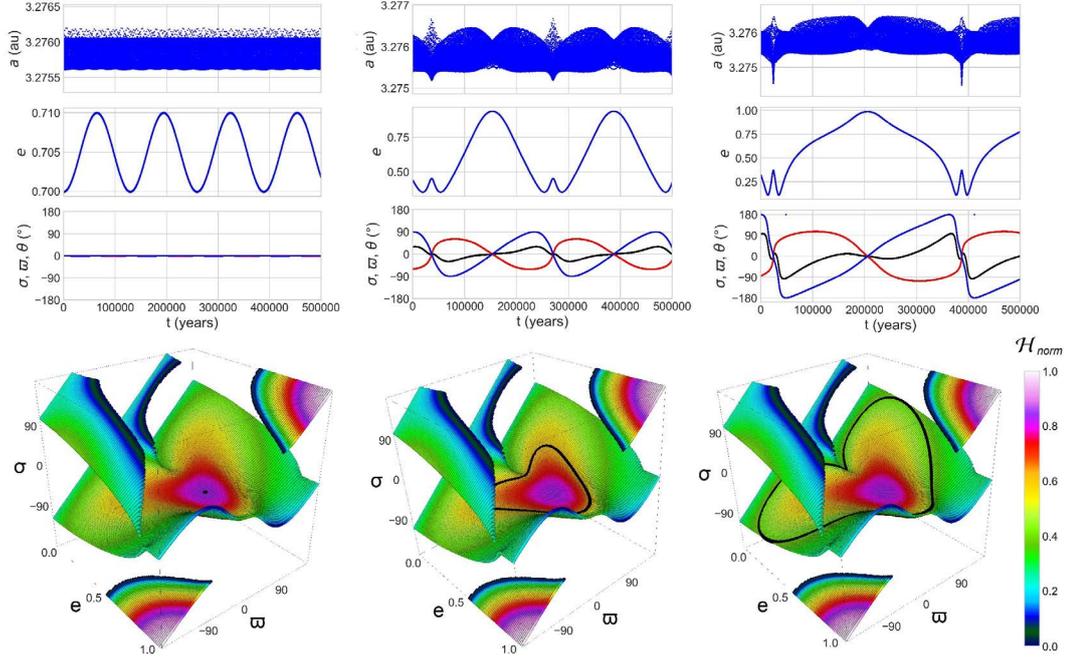


Figura 3.4: *SUP.*: Integraciones numéricas en la MMR 2:1 para $e_p = 0.3$. *INF.*: Superficie \mathcal{H} para $e_p = 0.3$. Las curvas negras son las integraciones numéricas, cuyas condiciones iniciales $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)$ son: *IZQ.*: $(0.7, 0^\circ, 0^\circ)$ *CEN.*: $(0.44, 90^\circ, 29^\circ)$ *DER.*: $(0.32, 180^\circ, 95^\circ)$. La escala de colores indica: $\mathcal{H}_{norm} \triangleq (\mathcal{H} - \mathcal{H}_{min})/(\mathcal{H}_{max} - \mathcal{H}_{min})$

de la evolución secular es la que llamaremos superficie Δ . La misma se construye de manera análoga a la superficie \mathcal{H} pero en lugar de asignar los colores al valor del hamiltoniano, se asignan al valor de la mínima distancia entre los objetos, es decir, Δ (en unidades de R_{Hill}). En el panel derecho de la figura 3.5 se tiene como queda la superficie siguiendo con un perturbador de $e_p = 0.3$. Obviamente no se espera que la evolución siga las curvas de nivel que se forman en esta superficie, pero visualizar los valores de Δ ayuda a prever posibles inestabilidades. Para la superficie \mathcal{H} filtraremos los puntos de equilibrio con el criterio de la desigualdad 2.12 considerando $\xi = 3$ mientras que para la superficie Δ consideramos todos los puntos, es decir, tomaremos $\xi = 0$.

En el capítulo 4 presentamos los resultados para otros valores de e_p y MMRs.

3.1.5.3. Nomenclatura de las superficies \mathcal{H}

Antes de pasar al caso planetario, definiremos el criterio para nombrar a las superficies, lo cual haremos por practicidad. Siguiendo con la figura 3.4, ya vimos que en realidad en este caso no hay una superficie \mathcal{H} sino más bien

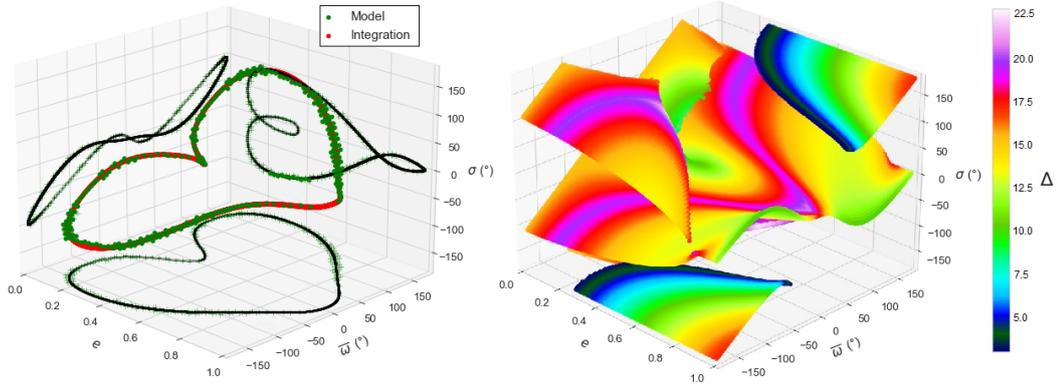


Figura 3.5: *IZQ.*: Comparación entre curvas del modelo y de la integración numérica para el caso $(e_i, \varpi_i, \sigma_i) = (0.32, 180^\circ, 95^\circ)$. *DER.*: superficie Δ para $e_p = 0.3$ en la MMR 2:1.

2 familias disconexas de puntos de equilibrio (pueden parecer más pero hay que tener en cuenta la circularidad de los ángulos), que a partir de ahora llamaremos subsuperficies. En realidad, lo que vamos a estar nombrando es a la familia de subsuperficies que existe al considerar e_p como una variable continua. Estas subsuperficies van modificando su forma a medida que cambiamos e_p así como también la cantidad y ubicación de los ACR que contienen.

Un primer criterio sería nombrar cada subsuperficie como ϖ_0 o ϖ_π de acuerdo a cual sea el valor de ϖ_α en cada subsuperficie. Esto es quizás un poco más acorde a la literatura existente donde se habla de rama pericéntrica o rama apocéntrica (Malhotra y Zhang, 2020) para las resonancias internas cuando $e_p \simeq 0$. Sin embargo, en otros casos (como veremos más adelante) lo que mejor distingue a los ACR de las subsuperficies es el σ_α . Sin embargo, como mencionamos, hay veces que una única subsuperficie alberga más de 1 ACR, volviéndose bastante ambiguo el criterio.

Por lo tanto, para evitar ambigüedades, simplemente utilizaremos letras mayúsculas en negrita ordenadas alfabéticamente para nombrar las subsuperficies. Las asignaremos en orden de aparición a medida que aumentamos e_p . Es decir, le asignamos la letra **A** a la subsuperficie que existe cuando $e_p = 0.01$. Si hay más de una, iremos de la de mayor tamaño a la de menor. Suponiendo que en la figura 3.4 tuviésemos $e_p = 0.01$, tendríamos que la subsuperficie de mayor tamaño es la **A** y la de menor tamaño es la **B**. Finalmente agregaremos un número (partiendo desde 1) después de la letra para distinguir cambios en ϖ_α y/o σ_α entre valores simétricos (0° y 180°) y asimétricos (otros valores) para cualquier ACR a medida que vayamos aumentando e_p . También cambia-

remos de número si aparecen nuevos ACRs o si desaparecen ACRs existentes. Esto será útil para referirnos a las diferentes superficies y además tendrán su correspondencia con las curvas de las familias de ACR que construiremos más adelante.

3.2. Caso planetario

Para el caso planetario utilizaremos una metodología muy similar al caso restringido. La diferencia está en que esta vez podremos construir 2 superficies \mathcal{H} (una para cada planeta). Sin embargo, estas no son independientes ya que las excentricidades e_i ¹ están vinculadas debido a la conservación del AMD (recordar la ecuación 2.21). Si el AMD es constante entonces también lo será la siguiente cantidad que definimos a continuación:

$$\mathcal{AM} = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)} + \beta_2 \sqrt{\mu_2 a_2 (1 - e_2^2)} \quad (3.7)$$

Si sustituimos β_i y μ_i (que dependen de las m_i y a_i) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{AM} &= \frac{m_1 m_0}{m_1 + m_0} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} \\ &+ \frac{m_2 m_0}{m_2 + m_0} \sqrt{k^2 (m_0 + m_2) a_2 (1 - e_2^2)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dicha cantidad coincide con el momento angular del sistema, siempre y cuando $m_{1,2} \ll m_0$. El momento angular se puede expresar de la siguiente forma (Michtchenko et al. 2008):

$$\mathcal{AM}^* = m_1 n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} + m_2 n_2 a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2} \quad (3.9)$$

Si lo dejamos en función de las masas se lee así:

$$\mathcal{AM}^* = m_1 \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) a_1 (1 - e_1^2)} + m_2 \sqrt{k^2 (m_0 + m_2) a_2 (1 - e_2^2)} \quad (3.10)$$

Independientemente de si podemos asumir que $\mathcal{AM} \simeq \mathcal{AM}^*$, la relación entre las e_i tiene la misma forma funcional. Dado que estamos asumiendo que $a_i = cte$ en sus valores nominales dados por la resonancia, entonces \mathcal{AM} es una función que tiene como variables solo a las excentricidades. Por lo tanto,

¹En este contexto, el subíndice “i” no refiere a “inicial” sino que a los planetas 1 y 2.

podemos simplificar la expresión escribiendo:

$$\mathcal{AM} = C_1\sqrt{1 - e_1^2} + C_2\sqrt{1 - e_2^2} \quad (3.11)$$

donde $C_1 = \beta_1\sqrt{\mu_1 a_1}$ y $C_2 = \beta_2\sqrt{\mu_2 a_2}$ son constantes que dependen de las masas y los semi-ejes.

Es fácil ver que $\mathcal{AM}_{max} = C_1 + C_2$ mientras que $\mathcal{AM}_{min} = 0$. Estos casos de borde carecen de interés ya que no habría variación en las excentricidades. La forma funcional de \mathcal{AM} en la ecuación 3.11 es compacta. Sin embargo, podemos ir un paso más allá en la simplificación de las expresiones y definir un momento angular normalizado (el cual también se conserva una vez establecida la resonancia) de la siguiente manera:

$$\mathcal{AM}_{norm} = \frac{\mathcal{AM}}{\mathcal{AM}_{max}} = \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{1 + \eta} + \frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{1 + \eta^{-1}} \quad (3.12)$$

donde definimos $\eta = C_2/C_1$ y obviamente $\mathcal{AM}_{norm} \in [0, 1]$. El parámetro η define la forma de la función \mathcal{AM}_{norm} y por lo tanto, los límites donde cambian los regímenes de los rangos de variación de las excentricidades. Operando, tenemos que:

$$\eta = \frac{m_2\sqrt{(m_0 + m_2)a_2}}{m_1\sqrt{(m_0 + m_1)a_1}} \simeq \frac{m_2}{m_1} \sqrt[3]{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3.13)$$

donde la última igualdad se cumple siempre y cuando $m_{1,2} \ll m_0$. Más allá de esta última simplificación, debido a la conmensurabilidad de períodos orbitales, tenemos que η depende principalmente del cociente entre las masas de los planetas y de la resonancia en la que se encuentran los mismos.

En la figura 3.6 mostramos un ejemplo considerando planetas de igual masa en la resonancia 2:1, lo cual implica un valor de $\eta = 1.25992$. Se pueden observar los diferentes rangos de variaciones que pueden existir para e_1 y e_2 según sea el valor de \mathcal{AM}_{norm} . Si consideramos los \mathcal{AM}_{norm} más grandes (zona de las curvas rojas a naranjas) ambas excentricidades pueden variar desde 0 a un valor acotado menor a 1. Si bajamos hasta $\mathcal{AM}_{norm} \simeq 0.65$, e_1 pasa a poder variar en todo el rango mientras que e_2 ahora tiene cota inferior y superior diferentes de 0 y 1 respectivamente. Si achicamos aún más \mathcal{AM}_{norm} (zona azul) ambas excentricidades tienden a 1.

Metodológicamente, dado un \mathcal{AM}_{norm} arbitrario, procederemos de manera similar al caso restringido pero con un par de salvedades a tener en cuenta.

Tomaremos como variables “independientes” a e_1 y $\Delta\varpi$, es decir, haremos un barrido en dichas variables. Al barrer en e_1 , e_2 queda definido ya que \mathcal{AM}_{norm} se conserva. Por lo tanto, despejando la ecuación 3.12 se obtiene:

$$e_2 = \sqrt{1 - \left[(1 + \eta^{-1})\mathcal{AM}_{norm} - \eta^{-1}\sqrt{1 - e_1^2} \right]^2} \quad (3.14)$$

De esta ecuación surgen 2 restricciones. La primera es que el argumento de la raíz sea positivo para la existencia de e_2 , es decir,

$$\mathcal{AM}_{norm} \leq \frac{\sqrt{1 - e_1^2} + \eta}{1 + \eta} \quad (3.15)$$

La segunda condición tiene que ver con que si bien \mathcal{AM}_{norm} parece ser un parámetro libre en 3.14, no tiene sentido que el término que está dentro del cuadrado sea negativo, ya que contradiría la ecuación 3.12. Por lo tanto:

$$\mathcal{AM}_{norm} \geq \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{1 + \eta} \quad (3.16)$$

Cuando alguna de estas 2 desigualdades no se cumplan, entonces el valor de e_1 será considerado inválido y por lo tanto, no se buscarán puntos de equilibrio.

Existe una expresión similar a 3.14 si despejamos e_1 :

$$e_1 = \sqrt{1 - \left[(1 + \eta)\mathcal{AM}_{norm} - \eta\sqrt{1 - e_2^2} \right]^2} \quad (3.17)$$

A continuación resumiremos 2 métodos con enfoques diferentes para realizar el estudio de las superficies \mathcal{H} y sus curvas de nivel en el caso planetario.

3.2.1. Método 1: estudio general

Para realizar un estudio abstracto y completo de la dinámica secular resonante del problema de 3 cuerpos elíptico y plano, el enfoque del método 1 será tomar a \mathcal{AM}_{norm} y η como parámetros libres. Este último en realidad viene definido por la resonancia y el cociente m_2/m_1 .

Al igual que en el caso restringido, consideraremos solo las resonancias 2:1, 3:1, 3:2 y 1:1. En el caso planetario no se distingue entre resonancia externa o interna ya que las masas de los objetos son comparables. Si puede existir una distinción entre planeta interno más o menos masivo que el externo. Sin

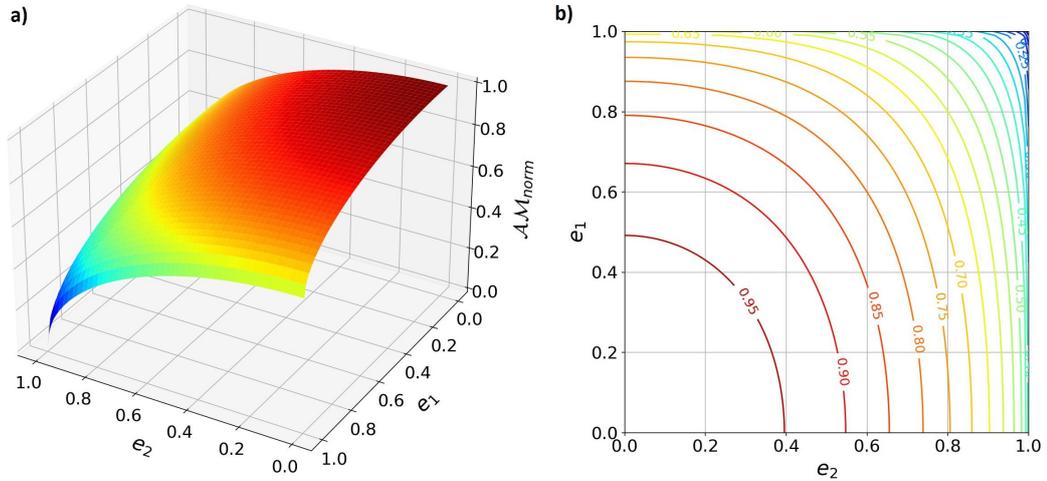


Figura 3.6: a) Función $\mathcal{AM}_{norm}(e_1, e_2)$ para la MMR 2:1 con $m_2 = m_1$ b) Curvas de nivel de dicha función donde se indican sobre las curvas los valores numéricos de \mathcal{AM}_{norm} .

embargo, nosotros no nos enfocaremos mucho en esa clasificación. En cuanto a las masas, consideraremos el cociente $m_2/m_1 \in \{20, 5, 1, 1/5, 1/20\}$. Es decir, combinando ambos conjuntos tenemos 20 casos diferentes y todavía ni entró en discusión \mathcal{AM}_{norm} . Obviamente, estudiar en detalle dichos 20 casos para varios valores de \mathcal{AM}_{norm} se torna rápidamente inviable. Por lo tanto, inicialmente exploraremos las curvas de nivel de \mathcal{AM}_{norm} para los 20 casos, seleccionando los más interesantes (o sea, fijando la MMR, m_2/m_1 y \mathcal{AM}_{norm}) para estudiar en detalle, donde aplicaremos todo el arsenal metodológico visto para el caso restringido.

No obstante, es difícil conocer de entrada cuales serán los más interesantes. Lo único que podemos prever viendo las curvas de nivel \mathcal{AM}_{norm} es cuales son los casos que pueden presentar mayores variaciones de $e_{1,2}$. Por lo tanto, a priori, nos enfocaremos en dichos casos y luego iremos explorando el resto, haciendo una selección más refinada de los más interesantes para mostrar en esta tesis.

3.2.2. Método 2: estudio particular

El método 2 lo utilizaremos para estudiar los casos de sistemas planetarios reales que se encuentren en resonancia. Para ello, dado un par de exoplanetas resonantes orbitando una estrella, calcularemos \mathcal{AM} a partir de la ecuación 3.10 utilizando los valores del sistema real requeridos para realizar dicho cálculo.

lo.

Luego, simplemente se hace el barrido en $(e_1, \Delta\varpi)$ donde para cada par calculamos los puntos de equilibrio con la ecuación 2.23. Esto nos permite construir una superficie la cual llamaremos \mathcal{H}_1 . La superficie \mathcal{H}_2 corresponderá a intercambiar e_1 por e_2 , que es obtenido con la ecuación 3.14. Cada una de estas superficies nos ayudará a predecir y entender la evolución secular de ambos planetas dentro de la resonancia.

A la hora de comparar con las integraciones numéricas (en ambos métodos) utilizaremos los típicos elementos orbitales pero calculados usando el sistema de referencia de Poincaré. Esta es la manera correcta de realizar dicha comparación ya que toda la teoría expuesta en la sección 2.3 está desarrollada en dicho sistema de referencia.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo, al igual que los capítulos anteriores, se encuentra separado principalmente en 2 partes. La primera contiene los resultados obtenidos en el estudio secular resonante del caso asteroidal mientras que en la segunda se encuentran los resultados del estudio secular resonante del caso planetario. Las integraciones numéricas del caso asteroidal fueron realizadas con el programa *EVORB15*¹ mientras que las del caso planetario con el paquete de Python *REBOUND*². Este cambio de integrador se hizo debido a que *EVORB15* trabaja en coordenadas astrocéntricas mientras que *REBOUND* admite también baricéntricas, de Poincaré y de Jacobi. En ambos casos, para el estudio de las familias de ACRs se utilizó el integrador *ncorp11*³, el cual también admite varios marcos de referencia.

4.1. Caso asteroidal

Los principales resultados de este método se encuentran en Pons y Gallardo (2022). No obstante, con el objetivo de lograr una exploración exhaustiva de la dinámica secular dentro de las resonancias, se mostrará más en detalle los resultados para ciertos valores específicos de e_p mediante el uso de las herramientas expuestas en el capítulo 3. Los valores discretos de e_p pertenecerán al siguiente conjunto: $\{ 0.01, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 0.99 \}$. La elección de dichos valores dependerá de cada caso y se realizará para ilustrar las características

¹<http://www.fisica.edu.uy/~gallardo/evorb.html>

²<https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>

³Cedido por Cristian Beaugé (<https://iate.oac.uncor.edu/staff-members/cristian-beauge/>).

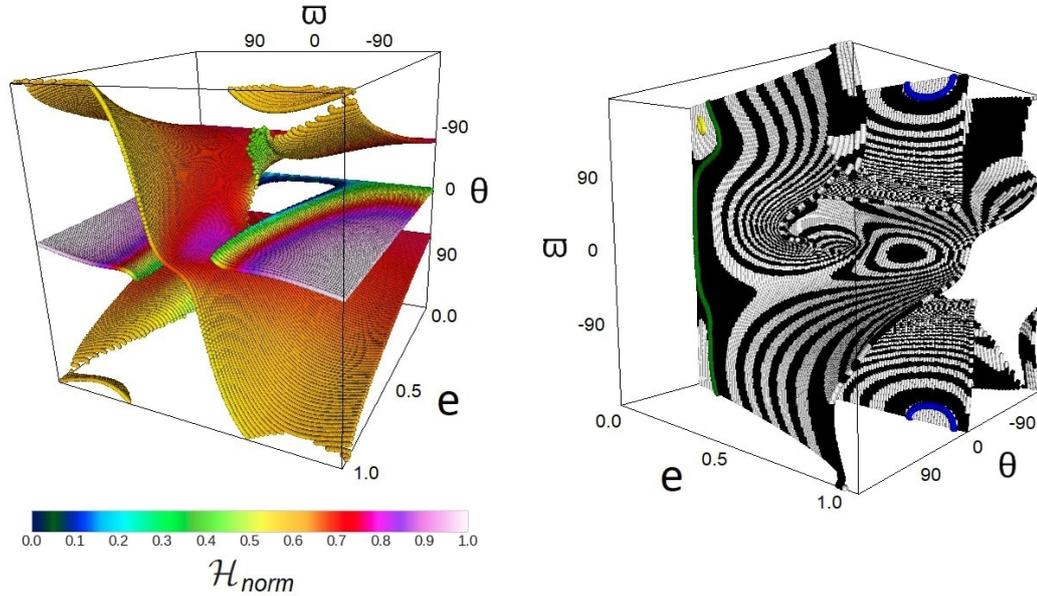


Figura 4.1: *IZQ.*: Superficie \mathcal{H} en la MMR 2:1 con $e_p = 0.5$. *DER.*: Misma superficie en diferente orientación comparada con 3 integraciones numéricas cuyas condiciones iniciales son $(e_i, \varpi_i, \theta_i)_{\text{azul}} = (0.10, 152^\circ, 72^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \theta_i)_{\text{verde}} = (0.20, 136^\circ, 76^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \theta_i)_{\text{amarillo}} = (0.64, 180^\circ, 0^\circ)$

más interesantes y con mayor aplicabilidad (por ejemplo, el caso de perturbador cuasi-circular estará siempre presente). Luego, se documentará en tablas los ACR encontrados para los e_p seleccionados y se resumirá en un gráfico las familias de ACR considerando a e_p como variable continua. Para esto último es necesario un método que se describirá más adelante. Las siguientes 3 secciones dividen el estudio del caso asteroidal entre las resonancias internas, externas y la coorbital.

4.1.1. Resonancias internas

En esta sección analizaremos sólo resonancias internas, es decir, $a < a_p$.

4.1.1.1. Resonancia 2:1

Gran parte de los resultados de esta resonancia ya fueron presentados en conjunto con la metodología de trabajo en la sección 3.1. En esta sección mostramos lo que sucede cuando $e_p = 0.5$ y presentamos la familia de ACRs.

Para e_p altos a veces conviene considerar un ángulo resonante alternativo que llamamos θ definido de la siguiente manera:

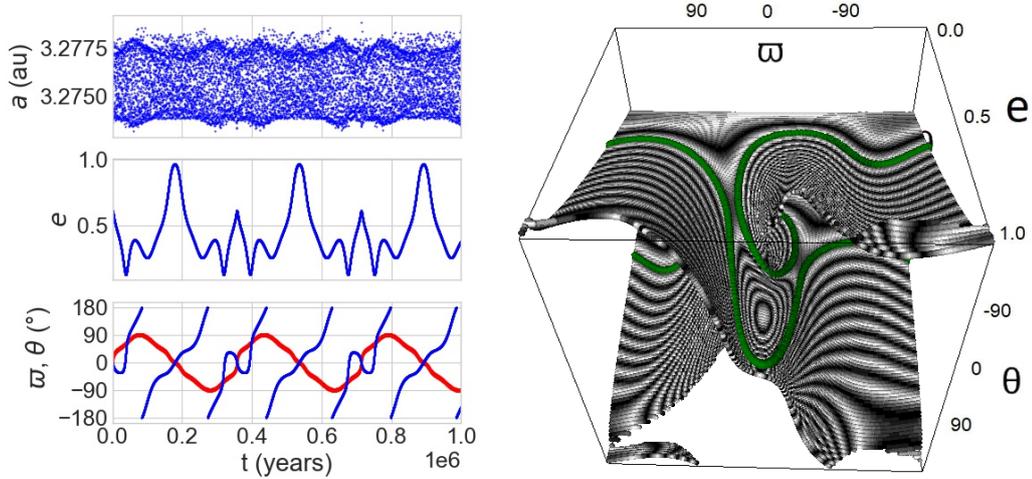


Figura 4.2: *IZQ.*: Integración numérica para una partícula en la MMR 2:1 con un planeta de $e_p = 0.5$. En rojo se muestra $\theta(t)$. *DER.*: Superficie \mathcal{H} de la familia $\varpi = 0$ con la misma integración (curva verde). Datos int. num.: $(e_i, \varpi_i, \theta_i) = (0.61, 0^\circ, 0^\circ)$.

$$\theta = k\lambda - k_p\lambda_p + (k_p - k)\varpi_p \quad (4.1)$$

Dado que estamos asumiendo $\varpi_p = 0^\circ$, entonces $\theta = k\lambda - k_p\lambda_p$, cuya expresión es análoga a la variable definida para el caso planetario en la ecuación 2.19. Utilizando esta variable resonante podemos construir la superficie \mathcal{H} del caso $e_p = 0.5$, como se puede ver en la figura 4.1. En la derecha de dicha figura se compara la superficie \mathcal{H} (esta vez dibujada en blanco y negro para que se noten solo las curvas de nivel) con 3 integraciones numéricas (curvas de color). En los 3 casos se puede observar un buen ajuste entre el modelo y la simulación. La integración numérica en azul vive en la subsuperficie **B1** mientras que las otras 2 viven en la subsuperficie **A2**, la cual es una superficie con una forma mucho más complicada (al menos utilizando estas variables para graficar) que la **B1**. Otra característica importante a señalar es que la integración amarilla corrobora la existencia del ACR asimétrico menor (en el sentido de que su existencia esta limitada a una región menor del espacio de fases) y además, la aparición de este ACR es la razón de porque llamamos **A2** a la subsuperficie (la de la fig. 3.4 sería la **A1**). En la tabla 4.1 se encuentran los valores exactos de todos los ACR hallados para los e_p estudiados en detalle. Estas 3 integraciones podrían compararse con curvas de nivel en el plano (e, ϖ) sin la necesidad de pasar a la superficie tridimensional, ya que la variación en

θ de dichas integraciones es muy pequeña.

$(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)$	1	2	3, 4
$e_p = 0.01$	(0.73, 0°, 0°)	-	-
$e_p = 0.3$	(0.7, 0°, 0°)	(0.99, 180°, 180°)	-
$e_p = 0.5$	(0.79, 0°, 0°)	(0.88, 180°, 180°)	(0.08, ±155°, ∓133°)

Tabla 4.1: Resumen de los ACR en la MMR 2:1 para los casos investigados en detalle.

Sin embargo, si miramos el ejemplo de integración numérica de la figura 4.2 podemos ver que en ese caso θ presenta grandes variaciones. El comportamiento intrincado de este ejemplo requiere el uso de la superficie \mathcal{H} para lograr explicarlo. Tampoco podríamos proyectar la subsuperficie **A2** en el plano (e, ϖ) si quisiéramos (si es posible proyectar la subsuperficie **B1**), ya que para ciertas regiones existe más de un θ de equilibrio y además existen curvas de nivel que contienen más de un θ de equilibrio para un cierto par (e, ϖ) . En el caso de la figura 4.2, θ presenta una oscilación entre $\pm 90^\circ$, ϖ circula con una pequeña oscilación cada 2 períodos seculares y e posee una gran excursión al igual que en alguno de los ejemplos donde $e_p = 0.3$.

Si realizamos una exploración más completa considerando a e_p como una variable continua y registramos la posición de todos los ACR, podemos construir curvas como las de la figura 4.3, las cuales muestran la ubicación de los ACR según e_p . Un camino para construir estas curvas podría ser extraer la

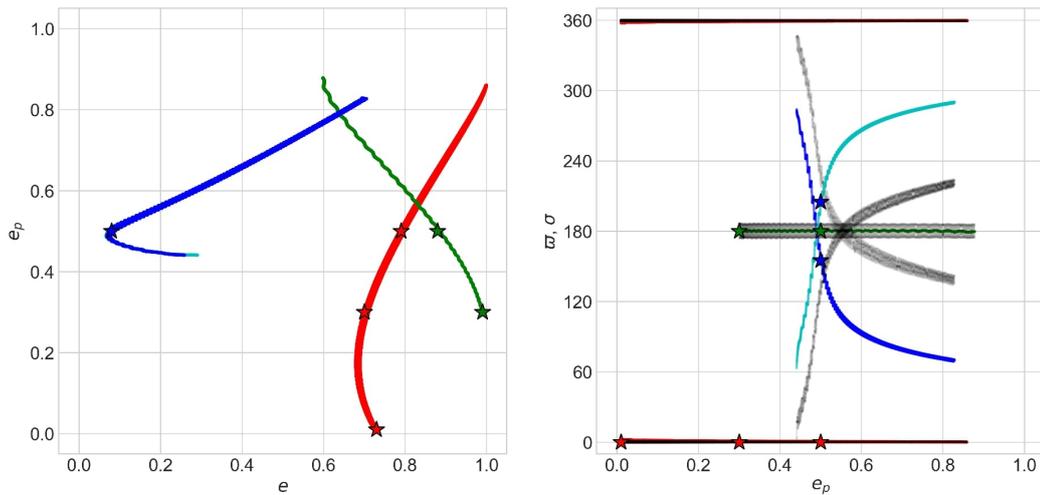


Figura 4.3: Familias de ACR para la MMR 2:1. En rojo y verde se tienen las familias simétricas mientras que en azul y celeste las asimétricas. En el gráfico de la derecha σ está en negro. Las estrellas indican los valores mostrados en la tabla 4.1.

posición del ACR a partir de una inspección de las superficies \mathcal{H} . Esto presenta 2 inconvenientes, el primero es la demanda computacional que requiere el cálculo de la superficie \mathcal{H} que puede ir desde unas horas hasta más de 1 día (utilizando un computador personal). Por otro lado, lo tedioso de inspeccionar y obtener la posición del ACR. Este último podría llegar a resolverse con algún algoritmo bien diseñado que detecte extremos de una función, ya que, como quizás el lector ya observó, los ACR se vienen dando siempre en los máximos locales de \mathcal{H} sobre la superficie. En realidad, si recordamos las ecuaciones de Lagrange (Murray y Dermott, 2000), esto tiene sentido ya que en el caso coplanar tendríamos:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \Rightarrow \dot{e} \propto \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varpi} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \Rightarrow \dot{\varpi} \propto -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial e}\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde asumimos que $a = a_{nom} = cte$ por la resonancia profunda y usamos la ecuación 2.5. Por lo tanto, dado que en un ACR por definición $\dot{e} = 0$ y $\dot{\varpi} = 0$ (en escalas seculares), entonces necesariamente tenemos que estar en un extremo de \mathcal{H} . Por lo que, estrictamente hablando, los ACR también podrían ocurrir en mínimos locales (y de hecho sucede aunque con menor frecuencia).

A pesar de estas interesantes observaciones, debido al primer inconveniente, optamos por utilizar el método descrito a continuación. Para construir las curvas de las familias de ACR, realizamos integraciones numéricas en las cuales inducimos una variación muy lenta en e_p . De manera similar a como trabaja el principio de invariancia adiabática, si el sistema arranca ubicado exactamente en un ACR, el mismo se mantendrá en él (siempre que éste exista) a medida que varíe e_p , siempre y cuando lo haga suficientemente lento. En otras palabras, el sistema se va “acomodando” sin perder la evolución estática propia del ACR.

En esta resonancia, a medida que aumentamos e_p , coexisten mayor cantidad de ACRs. Otra observación radica en la curva azul del gráfico 4.3, la cual nos demuestra la existencia de ACRs asimétricos (confirmada con la integración en amarillo de la figura 4.1) en una resonancia interna como la 2:1, característica que clásicamente se atribuye a resonancias externas (Message, 1958) y a la 1:1 (puntos de Lagrange). Esta curva azul parece tener alguna relación con la de la figura 2 de Beaugé et al. (2006) donde ellos exploraron el caso planetario para un cierto rangos de masas. Parecería que en el límite asintótico donde

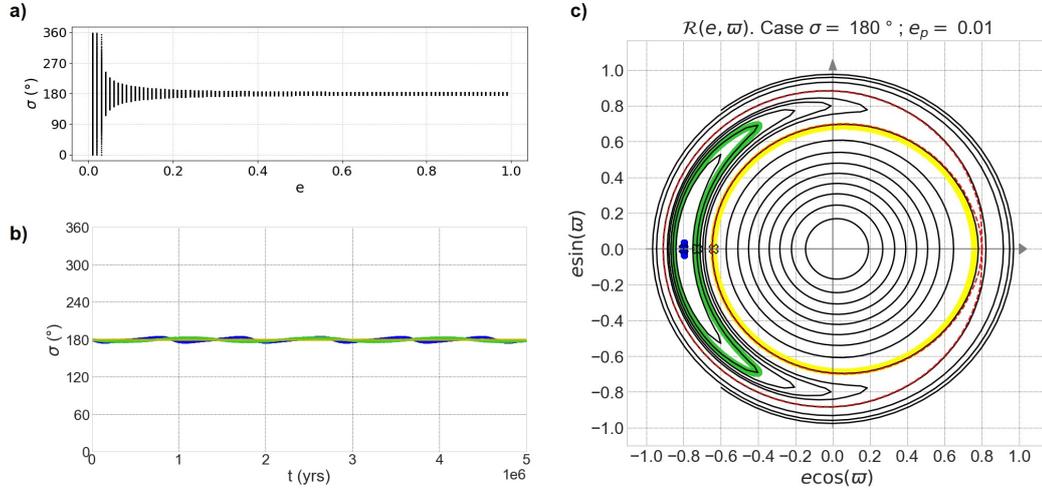


Figura 4.4: *a)* Centros de libración de la MMR 3:1 según e para $e_p = 0.01$. *b)* $\sigma(t)$ de 3 integraciones numéricas. *c)* Mismas integraciones en el plano (h, k) comparadas con las curvas de nivel del modelo en negro. En rojo está la separatriz y las cruces indican las condiciones iniciales, las cuales son $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{azul} = (0.80, 180^\circ, 180^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{verde} = (0.73, 180^\circ, 180^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{amarillo} = (0.64, 180^\circ, 180^\circ)$

la masa del planeta interno es despreciable frente a la del externo, la curva de ellos podría converger a la curva encontrada por nosotros. Más adelante mostraremos que esta familia asimétrica también existe en el caso planetario cuando las masas de los planetas son iguales.

4.1.1.2. Resonancia 3:1

Para estudiar la 3:1 arrancamos mostrando que sucede en el caso de perturbador cuasi-circular. En la figura 4.4a) se muestra la ubicación de los centros de libración σ_c en función de e . Es claro que la gran mayoría de los puntos de equilibrio, sobretodo para e moderados y altos, se encuentran en 180° . Por lo tanto, si realizamos integraciones numéricas comenzando en uno de estos puntos lo esperable es que $\dot{\sigma}_c(t) \simeq 0$ y que la evolución de e y ϖ venga dada por las curvas de nivel del \mathcal{H} en un plano de dichas variables. De hecho, esto es lo que ocurre como se puede observar en los paneles b) y c) de la figura 4.4. También podemos comprobar que la separatriz del modelo predice bien el cambio de comportamiento de ϖ entre circular y librar. Por otro lado, la ubicación del ACR en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha) = (0.8, 180^\circ, 180^\circ)$ también está correctamente predicha por el modelo.

Si aumentamos e_p por ejemplo a 0.1 lo que ocurre es que comienza a haber

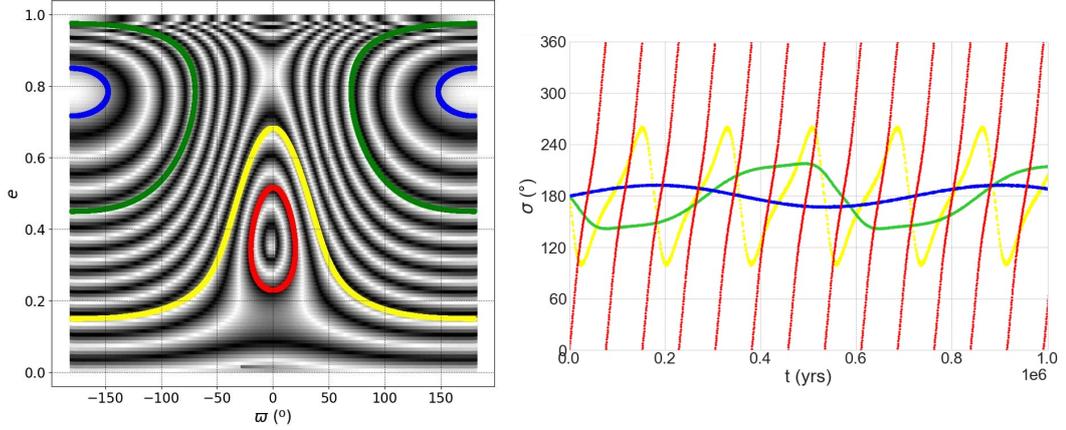


Figura 4.5: *IZQ.*: Proyección de la superficie \mathcal{H} en el plano (e, ϖ) en la MMR 3:1 con $e_p = 0.1$ comparada con 4 integraciones numéricas. *DER.*: $\sigma(t)$ de dichas integraciones.

centros de libración para otros ángulos además de 180° , es decir, comienza a existir una superficie \mathcal{H} que vive en el espacio (e, ϖ, σ) , la cual es la **A1**. Para ese valor de e_p aún existe una sola subsuperficie de puntos de equilibrio que conforma una función $\sigma_c(e, \varpi)$, es decir, una función de 2 variables. Por lo tanto, se puede realizar una proyección en el plano (e, ϖ) y entender la evolución secular de estas 2 variables. En la figura 4.5 se comparan 4 integraciones numéricas con las curvas de nivel de \mathcal{H} en el plano (e, ϖ) donde podemos ver que en todos los casos existe buena coincidencia entre modelo y simulación. Es llamativo lo grande que pueden ser los cambios en la excentricidad, donde en los casos mas extremos puede tener cambios partiendo de $e \simeq 0.2$ y llegando hasta $e \simeq 1$, es decir, alcanzar valores característicos de un sungrazer. Los cambios en e son chicos solo en las proximidades de los ACR, es decir, no hay curvas de nivel horizontales que impliquen una circulación en ϖ con poca variación en e , excepto para $e \simeq 0$.

En la misma figura se muestra como $\sigma_c(t)$ es diferente para cada integración. Para las integraciones en torno al ACR ubicado en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_1 = (0.79, 180^\circ, 180^\circ)$ e incluso en los casos donde ϖ circula, se tiene que σ presenta una oscilación en torno a 180° , la cual es de mayor amplitud y frecuencia a medida que nos alejamos de dicho ACR. Por otro lado, la integración numérica restante, que evoluciona en torno al otro ACR en $(e_\alpha, \varpi_\alpha)_2 = (0.35, 0^\circ)$ presenta un σ que circula. En realidad lo que circula es σ_c (en escala de tiempo secular) con un σ librando (en este caso con amplitud nula) en torno a ese σ_c , es decir, la resonancia sigue existiendo.

$(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)$	1	2	3, 4
$e_p = 0.01$	(0.8, 180°, 180°)	-	-
$e_p = 0.1$	(0.79, 180°, 180°)	(0.35, 0°, -)	-
$e_p = 0.3$	(0.65, 135°, 101°)	(0.65, 225°, 259°)	-
$e_p = 0.7$	(0.85, 0°, 0°)	(0.84, 180°, 0°)	(0.27, ±96°, ±74°)

Tabla 4.2: Resumen de los ACR en la MMR 3:1 para los casos investigados en detalle.

Este tipo de ACRs donde σ_c circula presenta una potencial dificultad y es que el valor exacto del mismo coincide con el borde de la superficie \mathcal{H} , es decir, dejan de haber puntos de equilibrio resonantes en ese límite (más adelante lo veremos de forma explícita). Esto implica que la estabilidad de este ACR podría verse afectada. Para diferenciarlos los llamaremos ACR de tipo II o simplemente ACR_{II} . Los ACR de tipo I son los que ya veníamos describiendo, donde el centro de libración está fijo en escalas seculares. En la siguiente sección, cuando estudiemos la resonancia 3:2, veremos un ejemplo de evolución secular al colocar la partícula en el centro de un ACR_{II} . Hasta acá se observó que para entender completamente la evolución de σ_c , hay que recurrir a la representación tridimensional. Sin embargo, parece ser que para e_p no muy altos, la evolución de e y ϖ puede ser explicada con una proyección, sin la necesidad de la representación tridimensional.

Si aumentamos e_p hasta 0.3, ocurren 4 cosas, como se puede observar en la figura 4.6. Primero que nada, el ACR_{I} en $\varpi = 180^\circ$ se divide en 2 ACR asimétricos (más adelante, cuando construyamos las curvas de las familias de ACR de la MMR 3:1 demostraremos esto) en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_1 = (0.66, 101^\circ, 293^\circ)$ y $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_2 = (0.66, 259^\circ, 67^\circ)$. Es decir, pasamos a la subsuperficie **A2**. Segundo, el ACR_{II} ubicado en $\varpi = 0^\circ$ dejó de existir. Tercero, aparece una bifurcación en la propia **A2** dando lugar a curvas de nivel abiertas. Como veremos más adelante, este tipo de curvas de nivel conducen a libraciones de amplitud no nula y pueden derivar en un comportamiento caótico. Por último, aparece una subsuperficie **B1** (de menor extensión) la cual podemos observar que existe para e más bien altos (ver fig. 4.6). Según podemos ver en el panel b) de dicho gráfico, los encuentros afectarían a la evolución en dicha región excepto cuando $e \rightarrow 1$. En ese lugar parecería asomar un nuevo ACR que se materializará recién para $e_p \gtrsim 0.5$.

Si aumentamos aún más e_p , por ejemplo a 0.7, podemos ver como en **B1** se confirma la presencia de un ACR en $e_\alpha = 0.84$ (punto azul en la figura

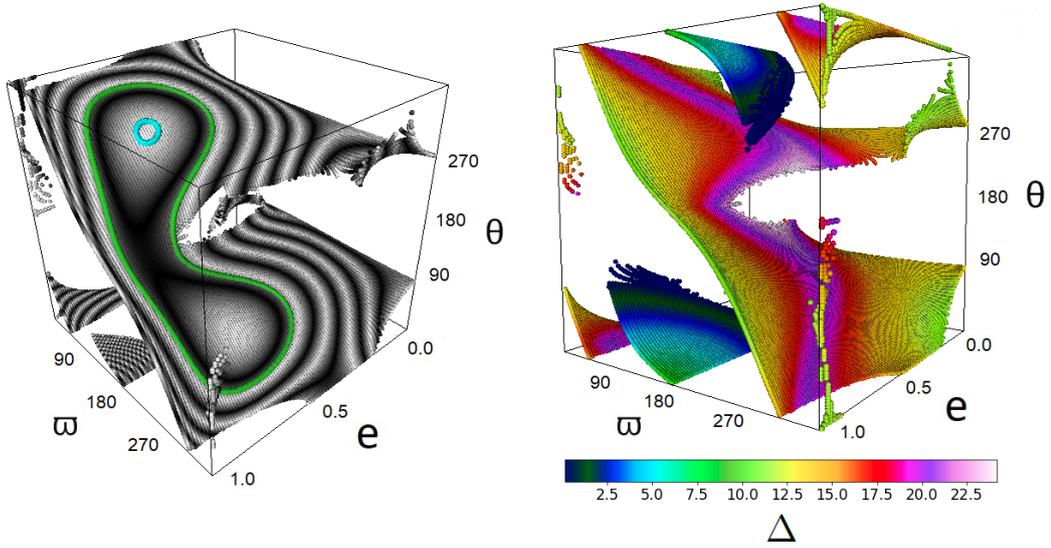


Figura 4.6: *IZQ.*: Superficie \mathcal{H} de la MMR 3:1 con $e_p = 0.3$ luego de filtrar parte de una de las familias (para lograr mejor visualización). Las curvas de color son 2 integraciones numéricas con $(e_i, \varpi_i, \theta_i)_{verde} = (0.4, 104^\circ, 295^\circ)$ y $(e_i, \varpi_i, \theta_i)_{celeste} = (0.7, 102^\circ, 289^\circ)$. *DER.*: Superficie Δ del mismo caso (sin filtrar).

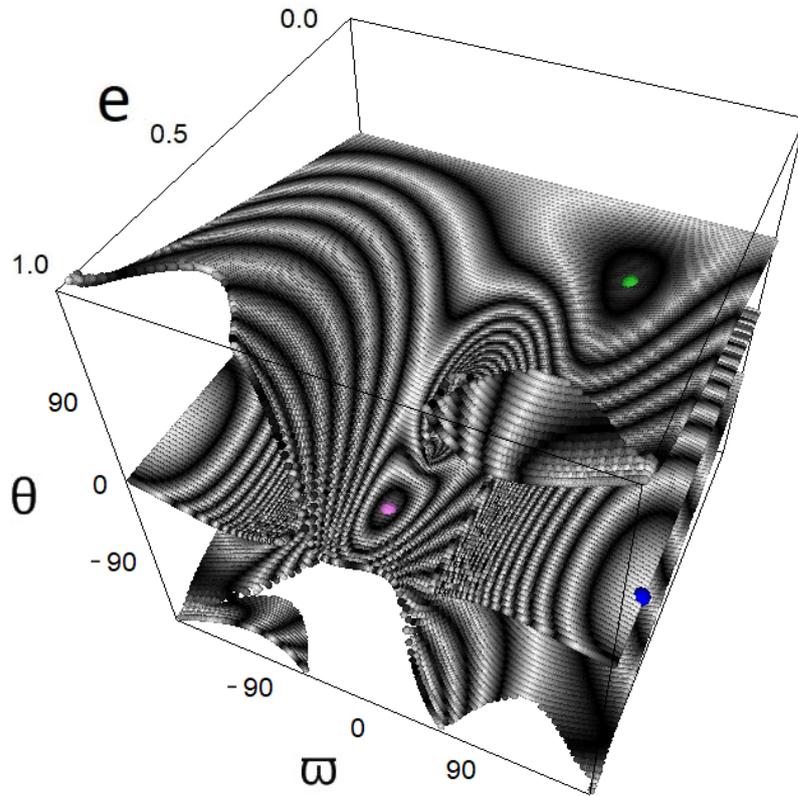


Figura 4.7: Superficie \mathcal{H} de la MMR 3:1 con $e_p = 0.7$. En colores se destaca la posición exacta de 3 de los 4 ACR existentes en este caso.

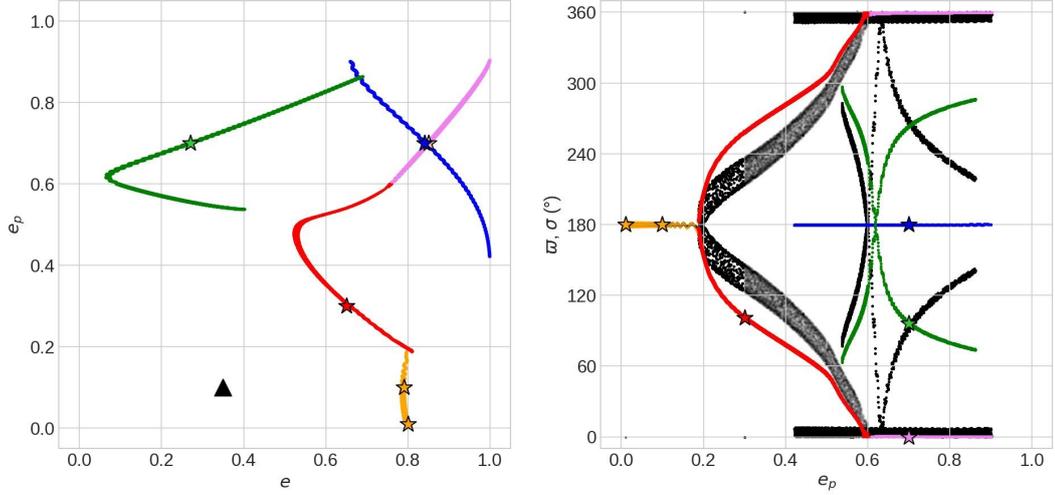


Figura 4.8: Familias de ACR para la MMR 3:1. En naranja, azul y lila se tienen las familias simétricas mientras que en rojo y verde las asimétricas. En el gráfico de la derecha σ está en negro. Las estrellas indican los valores mostrados en la tabla 4.2. El triángulo es el ACR especial cuyo σ circula en escalas seculares de tiempo.

4.7). Además, aparece un nuevo ACR en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)_2 = (0.85, 0^\circ, 0^\circ)$ en la subsuperficie **A**. Por último, en la misma subsuperficie coexisten otros ACRs asimétricos, que como veremos, no son de la misma familia que los del caso $e_p = 0.3$ (que variaron su posición debido al cambio en e_p) sino que pertenecen a otra familia de ACRs que aparece para e_p altos. En la tabla 4.2 se encuentran los valores de los ACR para los e_p analizados. Si consideramos todos los valores de e_p exceptuando el de 0.7, podemos comparar con Pichierri et al. (2017) donde concluimos que sus resultados son similares a los nuestros.

Para tener una visión más global de las soluciones estacionarias, volvemos a construir el gráfico de las familias de ACR, al igual que hicimos en la MMR 2:1. En la figura 4.8 se puede observar el resultado. En este caso se vuelve a repetir lo que sucedía en la 2:1, a mayor e_p , mayor cantidad de ACRs. Sin embargo, en la 3:1 ocurre un fenómeno nuevo y es el de una familia simétrica que se transforma en una asimétrica al aumentar e_p para luego pasar a ser simétrica de nuevo al aumentar aún más e_p . Este es el caso de las curvas naranja, roja y rosada en la mencionada figura. La primera corresponde a la familia **A1** que se da en $\varpi = \pi$ y existe desde $e_p = 0$ hasta $e_p \simeq 0.2$. Luego, dicha familia cambia a la **A2** ya que la rama simétrica se bifurca en 2 ramas asimétricas (curvas rojas) que existen hasta $e_p \simeq 0.6$. Finalmente, dichas ramas se unen para conformar un ACR en $\varpi = 0$. Para estos valores altos de e_p , coexiste,

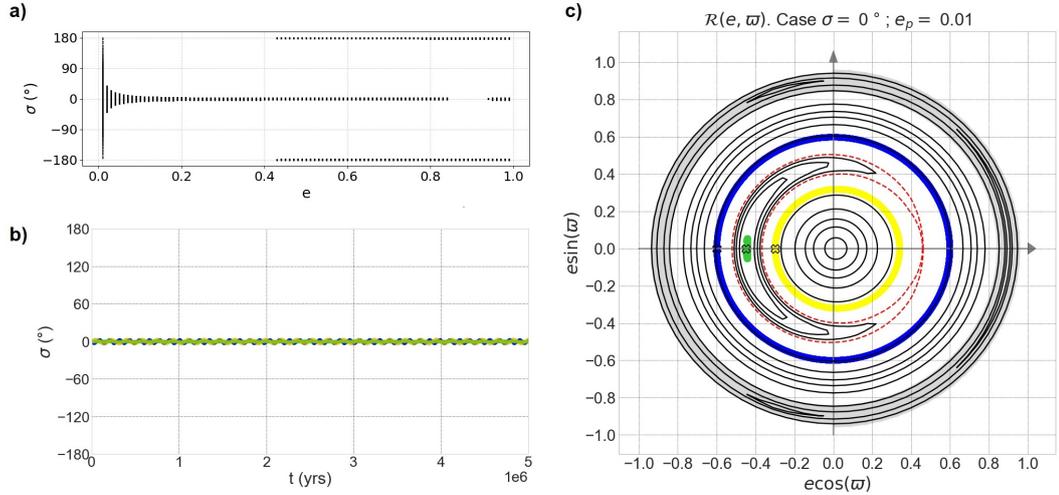


Figura 4.9: *a)* Centros de libración de la MMR 3:2 según e para $e_p = 0.01$. *b)* $\sigma(t)$ de 3 integraciones numéricas. *c)* Mismas integraciones en el plano (h, k) comparadas con las curvas de nivel del modelo en negro. En rojo está la separatriz y las cruces indican las condiciones iniciales, las cuales son $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{azul} = (0.60, 180^\circ, 180^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{verde} = (0.45, 180^\circ, 180^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{amarillo} = (0.30, 180^\circ, 180^\circ)$. En la región gris se da la condición de encuentro.

como ya mostramos, la familia **B1** en $\varpi = \pi$ (curva azul). Para complicar aún más las cosas, en estos valores de e_p coexiste otra familia asimétrica (curvas verdes) diferente de la primera. Por lo tanto, para los valores de e_p donde coexisten la curva roja y verde tenemos a la familia **A3** y cuando coexisten la verde con la rosada tenemos a la **A4**.

Como se puede ver, este entramado de familias de ACR resulta mucho más complicado en la 3:1 que en la 2:1. Además, se empieza a observar una tendencia a tener mayor cantidad de familias de ACR coexistiendo a medida que aumentamos e_p . La resonancia 3:2 no será la excepción.

4.1.1.3. Resonancia 3:2

En esta sección analizaremos la MMR 3:2. Al igual que en los casos anteriores, comenzamos analizando el caso $e_p = 0.01$. En esta oportunidad, al igual que en la 2:1, existen 2 conjuntos de centros de libración, uno en $\sigma = 0$ (familia **A1**) y otro en $\sigma = \pi$ (familia **B1**), como se puede ver en la figura 4.9a). Esta última existe para $e \gtrsim 0.4$ misma conclusión que obtuvieron en Nesvorný et al. (2002). En el panel b) de dicha figura mostramos 3 integraciones numéricas para la rama $\sigma = 0$ mientras que en c) mostramos las mismas integraciones en

el plano (h, k) comparadas con las curvas de nivel de \mathcal{H} del modelo. La similitud entre modelo y simulación es buena en las 3 regiones de dicho plano, es decir, en la región externa de circulación (curva azul), en la región de libración (curva verde) y en la región interna de circulación (curva amarilla). En el caso de la rama $\sigma = \pi$ existe prácticamente una sola región de circulación donde las integraciones numéricas también muestran buen ajuste al modelo (no lo mostramos aquí) y un ACR (de pequeña extensión en el espacio de fases) en $(e_\alpha, \varpi_\alpha) = (0.97, 180^\circ)$. En todos estos casos no existe gran excursión en e . En ambas ramas aparecen unos ACR asimétricos pero en la zona de encuentro, por lo que son inestables.

Si consideramos un perturbador de $e_p = 0.3$ ocurren cosas muy interesantes con la subsuperficie **A2**. Como se puede observar en la figura 4.10, aparecen 2 ACR_I con $\sigma_\alpha = 0^\circ$ y 1 ACR_{II}. Podemos notar que 2 de estos 3 ACR tienen $\varpi_\alpha = 0^\circ$ con distinto e_α . Si consideramos la proyección en (e, ϖ) tanto del modelo como de las integraciones numéricas realizadas, todo parece funcionar bien. Sin embargo, si comparamos las integraciones en el espacio, se puede observar como para algunos casos existe una amplitud de libración no nula, provocando que la integración se salga de la subsuperficie **A2**. La explicación de esto puede tener 2 orígenes (que no tienen porqué ser mutuamente excluyentes) que son:

- No tener en cuenta las perturbaciones de corto período al momento de realizar la integración numérica.
- La ley de estructura (Ferraz-Mello, 1988) no contemplada por el modelo.

El primer punto refiere a que las condiciones iniciales que utilizamos para realizar las integraciones numéricas deben ser modificadas (en especial el semi-eje) levemente para compensar el efecto de las perturbaciones de corto período. Es muy plausible que la integración numérica sea sensible (en mayor o menor medida) a este efecto debido a que el modelo es secular, es decir, utiliza un promediado que justamente se deshace de las perturbaciones de corto período al calcular la función perturbadora. Para encontrar un a_i adecuado simplemente exploramos el entorno próximo de a_{nom} hasta encontrar uno que produzca una amplitud de libración suficientemente pequeña. En la figura 4.11 mostramos el caso de la integración en rojo de la figura 4.10 para que se vea como se achica la amplitud de libración si ajustamos levemente el semi-eje osculador inicial.

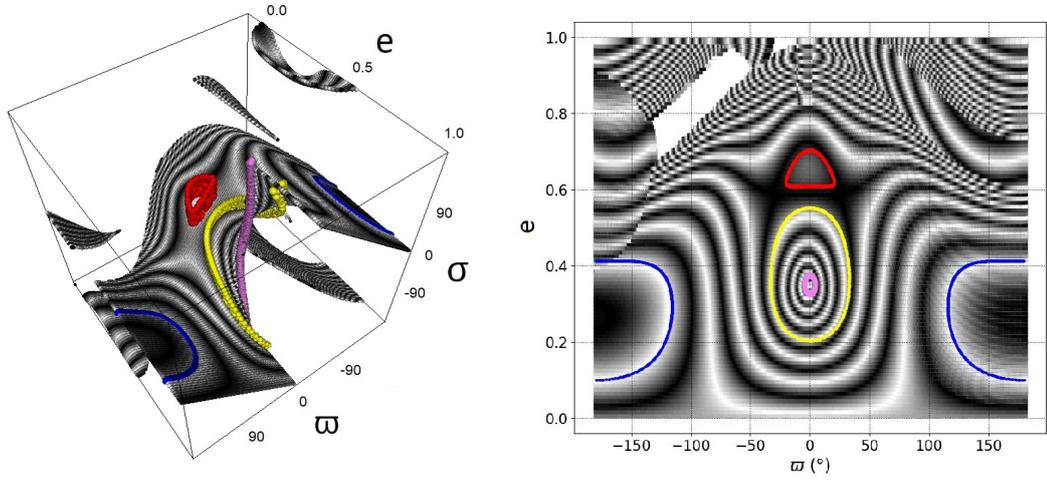


Figura 4.10: *IZQ.*: Superficie \mathcal{H} (con alguna parte removida para mejorar la visualización) para la MMR 3:2 con $e_p = 0.3$. *DER.*: Proyección en σ de dicha superficie (observar los solapamientos). En colores se tienen 4 integraciones numéricas cuyas condiciones iniciales son: $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{azul} = (0.10, 180^\circ, 0^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{rojo} = (0.70, 0^\circ, 0^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{amarillo} = (0.55, 0^\circ, 0^\circ)$; $(e_i, \varpi_i, \sigma_i)_{lila} = (0.37, 0^\circ, 0^\circ)$.

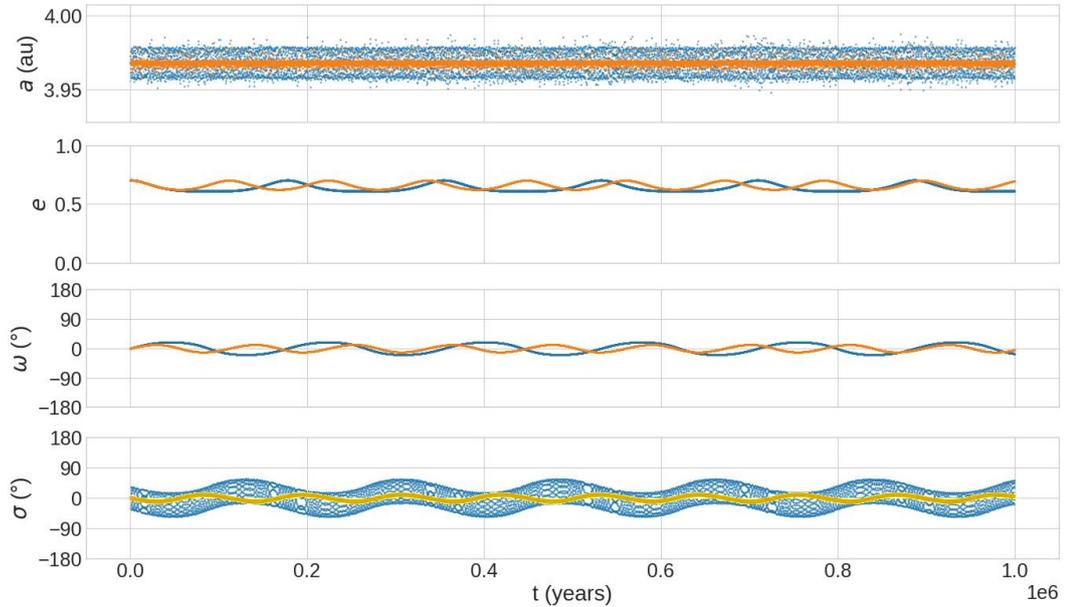


Figura 4.11: Comparación entre utilizar $a = a_{nom}$ (azul) y utilizar $a = 0.997a_{nom}$ (naranja) para la integración en rojo de la figura 4.10.

$(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)$	1	2	3	4
$e_p = 0.01$	(0.45, 180°, 0°)	(0.97, 180°, 180°)	-	-
$e_p = 0.3$	(0.27, 180°, 0°)	(0.96, 180°, 180°) ^a	(0.66, 0°, 0°)	(0.36, 0°, -) ^b

Tabla 4.3: Resumen de los ACR en la MMR 3:2 para los casos investigados en detalle. ^a En este ACR $\Delta \simeq 4R_{Hill}$, por lo que podría ser inestable en períodos de tiempo muy largos. ^b Este ACR no tiene definido el σ_α al ser de tipo II.

El segundo punto de la lista de posibles causas para esta amplitud de libración “grande” está en que la ley de estructura podría estar afectando al semi-eje nominal para los valores de e utilizados en las integraciones. Este punto lo discutiremos en detalle más adelante en la sección 4.1.4. No obstante, podemos adelantar que probablemente este fenómeno no esté influyendo en este caso particular, ya que la ley de estructura en general afecta en sistemas con excentricidades bajas.

A pesar de este inconveniente, en este caso tenemos que al proyectar sigue habiendo buen ajuste de e y ϖ (que son las cantidades que suelen importar más de la evolución secular) entre modelo y simulación. Sin embargo, esta no será la regla general ya que como veremos en la sección 4.2, encontraremos ejemplos donde un pequeño desplazamiento en el a_i más apropiado ocasionará una evolución bastante diferente en e y ϖ de lo que nos predice el modelo.

Para culminar con el estudio de esta resonancia, mostramos la familias de ACRs encontradas luego de realizar la exploración (ver fig. 4.12). En esta

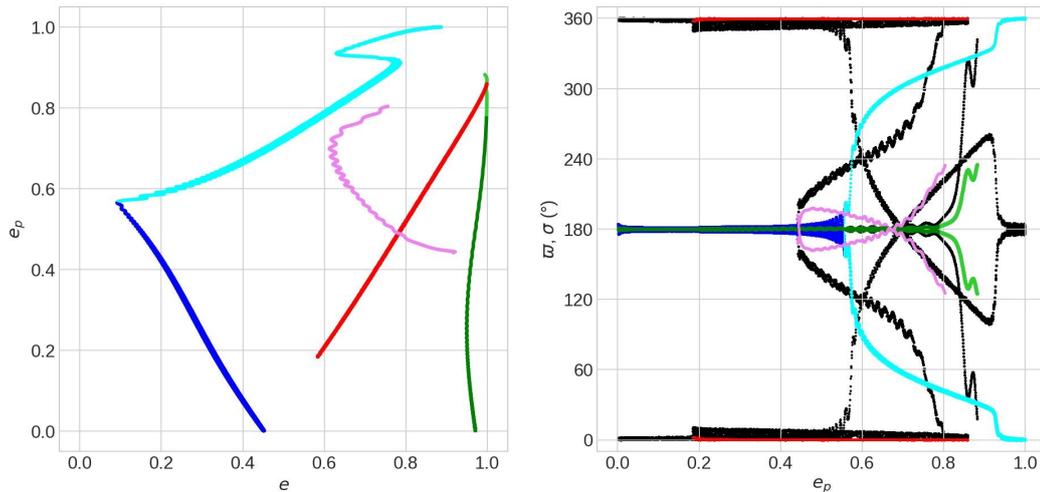


Figura 4.12: Familias de ACR para la MMR 3:2. En rojo, verde y azul se tienen las familias simétricas mientras que en rosado, celeste y verde claro las asimétricas. En el gráfico de la derecha σ está en negro. Las estrellas indican los valores mostrados en la tabla 4.3.

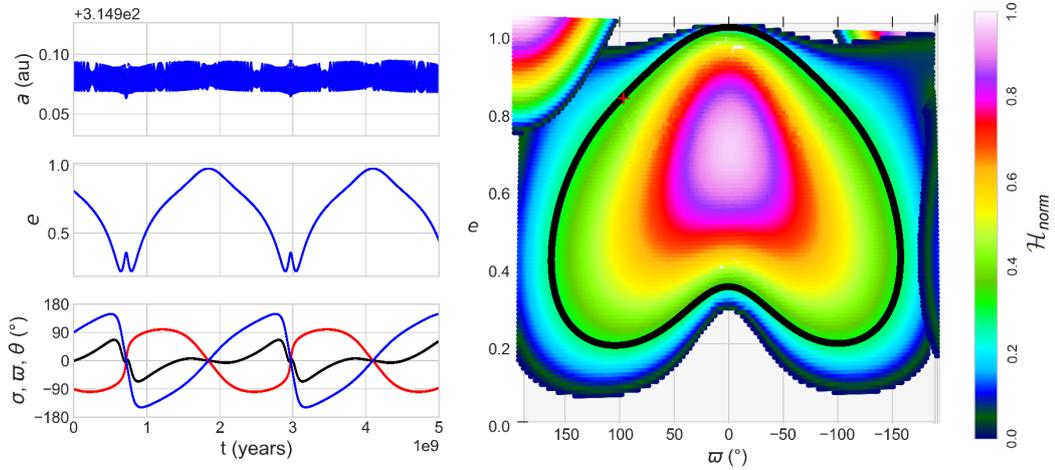


Figura 4.13: Partícula en resonancia 2:1 con el planeta 9. *IZQ.*: Evolución de los elementos orbitales de la partícula en el tiempo. *DER.*: Proyección de la superficie \mathcal{H} vs. la integración numérica (curva negra).

MMR tenemos 2 escenarios bien distintos. Uno para $e_p \lesssim 0.5$ donde coexisten 3 familias simétricas mientras que para $e_p \gtrsim 0.5$ hay un cambio radical en la dinámica, donde llegan a coexistir 4 familias de ACR, muchas de ellas asimétricas para ciertos valores de e_p . Aquí no mostramos la superficie \mathcal{H} para valores altos de e_p debido a lo complicada que es. Sin embargo, las comparaciones con integraciones numéricas para estas regiones nuevamente fueron satisfactorias. Las altas excursiones en e puede ocurrir para todo el rango de e_p (con adecuadas condiciones iniciales), excepto cuando es cercano a $e_p \simeq 0$ (como ya vimos).

4.1.1.4. Aplicación: planeta 9

Antes de entrar en el estudio de resonancias externas, mostraremos algún resultado al aplicar el modelo al hipotético planeta 9 (P9 de aquí en más). En esta sección no pretendemos realizar un estudio completo del P9 ni de sus efectos dinámicos en la población de TNOs más distantes [como ejemplo de estudio completo en el tema referimos al lector a Batygin et al. (2019)] sino que simplemente queremos ilustrar la utilidad que puede tener el modelo para ciertos casos.

Para empezar utilizaremos lo que se conoce como los elementos canónicos del P9 que son: $m_p = 5 m_\oplus$; $a_p = 500$ au; $e_p = 0.25$. Sin perder generalidad asumiremos que $\varpi_p = i_p = 0^\circ$. Es decir, consideraremos como plano y dirección

de referencias el plano orbital y el perihelio del P9. Lo que si nos hace perder generalidad es considerar $i = 0^\circ$ debido a la gran variedad de inclinaciones que posee la población de TNOs (Gomes, 2003), pero esto ya lo sabíamos ya que nuestro modelo asume que la partícula es coplanar al perturbador.

Dicho esto, consideremos como caso de estudio una partícula en la resonancia 2:1 con el P9, lo que implica un $a = 314.98$ au. En la figura 4.13 se puede ver la integración numérica de esta partícula comparada con el modelo, como venimos haciendo. La superficie en este caso es bastante similar a la de la figura 3.4, debido al valor similar de e_p . En este ejemplo, se tiene una gran excursión en la excentricidad de la partícula. Observando detenidamente las curvas de nivel de \mathcal{H} , se deduce que cuando $e \rightarrow 1 \Rightarrow \varpi \rightarrow 0^\circ$, debido a la forma que poseen dichas curvas.

Esto se puede interpretar de la siguiente manera. Si considerásemos una población aleatoria de partículas coplanares al P9 con una distribución de e_i de moderados a bajos y ϖ_i uniforme en todo el rango posible, entonces cabría esperar que aquellas partículas que fueran suficientemente excitadas como para ser descubiertas, lo serían siempre en valores cercanos a $\varpi = \varpi_p = 0^\circ$. Esto podría llegar a ser una de las causas de porque se presentan aglomeraciones en perihelio en las poblaciones de TNO distantes (Trujillo y Sheppard, 2014). Obviamente que para poder sacar conclusiones más serias se debería hacer un estudio estadístico considerando más resonancias y también el efecto de la dinámica secular pura. Además, seguramente el problema espacial con inclinación mutua provoque otros fenómenos dinámicos que no son posible tener en cuenta en nuestro modelo.

4.1.2. Resonancias externas

Con el objetivo de ser abarcativo sin extenderse demasiado, estudiamos brevemente el caso de algunas resonancias externas, es decir, $a_p < a$.

4.1.2.1. Resonancias 1:2 y 1:3

En esta oportunidad decidimos presentar los resultados de las MMR 1:2 y 1:3 juntas debido a la similitud de los mismos. En la figura 4.14 se muestran los centros de libración cuando $e_p = 0.01$. En ambas resonancias se pueden observar 1 rama simétrica en $\sigma = 0$ y 2 ramas asimétricas. Estas 2 últimas se fusionan en una rama simétrica cuando $e \rightarrow 1$. Los resultados obtenidos son

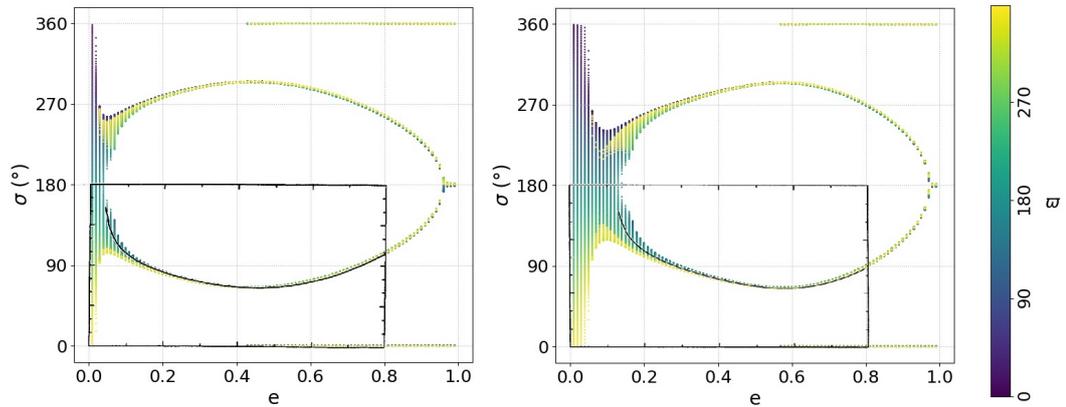


Figura 4.14: Centros de libración con un perturbador de $e_p = 0.01$. Los recuadros negros corresponden a las gráficas que contienen las curvas obtenidas por Beauge (1994). *IZQ.*: MMR 1:2. *DER.*: MMR 1:3.

muy similares a los de trabajos previos.

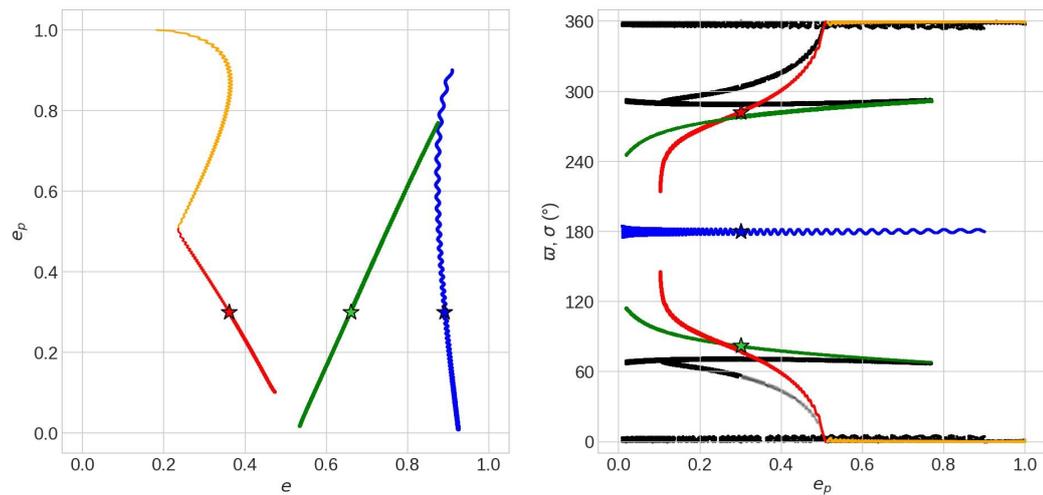


Figura 4.15: Familias de ACR para la MMR 1:2. En rojo y verde se tienen las familias asimétricas mientras que en azul la simétrica. En el gráfico de la derecha σ está en negro. Las estrellas indican los ACRs que se pueden observar en la figura 4.17.

En las figuras 4.15 y 4.16 resumimos las familias de ACR para ambas resonancias. Los resultados obtenidos son muy similares ya que en ambos casos se tiene que para e_p muy pequeños hay 2 familias de ACR, una simétrica (curvas azules) y otra asimétrica (curvas verdes). Luego a partir de $e_p \simeq 0.1$ aparece una nueva familia asimétrica (curvas rojas) que se vuelve asimétrica en $e_p \simeq 0.5$ para la MMR 1:2 y en $e_p \simeq 0.75$ para la MMR 1:3 (curvas naranjas).

La forma en que van cambiando las distintas subsuperficies es similar para

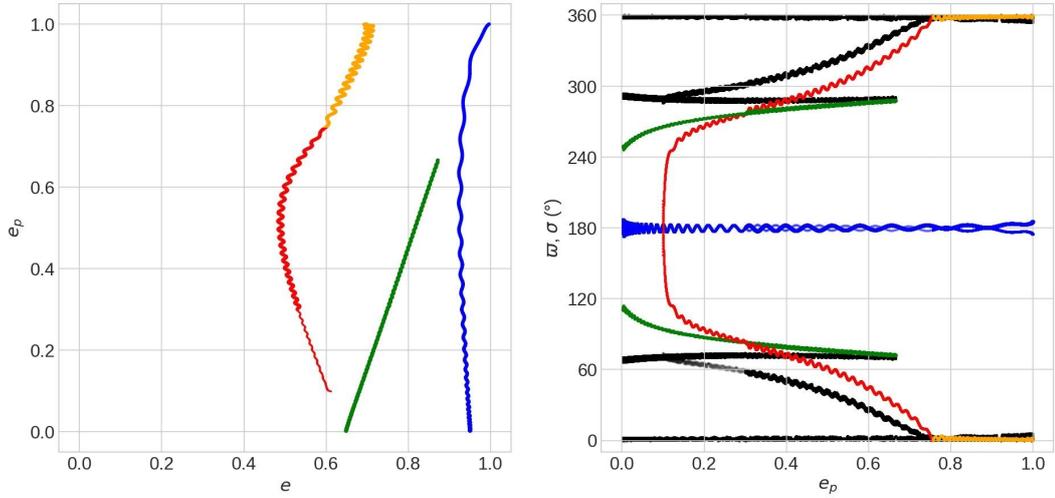


Figura 4.16: Familias de ACR para la MMR 1:3. En rojo y verde se tienen las familias asimétricas mientras que en azul la simétrica. En el gráfico de la derecha σ está en negro.

ambas resonancias así que mostraremos solo un ejemplo de la 1:2. Dicho ejemplo se encuentra en la figura 4.17 donde se puede ver la superficie \mathcal{H} cuando $e_p = 0.3$ junto con 5 integraciones numéricas (curvas de color), 3 en la superficie **A2** y 2 en la **B1**. El acuerdo entre modelo y simulación es muy bueno en todos los casos. Se puede apreciar una dinámica muy variada en este ejemplo. Específicamente podemos decir que existen 4 ACRs asimétricos y 1 simétrico. También existen diversas regiones de libración y circulación para ϖ así como también regiones de poca y de mucha excursión para e . Las variaciones de σ_c son más bien de moderadas a bajas. Una de las integraciones (la verde) presenta una evolución bastante compleja ya que σ_c experimenta “saltos” entre 2 valores bien diferentes imposibilitando una proyección en el plano (e, ϖ) , al igual que pasaba con el ejemplo de la figura 4.2.

Estas observaciones se pueden aplicar (cualitativamente) también a la resonancia 1:3. Como diferencia entre ambas resonancias podemos destacar que la ubicación de los ACR en la 1:3 se da en general para e más altos que en la 1:2. Esto abre la pregunta de si en las resonancias del tipo 1:N, a mayor N tenemos mayores e_α o si solo es una peculiaridad de la 1:3 que surge al compararla con la 1:2.

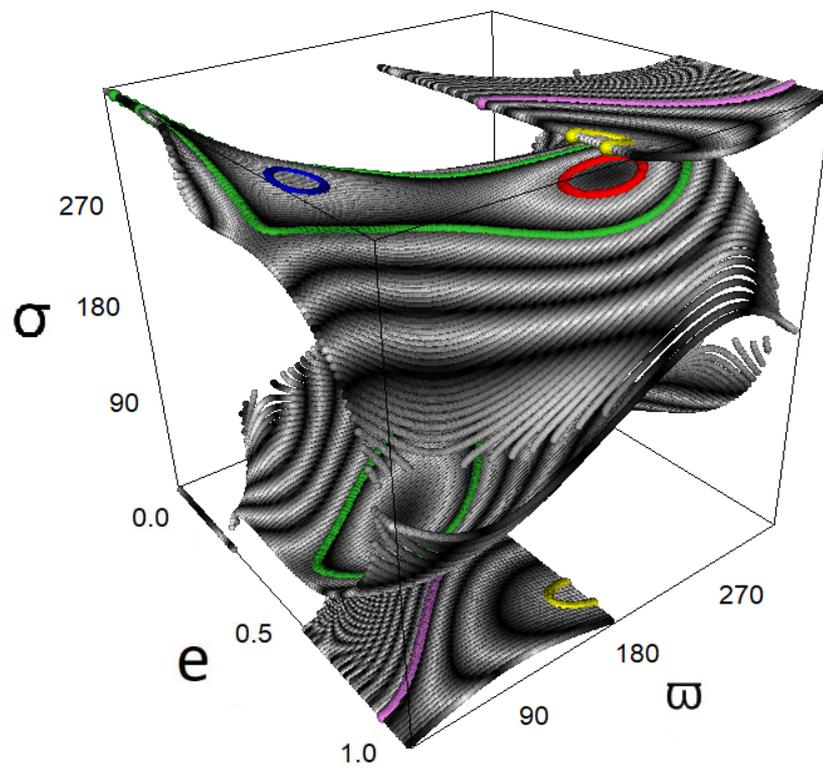


Figura 4.17: Superficie \mathcal{H} en la MMR 1:2 con $e_p = 0.3$ comparada con 5 integraciones numéricas.

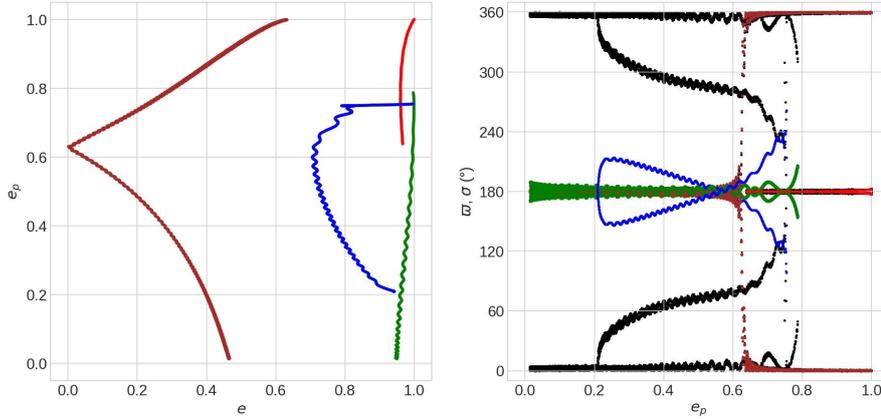


Figura 4.18: Familias de ACR para la MMR 2:3. Todas las familias son simétricas excepto la azul y una pequeña parte de la verde. En el gráfico de la derecha σ está en negro.

4.1.2.2. Resonancia 2:3

Para esta resonancia nos limitaremos a mostrar como son las familias de ACR (ver fig. 4.18). En este caso tenemos que para bajos e_p existen 2 familias simétricas con $\varpi_\alpha = 180^\circ$ pero que difieren en el σ_α . Si aumentamos e_p tenemos que a partir de 0.2 comienza a existir una familia asimétrica. Luego, en torno a $e_p \simeq 0.6$ suceden 2 cosas, por un lado hay un cambio abrupto de ϖ_α de 180° a 0° en la curva marrón y por otro lado, la curva verde comienza a ser asimétrica. Finalmente, al aumentar levemente e_p , aparece la última familia la cual es simétrica y pasa a ocupar la posición de $\varpi_\alpha = 180^\circ$.

4.1.3. Resonancia coorbital

En esta sección mostraremos algunos resultados para la resonancia 1:1. Comenzamos mostrando los centros de libración en el plano (e, σ) cuando $e_p = 0.01$, lo cual se puede ver en la figura 4.19a). Como suele ocurrir en este caso, la ubicación de los σ_c es independiente de ϖ y como podemos observar, hay una rama simétrica y 2 asimétricas. En el panel b) de la misma figura se encuentran las curvas de nivel de $\mathcal{R}(e, \varpi)$ para la rama $\sigma = 0^\circ$ junto con 3 integraciones numéricas. El acuerdo entre modelo y simulación es excelente para las integraciones donde ϖ circula mientras que en la región donde ϖ libra (el ACR) tenemos un buen acuerdo con alguna irregularidad en la evolución, que posiblemente se deba a las perturbaciones de corto período afectando las condiciones iniciales.

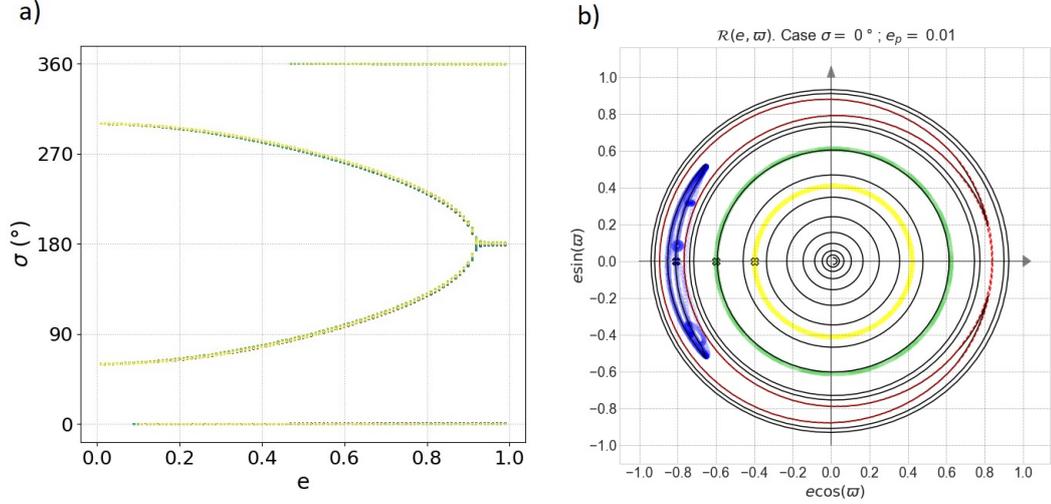


Figura 4.19: *a)* Centros de libración en la MMR 1:1 cuando $e_p = 0.01$. *b)* Curvas de nivel de $\mathcal{R}(e, \varpi)$ con $\sigma = 0^\circ$ vs. 3 integraciones numéricas.

En la figura 4.20 se comparan algunos resultados con los del trabajo de Li et al. (2021). La primer comparación se da entre los paneles a) y b) donde seguimos en el caso cuasi-circular fijando $(e, \varpi) = (0.6, 180^\circ)$. La coincidencia entre ambos gráficos es notable aunque esperable ya que ellos utilizan un modelo semi-analítico muy similar al nuestro. En los paneles c) y d) se comparan las curvas de nivel en el plano (e, ϖ) cuando el perturbador tiene $e_p = 0.3$ y fijamos $\sigma = 60^\circ$. De nuevo, ambos gráficos son muy similares, destacándose 2 zonas de equilibrio separadas por una zona de mayores perturbaciones¹. Más adelante volveremos sobre este gráfico.

Si aumentamos a $e_p = 0.6$ y construimos la superficie \mathcal{H} , el resultado es el que se puede apreciar en la figura 4.21. En este caso tenemos un ACR simétrico en $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha) = (0.54, 180^\circ, 0^\circ)$ y 2 asimétricos, alrededor de los cuales se muestran 2 integraciones numéricas. Es interesante notar que a pesar de lo altas que son las excentricidades involucradas, la evolución es estable y coincide con lo que predice el modelo. Es claro que en una evolución secular pura habría eventualmente un encuentro ya que las órbitas se cruzan. Por lo tanto, este es un ejemplo donde la resonancia esta protegiendo al sistema de una eventual inestabilidad. Cabe mencionar que existe otro ACR simétrico en $\varpi_\alpha = \sigma_\alpha = 0^\circ$ pero que se encuentra en una zona con $\Delta < 3R_{Hill}$, por esta razón es que se observa un hueco en la superficie \mathcal{H} en dicha zona.

¹Es decir, una zona donde \mathcal{R} alcanza valores altos, lo que está asociado a una zona de mayor inestabilidad.

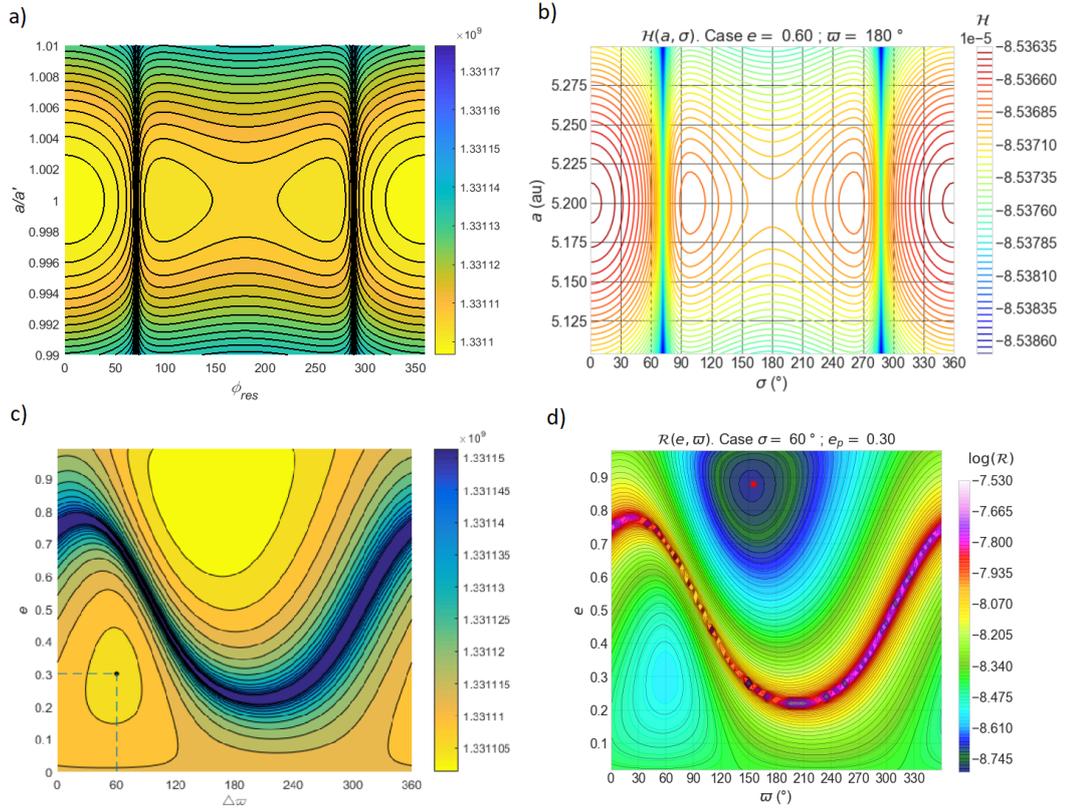


Figura 4.20: *a)* Curvas de nivel de $\mathcal{H}(a, \sigma)$ en la MMR 1:1 con perturbador cuasi-circular y $(e, \varpi) = (0.6, 180^\circ)$ tomado de Li et al. (2021). *b)* Lo mismo que el panel a) pero realizado con nuestro modelo. *c)* Curvas de nivel de $\mathcal{H}(e, \varpi)$ en la MMR 1:1 con $e_p = 0.3$ y $\sigma = 60^\circ$ tomado de Li et al. (2021). *d)* Lo mismo que el panel c) pero realizado con nuestro modelo.

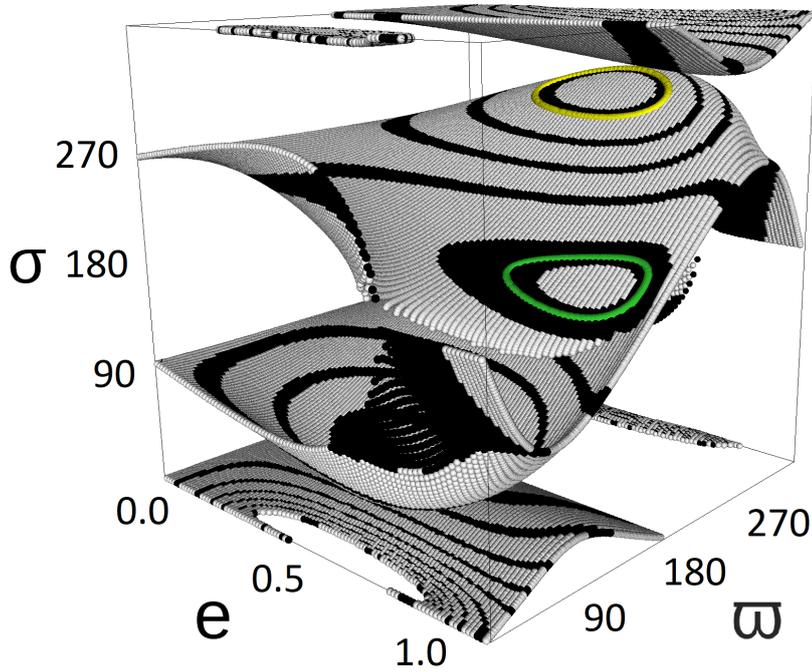


Figura 4.21: Superficie \mathcal{H} en la MMR 1:1 con $e_p = 0.6$ vs. 2 integraciones numéricas (en amarillo y verde).

Finalmente, resumimos las familias de ACRs en la figura 4.22. Aquí podemos observar como coexisten para casi cualquier valor de e_p las 3 familias de ACR. Con respecto a las familias asimétricas podemos observar que una de ellas mantiene $\varpi_\alpha = 60^\circ$ siempre mientras que la otra tiene un ϖ_α dependiente de e_p . Esto quiere decir que de los 2 puntos de equilibrio hallados en los mapas de las figuras 4.20c) y d), solo el de $\varpi = \sigma = 60^\circ$ nos permite asegurar que la solución será realmente resonante y estacionaria. Por otro lado, el otro punto hallado se encuentra localizado en un valor muy alto de e para un ϖ cercano a 180° . Inspeccionando las curvas en 4.22 podría pasar que la solución sea efectivamente estacionaria. Sin embargo, el sigma dista mucho de estar en 60° , lo cual fue la hipótesis para realizar los gráficos 4.20c) y d). Por lo tanto, no se puede asegurar una evolución resonante si colocásemos una partícula en dicha región del espacio de fases. Por esta razón, para hallar la terna $(e_\alpha, \varpi_\alpha, \sigma_\alpha)$, es conveniente recurrir a la superficie \mathcal{H} que nos permite asegurar estar en la condición resonante una vez elegido un punto sobre la superficie y si nos posicionamos en un ACR, que la solución sea estacionaria.

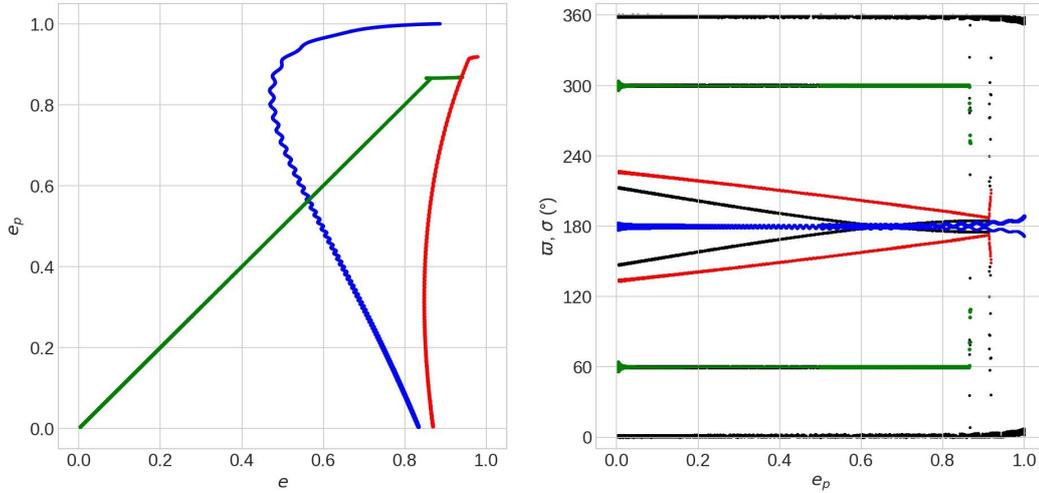


Figura 4.22: Familias de ACR para la MMR 1:1. Las familias roja y verde son asimétricas mientras que la azul es simétrica. En el gráfico de la derecha σ está en negro.

4.1.4. Limitaciones del modelo

A pesar del buen acuerdo entre modelo y simulación que hay en la mayoría de los casos, existen 3 problemas que podrían causar un fallo en el modelo. A continuación los enumeramos:

- I La hipótesis formulada en 2.2.3 donde simplificamos el problema eligiendo $J = 0$ y que además, por el principio del invariante adiabático, tenemos que dicha cantidad se conserva, puede fallar si las curvas de nivel que viven en la superficie \mathcal{H} son abiertas. En la siguiente sección veremos un ejemplo en la 2:1.
- II La ley de estructura (Ferraz-Mello, 1988) provoca que a_{nom} difiera del valor hallado en la sección 2.2.2 para ciertos valores de e . Esto es especialmente conocido cuando $e_p \simeq 0$ donde dicha variación es mayor cuando $e \rightarrow 0$.
- III Existe una dificultad metodológica que requiere modificar levemente el valor $a = a_{nom}$ predefinido como condición inicial en las integraciones numéricas. Esto se debe a que las perturbaciones de corto período pueden influir y debido a que el modelo proviene de una teoría secular, las mismas no son tenidas en cuenta. Existen métodos numéricos para tratar este problema como el descrito en la sección 3 de Correa Otto et al.

(2010), que mediante iteraciones numéricas buscan obtener cuales son los elementos osculadores que hay que colocar en las condiciones iniciales de las integraciones numéricas de forma que la evolución secular se pueda comparar adecuadamente con el modelo secular. Sin embargo, nosotros, en los casos que se precise (como en el de la figura 4.10), realizaremos una simple inspección en un entorno pequeño de $a = a_{nom}$ hasta localizar una integración numérica con un valor suficientemente pequeño de amplitud de libración. Esta técnica heurística también puede servir para contrarrestar los efectos de la ley de estructura.

4.1.4.1. Falla en la conservación de J

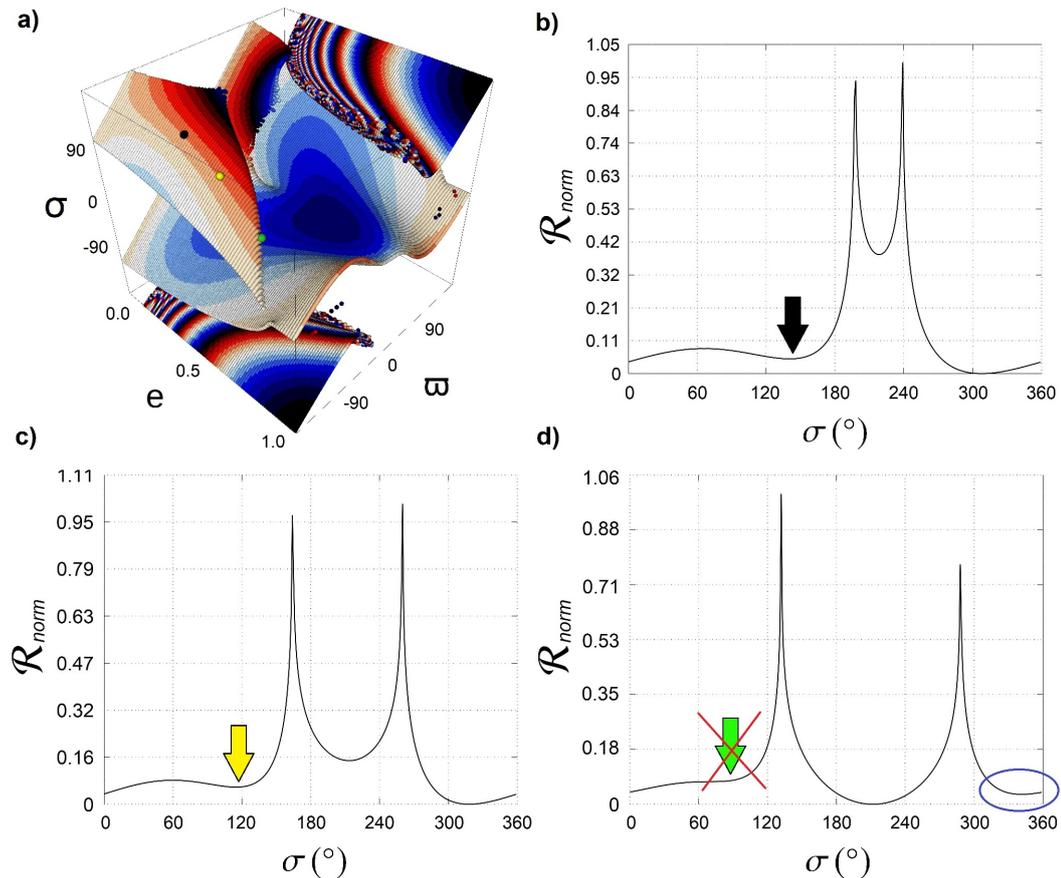


Figura 4.23: *a)* Superficie \mathcal{H} de la MMR 2:1 con $e_p = 0.3$. Se resaltan 3 puntos de equilibrio sobre una misma curva en negro, amarillo y verde. *b)* $\mathcal{R}(\sigma)$ correspondiente al punto negro en *a)*. *c)* $\mathcal{R}(\sigma)$ correspondiente al punto amarillo en *a)*. *d)* $\mathcal{R}(\sigma)$ correspondiente al punto verde en *a)*. Aquí además se señala en azul el punto de equilibrio alrededor del cual librará el sistema una vez alcanzado el borde de la superficie debido a la evolución secular. Nota: $\mathcal{R}_{norm} \triangleq (\mathcal{R} - \mathcal{R}_{min}) / (\mathcal{R}_{max} - \mathcal{R}_{min})$.

En esta sección describiremos la primera de las limitaciones del modelo, usando la MMR 2:1 con $e_p = 0.3$ como ejemplo. En la figura 4.23 se muestra la superficie \mathcal{H} junto con 3 gráficos de $\mathcal{R}(\sigma)$, los cuales fueron hechos para los pares (e, ϖ) que son coordenadas de los puntos de equilibrio resaltados en negro, verde y amarillo sobre la superficie. Las flechas en los gráficos $\mathcal{R}(\sigma)$ indican la ubicación de dichos puntos de equilibrio y como puede observarse, los 3 puntos pertenecen a la misma curva de nivel sobre la superficie \mathcal{H} . El problema radica en que esta curva es abierta, es decir, se corta abruptamente. Por lo tanto, la evolución secular seguirá a esta curva manteniendo $J = 0$ pero cuando llegue al borde de la superficie, la libración resonante comenzará a ocurrir alrededor del punto de equilibrio más cercano [que está marcado en azul en el panel d)] esta vez con $J > 0$.

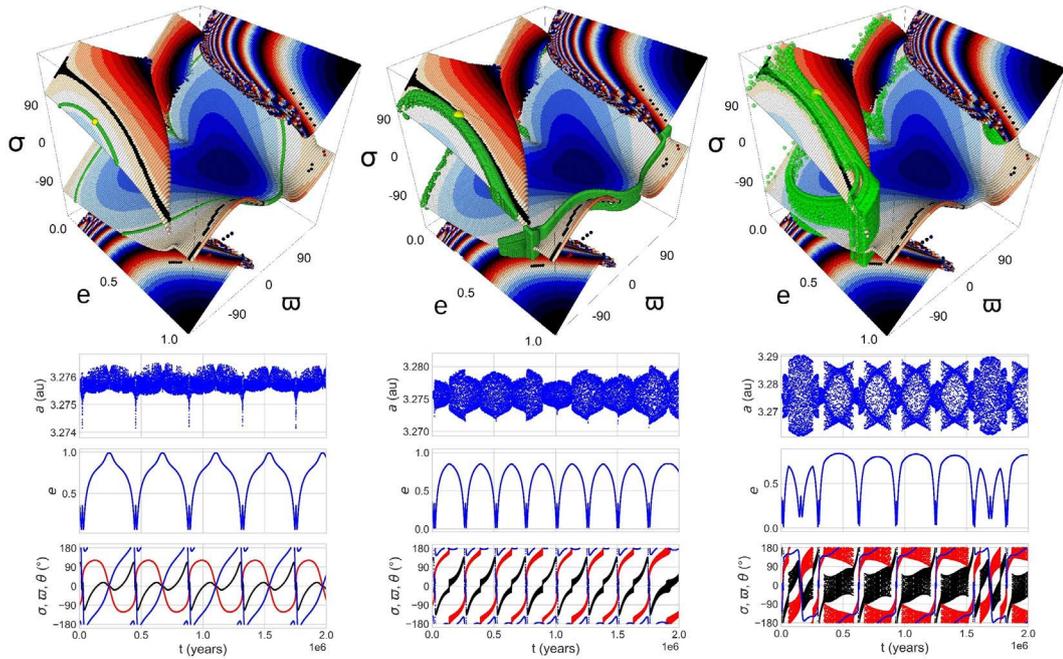


Figura 4.24: 3 integraciones numéricas (curvas verdes) comparadas con las superficie \mathcal{H} de la MMR 2:1 con $e_p = 0.3$. Las condiciones iniciales están marcadas en amarillo. En negro se muestra la separatriz entre la familia de curvas de nivel cerradas y la familia de curvas de nivel abiertas.

Esta idea la podemos corroborar si comparáramos integrar numéricamente una partícula con condiciones iniciales que pertenezcan a una curva de nivel cerrada como las de la figura 3.4 vs. integrar en una curva abierta. En la figura 4.24 se muestran 3 integraciones numéricas donde podemos observar que si estamos en una curva abierta, el modelo predice correctamente la evolución

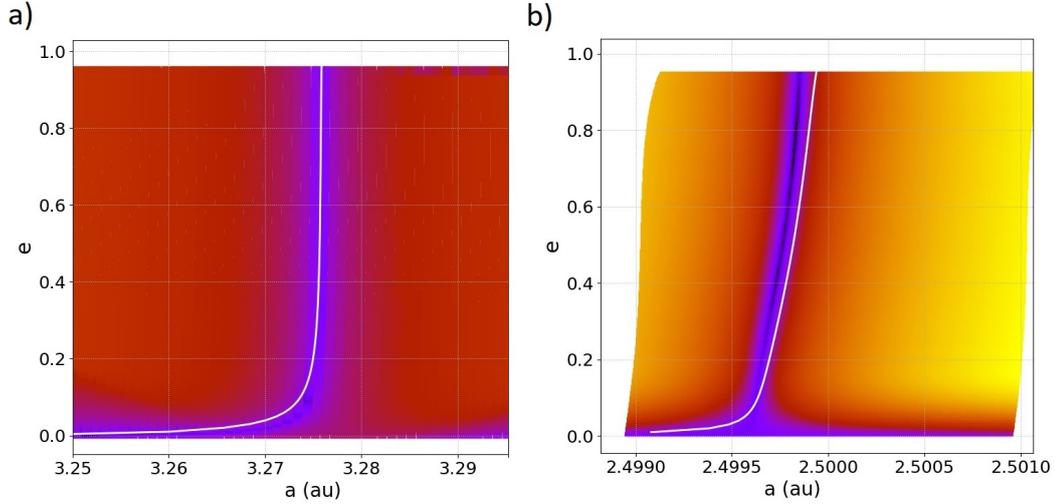


Figura 4.25: Mapas dinámicos comparados con la ley de estructura (curvas blancas). Los colores oscuros en el mapa indican menor variación de a mientras que los colores claros indican una mayor variación. *a)* MMR 2:1 con $\varpi = \sigma = 0$ (rama pericéntrica). *b)* MMR 3:1 con $\varpi = \sigma = 180$ (rama apocéntrica). En el trabajo Ferraz-Mello (1990) se encuentran resultados más completos de estas curvas para las resonancias 2:1, 3:1 y 3:2.

manteniéndose $J = 0$ en todo momento. Por otro lado, si nos acercamos a la separatriz (curva negra), empieza a existir una amplitud de libración no nula que se hace cada vez mayor si nos adentramos en la familia de curvas abiertas. Sin embargo, se puede observar como sigue habiendo cierta correlación entre las curvas de la superficie y la integración numérica con un incremento en el comportamiento caótico en el caso de mayor amplitud de libración.

4.1.4.2. Ley de estructura numérica

Acá mostraremos brevemente una ley de estructura obtenida con un método numérico (ver apéndice A) que desarrollamos y comparamos con mapas dinámicos para 2 resonancias con un perturbador de $e_p = 0.01$. En la figura 4.25 se muestra dicha comparación, donde se puede ver que hay un ajuste bastante bueno de la ley a la zona de resonancia profunda que muestran los mapas.

Los ejemplos mostrados aquí tienen un ϖ y σ fijos. Sin embargo, debido a la naturaleza del método para encontrar la ley de estructura, la misma podría ser aplicada realizando un barrido en ϖ y colocando el σ de equilibrio para cada caso. Esto, al igual que el método descrito en la sección 3.1.5.1, nos

m_1	m_2	m_2/m_1	3:1	2:1	3:2	1:1
5e-05	0.001	20	28.845	25.1984	22.8943	20
0.0002	0.001	5	7.21125	6.29961	5.72357	5
0.001	0.001	1	1.44225	1.25992	1.14471	1
0.001	0.0002	0.2	0.28845	0.251984	0.228943	0.2
0.001	5e-05	0.05	0.0721125	0.0629961	0.0572357	0.05

Tabla 4.4: Valores de η para los casos generales estudiados.

podría permitir mapear en las superficies \mathcal{H} el cambio necesario en a_{nom} para estar en resonancia profunda. No lo haremos porque, como ya mencionamos, muchas veces las perturbaciones de corto período también afectan al valor de a_{nom} , forzándonos de todas maneras a modificarlo levemente.

4.2. Caso planetario

4.2.1. Estudio general

En esta sección mostraremos los resultados obtenidos utilizando la metodología descrita en 3.2.1. De esta manera, lo primero que vamos a construir son las curvas de nivel de las funciones $\mathcal{AM}_{norm}(e_1, e_2)$ explorando todos los posibles casos teniendo en cuenta el conjunto de resonancias $\{3:1, 2:1, 3:2, 1:1\}$ y el conjunto de cocientes m_2/m_1 $\{20, 5, 1, 0.2, 0.05\}$. El resultado de esta exploración se puede ver en la figura 4.26.

Es interesante observar como en los casos donde una de las masas es mucho mayor que la otra, las curvas de nivel se tornan casi verticales u horizontales, es decir, la excentricidad del cuerpo más masivo apenas varía. Por otro lado, cuando las masas son más comparables, existe variación en ambas excentricidades, excepto para los valores extremos de \mathcal{AM}_{norm} . Estrictamente hablando, la forma de estas curvas depende solo del valor de η . Por esta razón, añadimos la tabla 4.4 que muestra dichos valores para los gráficos de la figura 4.26. Es claro que el cociente m_2/m_1 es el que más define los rangos de variación de las excentricidades junto con, por supuesto, el valor de \mathcal{AM} .

En las siguientes secciones mostramos algunos ejemplos de sistemas ficticios (2 o 3 por MMR) de los más interesantes que hemos encontrado en cada caso. En el apéndice B se encuentra un link que lleva a un repositorio donde hay una recopilación más extensa de casos por si al lector le interesa.

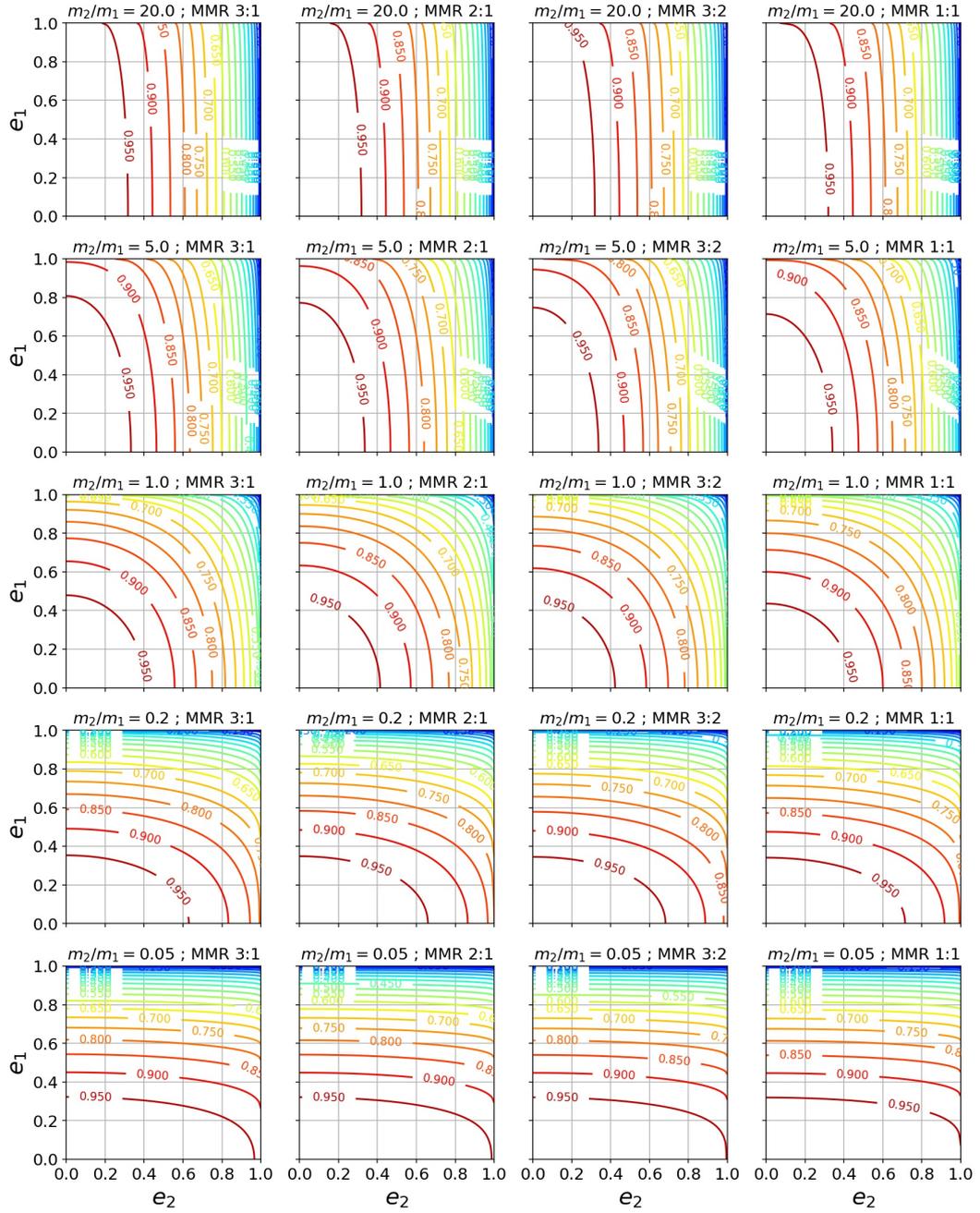


Figura 4.26: Grilla con las curvas de nivel de $\mathcal{M}_{norm}(e_1, e_2)$ para los 20 casos posibles dados los conjuntos de MMR y m_2/m_1 elegidos. Sobre las propias curvas se imprimen los valores numéricos de \mathcal{M}_{norm} .

4.2.1.1. Resonancia 3:1

El primer ejemplo para la 3:1 es un sistema de $m_2 = m_1 = 1M_J$ con $\mathcal{M}_{norm} = 0.9$. En la figura 4.27 comparamos la superficie \mathcal{H}_1 contra 5 integraciones numéricas de 10 kyrs. El criterio que utilizaremos para definir las

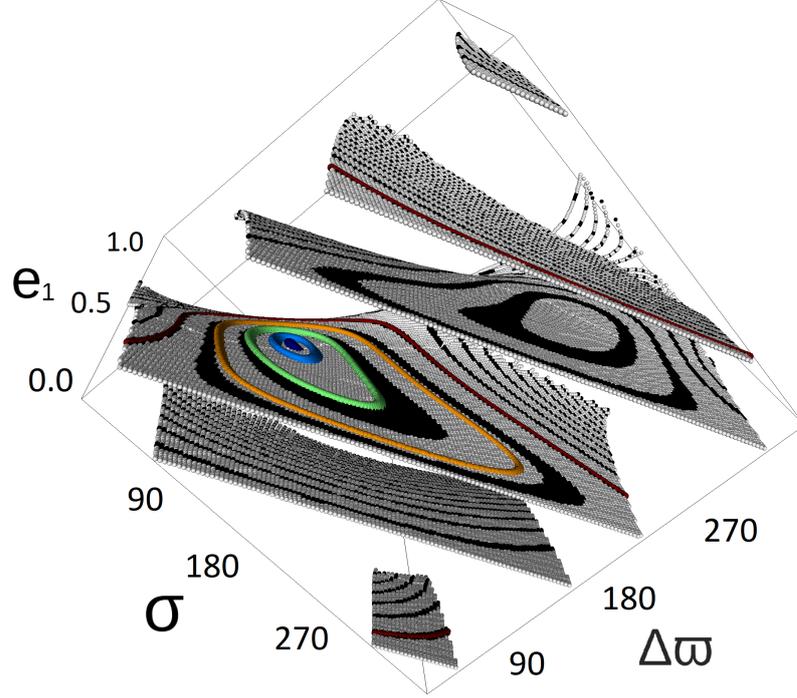


Figura 4.27: Superficie \mathcal{H}_1 en la MMR 3:1 comparada con 5 integraciones numéricas (en colores) de 10 kyrs de un sistema con $m_2/m_1 = 1$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$.

condiciones iniciales de las integraciones consiste en ubicar un ACR e ir seleccionando puntos de la superficie moviéndonos hacia abajo y/o hacia arriba en excentricidad una cierta cantidad de veces. Una de esas condiciones iniciales coincide con el ACR para corroborar que la evolución en dicho punto es estacionaria.

El ACR en este caso es asimétrico y se ubica en $(e_1, \Delta\varpi, \sigma) = (0.38, 84^\circ, 113^\circ)$ y a medida que aumentamos el valor inicial de e_1 , su excursión aumenta, hasta llegar a valores cercanos a 0.8. Al alcanzar un valor cercano a $e_1 \simeq 0.6$, comienza a haber circulación tanto de $\Delta\varpi$ como de el centro de libración.

El segundo ejemplo consiste en un sistema con $m_2/m_1 = 5$, es decir, un planeta externo 5 veces más masivo que el interno. En este caso se fijó $\mathcal{AM}_{norm} = 0.8$ y son 7 integraciones numéricas las que se comparan con el modelo como se puede ver en la figura 4.28.

En esta oportunidad se realizaron 3 integraciones cuyas condiciones iniciales están en torno a un ACR simétrico en $(e_1, \Delta\varpi, \sigma) = (0.75, 180^\circ, 0^\circ)$ mientras que 4 en torno a uno asimétrico en $(e_1, \Delta\varpi, \sigma) = (0.73, 12^\circ, 20^\circ)$. Este último ACR está muy cerca de ser simétrico, es decir, es probable que provenga de

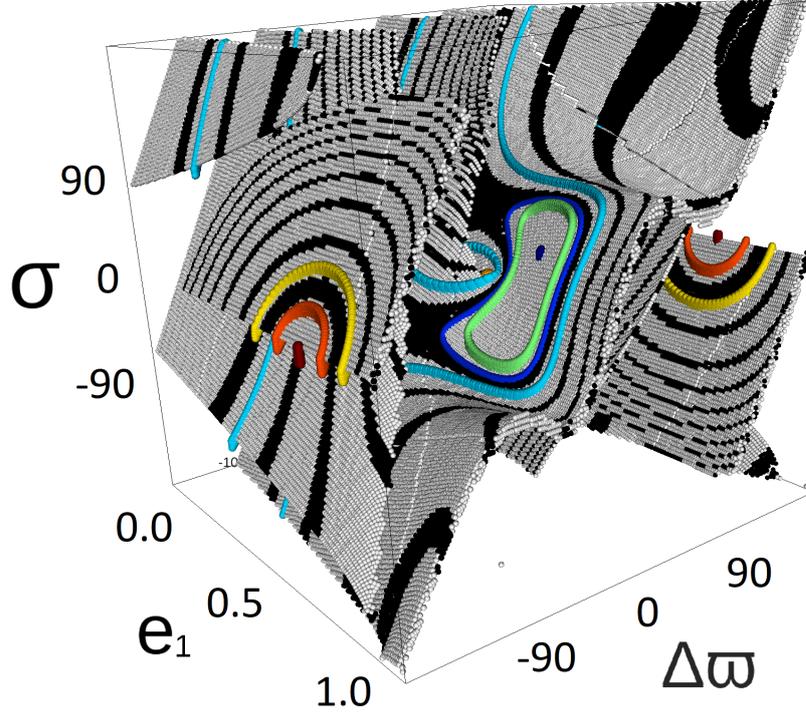


Figura 4.28: Superficie \mathcal{H}_1 en la MMR 3:1 comparada con 7 integraciones numéricas (en colores) de 10 kyrs de un sistema con $m_2/m_1 = 5$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.8$.

una bifurcación de una familia simétrica de ACRs en $\Delta\varpi = \sigma = 0^\circ$. Como se puede observar, cada uno de estos ACR están en subsuperficies diferentes. También parece asomar un ACR en $\Delta\varpi = \sigma = 180^\circ$ pero para $e_1 \simeq 1$, por lo que no fue posible obtener integraciones de evolución estable en dicha zona. Por otro lado, tampoco nos pudimos alejar mucho del ACR simétrico ya que muchas de las curvas que viven en esa subsuperficie se dirigen directamente hacia el límite $e_1 = 1$.

A pesar de esto, en las curvas cerradas, tenemos que hay muy buen acuerdo entre modelo y simulación, destacándose lo complicada que es la evolución del ejemplo en color celeste que se puede apreciar en la figura 4.28. Este ejemplo es el de mayor excursión en excentricidad con $\Delta\varpi$ y σ_c que terminan circulando en escalas seculares.

El tercer y último ejemplo para la 3:1 consiste en un sistema donde $m_2/m_1 = 0.2$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.99$. En este caso realizamos 2 integraciones numéricas alrededor de un ACR_{II} simétrico en $(e_2, \Delta\varpi) = (0.05, 0^\circ)$ y 3 alrededor de un ACR_I asimétrico en $(e_2, \Delta\varpi, \sigma) = (0.23, 111^\circ, 135^\circ)$. Los resultados se pueden ver en la figura 4.29 donde se observa, nuevamente, gran acuerdo en-

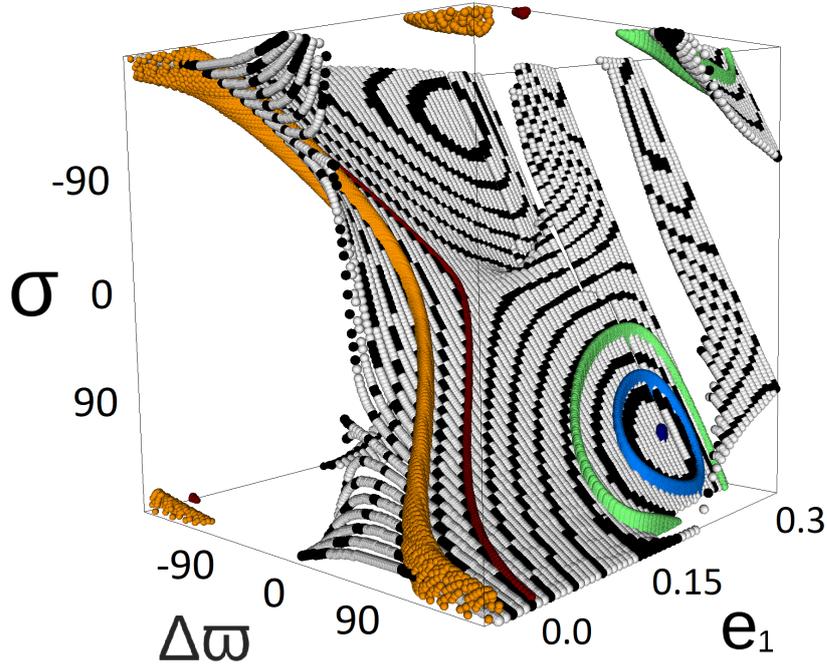


Figura 4.29: Superficie \mathcal{H}_2 en la MMR 3:1 comparada con 5 integraciones numéricas (en colores) de 1 kyrs de un sistema con $m_2/m_1 = 0.2$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.99$.

tre las integraciones y las curvas de nivel del hamiltoniano. En este caso no mostramos una integración con condición inicial en el lugar exacto del ACR_{II} ya que el resultado fue bueno pero con mucha amplitud de libración, lo que complica la visualización. Esto probablemente se deba a que para esa zona e_2 es muy bajo aunque también podría deberse al simple hecho de que estamos muy cerca del borde de la superficie.

4.2.1.2. Resonancia 2:1

Comenzaremos mostrando los resultados de la 2:1 para el caso $m_2/m_1 = 1$ con $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. Si observamos la figura 4.30 podremos comprobar lo complejo que es el espacio de fases de este ejemplo. Para empezar se puede apreciar la existencia de 4 ACRs (sin contar la multiplicidad de los asimétricos) diferentes que se encuentran distribuidos en 2 sub-superficies (3 en una y el restante en la otra).

En este caso presentamos 9 integraciones numéricas repartidas en torno a los 3 ACRs que mostraron un comportamiento estable para los 10 kyrs que duraron las integraciones. El restante (marcado con un punto verde en

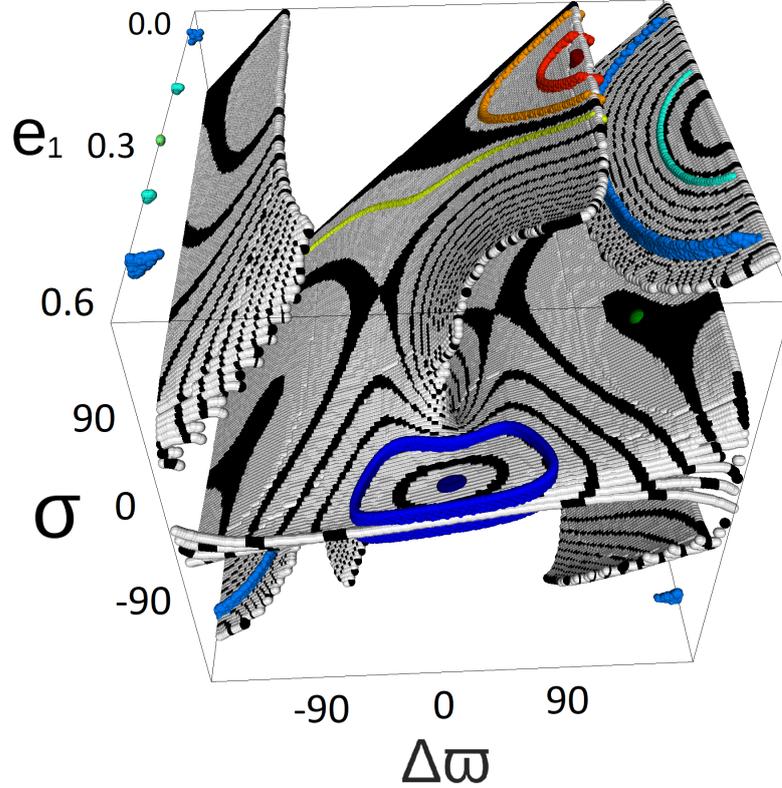


Figura 4.30: Superficie \mathcal{H}_1 de la MMR 2:1 comparada con 9 integraciones numéricas (en colores, excepto el verde oscuro) de 1 kyr de un sistema con $m_2/m_1 = 1$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. El punto verde es un marcador de un ACR asimétrico.

la superficie \mathcal{H}_1 cercano a $\sigma \simeq 120^\circ$) ingresó en una evolución cuasi-periódica y por momentos caótica a los 400 años. Esto probablemente se deba a un encuentro lejano entre los planetas que terminó desestabilizando al sistema, ya que en dicha zona la distancia mínima entre los mismos era cercano a los $4R_{Hill}$. En cuanto al resto de las integraciones, las mismas fueron correctamente predichas por el modelo.

Se puede observar que las mayores variaciones de e_1 se dan en torno al ACR simétrico en $\Delta\varpi = \sigma = 180^\circ$ mientras que en los otros 2 son menores. Obtuvimos que en torno a $e_1 \simeq 0.3$ se alcanza la separatriz del ACR asimétrico ubicado en $e_1 = 0.16$ (integración amarilla de la figura 4.30). Si se aumenta aún más e_1 el sistema deja rápidamente de ser estable, debido a que las curvas más alejadas (previo a llegar al borde) terminan siendo abiertas, si uno sigue con cuidado su trayectoria sobre la superficie. Esto último lo logramos observar

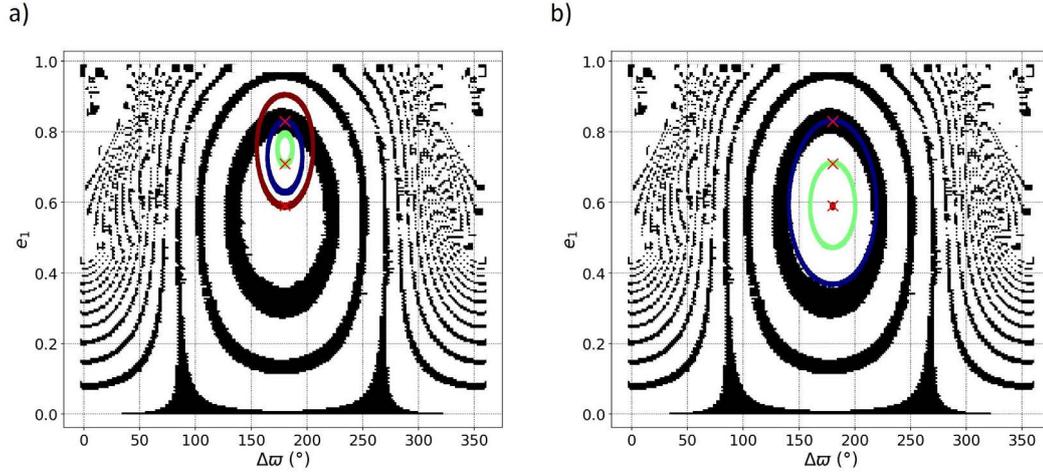


Figura 4.31: Curvas de nivel de $\mathcal{H}_1(e_1, \Delta\varpi)$ para la MMR 2:1 en el caso $m_2/m_1 = 5$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.6$, comparadas con 3 integraciones numéricas de 1 kyr cuyas condiciones iniciales están marcadas con cruces rojas. Entre los paneles la única diferencia es el a_1 inicial: a) $a_{1i} = a_{1nom}$ b) $a_{1i} = 1.02a_{1nom}$

utilizando un gráfico interactivo de la librería `ipyvolume`¹ de Python, el cual resultó ser muy útil para inspeccionar este tipo de detalles.

El segundo caso que vamos a mostrar consiste en un sistema con $m_2/m_1 = 5$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.6$. Este caso posee la peculiaridad que resultó ser más susceptible a las perturbaciones de corto período a la hora de definir el semi-eje inicial de los planetas. Debido a eso, realizamos integraciones numéricas variando levemente el semi-eje hasta encontrar uno que genere una amplitud de libración razonablemente chica tanto en él mismo como en los ángulos críticos. En la figura 4.31 se muestran los resultados en los planos $(e_1, \Delta\varpi)$ entre utilizar $a_{1i} = a_{1nom}$ y $a_{1i} = 1.02a_{1nom}$. Es claro que la evolución secular no es la que predice el modelo si la amplitud de libración es no nula, o en otras palabras, si no estamos en el centro de la resonancia. Esto, como ya vimos, sucede en este caso y no en otros, es decir, no es algo general. Por ejemplo, en el caso anterior (figura 4.30) se observa una cierta amplitud de libración no nula. Sin embargo, sigue existiendo similitud entre el modelo y la simulación. En este ejemplo donde el espacio de fases es más sencillo se pueden obtener grandes excursiones de excentricidad en torno al único ACR simétrico en $\Delta\varpi = 180^\circ$. Por otro lado, no puede existir circulación de $\Delta\varpi$ ya que las curvas de nivel que indican dicho comportamiento se dirigen hacia el límite $e_1 = 1$, provocando que el planeta interior colisione con la estrella.

¹<https://ipyvolume.readthedocs.io/en/latest/>

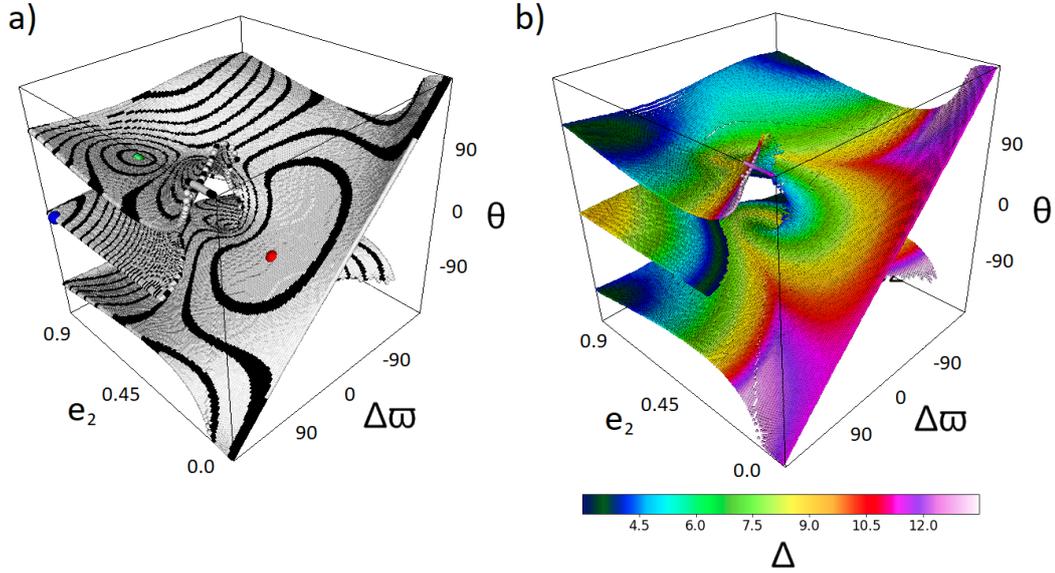


Figura 4.32: Resonancia 2:1 para el caso $m_2/m_1 = 0.2$ con $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. a) Superficie \mathcal{H}_2 con 3 marcadores de colores indicando la posición de los ACR. b) Superficie Δ_2 .

El último caso que mostraremos para esta resonancia es el de un sistema con $m_2/m_1 = 0.2$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. En este caso tenemos 3 ACRs que viven en 2 sub-superficies, como se puede apreciar en la figura 4.32a). Uno de los 2 asimétricos (el que está marcado en verde) se encuentra cerca de la zona de encuentro [ver panel b)] lo que afectó la estabilidad de la evolución generándose encuentros a los pocos años. El resto de las integraciones, que fueron estables y con evolución regular, se comparan con la superficie \mathcal{H}_2 en la figura 4.33. Se puede observar, nuevamente, que hay buena concordancia entre modelo y simulación.

En el caso de las integraciones en torno al ACR simétrico en $\Delta\varpi = 180^\circ$ tuvimos que modificar levemente a_i para lograr una amplitud de libración pequeña. Los valores utilizados fueron de $a_i = 1.01a_{nom}$ para los e_i más bajos hasta $a_i = 1.07a_{nom}$ para los e_i más altos. En cuanto a las integraciones en torno al ACR asimétrico de más baja excentricidad, no hubo necesidad de modificar el semi-eje nominal.

4.2.1.3. Resonancia 3:2

Esta resonancia y la 1:1 (siguiente sección) la estudiaremos de manera más resumida para no agrandar demasiado la extensión de la tesis. En esta MMR

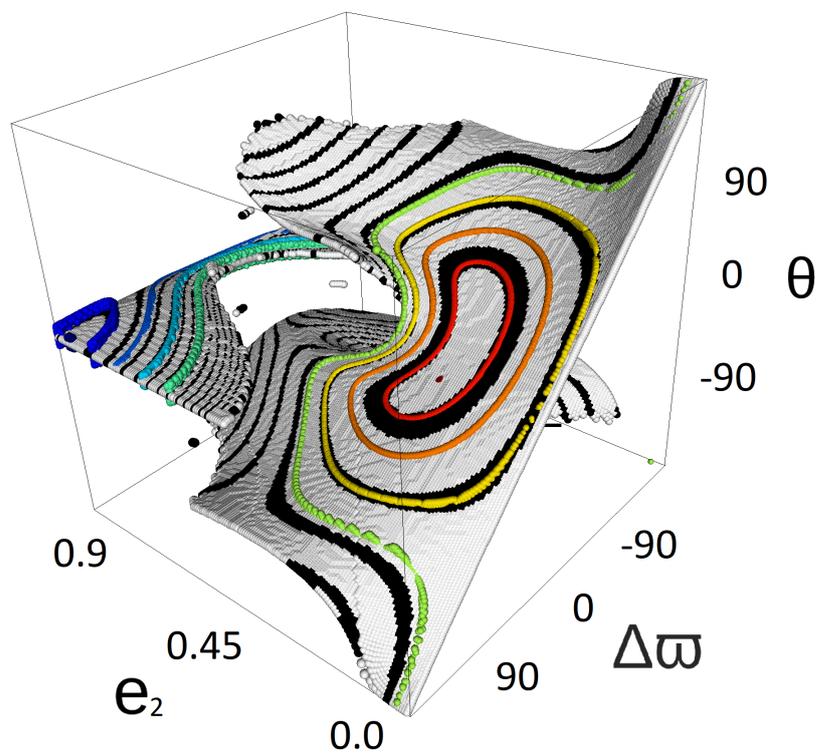


Figura 4.33: Superficie \mathcal{H}_2 en la MMR 2:1 comparada con 10 integraciones numéricas (en colores) de 10 kyr de un sistema con $m_2/m_1 = 0.2$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. Algunas zonas de la superficie fueron removidas para mejorar la visualización.

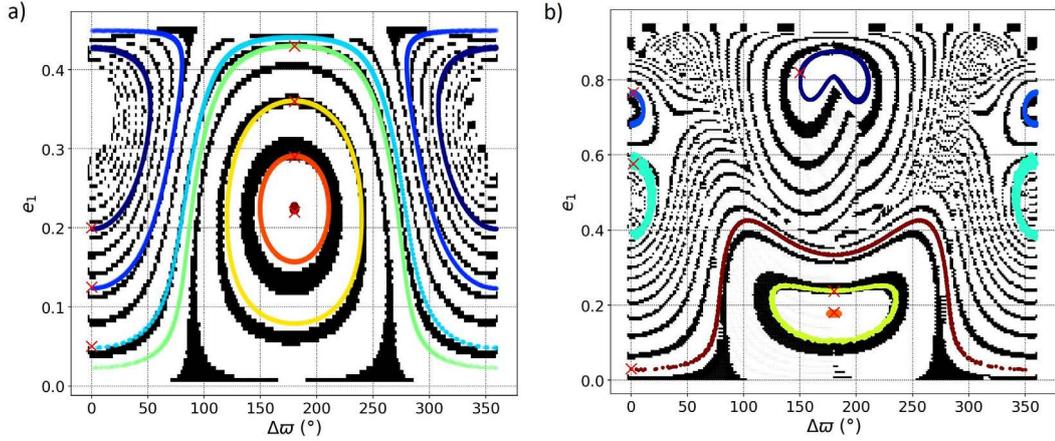


Figura 4.34: Curvas de nivel de $\mathcal{H}_1(e_1, \Delta\varpi)$ en la MMR 3:2 para 2 sistemas distintos. a) El primero tiene $m_2/m_1 = 1$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.95$ b) El segundo tiene $m_2/m_1 = 5$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$.

mostraremos solo 2 ejemplos: uno para $m_2/m_1 = 1$ y otro para $m_2/m_1 = 5$. En la figura 4.34 se encuentran las proyecciones de la superficie \mathcal{H}_1 en el plano $(e_1, \Delta\varpi)$ comparadas con varias integraciones numéricas para cada caso.

En ambos casos se obtuvieron buenos ajustes modelo vs. simulación. En el caso $m_2/m_1 = 1$ se tiene la existencia de 2 ACR simétricos, uno en $\Delta\varpi = 0^\circ$ y otro en $\Delta\varpi = 180^\circ$. El primero en realidad existe pero en condición de encuentro (por eso se ve un hueco blanco en el gráfico) por lo que solo realizamos 2 integraciones numéricas en su entorno de hasta 0.35 de excursión en e_1 . Por otro lado, realizamos 3 integraciones en torno al otro ACR donde una de las condiciones iniciales coincide con la posición nominal del mismo. La excursión máxima en este caso puede ser de hasta 0.4. Para completar, realizamos 2 integraciones más en la zona de transición entre ambos ACRs donde $\Delta\varpi$ circula. En el caso $m_2/m_1 = 5$ la dinámica es mucho más compleja ya que existen 4 ACRs, 2 en $\Delta\varpi = 0^\circ$ y 2 en $\Delta\varpi = 180^\circ$ (aunque el de alta e_1 es levemente asimétrico). Se distribuyeron 6 integraciones numéricas en torno a los ACRs en donde podemos observar que las excursiones en general son más chicas que el caso anterior (al menos en términos relativos al máximo e_1).

4.2.1.4. Resonancia 1:1

Debido a la similitud que presentan los resultados de esta resonancia al variar m_2/m_1 y \mathcal{AM}_{norm} , mostraremos un único ejemplo. El mismo consiste en un sistema donde los planetas cumplen $m_2/m_1 = 1$ con un $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$.

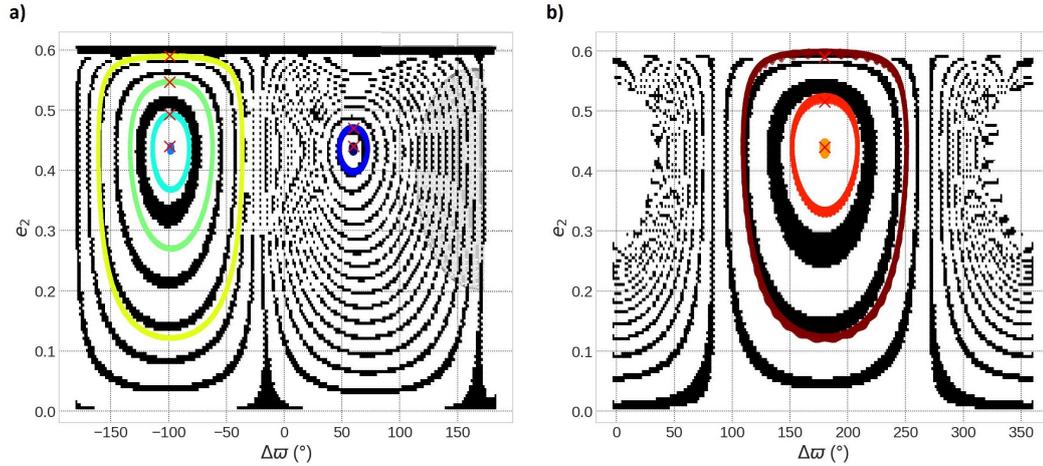


Figura 4.35: Curvas de nivel de $\mathcal{H}_2(e_2, \Delta\varpi)$ en la MMR 1:1 con $m_2/m_1 = 1$ y $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$ vs. 9 integraciones numéricas (curvas en colores). a) $\sigma_c \sim 120^\circ$. b) $\sigma_c \sim 0^\circ$.

En la figura 4.35 se comparan las curvas de nivel de $\mathcal{H}_2(e_2, \Delta\varpi)$ contra algunas integraciones numéricas, para 2 rangos diferentes de σ . En el caso del panel a) $\sigma_c \sim 120^\circ$ mientras que en el panel b) $\sigma_c \sim 0^\circ$. Por lo tanto tendríamos 5 ACRs, 4 asimétricos y 1 simétrico. Estas soluciones se corresponden con los conocidos puntos de Lagrange L_3 , L_4 y L_5 . Además, aparecen otros 2 puntos que en el estudio realizado por Giuppone et al. (2010) se nombran como puntos Anti-Lagrangianos. Dicho estudio es muy completo ya que muestra las familias de ACRs para diversos cocientes de masas en el problema planetario coorbital.

Se puede observar un buen ajuste modelo vs. simulación, donde las zonas que parecen sin explorar en realidad si fueron exploradas pero las evoluciones eventualmente se volvieron inestables. En el caso de la región con $\sigma_c \sim 120^\circ$ uno de los ACR está ubicado próximo a una región de encuentros lejanos, la cual está marcada en gris en la figura 4.35a). Dicha región se corresponde a la condición $\Delta < 4R_{Hill}$. Si bien no está estrictamente en encuentro, si tenemos encuentros lejanos que pueden afectar a la evolución. Por otro lado, en el panel b) se ve una zona con un hueco que correspondería a otro ACR simétrico. En este caso, el mismo sí se localiza en zona de encuentro. En general podemos decir que puede existir gran excursión en las excentricidades si nos alejamos de los ACR, siempre y cuando estemos lejos de la zona de encuentro.

4.2.1.5. Familias de ACRs

Para construir las curvas de las familias de ACR en el caso planetario utilizaremos la misma idea de generar variaciones muy lentas en algún parámetro, de forma de explorar todos los ACR asegurándonos que siempre estaremos en una solución estacionaria. A diferencia de lo que hicimos en el caso restringido (que fue imponer un \dot{e}_p), aquí seguiremos la técnica utilizada por Lee (2004) que consiste en forzar un cambio en el semi-eje de uno de los 2 planetas, por ejemplo el externo, a una tasa bien pequeña de forma que el compañero se vea arrastrado por la resonancia. Asumiremos un tiempo característico (Lee y Peale, 2002b) para a_2 de $\tau_a \sim 10^7$ años.

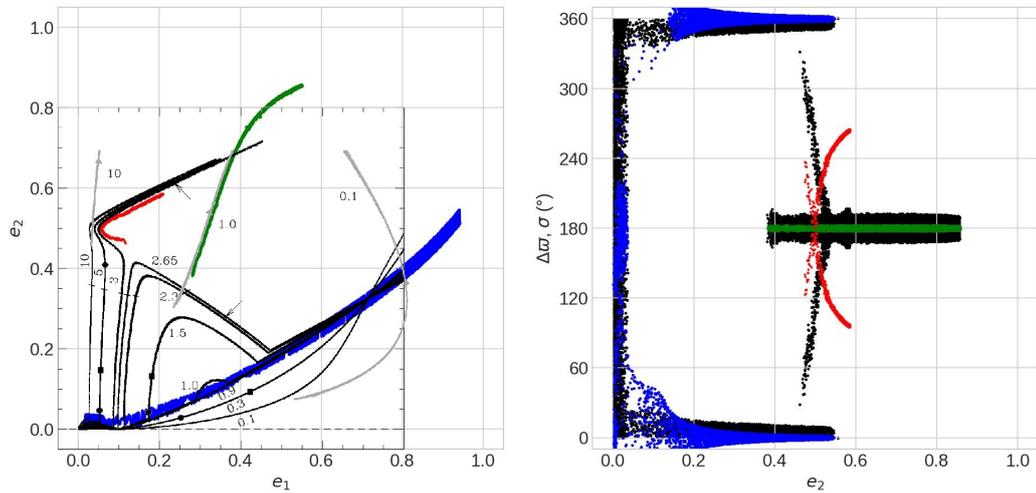


Figura 4.36: Familias de ACR para la MMR 2:1 con $m_2/m_1 = 1$. IZQ.: Plano (e_1, e_2) comparado con curvas del trabajo Lee (2004). DER.: σ y Δw vs. e_2 .

Solo mostraremos un ejemplo de familia de ACR y será para la MMR 2:1 en un sistema con $m_2/m_1 = 1$. El resultado se puede ver en la figura 4.36 donde en el panel de la derecha se tiene σ (curvas negras) y Δw (curvas de color) en función de e_2 mientras que en el de la izquierda el plano (e_1, e_2) . En este plano se muestra en color las 3 familias obtenidas, 2 simétricas (verde y azul) y una asimétrica (roja). En negro y gris se superponen las familias obtenidas por Lee (2004) donde los números indican el valor de m_2/m_1 . El acuerdo entre ambos resultados es muy bueno.

La figura 4.37 resume de muy buena manera el panorama general de los ACRs planetarios para la MMR 2:1 donde se tiene una distinción de zonas según la existencia de los distintos tipos de familia y por otro lado las curvas de las familias ACR utilizando como parámetro de barrido a m_2/m_1 .

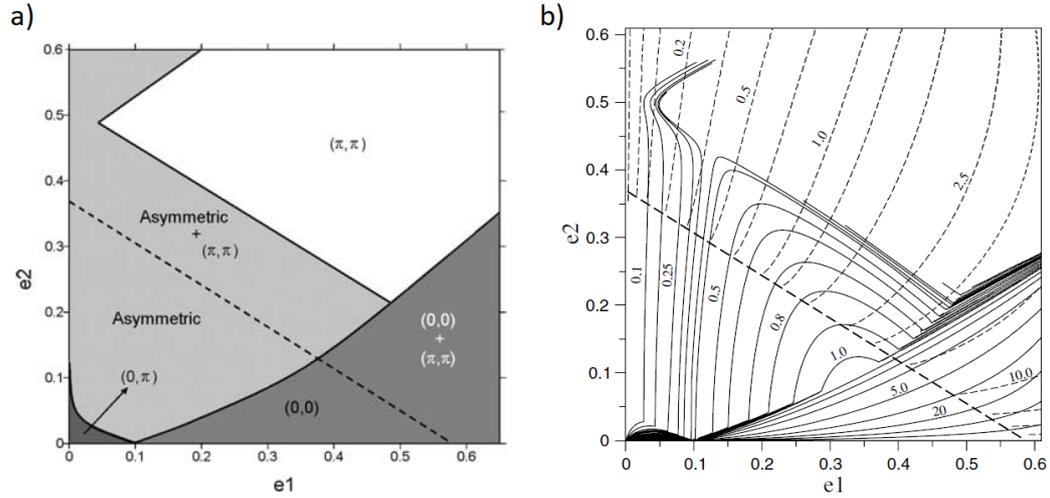


Figura 4.37: Imágenes sacadas de Beaugé et al. (2006). *a)* Zonas del plano (e_1, e_2) según sean $(\sigma_\alpha, \Delta\varpi_\alpha)$. *b)* Curvas de las familias de ACR barriendo en m_2/m_1 .

4.2.2. Aplicación: sistemas exoplanetarios resonantes

En esta sección mostraremos algunos ejemplos de sistemas exoplanetarios resonantes reales, cuya evolución secular podemos entender mediante nuestro modelo. Al igual que en el caso restringido, realizaremos integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento para poder contrastar con el modelo.

Para encontrar buenos ejemplos realizamos una búsqueda en toda la base de datos¹ de los 5073 exoplanetas confirmados a la fecha, con el objetivo de encontrar sistemas resonantes, con al menos uno de los planetas con una órbita de excentricidad de moderada a alta ($e > 0.2$) y con incertidumbres bajas ($\Delta e < 0.05$) en la determinación de ambas excentricidades.

Efectuando este filtrado de datos, obtuvimos que existen 823 sistemas exoplanetarios múltiples (2 o más planetas) de los cuales 86 sistemas tienen al menos 1 planeta con $e > 0.2$ y ambos con $\Delta e < 0.05$. De estos 86, existen 21 cercanos a una MMR. Para proseguir con nuestra búsqueda de ejemplos, fuimos estudiando cada caso por separado, indagando artículos que ya hayan investigado algunos de estos sistemas para comprobar si efectivamente están en resonancia o en su defecto verificándolo nosotros mismos. A esta lista de 21 sistemas le agregamos el sistema HD 31527 que se encuentra en la resonancia 13:6.

¹Obtenidos de <http://exoplanet.eu/>

En las siguientes secciones iremos mostrando los ejemplos ordenados de los que mejor se ajustan al modelo por estar más centrados en la resonancia nominal a aquellos que tienen amplitudes mayores de libración pero que igual se puede explicar su evolución (sobretudo la de $e_{1,2}$ y $\Delta\varpi$) con el modelo.

4.2.2.1. Sistema HD 73526

Este sistema posee 2 planetas confirmados que están en la MMR 2:1 profunda como se muestra en Wittenmyer et al. (2014). En dicho trabajo se indica que los planetas fueron detectados por el método de velocidad radial y obtienen que el sistema presenta la mayor estabilidad si la inclinación es 90° . Por lo que es razonable asumir que $m_{1,2} \sin(i) \simeq m_{1,2}$. Los datos del sistema se encuentran en la tabla 4.5 donde podemos observar lo bajo que son las incertidumbres de los elementos orbitales.

Si las excentricidades no son muy bajas podemos decir que dos planetas están en la posición exacta de la resonancia $K_2:K_1$ si sus períodos orbitales cumplen:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad (4.3)$$

Sean los períodos reales de los planetas P_{1r} y P_{2r} . Fijemos $P_{2r} = P_2$ y dejemos que todo el error recaiga sobre el planeta 1. Es decir, tendremos que $P_{1r} = P_1 + \Delta P$ donde ΔP es el error en el período del planeta 1 que hace que no esté exacto en el valor nominal de la resonancia. Definamos ahora un error relativo porcentual en el cociente de períodos como sigue:

$$E_{(P_1/P_2)} = 100 \left(\frac{P_{1r}}{P_{2r}} - \frac{P_1}{P_2} \right) \bigg/ \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = 100 \frac{\Delta P}{P_1} \frac{K_2}{K_1} \quad (4.4)$$

donde la última igualdad se obtiene con operaciones sencillas. Esta cantidad resulta ser esencialmente lo que se conoce como *resonance offset* (Charalambous et al. 2022).

Al comienzo de la sección 4.2.2 se menciona el procedimiento de filtrado de la base de datos haciendo hincapié en la búsqueda de sistemas resonantes. Esto lo lograremos definiendo un cierto límite de error relativo para el cociente de períodos, que en nuestro caso lo fijaremos en 2%. En el caso del sistema HD 73526 tenemos que $E_{(P_1/P_2)} = 0.343\%$.

En la figura 4.38a) se muestra la superficie \mathcal{H}_1 en blanco y negro comparada

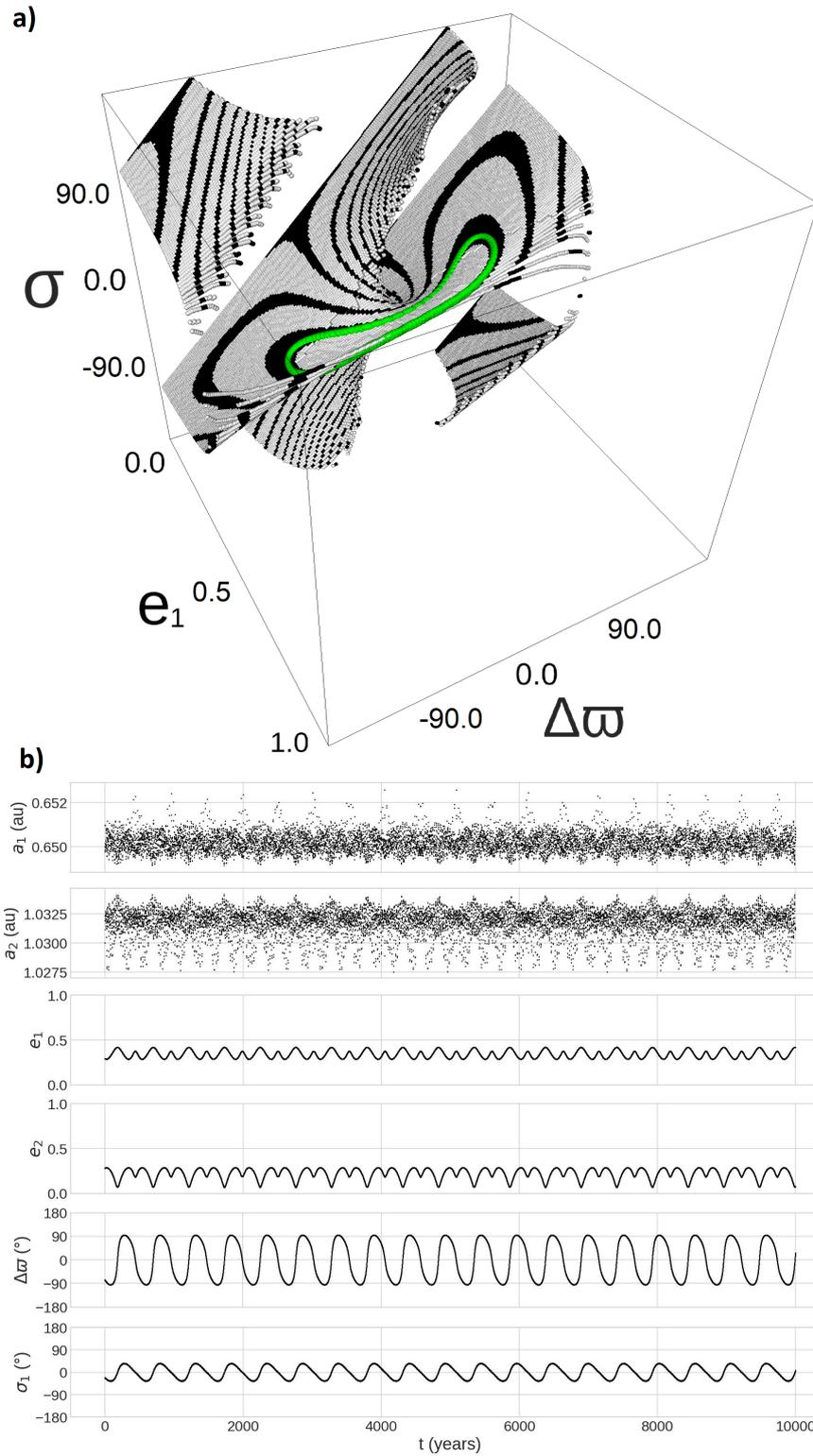


Figura 4.38: *a)* Superficie \mathcal{H}_1 comparada con una integración numérica (en verde) de 10 kyrs del sistema extrasolar HD 73526 para el planeta interno, es decir, para HD 73526 b. Los elementos orbitales utilizados están en la tabla 4.5. *b)* a_1 , a_2 , e_1 , e_2 , $\Delta\varpi$ y σ_1 en función del tiempo de la misma integración numérica.

Planeta	HD 73526 b	HD 73526 c
$m (M_J)$	2.25 ± 0.12	2.25 ± 0.13
P (días)	188.9 ± 0.1	370.1 ± 0.5
a (ua)	0.65 ± 0.01	1.03 ± 0.02
e	0.29 ± 0.03	0.28 ± 0.05
ϖ ($^\circ$)	195 ± 5	272 ± 10
σ ($^\circ$)	338	-
M ($^\circ$)	130	0

Tabla 4.5: Datos de los exoplanetas que orbitan la estrella HD 73526, cuya masa es $m_0 = 1.014M_\odot$. Nota: σ y M_1 son calculados suponiendo inicialmente $\varpi_2 = M_2 = 0^\circ$ manteniendo el $\Delta\varpi$ real.

con una integración numérica del sistema (en verde) donde podemos ver que el ajuste entre modelo y simulación es notable. En este sistema tenemos que los planetas están evolucionando alrededor de un ACR simétrico de $\Delta\varpi = 0^\circ$. En el panel b) de la misma figura se muestra la evolución temporal de las cantidades de mayor interés.

El encuentro más cercano entre los planetas se produce a una distancia de unos $4.5 R_{Hill}$, por lo que la estabilidad del sistema no se vería comprometida siempre y cuando no exista otro objeto (no descubierto) lo suficientemente masivo y con una órbita tal que pueda afectar la evolución de los mismos.

4.2.2.2. Sistema HD 31527

A diferencia del sistema HD 73256, el HD 31527 cuenta con 3 planetas confirmados. Según el estudio realizado por Gallardo, T. et al. (2021), 2 de ellos (el c y el d) están en la resonancia 16:3. En la tabla 4.6 se encuentran los datos del sistema.

Planeta	HD 31527 b	HD 31527 c	HD 31527 d
$m (M_\oplus)$	10.8279 ± 0.50	15.0399 ± 0.71	13.5044 ± 1.20
P (días)	16.5545 ± 0.0024	51.265 ± 0.023	272.84 ± 0.78
a (ua)	0.1254 ± 0.002	0.2664 ± 0.005	0.8121 ± 0.014
e	0.137 ± 0.033	0.030 ± 0.034	0.596 ± 0.055
ϖ ($^\circ$)	47 ± 14	277 ± 69	183.3 ± 6.5
σ ($^\circ$)	-	318	-
M ($^\circ$)	-	326.27	0

Tabla 4.6: Datos de los exoplanetas que orbitan la estrella HD 31527, cuya masa es $m_0 = 0.96M_\odot$. Nota: σ y M son calculados suponiendo inicialmente $\varpi_2 = M_2 = 0^\circ$ manteniendo el $\Delta\varpi$ real.

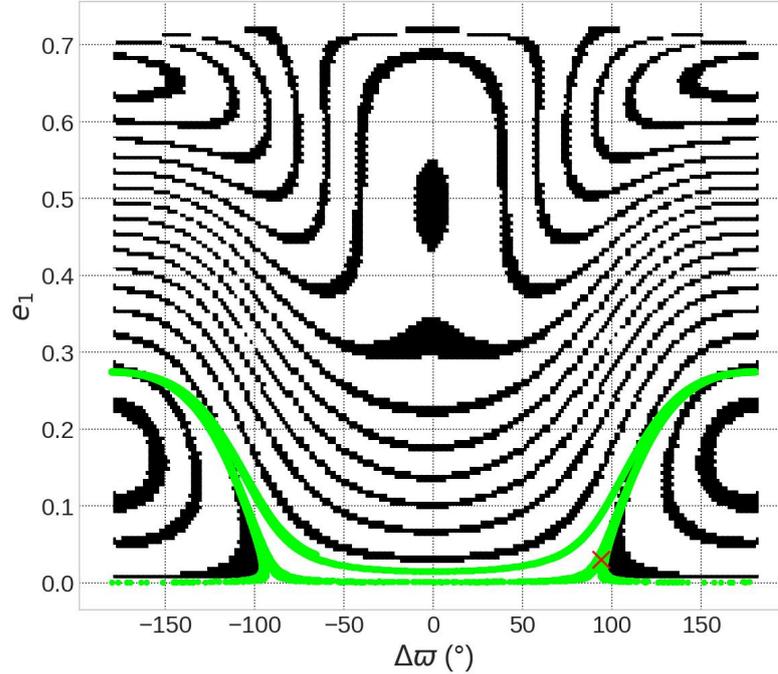


Figura 4.39: Curvas de nivel de \mathcal{H} junto con una integración numérica del sistema HD31527 (en verde) de 100 kyrs. La cruz roja indica la condición inicial.

En la figura 4.39 se tiene una superposición entre modelo y simulación en el plano $(e_1, \Delta\varpi)$, es decir, por un lado las curvas de nivel del hamiltoniano (en blanco y negro) y por otro una integración numérica del sistema HD 73526 sin el planeta HD 73526 b (en verde). Es interesante observar que debido a la condición inicial del sistema, este se encuentra muy cerca de la separatriz del ACR ubicado en $\Delta\varpi = 180^\circ$ para excentricidades bajas. Por lo tanto, la evolución secular provoca que por momentos $\Delta\varpi$ circule (de hecho es lo que pasa más frecuentemente) y en otros momentos libre en torno al mencionado ACR (ver en la figura 4.40 lo que ocurre cerca de los 60 kyrs).

Este sistema, a diferencia del anterior, no se encuentra en resonancia profunda ya que existe cierta amplitud de libración para σ_1 . Quizás esta sea la causa de porque la coincidencia entre modelo y simulación no sea tan buena como en el ejemplo previo. En cuanto a las excentricidades, por un lado tenemos que e_1 varía considerablemente mientras que e_2 permanece casi constante. Esto sucede por como es la curva de $\mathcal{AM}_{norm} = cte$ en la que opera el sistema. Por un lado tenemos que $m_2/m_1 \sim 0.9$ y como estamos en la MMR 16:3, tenemos que $\eta \simeq 1.569$, es decir, un valor similar al del caso MMR 3:1 con $m_2/m_1 = 1$ (ver tabla 4.4). Por otro lado, con los datos del sistema, obtenemos

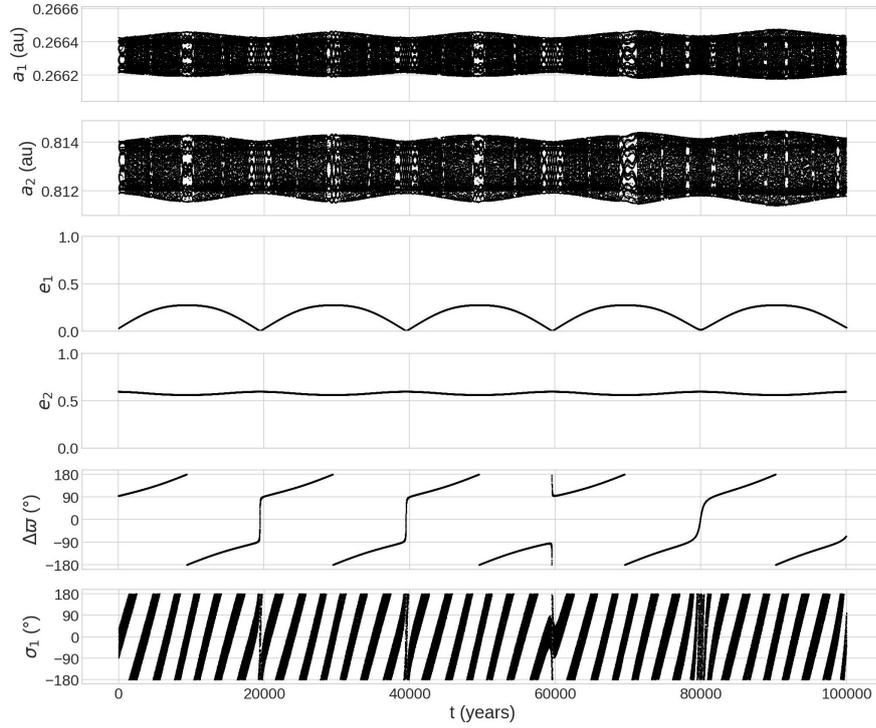


Figura 4.40: a_1 , a_2 , e_1 , e_2 , $\Delta\varpi$ y σ_1 en función del tiempo de la integración numérica de la figura 4.39.

que $\mathcal{AM}_{norm} = 0.88$. Si observamos el gráfico 4.26, la curva de este sistema sería similar a la que se ve ahí donde $\mathcal{AM}_{norm} = 0.9$. Para el rango de variación de e_1 (que viene limitado por las curvas de nivel de \mathcal{H}) se puede ver como la curva de \mathcal{AM}_{norm} es casi vertical. Por lo tanto, se comprueba que la variación de e_2 será muy pequeña en relación a la de e_1 .

4.2.2.3. Sistema HD 128311

Este ejemplo es similar al sistema HD 73526 con la diferencia que en este caso, el sistema no se encuentra en resonancia profunda. Es decir, existe una libración de amplitud no nula en los ángulos resonantes. En la tabla 4.7 se encuentran los datos del sistema obtenidos del artículo Rein (2015), en donde se realiza un re-análisis de los datos de velocidad radial de las observaciones. El autor concluye que el sistema está en resonancia 2:1 con una amplitud de libración de 37° en promedio.

Al estudiar este ejemplo confirmamos que el sistema se encuentra en la MMR 2:1 con una cierta amplitud de libración no nula. En este caso nuevamente hay un buen acuerdo entre el modelo y la simulación, como podemos

Planeta	HD 128311 b	HD 128311 c
$m (M_J)$	1.83 ± 0.17	3.20 ± 0.08
P (días)	460.1 ± 3.9	910.7 ± 6.8
a (ua)	1.095 ± 0.046	1.727 ± 0.066
e	0.30 ± 0.04	0.12 ± 0.07
ϖ ($^\circ$)	283.8 ± 7.8	340.3 ± 17.9
σ ($^\circ$)	346	-
M ($^\circ$)	99	0

Tabla 4.7: Datos de los exoplanetas que orbitan la estrella HD 128311, cuya masa es $m_0 = 0.828M_\odot$. Nota: σ y M_1 son calculados suponiendo inicialmente $\varpi_2 = M_2 = 0^\circ$ manteniendo el $\Delta\varpi$ real.

ver en la figura 4.41. En dicha figura se muestran 3 gráficos, por un lado la superficie \mathcal{H}_1 comparada con una integración, luego está la proyección de dicha superficie en el plano $(e_1, \Delta\varpi)$ y por último la integración en el tiempo. Al hacer la proyección agregamos una cierta transparencia a las curvas de nivel, debido a que hay solapamiento de la superficie consigo misma para excentricidades bajas. No obstante, la zona de interés es la de altas excentricidades, donde se puede ver la evolución del sistema. Éste se encuentra cercano a un ACR ubicado en $\Delta\varpi = 0^\circ$.

4.2.2.4. Sistema K2-19

Los ejemplos presentados hasta aquí fueron de sistemas detectados por medio de técnicas de velocidad radial. En este caso presentamos un ejemplo de sistema detectado por tránsito como lo es el K2-19. En el trabajo de Petigura et al. (2020) también realizan un ajuste de los elementos utilizando datos de velocidad radial y técnicas de TTV. Con el complemento de estas metodologías se obtienen los valores mostrados en la tabla 4.8.

Como lo dice en el título de su trabajo, Petigura et al. (2020) concluyen que los planetas K2-19 b y K2-19 c poseen una commensurabilidad en los períodos muy cercana a $2/3$ pero que no se encuentran en resonancia ya que σ circula en lugar de librar. Sin embargo, el sistema si se encuentra en resonancia (profunda de hecho) con un centro de libración que circula en escala secular de tiempo. Para entender esto podemos ver la figura 4.42a) donde se aprecia que la evolución ocurre en una curva de nivel muy cerca del borde de la superficie \mathcal{H}_2 . Las curvas de nivel del hamiltoniano en esa zona de la superficie predicen justamente que la evolución secular del centro de libración es que circule.

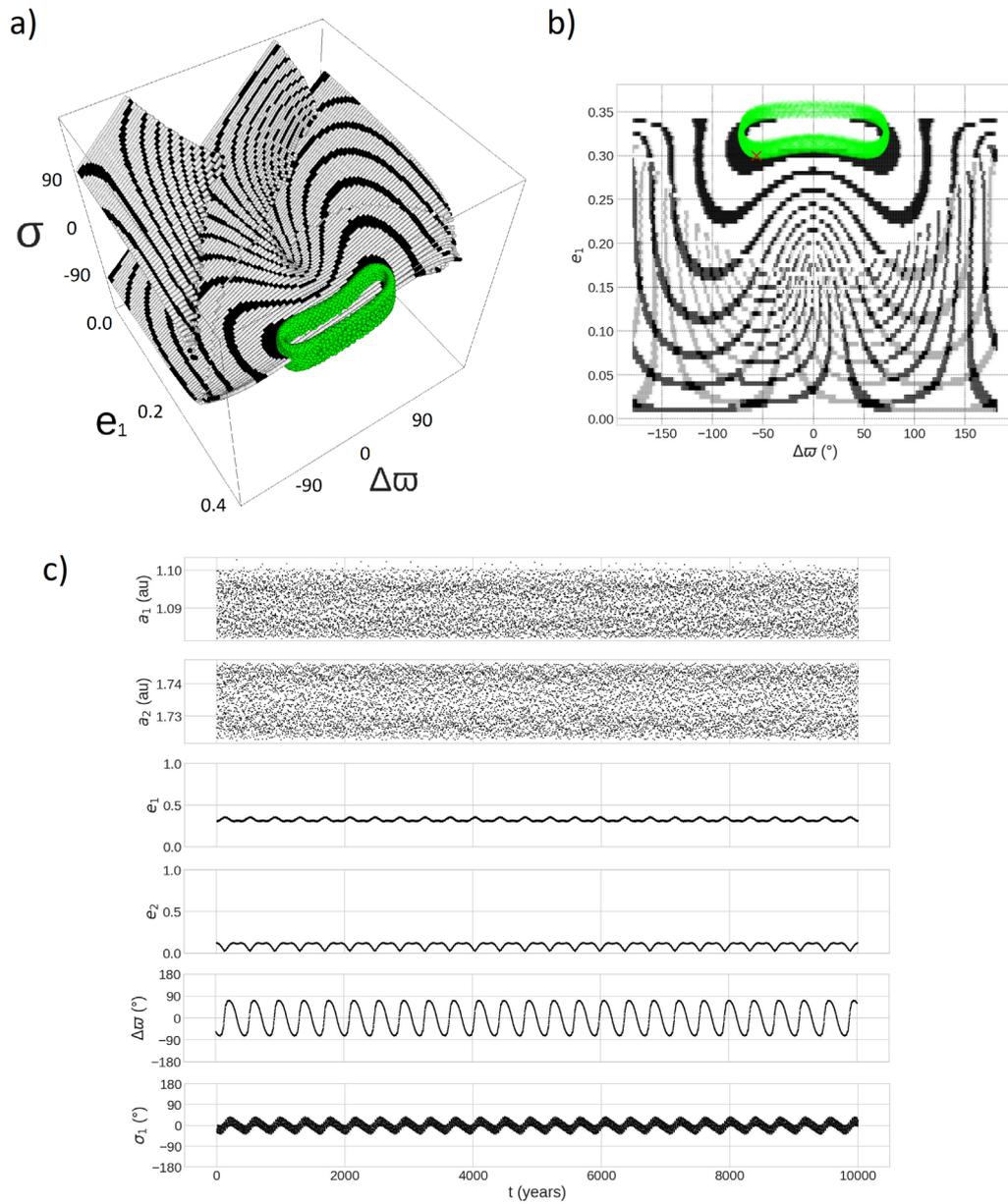


Figura 4.41: *a)* Superficie \mathcal{H}_1 junto con una integración numérica (en verde) del sistema HD 128311. *b)* Proyección en el plano $(e_1, \Delta\varpi)$ del gráfico del panel a). Se realizó con transparencia para apreciar el solapamiento en la superficie \mathcal{H}_1 para e bajos. La cruz roja indica las condiciones iniciales de la integración. *c)* Integración numérica de los paneles a) y b) en el tiempo.

Planeta	K2-19 b	K2-19 c	K2-19 d
$m (M_{\oplus})$	32.4 ± 1.7	10.8 ± 0.6	< 10
P (días)	7.9222 ± 0.0001	11.8993 ± 0.0008	2.5081 ± 0.0002
a (ua)	0.07453 ± 0.00004	0.09775 ± 0.00016	0.03462 ± 0.00006
e	0.20 ± 0.03	0.21 ± 0.03	0 (fijado)
ϖ ($^{\circ}$)	272.6 ± 8.5	274.97 ± 5.27	0 (fijado)
σ ($^{\circ}$)	166	-	-
M ($^{\circ}$)	86.55	0	-

Tabla 4.8: Datos de los exoplanetas que orbitan la estrella K2-19, cuya masa es $m_0 = 0.88M_{\odot}$. Nota: σ y M son calculados suponiendo inicialmente $\varpi_2 = M_2 = 0^{\circ}$ manteniendo el $\Delta\varpi$ real.

Si proyectamos las curvas de nivel en el plano $(e_2, \Delta\varpi)$ se confirma el acuerdo entre modelo e integración (ver panel b) de la 4.42). En el panel c) de la figura 4.42a) se tiene la integración numérica en el tiempo. Este ejemplo es similar a uno de las integraciones mostradas en la figura 4.10 para la 3:2 en el caso restringido, por lo que constituye un ejemplo real de un sistema muy cercano a un ACR_{II}. Es por esto que las e_1 , e_2 y $\Delta\varpi$ apenas varían mientras que existe una circulación secular de σ .

4.2.2.5. Sistema K2-146

Los planetas de K2-146 fueron detectados por las técnica de tránsito y TTV. En Lam et al. (2020) se encuentran los detalles y además ellos confirman que el sistema se encuentra en la resonancia 3:2. En la tabla 4.9 se tienen los datos del sistema.

Planeta	K2-146 b	K2-146 c
$m (M_{\oplus})$	5.6 ± 0.7	7.1 ± 0.9
P (días)	2.6698 ± 0.0001	3.9663 ± 0.0002
a (ua)	0.02674 ± 0.00003	0.03482 ± 0.00005
e	0.14 ± 0.07	0.16 ± 0.07
ϖ ($^{\circ}$)	191 ± 13	2 ± 11
σ ($^{\circ}$)	7	-
M ($^{\circ}$)	80	0

Tabla 4.9: Datos de los exoplanetas que orbitan la estrella K2-146, cuya masa es $m_0 = 0.358M_{\odot}$. Nota: σ y M_1 son calculados suponiendo inicialmente $\varpi_2 = M_2 = 0^{\circ}$ manteniendo el $\Delta\varpi$ real.

Esta vez el sistema se encuentra cercano a un ACR_I ubicado en $\Delta\varpi = 180^{\circ}$, como se puede apreciar en la figura 4.43 donde comparamos una integración

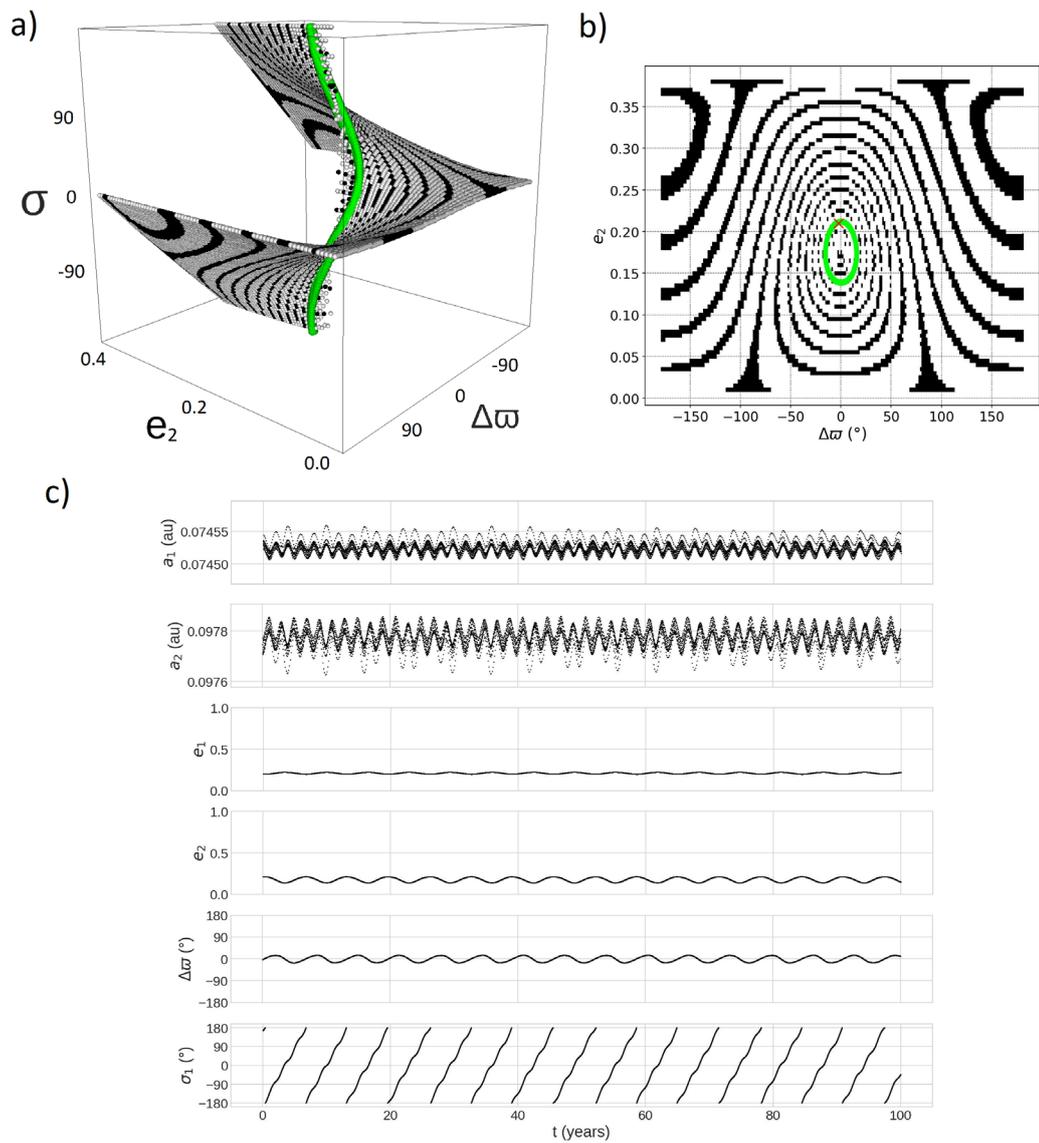


Figura 4.42: *a)* Superficie \mathcal{H}_2 junto con una integración numérica (en verde) del sistema K2-19. *b)* Proyección en el plano $(e_2, \Delta\varpi)$ del gráfico del panel a). *c)* Integración numérica de los paneles a) y b) en el tiempo.

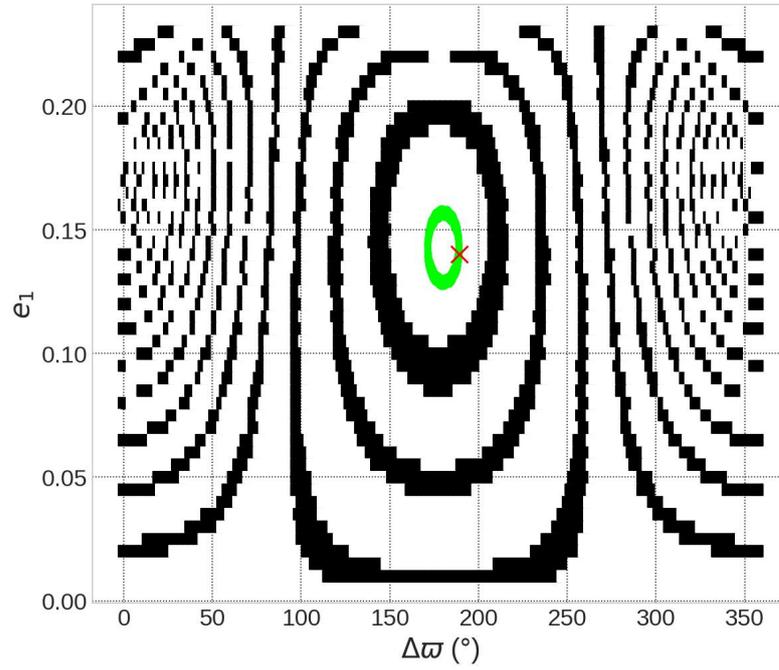


Figura 4.43: Curvas de nivel de \mathcal{H} junto con una integración numérica del sistema K2-146 (en verde) de 1 kyrs.

numérica con el modelo. Si observamos la figura 4.44 podemos corroborar como el sistema se encuentra en resonancia pero no profunda. Es decir, existe una amplitud de libración de unos 100° , misma situación que muestran en la figura 9 de Lam et al. (2020).

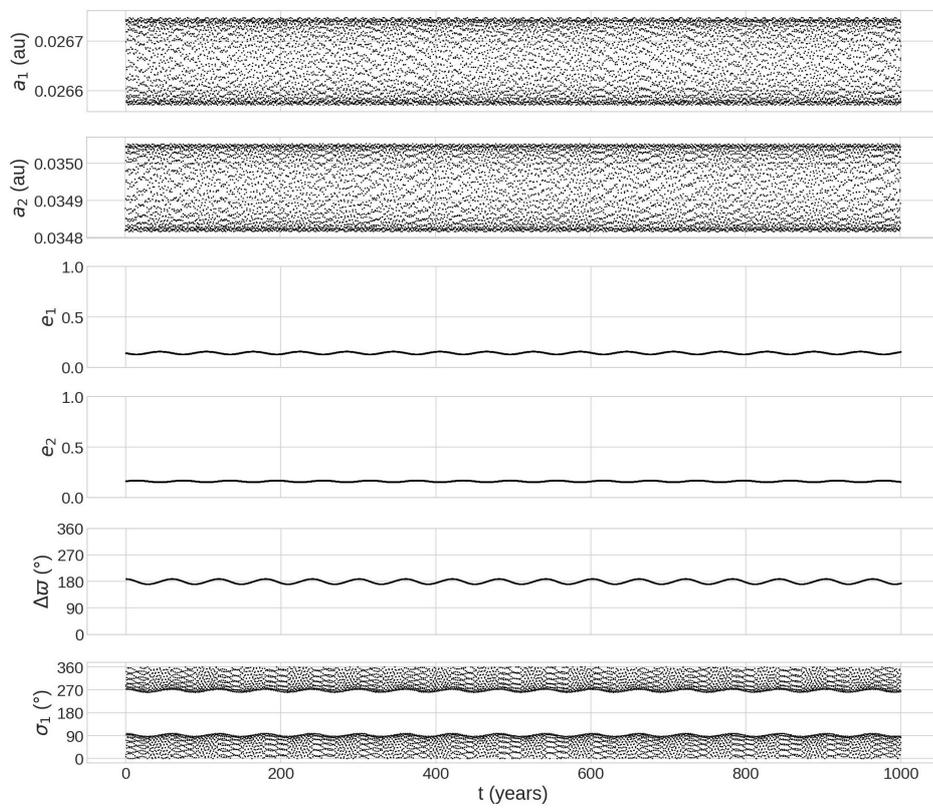


Figura 4.44: Integración numérica de la figura 4.43 en el tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Discusión de los resultados

La principal conclusión que podemos obtener de este trabajo es que logramos extender el modelo resonante de Gallardo (2020) (para el caso coplanar y en resonancia profunda) a un modelo secular, es decir, que predice el comportamiento a largo plazo de los sistemas atrapados en MMR profunda. Esta extensión tiene como sustento teórico al principio de invariancia adiabática que funciona bien siempre y cuando no estemos en excentricidades muy cercanas a 0.

Construimos una representación gráfica tridimensional del espacio de fases (superficie \mathcal{H}) que nos permite resumir en un solo gráfico lo que ocurre a largo plazo con las variables e , ϖ y σ . Esta representación tridimensional no es estrictamente necesaria en todos los casos ya que cuando $\sigma_c = cte$ podemos recurrir a un gráfico en el plano (e, ϖ) . A veces la forma de la superficie es tal que incluso en los casos donde $\sigma_c \neq cte$ se puede realizar una proyección en el plano (e, ϖ) de forma de visualizar fácilmente las curvas de nivel de \mathcal{H} en dicho plano.

Validamos el modelo comparando los resultados con integraciones numéricas de las ecuaciones exactas de movimiento, obteniendo en la mayoría de los casos muy buen ajuste. En los casos donde no hubo buen ajuste se debió a la presencia de encuentros lejanos que eventualmente desestabilizaron al sistema. Estos encuentros fueron constatados al observar que las variables transcurrieron (en cierto punto de la evolución) por determinada zona del espacio de fases en donde el Δ (en R_{Hil}) alcanzó valores cercanos al criterio de $3R_{Hil}$

que pusimos como límite para decidir si había encuentro cercano.

Para el caso restringido realizamos un estudio bastante exhaustivo de las principales resonancias (2:1, 3:1, 3:2, 1:2, 1:3, 2:3, 1:1) obteniendo buena noción de lo que ocurre con la dinámica resonante en cada caso. Para e_p bajos, obtuvimos que en las resonancias internas los resultados fueron similares a los de otros estudios (Pichierri et al. 2017) donde en general se tienen hasta 2 familias simétricas de puntos de equilibrio con $\sigma_c = 0$ y/o $\sigma_c = \pi$. Para las resonancias externas corroboramos la presencia y forma de las ramas asimétricas (Beauge, 1994) mientras que para en la configuración coorbital obtuvimos resultados muy similares a Li et al. (2021).

Para e_p de moderado a alto, encontramos que en muchos casos existen zonas con gran excursión para e , que alcanzan valores cercanos a 0.8 en algunos ejemplos particulares. Observamos que el hecho de definir las condiciones iniciales de la partícula para que se encuentren en la superficie \mathcal{H} no aseguran estabilidad ya que si la curva de nivel donde la colocamos es abierta, entonces eventualmente se deja de cumplir la condición de libración nula e incluso se puede romper la resonancia. Además, también importa, como mencionamos, que tan cerca estemos de la condición de encuentro, lo cual pudimos analizar utilizando la superficie Δ .

Localizamos los puntos ACR para cada caso y mediante una técnica de variación adiabática de e_p logramos explorar el espacio entero de parámetros para así construir las curvas de las familias de ACR dada una resonancia. Descubrimos que podemos clasificar a los ACR en 2 tipos diferentes dependiendo si σ_c libra o circula en escala secular. También observamos que pueden producirse bifurcaciones en las ramas simétricas que dan lugar a ramas asimétricas y viceversa, a medida que variamos e_p , como ocurre en la MMR 3:1 y 3:2 (ver figuras 4.8 y 4.12). Encontramos que en general a mayor e_p , coexisten más familias ACR para todas las resonancias estudiadas.

Aplicamos el modelo al hipotético Planeta 9 donde consideramos como caso de estudio un supuesto TNO distante en resonancia 2:1 con el P9. Vimos como, dependiendo de las condiciones iniciales, el TNO podría alcanzar valores muy cercanos a 1 en excentricidad lo que permite que sea descubierto. Además, debido a la forma de las curvas de nivel de \mathcal{H} , observamos que para una población imaginaria de objetos descubiertos en resonancia 2:1 con el P9, se generaría una aglomeración en torno a $\varpi \sim \varpi_p = 0^\circ$.

Modificamos levemente el modelo de Gallardo, T. et al. (2021) para poder

aplicarlo al caso planetario. En este contexto también obtuvimos muy buenos resultados. En una primera etapa lo utilizamos para investigar de manera genérica un conjunto de sistemas artificiales donde consideramos el mismo conjunto de resonancias (con la excepción de que aquí no hay distinción entre externas e internas) y tomamos valores para m_2/m_1 de un conjunto discreto de 5 cocientes. Una vez elegidos estos parámetros, obtuvimos η y por lo tanto la forma de las curvas de nivel de $\mathcal{AM}_{norm}(e_1, e_2)$, las cuales nos proporcionaban información de los rangos máximos de variación de las excentricidades. Como último paso, antes de realizar las comparaciones con las integraciones numéricas, definimos el valor de \mathcal{AM}_{norm} el cual es una integral de movimiento.

Una vez realizado el proceso descrito en el párrafo anterior, construimos las superficies \mathcal{H}_1 y/o \mathcal{H}_2 del caso correspondiente, lo que nos permitía, al igual que en el caso restringido, localizar los ACRs, encontrar zonas de gran excursión de $e_{1,2}$, encontrar separatrices, etc. En general encontramos que la riqueza dinámica del caso planetario es similar a la del caso restringido aunque puede ser bastante diferente, sobretodo en el caso $m_2/m_1 = 1$. En cuanto a los ACR, no realizamos la misma exploración exhaustiva para construir las curvas de las familias de ACR como hicimos en el caso restringido. En cambio, presentamos sólo una curva para el caso de la 2:1 el cual resultó ser muy similar a otros estudios realizados (Beaugé et al. 2006; Lee, 2004).

La segunda etapa consistió en aplicar el modelo a sistemas extrasolares reales. Para esto filtramos la base de datos de los exoplanetas en busca de sistemas múltiples y que posean al menos 2 planetas cercanos a una resonancia de orden no muy grande. A medida que nos fuimos topando con dichos sistemas, fuimos buscando los artículos relacionados a los hallazgos de manera de tener valores lo más fidedignos posible de los elementos orbitales. Luego, tomando esos elementos, realizamos una integración numérica para compararla con el modelo. Esta vez nada nos aseguraba que los sistemas estuvieran en resonancia profunda. De hecho dimos solo con un sistema en resonancia profunda, el HD73526, cuyo ajuste con el modelo fue excelente. Los demás ajustaron bien al realizar la proyección en $(e_{1,2}, \Delta\varpi)$ pero en realidad no estaban en resonancia profunda. Un análisis aparte requirió el sistema K2-146 que aparentemente parecía no estar en MMR. Sin embargo, se encontraba en el borde de la superficie, que no es otra cosa que un ACR_{II} .

5.2. Trabajo a futuro

Al comienzo de este trabajo se visualizaron 3 casos de estudio los cuales son: caso restringido coplanar, caso planetario coplanar y caso de sistemas (restringido y/o planetario) con inclinación. Los primeros 2 fueron estudiados y en la mayoría de los aspectos concluidos con éxito. En cambio, el estudio de sistemas inclinados sobrepasó el alcance de esta tesis. Sin embargo, esto no quita que en un futuro se pueda realizar la extensión del modelo al caso inclinado. Es evidente que la complejidad para dichos sistemas crece ya que aumentan los grados de libertad. No obstante, la motivación de estudiarlos subsiste por la aplicabilidad a objetos reales (TNOs por ejemplo) y la existencia de mecanismos dinámicos muy interesantes como lo es el conocido mecanismo de von Zeipel-Lidov-Kozai (Kozai, 1962; Lei et al. 2022; Lidov, 1962).

Un punto que amerita más investigación es el de obtener un método conciso para la obtención del semi-eje correcto, es decir, aquel que nos coloque al objeto en resonancia profunda. Esto no quiere decir que el modelo esté mal o incompleto actualmente (para el caso coplanar) ya que una vez que conocemos dicho semi-eje, el modelo predice correctamente la evolución secular del objeto resonante. Sin embargo, sería deseable tener una expresión analítica que nos de el semi-eje correcto o en su defecto, un método numérico rápido y práctico que “compense” los efectos de la ley de estructura y de las perturbaciones de corto período que provocan que la expresión 2.15 nos de algunas veces un semi-eje incorrecto.

Otro aspecto que se podría agregar al actual modelo sería el de predecir la evolución secular de los elementos orbitales en el tiempo, ya que actualmente el modelo la predice solo en el espacio de fases. Esto probablemente sea posible si conseguimos calcular el período secular. Por otro lado, también estaría bueno completar las curvas de familias de ACR para el caso planetario ya que hay mucho material en la literatura para poder comparar los resultados.

Finalmente, queremos mencionar que sería interesante comparar el modelo para el caso restringido con objetos reales excéntricos que estén en resonancia con un planeta excéntrico. Esto será posible si finalmente se descubre el planeta 9 y/o cuando se empiece a lograr determinar las órbitas de los exocometas y exoasteroides.

Bibliografía

- Antoniadou, K. I. y Libert, A.-S. (2018). Origin and continuation of $3/2$, $5/2$, $3/1$, $4/1$ and $5/1$ resonant periodic orbits in the circular and elliptic restricted three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(6), 41. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9834-8>
- Batygin, K. y Morbidelli, A. (2013). Analytical treatment of planetary resonances. *Astronomy & Astrophysics*, 556, A28. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220907>
- Batygin, K., Adams, F. C., Brown, M. E. y Becker, J. C. (2019). The planet nine hypothesis [The planet nine hypothesis]. *Physics Reports*, 805, 1-53. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.01.009>
- Batygin, K. y Morbidelli, A. (2017). Dynamical Evolution Induced by Planet Nine. *The Astrophysical Journal*, 154(6), 229. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa937c>
- Beauge, C. (1994). Asymmetric Librations in Exterior Resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60(2), 225-248. <https://doi.org/10.1007/BF00693323>
- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S. y Michtchenko, T. A. (2003). Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apses Alignment and Asymmetric Stationary Solutions. *The Astrophysical Journal*, 593(2), 1124-1133. <https://doi.org/10.1086/376568>
- Beaugé, C. y Michtchenko, T. A. (2003). Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341(3), 760-770. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06345.x>
- Beaugé, C., Michtchenko, T. A. y Ferraz-Mello, S. (2006). Planetary migration and extrasolar planets in the $2/1$ mean-motion resonance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365(4), 1160-1170. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09779.x>

- Beust, H. y Morbidelli, A. (1996). Mean-Motion Resonances as a Source for Infalling Comets toward β Pictoris. *Icarus*, *120*(2), 358-370. <https://doi.org/10.1006/icar.1996.0056>
- Celletti, A., Chessa, A., Hadjidemetriou, J. y Valsecchi, G. B. (2002). A Systematic Study of the Stability of Symmetric Periodic Orbits in the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *83*(1), 239-255. <https://doi.org/10.1023/A:1020111621542>
- Charalambous, C., Teyssandier, J. y Libert, A. -S. (2022). Proximity of exoplanets to first-order mean-motion resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *514*(3), 3844-3856. <https://doi.org/10.1093/mnras/stac1554>
- Correa Otto, J., Leiva, A. M., Giuppone, C. A. y Beaugé, C. (2010). Mapping the ν_{solar} secular resonance for retrograde irregular satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *402*(3), 1959-1968. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16022.x>
- Ferraz-Mello, S. (1987). Expansion of the disturbing force-function for the study of high-eccentricity librations. *Astronomy & Astrophysics*, *183*(2), 397-402.
- Ferraz-Mello, S. (1988). High eccentricity libration. En A. D. Roy (Ed.), *Long-term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-body Systems* (pp. 245-250).
- Ferraz-Mello, S. (1990). Regular Motions of Resonant Asteroids. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, *21*, 569.
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A. y Beaugé, C. (2006). Regular motions in extra-solar planetary systems. En B. A. Steves, A. J. Maciejewski y M. Hendry (Eds.), *Chaotic Worlds: from Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems* (p. 255).
- Gallardo, T. (2006a). Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus*, *184*(1), 29-38. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.04.001>
- Gallardo, T. (2006b). The occurrence of high-order resonances and Kozai mechanism in the scattered disk. *Icarus*, *181*(1), 205-217. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.11.011>
- Gallardo, T. (2019). Strength, stability and three dimensional structure of mean motion resonances in the solar system. *Icarus*, *317*, 121-134. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.07.002>

- Gallardo, T. (2020). Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 132(2), 9. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9948-7>
- Gallardo, T., Beaugé, C. y Giuppone, C. (2021). Semianalytical model for planetary resonances - Application to planets around single and binary stars. *A&A*, 646, A148. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039764>
- Garfinkel, B. (1966). Formal solution in the problem of small divisors. *The Astrophysical Journal*, 71, 657. <https://doi.org/10.1086/110171>
- Giuppone, C. A., Beaugé, C., Michtchenko, T. A. y Ferraz-Mello, S. (2010). Dynamics of two planets in co-orbital motion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 407(1), 390-398. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16904.x>
- Gladman, B. (1993). Dynamics of Systems of Two Close Planets. *Icarus*, 106(1), 247-263. <https://doi.org/10.1006/icar.1993.1169>
- Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*. Reverté. <https://books.google.com.uy/books?id=vf2JiybeDc4C>
- Gomes, R. S. (2003). The origin of the Kuiper Belt high-inclination population. *Icarus*, 161(2), 404-418. [https://doi.org/10.1016/S0019-1035\(02\)00056-8](https://doi.org/10.1016/S0019-1035(02)00056-8)
- Haghighipour, N., Couetdic, J., Varadi, F. y Moore, W. B. (2003). Stable 1:2 Resonant Periodic Orbits in Elliptic Three-Body Systems. *The Astrophysical Journal*, 596(2), 1332-1340. <https://doi.org/10.1086/378119>
- Henrard, J. (1993). The Adiabatic Invariant in Classical Mechanics. En C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber y H. O. Walther (Eds.), *Dynamics Reported: Expositions in Dynamical Systems* (pp. 117-235). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61232-9_4
- Henrard, J. y Lemaitre, A. (1983). A Second Fundamental Model for Resonance. *Celestial Mechanics*, 30(2), 197-218. <https://doi.org/10.1007/BF01234306>
- Kozai, Y. (1962). Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astrophysical Journal*, 67, 591-598. <https://doi.org/10.1086/108790>
- Lam, K. W. F., Korth, J., Masuda, K., Csizmadia, S., Eigmüller, P., Stefánsson, G. K., Endl, M., Albrecht, S., Robertson, P., Luque, R., Livingston, J. H., Hirano, T., Sobrino, R. A., Barragán, O., Cabrera, J., Carleo, I., Chaushev, A., Cochran, W. D., Dai, F., . . . Van Eylen, V. (2020). It Ta-

- kes Two Planets in Resonance to Tango around K2-146. *The Astrophysical Journal*, 159(3), 120. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab66c9>
- Laskar, J. (1997). Large scale chaos and the spacing of the inner planets. *Astronomy & Astrophysics*, 317, L75-L78.
- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2002a). Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems. *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #33*, 33, 01.03.
- Lee, M. H. (2004). Diversity and Origin of 2:1 Orbital Resonances in Extrasolar Planetary Systems. *The Astrophysical Journal*, 611(1), 517-527. <https://doi.org/10.1086/422166>
- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2002b). Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876 Planets. *The Astrophysical Journal*, 567(1), 596-609. <https://doi.org/10.1086/338504>
- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2002c). Extrasolar Planets and Mean-Motion Resonances. *arXiv e-prints*, astro-ph/0209176.
- Lei, H. (2019). Three-dimensional phase structures of mean motion resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(2), 2097-2116. <https://doi.org/10.1093/mnras/stz1422>
- Lei, H., Li, J., Huang, X. y Li, M. (2022). The Von Zeipel-Lidov-Kozai Effect inside Mean Motion Resonances with Applications to Trans-Neptunian Objects. *The Astrophysical Journal*, 164(3), **jourarticle** 74, 74. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac7c6a>
- Li, M., Huang, Y.-K. y Gong, S.-P. (2021). A semi-analytic model for the study of 1/1 resonant dynamics of the planar elliptic restricted co-orbital problem. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 21(2), 025. <https://doi.org/10.1088/1674-4527/21/2/25>
- Lidov, M. (1962). The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. 9(10), 719-759. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(62\)90129-0](https://doi.org/10.1016/0032-0633(62)90129-0)
- Malhotra, R. y Zhang, N. (2020). On the divergence of first-order resonance widths at low eccentricities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 496(3), 3152-3160. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa1751>
- Message, P. J. (1958). Proceedings of the Celestial Mechanics Conference: The search for asymmetric periodic orbits in the restricted problem of three bodies. *The Astrophysical Journal*, 63, 443. <https://doi.org/10.1086/107804>

- Michtchenko, T. A., Beaugé, C. y Ferraz-Mello, S. (2006). Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(4), 411-432. <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9009-x>
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C. y Ferraz-Mello, S. (2008). Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance – I. Systems with a more massive outer planet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(2), 747-758. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13278.x>
- Moons, M. y Morbidelli, A. (1993). The Main Mean Motion Commensurabilities in the Planar Circular and Elliptic Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57(1-2), 99-108. <https://doi.org/10.1007/BF00692465>
- Moons, M. y Morbidelli, A. (1995). Secular resonances inside mean-motion commensurabilities: the 4/1, 3/1, 5/2 and 7/3 cases. *Icarus*, 114(1), 33-50. <https://doi.org/10.1006/icar.1995.1041>
- Morbidelli, A. (2002). Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics. *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics, by Alessandro Morbidelli. London: Taylor & Francis, 2002, ISBN 0415279399, -1.*
- Murray, C. D. y Dermott, S. F. (2000). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139174817>
- Nesvorný, D., Ferraz-Mello, S., Holman, M. y Morbidelli, A. (2002). Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances: Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt. *Asteroids III* (pp. 379-394).
- Peale, S. J. (1976). Orbital Resonances in the Solar System.
- Petigura, E. A., Livingston, J., Batygin, K., Mills, S. M., Werner, M., Isaacson, H., Fulton, B. J., Howard, A. W., Weiss, L. M., Espinoza, N., Jontof-Hutter, D., Shporer, A., Bayliss, D. y Barros, S. C. C. (2020). K2-19b and c are in a 3:2 Commensurability but out of Resonance: A Challenge to Planet Assembly by Convergent Migration. *The Astrophysical Journal*, 159(1), 2. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab5220>
- Pichierri, G., Morbidelli, A. y Lai, D. (2017). Extreme secular excitation of eccentricity inside mean motion resonance. Small bodies driven into star-grazing orbits by planetary perturbations. *Astronomy & Astrophysics*, 605, A23. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730936>

- Pons, J. y Gallardo, T. (2022). Secular evolution of resonant small bodies: semi-analytical approach for arbitrary eccentricities in the coplanar case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(1), 1153-1166. <https://doi.org/10.1093/mnras/stac018>
- Rein, H. (2015). Reanalysis of radial velocity data from the resonant planetary system HD128311. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 448, L58-L61. <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slu202>
- Roy, A. E. (2005). *Orbital motion*.
- Saillenfest, M., Fouchard, M., Tommei, G. y Valsecchi, G. B. (2016). Long-term dynamics beyond Neptune: secular models to study the regular motions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126(4), 369-403. <https://doi.org/10.1007/s10569-016-9700-5>
- Sidorenko, V. V. (2006). Evolution of asteroid orbits at the 3 : 1 their mean motion resonance with Jupiter (planar problem). *Cosmic Research*, 44(5), 440-455. <https://doi.org/10.1134/S001095250605008X>
- Trujillo, C. A. y Sheppard, S. S. (2014). A Sedna-like body with a perihelion of 80 astronomical units. *Nature*, 507(7493), 471-474. <https://doi.org/10.1038/nature13156>
- Wang, X. y Malhotra, R. (2017). Mean Motion Resonances at High Eccentricities: The 2:1 and the 3:2 Interior Resonances. *The Astronomical Journal*, 154(1), 20. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa762b>
- Wisdom, J. (1982). The origin of the Kirkwood gaps - A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *The Astrophysical Journal*, 87, 577-593. <https://doi.org/10.1086/113132>
- Wisdom, J. (1985). A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. *Icarus*, 63(2), 272-289. [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0019-1035(85)90011-9)
- Wittenmyer, R. A., Tan, X., Lee, M. H., Horner, J., Tinney, C. G., Butler, R. P., Salter, G. S., Carter, B. D., Jones, H. R. A., O'Toole, S. J., Bailey, J., Wright, D., Crane, J. D., Schectman, S. A., Arriagada, P., Thompson, I., Minniti, D. y Diaz, M. (2014). A Detailed Analysis of the HD 73526 2:1 Resonant Planetary System. *The Astrophysical Journal*, 780(2), 140. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/780/2/140>
- Yoshikawa, M. (1989). A survey of the motions of asteroids in the commensurabilities with Jupiter. *Astronomy & Astrophysics*, 213(1-2), 436-458.

Zhou, L.-Y., Lehto, H. J., Sun, Y.-S. y Zheng, J.-Q. (2004). Apsidal corotation in mean motion resonance: the 55 Cancri system as an example. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(4), 1495-1502. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07755.x>

APÉNDICES

Apéndice A

Desarrollos matemáticos

A.1. Estabilidad de las libraciones resonantes

Aquí demostraremos (para el caso restringido) que las soluciones estables¹ se dan en los mínimos locales de la función perturbadora. Para ello seguiremos la idea de pequeñas oscilaciones utilizada por ejemplo en Gallardo (2020).

La idea consiste en considerar pequeños desplazamientos de los puntos de equilibrio en la escala resonante de tiempo. Sea $(\Sigma, \sigma) = (\Sigma_0, \sigma_0)$ un punto de equilibrio, es decir, valores que cumplen las ecuaciones 2.10. Definamos los pequeños desplazamientos como $S = \Sigma - \Sigma_0$ y $s = \sigma - \sigma_0$. Es fácil ver que:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\sigma} = -\mathcal{H}_\sigma \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Sigma} = \mathcal{H}_\Sigma\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde en la última igualdad de cada ecuación introducimos la notación compacta de derivada parcial.

Ahora realizaremos una expansión de primer orden de las funciones $\mathcal{H}_\sigma(\Sigma, \sigma)$ y $\mathcal{H}_\Sigma(\Sigma, \sigma)$. El resultado de esto expresado en función de las variables S y s en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_{\sigma\Sigma} & -\mathcal{H}_{\sigma\sigma} \\ \mathcal{H}_{\Sigma\Sigma} & \mathcal{H}_{\Sigma\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ s \end{pmatrix}\tag{A.2}$$

¹En este contexto nos referiremos como estable a aquellas soluciones oscilatorias de amplitud constante.

Para que el punto de equilibrio (Σ_0, σ_0) sea estable, los valores propios de la matriz de la ecuación A.2 tienen que ser imaginarios puros. Por lo tanto, procedemos a calcular dichos valores propios:

$$\begin{vmatrix} -\mathcal{H}_{\sigma\Sigma} - \lambda & -\mathcal{H}_{\sigma\sigma} \\ \mathcal{H}_{\Sigma\Sigma} & \mathcal{H}_{\Sigma\sigma} - \lambda \end{vmatrix} = -\mathcal{H}_{\Sigma\sigma}^2 + \lambda^2 + \mathcal{H}_{\Sigma\Sigma}\mathcal{H}_{\sigma\sigma} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ahora despejamos el valor propio e imponemos la condición de estabilidad:

$$\lambda^2 = -\mathcal{H}_{\Sigma\Sigma}\mathcal{H}_{\sigma\sigma} + \mathcal{H}_{\Sigma\sigma}^2 < 0 \quad (\text{A.4})$$

Recordando la expresión para el hamiltoniano (ecuación 2.5) tenemos que:

$$\mathcal{H}_{\Sigma\Sigma} = -\frac{3\mu^2}{k^2} \frac{1}{\Sigma^4} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{H}_{\sigma\sigma} = -\mathcal{R}_{\sigma\sigma}$$

Por lo tanto, la única manera de que $\lambda^2 < 0$ es si se cumple que $\mathcal{R}_{\sigma\sigma} > 0$. Esto no es otra cosa que concavidad positiva en la función perturbadora, o sea, la condición de mínimo local. De hecho, con este procedimiento podemos decir que si $\mathcal{R}_{\sigma\sigma} < 0$ (máximo local) entonces la evolución de ese punto de equilibrio será inestable.

Con esto queda concluida la demostración de que los puntos de equilibrio estable se dan en los mínimos de la función $\mathcal{R}(\sigma)$.

A.2. Variables canónicas del caso planetario

En esta sección haremos un esbozo de cómo demostramos que la transformación que nos lleva de las variables 2.16 a las variables 2.20 es canónica.

Existen varias maneras para demostrar si una cierta transformación es canónica. Nosotros lo verificaremos comprobando si la matriz \mathbb{M} asociada a la transformación cumple la condición simpléctica.

Esta matriz no es otra que el jacobiano de las variables nuevas con respecto

a las viejas, por lo tanto, es fácil ver que:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2/k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

En el contexto de la mecánica hamiltoniana, la matriz \mathbb{M} cumple la condición simpléctica si (Goldstein, 1987):

$$\mathbb{M}\mathbb{J}\mathbb{M}^t = \mathbb{J} \quad (\text{A.7})$$

donde \mathbb{J} es una matriz antisimétrica definida así:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{4 \times 4} & \mathbb{I}_{4 \times 4} \\ -\mathbb{I}_{4 \times 4} & \mathbb{O}_{4 \times 4} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

siendo $\mathbb{O}_{4 \times 4}$ la matriz nula e $\mathbb{I}_{4 \times 4}$ la identidad.

La ecuación A.7 se interpreta diciendo que la transformación (“representada” por la matriz \mathbb{M}) mantiene la estructura simpléctica. Esto quiere decir que luego de realizada la transformación, se siguen cumpliendo las ecuaciones canónicas de Hamilton. Por razones de practicidad no mostraremos aquí el cálculo detallado que demuestra que se cumple la condición A.7.

A.3. Ley de estructura numérica en el caso as- teroidal

Para la obtención de las curvas de la figura 4.25 se desarrolló un método numérico que se describe a continuación.

El primer paso es derivar en el tiempo la ecuación 2.4 y asumir que $\dot{\sigma} \simeq 0$, lo cual tiene sentido ya que estamos en la hipótesis de resonancia profunda:

$$k\dot{\lambda} - k_p\dot{\lambda}_p + (k_p - k)\dot{\varpi} \simeq 0 \quad (\text{A.9})$$

Utilizando una de las ecuaciones planetarias de Lagrange (la 2^{da} de las ecuaciones 4.2) y las definiciones de longitud media y movimiento medio, obtenemos:

$$\frac{k_p \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} = k_p n_p - kn \quad (\text{A.10})$$

Ahora viene la segunda aproximación, ya que asumiremos que se cumple la 3^{ra} Ley de Kepler no solo para el planeta sino también para la partícula. Sustituyendo y operando un poco llegamos a la siguiente igualdad:

$$ak_p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} = \left(\frac{a}{a_p} \right)^{3/2} \frac{\mu k_p e}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{\mu k e}{\sqrt{1-e^2}} \quad (\text{A.11})$$

En este punto restan 2 problemas por resolver. El primero es, ¿cómo calcularemos $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$? El segundo problema es, una vez que tengamos resuelto lo anterior, ¿cómo despejaremos a en función de e para así obtener la ley de estructura? Ambos problemas los resolvemos con métodos numéricos sencillos.

Para deducir $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$ simplemente calcularemos numéricamente el cociente incremental así:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \simeq \frac{\Delta \mathcal{R}}{\Delta e} = \frac{\mathcal{R}(e + \Delta e) - \mathcal{R}(e)}{\Delta e} \quad (\text{A.12})$$

Esto lo haremos para cada valor de e teniendo fijo el resto de las variables, es decir, $a = a_{nom}$ ¹, ϖ y σ .

En cuanto a la ecuación A.11, la resolveremos con un método iterativo partiendo de $a = a_{nom}$. Como puede observarse, hay 2 maneras de despejar a . Resulta que una sola consigue que el método converja y es la siguiente:

$$a_{i+1} = a_p \left(a_i \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e} \frac{\Delta \mathcal{R}}{\Delta e} + \frac{k}{k_p} \right) \quad (\text{A.13})$$

donde i es un índice que hace referencia al i -ésimo paso de la iteración.

¹Esto en realidad constituye otra aproximación más, pero como ya vimos, no afecta demasiado al valor de la función perturbadora promediada.

Apéndice B

Recursos y material complementario

B.1. Programas utilizados

En un repositorio del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias colocamos los principales programas utilizados (la mayoría escritos en Fortran y Python) a lo largo de esta tesis. El link del repositorio es el siguiente: <http://www.astronomia.edu.uy/repositoryPons/>

En la tabla [B.1](#) los mencionamos y hacemos una breve descripción de su propósito referenciando algunas de las gráficas de este documento donde fueron de utilidad para generar los resultados mostrados en las mismas.

En el repositorio se encuentra un manual que explica de manera muy breve como usarlos. Esperamos que esto junto con los comentarios en los códigos sean de ayuda suficiente para que el lector pueda utilizarlos correctamente, si así lo desea. Dejo mi e-mail por consultas: juan.pons.93@aroba@gmail.com.

B.2. Recopilación de mapas

En el mismo repositorio mencionado en la sección anterior colocamos una recopilación de gráficos que complementan los expuestos en este documento. El objetivo de esta recopilación es facilitar al lector como se vería un cierto caso de su interés. Por esta razón, la recopilación trata de ser lo más abarcativa posible. No obstante, se pueden utilizar los programas descritos en la sección anterior para ingresar el o los sistema(s) deseado(s) para su modelado y simulación.

Nombre del código	Lenguaje	Propósito
ncorp11.out	F95	Realizar las integraciones numéricas imponiendo una variación muy lenta en a o e para explorar las familias de ACRs.
Familia_ACR.ipynb	Python	Graficar las familias de ACR. Ejemplo: figura 4.3.
evorb15.exe	F77	Realizar las integraciones numéricas del caso restringido.
Graficos_compactos_EVORB15_mapas.ipynb	Python	Generar gráficos como el de la figura 3.1 y 3.2.
Hasigma5.out	F77	Cálculo de la superficie \mathcal{H} en el caso restringido.
H_surface_evorb.ipynb	Python	Gráfico de la superficie \mathcal{H} vs. integraciones numéricas en el caso restringido. Ejemplo: figura 3.4.
plaresPoincare_secV4.out	F77	Cálculo de la superficie \mathcal{H} en el caso general.
H_surface_planet_int.ipynb	Python	Gráfico de la superficie \mathcal{H} vs. integraciones numéricas en el caso general. Ejemplo: figura 4.27.
LeyDeEstructuras.ipynb	Python	Cálculo numérico de la ley de estructura.
mapaBasico.exe	F77	Construcción de un mapa dinámico.
MapaDinamico.ipynb	Python	Gráfico de un mapa dinámico como el de la figura 4.25.
Integrador_2planetas.ipynb	Python	Integrador basado en REBOUND utilizado en el caso general.
plano_ew_evorb.ipynb	Python	Código para graficar curvas de nivel de $\mathcal{R}(e, \varpi)$ vs. integraciones numéricas, como por ejemplo la figura 4.4c).
ResonalyzerV5.out	F77	Cálculo de \mathcal{R} haciendo un barrido según e , ϖ y σ .
AM.ipynb	Python	Gráficos de $\mathcal{AM}_{norm}(e_1, e_2)$. Ejemplo: figura 4.26.
CentrosLibracion.ipynb	Python	Gráficos de los σ_c . Ejemplo: figura 3.3.
plaresPoincare.out	F77	Cálculo de $\mathcal{R}(\sigma)$.
Graficas_plares.ipynb	Python	Gráficos de $\mathcal{R}(\sigma)$ y curvas de nivel de $\mathcal{H}(a, \sigma)$, como la de la figura 2.2.

Tabla B.1: Principales programas utilizados a lo largo de la tesis. F77 y F95 hacen referencia a Fortran 77 y Fortran 95 respectivamente.