

# Espectro del charmonium y su relación con la masa del gluon

**Tesis de Maestría**

por

**Anaclara Alvez**

bajo la orientación de la **Dra. Marcela Peláez**, presentada a PEDECIBA como parte  
de los requerimientos para obtener el título de

**Magíster en Física**

en la *Universidad de la República*.

**Fecha de la defensa:** **Miembros del tribunal:**

*24 de agosto de 2022*

Dr. Raúl Donangelo

Dra. Lucía Duarte

Dr. Guzmán Hernández

Dr. Arturo Lezama

Dra. Marcela Peláez

**Suplente:**

Dr. Gonzalo De Polsi



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



**cap** COMISIÓN  
ACADÉMICA  
DE POSGRADO



# Agradecimientos

Quiero agradecer primero a Marcela por su apoyo y su paciencia a lo largo de este trabajo. A Nicolás por guiarme los primeros meses cuando comencé este proyecto. A mis profesores y compañeros del IFFI, de quienes aprendí mucho de física, de ciencia y de mucho más. A mi familia, porque nunca habría llegado hasta acá sin ellos. A Santiago por todo lo que compartimos durante este proyecto.

Agradezco también a la Comisión Académica de Posgrado por financiar este trabajo y a la ANII por financiar el proyecto del grupo de investigación en el que se desarrolló.

# Resumen

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos que describe la interacción nuclear fuerte, que es la responsable de unir los protones y neutrones para formar los núcleos atómicos. La QCD describe la interacción entre quarks y gluones –partículas elementales que se unen formando estados ligados denominados hadrones, entre ellos los protones y neutrones. Recuperar las propiedades de los hadrones a partir de la interacción entre quarks y gluones es uno de los objetivos fundamentales de QCD, aunque esta tarea no es sencilla.

En esta tesis nos centramos en tratar de predecir la masa de un par quark-antiquark charm, que recibe el nombre de charmonium. Para este propósito usaremos el modelo de Curci–Ferrari. Dicho modelo incluye gluones masivos, a diferencia del Lagrangiano estándar de QCD. Este modelo ha permitido estudiar perturbativamente el régimen infrarrojo de QCD. A pesar de las diversas interrogantes a resolver, la hipótesis de gluones masivos está en acuerdo con los estudios numéricos más precisos de QCD en el infrarrojo, y en trabajos anteriores, ha permitido reproducir con gran precisión diversas funciones de correlación.

En este trabajo buscamos poner a prueba el modelo de Curci–Ferrari para el cálculo de observables físicos. Para esto estudiamos el espectro del charmonium. El charmonium es un mesón que suele ser no relativista debido a que los quarks que lo componen son bastante masivos. Por este motivo, su espectro ha sido calculado con un alto grado de precisión resolviendo la ecuación de Schrödinger. La dificultad de este procedimiento yace en decidir cuál debe ser el Hamiltoniano de interacción.

Usamos la aproximación de Born en el modelo de Curci–Ferrari para el cálculo de este potencial, e intentamos motivarla a partir de la ecuación de Bethe–Salpeter para el estudio de estados ligados no relativistas. Presentamos el espectro con correcciones finas para varios estados del charmonium y comparamos con los valores experimentales para ajustar los parámetros libres del modelo, entre ellos la masa del gluón, para la cual obtuvimos un valor de ajuste de 130 MeV.

# Abstract

Quantum Chromodynamics (QCD) is the quantum field theory that describes the strong nuclear interaction, which is responsible for binding together protons and neutrons to form atomic nuclei. QCD describes the interaction between quarks and gluons – elementary particles that form bound states called hadrons, such as protons and neutrons. Recovering hadronic properties from the interaction between quarks and gluons is one of the fundamental objectives of QCD, but it is not an easy task.

In this thesis we focus on trying to predict the mass of a charm quark-antiquark pair named charmonium using the Curci–Ferrari model. The Curci–Ferrari model includes massive gluons, by contrast with the standard QCD Lagrangian. This model allows for a perturbative treatment of the infrared regime of QCD. Despite the numerous questions we have yet to answer, the massive gluon hypothesis is in agreement with the most precise numerical studies of infrared QCD, and in previous works has been shown to reproduce with great accuracy various correlation functions.

Here we seek to test the Curci–Ferrari model for the determination of physical observables. To this end, we study the spectrum for charmonium. Charmonium is usually a non-relativistic meson, due to the fact that its constituent quarks are rather heavy. For this reason, its spectrum has been calculated with reasonable accuracy by solving the Schrödinger equation. The difficulty in this procedure is to find the correct interaction Hamiltonian.

In this work we use the Born approximation in the Curci–Ferrari model to calculate the interaction potential, and we try to motivate this from the Bethe–Salpeter equation, which is the standard equation for the study of non-relativistic bound states. We present the spectrum with fine corrections for several charmonium states and we compare with experimental values to adjust the free parameters in our model, among them the gluon mass, for which we find a fitting value of 130 MeV.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Cromodinámica Cuántica</b>	<b>3</b>
1.1. Simetría del color . . . . .	3
1.2. Teorías gauge no abelianas . . . . .	4
1.3. Lagrangiano de Fadeev–Popov . . . . .	6
1.4. Modelo de Curci–Ferrari . . . . .	7
1.5. Reglas de Feynman . . . . .	9
<b>2. Estados ligados no relativistas</b>	<b>12</b>
2.1. Estados ligados de dos partículas y el átomo de hidrógeno . . . . .	12
2.2. Correcciones al espectro del hidrógeno . . . . .	15
2.3. Aproximación de Born para QED . . . . .	18
<b>3. De lo relativista a lo no relativista</b>	<b>22</b>
3.1. Masa de estados ligados en teorías cuánticas de campos . . . . .	22
3.2. Aproximación ladder . . . . .	23
3.2.1 Diagrama box . . . . .	24
3.2.2 Diagrama cruzado . . . . .	26
3.3. Ecuación de Bethe–Salpeter . . . . .	27
3.4. De Bethe–Salpeter a la ecuación de Schrödinger . . . . .	30
3.5. Correcciones a primer orden . . . . .	33
<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Potencial de interacción para el charmonium . . . . .	36
4.1.1 Amplitud de scattering . . . . .	36
4.1.2 Cálculo de la transformada de Fourier . . . . .	39
4.2. Cálculo perturbativo de las correcciones del espectro . . . . .	42
4.3. Métodos numéricos . . . . .	47
4.4. Resultados numéricos . . . . .	50
4.4.1 Orbital $1s$ . . . . .	50
4.4.2 Orbital $2p$ . . . . .	52
4.4.3 Ajuste global . . . . .	54
<b>Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

**ÍNDICE GENERAL**

**V**

<b>Apéndice A. Cálculo del propagador del gluon</b>	<b>63</b>
<b>Apéndice B. Soluciones de la ecuación de Dirac en el límite no relativista</b>	<b>65</b>
<b>Apéndice C. Detalle del cálculo de transformadas de Fourier</b>	<b>68</b>
<b>Apéndice D. Código en Python</b>	<b>71</b>



# Introducción

La materia usual está constituida por átomos, que a su vez se componen de electrones, protones, y neutrones. Los últimos dos no son partículas elementales, sino que están formadas por partículas aún más pequeñas denominadas quarks. La Cromodinámica Cuántica (QCD, por su sigla en inglés) es la teoría física que describe la interacción fuerte, que es la responsable de unir los quarks para formar otras partículas, y de mantener unidos los núcleos atómicos.

Esta teoría comenzó a formularse en la segunda mitad del siglo XX, cuando los avances en la física experimental permitieron descubrir un gran número de partículas antes desconocidas. Al clasificar estas nuevas partículas según su masa, carga eléctrica e isospín, en un esquema denominado “camino óctuple”, Gell-Mann notó ciertas simetrías que sugerían fuertemente que la mayoría de estas partículas estaban formadas por componentes más pequeños a los que denominó *quarks*. En 1964, Gell-Mann y Zweig publicaron independientemente artículos postulando el modelo de quarks, que incluía tres variedades de quarks —*sabores*, como se denominó luego al número cuántico que los distingue—, *up*, *down*, y *strange*. El Modelo Estándar de la física de partículas incluye en la actualidad seis sabores de quarks: el *charm*, *top*, y *bottom*, descubiertos posteriormente debido a que son más pesados y más difíciles de producir en los aceleradores de partículas, se agregaron a los tres propuestos originalmente. Los quarks y sus respectivas antipartículas, los antiquarks, se combinan para formar partículas no elementales denominadas *hadrones*. Entre los hadrones se encuentran los *bariones*, partículas formadas por tres quarks como los protones y neutrones, y los *mesones*, que son partículas formadas por un quark y un antiquark.

Para poder describir cómo se constituyen los hadrones y para explicar varios resultados experimentales, fue necesario incluir en la descripción de los quarks un número cuántico denominado *color*, que puede tomar tres valores diferentes *rojo*, *azul*, y *verde*. QCD es la teoría que describe la dinámica del color, que da lugar a la interacción que se denominó fuerte por ser de mayor intensidad que las demás interacciones fundamentales conocidas. Desde el punto de vista de teoría cuántica de campos, la simetría que obedece el color y a partir de la cual se construye QCD es la del grupo SU(3). Así como la interacción electromagnética entre partículas cargadas descrita por la Electrodinámica Cuántica (QED) es mediada por los fotones, que son los cuantos del campo electromagnético, la interacción fuerte entre quarks es mediada por partículas que se denominan *gluones*. A diferencia de los fotones que no tienen carga eléctrica, los gluones sí tienen una carga de color. Existen ocho tipos de gluones independientes que se distinguen según su color, correspondientes a los ocho generadores del grupo de simetría SU(3).

Una primera dificultad para la teoría de las interacciones fuertes es el hecho de que los quarks y gluones no aparecen sueltos en la naturaleza, sino que se encuentran

siempre formando hadrones<sup>1</sup>. Esta propiedad se denomina *confinamiento*, y se puede expresar como la condición de que los estados observables deben ser invariantes bajo transformaciones de color, o “blancos”. Para poner a prueba la teoría debemos entonces poder predecir las propiedades de los hadrones y describir sus interacciones. ¿Pero cómo se pueden determinar las propiedades de los hadrones a partir de las interacciones entre quarks y gluones? Si bien no hay una respuesta completa a esta pregunta, hay muchos observables físicos calculables que han permitido dar confirmación experimental a la QCD.

En primer lugar, muchas secciones eficaces y tasas de decaimiento medibles en colisionadores de partículas pueden calcularse gracias a una propiedad de la teoría que se denomina *libertad asintótica* [Pol73; GW73; tHo99]. A escalas de altas energías —el régimen ultravioleta— la interacción fuerte se vuelve más débil. Esto permite realizar cálculos perturbativos por medio de los métodos usuales en teoría cuántica de campos. Sin embargo, a bajas energías existe un régimen comúnmente denominado no perturbativo. En este régimen la constante de acoplamiento de QCD, parámetro que determina la fuerza de la interacción, diverge según los cálculos perturbativos usuales. Este régimen contiene las escalas de energía de la masa de la mayoría de los hadrones.

Se han desarrollado varias alternativas a la teoría de perturbaciones usual para realizar cálculos analíticos en el régimen no perturbativo, pero no existe en general una justificación totalmente satisfactoria de los métodos utilizados. Por otro lado, sí se ha explorado este régimen por medio de simulaciones numéricas en el lattice, que consisten en una discretización del espacio-tiempo donde diversas cantidades físicas se pueden calcular por simulaciones Monte Carlo [Lep98; DR21; MM94]. Dichas simulaciones nos abren camino a conocer más sobre el comportamiento infrarrojo de QCD, sin embargo, sólo pueden ser aplicadas a las funciones de correlación más simples porque demandan mucho poder de cómputo.

El cálculo en el lattice del propagador del gluón sugiere que esta partícula se comporta como una partícula masiva a bajas energías en el gauge de Landau. G. Curci y R. Ferrari habían trabajado en los años 70 una teoría de Yang-Mills con mediadores masivos [CF76a]. Una teoría de Yang Mills corresponde a un modelo sin fermiones con simetría  $SU(N)$ , un caso más general de QCD libre (sin quarks). Esta teoría fue abandonada al no lograr resolver ciertas dificultades encontradas [CF76b]. En vista de los resultados del lattice, las ideas de Curci y Ferrari fueron retomadas en una serie de trabajos de Matthieu Tissier y Nicolás Wschebor [TW10; TW11]. La masa del gluón permite hacer cálculos de forma analítica en la región infrarroja, aportando a la mejor comprensión del comportamiento de QCD en estas escalas de energía.

En esta tesis buscamos calcular el espectro del charmonium, un mesón compuesto por un quark y un antiquark charm ( $c\bar{c}$ ), trabajando sobre los resultados previos en el modelo de Curci–Ferrari. Tomaremos como parámetros libres la masa del gluón y la constante de acoplamiento de QCD.

---

<sup>1</sup>La teoría predice también la existencia de partículas denominadas *glueballs*, compuestas únicamente por gluones, pero su existencia aún no ha sido confirmada experimentalmente.

# Cromodinámica Cuántica

## 1.1. Simetría del color

Las teorías cuánticas de campos se construyen a partir de las simetrías observadas para las interacciones que pretenden describir. Las consideraciones a tener en cuenta para determinar la simetría de las interacciones fuertes son [HM08; Mut98]:

- a. El confinamiento; los quarks sólo se observan en la naturaleza formando hadrones (estados ligados de quarks y gluones).
- b. La construcción de la función de onda para hadrones como el barión  $\Delta^{++}$ , que está compuesta por tres quarks *up* idénticos, requiere un número cuántico adicional —el color— que pueda tomar al menos tres valores diferentes para respetar el principio de exclusión de Pauli.
- c. Algunos resultados experimentales requieren que el número de colores sea exactamente 3. Entre ellos están la sección eficaz de procesos de aniquilación electrón-positrón donde se producen hadrones, y la tasa de decaimiento de  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .
- d. Se observan usualmente en la naturaleza hadrones formados por tres quarks o por un quark y un antiquark, pero no otras combinaciones como por ejemplo dos quarks o dos antiquarks<sup>1</sup>.

Estas restricciones, junto con algunas consideraciones matemáticas, determinan que el grupo de simetría de QCD debe ser  $SU(3)$ . Los estados de los quarks pertenecen a la representación fundamental de  $SU(3)$ , que podemos denotar  $\mathbf{3}$ , y los estados de los antiquarks pertenecen a la representación conjugada  $\mathbf{3}^*$ .

Para obtener el confinamiento, los estados de hadrones deben ser singletes de color, es decir, deben pertenecer a la representación trivial de dimensión  $\mathbf{1}$  de  $SU(3)$ . Si observamos la descomposición de  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*$  en representaciones irreducibles

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \quad (1.1.1)$$

<sup>1</sup>En la última década se ha hallado también evidencia experimental de la existencia de tetraquarks y pentaquarks, hadrones formados por combinaciones de cuatro y cinco quarks y antiquarks.

vemos que podemos escribir la función de onda de un mesón, como un elemento del producto tensorial quark-antiquark perteneciente al singlete de color **1**. El singlete aparece también en la descomposición

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}, \quad (1.1.2)$$

por lo que podemos obtener también funciones de onda para bariones que sean invariantes bajo transformaciones de color.

Además de poder reproducir el confinamiento para mesones y bariones, si observamos la descomposición de otros productos de dos o tres quarks o antiquarks, como  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  o  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*$ , se puede ver que el singlete no aparece en ninguno de ellos. Esto explica por qué no observamos por ejemplo partículas compuestas por dos quarks, o por dos antiquarks [Mut98].

Los gluones, mediadores de la interacción fuerte, están asociados a los generadores del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$  del grupo  $SU(3)$ , que son las matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los elementos del grupo  $SU(3)$  se obtienen de las matrices de Gell-Mann tomando la exponencial

$$U = e^{i\theta^k(x)\lambda_k/2}, \quad (1.1.3)$$

donde los parámetros  $\theta$  pueden ser funciones del espacio-tiempo que representamos con la coordenada  $x$ . A menudo se trabaja con los generadores  $t^a = \lambda^a/2$ , aunque por convención se da la definición de las matrices de Gell-Mann.

## 1.2. Teorías gauge no abelianas

El grupo  $SU(3)$  es un grupo *no abeliano*, es decir que los generadores del álgebra de Lie asociada no conmutan. Vamos a describir brevemente cómo construir una teoría clásica de campos a partir de un grupo de Lie genérico. Consideremos entonces un grupo de Lie simple  $G$  con  $N$  generadores  $t^a$ . El grupo queda determinado por las relaciones de conmutación entre sus generadores, que se pueden escribir como

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (1.2.1)$$

donde hay una suma implícita en el índice repetido  $c$ . Las constantes  $f^{abc}$  se denominan *constantes de estructura*. Para los generadores  $t^a$  de  $SU(3)$ , las constantes de estructura son

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \\ f^{147} &= f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2} \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

con  $f^{abc}$  totalmente antisimétricas. Las constantes que no se pueden obtener por antisimetrización de (1.2.2) son cero.

Queremos obtener una teoría de campos con la simetría del grupo  $G$ , con un campo fermiónico —que en QCD corresponderá a los quarks— en la representación fundamental de  $G$ . El Lagrangiano de nuestra teoría debe ser invariante bajo transformaciones de  $G$ , por lo que buscamos qué términos podemos agregar que cumplan esta condición. Una verificación más detallada de la invariancia del Lagrangiano que escribiremos a continuación se puede ver en [Pes95].

El campo de los fermiones transforma como

$$\psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x) \quad (1.2.3)$$

bajo la acción del grupo de simetría. Se puede mostrar que podemos construir un término invariante de color e invariante de Lorentz para el Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x), \quad (1.2.4)$$

donde se define la derivada covariante como

$$D_\mu = \partial_\mu - igt^a A_\mu^a, \quad (1.2.5)$$

con  $A_\mu^a$  el campo de gauge (que corresponde al gluón), y  $g$  la constante de acoplamiento entre  $\psi$  y  $A_\mu^a$ . Para que el término (1.2.4) sea invariante, es necesario que el campo de gauge transforme como

$$t^a A'_\mu{}^a = U(t^a A_\mu^a - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (1.2.6)$$

El término que involucra únicamente los campos de gauge y es invariante si aplicamos la regla de transformación (1.2.6), se puede escribir como

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.2.7)$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.2.8)$$

Tenemos entonces un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x). \quad (1.2.9)$$

En teoría clásica de campos, podemos agregar más términos de órdenes superiores en  $\psi$  y  $A_\mu^a$ , que sean invariantes bajo transformaciones de color e invariantes de Lorentz. Al cuantizar la teoría, sin embargo, la condición de que la teoría debe ser renormalizable y tiene la simetría de conjugación de carga determina que los términos de (1.2.9) son los únicos términos relevantes que debemos conservar [Pes95].

### 1.3. Lagrangiano de Fadeev–Popov

Volvemos ahora al caso particular de QCD, donde el grupo de simetría es  $SU(3)$ . Los métodos más estándar utilizados para cuantizar teorías de campos son el formalismo canónico, y el formalismo de las integrales de camino o integrales funcionales [Wei95]. Este último tiene la ventaja de conservar explícitamente la simetría de gauge, ya que usa el Lagrangiano clásico. Para poder cuantizar la teoría es necesario fijar el gauge, para lo cual se utiliza usualmente el procedimiento de Fadeev–Popov [FP67]. El Lagrangiano que se obtiene por este medio es

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) + (\partial^\mu \bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (1.3.1)$$

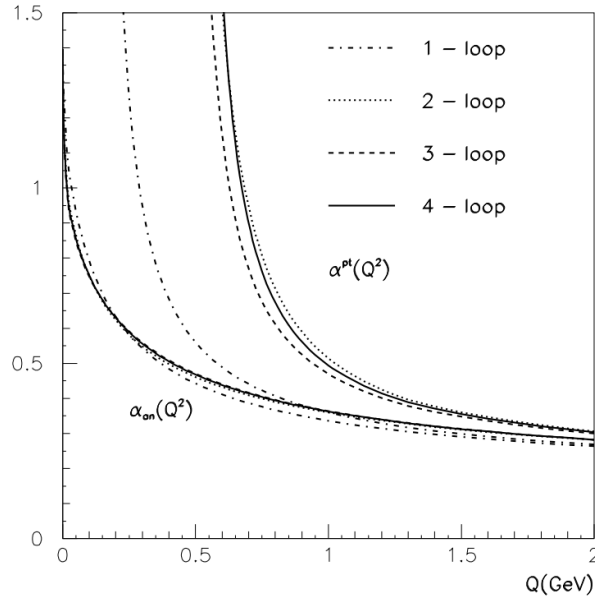
Observamos que debido a la fijación de gauge aparecen dos términos adicionales en el Lagrangiano. El primero de ellos involucra un campo  $c^a$  denominado *ghost*. Este campo no representa partículas reales; de hecho no verifica el teorema de correspondencia estadística-espín, porque es un campo anticonmutativo pero tiene un propagador bosónico. Sin embargo, se pueden tratar como partículas adicionales a la hora de derivar las reglas de Feynman.

El otro término que se agrega al Lagrangiano es el término de fijación de gauge, ya que el parámetro  $\xi$  que aparece en él se puede elegir de forma arbitraria para terminar de fijar el gauge. Algunas elecciones comunes para  $\xi$  son el gauge de Feynman  $\xi = 1$ , y el gauge de Landau  $\xi \rightarrow 0$ , que equivale a tomar  $\partial^\mu A_\mu^a = 0$ . Tomaremos este último en las reglas de Feynman que vamos a utilizar en este trabajo.

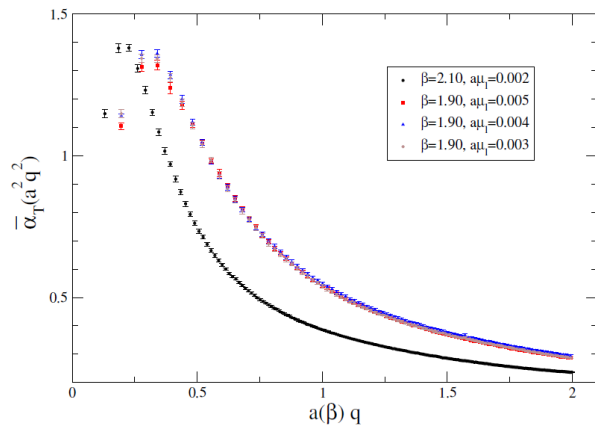
El Lagrangiano de Fadeev–Popov ha tenido éxito para predecir las propiedades de las interacciones fuertes a altas energías, lo cual da un indicio de que QCD es la teoría de campos correcta para describir dichas interacciones. Sin embargo, en el régimen infrarrojo presenta un problema fundamental. La constante de acoplamiento, que es el parámetro que ordena el desarrollo perturbativo en teoría de campos, diverge a escalas del orden de 1 GeV, aproximadamente la masa del protón (ver figura 1.1). El procedimiento de Fadeev–Popov no es entonces compatible con la posibilidad de aplicar la teoría de perturbaciones en el infrarrojo.

Una posible explicación de esta falla es el hecho de que el método de Fadeev–Popov, que implica imponer una condición de fijación de gauge sobre los campos, asume que esta condición tiene una solución única. Sin embargo esta hipótesis no está justificada, y en el infrarrojo de hecho no es válida: distintas configuraciones de los campos son soluciones de la condición de fijación de gauge. A estas soluciones múltiples se les denomina *copias de Gribov* [Gri78]. La existencia de estas copias implica que el gauge no queda fijado correctamente al utilizar el procedimiento de Fadeev–Popov a bajas energías.

Ante la ausencia de un método completamente justificado para fijar el gauge, se desarrollaron varias alternativas no perturbativas para estudiar el régimen de bajas energías, como el enfoque de Schwinger–Dyson [Sch51; Dys49]. Aún así, el método mejor controlado para explorar el régimen infrarrojo continua siendo por medio de simulaciones numéricas en el lattice [MM94]. Los resultados del lattice muestran un resultado esperanzador para la constante de acoplamiento. A escalas del orden de 0,5 GeV, esta parece alcanzar un valor máximo y volver a decrecer para energías menores (figura 1.2, ver también [Blo+12; Bou+14]). Esto apunta a que aún puede ser posible hallar una forma de hacer teoría de perturbaciones en el infrarrojo.



**Figura 1.1:** Divergencia de la constante de acoplamiento para QCD en el régimen infrarrojo. Figura extraída de [PRS07], original de [Ale03].

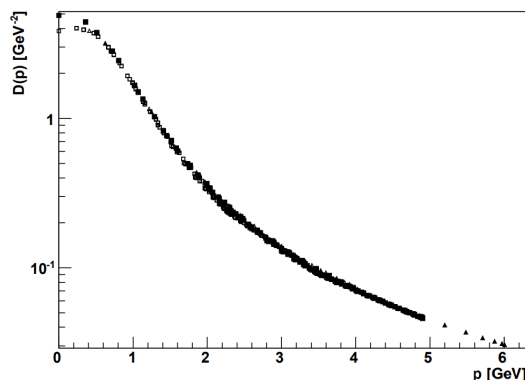


**Figura 1.2:** Constante de acoplamiento calculada en el lattice para dos discretizaciones diferentes del espacio. Se observa que la constante de acoplamiento no diverge, sino que alcanza un valor máximo y luego comienza a decrecer nuevamente al disminuir la energía. Figura extraída de [DR21].

## 1.4. Modelo de Curci-Ferrari

Además de la no divergencia de la constante de acoplamiento, en las simulaciones del lattice aparece otro resultado diferente al encontrado por Fadeev-Popov. El propagador del gluón se comporta a bajas energías como el de una partícula masiva, tomando un valor distinto de cero cuando  $p \rightarrow 0$ . En la figura 1.3 se muestra este resultado.

La idea de una teoría con gluones masivos ya había sido explorada décadas atrás por



**Figura 1.3:** Propagador del gluón en las simulaciones en el lattice. Figura extraída de [CMM06].

G. Curci y R. Ferrari [CF76a; CF76b], pero fue descartada debido a que el Lagrangiano con un término de masa para el gluón rompe la simetría BRST [Oji82; Boe+96], que permite construir el espacio de estados y probar que la teoría es renormalizable para el caso de Fadeev–Popov. Curci y Ferrari dieron una prueba de la renormalizabilidad, pero observaron que el modelo no era unitario, y existían estados de norma negativa.

Si los campos de esta teoría describieran directamente a una partícula observable (como por ejemplo los electrones si habláramos de la interacción electrodébil), el modelo de Curci–Ferrari debería ser descartado por no ser unitario. Sin embargo este razonamiento no puede aplicarse a QCD debido al confinamiento. El espacio físico real debe estar constituido únicamente por estados sin color, que son los únicos que se encuentran en la naturaleza. Pero resulta que los estados de norma negativa descritos en [Oji82] pueden descartarse imponiendo el confinamiento y la invariancia de gauge [Boe+96]. Por lo tanto, no se puede descartar que exista una forma de construir un subespacio físico consistente con el confinamiento y la unitariedad al mismo tiempo dentro del marco de la teoría de Curci–Ferrari.

El Lagrangiano de Curci–Ferrari en el gauge de Landau para QCD es

$$\mathcal{L}_{\text{CF}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) + (\partial^\mu \bar{c}^a)D_\mu^{ab}c^b + ih^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{m^2}{2}A^{a\mu}A_\mu^a. \quad (1.4.1)$$

Si bien no existe aún una demostración totalmente justificada de cuál es el procedimiento correcto para fijar el gauge, creemos que la fijación de gauge tiene como consecuencia principal la aparición de un término de masa para los gluones en el Lagrangiano, que es el término proporcional a  $m^2$  en (1.4.1). Este término hace que los cálculos en el infrarrojo no sean tan problemáticos debido a que la masa actúa como regulador. Mas aún, la presencia de la masa asegura que la constante de acoplamiento no diverge [Cd79], como se observa en las simulaciones numéricas. Debido a que la constante de acoplamiento se mantiene en valores moderados se han realizado cálculos perturbativos a primer y segundo orden que mostraron muy buena concordancia con los resultados obtenidos de forma experimental [PTW13; PTW14; Gra+19].

Las reglas de Feynman en el modelo de Curci–Ferrari son esencialmente las mismas que las que se derivan del Lagrangiano de Fadeev–Popov, con la excepción de que el

propagador del gluón tiene la forma del de una partícula masiva

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = \frac{\delta^{ab}}{q^2 - m^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (1.4.2)$$

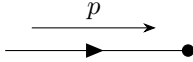
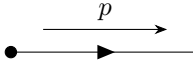
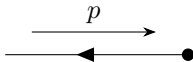
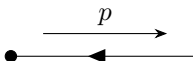
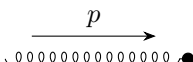
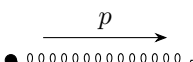
La deducción de esta expresión se puede ver en el apéndice B.

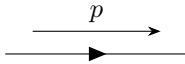
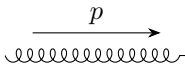
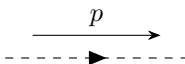
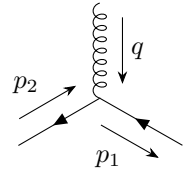
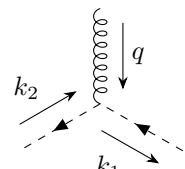
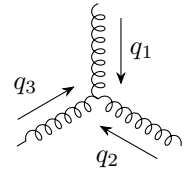
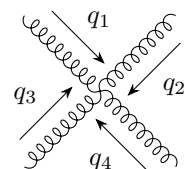
Las implicancias de agregar un término de masa del gluón han sido estudiadas mediante el Lagrangiano de Curci–Ferrari especialmente en el estudio de funciones de correlación (cantidades no directamente observables). Como hemos mencionado, dichos estudios dan muy buenos resultados cuando son comparados con los resultados de las simulaciones numéricas. Resulta muy interesante poder estudiar la influencia de la masa del gluón directamente en observables físicos. Por esta razón, este trabajo tiene como objetivo analizar el espectro de masas de mesones pesados. Los mesones pesados son de carácter no relativista, por lo cual su espectro, como veremos más adelante, puede ser obtenido resolviendo una ecuación de Schrödinger. En esta tesis estudiaremos en particular el espectro de masas del charmonium, estado ligado de un quark charm y un anti-charm. Elegimos este mesón porque su masa es suficientemente grande como para estar en el límite no relativista, pero no tan grande como las de mesones que contienen quarks bottom, para los cuales la masa del gluón puede ser completamente despreciada.

## 1.5. Reglas de Feynman

En esta sección presentamos las reglas de Feynman que vamos a utilizar a lo largo de este trabajo. Para ver una deducción detallada consultar por ejemplo [Pes95; Wei95; Mut98]. A continuación se muestran las convenciones utilizadas para cada elemento de los diagramas.

Los estados fermiones y antifermiones entrantes y salientes se describen mediante los espinores  $u^s(p)$  y  $v^s(p)$ , que son las soluciones a la ecuación de Dirac correspondientes a partículas y antipartículas, y se agrega además un vector  $b$  de tres componentes asociado al color, que se escribe en la base  $\{r, b, g\}$ . Los gluones entrantes y salientes tienen además del vector de polarización  $\epsilon(p)$  un vector de ocho componentes  $a^\alpha$ , correspondiente a los ocho gluones de la teoría.

fermión entrante:	$u^s(p)b$	
fermión saliente:	$\bar{u}^s(p)b^\dagger$	
antifermión entrante:	$\bar{v}^s(p)b^\dagger$	
antifermión saliente:	$v^s(p)b$	
gluón entrante:	$\epsilon_\mu(p)a^\alpha$	
gluón saliente:	$\epsilon^*(p)a^{\alpha*}$	

propagador del fermión:	$\frac{i(p+M)}{p^2-M^2+i\varepsilon}$	
propagador del gluón:	$\frac{i\delta^{ab}}{p^2-m^2+i\varepsilon} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$	
propagador del ghost:	$\frac{i\delta^{ab}}{p^2+i\varepsilon}$	
vértice quark-gluón:	$ig\gamma^\mu t^a$	
vértice ghost-gluón:	$-gf^{abc}q^\mu$	
vértice de tres gluones:	$gf^{abc} [\eta^{\mu\nu}(q_1 - q_2)^\rho + \eta^{\nu\rho}(q_2 - q_3)^\mu + \eta^{\rho\mu}(q_3 - q_1)^\nu]$	
vértice de cuatro gluones:	$-ig^2 \left[ f^{abe} f^{cde} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \right. \\ \left. + f^{ace} f^{bde} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \right. \\ \left. + f^{ade} f^{bce} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}) \right]$	

Además, debemos imponer la conservación de momento en cada vértice, y agregar una integral  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$  sobre cada momento interno que no quede determinados (uno por cada loop en el diagrama).

El factor de simetría total para un diagrama se calcula multiplicando los siguientes factores:

1. Un factor  $-1$  por cada loop de un fermión
2. Un factor  $(-1)^v/v!$ , donde  $v$  es el número de vértices
3. Un factor  $1/3!$  por cada vértice de tres gluones
4. Un factor  $1/4!$  por cada vértice de cuatro gluones

5. Un factor  $v!/v_1!v_2!v_3!$  para los diagramas con tres tipos de vértices diferentes, donde los  $v_i$  son los números de vértices de cada tipo
6. El factor de simetría dado por el teorema de Wick, que cuenta el número de diagramas isomorfos que pueden dibujarse [Pes95].

La autointeracción del campo del gluón, propiedad que distingue a QCD de teorías abelianas como QED, se muestra en la existencia de los vértices de tres y cuatro gluones. Es importante recordar que las líneas del ghost siempre deben ser internas al diagrama, ya que no representa un estado físico.

## Estados ligados no relativistas

En este capítulo tratamos esquemáticamente un caso más sencillo y más frecuente en la literatura de cálculo del espectro de estados ligados, que es el cálculo de las correcciones finas al espectro del hidrógeno. Presentaremos primero una descripción fenomenológica de estas interacciones, y luego mostraremos cómo es posible obtenerlas a partir de la electrodinámica cuántica (QED), que es la teoría cuántica de campos que describe la interacción electromagnética.

### 2.1. Estados ligados de dos partículas y el átomo de hidrógeno

En mecánica cuántica no relativista, cualquier sistema físico de una partícula está descrito por una función de onda cuya evolución está dada por la ecuación de Schrödinger. Los estados ligados de dos partículas son aquellos en los que la función de onda está localizada en una región del espacio. El átomo de hidrógeno aparece muy a menudo en la literatura introductoria como ejemplo paradigmático de estudio de estados ligados, en primer lugar porque tiene soluciones exactas, y en segundo lugar porque estas soluciones son una buena aproximación a las mediciones experimentales del espectro. Comenzaremos describiendo el tratamiento de este sistema clásico siguiendo el desarrollo en el capítulo VII de [CDL91a].

El estudio de un sistema de dos partículas cuyo potencial de interacción sólo depende de la distancia entre ellas se puede reducir al estudio de una única partícula ficticia en un potencial central. Si el sistema está descrito por un Hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (2.1.1)$$

donde  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  son los operadores de posición y momento de la partícula  $i$ , podemos reescribir  $H$  como

$$H = \frac{\mathbf{p}_G^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r), \quad (2.1.2)$$

donde  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa reducida, y

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{p}_G &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p} &= \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}.\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

Pero el término

$$H_G = \frac{\mathbf{p}_G^2}{2M} \quad (2.1.4)$$

conmuta con

$$H_r = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r), \quad (2.1.5)$$

por lo que se pueden diagonalizar en una misma base de vectores propios. El término  $H_G$  tiene la forma de la energía de una partícula libre y corresponde al movimiento del centro de masa. El Hamiltoniano relativo  $H_r$  es el que tiene interés a la hora de hallar estados ligados del sistema, y describe una partícula de masa  $\mu$  sujeta a un potencial central  $V(r)$ .

El átomo de hidrógeno se puede describir en una primera aproximación como un estado ligado electrón-protón donde la interacción es coulombiana y las partículas son no relativistas, de modo que la dinámica está determinada por la ecuación de Schrödinger. Despreciaremos también en esta primera aproximación toda interacción debido al espín de las partículas. El Hamiltoniano relativo es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}. \quad (2.1.6)$$

En este caso, la masa reducida puede aproximarse por la masa del electrón  $m_e$  con un error muy pequeño. Escribimos la ecuación de Schrödinger en la representación de posición, utilizando de ahora en más unidades  $\hbar = c = 1$ . Sustituimos  $\mathbf{p} \mapsto i\nabla$

$$\left[ -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (2.1.7)$$

A su vez, el laplaciano actuando sobre la función de onda se puede reescribir en términos del operador de momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  como

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(\mathbf{r})) - \frac{\mathbf{L}^2}{r} \psi(\mathbf{r}), \quad (2.1.8)$$

entonces obtenemos

$$-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(\mathbf{r})) + \left[ \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r} - \frac{e^2}{r} \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (2.1.9)$$

Como el potencial tiene simetría esférica, se puede mostrar que el Hamiltoniano conmuta con todas las componentes del momento angular. Entonces, existe una base de autoestados de  $H$ ,  $\mathbf{L}^2$ , y  $L_z$  de la forma

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (2.1.10)$$

donde los  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  son armónicos esféricos, que tienen valores propios  $\ell(\ell + 1)$  de  $\mathbf{L}^2$ , con  $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ , y valores propios  $m$  de  $L_z$ , con  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$ . De la ecuación (2.1.9) para los autoestados  $\psi_{n\ell m}(\mathbf{r})$  de la base obtenemos entonces la siguiente ecuación para la parte radial de la función de onda

$$\left[ -\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\ell(\ell + 1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \right] R(r) = ER(r). \quad (2.1.11)$$

Esta ecuación puede resolverse en cada subespacio dado por  $\ell$  y  $m$  fijos, ya que  $H$  conmuta con  $\mathbf{L}^2$  y con  $L_z$ . Notamos además que el operador actuando sobre  $R(r)$  no depende de  $m$ , por lo que podemos etiquetar a las funciones radiales como  $R_{n\ell}(r)$ . Definiendo la función  $u_{n\ell}(r)$  como

$$u_{n\ell}(r) = rR_{n\ell}(r), \quad (2.1.12)$$

la ecuación (2.1.11) queda

$$\left[ -\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell + 1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u_{n\ell}(r) = E_{n\ell} u_{n\ell}(r). \quad (2.1.13)$$

Se puede ver también que la condición inicial que debemos imponer para obtener estados ligados es  $u_{n\ell}(0) = 0$ .

Afortunadamente, la ecuación (2.1.13) se puede resolver de forma analítica. Los valores propios que se encuentran reproducen el espectro del modelo de Bohr

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2}, \quad (2.1.14)$$

con  $n = 1, 2, \dots$ , y  $E_I = \frac{1}{2}\alpha_f^2\mu$ , donde  $\alpha_f$  es la constante de estructura fina

$$\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}. \quad (2.1.15)$$

La constante  $E_I$  es denominada energía de ionización, ya que representa la energía de ligadura para el estado fundamental del hidrógeno. Además, para un  $n$  dado los valores posibles de  $\ell$  son  $0, 1, \dots, n - 1$ , y como  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$ , cada nivel de energía tiene una degeneración igual a

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2. \quad (2.1.16)$$

Se puede hallar también una fórmula recursiva que permite obtener las funciones de onda radiales. Los primeros estados, normalizados y etiquetados según los valores de  $n$ ,

$\ell, m$ , son

$$\begin{aligned}
\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \\
\psi_{2,0,0}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\
\psi_{2,1,1}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{i\phi} \\
\psi_{2,1,0}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta \\
\psi_{2,1,-1}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{-i\phi}, \tag{2.1.17}
\end{aligned}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{m_e \alpha_f} \tag{2.1.18}$$

es el radio de Bohr.

Se puede ver que las funciones de onda para un  $n$  dado se hallan localizadas en una distancia del orden de  $r_n = n^2 a_0$ , que es el radio de órbita que predice el modelo de Bohr para la energía correspondiente.

Comúnmente se utiliza para denotar los subespacios con un  $n$  y  $\ell$  dado (denominados *orbitales*) la notación espectroscópica, donde el subespacio se escribe como un número que se corresponde con el número cuántico  $n$ , y una letra que corresponde al  $\ell$ . Para el valor 0 de momento angular se utiliza la  $s$ , para el 1 la  $p$ , el 2 la  $d$ , etc. Entonces el estado fundamental corresponde por ejemplo al orbital  $1s$ , los estados  $\{2, 1, m\}$  al orbital  $2p$ , y así sucesivamente. Adoptaremos en lo que sigue dicha notación.

## 2.2. Correcciones al espectro del hidrógeno

En la sección anterior modelamos el átomo de hidrógeno suponiendo una interacción coulombiana entre el electrón y el protón. En realidad, ambas partículas son relativistas y tienen espín, por lo que la interacción es más compleja. Sin embargo, el valor esperado de la velocidad para las primeras energías del espectro es de orden

$$v = \left\langle \frac{|\mathbf{p}|}{\mu} \right\rangle \sim \alpha_f \ll 1, \tag{2.2.1}$$

por lo que es esperable que los efectos relativistas no sean demasiado grandes. Esto permite en un segundo nivel de aproximación incluirlos de forma perturbativa, como correcciones al espectro y a las funciones de onda que obtuvimos resolviendo la ecuación de Schrödinger, sin necesidad de considerar una ecuación relativista. En esta sección listaremos los términos que incluiremos a primer orden en un desarrollo perturbativo siguiendo el desarrollo en el capítulo XII de [CDL91b], dando una motivación fenomenológica de por qué debemos incluirlos. Veremos más adelante que estos términos se recuperan en el límite no relativista de la ecuación de Bethe–Salpeter.

En primer lugar, agregaremos una corrección relativista a la energía cinética. Por simplicidad, consideraremos que el protón es infinitamente pesado, de modo que está en reposo en el referencial del centro de masa, y la partícula relativa coincide con el electrón. La energía del electrón es

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2} \quad (2.2.2)$$

entonces si desarrollamos en potencias de  $\mathbf{p}^2/m_e^2$ , obtenemos a segundo orden

$$E = m_e + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^2} + \dots \quad (2.2.3)$$

Si comparamos el término en  $\mathbf{p}^4$  con el término en  $\mathbf{p}^2$ , vemos que la diferencia en el orden es

$$\frac{\mathbf{p}^4/8m_e^2}{\mathbf{p}^2/2m_e} = \frac{\mathbf{p}^2}{4m_e^2} \sim \alpha_f^2. \quad (2.2.4)$$

Adicionalmente se puede mostrar que los términos del Hamiltoniano sin perturbar

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} \quad (2.2.5)$$

son del mismo orden, por lo que

$$W_{mv} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3} \quad (2.2.6)$$

es mucho más pequeño que  $H_0$ . Por otro lado, los términos siguientes en el desarrollo de la energía serán de mayor orden en  $\alpha_f$  que  $W_{mv}$ . Utilizando este cálculo como motivación, consideraremos un desarrollo de las correcciones en  $\alpha_f^2$ <sup>1</sup>, siendo  $H_0$  el orden 0, y conservaremos sólo los términos hasta el primer orden, que darán las correcciones más relevantes al espectro.

Una segunda corrección es la que surge de la interacción del espín del electrón con el campo magnético que debe existir en su referencial de reposo por estar moviéndose en el campo eléctrico del protón. Esta corrección se denomina interacción espín-órbita, y tiene la forma

$$W_{SO} = \frac{1}{2m_e^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.2.7)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el operador de espín del electrón. Esta expresión se obtiene de suponer una energía de interacción de la forma

$$W = -\mathbf{M}_S \cdot \mathbf{B} \quad (2.2.8)$$

entre el momento magnético del electrón  $\mathbf{M}_S = \frac{q}{m_e} \mathbf{S}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$ , calculando este último por un boost de Lorentz a partir del campo eléctrico en el sistema donde el electrón está en movimiento. Nótese que aquí el campo electromagnético es tratado de forma clásica.

<sup>1</sup>Admitiremos por ahora sin demostración que no hay términos de orden  $\alpha_f$ .

Como los operadores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  son de orden 1, este término es también de orden  $\alpha_f^2$  si lo comparamos con el potencial de Coulomb

$$\frac{e^2/2m_e^2r^3}{e^2/r} = \frac{1}{2m_e^2r^2} \sim \frac{1}{2m_e^2a_0^2} = \frac{e^4}{2} \sim \alpha_f^2. \quad (2.2.9)$$

Hay una tercera corrección denominada término de Darwin, cuyo origen resulta menos evidente, que es de la forma

$$W_D = \frac{1}{8m_e^2} \nabla^2 V(r). \quad (2.2.10)$$

Este término aparece por un “esparcimiento” del potencial, ya que el electrón es afectado no sólo por el valor del campo eléctrico en un punto, sino también por su valor en un entorno pequeño del orden de su longitud de Compton.

El Laplaciano del potencial de Coulomb es proporcional a una delta de Dirac, por lo que el valor del término de Darwin es proporcional al cuadrado de la función de onda en el origen, que es distinto de cero sólo para los estados con momento angular nulo. Para dichos estados es del orden  $|\psi(0)|^2 \sim 1/a_0^3$ . El orden de magnitud para el término de Darwin es entonces

$$\frac{\pi e^2/2m_e^2a_0^3}{e^2/r} \sim \frac{\pi}{2m_e^2a_0^2} = \frac{\pi e^4}{2} \sim \alpha_f^2. \quad (2.2.11)$$

La suma de estos tres términos se llama el Hamiltoniano de estructura fina

$$W_f = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3} + \frac{e^2}{2m_e^2r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \frac{\pi e^2}{2m_e^2} \delta^3(r). \quad (2.2.12)$$

Además de estas correcciones, existen otros términos de orden  $\alpha_f^2$  que provienen de interacciones que involucran el espín del protón. Sin embargo, vamos a ver que están suprimidas por una cantidad del orden del cociente  $\frac{m_e}{M_p}$  entre las masas del electrón y el protón.

En primer lugar hay una interacción espín-órbita para el protón, que es de la forma

$$W_{SOp} = -\frac{e^2}{m_e M_p r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{I}, \quad (2.2.13)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el operador de espín del protón. Si comparamos el orden con el del término espín-órbita del electrón, vemos que es

$$\frac{e^2/(m_e M_p r^3)}{e^2/(m_e^2 r^3)} = \frac{m_e}{M_p} \sim 0,0005, \quad (2.2.14)$$

es decir que es del orden de 1000 veces más chico que el Hamiltoniano de estructura fina.

Tenemos también la interacción dipolo-dipolo entre los espines de las dos partículas, que es de la forma

$$W_{dd} = -\frac{e^2}{m_e M_p r^3} [3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}], \quad (2.2.15)$$

donde  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Es claro que este término es del mismo orden que el anterior, ya que el operador entre paréntesis rectos es de orden 1.

Por último hay una corrección denominada término de contacto, que tiene su origen en considerar que el protón no es una partícula puntual, entonces el campo magnético que genera en su interior es diferente al que genera en su exterior. Por este motivo, la interacción dipolo-dipolo se ve modificada donde las funciones de onda del protón y el electrón se superponen. Este término tiene la forma

$$W_c = -\frac{8\pi e^2}{3m_e M_p} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \delta^3(r). \quad (2.2.16)$$

Comparándolo con el término de Darwin que también es proporcional a la delta de Dirac, vemos que es de orden

$$\frac{8\pi e^2/3m_e M_p}{\pi e^2/2m_e^2} = \frac{16}{3} \frac{m_e}{M_p} \sim 0,003, \quad (2.2.17)$$

por lo que también está suprimido respecto a  $W_f$  por un factor del orden de 1000.

La suma de estos términos se denomina Hamiltoniano de estructura hiperfina

$$W_{hf} = -\frac{e^2}{m_e M_p r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{I} - \frac{e^2}{m_e M_p r^3} [3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}] - \frac{8\pi e^2}{3m_e M_p} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \delta^3(r). \quad (2.2.18)$$

A pesar de que  $W_{hf}$  es del mismo orden en  $\alpha_f$  que  $W_f$ , podemos en una aproximación más gruesa considerar sólo este último, que aportará una corrección más significativa al espectro.

$W_f$  y  $W_{hf}$  agotan todas las correcciones de orden  $\alpha_f^2$  que podemos incluir para el átomo de hidrógeno, donde suponemos al protón en reposo por ser mucho más pesado que el electrón. En la sección siguiente trataremos el caso de partículas con masas similares, deduciendo el potencial de interacción a orden  $\alpha_f^2$  a partir de la teoría relativista.

Las correcciones al espectro del hidrógeno se calculan utilizando la teoría de perturbaciones independiente del tiempo. Para ello debemos diagonalizar cada término en la base de autoestados de  $H_0$ , y luego calcular los elementos de matriz de la diagonal. Este procedimiento es sencillo en los orbitales  $1s$ ,  $2s$ , y  $2p$ , y se obtiene como resultado que  $W_f$  y  $W_{hf}$  eliminan parcialmente la degeneración de estos niveles de energía, obteniendo un conjunto de niveles muy cercanos a la primera energía de  $H_0$  pero con pequeñas diferencias entre ellos, y lo mismo para la segunda energía. Este efecto se observa experimentalmente con gran precisión.

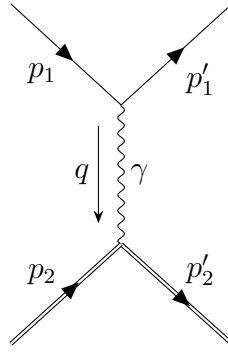
## 2.3. Aproximación de Born para QED

Hasta ahora hemos obtenido un potencial motivado fenomenológicamente para la interacción de dos partículas casi no relativistas, una de ellas muy pesada, mediante un campo electromagnético clásico. Sin embargo, es esperable que el potencial sea más complicado si prescindimos de la hipótesis de que las partículas tienen masas muy diferentes, ya que varios de los argumentos utilizados dejan de ser válidos. Más aún, sabemos

que el campo electromagnético debe ser cuantizado, y la teoría que cuantiza la interacción electromagnética es la Electrodinámica Cuántica (QED). Esta teoría trata además a las partículas de forma relativista. En esta sección vamos a describir, omitiendo los detalles, el procedimiento para deducir el potencial de interacción como un límite no relativista de QED, para obtener de forma sistemática los términos de corrección. Para ello seguiremos los pasos detallados en [LBP82].

La base del procedimiento a seguir es la *aproximación de Born*, que consiste en obtener el potencial de interacción entre dos partículas como la transformada de Fourier de la amplitud de scattering de los diagramas de Feynman a nivel árbol que representan una transición entre estados de esas dos partículas. Las energías de ligadura se hallan después resolviendo la ecuación de Schrödinger con ese potencial.

Vamos a derivar el potencial para dos fermiones diferentes de masas  $m_1$  y  $m_2$  y carga  $-e$ . El diagrama de Feynman en QED que representa una transición entre estados de dos fermiones diferentes es el que se muestra en la figura 2.1.



**Figura 2.1:** Diagrama a nivel árbol en QED para transición entre estados de dos fermiones diferentes.

La amplitud de este diagrama, siguiendo las reglas de Feynman para QED con las convenciones utilizadas en [Pes95] es

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}(p'_1)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)] G_{\mu\nu}(q) [\bar{u}(p'_2)(-ie\gamma^\nu)u(p_2)], \quad (2.3.1)$$

donde  $u(p)$  son los espinores correspondientes a los dos fermiones, soluciones de la ecuación de Dirac, y  $G_{\mu\nu}(q)$  es el propagador del fotón. Vamos a usar las matrices  $\gamma$  en la representación de Dirac, y el propagador del fotón en el gauge de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A}$ )

$$\begin{aligned} G_{00}(q) &= -\frac{i}{\mathbf{q}^2} \\ G_{ij}(q) &= -\frac{i}{\mathbf{q}^2 - \omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right) \\ G_{i0}(q) &= G_{0j}(q) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

donde  $\omega$  es pequeña respecto al momento  $\mathbf{q}$ . Las soluciones a la ecuación de Dirac en el

límite no relativista son de la forma

$$\begin{aligned} u(p) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) w \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} w \end{pmatrix} \\ \bar{u}(p) &= u^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} \left( w^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \quad -w^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Calculamos los factores  $\bar{u}(p) \gamma^\mu u(p)$  que aparecen en la amplitud, conservando en el límite no relativista sólo los términos hasta orden cuadrático en el momento. Para  $\gamma^0$  tenemos

$$\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = 2m w'^\dagger \left\{ 1 - \frac{\mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}^2}{8m^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{4m^2} \right\} w, \quad (2.3.4)$$

y para los índices espaciales  $\gamma^i$

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m w'^\dagger \left\{ \sigma_i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \sigma_i \right\} w. \quad (2.3.5)$$

Por ende, podemos escribir los órdenes de las componentes de los momentos como

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \alpha_f m \\ p_0 &\sim m + O(\alpha_f^2) m, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

donde  $\alpha_f \ll 1$  es el parámetro que usaremos para ordenar el desarrollo de la amplitud en el límite no relativista. Los órdenes de las componentes del momento intercambiado son

$$\begin{aligned} q_0 &\sim O(\alpha^2) \\ \mathbf{q} &\sim \alpha m. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Vemos en (2.3.4) que el orden más bajo que aparece en la amplitud es  $\frac{1}{\alpha_f^2}$ . Conservamos los términos hasta el orden siguiente,  $\alpha_f^0$ . El término con índices temporales en la amplitud es hasta este orden

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{00} &= -i4m_1 m_2 e^2 w_2'^\dagger w_1'^\dagger \left\{ \frac{1}{\mathbf{q}^2} + \frac{2iq_0^2}{\mathbf{q}^4} - \frac{\mathbf{p}_2'^2 + \mathbf{p}_2^2}{8m_2^2 \mathbf{q}^2} - \frac{\mathbf{p}_1'^2 + \mathbf{p}_1^2}{8m_1^2 \mathbf{q}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2')(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2)}{4m_2^2 \mathbf{q}^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1')(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1)}{4m_1^2 \mathbf{q}^2} \right\} w_1 w_2, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

donde los subíndices en  $\sigma$  indican sobre el espín de qué partícula actúa el operador.

Desarrollando la parte de la amplitud con índices espaciales, que sólo aporta términos

de orden  $\alpha_f^0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{ij} = i4m_1m_2w_2^\dagger w_1^\dagger \left\{ & -\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \frac{\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}'_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \frac{\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} + \right. \\
& + \frac{i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} + \frac{i(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \times \mathbf{p}'_1}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \frac{i\mathbf{p}_2 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q})}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \\
& - \frac{i\mathbf{p}'_2 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q})}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q})}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} - \\
& - \frac{(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1)}{4m_1m_2\mathbf{q}^4} - \frac{(\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1)}{4m_1m_2\mathbf{q}^4} - \\
& \left. - \frac{(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}'_1)}{4m_1m_2\mathbf{q}^4} - \frac{(\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}'_1)}{4m_1m_2\mathbf{q}^4} \right\} w_1w_2. \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

Escribiendo los momentos finales  $\mathbf{p}'_1$  y  $\mathbf{p}'_2$  en términos de los momentos iniciales y del momento transferido  $\mathbf{q}$  y operando obtenemos que la amplitud del diagrama es finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = -4m_1m_2e^2w_2^\dagger w_1^\dagger \left\{ & \frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_1^2} - \frac{1}{8m_2^2} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{m_1m_2\mathbf{q}^2} + \frac{(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1)}{m_1m_2\mathbf{q}^4} + \right. \\
& + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2\mathbf{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{2m_1m_2\mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{2m_1m_2\mathbf{q}^2} - \\
& - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2\mathbf{q}^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{4m_1m_2} + \quad (2.3.10) \\
& \left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)}{4m_1m_2\mathbf{q}^2} \right\} w_1w_2. \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Para obtener la energía de interacción tomamos la transformada de Fourier, sin incluir el factor  $4m_1m_2$ , que no aparece en la definición del potencial dada en el capítulo 2. El resultado es

$$\begin{aligned}
V(r) = & -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2\pi}{2} \left( \frac{1}{8m_1^2} + \frac{1}{8m_2^2} \right) \delta^3(r) + \frac{e^2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1)}{4m_1^2r^3} - \frac{e^2\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2)}{4m_2^2r^3} + \\
& + \frac{e^2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2)}{2m_1m_2r^3} - \frac{e^2\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1)}{2m_1m_2r^3} + \\
& + \frac{e^2}{2m_1m_2} \left\{ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right\} - \\
& - \frac{e^2}{4m_1m_2} \left\{ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{3} \delta^3(r) \right\}. \quad (2.3.12)
\end{aligned}$$

Observamos que se recuperan los términos correspondientes a la interacción espín-órbita, espín-espín, y el término de Darwin del Hamiltoniano fino e hiperfino para el átomo de hidrógeno, con algunos términos adicionales debido a que en este caso las masas de las dos partículas son del mismo orden.

En el siguiente capítulo justicaremos la aproximación de Born para el cálculo del potencial en el límite no relativista en QCD. Varios de los elementos del análisis que haremos son también aplicables a QED, y dan una justificación al menos parcial al desarrollo anterior.

## De lo relativista a lo no relativista

En este capítulo intentaremos justificar la aproximación de Born partiendo de la ecuación relativista para el estudio de estados ligados en teoría cuántica de campos, y analizaremos su extensión a QCD con gluones masivos.

### 3.1. Masa de estados ligados en teorías cuánticas de campos

De forma general, en una teoría cuántica de campos la masa de las partículas observables aparece como la posición del polo en su propagador. En particular la masa de un mesón, es decir de un estado ligado  $|M\rangle$  de un quark y un antiquark, es el polo en el propagador del mesón, y por lo tanto en la amplitud  $\langle M_{\text{in}}|M_{\text{out}}\rangle$  entre dos estados de un mesón, que representamos diagramáticamente como se ve en la figura 3.1.

$$\langle M_{\text{in}}|M_{\text{out}}\rangle = \begin{array}{c} \text{=====} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{=====} \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{=====} \end{array}$$

**Figura 3.1:** Propagador del mesón. El círculo gris representa la suma de todos los diagramas de Feynman posibles correspondientes a la transición  $|M_{\text{in}}\rangle \rightarrow |M_{\text{out}}\rangle$ .

Para determinar la amplitud de scattering, debemos en principio sumar todos los diagramas de Feynman posibles que comienzan y terminan con un estado  $|M\rangle$ . Esta suma no puede hacerse de forma exacta, por lo que vamos a ver cuáles son las contribuciones dominantes al propagador en el entorno de su polo.

Observamos que un propagador de la forma

$$D(p) = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}, \quad (3.1.1)$$

que tiene un polo en la masa  $M$  del mesón, no puede obtenerse sumando un número finito de diagramas, ya que todos ellos son regulares en  $p \neq 0$ . Por lo tanto, será necesario considerar infinitos diagramas para obtener el polo.



Pero imponiendo la condición de que el mesón debe ser un singlete de color, este factor es

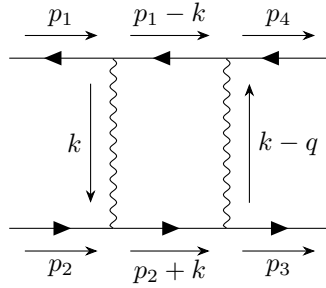
$$f_c = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{r}t^\alpha r + \bar{b}t^\alpha b + \bar{g}t^\alpha g) = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{tr}(t^\alpha) = 0, \quad (3.2.3)$$

por lo que todos los diagramas que comienzan con la aniquilación quark-antiquark tienen amplitud nula, descartando así el último diagrama de la figura 3.3.

Si aplicáramos la teoría de perturbaciones de la manera usual, esperaríamos que la contribución principal sea la del diagrama restante a nivel árbol. Sin embargo, vamos a ver que algunos diagramas pueden estar aumentados en el entorno del polo, invalidando la teoría de perturbaciones usual. En particular, todos los diagramas ladder son del mismo orden que la contribución a nivel árbol, mientras que los demás son de orden menor.

Para ilustrar esto, comparemos el diagrama ladder a un loop con el diagrama cruzado (tercero del lado derecho de la igualdad en la figura 3.3). Por simplicidad, haremos el estudio de los órdenes para QED.

### 3.2.1. Diagrama box



**Figura 3.4:** Diagrama ladder de 1-loop (o diagrama *Box*) en QED.

La amplitud del diagrama box es

$$i\mathcal{M} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{v}(p_1)(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} - \not{p}_1 + M)}{(k - p_1)^2 - M^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\rho)v(p_4) \frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \frac{i\eta_{\rho\sigma}}{(k - q)^2} \\ \times \bar{u}(p_3)(-ie\gamma^\sigma) \frac{i(\not{k} + \not{p}_2 + M)}{(k + p_2)^2 - M^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\nu)u(p_2). \quad (3.2.4)$$

Podemos reescribir los propagadores de los fermiones como

$$\frac{i\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} = \frac{i\not{p} + M}{2E_p} \left( \frac{1}{p^0 - E_p + i\varepsilon} - \frac{1}{p^0 + E_p - i\varepsilon} \right), \quad (3.2.5)$$

donde  $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ . Análogamente, los propagadores de los fotones son

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{2E_k} \left( \frac{1}{k^0 - E_k + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 + E_k - i\varepsilon} \right), \quad (3.2.6)$$

donde  $E_k = |\mathbf{k}|$ , ya que el fotón tiene masa nula. En el límite no relativista, la parte espacial de los momentos internos es mucho más pequeña que la parte temporal, de

modo que podemos escribir  $\mathbf{p} \sim \alpha$ , y  $p^0 \sim M + O(\alpha^2)$ , con  $\alpha$  un parámetro de desarrollo chico, que vamos a suponer del orden de la constante de acoplamiento de la teoría. Para QED, tendremos entonces

$$\alpha_{\text{QED}} \approx \frac{1}{137}, \quad (3.2.7)$$

mientras que para QCD

$$\alpha_{\text{QCD}} \sim \frac{1}{3}. \quad (3.2.8)$$

Este valor permite hacer un desarrollo en órdenes de  $\alpha_{\text{QCD}}$ , aunque al ser considerablemente más grande que  $\alpha_{\text{QED}}$ , el desarrollo a órdenes bajos tendrá un error mayor que en el caso de QED. A continuación escribiremos simplemente  $\alpha$ , que hará referencia a la teoría que corresponda en cada caso.

Las energías son entonces  $E_p \sim M + O(\alpha^2)$ . Entonces el primer propagador fermiónico que aparece en la amplitud 3.2.4 tiene polos en

$$\begin{aligned} k^0 &= E_{1k} + p_1^0 - i\varepsilon \sim 2M \\ k^0 &= p_1^0 - E_{1k} + i\varepsilon \sim O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

mientras que el segundo tiene polos en

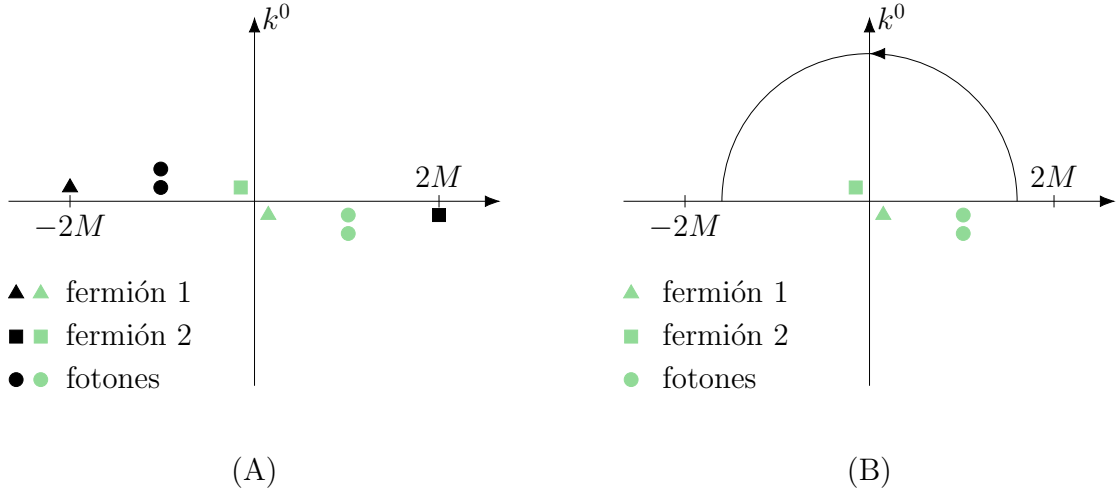
$$\begin{aligned} k^0 &= E_{2k} - p_2^0 - i\varepsilon \sim -O(\alpha^2) \\ k^0 &= -p_2^0 - E_{2k} + i\varepsilon \sim -2M. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Los fotones, al tener masa nula, tienen polos en sus propagadores de orden

$$\begin{aligned} k^0 &= \pm E_k \sim \pm O(\alpha) \\ k^0 &= q^0 \pm E_{k-q} \sim \pm O(\alpha). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

En la figura 3.5 se muestran los polos de los propagadores. Los polos pueden clasificarse según su posición, representando en la posición más cercana al eje vertical el orden  $\alpha^2$ , en la posición intermedia el orden  $\alpha$ , y en la posición más lejana el orden  $2M$ , como se muestra en la figura. Si desarrollamos el integrando de la amplitud, cada término tiene uno de los polos de cada propagador. Los términos dominantes corresponden a tomar los polos de orden  $\alpha^2$  para los propagadores de los fermiones. Podemos entonces tomar para los propagadores de los fotones los polos en el semiplano inferior e integrar en  $k^0$  utilizando el teorema de residuos y cerrando por arriba el semicírculo en el plano complejo.

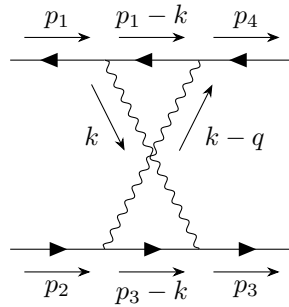
Los dos polos fotónicos y el polo fermiónico en el semiplano inferior quedan evaluados en  $k^0$  de orden  $\alpha^2$ , entonces cada uno de ellos aporta una contribución de orden  $\frac{1}{\alpha^2}$  a la amplitud. Como  $d^3k \sim \alpha^3$  y hay un factor extra de orden  $\alpha^2$  que proviene los vértices, la amplitud es de orden  $\frac{1}{\alpha}$ . Este es el mismo orden del diagrama a nivel árbol, que tiene un propagador de orden  $\frac{1}{\alpha^2}$  del fotón interno, y un factor  $\alpha$  proveniente de los dos vértices. Este análisis puede extenderse a todos los diagramas ladder, viendo que todos ellos son de orden  $\frac{1}{\alpha}$ .



**Figura 3.5:** Esquema de los polos de la amplitud del diagrama box. En verde se muestran las posiciones de los polos en uno de los términos dominantes. En (B) se muestra la curva donde se aplica el teorema de residuos para integrar el término dominante.

### 3.2.2. Diagrama cruzado

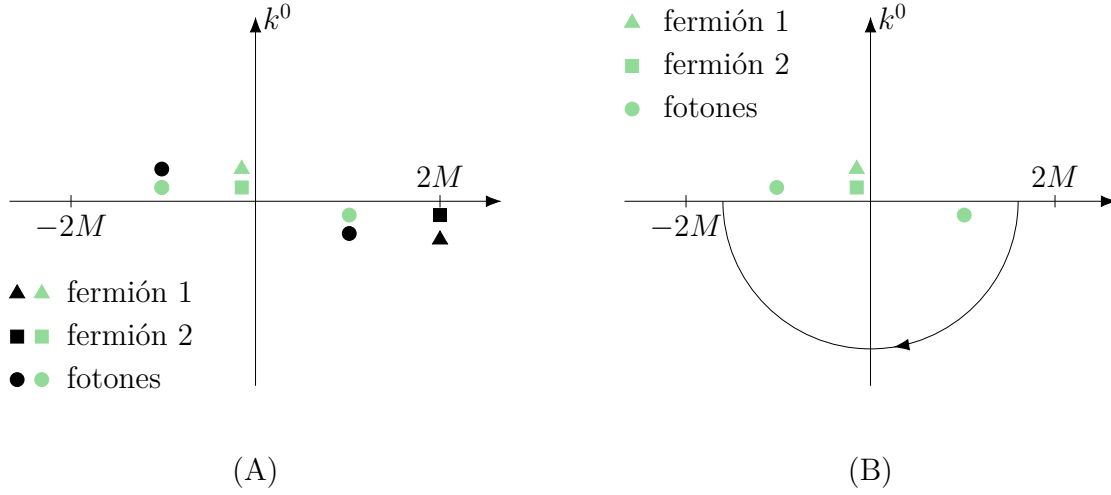
Si repetimos el análisis para el diagrama cruzado (ver figura 3.6), lo único que cambia es que se sustituye  $p_2 + k \mapsto p_3 - k$  en el propagador del segundo fermión. Entonces, ambos propagadores fermiónicos tienen polos de orden  $2M$  en el semiplano inferior, y polos de orden  $\alpha^2$  en el semiplano superior, como se muestra en la figura 3.7. En este caso, la contribución dominante corresponde a tomar el polo de uno de los fotones en el semiplano inferior, y los demás polos en el semiplano superior, e integrar por el teorema de residuos cerrando el semicírculo por abajo.



**Figura 3.6:** Diagrama cruzado de 1-loop en QED.

Como los polos de los fotones son de orden  $\alpha$ , evaluamos el residuo en  $k^0 \sim \alpha$ . Los propagadores de los fermiones y el propagador del fotón restante contribuyen un factor de orden  $\frac{1}{\alpha}$  cada uno. Además, cada fotón contribuye un factor  $\frac{1}{2E_k} \sim \frac{1}{\alpha}$ . Con la contribución de los vértices y de  $d^3k$  el orden total del diagrama es  $\alpha^0$ , por lo que está suprimido en un orden respecto al diagrama ladder.

Este análisis se puede generalizar para los diagramas restantes, y para órdenes supe-



**Figura 3.7:** Esquema de los polos de la amplitud del diagrama cruzado a 1-loop. En verde se muestran las posiciones de los polos en uno de los términos dominantes. En (B) se muestra la curva donde se aplica el teorema de residuos para integrar el término dominante.

riores en el desarrollo en loops y obtendremos que los diagramas dominantes son sólo los del tipo ladder (siendo todos ellos de orden  $\frac{1}{\alpha}$ ). Veremos más adelante que en el límite no relativista, los diagramas ladder para QED dan lugar a la ecuación de Schrödinger con el potencial de Coulomb. Sin embargo, si queremos obtener las correcciones finas e hiperfinas al potencial de Coulomb, debemos ir al orden siguiente en el desarrollo en  $\alpha$ . Esto hace pensar que debemos considerar también los diagramas de orden  $\alpha^0$ , como por ejemplo el diagrama cruzado. Sin embargo, en QCD el diagrama cruzado y la corrección del vértice, que podrían ser de orden  $\alpha^0$ , están suprimidos por un factor  $1/N_c$  [t H93], donde  $N_c$  es el número de colores de la teoría ( $N_c = 3$  para QCD). Esta cantidad típicamente es de orden  $\alpha$ , por lo que al orden deseado podemos no considerar estos diagramas. Con esta motivación vamos a utilizar entonces la aproximación ladder, y vamos a calcular el propagador del mesón sumando únicamente los diagramas ladder.

### 3.3. Ecuación de Bethe–Salpeter

Asumiendo de ahora en más la aproximación ladder, vamos a estudiar la amplitud de estos diagramas. Escribimos la amplitud del diagrama ladder a 1-loop para QCD, explicitando los índices de espín y de color

$$\begin{aligned}
 L_2^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{v}^{s_1}(p_1) c_1^\dagger (i g \gamma^\mu t^\alpha) \frac{i(\not{k} - \not{p}_1 + M)}{(k - p_1)^2 - M^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \times (i g \gamma^\rho t^\gamma) c_4 v^{s_4}(p_4) G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k) G_{\rho\sigma}^{\gamma\delta}(k - q) \\
 &\quad \times \bar{u}^{s_3}(p_3) c_3^\dagger (i g \gamma^\sigma t^\delta) \frac{i(\not{k} + \not{p}_2 + M)}{(k + p_2)^2 - M^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \times (i g \gamma^\nu t^\beta) c_2 u^{s_2}(p_2).
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Vamos a reescribir los propagadores de los fermiones internos utilizando las relaciones

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + M, \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - M, \quad (3.3.2)$$

de modo que

$$\frac{i(\not{p} + M)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{2E_p} \sum_r \left( \frac{u^r(p)\bar{u}^r(p)}{p^0 - E_p + i\varepsilon} + \frac{v^r(p)\bar{v}^r(p)}{p^0 + E_p - i\varepsilon} \right). \quad (3.3.3)$$

Una vez reescritos los propagadores de los fermiones, la integral queda separada en cuatro términos, cada uno de ellos con un solo polo para cada propagador fermiónico. En el límite no relativista, como hemos discutido, el término dominante corresponde a tomar el término con un polo en  $p_1^0 - E_{1k} + i\varepsilon$  para el primer propagador, y el que tiene un polo en  $E_{2k} - p_2^0 - i\varepsilon$  en el segundo propagador. Con estas sustituciones y suponiendo que el propagador del gluon es  $G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k) = \delta^{\alpha\beta}G_{\mu\nu}(k)$ , la amplitud es

$$\begin{aligned} L_2^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) &= f_c^{(2)} \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &[\bar{v}^{s_1}(p_1)(ig\gamma^\mu)v^{r_1}(k-p_1)] \times G_{\mu\nu}(k) [\bar{v}^{r_1}(k-p_1)(ig\gamma^\rho)v^{s_4}(p_4)] \\ &\times [\bar{u}^{s_3}(p_3)(ig\gamma^\sigma)u^{r_2}(k+p_2)] G_{\rho\sigma}(k-q) [\bar{u}^{r_2}(k+p_2)(ig\gamma^\nu)u^{s_2}(p_2)] \\ &\times \frac{1}{2E_{1k}2E_{2k}-p_1^0+k^0+E_{1k}-i\varepsilon} \frac{i}{p_2^0+k^0-E_{1k}+i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

donde definimos el factor de color

$$f_c^{(2)} = (c_1^\dagger t^\alpha t^\gamma c_4) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} (c_3^\dagger t^\delta t^\beta c_2). \quad (3.3.5)$$

Si suponemos que el estado inicial y el estado final son singletes de color, y reescribimos los generadores  $t$  en términos de las matrices de Gell-Mann  $\lambda$  como  $t = \frac{\lambda}{2}$ , el factor de color es

$$\begin{aligned} f_c^{(2)} &= \frac{1}{16 \times 3} \sum_{ij} (\lambda^\alpha \lambda^\gamma)_{ij} (\lambda_\gamma \lambda_\beta)_{ji} = \frac{1}{16 \times 3} \text{tr}(\lambda^\alpha \lambda^\gamma \lambda_\gamma \lambda_\alpha) = \frac{16}{9} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

donde utilizamos la identidad  $\lambda^\alpha \lambda_\alpha = \frac{16}{3} \text{Id}$ .

Pero la amplitud del diagrama ladder a nivel árbol es

$$L_1^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = f_c^{(1)} [\bar{v}^{s_1}(p_1)(ig\gamma^\mu)v^{s_4}(p_4)] G_{\mu\nu}(q) [\bar{u}^{s_3}(p_3)(ig\gamma^\nu)u^{s_2}(p_2)], \quad (3.3.7)$$

donde el factor de color es

$$f_c^{(1)} = (c_1^\dagger t^\alpha c_4) \delta_{\alpha\beta} (c_3^\dagger t^\beta c_2) = \frac{1}{4 \times 3} \text{tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) = \frac{4}{3}, \quad (3.3.8)$$

entonces notamos que podemos reescribir la amplitud del diagrama a un loop como

$$L_2^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} L_1^{s_1, s_2, r_2, r_1}(p_1, p_2 \rightarrow k + p_2, k - p_1) \times S(k) L_1^{r_1, r_2, s_3, s_4}(k - p_1, k + p_2 \rightarrow p_3, p_4), \quad (3.3.9)$$

donde definimos el factor  $S(k)$  como

$$S(k) = \frac{1}{2E_{1k}2E_{2k}} \frac{i}{-p_1^0 + k^0 + E_{1k} - i\varepsilon} \frac{i}{p_2^0 + k^0 - E_{1k} + i\varepsilon}. \quad (3.3.10)$$

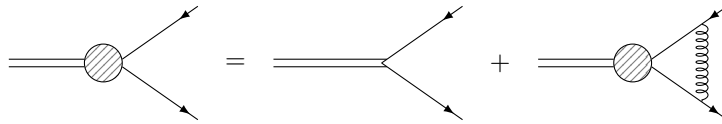
Este resultado se puede generalizar a órdenes superiores, y la amplitud del diagrama ladder de  $n$  loops es

$$L_n^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} L_{n-1}^{s_1, s_2, r_2, r_1}(p_1, p_2 \rightarrow k + p_2, k - p_1) \times S(k) L_1^{r_1, r_2, s_3, s_4}(k - p_1, k + p_2 \rightarrow p_3, p_4). \quad (3.3.11)$$

Utilizando el resultado anterior, podemos obtener una ecuación recursiva para la suma  $L = \sum_n L_n$  de todos los diagramas ladder

$$L^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = L_1^{s_1, s_2, s_3, s_4}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) + \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} L^{s_1, s_2, r_2, r_1}(p_1, p_2 \rightarrow k + p_2, k - p_1) \times S(k) L_1^{r_1, r_2, s_3, s_4}(k - p_1, k + p_2 \rightarrow p_3, p_4). \quad (3.3.12)$$

Este tipo de ecuación, denominada ecuación de Dyson-Schwinger, se puede representar diagramáticamente como se muestra en la figura 3.8.



**Figura 3.8:** Ecuación de Dyson-Schwinger para el vértice del mesón.

La masa del mesón debe aparecer como un polo en esta amplitud de scattering, es decir que  $L$  debe ser de la forma

$$L = \frac{\bar{\psi}^p \psi^p}{p^0 - E_p} + \dots, \quad (3.3.13)$$

donde identificamos el residuo  $\bar{\psi}^p \psi^p$  en el polo con el módulo de la función de onda del mesón, y la energía  $E_p$  es

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathbb{M}^2}, \quad (3.3.14)$$

siendo  $\mathbb{M}$  la masa del mesón. Consideramos un mesón con momento  $p$ , y escribimos los momentos del quark y el antiquark como  $\frac{1}{2}p + q$  y  $\frac{1}{2}p - q$ . Multiplicamos la ecuación 3.3.12 por  $p^0 - E_p$ , renombrando los momentos de esta forma y suponiendo que los

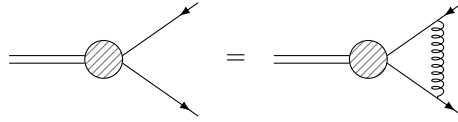
espines son iguales en el estado inicial y el final, y luego hacemos tender  $p^0 \rightarrow E_p$ . El término en  $L_1$  tiende a cero porque no es singular, y en los otros términos obtenemos el residuo en el polo

$$\psi^{s_1, s_2}(q)(p^0 - E_{q_+} - E_{q_-}) = \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \psi^{r_1, r_2}(k)(p^0 - E_{k_+} - E_{k_-}) \times S(k) \mathbb{K}^{r_1, r_2, s_2, s_1}(k, q), \quad (3.3.15)$$

donde el kernel  $\mathbb{K}$  es la amplitud del diagrama ladder a nivel árbol

$$K^{r_1, r_2, s_2, s_1}(k, q) = f_c^{(1)} [\bar{v}^{r_1}(p/2 - k)(ig\gamma^\mu)v^{s_1}(p/2 - q)] G_{\mu\nu}(q - k) \times [\bar{u}^{s_2}(p/2 + q)(ig\gamma^\nu)v^{r_2}(p/2 + k)]. \quad (3.3.16)$$

La ecuación (3.3.15) es la ecuación de Bethe–Salpeter en la aproximación ladder. Se puede representar diagramáticamente como se muestra en la figura 3.9.



**Figura 3.9:** Ecuación de Bethe–Salpeter.

### 3.4. De Bethe–Salpeter a la ecuación de Schrödinger

La ecuación de Bethe–Salpeter se puede resolver para hallar el espectro de un mesón, sin embargo el procedimiento no es sencillo y requiere mucho esfuerzo computacional. Vamos a ver que al orden más bajo del desarrollo en  $\alpha$ , esta ecuación se reduce a una ecuación de Schrödinger, y por lo tanto el problema de hallar el espectro se reduce a un problema de valores propios.

Partimos de la ecuación (3.3.15) y nos situamos en el centro de masa, donde  $\mathbf{p} = 0$ . Tenemos entonces que  $E_{q_\pm} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2} = E_q$ , y vamos a suponer que el kernel  $\mathbb{K}$  hasta el orden deseado no depende de  $k^0$ . Entonces podemos integrar en  $k^0$  utilizando el teorema de residuos, y dado que la única dependencia en esta variable aparece en  $S(k)$ , el resultado es evaluar el residuo de dicha función en el polo  $k^0 = \frac{M}{2} - E_k$ , de donde obtenemos

$$-2\pi i \frac{1}{4E_k^2} \frac{1}{M - 2E_k}, \quad (3.4.1)$$

que cancela el factor  $M - 2E_k$  que estaba multiplicando la función de onda. Aquí usamos que  $p^0 \approx M$ . De la ecuación de Bethe–Salpeter nos queda entonces

$$\psi^{s_1, s_2}(q)(M - 2E_q) = -i \sum_{r_1, r_2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{r_1, r_2}(k) \frac{1}{4E_k^2} \mathbb{K}^{r_1, r_2, s_2, s_1}(k, q), \quad (3.4.2)$$

Para continuar, vamos a ver más explícitamente la forma del kernel. Los espinores, que son soluciones a la ecuación de Dirac, son en el límite no relativista de la forma

forma<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
u^s(p) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) w^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} w^s \end{pmatrix} \\
\bar{u}^s(p) &= u^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w^{s\dagger} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) & -w^{s\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} \\
v^s(p) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} w^s \\ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) w^s \end{pmatrix} \\
\bar{v}^s(p) &= v^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w^{s\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} & -w^{s\dagger} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.4.3}
\end{aligned}$$

donde los  $w^s$  no dependen de  $p$  y están normalizados de modo que  $w^{s\dagger} w^{s'} = \delta_{ss'}$ . Al orden más bajo, tenemos que

$$u^s(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w^s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w^s \end{pmatrix}, \tag{3.4.4}$$

por lo que tomando también el orden más bajo del propagador del gluón, el kernel es a orden  $\frac{1}{\alpha^2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_0(k, q) &= -i f_c^{(1)} g^2 w^{r_1\dagger} w^{s_1} \frac{4M^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} w^{s_2\dagger} w^{r_2} \\
&= -i f_c^{(1)} g^2 \frac{4M^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} \delta_{r_1 s_1} \delta_{s_2 r_2}. \tag{3.4.5}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.4.2) y realizando la suma en los espines obtenemos

$$\psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q})(\mathbb{M} - 2E_q) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \frac{4M^2}{4E_k^2} \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2}, \tag{3.4.6}$$

donde observamos que como el kernel no depende de la componente temporal del momento, la función de onda tampoco. Desarrollaremos por último el factor  $\frac{1}{4E_k^2}$  a orden  $\alpha^0$

$$\frac{1}{4E_k^2} = \frac{1}{4(\mathbf{k}^2 + M^2)} \approx \frac{1}{4M^2}, \tag{3.4.7}$$

y obtenemos a orden  $\frac{1}{\alpha^2}$  en la ecuación (3.4.6)

$$\psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q})(\mathbb{M} - 2E_q) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2}. \tag{3.4.8}$$

Tomamos ahora la transformada de Fourier en  $q$ , definida como

$$\psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \tag{3.4.9}$$

---

<sup>1</sup>La forma de tomar el límite no relativista para los espinores no es única. Una deducción de la expresión que usamos aquí se puede ver en el apéndice B.

Del lado derecho de (3.4.8), desarrollamos el factor que multiplica la función de onda a orden  $\frac{1}{\alpha^2}$

$$E_q \approx M + \frac{\mathbf{q}^2}{2M}, \quad (3.4.10)$$

y definimos la energía de ligadura como

$$E_b = M - 2M, \quad (3.4.11)$$

de modo que la transformada de Fourier es

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q}) \left( E_b - \frac{\mathbf{q}^2}{M} \right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \left( E_b - \frac{\mathbf{p}^2}{M} \right) \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}), \quad (3.4.12)$$

donde escribimos el gradiente en términos del momento  $\mathbf{p} = -i\nabla$ . Por otro lado, tomamos la transformada de Fourier del término izquierdo de (3.4.8)

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.4.13)$$

realizando el cambio de variable  $\mathbf{q} \mapsto \ell = \mathbf{k} - \mathbf{q}$  e integrando en  $\mathbf{k}$  obtenemos

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \frac{1}{\ell^2 + m^2} e^{i\ell\cdot\mathbf{r}} = \left\{ \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \frac{1}{\ell^2 + m^2} e^{i\ell\cdot\mathbf{r}} \right\} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}), \quad (3.4.14)$$

donde sustituimos  $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{p}$  en  $V_1$ , asumiendo que  $\mathbf{p} = -i\nabla$  al actuar sobre la función de onda.

Integramos en las variables angulares en coordenadas esféricas para hacer la transformada de Fourier de los primeros dos términos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} &= 2\pi \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{q^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{iqr \cos\theta} \\ &= \frac{1}{ir} \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} \frac{q}{q^2 + m^2} (e^{iqr} - e^{-iqr}) \\ &= \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} \frac{q}{q^2 + m^2} e^{iqr}. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Para hacer la integral en  $r$ , utilizamos el teorema de residuos cerrando el contorno por el semiplano superior y encerrando el polo del integrando en la posición  $im$ . De esto obtenemos

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}. \quad (3.4.16)$$

Este potencial se denomina potencial de Yukawa.

Juntando las transformadas de Fourier del lado derecho e izquierdo de (3.4.8) obtenemos finalmente

$$E_b \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} \right) \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}). \quad (3.4.17)$$

donde  $\mu$  es la masa reducida  $\mu = \frac{M}{2}$ .

La ecuación (3.4.17) es una ecuación de Schrödinger para la función de onda  $\psi$ , con un Hamiltoniano que contiene el término clásico de la energía cinética más un potencial de interacción del tipo Yukawa. Observamos que si tomamos el límite  $m \rightarrow 0$  y no agregamos el factor de color, el potencial de interacción que obtendríamos es el de Coulomb. Este resultado es el que obtendríamos si hiciéramos el análisis para QED, donde el propagador del fotón a orden más bajo coincide con el del gluón si  $m = 0$ , y el resto del diagrama sólo difiere en el factor de color.

### 3.5. Correcciones a primer orden

Para hallar las correcciones finas e hiperfinas al potencial, debemos ir al orden siguiente en el desarrollo en  $\alpha$ . Vamos a ver que a este orden también podemos obtener una ecuación de Schrödinger partiendo de la ecuación de Bethe–Salpeter. Vamos a utilizar los resultados de esta sección para el cálculo del espectro del charmonium.

Procedemos de forma análoga a la sección anterior, pero en cada paso agregamos un orden al desarrollo. El kernel al orden siguiente tiene un término de la forma

$$\mathbb{K}_1(k, q) = -i f_c^{(1)} 4M^2 V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \delta_{r_1 s_1} \delta_{s_2 r_2}, \quad (3.5.1)$$

donde vamos suponer que el término  $V(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  sólo depende de las componentes espaciales de los momentos. Con esta hipótesis, la función de onda no depende de la componente temporal del momento y tenemos

$$\psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q})(M - 2E_q) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \frac{4M^2}{4E_k^2} \left( \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} + V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right), \quad (3.5.2)$$

Luego, desarrollamos al siguiente orden el factor  $E_k$

$$\frac{1}{4E_k^2} = \frac{1}{4M^2 \left( \frac{\mathbf{k}^2}{M^2} + 1 \right)} \approx \frac{1}{4M^2} \left( 1 - \frac{\mathbf{k}^2}{M^2} \right), \quad (3.5.3)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, conservando sólo los términos hasta el orden  $\alpha^0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q})(M - 2E_q) = & - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \\ & \times \left( \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{M^2((\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2)} + V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Tomamos también un orden más en el desarrollo del término derecho de la ecuación (3.5.4)

$$E_q \approx M + \frac{\mathbf{q}^2}{2M} - \frac{q^4}{8M^3}, \quad (3.5.5)$$

de modo que al hacer la transformada de Fourier tenemos un término cinético adicional

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{q}) \left( E_b - \frac{\mathbf{q}^2}{M} + \frac{q^4}{4M^3} \right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \left( E_b - \frac{\mathbf{p}^2}{M} + \frac{\mathbf{p}^4}{4M} \right) \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}). \quad (3.5.6)$$

Tomamos luego la transformada de Fourier del lado izquierdo de (3.5.4)

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) \times \left( \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{M^2((\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2)} + V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.5.7)$$

y realizando el mismo cambio de variable  $\ell = \mathbf{k} - \mathbf{q}$  que utilizamos antes tenemos

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{\ell^2 + m^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{M^2(\ell^2 + m^2)} + V(\ell, \mathbf{p}) \right) e^{i\ell\cdot\mathbf{r}} = \\ = \left\{ \int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{\ell^2 + m^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{M^2(\ell^2 + m^2)} + V(\ell, \mathbf{p}) \right) e^{i\ell\cdot\mathbf{r}} \right\} \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}), \quad (3.5.8)$$

donde la integral en los primeros dos términos dentro del paréntesis da nuevamente el potencial de Yukawa.

Tenemos finalmente

$$E_b \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}) = \left( H_0 - \frac{g^2 e^{-mr} \mathbf{p}^2}{3\pi M^2 r} - \frac{\mathbf{p}^4}{4M} + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right) \psi^{s_1, s_2}(\mathbf{r}), \quad (3.5.9)$$

donde

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} \quad (3.5.10)$$

es el Hamiltoniano al orden más bajo que teníamos en la sección anterior.

Observamos que las correcciones al Hamiltoniano  $H_0$  se obtienen de la transformada de Fourier de la amplitud del diagrama a nivel árbol para la interacción quark-antiquark, sumando además los términos adicionales en  $\mathbf{p}^2$  y  $\mathbf{p}^4$ . Esto es equivalente a utilizar la aproximación de Born, sumando los términos

$$W_{B-S} = -\frac{g^2 e^{-mr} \mathbf{p}^2}{3\pi M^2 r} - \frac{\mathbf{p}^4}{4M}. \quad (3.5.11)$$

## Resultados

Uno de los desafíos de la física hadrónica es poder comprender la dinámica de mesones y bariones pesados, formados por quarks del tipo charm y bottom. En particular, en este trabajo nos interesamos por el estudio del estado ligado charm-anticharm. Al tener el quark charm una masa menor que el bottom, creemos que estos mesones pueden ser más sensible a la masa del gluón que los compuestos por quarks bottom, siendo además suficientemente pesados para que valga la aproximación de Born. El charmonium  $J/\psi$  fue descubierto en 1974 [Aub+74; Aug+74], y eso abrió la puerta al descubrimiento de otros estados del charmonium [App+75; Swa06; LMS17]. Estos estados ligados pueden describirse con los números cuánticos  $\ell$ ,  $S$ ,  $J$ , representando el momento angular orbital, el espín total, y el momento angular total. En la tabla 4.1 se muestra la clasificación de los primeros estados ligados del charmonium según dichos números cuánticos.

**Tabla 4.1:** Masas de los primeros estados del charmonium, que se clasifican según sus números cuánticos  $n$ ,  $\ell$ ,  $S$ , y  $J$ . Los últimos tres representan el momento angular orbital, el espín total, y el momento angular total.  $n$  indexa las energías a momento angular fijo, de modo que por ejemplo un estado  $1p$  corresponde al primer estado de momento angular  $\ell = 1$ . (Datos obtenidos del PDG).

$n^{2S+1}\ell_J$	Nombre	Masa (GeV)
$1^1s_0$	$\eta_c$	$(2,9834 \pm 0,0005)$
$1^3s_0$	$J/\psi$	$(3,097\,900 \pm 0,000\,006)$
$1^1p_1$	$h_c$	$(3,525\,38 \pm 0,000\,11)$
$1^3p_0$	$\chi_{c0}$	$(3,414\,75 \pm 0,000\,31)$
$1^3p_1$	$\chi_{c1}$	$(3,510\,66 \pm 0,000\,07)$
$1^3p_2$	$\chi_{c2}$	$(3,556\,20 \pm 0,000\,09)$

Los sistemas formados por quarks pesados pueden describirse de forma no relativista mediante la ecuación de Schrödinger. El problema principal yace en encontrar el Hamiltoniano a utilizar. Si bien el objetivo final es deducir el Hamiltoniano a partir de QCD,

esto no se ha logrado hacer desde primeros principios, en particular debido al problema del confinamiento. Sin embargo, la ecuación de Schrödinger ha sido usada a menudo para describir el espectro de los mesones con Hamiltonianos obtenidos de diferentes modelos para la interacción fuerte.

El primer ejemplo es el potencial de Cornell y sus extensiones. El potencial de Cornell consiste en incluir en el potencial coulombiano el factor de color, y agregar un término lineal para modelar el confinamiento

$$V_C = f_c \frac{\alpha_s}{r} + br. \quad (4.0.1)$$

Como el potencial de Cornell no distingue los diferentes estados de espín, [Deb16] estudian las correcciones a dicho potencial incluyendo la interacción espín-espín y espín-órbita, usando tres parámetros libres que son la constante de acoplamiento  $g$ , la masa del quark  $M$ , y el parámetro  $b$  del potencial lineal, denominado *tensión de la cuerda*. En este trabajo logran reproducir bastante bien el espectro.

Para justificar mejor el Hamiltoniano a ser considerado, varios autores utilizan el marco teórico conocido como *Nonrelativistic potential model* [Eic+80], o “QCD no relativista” (NRQCD) [BBL95], que es una teoría efectiva diseñada especialmente para el propósito del cálculo del espectro de mesones no relativistas.

En todos estos casos no se incluye una masa para los gluones. En esta tesis estamos especialmente interesados en estudiar la relevancia de la misma en cantidades observables físicamente debido a las razones expuestas en el capítulo 1. En [GAR21] se utiliza un potencial llamado *contact-interaction* (CI) y las correcciones provenientes del espín para poder concluir que el espectro del charmonium puede recuperarse al considerar masas para los gluones cercanas a 500 MeV. Sin embargo, el potencial CI no se comporta a pequeñas distancias como Cornell.

En este capítulo obtenemos el potencial de interacción quark-antiquark para el charmonium, siguiendo el procedimiento detallado en el capítulo anterior. Luego, resolvemos numéricamente la ecuación de Schrödinger con este potencial al orden más bajo para hallar el espectro, e incluimos perturbativamente las correcciones al siguiente orden. Vale la pena mencionar que en nuestro trabajo no sólo consideramos las correcciones debido a los términos de espín, sino todas las que aparecen de la aproximación de Born.

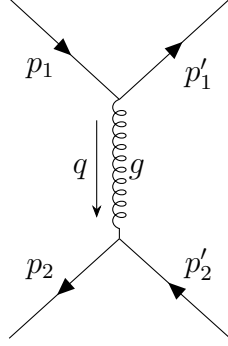
Utilizamos el cálculo numérico del espectro para ajustar los parámetros libres de nuestro modelo, que son la masa del gluón y la constante de acoplamiento de QCD. Estudiamos también el modelo agregando al orden más bajo un potencial lineal [LS89]. Para este caso, ajustamos además el coeficiente del potencial lineal.

## 4.1. Potencial de interacción para el charmonium

### 4.1.1. Amplitud de scattering

Procediendo de forma análoga al desarrollo de la sección 2.3. para QED, vamos a obtener ahora el potencial de interacción quark-antiquark en el límite no relativista de QCD, que está dado por la transformada de Fourier de la amplitud del diagrama 4.1.

El diagrama 4.1 difiere con el diagrama 2.1 en QED estudiado anteriormente en dos aspectos principales. En primer lugar, la partícula intercambiada es un gluón, y las reglas de Feynman que debemos aplicar son las de QCD. Esto introduce en el diagrama un



**Figura 4.1:** Diagrama a nivel árbol en QCD para transición entre estados de un quark y un antiquark.

factor de color, y debemos además sustituir el propagador del fotón por el del gluón, que es en el modelo de Curci–Ferrari una partícula masiva. Segundo, en este caso estamos estudiando la interacción partícula-antipartícula, y no la interacción entre dos partículas como en el caso analizado previamente.

La amplitud del diagrama 4.1 es

$$i\mathcal{M} = \left[ \bar{u}(p'_1) c'_1{}^\dagger (ig\gamma^\mu t^a) c_1 u(p_1) \right] G_{\mu\nu}^{ab}(q) \left[ \bar{v}(p_2) c_2^\dagger (ig\gamma^\nu t^b) c'_2 v(p'_2) \right], \quad (4.1.1)$$

donde tomamos el propagador del gluón de la forma<sup>1</sup>  $G_{\mu\nu}^{ab}(q) = \delta^{ab} G_{\mu\nu}(q)$ , con

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{i}{q^2 - m^2} P_{\mu\nu}^\perp(q), \quad (4.1.2)$$

siendo  $P_{\mu\nu}^\perp(q)$  el proyector transversal

$$P_{\mu\nu}^\perp(q) = \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (4.1.3)$$

Podemos entonces separar el factor de color

$$f_c = (c'_1{}^\dagger t^a c_1) \delta^{ab} (c_2^\dagger t^b c'_2) = \frac{4}{3}. \quad (4.1.4)$$

Utilizamos de nuevo los espinores de la ecuación (2.3.3), y además tenemos ahora las soluciones de la ecuación de Dirac correspondientes a antipartículas, que son de la forma<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} v(p) &= \sqrt{2M} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} w \\ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8M^2}\right) w \end{pmatrix} \\ \bar{v}(p) &= v^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{2M} \left( w^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2M} \quad -w^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8M^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

<sup>1</sup>Una deducción de esta expresión se puede ver en el apéndice A.

<sup>2</sup>El cálculo de estas soluciones se encuentra en el apéndice B.

Calculamos los factores  $\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)$  y  $\bar{v}(p_2)\gamma^\mu v(p'_2)$ , utilizando la conservación del momento y sustituyendo  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}$

$$\begin{aligned}\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1) &= 2Mw'_1{}^\dagger \left\{ 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8M^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4M^2} \right\} w_1 \\ \bar{u}(p'_1)\gamma^i u(p_1) &= 2Mw'_1{}^\dagger \left\{ \frac{2p_{1i} - q_i - i\varepsilon_{ikm}\sigma_{1k}q_m}{4M^2} \right\} w_1 \\ \bar{v}(p_2)\gamma^0 v(p'_2) &= 2Mw'_2{}^\dagger \left\{ 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8M^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4M^2} \right\} w_2 \\ \bar{v}(p_2)\gamma^i v(p'_2) &= 2Mw'_2{}^\dagger \left\{ \frac{2p_{2i} - q_i - i\varepsilon_{ikm}\sigma_{2k}q_m}{4M^2} \right\} w_2.\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

Si observamos los órdenes en el término de la amplitud 4.1.1 que corresponde a la componente 00 del propagador

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_{00} &= 4M^2 g^2 f_c w'_2{}^\dagger w'_1{}^\dagger \left\{ \underbrace{1}_{O(\alpha^0)} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}^2}{8M^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4M^2}}_{O(\alpha^2)} \right\} \underbrace{G_{00}(q)}_{O(\frac{1}{\alpha^2})} \\ &\quad \times \left\{ \underbrace{1}_{O(\alpha^0)} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}^2}{8M^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4M^2}}_{O(\alpha^2)} \right\} w_1 w_2,\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

vemos que el orden más bajo es  $\frac{1}{\alpha^2}$ , proveniente del término  $1 \times G_{00}(q) \times 1$ . En este término, debemos tomar el propagador desarrollado hasta el orden  $\alpha^0$

$$G_{00}(q) = \frac{i}{q^2 - m^2} \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right) \approx \frac{-i}{\mathbf{q}^2 + m^2} \left( 1 + \frac{q_0^2}{\mathbf{q}^2} + \frac{q_0^2}{\mathbf{q}^2 + m^2} \right), \quad (4.1.8)$$

mientras que en el resto podemos conservar sólo el orden más bajo

$$G_{00}(q) \approx -\frac{i}{\mathbf{q}^2 + m^2}. \quad (4.1.9)$$

En este desarrollo utilizamos que  $m \sim \alpha M$ . Esto es cierto para el caso del charmonium, ya que esperamos que la masa del gluón sea del orden de  $\frac{1}{3}$  de la masa del quark charm, pero no es generalizable a mesones más livianos.

La componente  $\mathcal{M}_{00}$  de la amplitud es entonces

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_{00} &= i4M^2 g^2 f_c \left\{ -\frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} \right\}.\end{aligned}\quad (4.1.10)$$

Para la componente  $\mathcal{M}_{ij}$ , como los factores  $\bar{u}(p'_1)\gamma^i u(p_1)$  y  $\bar{v}(p_2)\gamma^i v(p'_2)$  son de orden  $\alpha$ , alcanza con desarrollar el propagador del gluón al orden más bajo

$$G_{ij}(q) = -\frac{i}{\mathbf{q}^2 + m^2} \left( 1 - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right), \quad (4.1.11)$$

con lo cual obtenemos

$$i\mathcal{M}_{ij} = i4M^2g^2f_c \left\{ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{2M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{2M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{q}^2}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} \right\}. \quad (4.1.12)$$

Por último los términos  $\mathcal{M}_{0j}$  y  $\mathcal{M}_{i0}$  son

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{0j} &= i4M^2g^2f_c \left\{ -\frac{q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_2)}{M\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{q_0}{2M(\mathbf{q}^2 + m^2)} \right\} \\ i\mathcal{M}_{i0} &= i4M^2g^2f_c \left\{ -\frac{q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1)}{M\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \frac{q_0}{2M(\mathbf{q}^2 + m^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Queremos dejar expresada la amplitud en términos de los momentos vectoriales  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  para que el Hamiltoniano dependa únicamente de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$ . La elección de cómo fijar  $q^0$  se ha discutido en la literatura [Gro77], y existen varios caminos para obtener  $q^0$  a este orden. Uno de ellos consiste en utilizar que las partículas externas están on shell, aunque esto puede extenderse al caso cuasi-on shell que sería el exigido por la ecuación de Bethe–Salpeter. En [BBL95] se muestra que esta elección no interviene en el cálculo del espectro, por lo cual  $q^0$  suele considerarse cero. En nuestro análisis, considerando las partículas externas casi on shell, también podemos encontrar que a este orden del desarrollo  $q^0$  puede ser cero, por lo cual en este trabajo tomaremos esta descripción. Sin embargo, dejamos planteado para trabajos futuros un análisis más profundo de la relevancia de  $q^0$  en el espectro y su relación con la invariancia de gauge.

Fijando  $q^0 = 0$  y sumando todos los términos, obtenemos finalmente la amplitud del diagrama

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= i4M^2g^2f_c \left\{ -\frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \right. \\ &\quad + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{M^2\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \\ &\quad - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{2M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{2M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{q}^2}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} + \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{4M^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

#### 4.1.2. Cálculo de la transformada de Fourier

Según la aproximación de Born, el potencial de interacción está dado por la transformada de Fourier de la amplitud (4.1.14), sin el factor  $i4M^2$  que aparece multiplicando todos los términos. Observamos que todos los términos que aparecen en la amplitud son

de una de las siguientes formas

$$\begin{aligned} \text{A} : \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} & & \text{D} : \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})}{\mathbf{q}^2 + m^2} \\ \text{B} : \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2 + m^2} & & \text{E} : \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})}{\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} \\ \text{C} : \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m^2} & & \end{aligned}$$

Calculamos primero la transformada del término (A). Integramos en las variables angulares en coordenadas esféricas, denotando ahora el módulo de  $\mathbf{q}$  como  $|\mathbf{q}| = q$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} &= \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{q^2 + m^2} \int d\Omega \sin\theta e^{iqr \cos\theta} \\ &= \frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} (e^{iqr} - e^{-iqr}) \\ &= \frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} e^{iqr} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Para hacer la integral radial usamos el teorema del residuo. Consideramos un semicírculo en el semiplano superior del plano complejo. Dentro de esta región, el único polo que hay es en  $q = im$ . Además la integral en el contorno, cuando el radio del semicírculo tiende a infinito, tiende a la integral sobre la recta real, ya que la parte en el arco tiende a cero exponencialmente porque  $e^{iqr} \rightarrow 0$  para  $q$  con parte imaginaria positiva. Entonces

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{1}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} e^{iqr} = 4\pi^2 i \text{Res}(q = im) = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}. \quad (4.1.16)$$

Este resultado es el potencial de Yukawa.

Observamos que los términos (B) y (C) se pueden escribir como derivadas del potencial de Yukawa respecto a  $\mathbf{r}$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -i\nabla_r \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -i\nabla_r \left( \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \right), \quad (4.1.17)$$

y

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -\nabla_r^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -\nabla^2 \left( \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \right). \quad (4.1.18)$$

Derivando y agregando la singularidad en el Laplaciano de  $\frac{1}{r}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} &= i \left( m + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-mr}}{4\pi r^2} \mathbf{r} \\ \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} &= -\frac{m^2 e^{-mr}}{4\pi r} + \delta^3(r). \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

El término (D) se puede escribir como

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla) \left( \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \right). \quad (4.1.20)$$

El cálculo de la transformada de Fourier para este término se encuentra desarrollado en el apéndice B, y el resultado es

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \delta^3(r) + \left\{ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right\} \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \quad (4.1.21)$$

Por último, podemos calcular la transformada de Fourier del término (E) reescribiendo el denominador como

$$\frac{1}{\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} = \frac{1}{m^2 \mathbf{q}^2} - \frac{1}{m^2(\mathbf{q}^2 + m^2)}. \quad (4.1.22)$$

Tenemos entonces un término de la misma forma de (D), y uno similar pero sin masa. Para este último, utilizamos el resultado de (D) tomando el límite  $m \rightarrow 0$ . Obtenemos que

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + m^2)} = \left\{ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right\} \frac{1}{4\pi} - \left\{ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right\} \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \quad (4.1.23)$$

Aplicando estos resultados a la amplitud de scattering obtenemos el siguiente potencial de interacción

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) = & \left\{ -\frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} - \frac{g^2 m^2 e^{-mr}}{12\pi M^2 r} + \frac{g^2}{3M^2} \delta^3(r) - \right. \\ & - \frac{g^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) e^{-mr}}{12\pi M^2 r^3} (mr + 1) - \frac{g^2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) e^{-mr}}{12\pi M^2 r^3} (mr + 1) + \\ & + \frac{g^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) e^{-mr}}{6\pi M^2 r^3} (mr + 1) + \frac{g^2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) e^{-mr}}{6\pi M^2 r^3} (mr + 1) + \\ & + \frac{g^2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) e^{-mr}}{3\pi M^2 r} - \frac{g^2}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] + \\ & + \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] + \\ & + \frac{g^2 m^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) e^{-mr}}{12\pi M^2 r} - \frac{2g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{9M^2} \delta^3(r) \\ & \left. + \frac{g^2 e^{-mr}}{12\pi M^2} \left[ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] \right\}. \quad (4.1.24) \end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$  en el centro de masa obtenemos el Hamiltoniano para el

charmonium

$$\begin{aligned}
H = & \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{M} - \frac{\mathbf{p}^4}{4M^3} - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} - \frac{g^2 m^2 e^{-mr}}{12\pi M^2 r} + \frac{g^2}{3M^2} \delta^3(r) - \right. \\
& + \frac{g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) e^{-mr}}{4\pi M^2 r^3} (mr + 1) + \frac{g^2}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} \right] - \\
& - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{r^3} (m^2 r^2 + mr + 1) - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] - \\
& - \frac{2g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{9M^2} \delta^3(r) + \frac{g^2 e^{-mr}}{12\pi M^2} \left[ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} (m^2 r^2 + mr + 1) - \right. \\
& \left. - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] \left. \right\}. \tag{4.1.25}
\end{aligned}$$

Es posible que exista una diferencia entre la aproximación de Born y el potencial obtenido en el límite no relativista de la ecuación de Bethe–Salpeter debido al término

$$-\frac{g^2 \mathbf{p}^2 e^{-mr}}{3\pi M^2 r}. \tag{4.1.26}$$

Este término no fue considerado en nuestro análisis, que se basa en la aproximación de Born.

## 4.2. Cálculo perturbativo de las correcciones del espectro

Para determinar la masa del charmonium debemos resolver la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano (4.1.25). Vamos a realizar un tratamiento perturbativo, resolviendo la ecuación para el Hamiltoniano al orden más bajo del desarrollo en  $\alpha$

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r}, \tag{4.2.1}$$

donde  $\mu = \frac{M}{2}$  es la masa reducida, y agregando los demás términos como correcciones de primer orden de la teoría de perturbaciones usual.

Como el potencial en el Hamiltoniano  $H_0$  es central, de forma análoga al caso del átomo de hidrógeno tratado en el capítulo 2 se puede reescribir la ecuación de Schrödinger como

$$\frac{d^2 u_{n\ell}(\rho)}{d\rho^2} = \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2e^{-ma_0\rho}}{\rho} + \lambda_{n\ell}^2 \right] u_{n\ell}(\rho), \tag{4.2.2}$$

donde  $\ell$  es el número cuántico asociado al momento angular orbital y  $n$  es el índice que corresponde a la energía, la variable  $\rho$  es  $\rho = \frac{r}{a_0}$ , y los valores propios asociados a la energía son  $\lambda_{n\ell} = \sqrt{-\frac{E_I}{E_{n\ell}}}$ , con

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{3\pi}{g^2 \mu} \\
E_I &= \frac{g^4 \mu}{2(3\pi)^2}. \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

La condición inicial para la ecuación (4.2.2) es  $u_{n\ell}(0) = 0$ .

Si bien esta ecuación no tiene solución analítica, puede resolverse de forma numérica para hallar el espectro y los estados propios sin correcciones. Luego, vamos a incluir las correcciones de forma perturbativa. La teoría de perturbaciones supone un desarrollo de la forma

$$H = H_0 + \alpha W_1 + \dots, \quad (4.2.4)$$

con  $\alpha$  un parámetro pequeño. Las primeras correcciones a la energía, que provienen del término en  $W_1$ , se calculan como

$$E_1 = \langle n_0 | W_1 | n_0 \rangle, \quad (4.2.5)$$

donde  $\{|n_0\rangle\}$  son los estados propios del Hamiltoniano  $H_0$ , y suponemos que los niveles de energía no tienen degeneración (en caso contrario, debemos diagonalizar  $W_1$  en la base de autoestados de  $H_0$ ).

Al resolver la ecuación de Schrödinger numéricamente, obtenemos además de la energía sin correcciones, los estados propios de  $H_0$  que nos permiten calcular las correcciones de primer orden. Debemos tener cuidado de ver que el potencial sea diagonalizable en la base de estados que elijamos, y calcular las componentes de matriz en la diagonal. Trabajaremos únicamente con los estados  $n = 1, \ell = 0$ , y los primeros estados excitados  $n = 2, \ell = 1$ .

Calculamos en primer lugar la corrección del término cinético

$$T_1 = \left\langle -\frac{\mathbf{p}^4}{4M^3} \right\rangle. \quad (4.2.6)$$

Este término es diagonal en la base  $\{|n, \ell, m, s_1, s_2, m_{s1}, m_{s2}\rangle\}$  de autoestados de la energía, el momento angular orbital y los operadores de espín de las dos partículas. Vamos a calcular entonces los elementos de matriz diagonales en esta base. Notamos que podemos escribir

$$\mathbf{p}^2 = M \left( H_0 + \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} \right), \quad (4.2.7)$$

entonces

$$T_1 = -\frac{1}{4M} \left\{ \langle H_0^2 \rangle + \left\langle \frac{2g^2 e^{-mr}}{3\pi r} H_0 \right\rangle + \left\langle \frac{g^4 e^{-2mr}}{9\pi^2 r^2} \right\rangle \right\}. \quad (4.2.8)$$

Los elementos de la base son autoestados de  $H_0$ , y sus valores propios son las energías  $E_n$ . Para calcular el valor medio de los demás términos, escribimos los estados en la representación de posición, que son de la forma

$$\psi_{n\ell m}(r) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (4.2.9)$$

omitiendo los índices de espín. Como los términos que queremos calcular sólo dependen de  $r$ , y los armónicos esféricos están normalizados, tenemos que

$$T_1 = M \left\{ E_n^2 + \frac{2g^2}{3\pi} E_n \int_0^\infty dr r e^{-mr} |R_{n\ell}(\rho)|^2 + \frac{g^4}{9\pi^2} \int_0^\infty dr e^{-2mr} |R_{n\ell}(\rho)|^2 \right\}. \quad (4.2.10)$$

La siguiente corrección es la del término

$$T_2 = \left\langle -\frac{g^2 m^2 e^{-mr}}{12\pi M^2 r} \right\rangle, \quad (4.2.11)$$

que como es únicamente una función de  $r$ , es de nuevo diagonal en la misma base de estados que el término anterior, por lo que su valor medio es

$$T_2 = -\frac{g^2 m^2}{12\pi M^2} \int_0^\infty dr r e^{-mr} |R_{n\ell}(r)|^2. \quad (4.2.12)$$

De la misma forma, la corrección del término con la delta de Dirac, que se corresponde con el término de Darwin del átomo de hidrógeno, se calcula integrando la delta contra el módulo de la función de onda

$$T_3 = \left\langle \frac{g^2}{3M^2} \delta^3(r) \right\rangle = \frac{g^2}{3M^2} |\psi_{n\ell}(0)|^2. \quad (4.2.13)$$

Las funciones de onda para estados con  $\ell \neq 0$  son nulas en el origen, por lo que esta corrección sólo aparece para los estados  $\ell = 0$ . En el estado fundamental

$$T_3 = \frac{g^2}{12\pi M^2} |R_{10}(0)|^2. \quad (4.2.14)$$

Luego tenemos el término

$$T_4 = \left\langle \frac{g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{L} e^{-mr}}{4\pi M^2 r^3} (mr + 1) \right\rangle, \quad (4.2.15)$$

con  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  el momento angular orbital. Observamos que el valor medio de este término es cero para estados con  $\ell = 0$ . Para  $\ell \neq 0$ , podemos diagonalizarlo en la base de suma de momentos angulares. En primer lugar definimos el operador de suma de espines

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad (4.2.16)$$

donde  $\mathbf{s}_1 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{2}$  y  $\mathbf{s}_2 = -\frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{2}$  son los operadores de espín del quark y el antiquark respectivamente [Tho13]. El operador  $\mathbf{S}$  es un momento angular, y  $\mathbf{S}^2$  tiene valores propios  $S(S+1)$ , con  $S = \{0, 1\}$ . Para los estados con  $S = 0$ , el término de corrección  $T_4$  es nulo. Podemos definir también el momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}, \quad (4.2.17)$$

que toma valores propios entre  $|\ell - S|$  y  $\ell + S$ . Para  $S = 1$  y  $\ell = 1$ , tenemos  $J = \{0, 1, 2\}$ . Podemos reescribir entonces

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{J}^2 - \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2. \quad (4.2.18)$$

Este operador es diagonal en la base de suma de momentos, y tiene valores propios  $J(J+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)$ , que son nulos si  $\ell = 0$ . Para  $\ell = 1$  y  $S = 1$  tenemos

$$T_4 = \frac{g^2}{4\pi M^2} [J(J+1) - 4] \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r} (mr + 1) |R_{21}(r)|^2. \quad (4.2.19)$$

Notamos que los términos anteriores, que no dependen del espín, son también diagonales en la base de momento angular total.

Luego tenemos

$$T_5 = \left\langle \frac{g^2}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} \right] \right\rangle. \quad (4.2.20)$$

Para el término en  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2$  escribimos el momento  $\mathbf{p}$  como  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , y recordamos que según la deducción de la ecuación de Schrödinger para el espectro a partir de la ecuación de Bethe–Salpeter, el momento sólo debe actuar sobre la función de onda. Tenemos que

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2 f(\mathbf{r}) = -r_i r_j \partial_i \partial_j f(\mathbf{r}) = -r^2 \partial_r^2 f(\mathbf{r}). \quad (4.2.21)$$

En el otro término reescribimos  $\mathbf{p}^2$  en términos de  $H_0$  de la misma forma que para  $T_1$ . Entonces

$$T_5 = \frac{g^2}{3\pi M^2 m^2} \left[ M \left( E_n \int_0^\infty \frac{dr}{r} |R_{nl}(r)|^2 + \frac{g^2}{3\pi} \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r^2} |R_{nl}(r)|^2 \right) + 3 \int_0^\infty \frac{dr}{r} R_{nl}(r) \partial_r^2 R_{nl}(r) \right]. \quad (4.2.22)$$

Análogamente el término

$$T_6 = \left\langle -\frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi M^2 m^2} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] \right\rangle \quad (4.2.23)$$

es

$$T_6 = \frac{g^2}{3\pi M^2 m^2} \left[ M \left( E_n \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r} (mr + 1) |R_{nl}(r)|^2 + \frac{g^2}{3\pi} \int_0^\infty dr \frac{e^{-2mr}}{r^2} (mr + 1) |R_{nl}(r)|^2 \right) + 3 \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) R_{nl}(r) \partial_r^2 R_{nl}(r) \right]. \quad (4.2.24)$$

Para los términos

$$T_7 = \left\langle -\frac{2g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{9M^2} \delta^3(r) \right\rangle, \quad (4.2.25)$$

y

$$T_8 = \left\langle \frac{g^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) e^{-mr}}{12\pi M^2 r^3} (m^2 r^2 + mr + 1) \right\rangle, \quad (4.2.26)$$

podemos escribir en la base de suma de espines

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = -2 \left[ \mathbf{S}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 \right], \quad (4.2.27)$$

por lo que el operador es diagonal, con valores propios  $-2 \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right]$ . En esta base tenemos entonces

$$T_7 = \frac{g^2}{9\pi M^2} \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] |R_{nl}(0)|^2, \quad (4.2.28)$$

y

$$T_8 = -\frac{g^2}{12\pi M^2} \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r} (m^2 r^2 + mr + 1) |R_{n\ell}(r)|^2. \quad (4.2.29)$$

Tenemos por último el término

$$T_9 = \left\langle -\frac{g^2 e^{-mr}}{12\pi M^2} \left[ \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right] \right\rangle. \quad (4.2.30)$$

Para este término vamos a usar que para dos operadores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que conmutan entre sí y conmutan con el momento angular orbital y con  $\mathbf{r}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) r^2 f(r) - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) f(r) \right\rangle &= -\frac{\langle r^2 f(r) \rangle}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left\langle 2\mathbf{L}^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \right. \\ &\quad \left. -3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{L}) - 3(\mathbf{b} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Aplicamos esta relación a los operadores de espín

$$\begin{aligned} \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) r^2 f(r) - 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) f(r) \right\rangle &= \frac{4\langle r^2 f(r) \rangle}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left\langle 2\mathbf{L}^2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - \right. \\ &\quad \left. -3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) - 3(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

y vamos a reescribir el operador del lado derecho utilizando que

$$(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})^2 - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})^2 - (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})^2. \quad (4.2.33)$$

Además, utilizando las relaciones de conmutación del momento angular orbital y de las matrices de Pauli

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{L})^2 = \sigma_{1i} L_i \sigma_{1j} L_j = \mathbf{L}^2 + i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L}^2 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{L}, \quad (4.2.34)$$

entonces

$$(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} - \frac{1}{2}\mathbf{L}^2, \quad (4.2.35)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) r^2 f(r) - 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) f(r) \right\rangle &= \frac{4\langle r^2 f(r) \rangle}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left\langle 2\mathbf{L}^2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}\mathbf{L}^2 - \frac{3}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) - 3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Reescribimos luego

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 \right]. \quad (4.2.37)$$

Los valores propios de  $\mathbf{s}_1^2$  y  $\mathbf{s}_2^2$  son  $\frac{3}{4}$ . Además, podemos escribir los productos  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$  en términos de la suma de momentos  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) r^2 f(r) - 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) f(r) \right\rangle &= \frac{4\langle r^2 f(r) \rangle}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left\langle \mathbf{S}^2 \mathbf{L}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2) - \frac{3}{4} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2)^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

El operador del lado derecho es diagonal en la base de momento total. Si queremos escribir el valor medio del término del lado derecho proporcional a  $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \langle 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})f(r) \rangle = & -\frac{4\langle r^2 f(r) \rangle}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left[ S(S+1)\ell(\ell+1) - \right. \\ & -\frac{3}{4} [J(J+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)] - \\ & \left. -\frac{3}{4} [J(J+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)]^2 \right] - \\ & -4 \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \langle r^2 f(r) \rangle \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Podemos escribir finalmente la corrección  $T_9$  como

$$\begin{aligned} T_9 = & \frac{g^2}{12\pi M^2} \left\{ \frac{4}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \left[ S(S+1)\ell(\ell+1) - \right. \right. \\ & -\frac{3}{4} [J(J+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)] - \\ & \left. \left. -\frac{3}{4} [J(J+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)]^2 \right] - 4 \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \right\} \\ & \times \int_0^\infty dr \frac{e^{-mr}}{r} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) |R_{n\ell}(r)|^2. \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Habiendo calculado las correcciones perturbativas, analizaremos su contribución al espectro de forma numérica, y estudiaremos su dependencia en la constante de acoplamiento  $g$  y la masa del gluón  $m$ .

### 4.3. Métodos numéricos

Para el cálculo numérico del espectro debemos resolver la ecuación de Schrödinger radial

$$\left[ -\frac{1}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r} - \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi r} \right] u_{n\ell}(r) = E_{n\ell} u_{n\ell}(r), \quad (4.3.1)$$

donde la función de onda es  $\psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$ , siendo  $Y_\ell^m$  armónicos esféricos y  $u_{n\ell}(r) = r R_{n\ell}(r)$  (omitimos los índices de espín, que a este orden no juegan ningún papel).  $\mu$  es la masa reducida, que para el caso del charmonium es la mitad de la masa del quark charm. Esta ecuación se puede escribir en términos de variables adimensionadas para la distancia y la energía como

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{2g^2 e^{-m\rho}}{3\pi r} - \lambda_{n\ell}^2 \right] u_{n\ell}(r) = 0, \quad (4.3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a_0} & a_0 &= \frac{1}{\mu g^2} \\ \lambda_{n\ell} &= \sqrt{-\frac{E_{n\ell}}{E_I}} & E_I &= \frac{\mu g^4}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

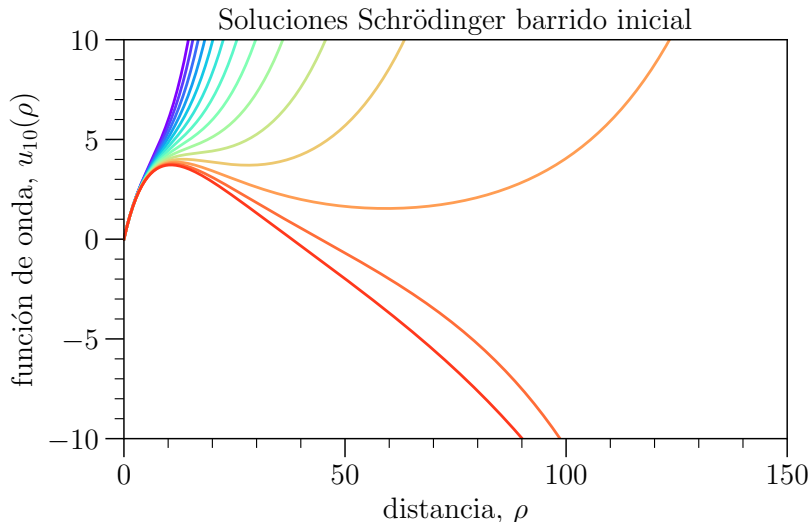
La condición inicial que utilizamos para la función de onda es

$$u_{n\ell}(0) = 0, \quad (4.3.4)$$

y podemos fijar una condición inicial arbitraria distinta de cero para la derivada en  $\rho = 0$ , ya que luego la normalización determina de forma única la función de onda. En este trabajo elegimos  $\frac{du_{n\ell}}{d\rho}|_{\rho=0} = 1$ . El valor que utilizamos para la masa del quark corresponde a la masa polo, de valor 1,67 GeV (obtenida del PDG).

El espectro para el potencial de Yukawa es discreto, por lo que la ecuación (4.3.2) sólo tiene soluciones correspondientes a estados ligados para un conjunto discreto de valores de  $\lambda$ , indexados por los índices  $n$  y  $\ell$ . Para otros valores de  $\lambda$ , las soluciones divergen exponencialmente (una prueba de esto para el caso del potencial de Coulomb,  $m \rightarrow 0$ , se puede ver en [CDL91a]). Sabemos además que los valores de  $\lambda$  se encuentran entre 0 y 1, este último valor correspondiente al estado fundamental en el caso coulombiano —agregar una masa al gluón corre el espectro hacia valores más bajos.

¿Cómo buscamos entonces numéricamente estados ligados y sus energías para parámetros  $m$  y  $g$  dados? Al variar  $\lambda$  de manera continua, se obtiene una variación continua de las soluciones a la ecuación (4.3.2). En particular, en un entorno pequeño de una energía de ligadura, tendremos hacia un lado de esa energía soluciones que divergen exponencialmente a  $+\infty$ , y del otro lado soluciones que divergen a  $-\infty$ . El algoritmo que utilizamos consiste en realizar un primer barrido entre 0 y 1, hallando las soluciones para valores equiespaciados de  $\lambda$ . De este primer barrido, ubicamos en qué intervalos hay un cambio de dirección en la divergencia de las funciones. Esos intervalos dan una primera estimación de la ubicación de los estados ligados. En la figura 4.2 se grafican a modo de ejemplo las soluciones obtenidas para un barrido inicial con momento angular  $\ell = 0$  y espín total  $S = 0$ , donde la masa del gluón es  $m = 0,4$  GeV y la constante de acoplamiento es  $g = 2,6$ .

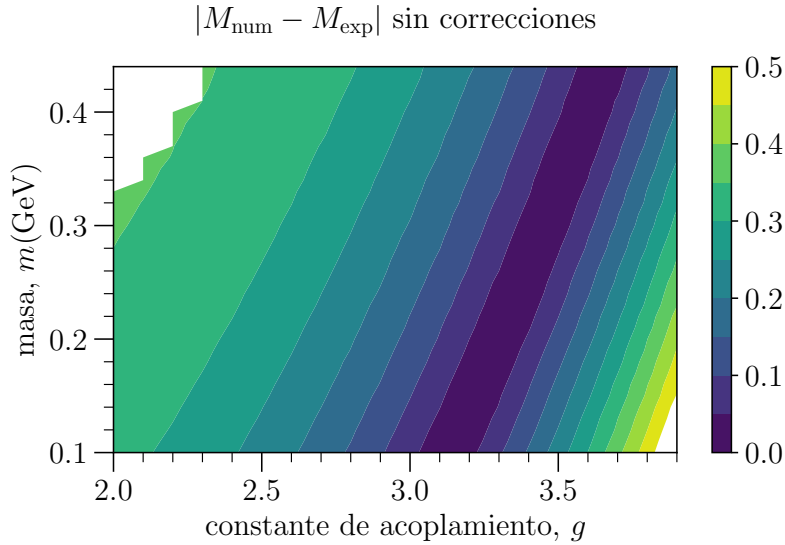


**Figura 4.2:** Soluciones sin normalizar de la ecuación de Schrödinger para un barrido inicial de energías entre 0 y 1. La masa del gluón es de 0,4 GeV, la constante de acoplamiento es 2,6, el momento angular  $\ell = 0$ , y el espín total es  $S = 0$ .

Si tenemos ahora un intervalo donde en un extremo la solución de (4.3.2) diverge en una dirección, y en el otro extremo diverge en la dirección opuesta, podemos mejorar la precisión de la estimación inicial hallando la solución que corresponde al punto medio del intervalo. Si esta solución diverge por ejemplo a  $+\infty$ , tomamos este nuevo punto y el extremo donde diverge a  $-\infty$ , construyendo así un intervalo de la mitad de longitud. Este procedimiento se repite hasta alcanzar la precisión deseada para la energía. Imponemos como condición para finalizar esta iteración que la función de onda converja durante 150 pasos. Por último, normalizamos la función de onda e incluimos las correcciones calculadas como se detalló en la sección 4.2., realizando las integrales numéricamente.

Las soluciones se hallan por el método de RK4 [New13], con un paso de integración de  $h = 0,01$ , y cortando las soluciones al alcanzar una altura  $H = 25$  para el caso  $\ell = 0$ , y  $H = 500$  para el caso  $\ell = 1$  (estas alturas fueron determinadas observando el comportamiento de las soluciones para distintos valores de  $\lambda$ , y dependen de las condiciones iniciales para la función de onda).

Por este método calculamos la energía variando el valor de  $m$  y  $g$ . En la figura 4.3 se muestran los resultados para las energías sin correcciones del orbital  $1s$  (nivel  $n = 1$ ,  $\ell = 0$ ) en un barrido con  $m$  entre  $0,2$  GeV y  $0,5$  GeV con un paso de  $0,01$  eV, y  $g$  entre  $2$  y  $4$  con un paso de  $0,2$ .



**Figura 4.3:** Energía del nivel  $\ell = 0$ ,  $S = 0$  para el potencial de Yukawa sin correcciones comparada con su valor teórico.

Para ajustar los dos parámetros del modelo, es necesario comparar los resultados para al menos dos estados del charmonium de energías diferentes. Vamos a ajustar los parámetros  $m$  y  $g$  minimizando el error

$$\text{Err} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_i^{\text{num}} - E_i^{\text{exp}}}{E_i^{\text{exp}}} \right)^2}. \quad (4.3.5)$$

Por ejemplo para el orbital  $1s$ , podemos hacer el ajuste con las dos energías de los estados  $S = 0$  y  $S = 1$ . Una discusión de las posibles formas de definir el error para un

ajuste de este tipo se puede ver en [Deb16].

Estudiamos además lo que ocurre al utilizar un potencial de tipo Cornell, agregando un término lineal de la forma

$$V_L(r) = br \quad (4.3.6)$$

al potencial de interacción a orden cero. Para este caso vamos a tomar  $b$  como un parámetro libre adicional y hacer el ajuste para  $m$ ,  $g$ , y  $b$ .

## 4.4. Resultados numéricos

### 4.4.1. Orbital $1s$

Trabajamos en primer lugar con el orbital  $1s$ , caracterizado por los números cuánticos  $n = 1$ ,  $\ell = 0$ . Este orbital tiene dos estados  $S = 0$  y  $S = 1$ . El cálculo de las correcciones para estados de momento angular nulo involucra términos proporcionales a la función de onda en el origen. Debido a que la ecuación (4.3.2) no está bien definida para  $\rho = 0$ , para reducir errores numéricos utilizamos que

$$|\psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \frac{dV}{dr} \right\rangle, \quad (4.4.1)$$

con  $V$  el potencial a orden cero, que es el potencial de Yukawa. Vamos a hacer una breve deducción de esta expresión siguiendo [LS89].

Partimos de la ecuación de Schrödinger a orden cero

$$\left[ -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (4.4.2)$$

Como  $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}u(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$ , para estados con  $\ell = 0$  donde el armónico esférico correspondiente es constante tenemos

$$-\frac{1}{2\mu}u''(r) = [E - V(r)]u. \quad (4.4.3)$$

Multiplicando el lado izquierdo por  $\frac{1}{4\pi r^2}u'(r)$  e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\mu} \int d^3r \frac{u''(r)u'(r)}{4\pi r^2} &= -\frac{1}{2\mu} \int_0^\infty dr u''(r)u'(r) \\ &= -\frac{1}{4\mu} (u'(r))^2 \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{\pi}{\mu} (\psi(\mathbf{r}) + r\psi'(\mathbf{r}))^2 \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{\pi}{\mu} |\psi(0)|^2, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

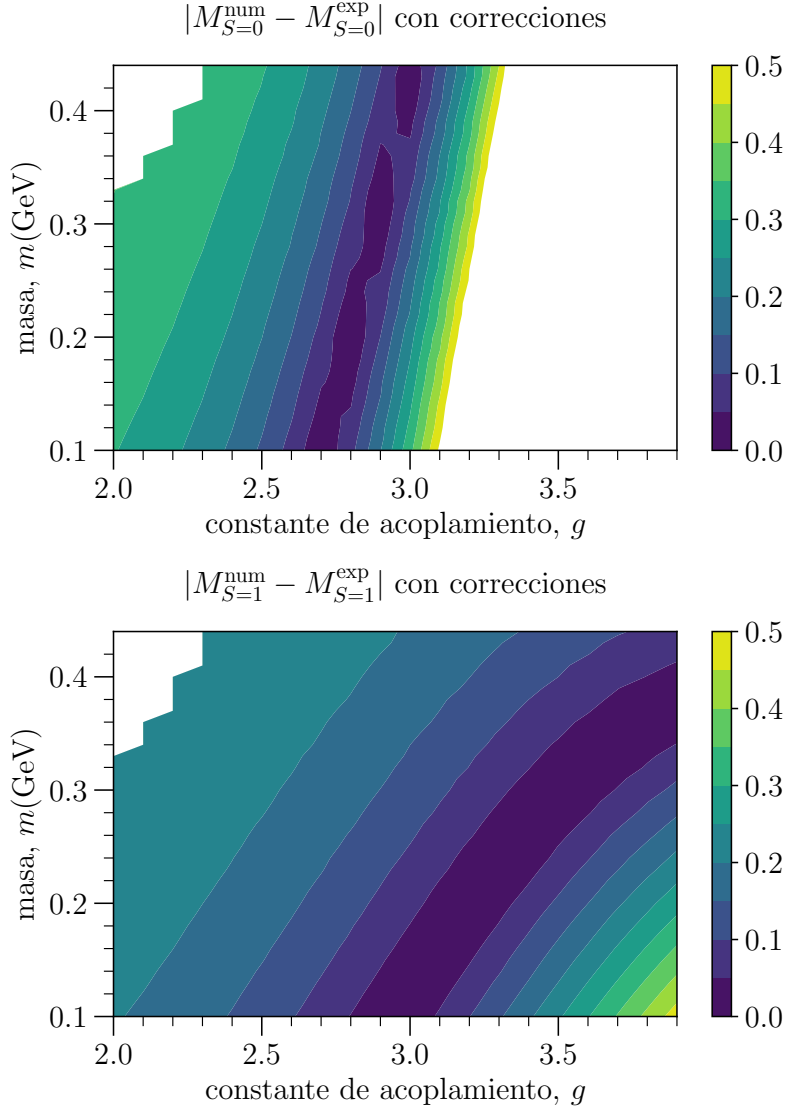
donde suponemos que la función de onda y sus derivadas decaen suficientemente rápido en  $r \rightarrow \infty$  para un estado ligado. Del lado derecho de (4.4.2) tenemos

$$\begin{aligned} \int d^3r \frac{[E - V(r)]u(r)u'(r)}{4\pi r^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr [E - V(r)] (u^2(r))' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr V'(r)u^2(r) \\ &= \frac{1}{2} \langle V'(r) \rangle \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

entonces obtenemos finalmente

$$|\psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \langle V'(r) \rangle. \quad (4.4.6)$$

Con esta consideración, en la figura 4.4 se muestran los resultados obtenidos para la energía del estado  $S = 0$  y para el splitting al hacer el barrido en  $m$  con un paso de 0,01 GeV y en  $g$  con un paso de 0,1. El espectro con correcciones muestra un corrimiento



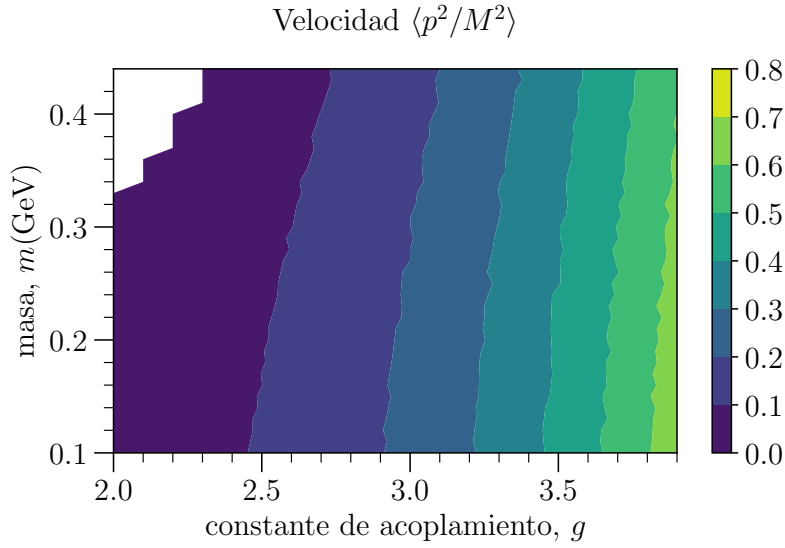
**Figura 4.4:** Energía del nivel  $\ell = 0$ ,  $S = 0$  para el potencial de Yukawa con correcciones (arriba) y del nivel  $\ell = 0$ ,  $S = 1$  (abajo). Para ambos se muestra la comparación con su valor teórico.

hacia valores de  $g$  más pequeños respecto al espectro de Yukawa en la figura 4.3. Se observa una dependencia débil del espectro con la masa del gluón, y la región donde mejor se reproducen los datos experimentales es para  $m$  pequeño. En la tabla 4.2 se muestran los resultados para el ajuste realizado.

**Tabla 4.2:** Valores de la energía de los estados  $S = 0$  y  $S = 1$  del orbital  $1s$  para el ajuste  $m = 0,005$  GeV y  $g = 2,63$ .

	Valor teórico	Resultado numérico
$S = 0$	2,983 GeV	2,971 GeV
$S = 1$	3,097 GeV	3,126 GeV

Calculamos además el valor esperado de la velocidad de los quarks constituyentes para verificar que sea consistente con la hipótesis de que estamos trabajando con una partícula no relativista. En la figura 4.5 se muestran los valores hallados. Observamos que la zona de mejor ajuste para el espectro tiene valores de la velocidad entre 0,1 y 0,3, es decir que es efectivamente no relativista (aunque los efectos relativistas no son tan pequeños como en QED, donde la velocidad del electrón en el átomo de hidrógeno, por ejemplo, es  $v \sim 0,07$ ) [BBL95].

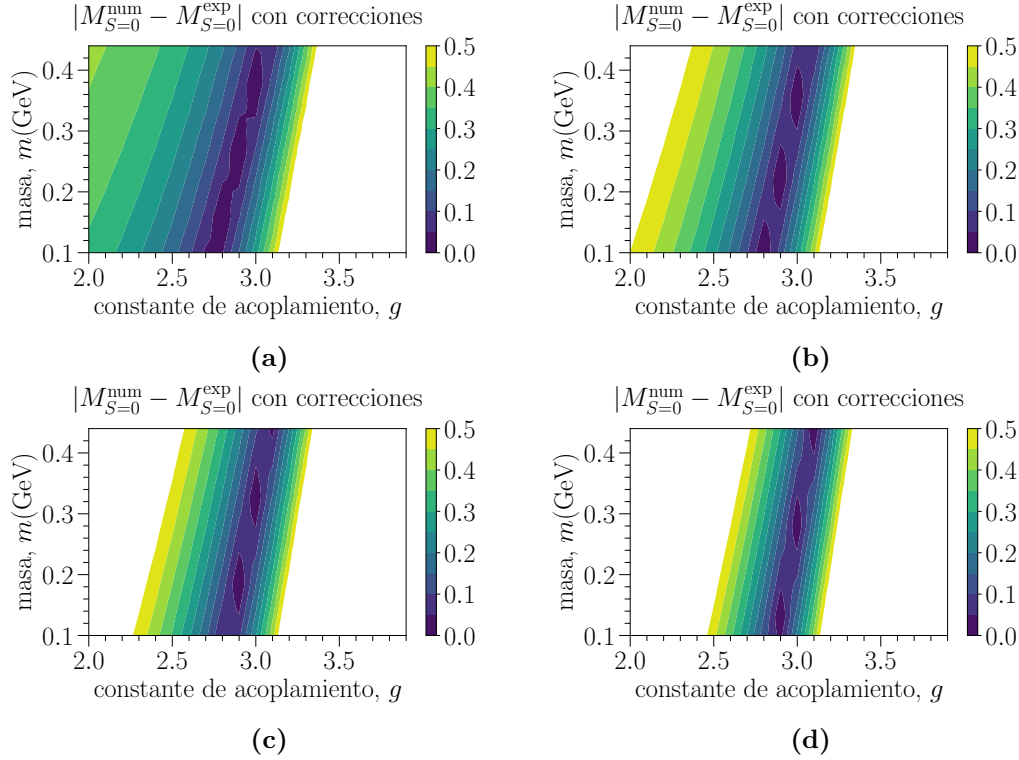


**Figura 4.5:** Velocidades esperadas para el nivel  $\ell = 0$ .

Estudiamos luego la dependencia del espectro para  $\ell = 0$  con el parámetro  $b$  al agregar un potencial lineal. En la figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos para cuatro valores diferentes del parámetro  $b$ . Observamos que al aumentar  $b$ , el espectro se corre hacia valores más grandes de  $g$ , mientras que la dependencia en  $m$  no se ve afectada de forma apreciable.

#### 4.4.2. Orbital $2p$

Estudiamos luego el orbital  $2p$ , correspondiente a los estados de  $n = 2$ ,  $\ell = 1$ . Hay cuatro estados en este orbital, que son el estado  $S = 0$ , que tiene momento angular total  $J = 1$ , y los estados  $S = 1$ , donde  $J = 0, 1, 2$ .



**Figura 4.6:** Energía del estado  $S = 0$  del nivel  $1s$  para  $b = 0,01$  (a),  $b = 0,08$  (b),  $b = 0,15$  (c),  $b = 0,27$  (d).

Aquí intervienen dos términos de corrección que no aparecían para el orbital  $1s$ , que son la interacción espín-órbita

$$W_{so} = \frac{g^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) e^{-mr}}{2\pi M^2 r^3} (mr + 1), \quad (4.4.7)$$

y la siguiente parte de la interacción espín-espín

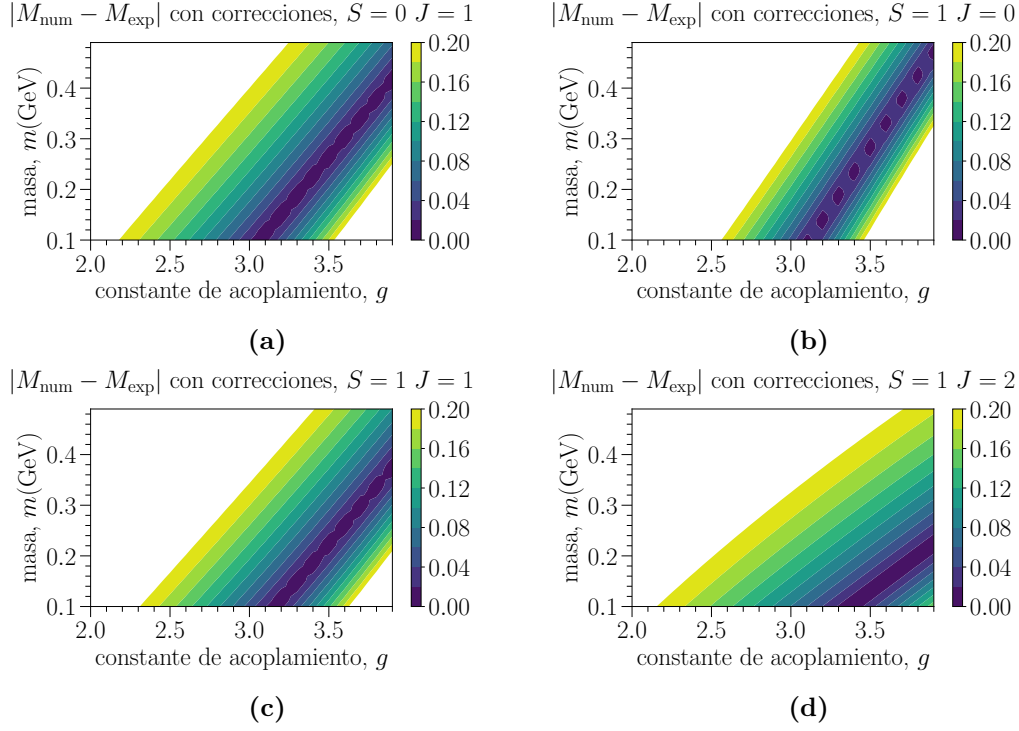
$$W_{so} = \frac{g^2 e^{-mr}}{3\pi M^2} \left[ \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{r^3} (m^2 r^2 + mr + 1) - \frac{3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \left( \frac{m^2 r^2}{3} + mr + 1 \right) \right]. \quad (4.4.8)$$

Por otro lado, la función de onda en el origen es cero para estados de momento angular  $\ell \neq 0$ .

Las energías de los estados del orbital  $2p$  varían entre  $3,414 \text{ GeV}$  y  $3,556 \text{ GeV}$ . La masa polo del quark charm es  $1,67 \text{ GeV}$ , por lo que la suma de las masas de los quarks es menor que la masa del estado ligado. La energía de ligadura debe ser entonces positiva. Pero la ecuación de Schrödinger con el potencial de Yukawa no tiene estados ligados de energías positivas, por lo que es necesario para este caso agregar el potencial lineal.

Calculamos en primer lugar el espectro del orbital  $2p$  fijando  $b = 0,008 \text{ GeV}^2$ . En la figura 4.7 se muestran los resultados obtenidos en un barrido en  $m$  con un paso de  $0,01 \text{ GeV}$ , y en  $g$  con un paso de  $0,1 \text{ GeV}$ .

Aquí se ve una dependencia más marcada del espectro con la masa del gluón. Para visualizar la zona de parámetros que mejor ajustan el espectro, graficamos también el



**Figura 4.7:** Espectro del orbital  $2p$  comparado con valores experimentales. Se muestra la energía de los estados  $S = 0, J = 1$  (a),  $S = 1, J = 0$  (b),  $S = 1, J = 1$  (c),  $S = 1, J = 2$  (d).

error. El resultado se muestra en la figura 4.8. Observamos que el espectro se reproduce mejor para valores de  $m$  pequeños y  $g$  entre 2,8 y 3,4.

#### 4.4.3. Ajuste global

Calculamos por último los tres parámetros del modelo  $m, g$ , y  $b$ , ajustando simultáneamente los dos estados del orbital  $1s$  y los cuatro del  $2p$ . Buscamos en el rango de valores

$$0,05 \text{ GeV} \leq m \leq 0,5 \text{ GeV}$$

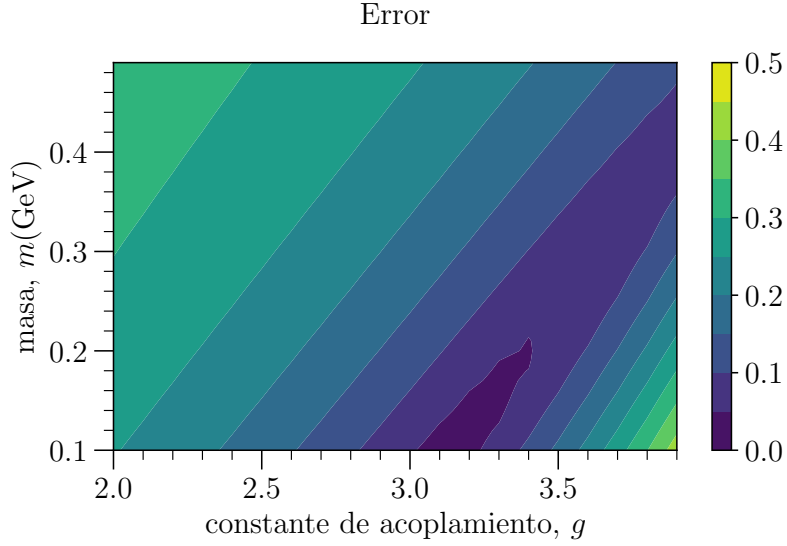
$$2,2 \leq g \leq 5$$

$$0,0 \text{ GeV}^2 \leq b \leq 0,2 \text{ GeV}^2$$

Hallamos que el conjunto de parámetros que minimiza el error es  $m = 0,13 \text{ GeV}$ ,  $g = 2,8$ , y  $b = 0,03 \text{ GeV}^2$ . En la tabla 4.3 se muestra el espectro obtenido para estos valores de los parámetros, y la comparación con los valores experimentales. Calculamos además la velocidad para verificar que estamos en el límite no relativista. El error del espectro para este conjunto de parámetros es  $\text{Err} = 0,02$ .

Incluimos además en la figura 4.9 las gráficas de las funciones de onda obtenidas para los parámetros del ajuste.

Queremos resaltar que los parámetros que mejor ajustan el espectro de los estados del charmonium de manera conjunta implican una masa del gluón distinta de cero, 130 MeV.



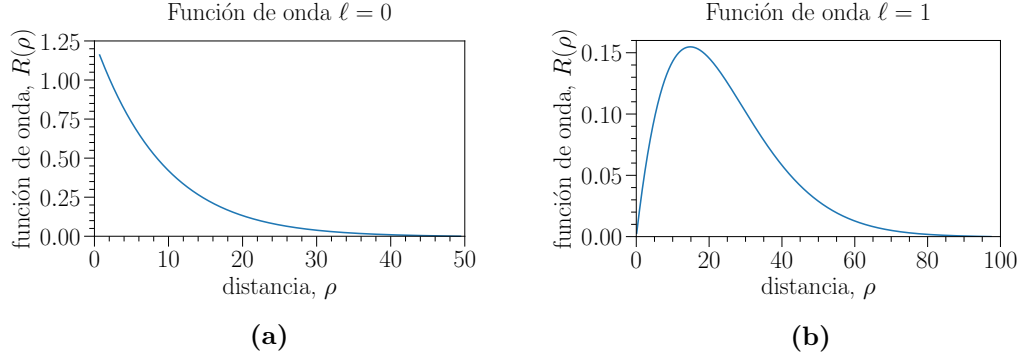
**Figura 4.8:** Error para el orbital  $2p$ , con parámetro  $b = 0,08 \text{ GeV}^2$  fijo.

**Tabla 4.3:** Valores de la energía sin correcciones ( $M_0^{\text{num}}$ ) y con correcciones ( $M^{\text{num}}$ ) de los estados de los orbitales  $1s$  y  $2p$  calculados para  $m = 0,13 \text{ GeV}$ ,  $g = 2,8$ , y  $b = 0,03 \text{ GeV}^2$ , y sus respectivos valores experimentales ( $M^{\text{exp}}$ ).

Estado $n\ell_j^{2S+1}$	$M_0^{\text{num}}$ (GeV)	$M^{\text{num}}$ (GeV)	$M^{\text{exp}}$ (GeV)	$\langle v^2 \rangle$
$1^1s_0$	3,209	2,976	2,983	0,199
$1^3s_0$	3,209	3,233	3,097	0,199
$2p_1^1$	3,508	3,469	3,525	0,100
$2^3p_0$	3,508	3,439	3,414	0,100
$2^3p_1$	3,508	3,474	3,510	0,100
$2^3p_2$	3,508	3,502	3,556	0,100

Esta masa es un poco menor que los  $190 \text{ MeV}$  predichos para la masa del gluón a la escala del charmonium en [Gra+19]. En esta referencia la masa del gluón fue calculada en nuestro mismo modelo para que las correcciones a segundo orden reprodujeran las funciones de correlación a dos puntos obtenidas por las simulaciones numéricas para el caso de fermiones pesados (aproximación quenched).

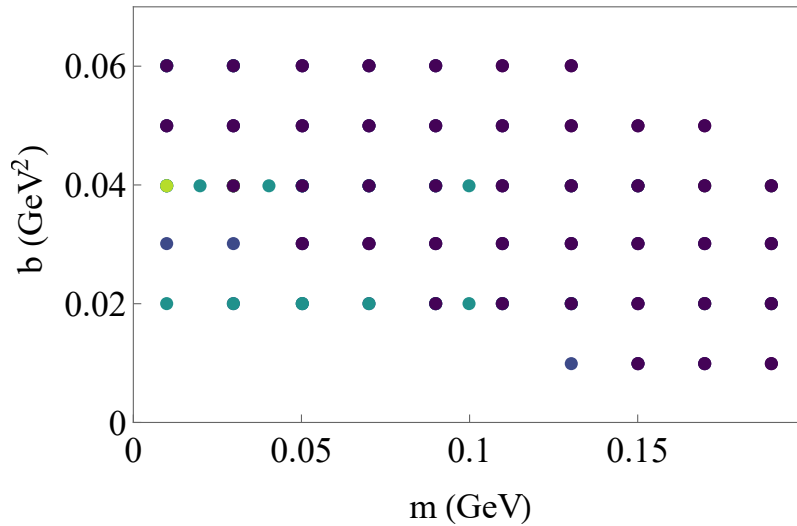
Exploramos por último cómo varía el espectro alrededor del punto de ajuste, con el fin de testear la sensibilidad en los parámetros con el error estimado de nuestro modelo. En una primera estimación gruesa, podemos considerar únicamente el error proveniente de la teoría de perturbaciones. Las correcciones al siguiente orden deben ser más pequeñas en un factor  $\alpha \sim \frac{1}{3}$  que las que obtuvimos. La corrección más grande se observa para el estado  $1s_0^3$ , y es del orden de  $0,23 \text{ GeV}$ . Al orden siguiente de la teoría de perturbaciones,



**Figura 4.9:** Funciones de onda normalizadas para los estados de  $\ell = 0$  (a) y  $\ell = 1$  (b).

las correcciones deberían ser por lo tanto del orden de 0,08 GeV. Dado que este error no es pequeño, otros valores de los parámetros, cuyo error es mayor al del valor de ajuste, son compatibles con el error del modelo. Si quisiéramos hacer una estimación más realista del error, deberíamos incluir también el error numérico.

Con esta motivación, buscamos los puntos donde el error es menor a 0,03, variando  $m$  con un paso de 0,01 GeV,  $g$  con un paso de 0,1, y  $b$  con un paso de  $0,02 \text{ GeV}^2$ . La región de  $b$  y  $m$  donde obtuvimos ajustes dentro de este margen de error se grafica en la figura 4.10. Se grafican en distintos colores puntos que corresponden a distintos valores de  $g$ . Todos ellos corresponden a  $g$  entre 2,5 y 2,9.



**Figura 4.10:** Puntos donde el error del espectro es menor a 0,03. Los diferentes colores corresponden a diferentes valores de  $g$ . Todos los puntos corresponden a  $g$  entre 2,5 y 2,9.

Notamos que esta región se extiende hasta valores muy chicos de la masa del gluón, por lo que teniendo en cuenta el error en nuestro modelo, no podemos afirmar con certeza que esta no sea nula. Esta observación abre el camino para seguir explorando otras cantidades como podrían ser las tasas de decaimiento, o el espectro de mesones

con otras composiciones. Queda planteado además el problema de ajustar con mayor precisión los términos provenientes del límite no relativista de la ecuación de Bethe–Salpeter.

## Conclusiones

En este trabajo estudiamos el espectro del charmonium en el marco del modelo de Curci–Ferrari o de gluones masivos, buscando observar el efecto de la masa del gluón en una cantidad directamente observable. Elegimos este mesón en particular debido a que es suficientemente pesado para ser no relativista, pero no tanto como para poder despreciar la masa del gluón en los cálculos.

Nos basamos en la aproximación de Born [LBP82; Tab79], un procedimiento muy utilizado para estudios de estados ligados en el límite no relativista, que consiste en calcular un potencial de interacción para las partículas que forman el estado ligado a partir de los diagramas de Feynman a nivel árbol de la teoría correspondiente. Luego, el espectro del estado ligado se halla resolviendo la ecuación de Schrödinger con ese potencial. Incluimos adicionalmente en el potencial de interacción un término lineal que simula el confinamiento. El Hamiltoniano resultante consiste al orden más bajo en la suma de este potencial lineal más un potencial de Yukawa. Los demás términos que aparecen son de orden superior y pueden tratarse de forma perturbativa.

Hicimos un estudio numérico del espectro del charmonium, considerando seis de sus estados de menor energía. Para esto incluimos todos los términos de corrección provenientes de la aproximación de Born, de los cuales determinamos que la interacción entre espines es el más relevante. Tomamos como parámetros libres de nuestro modelo la constante de acoplamiento de QCD, la masa del gluón, y el parámetro del potencial lineal. Ajustando las masas con los valores experimentales, obtuvimos una constante de acoplamiento de 2,8, una masa del gluon de 130 MeV, y un parámetro  $0,03 \text{ GeV}^2$  para el potencial lineal. Destacamos que la masa que obtuvimos es distinta de cero, aunque más pequeña que el valor esperado de 190 MeV de acuerdo con las simulaciones en el lattice [Gra+19].

A pesar del modesto optimismo que trae este resultado, el error en nuestro modelo no nos permite afirmar de manera concluyente el resultado de una masa distinta de cero en apoyo al modelo de Curci–Ferrari. Aún así, este primer intento sienta las bases para continuar poniendo a prueba la teoría mediante el cálculo de otros observables físicos, como las tasas de decaimiento de partículas. Planteamos también como perspectiva de trabajo a futuro profundizar en el estudio de la justificación de la aproximación de Born a partir de la ecuación de Bethe–Salpeter.

# Bibliografía

- [Ale03] Aleksey I. Alekseev. «Strong coupling constant to four loops in the analytic approach to QCD». En: *Few-Body Systems* 32.4 (2003), págs. 193-217.
- [App+75] Thomas Appelquist et al. «Spectroscopy of the new mesons». En: *Physical Review Letters* 34.6 (1975), pág. 365.
- [Aub+74] Jean-Jacques Aubert et al. «Experimental observation of a heavy particle  $J$ ». En: *Physical Review Letters* 33.23 (1974), pág. 1404.
- [Aug+74] J.-E. Augustin et al. «Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+ e^-$  Annihilation». En: *Physical Review Letters* 33.23 (1974), pág. 1406.
- [BBL95] Geoffrey T. Bodwin, Eric Braaten y G. Peter Lepage. «Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium». En: *Physical Review D* 51.3 (1995), pág. 1125.
- [Blo+12] B. Blossier et al. «Ghost-gluon coupling, power corrections, and  $\Lambda_{MS}$  from lattice QCD with a dynamical charm». En: *Physical Review D* 85.3 (2012), pág. 034503.
- [Boe+96] Jan de Boer et al. «On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons». En: *Physics Letters B* 367.1-4 (1996), págs. 175-182.
- [Bou+14] P. Boucaud et al. «Three-gluon running coupling from lattice QCD at  $N_f = 2 + 1 + 1$ : a consistency check of the OPE approach». En: *Journal of High Energy Physics* 2014.4 (2014), págs. 1-18.
- [Cd79] G. Curci y E. d'Emilio. «On gauge invariance and perturbative calculations in quantum chromodynamics». En: *Physics Letters B* 83.2 (1979), págs. 199-202.
- [CDL91a] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Vol. 1*. Vol. 1. Wiley-VCH, 1991.
- [CDL91b] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Vol. 2*. Vol. 2. Wiley-VCH, 1991.
- [CF76a] G. Curci y R. Ferrari. «On a class of Lagrangian models for massive and massless Yang-Mills fields». En: *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* 32.2 (1976), págs. 151-168.
- [CF76b] G. Curci y R. Ferrari. «The unitarity problem and the zero-mass limit for a model of massive Yang-Mills theory». En: *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* 35.1 (1976), págs. 1-14.

- [CMM06] Attilio Cucchieri, Axel Maas y Tereza Mendes. «Exploratory study of three-point Green's functions in Landau-gauge Yang-Mills theory». En: *Physical Review D* 74.1 (2006), pág. 014503.
- [Deb16] Vinícius Rodrigues Debastiani. «Espectroscopia do Todo-Charme Tetraquark». Tesis doct. Universidade de São Paulo, 2016.
- [DR21] Luigi Del Debbio y Alberto Ramos. «Lattice determinations of the strong coupling». En: *Physics Reports* 920 (2021), págs. 1-71.
- [Dys49] Freeman J. Dyson. «The S matrix in quantum electrodynamics». En: *Physical Review* 75.11 (1949), pág. 1736.
- [Eic+80] Estia Eichten et al. «Charmonium: comparison with experiment». En: *Physical Review D* 21.1 (1980), pág. 203.
- [FP67] Ludvig D. Faddeev y Victor N. Popov. «Feynman diagrams for the Yang-Mills field». En: *Physics Letters B*. 25.1 (1967), págs. 29-30.
- [GAR21] L.X. Gutiérrez-Guerrero, Jesús Alfaro y A. Raya. «Mass spectra of one or two heavy quark mesons and diquarks within a nonrelativistic potential model». En: *International Journal of Modern Physics A* 36.24 (2021), pág. 2150171.
- [Gra+19] John A Gracey et al. «Two-loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model». En: *Physical Review D* 100.3 (2019), pág. 034023.
- [Gri78] Vladimir Naumovich Gribov. «Quantization of non-Abelian gauge theories». En: *Nuclear Physics B* 139.1-2 (1978), págs. 1-19.
- [Gro77] Dieter Gromes. «Effective Hamiltonian for charmonium and similar two-fermion systems». En: *Nuclear Physics B* 131.1 (1977), págs. 80-92.
- [GW73] David J. Gross y Frank Wilczek. «Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories». En: *Physical Review Letters* 30.26 (1973), pág. 1343.
- [HM08] Francis Halzen y Alan D. Martin. *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [Hoy14] Paul Hoyer. «Bound states—from QED to QCD». En: *arXiv preprint arXiv:1402.5005* (2014).
- [Hoy16] Paul Hoyer. «Lectures on Bound states». En: *arXiv preprint arXiv:1605.01532* (2016).
- [LBP82] E. M. Lifshitz, V. B. Berestetski y L. P. Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics (Course of Theoretical Physics, Vol. 4)*. Pergamon, 1982.
- [Lep98] G. Peter Lepage. «Lattice QCD for novices». En: *Strong Interactions at Low and Intermediate Energies* (1998), págs. 49-90.
- [LMS17] Richard F. Lebed, Ryan E. Mitchell y Eric S. Swanson. «Heavy-quark QCD exotica». En: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 93 (2017), págs. 143-194.
- [LS89] Wolfgang Lucha y Franz F. Schöberl. *Phenomenological aspects of nonrelativistic potential models*. Inf. téc. Oesterreichische Akademie der Wissenschaften, 1989.

- [MM94] I. Montvay y G. Munster. «Quantum fields on a lattice. Cambridge, UK: Univ. Pr.(1994) 491 p». En: *Cambridge monographs on mathematical physics* (1994).
- [Mut98] Taizo Muta. *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. World Scientific, 1998.
- [New13] Mark E. J. Newman. *Computational physics*. Createspace Seattle, 2013.
- [Oji82] Izumi Ojima. «Comments on massive and massless Yang-Mills lagrangians with a quartic coupling of Faddeev-Popov ghosts». En: *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 13.2 (1982), págs. 173-177.
- [Pes95] Michael E. Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 1995.
- [Pol73] H. David Politzer. «Reliable perturbative results for strong interactions?». En: *Physical Review Letters* 30.26 (1973), pág. 1346.
- [PRS07] G. M. Prosperi, M. Raciti y C. Simolo. «On the running coupling constant in QCD». En: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 58.2 (2007), págs. 387-438.
- [PTW13] Marcela Peláez, Matthieu Tissier y Nicolás Wschebor. «Three-point correlation functions in Yang-Mills theory». En: *Physical Review D* 88.12 (2013), pág. 125003.
- [PTW14] Marcela Peláez, Matthieu Tissier y Nicolás Wschebor. «Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge». En: *Physical Review D* 90.6 (2014), pág. 065031.
- [Sch51] Julian S. Schwinger. «On the Green's functions of quantized fields». En: *Proc. Nat. Acad. Sci* 37 (1951), págs. 452-455.
- [Swa06] Eric S. Swanson. «The new heavy mesons: a status report». En: *Physics Reports* 429.5 (2006), págs. 243-305.
- [t H93] Gerard 't Hooft. «A planar diagram theory for strong interactions». En: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. World Scientific, 1993, págs. 80-92.
- [Tab79] Charles H. Tabb. «Hamiltonian for the nonrelativistic two-fermion bound state». En: *Physical Review D* 20.7 (1979), pág. 1746.
- [Tho13] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [tHo99] Gerard t'Hooft. «When was asymptotic freedom discovered? or the rehabilitation of quantum field theory». En: *Nuclear Physics B Proceedings Supplements* 74.1 (1999), págs. 413-425.
- [TW10] Matthieu Tissier y Nicolás Wschebor. «Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory». En: *Physical Review D*. 82.10 (2010), pág. 101701.
- [TW11] Matthieu Tissier y Nicolás Wschebor. «Infrared safe perturbative approach to Yang-Mills correlators». En: *Physical Review D*. 84.4 (2011), pág. 045018.

- [Wei95] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*. Vol. 2. Cambridge university press, 1995.

## Cálculo del propagador del gluon

Calculamos el propagador del gluón para el modelo de Curci–Ferrari en el gauge de Landau. Los términos del Lagrangiano (sin la parte de interacción que debe separarse para obtener las reglas de Feynman) que involucran el campo del gluón y aportan al propagador son

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{0a}F_{\mu\nu}^{0a} + ih^a\partial_\mu A_\mu^a + \frac{m^2}{2}A_\mu^a A_\mu^a, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$F_{\mu\nu}^{0a} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (\text{A.2})$$

El propagador se calcula tomando derivadas funcionales de la acción respecto a los campos. Como hay un término que involucra al campo del gluón y al campo auxiliar  $h^a$ , debemos calcular la matriz de derivadas segundas respecto a estos dos campos. El propagador del gluón es luego la primer componente diagonal de la inversa de esta matriz en el espacio de momentos, multiplicada por  $-1$ .

La acción es

$$S = \int d^4z \left\{ -\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}^{0c}F_{\rho\sigma}^{0c} + ih^c\partial_\rho A_\rho^c + \frac{m^2}{2}A_\rho^c A_\rho^c \right\}, \quad (\text{A.3})$$

entonces tenemos que

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)} = \delta^{ab} \left[ \delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\rho\delta(x-y) - \partial_\mu\partial_\nu\delta(x-y) + m^2\delta_{\mu\nu}\delta(x-y) \right], \quad (\text{A.4})$$

donde las derivadas son respecto a la variable  $y$ . Luego, tenemos las derivadas cruzadas

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A_\mu^a(x)\delta h^b(y)} = i\delta^{ab}\partial_\mu\delta(x-y), \quad (\text{A.5})$$

y la derivada segunda respecto al campo  $h^a$  es cero. La transformada de Fourier de (A.4) es

$$\delta^{ab} \left[ -p^2 \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + m^2\delta_{\mu\nu} \right], \quad (\text{A.6})$$

donde podemos definir el proyector transversal

$$P_{\mu\nu}^\perp(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (\text{A.7})$$

y la transformada de (A.5) es

$$-\delta^{ab}p_\mu. \quad (\text{A.8})$$

Construimos entonces la matriz hessiana

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} [(m^2 - p^2)P_{\mu\nu}^\perp(p) + m^2 P_{\mu\nu}^L(p)] & -\delta^{ab}p_\mu \\ \delta^{ab}p_\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

donde el propagador longitudinal es

$$P_{\mu\nu}^L(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (\text{A.10})$$

Consideramos un ansatz para la inversa de la forma

$$(\Gamma^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^{ab} [MP_{\mu\nu}^\perp(p) + NP_{\mu\nu}^L(p)] & Bp_\mu \\ Cp_\nu & D \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Imponiendo que el producto matricial de la identidad, determinamos que  $M = \frac{1}{m^2 - p^2}$ ,  $N = 0$ ,  $B = \frac{1}{p^2} = -C$ ,  $D = \frac{m^2}{p^2}$ . El propagador del gluón, que está dado por la primera componente de la matriz inversa con un factor  $-1$ , es

$$G_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2 - m^2} P_{\mu\nu}^\perp(p). \quad (\text{A.12})$$

## Soluciones de la ecuación de Dirac en el límite no relativista

Para el cálculo de diagramas de Feynman en el límite no relativista en el Estados ligados no relativistas, Capítulo 3 y Capítulo 4, utilizamos los espinores correspondientes a partículas y antipartículas, que son soluciones de la ecuación de Dirac. En este apéndice mostramos el cálculo de estas soluciones, siguiendo el desarrollo presentado en [LBP82].

Si consideramos soluciones para una partícula de la forma

$$\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

la ecuación de Dirac para  $u(\mathbf{p})$  es

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ , y vamos a utilizar las matrices  $\gamma$  en la representación de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Escribiendo explícitamente el operador que actúa sobre  $u(\mathbf{p})$  tenemos

$$\begin{pmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.4})$$

donde  $E$  es la energía, que viene de la componente temporal del momento. Obtenemos entonces las siguientes relaciones para las componentes de  $u(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \eta \\ \eta &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \xi. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Si tenemos partículas relativistas que cumplen la ecuación de Dirac, se puede definir una densidad de probabilidad a partir de la corriente de probabilidad  $j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$ , que es

$$\rho_D = |\xi|^2 + |\eta|^2. \quad (\text{B.6})$$

Para tomar el límite no relativista, vamos a imponer la condición de que la densidad de probabilidad sea de la forma clásica, es decir que sea como la densidad para partículas que cumplen la ecuación de Schrödinger y tienen una función de onda con una única componente

$$\rho_{\text{Sch}} = |\xi_{\text{Sch}}|^2. \quad (\text{B.7})$$

Esta condición es conveniente pero arbitraria. La forma de tomar el límite no relativista no está completamente determinada y las soluciones que hallaremos dependen de esta condición que hemos impuesto.

Buscamos escribir entonces  $\xi$  y  $\eta$  en términos de  $\xi_{\text{Sch}}$ . Igualando las densidades de probabilidad y utilizando las relaciones (B.5), tenemos que

$$\int \xi_{\text{Sch}}^* \xi_{\text{Sch}} dx = \int \xi^* \xi + \xi^* \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right)^* \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right) \xi dx, \quad (\text{B.8})$$

donde utilizamos que  $E \approx m$  en el límite no relativista. Desarrollamos el término del lado derecho, escribiendo  $\mathbf{p}$  como  $-i\nabla$ , notando que el factor en  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^*$  actúa sobre  $\xi^*$  y utilizando la relación de conmutación entre las matrices de Pauli

$$\int \xi_{\text{Sch}}^* \xi_{\text{Sch}} dx = \int \xi^* \xi - \frac{1}{4m^2} \nabla \xi^* \cdot \nabla \xi dx, \quad (\text{B.9})$$

y utilizando que  $\nabla^2(fg) = (\nabla^2 f)g + f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g$  tenemos

$$\int \xi_{\text{Sch}}^* \xi_{\text{Sch}} dx = \int \xi^* \xi - \frac{1}{8m^2} (\xi^* \nabla^2 \xi + \xi \nabla^2 \xi^*) dx, \quad (\text{B.10})$$

ya que el término del Laplaciano de  $\xi^* \xi$  da cero al hacer la integral por el teorema de la divergencia, asumiendo que las funciones son regulares y decaen suficientemente rápido. Vemos que si tomamos

$$\xi_{\text{Sch}} = \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \right) \xi, \quad (\text{B.11})$$

se verifica la ecuación (B.10). Invertimos la relación, siempre conservando sólo los términos hasta el orden deseado en el límite no relativista, y escribimos también  $\eta$  en términos de  $\xi_{\text{Sch}}$

$$\begin{aligned} \xi &= \left( 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \right) \xi_{\text{Sch}} \\ \eta &= \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right) \xi_{\text{Sch}}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

La solución para  $u(\mathbf{p})$  se puede escribir finalmente como

$$u(\mathbf{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left( 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \right) w \\ \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right) w \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

donde agregamos el factor  $\sqrt{2m}$  de modo que la normalización sea  $w^\dagger w = 1$ .

Para las antipartículas, la ecuación de Dirac es

$$(\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0. \quad (\text{B.14})$$

Esto introduce un cambio en las relaciones entre  $\xi$  y  $\eta$ , que ahora son

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \eta \\ \eta &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \xi, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

y se invierten las componentes en la solución final para el espinor

$$v(\mathbf{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m}\right) w \\ \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) w \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

## Detalle del cálculo de transformadas de Fourier

El cálculo de la transformada de Fourier

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla) \left( \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \right) \quad (\text{C.1})$$

presenta mayor dificultad que el de los demás términos en la amplitud de scattering debido a que tiene una parte singular. Para mostrar la existencia de esta parte singular definimos la función

$$f(r) = -\frac{e^{-mr}}{4\pi(r + \varepsilon)}, \quad (\text{C.2})$$

donde removemos la singularidad en 0 del potencial de Yukawa. Vamos a trabajar con la función  $f(r)$  y al final tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Hacemos actuar el operador en C.1 sobre la función  $f$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla)f(r) &= a_i b_j \partial_i \partial_j f(r) \\ &= a_i b_j \left( \frac{\delta_{ij}}{r} f'(r) - \frac{r_i r_j}{r^3} f'(r) + \frac{r_i r_j}{r^2} f''(r) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

entonces tenemos

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla)f(r) = \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] f'(r) + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} f''(r), \quad (\text{C.4})$$

donde las derivadas de  $f$  son

$$\begin{aligned} f'(r) &= \left( \frac{m}{r + \varepsilon} + \frac{1}{(r + \varepsilon)^2} \right) \frac{e^{-mr}}{4\pi} \\ f''(r) &= - \left( \frac{m^2}{r + \varepsilon} + \frac{2m}{(r + \varepsilon)^2} + \frac{2}{(r + \varepsilon)^3} \right) \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para probar que hay una parte singular en el origen, vamos a integrar C.4 contra una función de prueba  $\psi(r)$  que supondremos regular

$$\int dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta \psi(r) \left\{ \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] f'(r) + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} f''(r) \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Integramos en el ángulo usando que el valor medio de  $r_i r_j$  es  $\langle r_i r_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{3} \langle r^2 \rangle$ . La integral anterior queda entonces

$$4\pi \int_0^\infty dr \psi(r) \left\{ \left[ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})r - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})r}{3} \right] f'(r) + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})r^2}{3} f''(r) \right\}, \quad (\text{C.7})$$

y sustituyendo las derivadas de  $f$  y simplificando obtenemos

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \int_0^\infty dr \psi(r) \left\{ \frac{2mr}{r + \varepsilon} + \frac{2r}{(r + \varepsilon)^2} - \frac{m^2 r^2}{r + \varepsilon} - \frac{2mr^2}{(r + \varepsilon)^2} - \frac{2r^2}{(r + \varepsilon)^3} \right\} e^{-mr}. \quad (\text{C.8})$$

Queremos estudiar esta integral en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para mostrar que en la función hay un término proporcional a una delta de Dirac. Es conveniente separar la integral en dos tramos, el primero desde 0 a  $\sqrt{\varepsilon}$ , y el segundo desde este punto hasta infinito. El segundo tramo converge, ya que en  $r \rightarrow \infty$  el integrando está suprimido por una exponencial, y el límite inferior los dos términos cuya integral diverge se compensan. Vamos a centrarnos entonces en el tramo inferior de la integral

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} dr \psi(r) \left\{ \frac{2mr}{r + \varepsilon} + \frac{2r}{(r + \varepsilon)^2} - \frac{m^2 r^2}{r + \varepsilon} - \frac{2mr^2}{(r + \varepsilon)^2} - \frac{2r^2}{(r + \varepsilon)^3} \right\} e^{-mr}. \quad (\text{C.9})$$

En este tramo,  $e^{-mr} \approx 1$ , y si suponemos  $\psi$  suficientemente suave, su valor en todo el tramo es aproximadamente su valor en el origen. Realizamos el cambio de variable  $r = \varepsilon u$  y obtenemos

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \psi(r=0) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \left\{ \frac{2m\varepsilon u}{u + 1} + \frac{2u}{(u + 1)^2} - \frac{m^2 \varepsilon^2 u^2}{u + 1} - \frac{2m\varepsilon u^2}{(u + 1)^2} - \frac{2u^2}{(u + 1)^3} \right\}. \quad (\text{C.10})$$

Integramos ahora cada uno de estos términos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \frac{u}{u + 1} &= -\varepsilon \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) - \sqrt{\varepsilon} \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \frac{u}{(u + 1)^2} &= -\frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{1/\sqrt{\varepsilon} + 1} + \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \frac{u^2}{u + 1} &= \varepsilon \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) - \varepsilon(1 - \varepsilon) \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) - \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \frac{u^2}{(u + 1)^2} &= \sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1/\sqrt{\varepsilon} + 1} - 2\varepsilon \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} du \frac{u^2}{(u + 1)^3} &= -\frac{1}{2} \frac{1/\varepsilon}{(1/\sqrt{\varepsilon} + 1)^2} - \frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{1/\sqrt{\varepsilon} + 1} + \log \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

y observamos que los términos que divergen se compensan y la suma, en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  es

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \psi(r=0), \quad (\text{C.12})$$

por lo que 4.1.20 debe contener un término de la forma

$$\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \delta^3(r) \quad (\text{C.13})$$

Calculamos por último la parte regular del término F tomando simplemente las derivadas y obtenemos

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 + m^2} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{3} \delta^3(r) + \left\{ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{r^3} (mr + 1) - \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^5} (3m^2 r^2 mr + 1) \right\} \frac{e^{-mr}}{4\pi}. \quad (\text{C.14})$$

---

## Código en Python

El código utilizado para el cálculo del espectro del charmonium se puede encontrar [en este link](#) (contiene a modo de ejemplo el script para  $\ell = 0$ ,  $S = 0$ , sin potencial lineal).

