

PEDECIBA Informática
Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Reporte Técnico RT 09-14

**Formulación de programación matemática
para el problema de optimización de
recorridos y frecuencias en sistemas de
transporte público**

Antonio Mauttone

2009

Mauttone, Antonio

Formulación de programación matemática para el problema de optimización de recorridos y frecuencias en sistemas de transporte público

ISSN 0797-6410

Reporte Técnico RT 09-14

PEDECIBA

Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo, Uruguay, 2009

Formulación de programación matemática para el problema de optimización de recorridos y frecuencias en sistemas de transporte público¹

Antonio Mauttone (mauttone@fing.edu.uy)
Departamento de Investigación Operativa, Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Julio de 2009

Palabras clave: optimización de recorridos y frecuencias, transporte público, programación matemática bi-nivel.

Resumen: Se presenta una formulación de programación matemática bi-nivel para el problema de optimización de recorridos y frecuencias en sistemas de transporte público. Como aspectos novedosos, la formulación incluye (i) el tratamiento del problema de líneas comunes y el tiempo de espera en las decisiones de los usuarios y (ii) restricciones de mínimas cantidades de transbordos para porcentajes dados de la demanda. La formulación resultante es no lineal y bi-nivel, con una cantidad exponencial de variables discretas. Dadas las dificultades de resolución de esta formulación, se proponen formulaciones lineales enteras mixtas para (i) una simplificación del problema y (ii) obtener una cota inferior del valor objetivo, para instancias de tamaño moderado. Se delinean trabajos futuros.

¹Trabajo realizado en el marco de una estadía en el Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística de la Pontificia Universidad Católica de Chile, en los meses de Abril a Junio de 2009, financiada por LACCIR Short Stays Program 2008.

1. Introducción

EL TNDP (Transit Network Design Problem) refiere al problema de encontrar un conjunto óptimo de recorridos con sus respectivas frecuencias para un sistema de transporte público urbano colectivo. Existen diferentes definiciones para este problema desde el punto de vista del modelado formal. Generalmente para lograr un modelado realista del problema, deben considerarse los siguientes elementos del mismo:

- Intereses de los usuarios y de los operadores.
- Comportamiento de los usuarios.
- Límite de cantidad de transbordos en el diseño de los recorridos.
- Restricciones físicas de capacidad de calles y capacidad de los buses.

Las distintas definiciones y variantes del problema, consideradas en la literatura, difieren entre ellas en la forma en que incorporan estos elementos en su formulación y metodología de resolución.

El TNDP ha sido tratado en la literatura mayormente con métodos de resolución aproximados [1, 9, 6, 8]. Estos han permitido aplicar los métodos de resolución a instancias del problema de tamaños reales, sin embargo, no es posible tener una idea de la distancia de los resultados obtenidos a soluciones óptimas. Por otro lado, existen escasas propuestas de formulaciones de programación matemática (donde todas las variables y funciones aparezcan en forma explícita) para el problema; los trabajos existentes con estas características, o bien resuelven un sub-problema del TNDP [13] o realizan simplificaciones en el modelado matemático de los diferentes elementos del problema [3, 10]. Las ventajas de contar con una formulación de programación matemática explícita para el problema son: (i) es posible obtener soluciones óptimas para instancias de tamaño reducido (en casos donde exista un método exacto de resolución en base a la formulación), (ii) permite razonar acerca de las propiedades matemáticas del problema.

En este trabajo se presenta una formulación de programación matemática para el TNDP, que se diferencia de las existentes en los siguientes aspectos:

- Modela el problema de líneas comunes [4] como parte del comportamiento de los usuarios.
- Considera los tiempos de espera en las decisiones de los usuarios.
- Acepta como parámetros de diseño, mínimos porcentajes de demanda cubierta con un número dado de transbordos.

2. Definiciones y notación

Se considera un único modo de transporte público, típicamente bus. Un grafo no dirigido $G^C = (V, E)$ modela la red de calles (red vial) sobre la cual se definen los recorridos. El conjunto de vértices V modela las intersecciones de calles y el conjunto de aristas E modela las conexiones entre dichas intersecciones. El costo c_e de una arista $e = [i, j] \in E$ representa el tiempo insumido por cualquier bus en viajar entre los vértices extremos $i, j \in V$ de esa arista; dicho tiempo es fijo e independiente de las condiciones de carga de los buses. Los recorridos se definen como secuencias de aristas en G^C ; notar que de esta forma todas las calles se consideran de doble sentido y por lo tanto cada recorrido seguirá la misma secuencia de calles pero en diferentes sentidos, en sus recorridos de ida y vuelta. La demanda se caracteriza por un conjunto de commodities (mercancías o pares o-d) K , donde $O_k, D_k \in V$ son respectivamente los vértices origen y destino del par o-d k . Notar que de esta forma la demanda se asocia de manera fija a vértices de G^C , que representan intersecciones de calles; esto constituye una simplificación del caso más general, donde los orígenes y destinos se asocian a centroides de zonas, los cuales son conectados a los vértices de V (que representarán las paradas) mediante arcos de acceso y egreso, con un tiempo de caminata asociado. Cada par o-d k tiene una cantidad de demanda asociada $\delta_k > 0$, expresada en pasajeros por unidad de tiempo, en un horizonte de tiempo dado; esta demanda es fija durante todo el horizonte de tiempo, e independiente de los recorridos, frecuencias y condiciones de carga de los buses.

El conjunto de todos los posibles recorridos que pueden definirse sobre G^C se denomina R ; cada recorrido $r \in R$ es una secuencia de aristas de E y su frecuencia es un valor real positivo f_r . Las trayectorias de los pasajeros se modelan con un grafo dirigido $G^T = (N, A)$, que se utiliza para representar los flujos de cada par o-d sobre los diferentes recorridos de R , considerando transbordos. Los arcos de A pueden ser:

1. Arcos de viaje A^V , que modelan el desplazamiento de un bus (y los pasajeros que viajan en él), de un vértice a otro de G^C .
2. Arcos de espera A^E , que modelan la espera de los pasajeros para abordar un bus de un recorrido o un conjunto de recorridos que pasan por un vértice de G^C .
3. Arcos de destino A^D , que modelan el egreso de los pasajeros del sistema, una vez que alcanzan su vértice destino.

Se cumple que $A = A^V \cup A^E \cup A^D$. Todo arco $a \in A$ tiene un costo c_a cuyo significado es análogo al costo de una arista $e \in E$.

El conjunto de nodos N se genera de la siguiente forma: por cada recorrido $r \in R$ que pasa por un vértice $v \in V$ se genera un nodo $n_{rv} \in N$; luego

por cada recorrido r que pasa por una arista $e = [i, j] \in E$ se generan los arcos de viaje directo $\vec{a}_{re} = (n_{ri}, n_{rj})$ e inverso $\overleftarrow{a}_{re} = (n_{rj}, n_{ri})$, cuyos costos son tales que $c_e = c_{\vec{a}_{re}} = c_{\overleftarrow{a}_{re}}$. Además para cada vértice en V que es origen o destino de un par o-d, se genera su correspondiente nodo en N ; de esta forma $O_k^N, D_k^N \in N$ son los nodos origen y destino del par o-d k en el grafo de trayectorias G^T . Los arcos de espera se utilizan para modelar la situación de un pasajero de un determinado par o-d esperando por un recorrido o un conjunto de recorridos que lo transportarán a su destino. Para cada par o-d k existirá un arco de espera (O_k^N, n_{rO_k}) , por cada recorrido r que pasa por O_k en G^C (arcos de origen). Para modelar los transbordos se generan arcos de espera (n_{r_1v}, n_{r_2v}) , para todo par de recorridos $r_1, r_2 \in R$ que pasan por el vértice v . Los arcos de destino se generan de forma análoga a los arcos de espera que conectan nodos origen O_k^N con nodos correspondientes a recorridos. Los arcos de espera y de destino tienen costo cero. Un ejemplo de la relación entre un grafo de calles y su correspondiente grafo de trayectorias para un conjunto de recorridos dado, se muestra en la Figura 1. El modelo de grafo expandido anteriormente descrito es inspirado en los trabajos de Spiess y Florian [11] y Schöbel y Scholl [10].

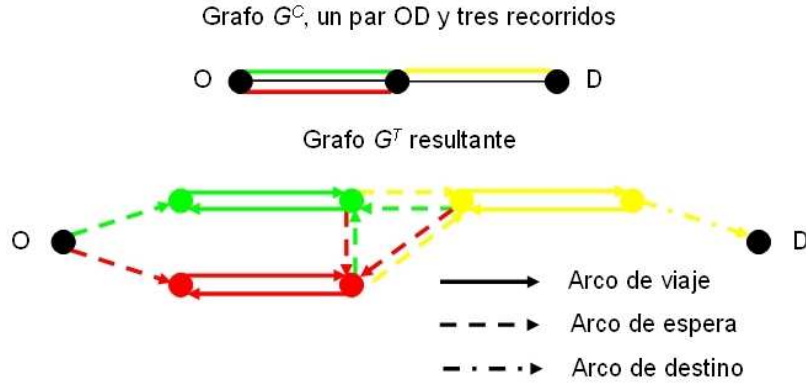


Figura 1: Grafos de calles y de trayectorias

Para modelar los transbordos y tener control sobre los mismos en el modelo de optimización, se requiere especificar de antemano la máxima cantidad de transbordos permitida, mediante la constante entera no negativa τ^m . Luego se generan $\tau^m + 1$ grafos de trayectorias $G_i^T, i \in [1.. \tau^m + 1]$ correspondientes a cada una de las etapas de viaje de los usuarios. Los arcos de origen conectan los nodos de origen únicamente con el grafo correspondiente a la primer etapa de viaje; los arcos de destino conectan a los nodos de destino con los grafos de todas las etapas de viaje. Los arcos de espera que no son de origen (arcos que representan transbordos), son de la forma (n_{r_1v}, n_{r_2v}) , donde $r_1, r_2 \in R$ son recorridos que pasan por el mismo vértice v , el primer nodo pertenece a un grafo de trayectorias G_i^T y el segundo nodo pertenece al grafo

de la siguiente etapa de viaje G_{i+1}^T para todo $i \in [1..\tau^m]$. En la Figura 2 se muestra un ejemplo para la situación de la Figura 1 imponiendo $\tau^m = 1$ (un transbordo a lo sumo).

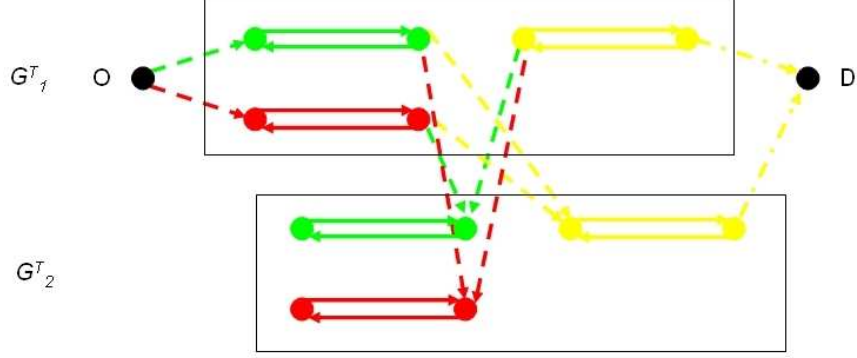


Figura 2: Grafo de trayectorias con transbordos

Se utiliza además la siguiente notación:

- $A_n^+ \subset A$ (análogamente A_n^-) son los arcos salientes (análogamente entrantes) del nodo $n \in N$.
- $A_n^{E+} \subset A^E$ son los arcos de espera salientes del nodo $n \in N$.
- $A_i^D \subset A^D$ son los arcos de destino del grafo correspondiente a la etapa de viaje i , para todo $i \in [1..\tau^m + 1]$.
- $A_r \subset A_1$ son los arcos que pertenecen al recorrido $r \in R$. Se incluyen solamente los arcos de G_1^T .
- $A_e \subset A_1$ son los arcos correspondientes a la arista $e \in E$ de todos los recorridos que pasan por dicha arista ((n_{ri}, n_{rj}) y (n_{rj}, n_{ri}) para todo r que pasa por $e = [i, j]$). Se incluyen solamente los arcos de G_1^T .
- $r_a \in R$ es el recorrido al que pertenece el arco $a \in A$.
- $\kappa_e > 0$ es la capacidad de la arista $e \in E$, expresada en cantidad de buses por unidad de tiempo.
- $f^m > 0$ es la máxima frecuencia admitida en cualquier recorrido.
- c_k^* es el costo del camino mínimo en G^C entre O_k y D_k , respecto a los costos de las aristas de dicho grafo.
- $\rho_k^m \geq 1$ es el máximo desvío admitido para el tiempo total de viaje de O_k a D_k , respecto a c_k^* .

- ϵ^m es el máximo tiempo de espera admitido para cualquier usuario en cualquier parada del sistema.
- ω^b es la máxima carga admitida en los buses de cualquier recorrido; está expresada en cantidad de pasajeros e incluye a los pasajeros parados.
- $0 \leq \Delta^0 \leq \dots \Delta^{\tau^m-1} \leq 1$ son valores reales tales que Δ^s es la proporción del total de la demanda $\sum_{k \in K} \delta_k$ que debe ser cubierta con no más de s transbordos, con $0 \leq s \leq \tau^m - 1$.

3. Formulaciones de programación matemática para el TNDP

El modelo de optimización propuesto es bi-nivel [2] con variables binarias en el nivel superior. Las variables de decisión son las siguientes:

- $x_r \in \{0, 1\}$ vale 1 si el recorrido r forma parte de la solución, 0 en otro caso.
- f_r es la frecuencia del recorrido r , expresada en pasadas de bus por unidad de tiempo.
- v_{ak} es la cantidad de demanda del par o-d k que circula por el arco a .
- w_{nk} es el tiempo de espera de pasajeros del par o-d k en el nodo n , multiplicado por la cantidad de demanda de k esperando en n .

La formulación es la siguiente:

$$\min_{x, f} \sum_{r \in R} f_r \sum_{a \in A_r} c_a \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_e} f_{ra} \leq \kappa_e \quad \forall e \in E, \quad (2)$$

$$0 \leq f_r \leq f^m x_r \quad \forall r \in R, \quad (3)$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R. \quad (4)$$

Existe además una restricción dada por el siguiente problema de optimización del nivel inferior:

$$\min_{v,w} \sum_{k \in K} \left(\sum_{a \in A} c_a v_{ak} + \sum_{n \in N} w_{nk} \right) \quad (5)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_n^+} v_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} v_{ak} = b_{nk} \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (6)$$

$$v_{ak} \leq f_{r_a} w_{nk} \quad \forall a \in A_n^{E+}, n \in N, k \in K, \quad (7)$$

$$0 \leq v_{ak} \leq \delta_k x_{r_a} \quad \forall a \in A, k \in K, \quad (8)$$

$$w_{nk} \geq 0 \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (9)$$

donde

$$b_{nk} = \begin{cases} \delta_k & \text{si } n = O_k, \\ -\delta_k & \text{si } n = D_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las siguientes restricciones pertenecen al nivel superior (son restricciones que debe de tener en cuenta el diseñador del sistema) pero involucran variables del nivel inferior:

$$\left(\sum_{a \in A} c_a v_{ak} + \sum_{n \in N} w_{nk} \right) / (\delta_k c_k^*) \leq \rho_k^m \quad \forall k \in K, \quad (10)$$

$$\sum_{a \in A_n^{E+}} v_{ak} \geq w_{nk} / \epsilon^m \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (11)$$

$$\sum_{k \in K} v_{ak} \leq f_{r_a} \omega^b \quad \forall a \in A, \quad (12)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{a \in \cup_{i=1..s+1} A_i^D} v_{ak} / \sum_{k \in K} \delta_k \geq \Delta^s \quad \forall s = 0.. \tau^m - 1. \quad (13)$$

La función objetivo (1) establece la minimización del tamaño de la flota (cantidad de buses circulando en forma simultánea), representando los intereses de los operadores. Las restricciones (2) y (3) modelan respectivamente la capacidad de las calles y la máxima frecuencia que puede imponerse a los recorridos. El problema del nivel inferior (5)-(8) corresponde al sub-modelo de asignación de pasajeros a recorridos; se utiliza el modelo de estrategias óptimas de Spiess y Florian [11], que considera líneas comunes y el tiempo de espera en las decisiones de los usuarios. La restricción (10) modela el interés de los usuarios, limitando el largo de sus trayectorias, mientras que la restricción (11) la complementa, limitando el tiempo de espera. La restricción (13) establece las mínimas proporciones de demanda cubierta con una cantidad dada de transbordos.

El problema (1)-(13) es de tipo bi-nivel (subproblema (5)-(8)), no lineal (restricción (7)) y discreto (variable x) con cantidad exponencial de variables (cardinalidad del conjunto R). Es un problema difícil de resolver incluso

para instancias pequeñas. Por lo tanto se plantea la formulación de una simplificación del problema (sección 3.1), así como una forma de obtener una cota inferior (sección 3.2); también se propone una forma de evitar la restricción no lineal (sección 4).

3.1. Formulación de un solo nivel 1: pasajeros ignoran tiempo de espera

Si se considera que los usuarios ignoran el tiempo de espera en la elección de su trayectoria, el problema del nivel inferior se reduce a:

$$\min_v \sum_{k \in K} \sum_{a \in A} c_a v_{ak} \quad (14)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_n^+} v_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} v_{ak} = b_{nk} \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (15)$$

$$0 \leq v_{ak} \leq x_{r_a} \quad \forall a \in A, k \in K, \quad (16)$$

donde

$$b_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = O_k, \\ -1 & \text{si } n = D_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notar que en este caso, el problema del nivel inferior se reduce a $|K|$ problemas independientes de camino mínimo respecto a los costos de los arcos que representan los tiempos de viaje en vehículo; por lo tanto dado un par o-d $k \in K$, su correspondiente flujo será indivisible desde O_k a D_k .

El problema dual del problema (14)-(16) tiene la siguiente restricción:

$$\pi_{ik} - \pi_{jk} - \lambda_{ak} \leq c_a \quad \forall a = (i, j) \in A, k \in K. \quad (17)$$

Las condiciones de holgura complementaria pueden escribirse como:

$$(x_{r_a} - v_{ak})\lambda_{ak} = 0 \quad \forall a \in A, k \in K, \quad (18)$$

$$(c_a - \pi_{ik} + \pi_{jk} + \lambda_{ak})v_{ak} = 0 \quad \forall a = (i, j) \in A, k \in K, \quad (19)$$

donde π_{ik} y λ_{ak} son variables duales asociadas a las restricciones (15) y (16) respectivamente; la primera no tiene restricción de signo dado que está asociada a una restricción de igualdad, mientras que la segunda debe ser no positiva dado que está asociada a una restricción de menor o igual. Por conveniencia se escribirá la restricción (18) como $(v_{ak} - x_{r_a})\lambda_{ak} = 0$, con $\lambda_{ak} \geq 0$. Dado que el problema (14)-(16) tiene una matriz de restricciones unimodular, la solución óptima de su relajación lineal es una solución entera, por lo que el valor óptimo del problema primal será igual al de su dual. Por lo tanto puede reemplazarse el problema de optimización primal por sus restricciones, las de su problema dual y las condiciones de holgura complementaria.

Dado que en el problema resultante hay expresiones no lineales, es necesario buscar una forma de linealizarlas. Usando la metodología empleada en [7], las expresiones (18) y (19) pueden reemplazarse por las siguientes:

$$\lambda_{ak} \leq M_k(1 - x_{ra} + v_{ak}) \quad \forall a \in A, k \in K, \quad (20)$$

$$c_a - \pi_{ik} + \pi_{jk} + \lambda_{ak} \leq M_k(1 - v_{ak}) \quad \forall a = (i, j) \in A, k \in K, \quad (21)$$

donde M_k es un número suficientemente grande y depende del par o-d k . Esta transformación es válida dado que el flujo de cualquier par o-d k es indivisible, por lo que es posible imponer la restricción $v_{ak} \in \{0, 1\}$, es decir, las variables de flujo serán binarias.

El modelo de optimización de recorridos y frecuencias resultante (22)-(35) es lineal en un nivel, con variables binarias. Esta formulación puede ser resuelta en forma exacta mediante técnicas de programación lineal entera mixta. Sin embargo el modelo obtenido no es necesariamente una relajación del modelo bi-nivel original.

$$\min_{x, f, v, \pi, \lambda} \sum_{r \in R} f_r \sum_{a \in A_r} c_a \quad (22)$$

$$\text{s.a.} \sum_{a \in A_e} f_{ra} \leq \kappa_e \quad e \in E, \quad (23)$$

$$0 \leq f_r \leq f^m x_r \quad r \in R, \quad (24)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} v_{ak} = b_{nk} \quad n \in N, k \in K, \quad (25)$$

$$v_{ak} \leq x_{ra} \quad a \in A, k \in K, \quad (26)$$

$$\pi_{ik} - \pi_{jk} - \lambda_{ak} \leq c_a \quad a = (i, j) \in A, k \in K, \quad (27)$$

$$\lambda_{ak} \leq M_k(1 - x_{ra} + v_{ak}) \quad a = (i, j) \in A, k \in K, \quad (28)$$

$$c_a - \pi_{ik} + \pi_{jk} + \lambda_{ak} \leq M_k(1 - v_{ak}) \quad a \in A, k \in K, \quad (29)$$

$$\sum_{a \in A} c_a v_{ak} / c_k^* \leq \rho_k^m \quad k \in K, \quad (30)$$

$$\sum_{k \in K} v_{ak} \delta_k \leq f_{ra} \omega^b \quad a \in A, \quad (31)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{a \in \cup_{i=1..s+1} A_i^D} v_{ak} \delta_k / \sum_{k \in K} \delta_k \geq \Delta^s \quad s = 0.. \tau^m - 1, \quad (32)$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad r \in R, \quad (33)$$

$$v_{ak} \in \{0, 1\} \quad a \in A, k \in K, \quad (34)$$

$$\lambda_{ak} \geq 0 \quad a \in A, k \in K, \quad (35)$$

donde

$$b_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = O_k, \\ -1 & \text{si } n = D_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.2. Formulación de un solo nivel 2: relajación de la función objetivo y restricción de división de flujo del nivel inferior

Si en un modelo bi-nivel se elimina la función objetivo del nivel inferior, entonces las restricciones de dicho nivel pasan al nivel superior y se obtiene un modelo en un nivel, que es una relajación del modelo bi-nivel original [5]. Sin embargo al efectuar esta transformación al problema (1)-(13), la restricción (7) que es lineal en el nivel inferior (la frecuencia es un parámetro) pasa a ser no lineal en el nivel superior (la frecuencia es una variable de decisión); sustituyendo la variable f_r por el valor constante f^m en dicha restricción, se obtiene una nueva relajación más debil. La formulación resultante (36)-(47) es lineal entera mixta y constituye una relajación del problema bi-nivel original.

$$\min_{x,f,v,w} \sum_{r \in R} f_r \sum_{a \in A_r} c_a \quad (36)$$

$$\text{s.a.} \sum_{a \in A_e} f_{r_a} \leq \kappa_e \quad e \in E, \quad (37)$$

$$0 \leq f_r \leq f^m x_r \quad r \in R, \quad (38)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} v_{ak} = b_{nk} \quad n \in N, k \in K, \quad (39)$$

$$v_{ak} \leq f^m w_{nk} \quad a \in A_n^{E+}, n \in N, k \in K, \quad (40)$$

$$0 \leq v_{ak} \leq \delta_k x_{r_a} \quad a \in A, k \in K, \quad (41)$$

$$w_{nk} \geq 0 \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (42)$$

$$\left(\sum_{a \in A} c_a v_{ak} + \sum_{n \in N} w_{nk} \right) / \delta_k c_k^* \leq \rho_k^m \quad k \in K, \quad (43)$$

$$\sum_{a \in A_n^{E+}} v_{ak} \geq w_{nk} / \epsilon^m \quad n \in N, k \in K, \quad (44)$$

$$\sum_{k \in K} v_{ak} \leq f_{r_a} \omega^b \quad a \in A, \quad (45)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{a \in \cup_{i=1..s+1} A_i^D} v_{ak} / \sum_{k \in K} \delta_k \geq \Delta^s \quad s = 0.. \tau^m - 1, \quad (46)$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad r \in R, \quad (47)$$

donde

$$b_{nk} = \begin{cases} \delta_k & \text{si } n = O_k, \\ -\delta_k & \text{si } n = D_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Trabajo futuro

Es posible linealizar la formulación (1)-(13) mediante una discretización del dominio de las frecuencias: en lugar de tomar cualquier valor real positivo, las frecuencias se toman de un conjunto predefinido (parámetro del problema) $F = \{\phi_1, \dots, \phi_{|F|}\}$ indexado por f . La variable continua f_r se sustituye por la variable binaria y_{rf} que vale 1 si la frecuencia f es asignada al recorrido r . Las ecuaciones que involucran a f deben reescribirse en términos de y , en particular la restricción no lineal (7) se sustituye por:

$$v_{ak} \leq \phi_{f_a} w_{nk} \quad \forall a \in A_n^{E+}, n \in N, k \in K,$$

donde f_a es el índice en el conjunto de frecuencias F correspondiente al arco a . El grafo de trayectorias G^T debe incluir un arco de espera por cada posible frecuencia de F . La formulación obtenida de esta forma denota un problema de tipo Discrete Linear Bilevel Programming Problem [12], en particular del tipo DCLB (Discrete Continuous Linear Bilevel), es decir, lineal bi-nivel, con variables discretas en el nivel superior y continuas en el nivel inferior.

Como trabajo futuro se plantea el estudio de algoritmos de resolución exacta para problemas DCLB [2], algoritmos exactos específicos para el problema (1)-(13) y metaheurísticas para obtener soluciones aproximadas para instancias de tamaño mediano.

Agradecimientos: El autor agradece al Dr. Ricardo Giesen por su guía en los temas desarrollados en este trabajo y al Dr. Juan Carlos Muñoz por su participación en discusiones específicas. Ambos investigadores son profesores en el Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Referencias

- [1] Baaj MH, Mahmassani H. Hybrid route generation heuristic algorithm for the design of transit networks. *Transportation Research C* 3(1):31-50, 1995.
- [2] Bard J. *Practical Bilevel Optimization*. Kluwer, 1998.
- [3] Borndörfer R, Grötschel M, Pfetsch M. A column-generation approach to line planning in public transport. *Transportation Science* 41(1):123-132, 2007.
- [4] Chriqui C, Robillard P. Common bus lines. *Transportation Science* 9: 115-121, 1975.
- [5] Colson B, Marcotte P, Savard G. An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research* 153:235-256, 2007.

- [6] Fan W, Machemehl R. A Tabu Search based heuristic method for the transit route network design problem. 9th International Conference on Computer Aided Scheduling of Public Transport, 2004.
- [7] Kara BY, Verter V. Designing a Road Network for Hazardous Materials Transportation. *Transportation Science* 38(2):188-196, 2004.
- [8] Mauttone A, Urquhart ME. A route set construction algorithm for the transit network design problem, *Computers and Operations Research* 36(8):2440-2449, 2009.
- [9] Pattnaik SB, Mohan S, Tom VM. Urban bus transit route network design using Genetic Algorithm. *Journal of Transportation Engineering* 124(4):368-375, 1998.
- [10] Schöbel A, Scholl S. Line Planning with Minimal Traveling Time. 5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways, 2006.
- [11] Spiess H, Florian M. Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research B* 23(2):83-102, 1989.
- [12] Vicente L, Savard G, Judice J. Discrete Linear Bilevel Programming Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications* 89(3):597-614, 1996.
- [13] Wan Q, Lo H. A mixed integer formulation for multiple-route transit network design. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 2(4):299-308, 2003.