
Teorema de Riemann-Roch y aplicaciones

Por: Brian Britos Simmari

Orientador: Iván Pan

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Agosto de 2022

Resumen

El objetivo principal de este trabajo monográfico es proporcionar una prueba y mostrar aplicaciones del siguiente resultado.

Teorema (Riemann-Roch). *Si D es un divisor de una curva proyectiva no singular \mathcal{C} de género g en \mathbb{P}_2 y K es un divisor canónico de \mathcal{C} entonces*

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

A fin de que el trabajo sea autocontenido y accesible para estudiantes avanzados de la licenciatura en Matemática, desarrollaremos con cierto detalle los prerrequisitos necesarios para entender el enunciado y su correspondiente demostración. En particular, en el capítulo 1 introduciremos las nociones básicas sobre curvas proyectivas planas. En el capítulo 2 definiremos la resultante de dos polinomios, la intersección de multiplicidad de dos curvas proyectivas y demostraremos el Teorema de Bézout. En el capítulo 3 estudiaremos nociones topológicas de las curvas proyectivas como los cubrimientos ramificados y demostraremos la fórmula de género-grado. En el capítulo 4 veremos que las curvas proyectivas planas son lo que se conoce como superficies de Riemann y definiremos los divisores de curvas proyectivas. En el capítulo 5 veremos algunas propiedades de los divisores y demostraremos el teorema central de este trabajo, el Teorema de *Riemann-Roch*. En el capítulo 6, veremos algunas aplicaciones interesantes que se deducen del mencionado teorema. Finalmente, en el capítulo 7 se encuentran resultados necesarios para algunas demostraciones.

Para la mayor parte de las demostraciones seguiremos ([1]).

Agradecimientos

Es difícil resumir el largo y emocionante camino que fue estudiar la licenciatura en Matemática, sin duda no podría haberlo hecho solo, es por eso quiero plasmar aquí a aquellas personas que fueron, y siguen siendo, un gran apoyo. Primero quiero agradecer a mis padres, Liliam y Marcelo, quienes siempre me apoyaron y me incentivaron a seguir mis sueños. En segundo lugar, pero no menos importante, agradezco a mi compañera de vida Sofía, con quien celebre cada buen momento y quien supo contenerme en los malos, en esos en los que nos preguntamos ¿Por qué estoy haciendo esto?. Sin duda, sin ellos no hubiese llegado hasta este punto.

También quiero agradecer a mis amigos, Martín, Antonio, Cynthia, Antonela y Santiago, quienes me acompañan hace muchos años y a quienes en más de una juntada aburrí hablando de Matemática.

No quiero olvidarme de los colegas de CMAT y el IMERL, con quienes en varias ocasiones nos quedamos en los pasillos hablando de esto que tanto nos gusta. En particular agradecer a Matias con quien compartimos varios cursos y muchas horas de estudio.

Por último quiero agradecer a Alvaro y Gonzalo, quienes se hicieron el tiempo para revisar este trabajo y darme muy buenas sugerencias.

Índice general

Capítulo 1. Prerrequisitos	5
1. Espacio proyectivo complejo	6
2. Curvas proyectivas complejas en \mathbb{P}_2	11
Capítulo 2. Teorema de Bézout	17
1. Resultante y algunas propiedades	17
2. Multiplicidad de intersección	26
Capítulo 3. Propiedades topológicas de las curvas proyectivas	37
1. Cubrimientos ramificados de \mathbb{P}_1	37
2. Demostración de la fórmula de género-grado	41
Capítulo 4. Superficies de Riemann y divisores de curvas proyectivas	49
1. Superficies de Riemann	49
2. Divisores de curvas proyectivas	57
Capítulo 5. Resultados principales	65
Capítulo 6. Aplicaciones	79
Anexo	85
Resultados sobre funciones de variable compleja	85
Resultados sobre topología	87
Bibliografía	91

Prerrequisitos

En este capítulo introduciremos las nociones básicas sobre curvas algebraicas, el espacio proyectivo y curvas algebraicas proyectivas, todo esto sobre \mathbb{C} , el cuerpo de los números complejos. Recordamos que \mathbb{C} es un cuerpo algebraicamente cerrado, es decir:

Teorema (Gauss 1799). *Todo polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[x]$ tiene al menos una raíz.*

Veremos también que las curvas algebraicas proyectivas son compactas y Hausdorff para la topología heredada de la topología usual de \mathbb{C}^n .

Definición 1.1 (Curva algebraica plana). *Dado un polinomio $P \in \mathbb{K}[x, y]$ definimos la curva algebraica asociada a P como*

$$\mathcal{C}_P = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

Cuando no haya ambigüedad sobre el polinomio P llamaremos a la curva algebraica simplemente \mathcal{C} .

Observación 1.2. *Si consideramos curvas planas reales, esto es sobre el cuerpo \mathbb{R} , pueden pasar cosas no deseadas. Por ejemplo, la curva algebraica asociada al polinomio $P(x, y) = x^2 + y^2 - r \in \mathbb{R}[x, y]$ depende de r . Si $r = 0$, la curva consiste en un único punto, a saber $(0, 0)$. Por otro lado, si $r < 0$, entonces no hay ningún punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumpla $x^2 + y^2 = r < 0$. Finalmente si $r > 0$, entonces la curva es una circunferencia centrada en el origen de radio \sqrt{r} .*

La razón de por que cuando r es negativo la curva no tiene puntos, es que el cuerpo \mathbb{R} no es algebraicamente cerrado. Esa es una de las razones por las cuales en esta monografía trabajaremos con el cuerpo de base \mathbb{C} .

Si analizamos el mismo polinomio pero ahora permitimos soluciones complejas, (es decir $x^2 + y^2 - r$ en $\mathbb{C}[x, y]$) entonces siempre hay puntos (x, y) que anulan el polinomio. Por ejemplo, cuando $r < 0$, podemos fijar $x = x_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y obtenemos

$$y = \pm \sqrt{r - x_0^2} = \pm i \sqrt{|r - x_0^2|} \neq 0.$$

El siguiente resultado nos sera útil en repetidas ocasiones en los próximos capítulos:

Lema 1.3. *Si $P \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio homogéneo de grado d , entonces puede escribirse como el producto de d factores lineales, es decir*

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^d (\alpha_i x + \beta_i y),$$

para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Como P es homogéneo de grado d en las variables x e y podemos escribir

$$P(x, y) = \sum_{r=0}^d a_r x^r y^{d-r} = y^d \sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r,$$

con $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ no todos nulos. Si $e = \max\{0 \leq i \leq d : a_i \neq 0\}$, entonces $\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r$ es un polinomio de grado e en la variable $\frac{x}{y}$ y por lo tanto (por ser \mathbb{C} algebraicamente cerrado) se puede factorizar como

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r = a_e \prod_{i=1}^e \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right),$$

para algunos $\gamma_1, \dots, \gamma_e \in \mathbb{C}$ (las raíces). Finalmente

$$P(x, y) = a_e y^d \prod_{i=1}^e \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right) = a_e y^{d-e} \prod_{i=1}^e (x - \gamma_i y),$$

probando así el resultado. □

1. Espacio proyectivo complejo

Introduciremos el espacio proyectivo para tener dos propiedades deseables que no siempre se verifican si trabajamos en \mathbb{C}^2 . Por un lado, toda curva algebraica $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ (definida por un polinomio no constante) es no compacta. En efecto, si \mathcal{C} está definida por el polinomio $P(x, y)$, tenemos dos casos posibles: Primero, si tanto x como y aparecen en P , entonces fijando una variable, por ejemplo, $y = y_0$ tenemos que $P(x, y_0) \in \mathbb{C}[x]$, que por ser \mathbb{C} algebraicamente cerrado tiene alguna raíz. Por lo tanto para todo y_0 fijo existe $x_{y_0} \in \mathbb{C}$ tal que $(x_{y_0}, y_0) \in \mathcal{C}$. Pero y_0 lo podemos elegir arbitrariamente lejos del origen, por ejemplo tomando $y_0 = n$, de donde $(x_n, n) \in \mathcal{C}$ y además

$$\|(x_n, n)\| = \sqrt{x_n^2 + n^2} \geq n \rightarrow \infty.$$

El otro caso es cuando x o y no aparecen en P (alguna variable debe aparecer pues si no el polinomio es constante). Supongamos que la variable que aparece es x , por lo tanto P en realidad es un polinomio en esta única variable. Por lo tanto P tiene alguna raíz $x = x_0$, entonces P se anula en (x_0, y) para todo $y \in \mathbb{C}$, y obtenemos una conclusión análoga.

Otra propiedad deseada que no siempre se verifica en \mathbb{C}^2 , es que dos curvas algebraicas siempre se intersectan. Por ejemplo, si \mathcal{C} y \mathcal{D} están definidas por $P(x, y) = x + 1$ y $Q(x, y) = x + 2$ respectivamente, entonces no existe ningún punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ que anule ambos polinomios al mismo tiempo.

La idea del espacio proyectivo es compactificar \mathbb{C}^2 , agregando puntos en el infinito. Veremos que con esto se obtienen curvas algebraicas compactas. Además, como veremos, dos curvas algebraicas en el espacio proyectivo siempre se intersectan.

Definición 1.4. *El espacio proyectivo complejo \mathbb{P}_n de dimensión n es el conjunto de subespacios lineales de dimensión 1 de \mathbb{C}^{n+1} .*

Como todo subespacio U de dimensión 1 en un espacio vectorial es generado por cualquier vector no nulo en U , podemos pensar \mathbb{P}_n como el espacio cociente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \sim$ donde $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(x_1, \dots, x_n) = \lambda(y_1, \dots, y_n)$.

Definición 1.5. *Todo vector no nulo $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ representa un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_n$. Llamaremos a (x_0, \dots, x_n) un sistema de coordenadas (homogéneo) de \mathbf{x} y lo denotaremos \mathcal{X} . Escribimos*

$$\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n].$$

Observación 1.6. *Con la notación anterior,*

$$\mathbb{P}_n = \{[x_0, \dots, x_n] : (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\}.$$

Además $[x_0, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n]$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $x_j = \lambda y_j$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Una vez que definimos el espacio proyectivo, nos interesa darle una topología y ver que con esta topología, \mathbb{P}_n es compacto. Para esto definimos el mapa $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ que manda (x_0, \dots, x_n) al punto $[x_0, \dots, x_n]$ y ponemos en \mathbb{P}_n la topología cociente, es decir:

$$A \subset \mathbb{P}_n \text{ es abierto si y sólo si } \Pi^{-1}(A) \text{ es abierto en } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}.$$

Llamaremos al mapa Π "la proyección al cociente".

Observación 1.7. Como \mathbb{P}_n tiene la topología cociente, se tiene que la proyección al cociente es continua.

Proposición 1.8. Con esta topología \mathbb{P}_n es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S^{2n+1} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}$, la esfera $2n + 1$ dimensional. Luego S^{2n+1} es compacta por ser cerrada y acotada en \mathbb{C}^{n+1} . Por otro lado, como el mapa

$\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ es continuo, tenemos que $\Pi(S^{2n+1})$ es compacto en \mathbb{P}_n .

Por otro lado, si $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n$ entonces $\lambda = |x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 \neq 0$, ya que por construcción, en \mathbb{P}_n tenemos que no todos los x_j pueden ser nulos. Por lo tanto, en \mathbb{P}_n tenemos que

$$[x_0, \dots, x_n] = [\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \dots, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_n].$$

Además $|\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0|^2 + \dots + |\lambda^{-\frac{1}{2}}x_n|^2 = 1$ es decir $(\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \dots, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_n) \in S^{2n+1}$ y por lo tanto

$$\Pi((\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \dots, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_n)) = [\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \dots, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_n] \in \Pi(S^{2n+1}),$$

es decir $[x_0, \dots, x_n] \in \Pi(S^{2n+1})$. Como $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n$ es arbitrario, deducimos que Π es sobreyectivo, o sea $\Pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}_n$. \square

Esta proposición nos sera útil más adelante para probar que las curvas algebraicas proyectivas son compactas.

Queremos tener una noción de cambio de coordenadas. En el contexto de espacio proyectivo tenemos lo siguiente:

Definición 1.9. Una transformación proyectiva de \mathbb{P}_n es un mapa biyectivo $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ tal que para algún isomorfismo lineal $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ se tiene que $f \circ \Pi = \Pi \circ \alpha$, donde $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ es la proyección al cociente.

Lema 1.10. Toda transformación proyectiva es continua (con la topología inducida).

DEMOSTRACIÓN. Si $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ es una transformación proyectiva, entonces existe un isomorfismo lineal $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ \alpha$. Como Π y α son continuas (toda transformación lineal es continua) entonces $\Pi \circ \alpha$ es continua y por lo tanto $f \circ \Pi$ es continua.

Para ver que f es continua, debemos probar que si U es abierto en \mathbb{P}_n entonces $f^{-1}(U)$ es abierto. Como Π es la proyección al cociente tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{P}_n si y sólo si $\Pi^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto en \mathbb{C}^{n+1} . Por otro lado, $(\Pi^{-1} \circ f^{-1})(U) = (f \circ \Pi)^{-1}(U)$ que es abierto por ser $f \circ \Pi$ un mapa continuo. \square

Definición 1.11. *Un hiperplano en \mathbb{P}_n es la imagen por la proyección Π de $V \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ donde $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ es un subespacio de dimensión n .*

Lema 1.12. *Si p_1, \dots, p_{n+1} y q son $n+2$ puntos distintos de \mathbb{P}_n , de los cuales cualquiera $n+1$ de ellos no están en un mismo hiperplano, entonces existe una única transformación proyectiva que lleva p_i a $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ y q a $[1, \dots, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la proyección al cociente Π es un mapa sobreyectivo, existen $u_1, \dots, u_{n+1}, v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tales que

$$\Pi(u_j) = p_j \quad \text{y} \quad \Pi(v) = q.$$

Como los puntos p_1, \dots, p_{n+1} no están en un mismo hiperplano en \mathbb{P}_n , el conjunto $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ no está contenido en un subespacio de dimensión menor o igual a n , por lo tanto es una base de \mathbb{C}^{n+1} .

Sea $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ la transformación lineal que lleva $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ en la base canónica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Luego

$$\alpha(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = \alpha(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1}),$$

por ser α una transformación lineal.

Veamos que $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n+1$. Supongamos que ese no es el caso, entonces $\lambda_j = 0$ para algún j . Luego $v = \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i$ es decir v es combinación lineal de n de los puntos $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$, pero entonces $\{p_1, \dots, p_{n+1}\} \setminus \{p_j\}$ y q están en un mismo hiperplano lo cual contradice la hipótesis.

Como $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n+1$, podemos definir $\beta : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ como la transformación lineal definida por $\beta(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right)$. Luego $\beta \circ \alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ induce una transformación proyectiva $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ tal que

$$p_i \mapsto \left[0, \dots, \frac{1}{\lambda_i}, \dots, 0 \right] = [0, \dots, 1, \dots, 0] \quad \text{y} \quad q \mapsto [1, \dots, 1].$$

\square

Si definimos $U_0 = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n : x_0 \neq 0\}$, entonces $\Pi^{-1}(U_0) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : x_0 \neq 0\}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y por lo tanto U_0 es abierto en \mathbb{P}_n . Podemos definir entonces un mapa $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que

$$\phi_0([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Observación 1.13. 1. Los conjuntos $U_k = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n : x_k \neq 0\}$ también son abiertos para todo $0 \leq k \leq n$.

2. Cuando estemos en \mathbb{P}_2 usaremos la notación U_x , U_y y U_z para referirnos a U_0 , U_1 y U_2 respectivamente.

Usaremos este mapa para probar que \mathbb{P}_n es Hausdorff, pero antes tenemos que probar:

Lema 1.14. El mapa $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ definido como

$$\phi_0([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que ϕ_0 es continua es suficiente ver que si $(x_0, \dots, x_n) \in \Pi^{-1}(U_0)$ entonces la composición

$$(x_0, \dots, x_n) \xrightarrow{\Pi} [x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\phi_0} \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right),$$

es continua. Pero esta composición pensada como mapa de $\Pi^{-1}(U_0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ en \mathbb{C}^n es básicamente la proyección en las últimas n coordenadas compuesta con una homotecia (multiplicar por $\frac{1}{x_0}$), y por lo tanto es continua.

Es una cuenta ver que la inversa de ϕ_0 está dada por

$$\phi_0^{-1} \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) = \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right],$$

ya que en el espacio proyectivo \mathbb{P}_n , tenemos que $\left[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$, esto último porque $x_0 \neq 0$ en U_0 .

Recíprocamente, para probar que ϕ_0^{-1} es continua nos alcanza con observar que es la composición

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\eta} (1, y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\Pi} [1, y_1, \dots, y_n],$$

donde $\eta : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ es continua. Por lo tanto el mapa ϕ_0 es un homeomorfismo entre U_0 y \mathbb{C}^n .

□

Proposición 1.15. *El espacio proyectivo \mathbb{P}_n es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p \neq q \in \mathbb{P}_n$. Separamos la prueba en dos casos

1. Si $p, q \in U_0$, como \mathbb{C}^n es Hausdorff, existen entornos disjuntos V y W de $\phi_0(p)$ y $\phi_0(q)$ (en \mathbb{C}^n) respectivamente. Luego como $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo (Lema 1.14) deducimos que $\phi_0^{-1}(V)$ y $\phi_0^{-1}(W)$ son entornos disjuntos de p y q en $U_0 \subset \mathbb{P}_n$.
2. Para el caso general, podemos encontrar $p = p_0, \dots, p_n, q \in \mathbb{P}_n$ tales que cualesquiera $n + 1$ de ellos no estén en un mismo hiperplano. Por el Lema 1.12 existe una transformación proyectiva $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ tal que $f(p) = [1, 0, \dots, 0]$ y $f(q) = [1, \dots, 1]$. Observar que en este caso $f(p), f(q) \in U_0$, luego por la parte anterior, existen entornos disjuntos $\phi_0^{-1}(V)$ y $\phi_0^{-1}(W)$ de $f(p)$ y $f(q)$ en \mathbb{P}_n . Finalmente como f es continua (Lema 1.10) y biyectiva (por definición de transformación proyectiva) tenemos que $f^{-1} \circ \phi_0^{-1}(V)$ y $f^{-1} \circ \phi_0^{-1}(W)$ son entornos disjuntos de p y q en \mathbb{P}_n .

□

2. Curvas proyectivas complejas en \mathbb{P}_2

Definición 1.16. *Diremos que un polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es homogéneo de grado d si para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se cumple que*

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z).$$

Definición 1.17. *Sea $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio no constante. Diremos que P es irreducible si cada vez que $P = QR$, con $Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]$, entonces Q es un polinomio constante o P es un polinomio constante. En caso contrario, diremos que P es reducible.*

En otras palabras, un polinomio P no constante es irreducible si no se puede escribir como el producto de dos polinomios de grado menor, a no ser que uno de ellos sea un polinomio constante.

Teorema 1.18. *Todo polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ puede escribirse como un producto*

$$P = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k},$$

donde cada P_i es irreducible y $r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Además, los polinomios P_1, \dots, P_k son únicos.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [3].

Observación 1.19. *El teorema anterior nos dice que $\mathbb{C}[x, y, z]$ es lo que usualmente se conoce como un dominio de factorización única.*

Corolario 1.20. *Si $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo, y $P = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k}$ es una descomposición como en el teorema anterior, entonces cada polinomio P_j es homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción, nos basta ver que si $P = QR$ con P homogéneo y Q irreducible, entonces Q es homogéneo.

Supongamos que Q es no homogéneo, podemos escribir $Q = Q_M + Q_{nh}$, donde Q_M es el término de mayor grado de Q y $Q_{nh} = Q - Q_M$. Luego,

$$\begin{aligned} P &= QR \\ &= (Q_M + Q_{nh})R \\ &= Q_M R + Q_{nh} R. \end{aligned}$$

Como estamos en $\mathbb{C}[x, y, z]$ (que es en particular un dominio), sabemos que

$$\begin{aligned} \deg(Q_M R) &= \deg(Q_M) + \deg(R) \\ &= \deg(Q) + \deg(R) \\ &= \deg(P), \end{aligned}$$

donde $\deg(Q_M) = \deg(Q)$ por como elegimos Q_M . Por otro lado, $\deg(Q_{nh}) < \deg(Q_M)$ por lo que

$$\begin{aligned} \deg(Q_{nh} R) &= \deg(Q_{nh}) + \deg(R) \\ &< \deg(P), \end{aligned}$$

por lo tanto, como P es homogéneo necesariamente $Q_{nh} R = 0$.

Finalmente, como Q no es homogéneo, tenemos $Q_{nh} \neq 0$, por lo que $R = 0$ lo cual contradice que $P = QR$, pues P es homogéneo, en particular no nulo. □

Definición 1.21. *Diremos que un polinomio $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es sin factores múltiples, si en cada descomposición en producto de irreducibles $P = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k}$ se tiene que cada exponente r_j es 1.*

Definición 1.22. *Sea $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio homogéneo no constante sin factores múltiples. Definimos la curva proyectiva \mathcal{C} definida por P como*

$$\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : P(x, y, z) = 0\}.$$

Observación 1.23. Como el polinomio es homogéneo, la condición $P(x, y, z) = 0$ es independiente de la elección de coordenadas homogéneas, ya que si $[x, y, z] = [x', y', z']$ entonces $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de donde

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z) = 0 \iff P(x, y, z) = 0.$$

Observación 1.24. Estamos usando el cuerpo \mathbb{C} para la definición porque más adelante veremos resultados que son válidos en \mathbb{C} , pero la definición de curva proyectiva puede ser dada en cualquier cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 1.25. Sea \mathcal{C} una curva proyectiva definida por un polinomio homogéneo $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$:

1. El grado de la curva \mathcal{C} es el grado del polinomio P .
2. Diremos que la curva \mathcal{C} es irreducible si P es un polinomio irreducible.
3. Diremos que una curva proyectiva irreducible \mathcal{D} definida por un polinomio homogéneo e irreducible Q es una componente de \mathcal{C} si Q divide a P .

Ejemplo 1.26. 1. La curva proyectiva definida por $xy + zx + yz$ es irreducible de grado 2.

2. La curva proyectiva definida por $x + y$ es una componente de la curva proyectiva definida por $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Observación 1.27. Observar que para que \mathcal{D} sea una componente de \mathcal{C} entonces necesariamente el grado de \mathcal{D} tiene que ser menor o igual al de \mathcal{C} , ya que si $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ son tales que P divide a Q , entonces el grado de P es menor o igual al grado de Q .

Es importante notar que no todos los puntos de una curva algebraica tienen las mismas características. Por ejemplo, podemos entender un poco de la geometría de la curva proyectiva asociada al polinomio $P(x, y, z) = zy^2 - x^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ estudiándola en los abiertos U_x , U_y y U_z . Llamemos \mathcal{C} a la curva proyectiva asociada a P .

En particular, observar que en U_z , como $z \neq 0$ podemos ver que sucede cuando $z = 1$. En este caso la curva \mathcal{C} se ve como en la figura 2.1. La "cuspid" que aparece, corresponde al punto $[0, 0, 1]$. Este fenómeno ocurre porque $\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1)$ y $\frac{\partial P}{\partial z}(0, 0, 1)$ son nulas.

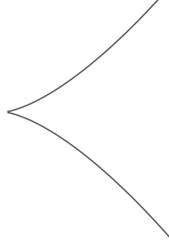


FIGURA 2.1. Curva algebraica asociada a $y^2 = x^3$ cuando solo permitimos ceros en \mathbb{R}^2

Lema 1.28. Si $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo de grado d , entonces $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial z}$ son polinomios, que de no ser nulos son homogéneos de grado $d - 1$.

DEMOSTRACIÓN. Lo probaremos para $\frac{\partial P}{\partial x}$, las demás son análogas. Pensando a P como polinomio en $\mathbb{C}[y, z][x]$, podemos escribir $P(x, y, z) = \sum_{j=0}^d b_j(y, z)x^j$. Como P es un polinomio homogéneo de grado d , necesariamente el grado de $b_j(y, z)x^j$ es d , para todo $0 \leq j \leq d$. Derivando la expresión anterior para P con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{j=1}^d j b_j(y, z) x^{j-1}.$$

Tenemos dos casos:

1. Si $b_j(y, z) = 0$ para todo $j \geq 1$ (es decir $P(x, y, z) = b_0(y, z)$), entonces $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.
2. Si $b_j(y, z) \neq 0$ para algún $j \geq 1$, entonces $\frac{\partial P}{\partial x}$ consiste en suma de términos de la forma $b_j(y, z)x^{j-1}$, los cuales tienen grado $d - 1$, y por lo tanto $\frac{\partial P}{\partial x}$ es un polinomio homogéneo de grado $d - 1$.

Para probar los otros dos casos, pensamos a P como polinomio en $\mathbb{C}[x, z][y]$ y $\mathbb{C}[x, y][z]$ respectivamente. □

Definición 1.29. Decimos que un punto $[a, b, c]$ de una curva proyectiva \mathcal{C} definida por un polinomio homogéneo P es singular si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

El conjunto de puntos singulares de \mathcal{C} lo designaremos $\text{Sing}(\mathcal{C})$, y diremos que la curva es no singular si $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \emptyset$.

Observación 1.30. La definición anterior no depende del representante de $[a, b, c]$ porque en virtud del lema 1.28, si P es un polinomio homogéneo, entonces $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial z}$ también son polinomios homogéneos o son nulos.

Ejemplo 1.31. 1. La curva definida por $P(x, y, z) = y^2z - x^3$ tiene un punto singular en $[0, 0, 1]$.
2. La curva proyectiva definida por $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ es no singular, ya que las derivadas de primer orden no se anulan.

Definición 1.32. Decimos que una curva proyectiva definida por una ecuación lineal

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \text{ no todos nulos}$$

es una recta proyectiva.

Definición 1.33. Si $\mathcal{C} \in \mathbb{P}_2$ es una curva proyectiva definida por un polinomio homogéneo P y $[a, b, c] \notin \text{Sing}(\mathcal{C})$, definimos la recta tangente a \mathcal{C} en el punto $[a, b, c]$ como la recta proyectiva definida por

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0.$$

Observación 1.34. La definición anterior no depende del representante de $[a, b, c]$ elegido por el lema 1.28.

Ejemplo 1.35. Ya vimos que si $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ entonces $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \emptyset$, luego en todo $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ podemos definir la recta tangente, que será la recta proyectiva definida por

$$2ax + 2by - 2cz = 0.$$

Como las curvas proyectivas son subconjuntos de \mathbb{P}_2 y en \mathbb{P}_2 tenemos una topología, es natural dotar a \mathcal{C} con la topología inducida.

Lema 1.36. Toda curva proyectiva en \mathbb{P}_2 es compacta y Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{C} una curva proyectiva. Para ver que es compacta, como \mathbb{P}_2 es compacto (Proposición 1.8) nos alcanza con ver que \mathcal{C} es cerrado, lo cual sucede si y sólo si

$$\Pi^{-1}(\mathcal{C}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : P(x, y, z) = 0\}$$

es cerrado en $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ (porque en \mathbb{P}_n tenemos la topología cociente). Por otro lado, el conjunto $\Pi^{-1}(\mathcal{C}) = P^{-1}(0)$ es cerrado, pues $\{0\} \subset \mathbb{C}$ cerrado (\mathbb{C} es T^1) y P continuo (por ser un polinomio).

Finalmente, como \mathbb{P}_2 es Hausdorff (Proposición 1.15), entonces \mathcal{C} es Hausdorff pues todo subespacio de un espacio Hausdorff es también Hausdorff. \square

Para terminar esta sección, veamos un resultado que será útil más adelante.

Lema 1.37 (Relación de Euler). *Si $P(x, y, z)$ es homogéneo de grado m , entonces*

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = mP(x, y, z).$$

DEMOSTRACIÓN. Como P es homogéneo de grado m tenemos que $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m P(x, y, z) \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Derivando esta igualdad con respecto a λ obtenemos

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z \frac{\partial P}{\partial z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = m\lambda^{m-1}P(x, y, z).$$

Si ahora ponemos $\lambda = 1$, obtenemos el resultado. \square

Teorema de Bézout

En este capítulo probaremos un resultado que es interesante en si mismo, más allá de esta monografía:

Teorema 2.1 (Bézout). *Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son curvas proyectivas de grado n y m que no tienen componentes comunes, entonces se intersectan en exactamente nm puntos, contados con multiplicidad.*

La demostración se encuentra en la página 32.

1. Resultante y algunas propiedades

Definición 2.2. 1. Si D es un dominio de integridad, denotaremos $D[x]_{\leq l}$ al D -módulo conformado por los polinomios de grado menor o igual a l . Observar que $D[x]_{\leq l}$ es un D -módulo libre, generado por $\{1, x, \dots, x^l\}$.

2. Sean $P, Q \in D[x]$ polinomios de grados $n \geq 1$ y $m \geq 1$, respectivamente. Consideremos la aplicación D -lineal

$$\psi : D[x]_{\leq m-1} \times D[x]_{\leq n-1} \rightarrow D[x]_{n+m-1},$$

$$\psi(A, B) = AP + BQ.$$

Definición 2.3. La resultante $\text{Res}_{P,Q}$ de P y Q es el determinante de la matriz asociada a ψ , en las bases canónicas de $D[x]_{\leq m-1} \times D[x]_{\leq n-1}$ y $D[x]_{n+m-1}$, respectivamente.

Explícitamente, si $P(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ y $Q(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$, considerando la base ordenada de $D[x]_{\leq m-1} \times D[x]_{\leq n-1}$ siguiente

$$(1, 0), \dots, (x^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, x^{n-1}),$$

tenemos que

$$\psi(x^i, 0) = x^i P(x) = a_0 x^i + \dots + a_n x^{n+i},$$

y

$$\psi(0, x^j) = x^j Q(x) = b_0 x^j + \dots + b_m x^{m+j}.$$

Deducimos (luego de tomar la transpuesta de la matriz asociada a ψ en las bases canónicas)

$$\text{Res}_{P,Q} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & & \dots & & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix}.$$

Utilizaremos la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ en la siguiente situación: Si P y Q son polinomios en $\mathbb{C}[x, y, z]$, podemos considerar $D = \mathbb{C}[y, z]$, de donde $P, Q \in D[x]$. Precisamos asumir que P y Q tienen grado en x mayor o igual a 1.

Veamos ahora como podemos utilizar la resultante de dos polinomios para ver si estos tienen un factor en común.

Lema 2.4. Sean $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ polinomios no constantes. Entonces P y Q tienen factores comunes no constantes si y sólo si $\text{Res}_{P,Q} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean n y m los grados de P y Q , respectivamente. P y Q tienen un factor común si y sólo si existen dos polinomios ψ y ϕ en $\mathbb{K}[x]$ con $\deg(\psi) < n$ y $\deg(\phi) < m$ tales que

$$(1) \quad \phi P = \psi Q.$$

Si escribimos $P = \sum_j^n a_j x^j$, $Q = \sum_j^m b_j x^j$, $\psi = \sum_j^{n-1} u_j x^j$ y $\phi = \sum_j^{m-1} v_j x^j$, entonces la

ecuación 1 se verifica si y sólo si el sistema

$$\begin{cases} a_0 v_0 - b_0 u_0 = 0 \\ a_1 v_0 + a_0 v_1 - b_1 u_0 - b_0 u_1 = 0 \\ \vdots \\ a_m v_{n-1} - b_n u_{m-1} = 0 \end{cases}$$

tiene solución no trivial, pero esto es equivalente a que $\text{Res}_{P,Q} = 0$.

□

Ejemplo 2.5. Si $P(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$ y $Q(x) = 3x + 2$ entonces es claro que P y Q tienen una componente en común (a saber $3x + 2$). Por otro lado, la resultante es el determinante de la matriz 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

que claramente da cero.

El siguiente lema nos da un resultado similar pero para cuando P, Q son polinomios en $\mathbb{C}[x, y, z]$:

Lema 2.6. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ no constantes tales que $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$. Entonces P y Q tienen un factor común no constante si y sólo si $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es idénticamente nulo.

DEMOSTRACIÓN. Como $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$ podemos suponer (a menos de multiplicar por un escalar) que $P(1, 0, 0) = 1 = Q(1, 0, 0)$, lo cual nos permite pensar a P y Q como polinomios mónicos en $\mathbb{C}[y, z][x]$. Tenemos que el anillo $\mathbb{C}[y, z]$ está incluido trivialmente en su cuerpo de fracciones $\mathbb{C}(y, z) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{C}[y, z] \text{ y } g \text{ no es idénticamente nulo} \right\}$. Luego como $\mathbb{C}(y, z)$ es un cuerpo, por el lema 2.4 tenemos que si pensamos a $P, Q \in \mathbb{C}(y, z)[x]$, entonces $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es idénticamente nulo si y sólo si P y Q tienen un factor común $R \in \mathbb{C}(y, z)[x]$. Lo que nos falta para terminar la prueba, es ver que en realidad este polinomio R está en $\mathbb{C}[y, z][x]$. Para esto, como P y Q son mónicos en $\mathbb{C}(y, z)[x]$ entonces son primitivos, por lo tanto por el lema de Gauss, tenemos que $R \in \mathbb{C}[y, z][x]$. \square

Observación 2.7. Tenemos que en las hipótesis del lema anterior, si P y Q son homogéneos entonces el factor común también lo es, dado que todo factor de un polinomio homogéneo es también homogéneo.

Ejemplo 2.8. Sean

$$P(x, y, z) = (x - 1)(3yz + 2z^2 + 3y + 2z) \quad \text{y} \quad Q(x, y, z) = (x - 1)(z + 1),$$

vemos que P y Q tienen una componente en común (a saber $(x - 1)(z + 1)$). En este caso la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ es el determinante de la matriz 2×2 :

$$\begin{pmatrix} -3yz - 3y - 2z^2 - 2z & 3yz + 3y + 2z^2 + 2z \\ -z - 1 & z + 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.9. Para definir la resultante cuando $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ pensamos a los polinomios en $\mathbb{C}[y, z][x]$, entonces, en caso de existir, una componente común de P y Q es un polinomio $R \in \mathbb{C}[y, z]$. Vale la pena notar que R es constante en $\mathbb{C}[y, z][x]$, pero no tiene porque serlo en $\mathbb{C}[x, y, z]$, como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. Si

$$P(x, y, z) = (x - 1)(3yz + 2z^2 + 3y + 2z) \quad y \quad Q(x, y, z) = z + 1,$$

entonces la resultante es el determinante de la matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} -3yz - 2z^2 - 3y - 2z & 3yz + 2z^2 + 3y + z \\ z + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\text{Res}_{P,Q} \neq 0$, aunque el factor $z + 1$ es un factor común a ambos, pero visto como polinomio en $\mathbb{C}[y, z][x]$ es constante.

Veamos ahora un resultado que será útil al trabajar en el plano proyectivo \mathbb{P}_2 :

Lema 2.11. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneos de grado n y m , respectivamente, tales que

$P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$. Entonces de no ser nula, la resultante $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado nm en las variables y, z .

DEMOSTRACIÓN. Por definición, $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es el determinante de una matriz $(n + m) \times (n + m)$ cuya entrada ij es $r_{ij}(y, z)$, que es un polinomio homogéneo en y, z de grado d_{ij} dado por

$$d_{ij} = \begin{cases} n + i - j & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ i - j & \text{si } m + 1 \leq i \leq n + m \end{cases}$$

Esto se debe a que P y Q son homogéneos.

Luego $\text{Res}_{P,Q}$ es suma de términos de la forma

$$\pm \prod_{i=1}^{n+m} r_{i\sigma(i)}(y, z)$$

con $\sigma : \{1, \dots, n + m\} \rightarrow \{1, \dots, n + m\}$ una permutación de $\{1, \dots, n + m\}$. Esto es por la forma en que calculamos el determinante. Luego, cada sumando de $\text{Res}_{P,Q}$ es homogéneo de grado

$$\sum_{i=1}^{n+m} d_{i\sigma(i)} = \sum_{i=1}^m (n + i - \sigma(i)) + \sum_{i=m+1}^{n+m} (i - \sigma(i)) = nm + \sum_{i=1}^{n+m} (i - \sigma(i)) = nm$$

donde $\sum_{i=1}^{n+m} (i - \sigma(i)) = 0$ por ser σ una permutación de $\{1, \dots, n+m\}$, por lo tanto cuando el índice i recorre todo el conjunto $\{1, \dots, n+m\}$ tenemos que $\sigma(i)$ también lo hace. \square

Como el cuerpo \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ podemos factorizarlos completamente. Es decir, si tienen grado n y m respectivamente, entonces podemos encontrar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y μ_1, \dots, μ_m escalares en \mathbb{C} tales que

$$P(x) = \prod_i^n (x - \lambda_i) \quad \text{y} \quad Q(x) = \prod_j^m (x - \mu_j).$$

Lema 2.12. Si $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, y escribimos $P(x) = \prod_i^n (x - \lambda_i)$ y $Q(x) = \prod_j^m (x - \mu_j)$ entonces

$$\mathcal{R}_{P,Q} = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i).$$

En particular $\mathcal{R}_{P,QR} = \text{Res}_{P,Q} \text{Res}_{P,R}$

DEMOSTRACIÓN. Si pensamos a P y Q como polinomios homogéneos en las variables $x, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ y x, μ_1, \dots, μ_m , entonces modificando la prueba del lema 2.11, tenemos que $\text{Res}_{P,Q}$ es homogéneo de grado nm en las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$.

Por otro lado, el lema 2.4 nos da que $\text{Res}_{P,Q}$ se anula si $\lambda_i = \mu_j$ para algunos $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, de donde deducimos que la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ es divisible por $\prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i)$.

Como $\prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i)$ es también un polinomio homogéneo de grado nm en las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, debe existir una constante $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que

$$\gamma \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i) = \text{Res}_{P,Q}.$$

Por lo tanto, para terminar la prueba, es suficiente probar que γ es 1. Para probar esto, observamos que en el caso particular en que $Q(x) = x^m$ (es decir $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$),

tenemos que $\text{Res}_{P,Q}$ es el determinante de la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n -\lambda_i & * & \dots & * & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^n -\lambda_i & * & \dots & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod_{i=1}^n -\lambda_i & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\text{Res}_{P,Q} = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i)^m.$$

Como γ es constante (y en este caso vale 1), entonces

$$\prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i) = \text{Res}_{P,Q}.$$

Para ver la segunda afirmación, observamos que si $R = \prod_{k=1}^r (x - \alpha_k)$ entonces $QR =$

$$\prod_{j=1}^m (x - \mu_j) \prod_{k=1}^r (x - \alpha_k), \text{ por lo tanto}$$

$$\text{Res}_{P,QR} = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_i - \lambda_j) \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r} (\alpha_k - \lambda_i) = \text{Res}_{P,Q} \text{Res}_{P,R}.$$

□

Observación 2.13. Si $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ son polinomios homogéneos, entonces cada punto de intersección de las curvas en \mathbb{P}_2 definidas por $P = 0$ y $Q = 0$ corresponde a una recta por el origen de \mathbb{C}^3 , sobre la cual se anulan P y Q . Si $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$, dicha recta corresponde a un factor de $\text{Res}_{P,Q} \in \mathbb{C}[y, z]$.

En \mathbb{C}^2 podemos tener curvas que no se intersectan en ningún punto, pero en \mathbb{P}_2 tenemos lo siguiente:

Observación 2.14. Si P y Q son polinomios en $\mathbb{C}[x, y, z]$ que definen curvas proyectivas \mathcal{C} y \mathcal{D} , entonces la curva $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ está definida por PQ .

Por lo tanto, si P y Q son polinomios no nulos en $\mathbb{C}[x, y, z]$, entonces $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}_2$, ya que PQ no es idénticamente nulo.

Teorema 2.15. *Dos curvas proyectivas \mathcal{C} y \mathcal{D} en \mathbb{P}_2 se intersectan al menos en un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando un cambio de coordenadas adecuado, podemos asumir que $[1, 0, 0] \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, ya que por la observación 2.14 $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subsetneq \mathbb{P}_2$.

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} definidas por polinomios homogéneos $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grados n y m respectivamente. Por el lema 2.11 la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ o bien es nula o es un polinomio homogéneo de grado nm .

Por el lema 1.3, si la resultante no es nula, es el producto de nm factores lineales $bx - cy$ con $b, c \in \mathbb{C}$ no nulos a la vez. En ambos casos existe $(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\text{Res}_{P,Q}(b, c) = 0$, es decir, la resultante de $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ se anula, pero por el lema 2.4 esto implica que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$ (porque tienen un factor común) y por lo tanto $[a, b, c] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. \square

Veamos ahora una versión más débil del teorema de Bézout, el cual nos da una cota superior para la cantidad de puntos de intersección entre dos curvas algebraicas \mathcal{C} y \mathcal{D} sin componentes en común, que solo depende de sus grados (en particular dos curvas algebraicas sin componentes en común se intersectan en a lo sumo una cantidad finita de puntos).

Teorema 2.16 (Bézout débil). *Si dos curvas proyectivas \mathcal{C} y \mathcal{D} en \mathbb{P}_2 , de grados n y m respectivamente, no tienen componentes comunes, entonces se intersectan en a lo sumo nm puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por absurdo que $\#\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \geq nm + 1$. Mostraremos que en este caso, las curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen (al menos) una componente en común.

Sea S un conjunto de $nm + 1$ puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Podemos encontrar un punto $p \in \mathbb{P}_2$, tal que $p \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, y además que tampoco esté en ninguna recta proyectiva que pase por dos puntos distintos de S (esto es porque S tiene finitos puntos, por lo tanto también hay finitas rectas que unen dos puntos cualesquiera de S).

Observamos que mediante la aplicación de una transformación proyectiva adecuada podemos asumir que $p = [1, 0, 0]$. En estas nuevas coordenadas, podemos asumir que \mathcal{C} y \mathcal{D} están definidas por polinomios homogéneos $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grados n y m , respectivamente, tales que

$$P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0).$$

Por el lema 2.11, o bien la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ es nula, o bien es un polinomio homogéneo de grado nm en $\mathbb{C}[y, z]$. Nuestro objetivo es mostrar que $\text{Res}_{P,Q}$ es nula, puesto que en dicho caso, el lema 2.6 garantiza que las curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen una componente en común, lo que contradice nuestra hipótesis.

Supongamos que la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ no es nula. Por el lema 1.3, $\text{Res}_{P,Q}$ es el producto de nm factores lineales de la forma $bz - cy$ con $(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Por otro lado, como $(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, entonces $bz - cy$ divide $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ si y sólo si la resultante de $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$, que es un escalar, es nula, y por el lema 2.4 esto sucede si y sólo si existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$.

Paralelamente, si $[a, b, c] \in S$, entonces $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$ y además $(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ puesto que $[1, 0, 0] \notin S$. Por lo tanto, $bz - cy$ divide a la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ si y sólo si existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $[a, b, c] \in S$.

Esto nos dice que, a no ser que algunos factores $bz - cy$ sean múltiplos entre si, entonces

$$\#\{(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} : bz - cy \text{ divide a } \text{Res}_{P,Q}\} \geq \#S = nm + 1.$$

Sean $[\alpha, \beta, \gamma]$ y $[a, b, c]$ dos puntos distintos de S . Luego, $\beta z - \gamma y$ no puede ser un múltiplo escalar de $bz - cy$, pues si lo fuese, entonces $[a, b, c]$, $[\alpha, \beta, \gamma]$ y $[1, 0, 0]$ estarán en una misma recta, lo cual contradice la hipótesis sobre $p = [1, 0, 0]$. Entonces todos los factores $bz - cy$ que dividen a la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ son distintos dos a dos.

Por lo anterior, $\text{Res}_{P,Q}$ tiene al menos $nm + 1$ factores lineales distintos, de donde el grado de $\text{Res}_{P,Q}$ sería al menos $nm + 1$, lo cual contradice que el grado es nm . Entonces, necesariamente $\text{Res}_{P,Q}$ es idénticamente nulo. Lo cual prueba el resultado. \square

Corolario 2.17. *Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_2$ es una curva proyectiva, tenemos lo siguiente*

1. *Si \mathcal{C} es no singular, entonces es irreducible.*
2. *Si \mathcal{C} es irreducible, entonces tiene a lo sumo una cantidad finita de puntos singulares.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Supongamos que \mathcal{C} es reducible, entonces $\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : P(x, y, z)Q(x, y, z) = 0\}$. Por el Teorema 2.15 las curvas \mathcal{D} y \mathcal{E} definidas

por P y Q respectivamente, se intersectan en al menos un punto, es decir existe $[a, b, c] \in \mathbb{P}_2$ tal que $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$. En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial PQ}{\partial x_i}(a, b, c) &= \frac{\partial P}{\partial x_i}(a, b, c)Q(a, b, c) + P \frac{\partial Q}{\partial x_i}(a, b, c) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i}(a, b, c)0 + 0 \frac{\partial Q}{\partial x_i}(a, b, c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x_i \in \{x, y, z\}$, es decir $[a, b, c]$ es un punto singular de \mathcal{C} .

2. Sea \mathcal{C} definida por $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo de grado n . Aplicando una transformación proyectiva podemos suponer que $[1, 0, 0] \notin \mathcal{C}$, entonces $P(1, 0, 0) \neq 0$ y por lo tanto el coeficiente de x^n en $P(x, y, z)$ es no nulo, de donde

$$Q(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)$$

es un polinomio homogéneo no nulo de grado $n - 1$.

Si \mathcal{D} es la curva definida por Q , como \mathcal{C} es irreducible y el grado de Q es estrictamente menor al grado de P , deducimos que \mathcal{C} y \mathcal{D} no tienen componentes en común. El Teorema de Bézout (en su versión débil) implica

$$\#\{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}\} \leq n(n - 1).$$

Finalmente, como todo punto singular está en $\{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}\}$, concluimos que hay a lo sumo $n(n - 1)$ puntos singulares. □

Para terminar esta sección veremos un resultado que es de utilidad para lo que sigue:

Proposición 2.18. *Si dos curvas proyectivas \mathcal{C} y \mathcal{D} de grado n se intersectan en a lo sumo n^2 puntos, y si exactamente nm de estos puntos están en una curva irreducible \mathcal{E} de grado $m < n$, entonces los restantes $m(n - m)$ puntos están en una curva de grado a lo sumo $n - m$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{C} , \mathcal{D} y \mathcal{E} están definidas por polinomios homogéneos P, Q, R en $\mathbb{C}[x, y, z]$, respectivamente. Si $[a, b, c] \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, entonces la curva de grado n definida por el polinomio

$$F(x, y, z) = Q(a, b, c)P(x, y, z) - P(a, b, c)Q(x, y, z),$$

intersecta a \mathcal{E} en por lo menos $nm+1$ puntos que son $[a, b, c]$ y los nm puntos de $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \cap \mathcal{E}$ (esto por hipótesis). Por el Teorema de Bézout (en su forma débil), si \mathcal{F} es la curva definida por el polinomio F , entonces \mathcal{F} y \mathcal{E} tienen que tener una componente en común.

Como \mathcal{E} es irreducible, esta tiene que ser toda la curva E , por lo tanto

$$F(x, y, z) = R(x, y, z)S(x, y, z),$$

para algún $S \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo de grado $n - m$ (pues el grado de F es n y el grado de R es m).

Por otro lado, si $[u, v, w] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ entonces $F(u, v, w) = 0$, por lo tanto $R(u, v, w) = 0$ o bien $S(u, v, w) = 0$. Entonces los $n(n - m)$ puntos restantes de $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \setminus \mathcal{E}$ están en la curva definida por S , como queríamos demostrar. \square

2. Multiplicidad de intersección

Para probar el teorema de Bézout (teorema 2.1) debemos introducir la *multiplicidad de intersección* de dos curvas proyectivas \mathcal{C} y \mathcal{D} en un punto $p \in \mathbb{P}_2$.

Las siguientes definiciones y resultados fueron extraídos de [2]. Comencemos introduciendo un concepto que nos será útil.

Definición 2.19. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos curvas proyectivas en \mathbb{P}_2 . Diremos que un sistema de coordenadas \mathcal{X} es admisible si:

$$[1, 0, 0] \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{D},$$

$[1, 0, 0]$ no pertenece a ninguna recta que une dos puntos distintos de \mathcal{C} y \mathcal{D}

y

$[1, 0, 0]$ no pertenece a ninguna recta tangente a \mathcal{C} o \mathcal{D} en los puntos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Observación 2.20. Si \mathcal{X} es un sistema de coordenadas, entonces cualquier otro sistema de coordenadas \mathcal{X}' se consigue mediante una transformación lineal

$$\mathcal{X}' = A\mathcal{X},$$

donde $A = (a_{ij}) \in GL(3, \mathbb{C})$. Si \mathcal{X} es admisible, las matrices que nos permiten obtener que \mathcal{X}' también sea admisible son precisamente aquellas para las cuales la imagen del punto $[1, 0, 0]$ en el sistema de coordenadas \mathcal{X}' , que es (a_{02}, a_{12}, a_{22}) , no pertenece a $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \cup_{ij} L_{ij}$.

Si $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo que define a la curva $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \cup_{ij} L_{ij}$, entonces el subconjunto de matrices de $GL(3, \mathbb{C})$ que producen coordenadas admisibles es

$$\mathbb{X} = \{A \in GL(3, \mathbb{C}) : H(a_{02}, a_{12}, a_{22}) \neq 0\}.$$

Tenemos que $GL(3, \mathbb{C})$ es homeomorfo a un abierto de \mathbb{C}^9 , con coordenadas a_{ij} , y \mathbb{X} es un abierto en $GL(3, \mathbb{C})$. Observar que el determinante $D(a_{ij})$ es un polinomio homogéneo de grado 3 en las variables a_{ij} .

Veamos ahora una definición sumamente importante para este trabajo:

Definición 2.21 (Multiplicidad de intersección). Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{P}_2$ curvas proyectivas y $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{P}_2$ un punto.

1. Si $p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, entonces $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$.
2. Si p está en una componente común de \mathcal{C} y \mathcal{D} entonces $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \infty$.
3. Si $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, pero no está en una componente común, designamos \mathcal{C}_1 y \mathcal{D}_1 las curvas obtenidas de \mathcal{C} y \mathcal{D} al remover las componentes comunes, y elegimos un sistema de coordenadas admisibles \mathcal{X} . Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomios homogéneos, que definen a \mathcal{C}_1 y \mathcal{D}_1 , en estas coordenadas. Entonces la multiplicidad de intersección $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$ es la multiplicidad del cero (p_y, p_z) en la resultante $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$.

Observación 2.22. 1. Si $p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, entonces es claro que (p_y, p_z) no es raíz de la resultante $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$, y por lo tanto podemos pensar que como cero (p_y, p_z) tiene multiplicidad cero.

2. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen una componente común, entonces la resultante $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es idénticamente nula, en virtud de lema 2.6, por lo tanto (p_y, p_z) es un cero de multiplicidad ∞ .

La definición anterior utiliza un sistema de coordenadas adecuado, por lo que tenemos que ver que la multiplicidad de intersección no depende de las coordenadas elegidas. Para poder probar esto, para lo cual seguiremos [2], necesitamos los siguientes lemas previos:

Lema 2.23. \mathbb{X} es conexo por caminos.

DEMOSTRACIÓN. Dadas $A, B \in \mathbb{X}$, queremos ver que hay un camino, dentro de \mathbb{X} , que las une. Llamemos $D(a_{ij})$ al determinante, visto como un polinomio homogéneo de grado 3 en \mathbb{C}^9 . Definimos

$$P(a_{ij}) = D(a_{ij})H(a_{02}, a_{12}, a_{22}),$$

donde $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo que define a $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \cup_{ij} L_{ij}$.

Luego,

$$\mathbb{X} = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}(3, \mathbb{C}) : P(a_{ij}) \neq 0\}.$$

Si $L \subset \mathbb{C}^9$ es una recta, que pasa por A y B , definimos $L' = L \cap \mathbb{X}$.

Observamos que L' se obtiene a partir de L removiendo una cantidad finita de puntos, que son las raíces del polinomio que resulta de P al sustituir por coordenadas afines para L . Por lo tanto, L' es conexo.

Por construcción $L' \subset \mathbb{X}$ es un conjunto conexo por caminos que contiene a A y B , por lo tanto podemos encontrar un camino dentro de L' que una A con B .

Como A y B son arbitrarios en \mathbb{X} , deducimos que \mathbb{X} es conexo por caminos. \square

Recordemos el siguiente teorema de variable compleja:

Teorema 2.24 (Rouché). Sean $r > 0$ y $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones meromorfas en un entorno de $\overline{B}(a, r)$, sin ceros ni polos en la curva $\gamma = \partial B(a, r)$. Designamos por Z_f y Z_g (P_f y P_g) el número de ceros (polos) de f y g , respectivamente, dentro de γ contados con su multiplicidad.

Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en γ entonces

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

La demostración de este teorema se encuentra por ejemplo, en [4]. A partir de este teorema tenemos:

Lema 2.25. Sean $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado d y $c \in \mathbb{C}$ una raíz de multiplicidad ν . Si $\epsilon > 0$ es tal que P no se anula en $\overline{B}(c, \epsilon) \setminus \{c\}$, entonces existe $\delta > 0$, tal que todo polinomio $Q \in \mathbb{C}[x]$ cuyos coeficientes difieren de los coeficientes de P menos de δ , tiene exactamente ν raíces (contando multiplicidad) en $B(c, \epsilon)$.

DEMOSTRACIÓN. Como P tiene un cero de multiplicidad ν en c , localmente podemos escribir

$$P(z) = g(z)(z - c)^\nu,$$

donde $g(z)$ es una función holomorfa sin ceros en c . Si ϵ es como en las hipótesis, tenemos que hay exactamente ν raíces (contando multiplicidad) en $B(c, \epsilon)$.

Sea $M = \min\{|P(z)| : z \in \partial B(c, \epsilon)\}$. Observar que, por nuestra elección de ϵ , tenemos $M > 0$. Tenemos que $P(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j$ mientras que $Q(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^i$. Luego, si llamamos $l = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$, entonces

$$|P(z) - Q(z)| = \left| \sum_{j=0}^l (a_j - b_j) z^j \right| \leq \delta (1 + \epsilon + \dots + \epsilon^l) < M.$$

Tomando

$$\delta < \frac{M}{1 + \epsilon + \dots + \epsilon^l},$$

si Q es tal que sus coeficientes difieren de los coeficientes de P menos de δ , entonces en γ ,

$$|P(z) - Q(z)| < \delta \leq |P(z)|,$$

por el teorema de Rouché (teorema 2.24), deducimos que Q y P tienen la misma cantidad de raíces, ν contando multiplicidad, dentro de $B(c, \epsilon)$. \square

Estamos en condiciones de probar que la multiplicidad de intersección está bien definida, es decir, que no depende del sistema de coordenadas elegido para calcularla.

Teorema 2.26. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{P}_2$ dos curvas proyectivas y $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Sean \mathcal{X} y \mathcal{X}' dos sistemas de coordenadas admisibles. Si $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e $I'_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ designan las multiplicidades de intersección de \mathcal{C} y \mathcal{D} en p , respecto a \mathcal{X} y \mathcal{X}' , respectivamente, entonces

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I'_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y $I'_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ las multiplicidades de intersección en dos sistemas de coordenadas admisibles \mathcal{X} y \mathcal{X}' . Tenemos que $\mathcal{X} = A\mathcal{X}'$, donde $A \in \mathbb{X}$.

Como \mathbb{X} es conexo por caminos, existe una curva continua $A_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $A_0 = Id$ y $A_1 = A$. Para cada $t \in [0, 1]$, tenemos coordenadas admisibles $\mathcal{X}_t = (x_t, y_t, z_t)$, definidas por la ecuación

$$\mathcal{X}_t = A_t \mathcal{X}'.$$

Sean P y Q polinomios homogéneos que definen a las curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} , en las coordenadas \mathcal{X} . Si denominamos P_t y Q_t a estos polinomios, en las coordenadas \mathcal{X}_t , entonces $P_t(x_t, y_t, z_t) = 0$ y $Q_t(x_t, y_t, z_t) = 0$ si y sólo si $(x_t, y_t, z_t) \in \mathcal{C}$ y \mathcal{D} respectivamente.

Sea $\text{Res}_t(y, z) = \text{Res}_{P_t, Q_t}(y_t, z_t)$, la resultante de P_t y Q_t en estas coordenadas. Por construcción, Res_t es una familia paramétrica de polinomios homogéneos de grado nm , ya que los cambios de variables preservan el grado de los polinomios. Por otro lado, la

cantidad de raíces distintas de R_t (sin contar multiplicidad) es constante, porque las raíces de la resultante Res_t se corresponden con los puntos de intersección de \mathcal{C} y \mathcal{D} , y estos no dependen de las coordenadas.

Para terminar con la prueba, nos resta ver que la multiplicidad también es constante. Llamemos $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})_t$ a la multiplicidad de intersección, en el punto $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ en las coordenadas \mathcal{X}_t . Tenemos que como mapa $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$.

Para cada $t \in [0, 1]$, el lema 2,25 nos da que existe un entorno U_t donde la cantidad de raíces (contando multiplicidad) de Res_0 es constante. Esto se traduce en que el mapa $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})_t$ es continuo. Como $[0, 1]$ es conexo, entonces la imagen de $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})_t$ es un conexo de \mathbb{Z} , es decir, es constante.

En particular, cuando $t = 0$ tenemos $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}'$ y si $t = 1$ entonces $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$, por lo tanto $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I'_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. \square

Observación 2.27. *Recordar que si \mathcal{C} y \mathcal{D} son curvas proyectivas sin componentes comunes y $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, entonces definimos $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de la siguiente forma:*

- Elegimos coordenadas admisibles.
- Si en estas coordenadas $p = [a, b, c]$, definimos

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : (bz - cy)^k \text{ divide a la resultante } \text{Res}_{P, Q}(y, z)\}.$$

La siguiente proposición nos da algunas propiedades que cumple la multiplicidad de intersección $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, que son de utilidad en lo que sigue.

Proposición 2.28. *Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} curvas proyectivas. La multiplicidad de intersección $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ satisface las siguientes propiedades:*

1. $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.
2. $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$ si y sólo si $p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.
3. Dos rectas proyectivas distintas se intersectan en un único punto, con multiplicidad de intersección 1.
4. Si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 están definidas por polinomios homogéneos P_1 y P_2 , respectivamente, y \mathcal{C} es la curva definida por

$$P(x, y, z) = P_1(x, y, z)P_2(x, y, z),$$

entonces

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}) + I_p(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}),$$

para toda curva \mathcal{D} .

5. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} están definidas por polinomios homogéneos P y Q , de grados n y m respectivamente, y \mathcal{E} está definida por $PR + Q$, con R un polinomio homogéneo de grado $m - n$, entonces

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

- DEMOSTRACIÓN. 1. Intercambiar dos filas de una matriz, cambia el signo de su determinante, por lo tanto $\text{Res}_{P,Q} = \pm \text{Res}_{Q,P}$. Luego $(bz - cy)^k$ divide a $\text{Res}_{P,Q}$ si y sólo si $(bz - cy)^k$ divide a $\pm \text{Res}_{Q,P}$, por lo que $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.
2. Supongamos $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$: Si p está en una componente común entonces $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \infty$ por definición. Por otro lado, si p no está en una componente común, realizamos el procedimiento para este caso. Llamemos $p = [a, b, c]$. Como $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ son polinomios en $\mathbb{C}[x]$, por el lema 2.6, tenemos que la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ no es idénticamente nula (en caso contrario \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen una componente común). Entonces debe existir $k \geq 1$ tal que $(bz - cy)^k$ divide a $\text{Res}_{P,Q}$.
3. Por el Teorema de Bézout, en su versión débil (Teorema 2.16), si \mathcal{C} y \mathcal{D} son rectas proyectivas entonces $\#\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \leq 1$. Por otro lado, el Teorema 2.15, implica $1 \leq \#\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, de donde $\#\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = 1$.

Sea p el único punto en $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Si P y Q son los polinomios que definen a \mathcal{C} y \mathcal{D} , respectivamente, entonces $P(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ y $Q(x, y, z) = \tilde{\alpha} x + \tilde{\beta} y + \tilde{\gamma} z$, con $\alpha \neq 0 \neq \tilde{\alpha}$, de donde

$$\text{Res}_{P,Q}(y, z) = \begin{vmatrix} \beta y + \gamma z & \alpha \\ \tilde{\beta} y + \tilde{\gamma} z & \tilde{\alpha} \end{vmatrix} = (\alpha \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \beta) z - (\alpha \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} \gamma) y.$$

Luego $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \max\{k \in \mathbb{Z} : (bz - cy)^k \text{ divide a la resultante } \text{Res}_{P,Q}(y, z)\} = 1$.

4. Sea Q el polinomio que define a \mathcal{D} , P_1 y P_2 los polinomios respectivos que definen a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . Por el lema 2.12:

$$\text{Res}_{P_1 P_2, Q} = \pm \text{Res}_{Q, P_1 P_2} = \pm \text{Res}_{Q, P_1} \text{Res}_{Q, P_2},$$

el resultado sigue.

5. Sumarle a una columna un múltiplo de otra no cambia el determinante. Luego, la resultante $\text{Res}_{P, PR+Q}$, es el determinante de una matriz (s_{ij}) que se obtiene de una matriz (r_{ij}) (que define a $\text{Res}_{P,Q}$) sumando un múltiplo adecuado de las primeras n columnas a las últimas m . En efecto, si $R(x, y, z) = \rho_0(y, z) +$

$\rho_1(y, z)x + \dots + \rho_{n-m}(y, z)x^{n-m}$, entonces

$$(s_{ij}) = \begin{cases} r_{ij} & \text{si } i \leq m \\ r_{ij} + \sum_{k=i-m}^{i-n} \rho_{i-n-k} r_{kj} & \text{si } i > m \end{cases}$$

Por lo tanto, el resultado se desprende de:

$$\text{Res}_{P, PR+Q}(y, z) = \det(s_{ij}) = \det(r_{ij}) = \text{Res}_{P, Q}(y, z).$$

Si \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen componentes en común, las demostraciones de las partes 1 y 2 siguen siendo válidas. En la parte 3 no hay nada que probar, pues si dos rectas proyectivas tienen una componente en común, entonces son iguales.

Las partes 4 y 5 se prueban de forma análoga. Para probar 4, si $P_1 = H_1 S_1$, $P_2 = Q_2 S_2$, donde S_1 y S_2 definen la curva común de los pares C_1, D y C_2, D , respectivamente, entonces $H_1 \cup H_2$ es la curva común del par C, D .

Para probar 5 hacemos algo similar, si \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen una componente en común, entonces existen polinomio $A, B, S \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tal que $P = AS$ y $Q = AS$. Luego $PR + Q = (AS)R + BS = (AR + B)S$, entonces \mathcal{E} y \mathcal{C} también tienen una componente en común. Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{E}_1 las curvas obtenidas al remover las componentes comunes de los pares \mathcal{C}, \mathcal{D} de \mathcal{C} y \mathcal{C}, \mathcal{E} de \mathcal{E} , respectivamente. Luego las curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{D}$ y \mathcal{E}_1 no tienen componentes comunes, por lo que la misma prueba funciona. Finalmente, por definición $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = I_p(\mathcal{C}_1, \mathcal{D})$ y $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = I_p(\mathcal{C}, \mathcal{E}_1)$. \square

Veamos a continuación la demostración del teorema de Bézout (teorema 2.1):

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} curvas proyectivas sin componentes en común de grado n y m respectivamente. Tenemos que probar que

$$\sum_{p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = nm.$$

Mediante una transformación proyectiva podemos suponer que estamos en un sistema coordenado admisible. Sean P y Q polinomios que definen a \mathcal{C} y \mathcal{D} en este sistema coordenado. Por los lemas 2.6 y 2.11 tenemos que la resultante $\text{Res}_{P, Q}$ es un polinomio homogéneo de grado nm (en particular no idénticamente nulo porque \mathcal{C} y \mathcal{D} no tienen componentes en común). Por el lema 1.3 se puede expresar como el producto de nm factores lineales, es decir

$$\text{Res}_{P, Q}(y, z) = \prod_{i=1}^k (c_i z - b_i y)^{e_i} \quad \text{tal que} \quad e_1 + \dots + e_k = nm,$$

donde (b_i, c_i) no es un múltiplo escalar de (b_j, c_j) si $i \neq j$. Por el argumento usado para probar el teorema 2.15 y el teorema 2.16 tenemos que existen números complejos $a_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{[a_i, b_i, c_i] : 1 \leq i \leq k\}.$$

Si anotamos $p_i = [a_i, b_i, c_i]$, entonces $I_{p_i}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = e_i$, por lo tanto

$$\sum_{p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^k I_{p_i}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^k e_i = nm.$$

□

Veamos algunos resultados adicionales sobre la multiplicidad de intersección.

Lema 2.29. *Si $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ es un punto singular de \mathcal{C} , entonces $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) > 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que p no pertenece a una componente común de \mathcal{C} y \mathcal{D} , pues en ese caso $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \infty$ y el resultado es cierto. Elijamos un sistema de coordenadas admisibles tal que $p = [0, 0, 1]$. Queremos probar que y^2 divide a la resultante $\text{Res}_{P,Q}$, donde P y Q son polinomios que definen a \mathcal{C} y \mathcal{D} .

Como $p \in \text{Sing}(\mathcal{C})$ tenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) = \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1) = P(0, 0, 1) = 0.$$

Por lo tanto los monomios de P en las variables x e y son de grado al menos 2 (de lo contrario las derivadas parciales respecto a x e y serían constantes, posiblemente no nulas). Podemos pensar a $P \in \mathbb{C}[y, z][x]$, de donde:

$$P(x, y, z) = a_0(y, z) + a_1(y, z)x + \dots + a_n(y, z)x^n.$$

Como $P(0, 0, 1) = 0$ entonces $a_0(0, 1) = 0$ de donde y divide a $a_0(0, 1)$. Como además $\frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1) = 0$, entonces $\frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0, 1) = 0$, de donde y también divide a $\frac{\partial a_0}{\partial y}$, por lo tanto y^2 divide a $a_0(y, z)$. Por otro lado, como $0 = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) = a_1(0, 1)$ entonces y divide a $a_1(y, z)$.

Si también pensamos a $Q \in \mathbb{C}[y, z][x]$, podemos escribir

$$Q(x, y, z) = b_0(y, z) + \dots + b_m(y, z)x^m.$$

Como $0 = Q(0, 0, 1) = b_0(0, 1)$, entonces y divide a $b_0(y, z)$, por lo tanto podemos escribir

$$b_0(y, z) = b_{01}yz^{m-1} + y^2c_0(y, z) \quad \text{y} \quad b_1(y, z) = b_{10}z^{m-1} + yc_1(y, z),$$

donde $c_0(y, z)$ y $c_1(y, z)$ son polinomios homogéneos, posiblemente nulos.

Si $b_{01} = 0$, entonces la primera columna del determinante que define a la resultante $\text{Res}_{P,Q}$ es divisible por y^2 y por lo tanto y^2 divide a $\text{Res}_{P,Q}$.

Por otro lado, si $b_{01} \neq 0$, entonces la primera columna del determinante es divisible por y . En este caso, si sacamos de factor común y y restamos $\frac{b_{10}}{b_{01}}$ veces la primera columna de la segunda columna, obtenemos que la segunda columna es también divisible por y , luego y^2 divide a $\text{Res}_{P,Q}$. \square

Proposición 2.30. *Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos curvas proyectivas y p un punto en $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Entonces $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 1$ si y sólo si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{C}) \cup \text{Sing}(\mathcal{D})$ y las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en p son distintas.*

DEMOSTRACIÓN. Si p pertenece a una componente común de \mathcal{C} y \mathcal{D} , entonces la proposición es trivialmente válida, pues ninguna de las afirmaciones pretendidamente equivalentes se cumple. Entonces podemos asumir que \mathcal{C} y \mathcal{D} no tienen componentes en común. Elijamos un sistema de coordenadas admisible tal que $p = [0, 0, 1]$. El corolario 2.29 implica que $p \notin \text{Sing}(\mathcal{C}) \cup \text{Sing}(\mathcal{D})$. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomios homogéneos que definen a \mathcal{C} y \mathcal{D} , respectivamente, en estas coordenadas. Queremos ver entonces que las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} coinciden en p si y sólo si y^2 divide la resultante $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$, lo cual sucede si y sólo si

$$\frac{\partial \text{Res}_{P,Q}}{\partial y}(0, 1) = 0,$$

ya que $\text{Res}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo divisible por y .

Por otro lado, como estamos en un sistema de coordenadas admisibles, el punto $[1, 0, 0]$ no pertenece a la recta tangente a \mathcal{C} en $p = [0, 0, 1]$, que está dada por

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1)y + \frac{\partial P}{\partial z}(0, 0, 1)z = 0.$$

Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) \neq 0.$$

Luego, si aplicamos el teorema de la función implícita para polinomios complejos a $P(x, y, 1)$ en $(0, 0)$, obtenemos una única función holomorfa $\lambda_1 : U \rightarrow V$, donde U y V son entornos de $0 \in \mathbb{C}$, tal que

$$P(\lambda_1(y), y, 1) = 0, \quad \lambda_1(0) = 0.$$

Además, si $x \in V$ e $y \in U$, entonces

$$P(x, y, 1) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = \lambda_1(y).$$

Más aún,

$$P(x, y, 1) = (x - \lambda_1(y))l(x, y),$$

para algún polinomio $l(x, y)$ en x cuyos coeficientes son funciones holomorfas en y , y además $l(0, 0) \neq 0$. A menos de multiplicar por una función holomorfa en y , podemos asumir que el coeficiente de x^n en $P(x, y, z)$ es 1. Entonces

$$l(x, y) = \prod_{i=2}^n (x - \lambda_i(y)),$$

donde $\lambda_1(y), \dots, \lambda_2(y)$ son las raíces de $P(x, y, 1)$, pensado como un polinomio en x con y fijo.

Por otro lado, como p tampoco es un punto singular de \mathcal{D} , entonces podemos repetir lo anterior con Q , obteniendo así otros entornos U', V' y otra función holomorfa $\mu_1 : U' \rightarrow V'$ tales que

$$Q(\mu_1(y), y, 1) = 0, \quad \mu_1(0) = 0,$$

y además (nuevamente podemos asumir que el coeficiente de x^m en $Q(x, y, 1)$ es 1)

$$Q(x, y, 1) = (x - \mu_1(y))m(x, y) \quad \text{con} \quad m(x, y) = \prod_{i=2}^m (x - \mu_i(y)),$$

donde $\mu_1(y), \dots, \mu_m(y)$ son las raíces de $Q(x, y, 1)$, pensado como polinomio en x con y fijo.

Si $\tilde{U} = U \cap U'$ y $\tilde{V} = V \cap V'$ y restringimos $\lambda_1, \mu_1 : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tenemos que se cumplen ambas propiedades a la vez. Luego, las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en $p = [0, 0, 1]$ están definidas por las ecuaciones

$$x = \lambda'_1(0)y \quad \text{y} \quad x = \mu'_1(0)y.$$

Si $y \in \tilde{U}$, entonces por el lema 2.11 tenemos que

$$\text{Res}_{P,Q}(y, 1) = (\mu_1(y) - \lambda_1(y))S(y), \quad \text{donde} \quad S(y) = \prod_{(i,j) \neq (1,1)} (\mu_i(y) - \lambda_j(y)).$$

Como cada μ_i y λ_j son funciones holomorfas en y , entonces $S(y)$ es una función holomorfa en $y \in U$.

Evaluando en $(0, 1)$ la derivada de $\text{Res}_{P,Q}(y, 1)$ respecto a la variable y , obtenemos

$$\frac{\partial \text{Res}_{P,Q}}{\partial y}(0, 1) = (\mu'_1(0) - \lambda'_1(0)) S(0) + (\mu_1(0) - \lambda_1(0)) S'(0) = (\mu'_1(0) - \lambda'_1(0)) S(0),$$

ya que $\mu_1(0) = 0 = \lambda_1(0)$.

Por otro lado, como $\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) \neq 0$, el polinomio $P(x, 0, 1)$ no puede tener raíces en \mathcal{D} de orden mayor a 1, por lo que si $i > 1$, entonces

$$\lambda_i(0) \neq 0 = \mu_1(0) \quad \text{y} \quad \mu_1(0) \neq 0 = \lambda_1(0).$$

Más aún, si $\lambda_i(0) = \mu_j(0)$ para algunos $i, j > 1$, entonces los puntos $[0, 0, 1]$ y $[\lambda_i(0), 0, 1] = [\mu_j(0), 0, 1]$ son puntos distintos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ que están en la misma recta $y = 0$, y por lo tanto están alienados. Esto no puede suceder porque estamos en un sistema de coordenadas admisible. Por lo tanto, $S(0) \neq 0$.

Por lo anterior,

$$\frac{\partial \text{Res}_{P,Q}}{\partial y}(0, 1) = 0 \iff \lambda'_1(0) = \mu'_1(0),$$

es decir $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) > 1$ si y sólo si las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en el punto p coinciden. \square

Corolario 2.31. *Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos curvas proyectivas de grados n y m respectivamente. Si todo $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ cumple que $p \notin \text{Sing}(\mathcal{C}) \cup \text{Sing}(\mathcal{D})$ y las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en p son distintas, entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste en exactamente nm puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Como todo $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ cumple que $p \notin \text{Sing}(\mathcal{C}) \cup \text{Sing}(\mathcal{D})$ y además las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en p son distintas, entonces por la proposición 2.30 tenemos que

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 1 \quad \text{para todo } p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

Luego, si aplicamos el teorema de Bézout (teorema 2.1) tenemos que \mathcal{C} y \mathcal{D} se intersectan en exactamente nm puntos contando multiplicidad, por lo que

$$nm = \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} 1 = \#\mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

\square

Propiedades topológicas de las curvas proyectivas

En este capítulo, explicaremos, sin demostración, el resultado que dice que toda curva algebraica proyectiva sin singularidades es homeomorfa a una superficie topológica (compacta pues las curvas proyectivas lo son), introduciremos el concepto de cubrimiento ramificado y estudiaremos algunas de sus propiedades, para finalmente probar la llamada fórmula del género-grado que nos dice:

Teorema 3.1 (Fórmula de género-grado). *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}_2 de género g y grado d entonces*

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

A partir de esta fórmula, tenemos, por ejemplo, que si P es un polinomio homogéneo lineal (de grado 1) entonces la curva proyectiva que define es homeomorfa a una superficie de género 0, es decir una esfera. Lo mismo sucede para polinomios cuadráticos. Por otro lado, si P tiene grado 3 (por ejemplo $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$) entonces la curva proyectiva definida por este polinomio es homeomorfa a una superficie de género 1, es decir un toro.

1. Cubrimientos ramificados de \mathbb{P}_1

Si tenemos una curva proyectiva no singular \mathcal{C} definida por un polinomio homogéneo P de grado $d > 1$, entonces aplicando una transformación proyectiva podemos suponer que $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$, por lo que el mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ dado por $\phi([x, y, z]) = [x, z]$ está bien definido.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2. *Sea \mathcal{C} la curva proyectiva definida por $P(x, y, z) = y^2 - xz$. Tenemos $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ ya que $P(0, 1, 0) = 1 \neq 0$, entonces el mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ dado por $\phi([x, y, z]) = [x, z]$ está bien definido y además es sobreyectivo.*

Por otro lado, si $[x, z] \in \mathbb{P}_1$ entonces $\phi^{-1}([x, z]) = \{[x, y, z], [x, -y, z]\}$ consiste en exactamente dos puntos, a no ser que x o z sean nulos.

Una mapa como este ϕ se dice que es un *cubrimiento doble* de \mathbb{P}_1 *ramificado* sobre $[1, 0]$ y $[0, 1]$. Por otro lado, los puntos en \mathcal{C} cuyas imágenes son $[1, 0]$ o $[0, 1]$ son, como veremos, *puntos de ramificación* de ϕ .

El objetivo de esta sección es ver que si \mathcal{C} es una curva proyectiva no singular de grado $d > 1$ en \mathbb{P}_2 entonces podemos ver a \mathcal{C} como un cubrimiento ramificado de \mathbb{P}_1 , así como que si elegimos coordenadas apropiadas en \mathbb{P}_2 , entonces la cantidad de puntos de ramificación es exactamente $d(d-1)$, donde d es el grado de \mathcal{C} . Esto último nos será útil para la demostración de la fórmula de género-grado.

En toda esta sección \mathcal{C} es una curva proyectiva no singular.

Definición 3.3. *Definimos el índice de ramificación $\nu_\phi([a, b, c])$ de ϕ en un punto $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ como el orden del cero del polinomio $P(a, y, c)$ en $y = b$. Decimos que el punto $[a, b, c]$ es un punto de ramificación de ϕ si $\nu_\phi([a, b, c]) > 1$.*

En el ejemplo anterior vimos que si $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ con a y c no nulo entonces $\nu_\phi[a, b, c] = 2$.

Observación 3.4.

1. *Tenemos que $\nu_\phi[a, b, c] > 0$ si y sólo si $[a, b, c] \in \mathcal{C}$.*
2. *$\nu_\phi[a, b, c] > 1$ si y sólo si $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)$, es decir si y sólo si $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ y además la recta tangente a \mathcal{C} en $[a, b, c]$ contiene el punto $[0, 1, 0]$ (ya que el polinomio que define la recta tangente no tiene monomio con la variable y).*
3. *$\nu_\phi[a, b, c] > 2$ si y sólo si $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c)$, es decir si y sólo si $[a, b, c]$ es un punto de inflexión de \mathcal{C} y la recta tangente a \mathcal{C} en $[a, b, c]$ contiene al punto $[0, 1, 0]$.*

Veamos ahora un lema que nos dice cuántos puntos tiene la preimagen del mapa ϕ :

Lema 3.5. *Si $[a, c] \in \mathbb{P}_1$ entonces el conjunto $\phi^{-1}([a, c])$ contiene exactamente*

$$d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} (\nu_\phi(p) - 1)$$

puntos, en particular $\phi^{-1}([a, c])$ contiene exactamente d puntos si y sólo si $\phi^{-1}([a, c])$ no contiene puntos de ramificación de ϕ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que un punto $[x, y, z]$ pertenece a $\phi^{-1}([a, c])$ si y sólo si es de la forma $[a, b, c]$ con $P(a, b, c) = 0$. Por hipótesis, $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ (es decir $P(0, 1, 0) \neq 0$), podemos asumir entonces que $P(0, 1, 0) = 1$, de donde $P(a, y, c)$ es un polinomio mónico de grado d en la variable y . Por lo tanto, como \mathbb{C} es un cuerpo algebraicamente cerrado, tenemos que

$$P(a, y, c) = \prod_{1 \leq i \leq r} (y - b_i)^{m_i}$$

donde b_1, \dots, b_r son todos complejos distintos y $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}^+$ son tales que $m_1 + \dots + m_r = d$. Luego

$$\phi^{-1}([a, c]) = \{[a, b_i, c] : 1 \leq i \leq r\}$$

y además $\nu_\phi[a, b_i, c] = m_i$. Finalmente

$$\begin{aligned} d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} (\nu_\phi(p) - 1) &= d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} \nu_\phi(p) + \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} 1 \\ &= d - \sum_{i=1}^r m_i + \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} 1 \\ &= d - d + \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} 1 \\ &= \#\phi^{-1}([a, c]) \end{aligned}$$

□

Definición 3.6. Si \mathcal{C} es una curva proyectiva no singular de grado $d > 1$, diremos que $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$, definido como antes, es un cubrimiento ramificado de \mathbb{P}_1 . Si R es el conjunto de puntos de ramificación de ϕ , entonces diremos que $\phi(R)$ es el lugar de ramificación de ϕ .

En la sección anterior probamos el teorema de Bézout (teorema 2.1) y su versión débil (teorema 2.16), ambos nos permitirán demostrar el siguiente lema. Éste es de vital importancia para probar la fórmula de género-grado, la cuál es una pieza fundamental en la demostración del teorema de Riemann-Roch.

Lema 3.7. Si P tiene grado d entonces:

1. ϕ tiene a lo sumo $d(d - 1)$ puntos de ramificación.
2. Si $\nu_\phi([a, b, c]) \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in \mathcal{C}$, entonces \mathcal{C} tiene exactamente $d(d - 1)$ puntos de ramificación.

DEMOSTRACIÓN. 1. Como \mathcal{C} es no singular entonces por el corolario 2.17 es irreducible. Por hipótesis $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ entonces el coeficiente $P(0, 1, 0)$ de y^d en $P(x, y, z)$ es no nulo y por lo tanto el polinomio homogéneo $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)$ no es idénticamente nulo y tiene grado $d - 1$.

Como el grado de P es mayor al grado de $\frac{\partial P}{\partial y}$, entonces P no puede dividir a $\frac{\partial P}{\partial y}$ y por lo tanto no tienen componentes en común. Por lo tanto la parte (1) sigue del teorema de Bézout débil (teorema 2.16), ya que por la observación 3.4 $[a, b, c]$ es un punto de ramificación si y sólo si $[a, b, c] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, siendo \mathcal{D} la curva definida por $\frac{\partial P}{\partial y}$, y por Bézout débil $\#\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \leq d(d - 1)$.

2. Supongamos que $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in \mathcal{C}$. Por el corolario 2.31 (el cual es un corolario del teorema de Bézout) nos alcanza con probar que si $[a, b, c] \in R = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ entonces $[a, b, c]$ es un punto no singular de \mathcal{D} y las rectas tangentes a \mathcal{C} y \mathcal{D} en $[a, b, c]$ son distintas.

Supongamos por absurdo que no es el caso. Entonces $[a, b, c]$ satisface que $P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)$ porque $[a, b, c] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, y el vector $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial yx}(a, b, c), \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c), \frac{\partial^2 P}{\partial yz}(a, b, c) \right)$ es nulo o un múltiplo escalar de

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) \right).$$

Esto implica que

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial^2 P}{\partial yy}(a, b, c),$$

lo cual, por la observación 3.4, equivale a $\nu_\phi[a, b, c] > 2$, lo cual contradice la tesis. \square

Es interesante que si \mathcal{C} es una curva proyectiva no singular entonces siempre podemos conseguir que se cumpla la segunda condición del lema anterior. Más precisamente:

Lema 3.8. *Aplicando una transformación proyectiva adecuada a \mathcal{C} podemos asumir que $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in \mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 3.7 la curva \mathcal{C} tiene solo una cantidad finita de puntos de inflexión (a lo sumo $3d(d - 2)$). Entonces aplicando una transformación proyectiva apropiada podemos asumir $[0, 1, 0]$ no pertenece a \mathcal{C} ni a ninguna recta tangente a \mathcal{C} en estos puntos de inflexión. Finalmente el resultado se deduce de la observación 3.4 parte 3. \square

2. Demostración de la fórmula de género-grado

En esta sección usaremos los resultados de cubrimientos ramificados para probar que

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2),$$

donde g es el género de la curva y d su grado. Lo primero que tenemos que hacer es dar una definición precisa de género y con este fin introduciremos las triangulaciones. Sea

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

el triángulo en \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Definición 3.9. *Sea \mathcal{C} una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}_2 . Una triangulación de \mathcal{C} queda determinada por:*

1. Un conjunto finito $V \neq \emptyset$ de puntos llamados vértices,
2. Un conjunto finito $E \neq \emptyset$ de mapas continuos $e : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ llamados aristas,
3. Un conjunto finito $F \neq \emptyset$ de mapas continuos $f : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ llamados caras,

que satisfacen:

- a) $V = \{e(0) : e \in E\} \cup \{e(1) : e \in E\}$, es decir "los vértices son los bordes de las aristas".
- b) Si $e \in E$, entonces la restricción de e al abierto $(0, 1)$ es un homeomorfismo sobre su imagen en \mathcal{C} , y esta imagen no contiene puntos de V ni de la imagen de cualquier otro $\tilde{e} \in E$.
- c) Si $f \in F$, entonces la restricción de f al interior (abierto) $\overset{\circ}{\Delta}$ de Δ es un homeomorfismo sobre alguna componente conexa K_f de $\mathcal{C} - \Gamma$ donde $\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1])$. Además si $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ están definidas por

$$r(t) = 1 - t \quad \sigma_1(t) = (t, 0) \quad \sigma_2(t) = (1 - t, t) \quad \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

entonces $f \circ \sigma_i$ ó $f \circ \sigma_i \circ r$ es una arista $e_f^i \in E$ para $i = 1, 2, 3$

- d) El mapa $f \mapsto K_f$ es una biyección
- e) Para todo $e \in E$, existe una única cara $f_e^+ \in F$ tal que $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ y una única $f_e^- \in F$ tal que $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$

A partir de esto, podemos definir un invariante topológico muy conocido:

Definición 3.10 (Característica de Euler). *Dada una triangulación, su característica de Euler es*

$$\chi = \#V - \#E + \#F.$$

Teorema 3.11. *La característica de Euler de una triangulación depende solo de la curva \mathcal{C} y no de la triangulación en sí.*

Una demostración de este resultado se puede encontrar en el anexo C.2 de [1].

La característica de Euler, por ser un invariante de la curva, nos permite dar una definición precisa del género de la misma:

Definición 3.12. *El género de una curva proyectiva no singular \mathcal{C} es*

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi(\mathcal{C})).$$

Esta definición tiene sentido en virtud del teorema 3.11 que nos dice que la característica de Euler solo depende de la curva \mathcal{C} y no de la triangulación elegida.

Lema 3.13. *Sea $\{p_1, \dots, p_r\}$ un conjunto con al menos tres puntos en \mathbb{P}_1 . Entonces existe una triangulación de \mathbb{P}_1 con p_1, \dots, p_r como vértices, con $3r - 6$ aristas y $2r - 4$ caras.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos inducción en $r \geq 3$.

Si $r = 3$, por el lema 1.12 tenemos que existe una transformación proyectiva que lleva p_1 a 1, p_2 a $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ y p_3 a $e^{\frac{4}{3}\pi i}$. Luego, podemos unir estos tres puntos por arcos de $S^1 \subset \mathbb{C}$ (ver figura 3,1).

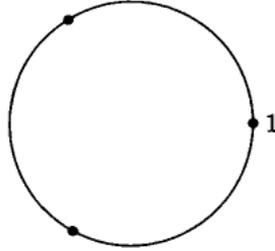


FIGURA 2.1. Los puntos $1, e^{\frac{2}{3}\pi i}$ y $e^{\frac{4}{3}\pi i}$ unidos por arcos de S^1 en \mathbb{C} .

Si consideramos la transformación proyectiva $z \mapsto \frac{1}{z}$, entonces el exterior de S^1 junto al punto en el infinito son mapeados al interior de S^1 . Como hay un homeomorfismo $\Delta \mapsto \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ que lleva los vértices del triángulo Δ a $1, e^{\frac{3}{2}\pi i}$ y $e^{\frac{3}{4}\pi i}$, y lleva las aristas de Δ a los segmentos apropiados de S^1 , entonces tenemos una triangulación de \mathbb{P}_1 con tres aristas ($3 = 3 \times 3 - 6$) y dos caras ($2 = 2 \times 3 - 4$) cuando $r = 3$.

Sea ahora $r > 3$ y supongamos que tenemos una triangulación con $\{p_1, \dots, p_{r-1}\}$ como vértices, $3(r-1) - 6 = 3r - 9$ aristas y $2(r-1) - 4 = 2r - 6$ caras.

Si p_r está en el interior de alguna cara f (es decir si $p_r \in f(\overset{\circ}{\Delta})$) entonces podemos agregar tres aristas que unen p_r con cada uno de los vértices de la cara f (ver figura 3.2). Obtenemos así una nueva triangulación con un vértice extra p_r , tres aristas extras (las que agregamos) y la antigua cara f ahora dividida en tres caras. Por lo tanto ahora tenemos $(r-1) + 1 = r$ vértices, $(3r-9) + 3 = 3r-6$ aristas y $(2r-6) + 2 = 2r-4$ caras.

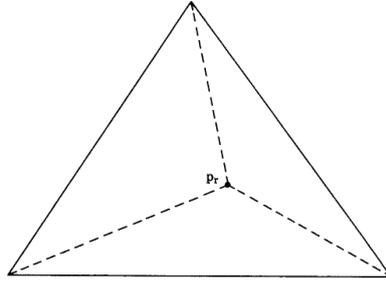


FIGURA 2.2. Situación cuando p_r está en el interior de alguna cara $f \in F$.

Si p_r no está en el interior de una cara, entonces está en alguna arista (es decir $p_r = e(t)$ para algún $e \in E$ y $t \in (0, 1)$, podemos asegurar que $t \neq 0$ y $t \neq 1$ pues si no p_r sería un vértice que ya teníamos). Podemos reemplazar la arista e por dos nuevas aristas, donde una une $e(0)$ con $e(t)$ y otra une $e(1)$ con $e(t)$, y agregar dos aristas más uniendo p_r con los vértices restantes de la caras f_e^+ y f_e^- . Tenemos entonces una nueva triangulación con un vértice extra p_r , dos aristas extras, una antigua arista e dividida en dos, y dos viejas caras reemplazadas por dos nuevas. Entonces ahora tenemos $(r-1) + 1 = r$ vértices, $(3r-9) + 3 = 3r-6$ aristas y $(2r-6) + 2 = 2r-4$ caras. \square

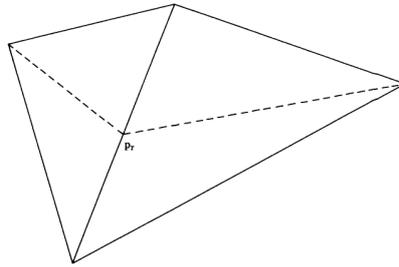


FIGURA 2.3. Situación cuando p_r está en alguna arista $e \in E$.

Proposición 3.14. *Sea $\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_2 : P(x, y, z) = 0\}$ una curva proyectiva no singular tal que $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ y sea $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ el cubrimiento ramificado definido por $\phi[x, y, z] = [x, z]$. Si (V, E, F) es una triangulación de \mathbb{P}_1 tal que el lugar de ramificación $\phi(R)$ está contenido en V , entonces existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de \mathcal{C} tal que*

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V),$$

$$\tilde{E} = \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} : \tilde{e} \text{ es continua y } \phi \circ \tilde{e} \in E\},$$

$$\tilde{F} = \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow \mathcal{C} : \tilde{f} \text{ es continua y } \phi \circ \tilde{f} \in F\}.$$

Más aún, si $\nu_\phi(p)$ es el índice de ramificación de ϕ en $p \in \mathcal{C}$ y d es el grado de la curva, entonces

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

$$\#\tilde{E} = d\#E,$$

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Veremos la demostración de esta proposición más adelante (en la página 45).

Teorema 3.15. *Sea \mathcal{C} una curva proyectiva no singular de grado d en \mathbb{P}_2 . Si $r \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $r \geq \max\{d(d-1), 3\}$, entonces \mathcal{C} admite una triangulación con $rd - d(d-1)$ vértices, $3(r-2)d$ aristas y $2(r-2)d$ caras.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P un polinomio homogéneo de grado d que define a \mathcal{C} . Por el lema 3.8, aplicando una transformación proyectiva adecuada, podemos asumir que el mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ dado por $\phi[x, y, z] = [x, z]$ está bien definido (es decir $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$) y además $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in \mathcal{C}$.

Por el lema 3.7, ϕ tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación (es decir $\#R = d(d-1)$). Por otro lado, de acuerdo al lema 3.13, si $r \geq \max\{d(d-1), 3\}$ podemos encontrar una triangulación (V, E, F) de \mathbb{P}_1 tal que $\phi(R) \subset V$, $\#V = r$, $\#E = 3r - 6 = 3(r-2)$ y $\#F = 2r - 4 = 2(r-2)$.

Finalmente, si $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ es la triangulación de \mathcal{C} dada por la proposición 3.14, tenemos $\#\tilde{E} = d\#E = 3(r-2)d$, $\#\tilde{F} = d\#F = 2(r-2)d$ y como $\nu_\phi(p) = 2$ para todo p en R , concluimos que

$$\begin{aligned} \#\tilde{V} &= rd - \#R \\ &= rd - d(d-1). \end{aligned}$$

□

Como corolario inmediato tenemos

Corolario 3.16 (La fórmula de género-grado). *La característica de Euler χ y el género g de una curva proyectiva no singular de grado d en \mathbb{P}_2 están dados por*

$$\chi = d(3 - d), \quad g = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

DEMOSTRACIÓN. La curva \mathcal{C} admite una triangulación con $rd - d(d - 1)$ vértices, $3(r - 2)d$ aristas y $2(r - 2)d$ caras, de donde la característica de Euler de \mathcal{C} es

$$\chi = d(3 - d).$$

Por otro lado, por definición $g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$. Entonces

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(2 - d(3 - d)) \\ &= \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2) \end{aligned}$$

□

Observación 3.17. *Las curvas de grados 1, 2, 3 y 4 tiene género 0, 0, 1 y 3, por lo que no podemos conseguir que el género sea 2. En principio esto no quiere decir que no haya curvas proyectivas de género 2, si no que éstas tienen que tener singularidades o no ser planas. El lector interesado puede consultar el capítulo 7 de [1].*

Para terminar esta sección veamos la demostración de la proposición 3.14:

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que \tilde{V} , \tilde{E} y \tilde{F} definidos como

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V),$$

$$\tilde{E} = \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} : \tilde{e} \text{ es continua y } \phi \circ \tilde{e} \in E\},$$

$$\tilde{F} = \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow \mathcal{C} : \tilde{f} \text{ es continua y } \phi \circ \tilde{f} \in F\},$$

cumplen la definición de triangulación (definición 3.9) y además que cumplen que si $\nu_\phi(p)$ es el índice de ramificación de ϕ en $p \in \mathcal{C}$ y d es el grado de la curva entonces

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

$$\#\tilde{E} = d\#E,$$

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Por los lemas 6 y 6 del apéndice, si $f \in F$, $p \in \mathcal{C}$ y $\phi(p) = f(t)$ para algún $t \in \Delta - \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ entonces existe un único mapa $\tilde{f} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ continuo tal que

$$\phi \circ \tilde{f} = f \quad \text{y} \quad \tilde{f}(t) = p.$$

Luego, por el lema 3.5 tenemos que $\#\phi^{-1}(f(t)) = d$ (ya que $f(t) \notin \phi(R)$). Entonces por cada $f \in F$ existen exactamente d mapas continuos $\tilde{f} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ tales que $\phi \circ \tilde{f} = f \in F$, es decir

$$\#\tilde{F} = d\#F.$$

Por otro lado, si V es el conjunto de vértices de la triangulación en \mathbb{P}_1 , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{C} - \phi^{-1}(V) &= \phi^{-1}\{f(t) : f \in F, t \in \Delta - \{(0,0), (1,0), (0,1)\}\} \\ &= \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \Delta - \{(0,0), (1,0), (0,1)\}\}; \end{aligned}$$

la última igualdad es porque $\phi \circ \tilde{f} = f$. En particular, si $G = \cup_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \tilde{f}(\Delta)$ entonces $\mathcal{C} - \phi^{-1}(V) \subset G$ y por lo tanto es denso en \mathcal{C} , pues $\phi^{-1}(V)$ es un conjunto finito por el lema 3.5.

Por otro lado, como Δ es compacto y \tilde{f} es un mapa continuo, entonces $\tilde{f}(\Delta)$ es compacto, por lo tanto también lo es G , entonces G es cerrado y denso en \mathcal{C} , de donde $G = \mathcal{C}$. Entonces

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{f}(t) : \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}\}.$$

Luego, si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces $\phi \circ \tilde{f} \in F$ y por lo tanto $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \in E$ o bien $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in E$ (con σ_i y r como en la definición 3.9 parte c). Si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ deducimos que $\tilde{f} \circ \sigma_i \in \tilde{E}$ o bien $\tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in \tilde{E}$. Ahora, si $t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ entonces

$$\tilde{f}(t) \in \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\}.$$

Luego

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{e}(0) : \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) : \tilde{e} \in \tilde{E}\},$$

y por lo tanto se cumple (1) de la definición 3.9.

De los lemas 6 y 6 del apéndice, deducimos que si $e \in E$, $p \in \mathcal{C}$ y $\phi(p) = e(t)$ para algún $t \in (0,1)$, entonces existe un único mapa continuo $\tilde{e} : [0,1] \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\phi \circ \tilde{e} = e$. Además, por el lema 6 la restricción de \tilde{e} al abierto $(0,1)$ es un homeomorfismo sobre su imagen en \mathcal{C} . Por unicidad de \tilde{e} se cumple (2) de la definición 3.9.

Por otro lado,

$$\phi^{-1}\{e(t) : e \in E, t \in (0, 1)\} = \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\}.$$

Sean

$$\Gamma = \cup_{e \in E} e([0, 1]) = V \cup \{e(t) : e \in E, t \in (0, 1)\} \quad \text{y} \quad \tilde{\Gamma} = \cup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}([0, 1]).$$

Tenemos

$$\phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(V) \cup \{\tilde{e}(t) : \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\} = \tilde{\Gamma}.$$

Luego, por el lema 3.5, si $t \in (0, 1)$ y $e \in E$ entonces $\phi^{-1}(e(t))$ consiste en exactamente d puntos de \mathcal{C} (porque $e(t) \notin \phi(R)$). Entonces por cada mapa continuo $e : \Delta \rightarrow \mathbb{P}_1$ hay exactamente d mapas continuos $\tilde{e} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ tales que $\phi \circ \tilde{e} = e$, de donde

$$\#\tilde{E} = d\#E.$$

Por el lema 6 del apéndice, si $\tilde{f} \in \tilde{F}$, entonces $\tilde{f}|_{\tilde{\Delta}}$ es un homeomorfismo sobre su imagen en \mathcal{C} , la cual es una componente conexa de $\phi^{-1}(f(\mathring{\Delta}))$ (con $\phi \circ \tilde{f} = f$). Como $f(\mathring{\Delta})$ es una componente conexa de $\mathbb{P}_1 - \Gamma$ entonces $\tilde{f}(\mathring{\Delta}) = \phi^{-1}(f(\mathring{\Delta}))$ es una componente conexa de

$$\phi^{-1}(\mathbb{P}_1 - \Gamma) = \mathcal{C} - \phi^{-1}(\Gamma) = \mathcal{C} - \tilde{\Gamma},$$

luego se cumple (3) de la definición 3.9.

Por último, nos queda ver que

$$\#\tilde{V} = d\#V - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

lo que es consecuencia del lema 3.5, ya que $\phi(R) \subset V$. □

Superficies de Riemann y divisores de curvas proyectivas

1. Superficies de Riemann

En este capítulo veremos que las curvas proyectivas son una clase especial de superficies reales, las llamadas *superficies de Riemann*, y veremos que podemos definir sobre las curvas proyectivas funciones holomorfas y meromorfas, así como también diferenciales holomorfos y meromorfos.

Definición 4.1. *Una superficie (topológica) es un espacio topológico Hausdorff S que es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 , es decir cada punto $a \in S$ tiene un entorno que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 .*

Observación 4.2. *Como \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} son homeomorfos, podemos pensar que un espacio topológico Hausdorff S es una superficie si cada punto $a \in S$ tiene un entorno que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{C} . Esto nos permitirá darle más estructura a la superficie.*

Definición 4.3. *Decimos que un homeomorfismo $\phi : U \subset S \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ es una carta en S y que un atlas Φ de la superficie S es una colección de cartas de S*

$$\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \subset S \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C} : \alpha \in A\} \quad \text{tal que} \quad S = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

donde A es un conjunto de índices.

Si tenemos dos cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ entonces $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un abierto en $V_\alpha \subset \mathbb{C}$.

Definición 4.4. *Si $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \subset S \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C} : \alpha \in A\}$ es un atlas de S entonces los homeomorfismos*

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

se llaman *funciones de transición del atlas*. Diremos que un atlas es *holomorfo* si todas las funciones de transición son holomorfas.

Definición 4.5. Si S es una superficie con un atlas holomorfo, diremos que S es una superficie de Riemann.

Ejemplo 4.6. 1. Si $S = U$ es un abierto de \mathbb{C} entonces el mapa identidad $\{1_U : U \rightarrow U\}$ es un atlas holomorfo en U .
2. Sean $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y

$$f : U_f = S \setminus \{\infty\} \subset S \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{definida por } f(z) = z,$$

$$g : U_g = S \setminus \{0\} \subset S \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{definida por } g(z) = \frac{1}{z},$$

donde entenderemos que $g(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$. Veamos que $\Phi = \{f, g\}$ es una atlas holomorfo sobre S .

Tenemos que

$$U_f \cup U_g = (\mathbb{C} \setminus \{\infty\}) \cup (\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S \quad \text{y además} \quad U_f \cap U_g = S \setminus (\{0\} \cup \{\infty\}).$$

Luego

$$\phi_{fg} = f \circ g^{-1}(z) = g(z) = \frac{1}{z},$$

es una función holomorfa en $U_\alpha \cap U_\beta \subset \mathbb{C}$. Por otro lado

$$\phi_{gf} = g \circ f^{-1}(z) = g(z) = \frac{1}{z}.$$

Entonces ambos mapas de transición son funciones holomorfas en un abierto de \mathbb{C} por lo que Φ es un atlas holomorfo.

A esta superficie $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se la conoce como la esfera de Riemann.

En este trabajo, la mayor fuente de ejemplos de superficies de Riemann son las curvas algebraicas complejas no singulares:

Proposición 4.7. Si \mathcal{C} es una curva algebraica en \mathbb{C}^2 definida por un polinomio $P(x, y)$, entonces $\mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$ admite un atlas holomorfo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(a, b) \in \mathcal{C}$ y que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita tenemos que existen entornos V y W en \mathbb{C} de a y b , respectivamente, y una función holomorfa $g : V \rightarrow W$ tal que si $x \in V$ e $y \in W$ entonces

$$P(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

Por otro lado, como $\mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$ es un conjunto abierto de \mathcal{C} (pues $\text{Sing}(\mathcal{C})$ es un conjunto cerrado), si elegimos V y W lo suficientemente chicos podemos asumir que $U = \{(x, y) \in \mathcal{C} : x \in V, y \in W\}$ es un entorno abierto de $(a, b) \in \mathcal{C}^2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$. Luego la proyección en la primera coordenada

$$\phi : U \rightarrow V \quad \text{definida por} \quad \phi(x, y) = x$$

es una función continua con inversa continua (a saber $x \mapsto (x, g(x))$).

De manera similar, si $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \neq 0$, entonces existe un entorno $U \subset \mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$ de (a, b) tal que el mapa

$$\psi : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{definido por} \quad \psi(x, y) = y$$

es un homeomorfismo sobre un abierto $V \subset \mathbb{C}$ con inversa $y \mapsto (h(y), y)$.

Por lo tanto, la colección de todas las funciones del tipo ϕ y ψ descrito arriba forman un atlas de $\mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$, ya que en cada punto $(a, b) \in \mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$ podemos encontrar al menos uno de estos mapas. Nos queda ver que el atlas es holomorfo, es decir, que las funciones de transición son holomorfas.

Las funciones de transición son la identidad (cuando tomamos $\phi_\alpha = \phi_\beta = \phi$ o $\phi_\alpha = \phi_\beta = \psi$) o bien alguna de las composiciones

$$x \mapsto (x, g(x)) \xrightarrow{\psi} g(x),$$

o

$$y \mapsto (h(y), y) \xrightarrow{\phi} h(y).$$

Como ϕ y ψ son funciones holomorfas (pues provienen del teorema de la función implícita), entonces las composiciones anteriores son holomorfas. \square

Tenemos un resultado similar para curvas proyectivas, el cual es de más interés para nosotros, puesto que en el teorema de Riemann-Roch las curvas que nos interesan son las curvas proyectivas en \mathbb{P}_2 .

Corolario 4.8. *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva en \mathbb{P}_2 definida por un polinomio homogéneo $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$, entonces $\mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$ admite un atlas holomorfo.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando una transformación proyectiva podemos suponer $\mathcal{C} \neq \{z = 0\}$. Sea $F := \mathcal{C} \cap \{z = 0\} = \{p_1, \dots, p_k\}$.

El polinomio $P(x, y, 1)$ define una curva en $U_2 = \mathbb{C}^2$, y por lo tanto la proposición 4.7 garantiza la existencia de un atlas holomorfo $\Phi_2 = \{\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ de $\mathcal{C} \cap U_2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$.

Por otro lado, $F \subset U_0 \cup U_1$. Si $p \in F$, entonces p es un punto no singular de las curvas definidas en U_0 o U_1 por $P(1, y, z) = 0$ o $P(x, 1, z) = 0$, respectivamente. Razonando de forma análoga a la demostración de la proposición 4.7, el Teorema de la función implícita nos dice que existe un entorno U_p de p y una función holomorfa $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$, que es alguno de los siguientes

$$\frac{z}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{y}, \frac{x}{y} \text{ o } \frac{y}{x},$$

con inversas respectivas

$$\phi \mapsto [1, g(w), w], [g(w), w, 1], [g(w), 1, w], [w, 1, g(w)] \text{ o } [1, w, g(w)],$$

con g una función holomorfa, proveniente del Teorema de la función implícita.

Veamos que $\Phi = \Phi_2 \cup \{\phi_p : p \in F\}$ es un atlas holomorfo de la curva \mathcal{C} . Por construcción para cada punto no singular de la curva \mathcal{C} , existe una carta $\phi \in \Phi$, por lo tanto no basta con ver que las funciones de transición son holomorfas. Cada función de transición es alguna de las siguientes

$$w \mapsto w, \frac{1}{w}, g(w), \frac{1}{g(w)}, \frac{w}{g(w)} \text{ o } \frac{g(w)}{w},$$

donde el denominador no se anula en el conjunto donde la función de transición está definida, y por lo tanto cada función de transición es holomorfa. \square

La utilidad de ver a las curvas proyectivas como superficies de Riemann, es que en estas últimas tenemos los conceptos de funciones holomorfas y meromorfa.

Definición 4.9. Sea $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ un atlas holomorfo en una superficie de Riemann S . Decimos que una función continua $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con respecto a Φ en $x \in S$ si existe una carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ tal que $x \in U_\alpha$ y además la función

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en $\phi_\alpha(x)$. Diremos que f es holomorfa con respecto a Φ si es holomorfa para todo $x \in S$.

Veamos que la definición de función holomorfa es independiente de la elección de la carta ϕ_α :

Lema 4.10. *Un mapa continuo $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfo con respecto a un atlas holomorfo Φ en S si y sólo si*

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

es una función holomorfa para toda carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ .

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ son cartas en Φ entonces $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un abierto de V_α que contiene a $\phi_\alpha(x)$ y además

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} = \left(f \circ \phi_\beta^{-1} \right) \circ \left(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \right)|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}.$$

Como $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ y $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ son ambas funciones holomorfas, su composición también lo es, por lo que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\phi_\alpha(x)$ si y sólo si $f \circ \phi_\beta^{-1}$ lo es en $\phi_\beta(x)$. \square

Veamos ahora como extender la definición 4.9, cuando f es una función entre superficies de Riemann.

Definición 4.11. *Sean S y T superficies de Riemann con atlas Φ y Ψ , respectivamente. Diremos que una función continua $f : S \rightarrow T$ es holomorfa con respecto a Φ y Ψ si*

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta))} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta)) \subset \mathbb{C} \rightarrow Y_\beta \subset \mathbb{C},$$

es holomorfa para cada carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ y toda carta $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow Y_\beta$ en Ψ .

Observación 4.12. *Vimos que \mathbb{C} es una superficie de Riemann, un posible atlas holomorfo es $\Phi = \{id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ que consiste en una única carta, que es la identidad. Si en la definición anterior ponemos \mathbb{C} en lugar de T , recuperamos la definición 4.9.*

Observación 4.13. *Escribiremos $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ si f no necesariamente está definida en todo \mathbb{C} y además donde no está definida tiene polos.*

Observación 4.14. *Sea $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ una función no idénticamente nula en una superficie de Riemann S . Si $p \in S$, podemos elegir una carta holomorfa $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ tal que $p \in U_\alpha$.*

Luego $f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa de \mathbb{C} en \mathbb{C} , por lo tanto podemos adaptar las definiciones de polos y ceros para mapas meromorfos en \mathbb{C} .

Definición 4.15. *Diremos que una función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un polo o un cero de multiplicidad $m \in \mathbb{Z}^+$ en p si la función $f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ lo tiene en $\phi_\alpha(p)$.*

Es de esperar que así como tenemos una noción de función holomorfa en una superficies de Riemann S , también tendremos una noción de función meromorfa en S . En el anexo 6, el lector puede recordar la definición de función meromorfa en \mathbb{C} .

Definición 4.16. Diremos que una función $f : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es meromorfa si pensando a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como una superficie de Riemann, f es holomorfa en el sentido de la definición 4.11 y cada preimagen de ∞ es un polo de f . En ese caso escribiremos $f : S \dashrightarrow \mathbb{C}$.

Ejemplo 4.17. Ya vimos que $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ admite un atlas holomorfo. Veamos que el mapa $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definido como $h(z) = z^2$ se extiende a un mapa holomorfo $\bar{h} : S \rightarrow S$. Es claro que h es holomorfa (por ser un polinomio).

Si $x \in \mathbb{C} \setminus \{\infty\}$, tenemos la carta $f(z) = z$, cuya inversa es ella misma por lo tanto

$$h \circ f^{-1}(z) = h(z) = z^2,$$

que es una función holomorfa pensada como función de \mathbb{C} en \mathbb{C} .

Por otro lado, si $x = \infty$, consideramos un entorno U de ∞ (en S). Como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h(z) = \infty$ podemos extender la función h , poniendo $\bar{h}(\infty) = \infty$.

La carta que ahora debemos usar es $g(z) = \frac{1}{z}$. Observar que este mapa también se extiende a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Luego,

$$g \circ \bar{h} \circ g^{-1}(z) = g\left(h\left(\frac{1}{z}\right)\right) = g\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^2.$$

Definición 4.18. Sean $f : S \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en una curva proyectiva \mathcal{C} y p un punto en \mathcal{C} . Definimos

$$\text{ord}_p(f) = \begin{cases} -m & \text{si } f \text{ tiene un polo de multiplicidad } m \text{ en } p \\ m & \text{si } f \text{ tiene un cero de multiplicidad } m \text{ en } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos ahora un lema que nos será de utilidad más adelante, puede ser de utilidad revisar el concepto de función holomorfa de \mathbb{C} en el anexo 6.

Lema 4.19. Sean \mathcal{C} una curva proyectiva, $f, g : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ funciones meromorfas no nulas y p un punto de la curva \mathcal{C} . Si $f + g$ no es idénticamente nula, entonces

$$\text{ord}_p(f + g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como S es una superficie de Riemann, existe una carta $\phi_p : U \in S \rightarrow V \in \mathbb{C}$ tal que $p \in U$. Luego $F := \phi^{-1} \circ f$ y $G := \phi^{-1} \circ g$ son mapas de \mathbb{C} , por lo que la prueba sigue como en este caso. Sea $a = \phi^{-1}(p)$.

Si p no es un polo, entonces el resultado es trivial.

Si p es un polo, sean $\text{ord}_p(f) = -n$ y $\text{ord}_p(g) = -m$, es decir

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n F(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m G(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Tenemos dos casos:

1. $n \neq m$: Supongamos que $n < m$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m (F(z) + G(z)) &= \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{m-n} \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n F(z) + \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m G(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m G(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

ya que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n F(z) = \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{m-n} = 0$ dado que $n < m$.

Entonces $\text{ord}_p(f + g) = \text{ord}_p(g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$. El caso $n > m$ es análogo.

2. $n = m$: En este caso,

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n (F(z) + G(z)) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n F(z) + \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m G(z) = \gamma \in \mathbb{C}.$$

Tanto si γ es nulo o no, conseguimos el resultado. □

Definición 4.20. Diremos que dos superficies de Riemann S y T son isomorfas si existe una función $f : S \rightarrow T$ biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa.

Así como tenemos funciones meromorfas en una superficie de Riemann, podemos también definir diferenciales meromorfos:

Definición 4.21. Sea $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ un atlas holomorfo de una curva proyectiva \mathcal{C} . Un diferencial meromorfo η en \mathcal{C} , está dado por una familia de funciones meromorfas

$$\{\eta_\alpha : V_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \alpha \in A\},$$

tales que si $\alpha, \beta \in A$ y $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces

$$\eta_\alpha(\phi_\alpha(u)) = \eta_\beta(\phi_\beta(u)) (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})'(\phi_\alpha(u)).$$

Si f y g son mapas meromorfs en \mathcal{C} , podemos definir un diferencial meromorfo fdg como $fdg = \eta$ donde

$$\eta_\alpha = (f \circ \phi_\alpha^{-1}) (g \circ \phi_\alpha^{-1})'.$$

Por otro lado, si \tilde{f} y \tilde{g} son otras funciones meromorfas en \mathcal{C} , diremos que

$$fdg = \tilde{f}d\tilde{g},$$

si y sólo si para toda carta holomorfa $\phi : U \rightarrow V$ tenemos que

$$(f \circ \phi^{-1}) (g \circ \phi^{-1})' = (\tilde{f} \circ \phi^{-1}) (\tilde{g} \circ \phi^{-1})'.$$

Observación 4.22. En la definición anterior, tenemos que las composiciones de f, g, \tilde{f} y \tilde{g} con ϕ^{-1} son funciones meromorfas de un abierto $V \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} , por lo que las podemos diferenciar y multiplicar punto a punto de la manera usual.

Para entender un poco más la definición 4.16, observemos que si $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ es un atlas holomorfo en S entonces una función meromorfa $g : S \dashrightarrow \mathbb{C}$ está determinada por la familia de funciones meromorfas

$$\{g \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : \alpha \in A\}$$

es decir, podemos conocer a la función g si sabemos cómo es en cada carta.

Recíprocamente, una familia de funciones meromorfas

$$\{G_\alpha : V_\alpha \dashrightarrow \mathbb{C} : \alpha \in A\},$$

define una función meromorfa $g : S \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $G_\alpha = g \circ \phi_\alpha^{-1}$ para cada $\alpha \in A$ si y sólo si

$$G_\alpha(\phi_\alpha(u)) = G_\beta(\phi_\beta(u)) \quad \text{para todo } u \in U_\alpha \cap U_\beta :$$

en efecto, $g : S \dashrightarrow \mathbb{C}$ está bien definida si y sólo si

$$G_\alpha(\phi_\alpha) = g \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha = g \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta = G_\beta(\phi_\beta),$$

para todo α y β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

2. Divisores de curvas proyectivas

En esta sección definiremos un concepto central en el teorema de Riemann-Roch: *divisor* de una curva proyectiva. Además veremos algunas de sus propiedades más relevantes.

Definición 4.23. *Un divisor D de una curva proyectiva \mathcal{C} es una suma formal*

$$D = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p,$$

donde $n_p \in \mathbb{Z}$ y $n_p = 0$ salvo para una cantidad finita de $p \in \mathcal{C}$.

Si $n_p = 0$ para todo $p \notin \{p_1, \dots, p_k\}$ escribimos $D = n_1 p_1 + \dots + n_k p_k$.

Si $n_p = 0$ para todo $p \in \mathcal{C}$ escribiremos $D = 0$.

Si $n_p \geq 0$ para todo $p \in \mathcal{C}$ escribimos $D \geq 0$, y decimos que D es *efectivo*.

Escribiremos $D \geq D'$ si $D - D'$ es efectivo.

Definición 4.24. *El grado de un divisor $D = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p$ es $\deg(D) = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p$.*

Podemos sumar y restar divisores de la manera obvia, como también multiplicar por "escalares" en \mathbb{Z} . Denotaremos $\text{Div}(\mathcal{C})$ al conjunto de todos los divisores de \mathcal{C} .

Observación 4.25. *Dado $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$ tenemos*

$$D + (-D) = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p + \sum_{p \in \mathcal{C}} -n_p p = \sum_{p \in \mathcal{C}} (n_p - n_p) p = 0,$$

es decir que $-D$ es el opuesto de D . Por otro lado,

$$D + 0 = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p + \sum_{p \in \mathcal{C}} 0p = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p = D.$$

Por lo tanto, el divisor 0 es el neutro para la suma. Además como en el fondo la suma de divisores es una suma en \mathbb{Z} , tenemos que la suma de divisores es asociativa y conmutativa, por lo que $\text{Div}(\mathcal{C})$ es un grupo abeliano.

Observación 4.26. *Fijada la curva \mathcal{C} , el mapa $\deg : \text{Div}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada divisor le asocia su grado es un morfismo de grupos.*

Hay dos tipos destacados de divisores en una curva proyectiva \mathcal{C} , los divisores principales y los divisores canónicos, los cuales están relacionados con las funciones y diferenciales meromorfas, respectivamente.

Definición 4.27. El divisor asociado a una función meromorfa $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ no idénticamente nula es

$$(f) := \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p \quad \text{tal que} \quad n_p = \begin{cases} -m & \text{si } f \text{ tiene un polo de multiplicidad } m \text{ en } p \\ m & \text{si } f \text{ tiene un cero de multiplicidad } m \text{ en } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 4.28. 1. Diremos que un divisor D es principal si es un divisor de algún mapa meromorfo en \mathcal{C} .

2. Diremos que D y D' son linealmente equivalentes si $D - D'$ es un divisor principal. En tal caso lo denotaremos $D \sim D'$.

Ejemplo 4.29. Sea \mathcal{C} la curva asociada al polinomio $P(x, y, z) = y$ en \mathbb{P}_2 . El divisor

$$D = -2[0, 0, 1] + 2[1, 0, 0]$$

es el divisor principal asociado a la función $f([x, y, z]) = \left(\frac{x}{z}\right)^2$, la cual tiene un cero de orden 2 en $[0, 0, 1]$ y un polo del mismo orden en $[1, 0, 0]$.

Observar que para que la definición de divisor principal tenga sentido, es crucial que la cantidad de polos y ceros de cualquier función meromorfa $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ sea finita.

Lo siguiente es un resultado conocido de variable compleja:

Lema 4.30. Sea $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa no constante, entonces el conjunto de ceros no tiene puntos de acumulación (en \mathbb{C}).

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [4].

Observación 4.31. Fijada la curva \mathcal{C} tenemos que $(fg) = (f) + (g)$. Además en virtud del lema 4.30, si g no es constante, entonces sus ceros son aislados, y por lo tanto $\frac{f}{g}$ es una función meromorfa. Luego es sencillo ver que $\left(\frac{f}{g}\right) = (f) - (g)$.

Observación 4.32. A partir del lema 4.30, tenemos que si una función meromorfa $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ se anula en un conjunto infinito de puntos dentro de un compacto, entonces f es constante e igual a cero.

Veamos a continuación un resultado similar para funciones meromorfas $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$:

Lema 4.33. Si $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa no constante y $p \in \mathcal{C}$, entonces $f^{-1}(f(p))$ es finito.

DEMOSTRACIÓN. Componiendo con un isomorfismo $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ podemos suponer que $f(p) = 0$. Supongamos $\Lambda = f^{-1}(0)$ es infinito. Como \mathcal{C} es compacta y Λ cerrado en \mathcal{C} , existe un punto de acumulación $l \in \Lambda$, de Λ . Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta tal que $\phi(l) = a$. Entonces

$$f \circ \phi^{-1}(z) = (z - a)^m g(z),$$

donde g es una función holomorfa en $B(a, r) \subset V$ tal que $g(a) \neq 0$. Por la observación 4.32, el mapa g es idénticamente nulo en $B(a, r)$, entonces existe un entorno $V_l \subset \Lambda$ de l donde f se anula.

Veamos que Λ es conexo por caminos (y por lo tanto, conexo). Sea l_1 un punto en $\Lambda \setminus V_l$. Podemos encontrar un camino γ (en \mathcal{C}) que une $l \in V_l$ con l_1 . Como \mathcal{C} es compacto y γ cerrado, entonces también es compacto. Luego, podemos cubrir el camino con una cantidad finita de cartas $V_l = V_1, \dots, V_k$.

Como γ es conexo, $V_1 \cap V_{j_1} \neq \emptyset$ para algún $j_1 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{1\}$, de lo contrario podemos escribir γ como unión de dos abiertos disjuntos. Luego por el mismo argumento debe existir $j_2 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{1, j_1\}$ tal que $(V_1 \cap V_{j_1}) \cap V_{j_2} \neq \emptyset$. Por inducción, para cada $j_t \in \{2, \dots, k\}$ debe existir j_{t+1} tal que $(V_1 \cap \dots \cap V_{j_t}) \cap V_{j_{t+1}} \neq \emptyset$. Reordenando de ser necesario, podemos asumir que $\{V_1, \dots, V_k\}$ están ordenados de manera que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 \neq \emptyset$, etc.

Sabemos que f se anula en V_1 , en particular se anula en $V_1 \cap V_2$. Por otro lado, $V_1 \cap V_2 \subset V_2$, entonces por la observación 4.32, tenemos que f se anula en V_2 , es decir f se anula en $V_1 \cup V_2$. Repitiendo este procedimiento hasta llegar a V_k , obtenemos que f se anula en $V_1 \cup \dots \cup V_k$, en particular f se anula en el camino γ , y entonces $\gamma \subset \Lambda$.

Veamos que Λ es abierto. Tenemos un entorno V_l de l . Si $\tilde{l} \in \Lambda$ es distinto de l , podemos encontrar un camino $\gamma \subset \Lambda$ que une l con \tilde{l} , y una carta $\phi_{\tilde{l}} : U_{\tilde{l}} \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cubre a \tilde{l} . Luego $U_{\tilde{l}} \cap \gamma$ consiste en infinitos puntos, donde f se anula, por lo que f se anula en $U_{\tilde{l}}$ (observación 4.32). Entonces para cada $\tilde{l} \in \Lambda$ existe un entorno (abierto) dentro de Λ .

Finalmente, como \mathcal{C} es conexo Hausdorff y Λ es cerrado y abierto, entonces $\Lambda = \mathcal{C}$, es decir, f es nula en toda la curva, en particular es constante, contradiciendo la hipótesis. \square

Lema 4.34. *Si $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa no nula, entonces tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros y polos.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa, definamos $\Lambda = \{[x, y, z] \in \mathcal{C} : f(x, y, z) = 0\}$. Supongamos que el cardinal de Λ es infinito.

En ese caso Λ tiene algún punto de acumulación. En ese caso, por el lema 4.33, f es constante e igual a cero. Por lo tanto, si f no es constante, Λ tiene a lo sumo una cantidad finita de puntos.

Para ver que la cantidad de polos también es finita, basta con observar que

$$\{\text{polos de } f\} = \left\{ \text{ceros de } \frac{1}{f} \right\},$$

y esté último tiene cardinal finito repitiendo el argumento anterior para $\frac{1}{f}$. \square

Definición 4.35. *Diremos que un diferencial meromorfo fdg tiene un polo de multiplicidad m en un punto $p \in S$, si la función meromorfa*

$$(f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})' : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

tiene un polo de multiplicidad m en $\phi(p)$, donde $\phi : U \rightarrow V$ es una carta holomorfa tal que $p \in U \subset S$. En el caso de que fdg no tenga polos, diremos que es un diferencial holomorfo.

Como también tenemos una noción de polo y cero para diferenciales meromorfos podemos definir:

Definición 4.36. *El divisor asociado a un diferencial meromorfo no idénticamente nulo $\omega = fdg$ en \mathcal{C} es*

$$(\omega) := \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p \quad \text{tal que} \quad n_p = \begin{cases} -m & \text{si } \omega \text{ tiene un polo de multiplicidad } m \text{ en } p \\ m & \text{si } \omega \text{ tiene un cero de multiplicidad } m \text{ en } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 4.37. *Si D es el divisor asociado a un diferencial meromorfo no nulo diremos que es un divisor canónico y lo anotaremos K .*

Observación 4.38. *Si ω y η son diferenciales meromorfos (definición 4.21) y η no es idénticamente nulo en \mathcal{C} entonces los cocientes $\frac{\omega_\alpha}{\eta_\alpha} : V_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definen funciones meromorfas que satisfacen*

$$\frac{\omega_\alpha(\phi_\alpha(u))}{\eta_\alpha(\phi_\alpha(u))} = \frac{\omega_\beta(\phi_\beta(u))}{\eta_\beta(\phi_\beta(u))}$$

para todo $u \in U_\alpha$. Esto quiere decir que $\omega = f\eta$.

Definición 4.39. Dada una curva proyectiva \mathcal{C} denotaremos

$$\mathbb{C}(\mathcal{C}) = \{f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es meromorfa}\}.$$

Observación 4.40. El cuerpo $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ es una extensión de \mathbb{C} .

Definición 4.41. Dado D un divisor en \mathcal{C} sea

$$\mathcal{L}(D) = \{f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : f \text{ meromorfa y } (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

Proposición 4.42. $\mathcal{L}(D)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}(\mathcal{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que es un subespacio de $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ es suficiente probar que es cerrado bajo las operaciones. Sean $f, g \in \mathcal{L}(D)$ no nulos. Escribamos $D = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p$,

$$(f + g) = \sum_{p \in \mathcal{C}} l_p p.$$

Si $f + g = 0$, entonces $f + g \in \mathcal{L}(D)$. En otro caso, supongamos por absurdo que $(f + g) + D$ no es efectivo. Luego existe $q \in \mathcal{C}$ tal que $l_q + n_q < 0$. Esto quiere decir que $f + g$ tiene un polo en q de orden mayor a n_q , además como $f, g \in \mathcal{L}(D)$ sabemos que $\text{ord}_q(f) + n_q \geq 0$ y $\text{ord}_q(g) + n_q \geq 0$.

Por otro lado, el lema 4.19 nos dice que $\text{ord}_q(f + g) \geq \min\{\text{ord}_q(f), \text{ord}_q(g)\}$ lo cual es una contradicción. \square

Observación 4.43. Veremos más adelante, usando Riemann-Roch, que la dimensión de $\mathcal{L}(D)$ es finita.

Definición 4.44. Si D es un divisor de una curva proyectiva \mathcal{C} entonces

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D).$$

Veremos ahora una generalización de lo que se ve en los cursos de variable compleja para una función racional $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

Proposición 4.45. Todo divisor principal en una curva \mathcal{C} tiene grado 0. Es decir, todo mapa meromorfo de \mathcal{C} en \mathbb{P}_1 no nulo tiene la misma cantidad de ceros y polos, contando multiplicidad.

Veremos la demostración de esta proposición al final de la próxima sección.

Corolario 4.46. *Dos divisores linealmente equivalentes tienen el mismo grado. En particular, todos los divisores canónicos de \mathcal{C} , tienen el mismo grado.*

DEMOSTRACIÓN. Si $D \sim D'$ entonces $D - D' = (f)$ con f meromorfa. Luego, por la proposición 4.45 tenemos que $\deg(f) = 0$, mientras que $\deg(D) - \deg(D') = \deg(D - D') = \deg(f) = 0$. La primera igualdad es porque el mapa $\deg : \text{Div}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un morfismo de grupos (observación 4.26).

El caso particular se deduce de la observación 4.38 y la parte anterior. \square

Corolario 4.47. *Si $\deg D < 0$, entonces $l(D) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $l(D) \neq 0$, entonces existe $f \in \mathcal{L}(D)$ no nula tal que $(f) + D \geq 0$. En ese caso $\deg D = \deg(f) + \deg D = \deg((f) + D) \geq 0$, ya que $\deg(f) = 0$ por la proposición 4.45. \square

Lema 4.48. *Si $D \sim D'$, entonces $l(D) = l(D')$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $D \sim D'$ existe un mapa meromorfo $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ tal que $D = D' + (g)$. Primero observamos que si $g = 0$, entonces $D = D'$ y el resultado es inmediato, por lo tanto podemos suponer que $g \neq 0$. Sea $\varphi : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D')$ el mapa $f \mapsto fg$. Es claro que el codominio es $\mathcal{L}(D')$. Veamos que φ es un isomorfismo, de donde se deduce la tesis.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(D)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)g \\ &= f_1g + f_2g \\ &= \varphi(f_1) + \varphi(f_2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f_1) &= (\lambda f_1)g \\ &= \lambda(f_1g) \\ &= \lambda\varphi(f_1), \end{aligned}$$

de donde sigue que φ es un morfismo de \mathbb{C} -espacios vectoriales. Nos queda ver que es biyectivo.

Como $g \neq 0$ entonces existe g^{-1} , luego podemos definir el la inversa de φ como el mapa $f' \rightarrow f'g^{-1}$, y por lo tanto φ es biyectiva.

□

Resultados principales

Como dijimos en la introducción, el objetivo principal de este trabajo monográfico es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.1 (Riemann-Roch). *Sean \mathcal{C} una curva proyectiva lisa no singular en \mathbb{P}_2 de género g y K un divisor canónico en \mathcal{C} . Si D es un divisor en \mathcal{C} , entonces*

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Para probar el teorema de Riemann-Roch necesitaremos algunos resultados previos. Veamos primero como se relacionan el grado de un divisor canónico K en una curva \mathcal{C} con el género de la misma:

Proposición 5.2. *Si K es un divisor canónico en \mathcal{C} entonces $\deg K = 2g - 2$, donde g es el género de la curva \mathcal{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 4.46, como todos los divisores canónicos tiene el mismo grado, entonces es suficiente encontrar un diferencial meromorfo ω en \mathcal{C} tal que $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Supongamos que \mathcal{C} está definido por un polinomio $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneo de grado d . Aplicando un cambio de coordenadas podemos asumir que $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ (esto nos da que el coeficiente de y^d en P es no nulo). Luego, como P es irreducible (por ser \mathcal{C} no singular podemos aplicar el corolario 2.17) y $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$, el teorema de Bézout (en su versión débil) implica que solo hay una cantidad finita de puntos donde P y $\frac{\partial P}{\partial y}$ se anulan simultáneamente, ya que P y $\frac{\partial P}{\partial y}$ no tienen componentes comunes. Como $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$, necesariamente x o z es no nulo en esos puntos, por lo tanto haciendo una transformación proyectiva de la forma $\phi[x, y, z] = [x, y, \alpha x + z]$ podemos asumir que si $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 0$, entonces $c \neq 0$.

Sea $\omega = d(x/z)$. Tenemos que ω es un diferencial meromorfo pues el mapa $[x, y, z] \mapsto \frac{x}{z}$ es meromorfo. Cerca de los puntos $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ con $c \neq 0$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$, podemos pensar a la función $[x, y, z] \mapsto \frac{x}{z}$ como una carta holomorfa local en \mathcal{C} , y por lo tanto ω no tiene ceros ni polos en esos puntos.

En cualquier punto $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ con $c = 0$, sabemos que $a \neq 0$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$ por nuestra elección de coordenadas. Entonces $\nu = \frac{z}{x}$ es una carta holomorfa local de \mathcal{C} y $\omega = d\left(\frac{1}{\nu}\right) = -\nu^{-2}d\nu$ tiene un polo de multiplicidad 2. Más aún, como $c = 0$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$, la recta $z = 0$ no es tangente a \mathcal{C} en ningún punto, luego esta recta interseca a la curva \mathcal{C} en exactamente $d = \deg(\mathcal{C})$ puntos (por el colorario 2.31). Estos puntos contribuyen en $-2d$ al grado del divisor (ω) , ya que su número es d y cada uno es un polo de multiplicidad 2.

Sea ahora $[a, b, c] \in \mathcal{C}$ tal que $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 0$. Estos puntos son los puntos de ramificación del mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ definido por $\phi[x, y, z] = [x, z]$. En estos puntos $c \neq 0$. Por lo tanto $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) \neq 0$, ya que en caso contrario, la relación de Euler implicaría $\frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0$, contradiciendo que \mathcal{C} es no singular. Por lo tanto $\mu = \frac{y}{z}$ es una carta holomorfa en \mathcal{C} en un entorno de estos puntos, y localmente $\frac{x}{z}$ es una función holomorfa $f(\mu)$ que satisface

$$P(f(\mu), \mu, 1) = 0.$$

Diferenciando esta identidad m veces (con respecto a u), nos muestra que si $f^{(k)}(u_0) = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$ entonces

$$f^{(m)}(u_0) = -\frac{\partial^m P}{\partial y^m}(f(u_0), u_0, 1) / \frac{\partial P}{\partial x}(f(u_0), u_0, 1).$$

Por lo tanto

$$\min\{m \in \mathbb{Z}^+ : f^{(m)}(u_0) \neq 0\} = \min\left\{m \in \mathbb{Z}^+ : \frac{\partial^m P}{\partial y^m}(f(u_0), u_0, 1) \neq 0\right\}.$$

Como $\omega = d(f(u)) = f'(u)du$, deducimos que la multiplicidad del cero de ω en un punto de ramificación de $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ es exactamente uno menos que el índice de ramificación de ϕ .

Finalmente, por el lema 3.7 y lema 3.8 podemos asumir que nuestras coordenadas fueron elegidas para que haya exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación y ω tenga un cero de multiplicidad 1 en cada uno de ellos. Por lo tanto, estos puntos contribuyen en $d(d-1)$ al grado de (ω) , luego

$$\deg(\omega) = d(d-1) - 2d = d(d-3).$$

Si ahora aplicamos la fórmula de género-grado (teorema 3.1), entonces

$$\begin{aligned}
\deg(\omega) &= d(d-3) \\
&= d^2 - 3d \\
&= d^2 - 3d + 2 - 2 \\
&= 2 \left(\frac{1}{2}(d-1)(d-2) \right) - 2 \\
&= 2g - 2
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. □

Lema 5.3. *Sea ω un diferencial meromorfo en \mathcal{C} con un solo polo. Entonces ese polo no es simple (es decir tiene multiplicidad mayor a 1).*

Veremos la demostración de este lema al final de la sección.

Lema 5.4. *Si D es un divisor de \mathcal{C} , K un divisor canónico y $p \in \mathcal{C}$ un punto, entonces*

$$0 \leq l(D+p) - l(K-D-p) - l(D) + l(K-D) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $D = \sum_{q \in \mathcal{C}} n_q q$ un divisor y $K = (\omega)$ un divisor canónico de \mathcal{C} .

Si $(f) + D \geq 0$, entonces $(f) + p + D \geq 0$, por lo tanto $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D+p)$. Por otro lado, la inclusión es estricta si y sólo si existe (al menos) un mapa $f \in \mathcal{L}(D+p) \setminus \mathcal{L}(D)$, es decir $(f) + p + D \geq 0$ pero $(f) + D < 0$. Esto solo sucede si f tiene un polo de orden 1 en p . Si este es el caso, $\mathcal{L}(D)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(D+p)$ de codimensión 1, y por lo tanto $0 \leq l(D+p) - l(D) \leq 1$. Lo mismo sucede con $\mathcal{L}(K-D)$ y $\mathcal{L}(K-D-p)$, es decir $0 \leq l(K-D) - l(K-D-p) \leq 1$.

En conclusión, $l(D) - l(D-p) \in \{0, 1\}$ y $l(K-D-p) - l(K-D) \in \{0, 1\}$. Por lo tanto, para probar el resultado falta ver que ambas cantidades no pueden valer 1 a la vez. Si ese fuese el caso, existirían $f, g : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$, mapas meromorfos, tales que $(f) + D + p \geq 0$ y $(g) + K - D \geq 0$. Luego $fg\omega : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ es un diferencial meromorfo en \mathcal{C} tal que $(fg\omega) = (f) + (g) + (\omega) \geq -D - p - K + D + K = -p$, es decir que el diferencial $fg\omega$ tiene un único polo en p y de multiplicidad 1. Esto contradiría el lema 5.3, lo que termina la demostración. □

Lema 5.5. *Si D es un divisor de \mathcal{C} y $m_0 \in \mathbb{Z}^+$, entonces existe $m \geq m_0$ y puntos $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{C}$ (no necesariamente distintos) tales que*

$$D + p_1 + \dots + p_k \sim mH,$$

donde $H = \sum_{p \in \mathcal{C}} I_p(\mathcal{C}, L)p$, para alguna recta L de \mathbb{P}_2 .

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $D = \sum_{p \in \mathcal{C}} n_p p$. Queremos encontrar $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{C}$ y $m \geq m_0$ tales que $D + p_1 \dots + p_k \sim mH$.

Agregando puntos p de \mathcal{C} al divisor D , podemos suponer que para cada $p \in \mathcal{C}$ tenemos que $n_p \geq 0$ y que $\deg D \geq m_0$. Por otro lado, sabemos que el conjunto $\{p \in \mathcal{C} : n_p > 0\}$ es finito (por ser D un divisor), entonces podemos escribir $\{p \in \mathcal{C} : n_p > 0\} = \{p_1, \dots, p_l\}$. Luego, para cada p en el conjunto anterior podemos encontrar una recta que pase por p y cuyos puntos de intersección con \mathcal{C} (contando multiplicidad) sean $p = q_1^{(p)}, \dots, q_d^{(p)}$.

Entonces

$$q_1^{(p)} + \dots + q_d^{(p)} \sim H,$$

pero en principio nos podrían faltar multiplicidades (por ejemplo si $n_p > 1$ y la recta que elegimos es transversal a \mathcal{C}). Entonces debemos repetir este procedimiento hasta conseguir tantos p como n_p . Si llamamos $m = \deg(D)$, tenemos que $m \geq m_0$ y además

$$mH \sim \sum_{n_p > 0} n_p \sum_{1 \leq i \leq d} q_i = D + p_1 \dots + p_k.$$

□

Lema 5.6. *Sean \mathcal{C} una curva proyectiva en \mathbb{P}_2 de grado d y H el divisor definido por $\sum_{p \in \mathcal{C}} I_p(\mathcal{C}, L)p$, donde $L \subset \mathbb{P}_2$ es una recta proyectiva. Si K es un divisor canónico y m es lo suficientemente grande, entonces*

$$l(mH) \geq \deg(mH) + 1 - g.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la curva proyectiva \mathcal{C} está definida por un polinomio homogéneo $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d . Por el teorema de Bézout (teorema 2.1), sabemos que $\deg H = \sum_{p \in \mathcal{C}} I_p(\mathcal{C}, L) = d$. Como K es un divisor canónico, tenemos que $\deg(K - mH) = \deg K - md$ y como $d \geq 1$ entonces si m es suficientemente grande tenemos $\deg(K - mH) < 0$, y en ese caso $l(K - mH) = 0$, en virtud del corolario 4.47.

Por otro lado, si $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo de grado m y $R \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es un polinomio lineal que define a L , entonces $f = \frac{Q}{R^m}$ define una función meromorfa en \mathcal{C} tal que $(f) + mH \geq 0$ para m suficientemente grande, y por lo tanto $f \in \mathcal{L}(mH)$. Más aún, si $g = \frac{\tilde{Q}}{R^m}$ entonces $f = g$ en \mathcal{C} si y sólo si $f - g = \frac{Q - \tilde{Q}}{R^m}$ es divisible por P , esto es, si y sólo si $Q - \tilde{Q} = 0$ en \mathcal{C} .

Por lo anterior, $(f) \sim (g)$ en \mathcal{C} si y sólo si $P|(f - g)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} l(mH) &\geq \dim(\mathbb{C}_m[x, y, z] - P\mathbb{C}_{m-d}[x, y, z]) \\ &= \dim\mathbb{C}_m[x, y, z] - \dim\mathbb{C}_{m-d}[x, y, z] \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\ &= md + \frac{1}{2}d(3-d) \\ &= md + 1 - g \\ &= \deg(mH) + 1 - g \end{aligned}$$

esto último por la fórmula de grado-género.

Por lo tanto, para m suficientemente grande tenemos que

$$l(mH) \geq \deg(mH) + 1 - g.$$

□

Observación 5.7. *Se probó que $\mathcal{L}(mh)$ tiene un subespacio de dimensión $\deg(mH) + 1 - g$ constituido por funciones racionales.*

A partir de estos lemas podemos probar la mitad del teorema de Riemann-Roch:

Teorema 5.8 (Teorema de Riemann). *Sea D un divisor de una curva proyectiva \mathcal{C} de género g . Si K es un divisor canónico, entonces*

$$l(D) - l(K - D) \geq \deg(D) + 1 - g.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 5.6, tenemos que para m suficientemente grande

$$l(mH) - l(K - mH) \geq \deg(mH) + 1 - g.$$

Sean m y $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{C}$ como en el lema 5.5. Tenemos

$$D + p_1 \dots + p_k \sim mH,$$

luego $\deg(mH) = \deg(D + p_1 + \dots + p_k) = \deg(D) + k$ (corolario 4.46). Usando el lema 4.48 deducimos

$$l(mH) - l(K - mH) = l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(K - (D + p_1 + \dots + p_k)).$$

Por otro lado, el lema 5.4 aplicado a $p = p_1$ implica $0 \leq l(D + p_1) - l(K - D - p_1) - l(D) - l(K - D) \leq 1$. Por inducción en k (la cantidad de puntos), obtenemos

$$l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(K - D - p_1 - \dots - p_k) - l(D) - l(K - D) \leq k.$$

Juntando todo, concluimos

$$\begin{aligned} l(D) - l(K - D) &\geq l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(K - D - p_1 - \dots - p_k) - k \\ &= l(mH) - l(K - mH) - k \\ &\geq \deg(mH) - g + 1 - k \\ &\geq \deg(D) - g + 1 \end{aligned}$$

□

Veamos ahora la demostración del Teorema de Riemann-Roch:

DEMOSTRACIÓN. Sea D un divisor en C y K un divisor canónico. Por la proposición 5.2 tenemos que $\deg K = 2g - 2$. Por un lado, aplicando el Teorema de Riemann (Teorema 5.8) a D obtenemos

$$(2) \quad l(D) - l(K - D) \geq \deg(D) - g + 1.$$

Por otro lado, aplicado a $K - D$

$$\begin{aligned} l(K - D) - l(D) &\geq \deg(K - D) - g - 1 \\ &= 2g - 2 - \deg(D) - g + 1 \\ &= -\deg(D) + g - 1, \end{aligned}$$

de donde

$$(3) \quad l(D) - l(K - D) \leq \deg D - g + 1.$$

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos el resultado. □

Para probar la proposición 4.45 y el lema 5.3 necesitamos un resultado previo:

Lema 5.9. Sean $\{p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s\}$ un conjunto de $r + s$ puntos en \mathbb{C} con $r \geq 3$. Entonces existe una triangulación (V, E, F) de \mathbb{P}_1 tal que $V = \{p_1, \dots, p_r\}$ y el conjunto $\{q_1, \dots, q_s\}$ está contenido en el interior de una misma cara $f \in F$. Además, podemos hacer que ∞ esté contenido en el interior de otra cara.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es por inducción en r :

Si $r = 3$, podemos asumir (haciendo una transformación lineal de ser necesario) que $0 \notin \{p_1, p_2, p_3, q_1, \dots, q_s\}$ y que los argumentos (tomados en el rango $[0, 2\pi)$) de los números complejos $p_1, p_2, p_3, q_1, \dots, q_s$ son distintos.

Por otro lado, elijamos $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$R > \text{máx}\{|p_1|, |p_2|, |p_3|, |q_1|, \dots, |q_s|\},$$

y supongamos (reordenando de ser necesario) que

$$\arg(p_1) < \arg(p_2) < \arg(p_3).$$

Sea B un disco que contenga los puntos $p_1, p_2, p_3, q_1, \dots, q_s$ y $\epsilon > 0$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ consideramos p_{i1} y p_{i2} en el borde de B tales que

$$\arg\left(\frac{p_{i2} - p_i}{p_{i1} - p_i}\right) = \epsilon.$$

Elegimos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que el sector de vértice p_i definido por p_{i1}, p_{i2} no contenga puntos de

$$\{q_1, \dots, q_s\} \cup (\{p_1, p_2, p_3\} \setminus \{p_i\}).$$

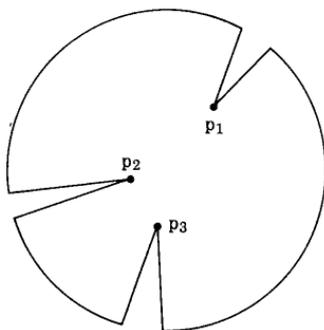


FIGURA 0.1. Caminos e_1, e_2 y e_3 .

Tenemos que estos sectores conforman una triangulación de \mathbb{P}_1 tal que $V = \{p_1, p_2, p_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuenta con dos caras, una de las cuales contiene $\{q_1, \dots, q_s\}$ en su interior; esto último ya que $\{q_1, \dots, q_s\}$ está dentro del disco de radio R (por como elegimos R) y porque los "sectores" que le faltan al disco de radio R no contiene ningún punto de $\{q_1, \dots, q_s\}$.

Supongamos ahora que $r > 3$, y que tenemos una triangulación de \mathbb{P}_1 con $V = \{p_1, \dots, p_{r-1}\}$ tal que $\{q_1, \dots, q_s\}$ está contenido en alguna cara $f \in F$.

Distinguimos tres situaciones:

1. p_r está también en el interior de la cara f (es decir $p_r = f(s)$ con $s \in \mathring{\Delta}$). Componiendo f con un homeomorfismo de Δ de la forma $(x, y) \mapsto (x + y)^\alpha(x, y)$ para algún $\alpha > 0$, podemos asumir que ninguno de los puntos q_1, \dots, q_s está en la imagen bajo f del segmento γ_0 que une s con $(1, 0)$ en Δ . Por lo tanto, podemos elegir puntos $s_1, s_2 \in \mathring{\Delta}$ cerca del punto $(1, 0)$ de forma que dichos puntos estén por encima y por debajo del segmento γ_0 , respectivamente.

Consideremos la unión γ_1 de los segmentos de extremos s, s_1 y $s_1, (0, 1)$, y la unión γ_2 de los segmentos de extremos s, s_2 y $s_2, (0, 0)$.

Ahora, si s_1 y s_2 están lo suficientemente cerca de $(1, 0)$, entonces tenemos una triangulación de \mathbb{P}_1 con $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, cuyas aristas son las de la triangulación original junto a $f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$, y tal que los puntos q_1, \dots, q_s están todos dentro de la misma cara (ver figura 0.2).

2. p_r está en una cara distinta de la que contiene a $\{q_1, \dots, q_s\}$. En este caso, procedemos igual que en la prueba del lema 3.13.
3. p_r está en una arista. En este caso, podemos completar el paso inductivo modificando el argumento usado para el caso donde $p_r \in f$.

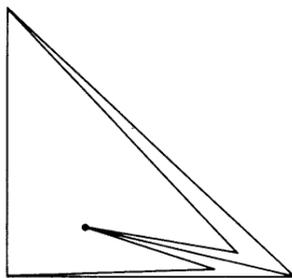


FIGURA 0.2. Curvas γ_0, γ_1 y γ_2 .

□

En lo que sigue $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ son como en el capítulo 3.

Lema 5.10. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_2$ es una curva proyectiva. Existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de la curva \mathcal{C} tal que si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ es tal que $f = \phi \circ \tilde{f}$, entonces la restricción de ϕ a $\tilde{f}(\Delta)$ es un homeomorfismo sobre su imagen.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 5.9, podemos elegir una triangulación (V, E, F) de \mathbb{P}_1 tal que todo punto de ramificación de ϕ pertenece a V , y que 0 está en el interior de una cara $f_0 \in F$, mientras que ∞ está en el interior de una cara diferente f_∞ .

Por otro lado, la proposición 3.14 nos asegura que existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de la curva \mathcal{C} , dada por

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \phi^{-1}(V), \\ \tilde{E} &= \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \text{ continuo tal que } \phi \circ \tilde{e} \in E\}, \\ \tilde{F} &= \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow \mathcal{C} \text{ continuo tal que } \phi \circ \tilde{f} \in F\}.\end{aligned}$$

Observamos, que a menos de subdividir la triangulación, de ser necesario, podemos asumir que cada cara tiene a lo sumo un punto de ramificación como vértice. En este caso, si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ y $f = \phi \circ \tilde{f}$ entonces por los lemas 6, 6, 6 y 6 del apéndice, deducimos que

$$\phi : \tilde{f}(\Delta) \rightarrow f(\Delta)$$

es un homeomorfismo cuya restricción a $\tilde{f}(\Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}) \subset \mathcal{C}$ es la restricción de una carta holomorfa en \mathcal{C} , si $f \neq f_\infty$ (prueba de la proposición 4.8). Si $f = f_\infty$ tendremos que componer ϕ con el mapa $z \mapsto \frac{1}{z}$. \square

Veamos a continuación un par de conceptos que necesitamos para probar el lema 5.3.

Definición 5.11. *Si fdg es un diferencial holomorfo en una curva proyectiva \mathcal{C} y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ es un camino en \mathcal{C} entonces*

$$\int_{\gamma} fdg = \int_a^b f \circ \gamma(t)(g \circ \gamma)'(t)dt.$$

Definición 5.12. *Si $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un mapa holomorfo y fdg es un diferencial holomorfo en \mathbb{C} , la imagen inversa de fdg bajo ψ es el diferencial holomorfo en \mathcal{C} definido por*

$$\psi^*(fdg) := (f \circ \psi)d(g \circ \psi).$$

Observación 5.13. *El diferencial $\psi^*(fdg)$ se conoce usualmente como el "pullback" de fdg .*

Observación 5.14. *A partir de la dos definiciones anteriores, si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es una curva suave a trozos en S , entonces*

$$\int_{\gamma} \psi^*(f dg) = \int_a^b (f \circ \psi \circ \gamma)(t)(g \circ \psi \circ \gamma)'(t) dt.$$

A partir del lema 5.10, podemos probar el lema 5.3:

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por absurdo que $\omega = gdh$ es un diferencial meromorfo en \mathcal{C} con un único polo, q , digamos, que es simple. Mediante la aplicación de una transformación proyectiva adecuada, podemos elegir coordenadas de forma que $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ (y por lo tanto el mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ definido como $\phi[x, y, z] = [x, z]$ está bien definido) y que $0, \phi(q)$ y ∞ no son puntos de ramificación de ϕ .

Por el lema 5.10, existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de la curva \mathcal{C} $\tilde{f} \in \tilde{F}$ tal que la restricción del mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ al conjunto $\tilde{f}(\Delta)$, es un homeomorfismo sobre su imagen, cuya restricción a $\tilde{f}(\Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}) \subset \mathcal{C}$ es la restricción de una carta holomorfa en \mathcal{C} .

El borde de $\tilde{f}(\Delta)$ en \mathcal{C} es la imagen de la curva cerrada suave a trozos $\tilde{\gamma}$, que es la unión de las curvas $\tilde{f} \circ \sigma_i$ (con $i = 1, 2, 3$) donde $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ están definidos como en 3.9 (3.c). La composición de la curva (en \mathcal{C}) $\tilde{\gamma}$ con ϕ es una curva cerrada suave a trozos en \mathbb{P}_1 , cuya imagen es el borde de $f(\Delta)$. Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \omega &= \int_{\gamma} \left((\phi|_{\tilde{f}(\Delta)})^{-1} \right)^* \omega \\ &= \int_{\gamma} \left(g \circ (\phi|_{\tilde{f}(\Delta)})^{-1} \right) \left(h \circ (\phi|_{\tilde{f}(\Delta)})^{-1} \right)'(z) dz. \end{aligned}$$

Por un lado, si $q \in \tilde{f}(\mathring{\Delta})$, entonces $f = f_0$ y

$$\left(g \circ (\phi|_{\tilde{f}(\Delta)})^{-1} \right) \left(h \circ (\phi|_{\tilde{f}(\Delta)})^{-1} \right)',$$

tiene un único polo simple en $\phi(q)$ dentro de γ y ninguno fuera. Luego, como el residuo de una función meromorfa en un polo simple en \mathbb{C} no es cero, del teorema de residuos de Cauchy deducimos

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega \neq 0.$$

Si, por el contrario, $q \notin \tilde{f}(\mathring{\Delta})$, entonces

$$\left(g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right) \left(h \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right)',$$

no tiene polos dentro de γ , y por lo tanto

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = 0.$$

Como el polo q pertenece a $\tilde{f}(\mathring{\Delta})$ para una única cara $\tilde{f} \in \tilde{F}$, sumando sobre todas las caras $\tilde{f} \in \tilde{F}$ obtenemos

$$(4) \quad \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\tilde{\gamma}} \omega \neq 0.$$

Por otro lado, cada integral $\int_{\tilde{\gamma}} \omega$ puede ser expresada como una suma de las integrales de ω a través de las aristas e_f^1, e_f^2 y e_f^3 , con signo \pm dependiendo si $e_f^i = f \circ \sigma_i$ o si $e_f^i = f \circ \sigma_i \circ r$, donde la notación es como en la definición 3.9 (c). Más aún, por (e) en dicha definición, tenemos que para toda arista $e \in E$ existe exactamente una cara $f_e^+ \in F$ tal que $e = f_e^+ \circ \sigma_i$, y exactamente una cara $f_e^- \in F$ tal que $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$. Por lo tanto, las integrales de ω a través de estas aristas en la suma $\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\tilde{\gamma}} \omega$ se cancelan de a pares, ya que aparecen una vez con cada signo, por lo que

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\tilde{\gamma}} \omega = 0,$$

lo cual contradice la ecuación 4 y demuestra el resultado. \square

Para finalizar esta sección, veamos la última demostración que nos queda pendiente, la de la proposición 4.45:

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa no nula. Queremos ver que g tiene la misma cantidad de ceros y polos contando multiplicidades. Consideremos el diferencial meromorfo $\frac{dg}{g}$ en \mathcal{C} , el cual, a priori, tiene polos q_1, \dots, q_s en donde g tiene ceros o polos. Probaremos que efectivamente tiene polos simples en estos puntos.

Como en la demostración anterior, podemos elegir coordenadas en \mathbb{P}_2 tales que $[0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ y que si $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ está definido por $\phi[x, y, z] = [x, z]$ entonces $p, \phi(q_1), \dots, \phi(q_s), \infty$ son distintos y no son puntos de ramificación de ϕ .

Gracias al lema 5.9 podemos elegir una triangulación (V, E, F) de \mathbb{P}_1 tal que cada punto de ramificación de ϕ pertenece a V , los puntos $\phi(q_1), \dots, \phi(q_s)$ y 0 están en el

interior de una misma cara $f_0 \in F$ mientras que ∞ está en otra cara $f_\infty \in F$. Razonando como en la prueba del lema 5.3, vemos que existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de \mathcal{C} tal que

$$(5) \quad \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dg}{g} = 0,$$

donde $\tilde{\gamma}$ es la unión de las curvas $\tilde{f} \circ \sigma_i$ (para $i = 1, 2, 3$). Por otro lado, por definición tenemos que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dg}{g} = \int_{\gamma} \frac{\left(g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right)'(z)}{\left(g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right)(z)} dz,$$

para cada cara $\tilde{f} \in \tilde{F}$, donde $\gamma = \phi \circ \tilde{\gamma}$ es una curva cerrada suave a trozos en \mathbb{C} (al igual que en la prueba anterior, si $\phi \circ f = f_\infty$ debemos componer con la función $z \mapsto \frac{1}{z}$).

La función

$$\frac{\left(g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right)'(z)}{\left(g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1} \right)(z)},$$

tiene un polo en un punto a dentro de γ con residuo ρ si y sólo si $g \circ \left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1}$ tiene o bien un cero en p de multiplicidad ρ o bien un polo en a de multiplicidad $-\rho$. Como la restricción de ϕ a $\tilde{f}(\Delta)$ es una carta holomorfa en \mathcal{C} , entonces lo anterior es equivalente a decir que g o bien tiene un cero en $\left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1}(a)$ con multiplicidad ρ o bien un polo en $\left(\phi|_{\tilde{f}(\Delta)} \right)^{-1}(a)$ de multiplicidad $-\rho$. Por lo tanto, por el teorema de residuos de Cauchy tenemos que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dg}{g} = \pm \left(Z(\tilde{f}) - P(\tilde{f}) \right),$$

donde $Z(\tilde{f})$ y $P(\tilde{f})$ son las cantidades de ceros y polos (contando multiplicidades) de g en el interior de la cara \tilde{f} y el signo depende de la orientación de γ en \mathbb{C} .

Como todos los ceros y polos de g están en $\phi^{-1}(f_0(\Delta))$ y el signo es consistente para aquellos $\tilde{f} \in \tilde{F}$ tal que $\phi \circ \tilde{f} = f_0$, sumando sobre todos tales \tilde{f} tenemos que

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} = f_0} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dg}{g} = \pm (Z - P),$$

donde Z y P son las cantidades de todos los ceros y polos de g en \mathcal{C} , mientras que sumando en los otros $\tilde{f} \in \tilde{F}$ obtenemos

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} \neq f_0} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dg}{g} = 0,$$

ya que no hay ni ceros ni polos fuera de $\phi^{-1}(f_0(\mathring{\Delta}))$.

De la ecuación (5) y lo anterior deducimos que

$$\begin{aligned} \pm(Z - P) &= \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} = f_0} \int_{\gamma} \frac{dg}{g} \\ &= \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} = f_0} \int_{\gamma} \frac{dg}{g} + \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}, \phi \circ \tilde{f} \neq f_0} \int_{\gamma} \frac{dg}{g} \\ &= \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \int_{\gamma} \frac{dg}{g} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Probando así el resultado. □

Aplicaciones

En este capítulo veremos algunas aplicaciones que tiene el teorema de Riemann-Roch.

Recordamos que por función racional nos referimos a una función de la forma $\frac{f}{g}$ donde f, g son holomorfas y g no es idénticamente nula. El siguiente teorema caracteriza las funciones meromorfas en una curva no singular:

Teorema 6.1. *Toda función meromorfa en una curva plana no singular \mathcal{C} es racional.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el divisor $H = \sum_{p \in \mathcal{C}} I_p(C, L)p$, donde $L \subset \mathbb{P}_2$ es una recta proyectiva. Si K es cualquier divisor canónico, por el teorema de *Riemann-Roch*

$$l(mH) - l(K - mH) = \deg(mH) + 1 - g, \quad \forall m \geq 1,$$

entonces $\deg(K - mH) = \deg K - md < 0$ si m es suficientemente grande. Luego, en virtud del corolario 4.47 si m es suficientemente grande, $l(K - mH) = 0$, luego $\mathcal{L}(mH)$ está constituido por funciones racionales por la observación 5.7.

Sea $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Como el número de polos de f es finito, existe un polinomio homogéneo Q que se anula en todo polo de f . Si $d = \deg(Q)$, entonces

$$f \in \mathcal{L}(dH) \subset \mathcal{L}(ndH), \quad \forall n \geq 1.$$

Toando $m = nd$, para n suficientemente grande obtenemos el resultado. □

Proposición 6.2. *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva de género g y K es un divisor canónico, entonces $l(K) = g$.*

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos el divisor $D = 0$, entonces $\deg(0) = 0$. Veamos que $l(0) = 1$. Por un lado, $\mathcal{L}(0) = \{f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : f \text{ meromorfa y } (f) \geq 0\}$. Por otro lado, la proposición 4.45 nos da que las funciones meromorfas $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ tienen la misma cantidad de polos y ceros, entonces $(f) \geq 0$ si y sólo si no tiene ceros ni polos, es decir es constante. Por lo anterior $\mathcal{L}(0) = \{f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es constante}\}$ y entonces $l(0) = 1$.

Aplicando el teorema de Riemann-Roch, obtenemos

$$1 - l(K) = 1 - g,$$

de donde $l(K) = g$. □

Proposición 6.3. *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva de género $g \geq 1$, entonces existen diferenciales holomorfas no nula en \mathcal{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un divisor canónico asociado a un diferencial meromorfo ω , por la proposición 6.2 tenemos $l(K) = g \geq 1$.

Por otro lado

$$\mathcal{L}(K) = \{f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C} : (f) + K \geq 0\}.$$

Además $(f) + K$ es el divisor asociado a $f\omega$ y como ω es un diferencial meromorfo entonces $f\omega$ también lo es, es decir

$$\mathcal{L}(K) = \{\text{divisores asociados a diferenciales holomorfos en } \mathcal{C}\}.$$

Juntado todo, como $l(K) \geq 1$ entonces necesariamente existen formas diferenciales no constantes, si no fuese el caso $l(K) = 0$. □

Proposición 6.4. *Sean \mathcal{C} una curva proyectiva de género g y D un divisor. Si $\text{deg}(D) > 2g - 2$, entonces $l(D) = \text{deg}(D) + 1 - g$.*

DEMOSTRACIÓN. Por Riemann-Roch, el resultado es cierto si $l(K - D) = 0$, lo cual sucede si $\text{deg}(K - D) < 0$ (corolario 4.47). Veamos que esto último sucede.

Recordamos que el mapa $\text{deg} : \text{Div}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un morfismo de grupos, por lo que $\text{deg}(K - D) = \text{deg}(K) - \text{deg}(D)$. Por la proposición 6.2, $\text{deg}(K) = 2g - 2$, luego si $\text{deg}(D) > 2g - 2$, obtenemos

$$\text{deg}(K - D) = \text{deg}(K) - \text{deg}(D) < 2g - 2 - (2g - 2) = 0,$$

de donde $l(K - D) = 0$. □

Recordamos que dos superficies de Riemann S y T son isomorfas si existe una función $f : S \rightarrow T$ biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa (ver definición 4.20).

Proposición 6.5. *Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_2$ es una curva proyectiva de género $g = 0$, entonces \mathcal{C} es isomorfa a \mathbb{P}_1 .*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 6.2, obtenemos $\deg(K) = -2$. Sea p un punto cualquiera de la curva \mathcal{C} . Pensando a p como un divisor, tenemos $\deg(p) = 1 > -2$, de la proposición 6.4 deducimos que $l(p) = 1 + 1 - 0 = 2$.

Por lo anterior, existe una función meromorfa $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ no constante, que tiene a lo sumo un polo en p , y es analítica fuera de p , por lo tanto podemos pensar a f como una función holomorfa en \mathbb{C} .

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que no lo es, entonces existen puntos distintos q y r en la curva \mathcal{C} tal que $f(q) = f(r) = \alpha$. Si consideramos la función $f(w) - \alpha$ vemos que sigue teniendo a lo sumo un polo en p , pero tiene dos ceros, a saber $f(q) = 0 = f(r)$, lo cual contradice la proposición 4.45. Por lo tanto f tiene que ser inyectiva.

Del mismo modo podemos probar que f es sobreyectiva. Supongamos que no lo es, entonces existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $f([x, y, z]) \neq \gamma$ para todo $[x, y, z] \in \mathcal{C}$. Considerando la función $g(w) = f - \gamma$, vemos que tiene un polo en p (pues f lo tiene) pero no tiene ningún cero, lo cual contradice la proposición 4.45.

Veamos que f define un isomorfismo local en cartas. Si $q \in \mathcal{C}$, sea $\phi : U \subset \mathcal{C} \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ una carta tal que $\phi^{-1}(a) = q$ para algún $a \in V$. Luego, $f \circ \phi^{-1} : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva, entonces el teorema de la función inversa (teorema 6 parte b) nos dice que la restricción de $f \circ \phi^{-1}$ a un entorno suficientemente chico de a es una biyección holomorfa y por lo tanto con inversa holomorfa, es decir es un isomorfismo local. Finalmente, como f es inyectiva, obtenemos un isomorfismo en toda la curva \mathcal{C} . \square

Definición 6.6. *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva sin singularidades de género 1, decimos que \mathcal{C} es una curva elíptica.*

Observación 6.7. *De la proposición 6.2, deducimos que si \mathcal{C} es una curva elíptica y K es un divisor canónico, entonces $\deg(K) = 0$. Luego $l(K) = 1$, de donde deducimos que $K \sim 0$, es decir, $K = (f)$ para alguna función meromorfa $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$.*

Definición 6.8. *Dada una curva proyectiva \mathcal{C} , denotamos*

$$\text{Div}_P(\mathcal{C}) = \{\text{Divisores principales sobre } \mathcal{C}\}.$$

Lema 6.9. *Si \mathcal{C} es una curva proyectiva entonces $Div_P(\mathcal{C})$ es un subgrupo normal de $Div(\mathcal{C})$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que es un subgrupo.

Sin importar cual sea la curva \mathcal{C} , siempre podemos definir $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ como $f([x, y, z]) = \gamma$ una constante no nula. Luego $(f) = 0$, y por lo tanto $Div_P(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Si D, D' son divisores principales, entonces existen funciones meromorfas $f, g : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ tales que $D = (f)$ y $D' = (g)$. Como f y g son meromorfas entonces su producto fg también lo es. Por otro lado, en virtud de la observación 4.31 tenemos $(fg) = (f) + (g) = D + D'$, es decir $Div_P(\mathcal{C})$ es cerrado bajo la suma.

Nos resta ver que los inversos están. Si $D \in Div_P(\mathcal{C})$ es un divisor principal no nulo, entonces existe una función meromorfa $f : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$, no idénticamente nula, tal que $D = (f)$. Como f no es idénticamente nula podemos definir una función meromorfa $g := \frac{1}{f}$. Luego, por la observación 4.31 tenemos

$$(g) = (1) - (f) = (1) - D = -D,$$

ya que el divisor asociado a una función constante no nula es el divisor nulo (no tiene ceros ni polos).

Finalmente, la normalidad se desprende de que $Div(\mathcal{C})$ es un grupo abeliano. \square

Definición 6.10. *Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_2$ es una curva algebraica, definimos su grupo de Picard como el cociente (de grupos)*

$$Pic(\mathcal{C}) = Div(\mathcal{C})/Div_P(\mathcal{C}).$$

Observación 6.11. *$Pic(\mathcal{C})$ es efectivamente un grupo porque $Div_P(\mathcal{C})$ es un subgrupo normal de $Div(\mathcal{C})$.*

El siguiente teorema es útil en diversas áreas de la matemática, por ejemplo, en teoría de números.

Teorema 6.12. *Sean \mathcal{C} una curva elíptica y p_0 un punto de \mathcal{C} . Existe una estructura de grupo en \mathcal{C} cuyo neutro es p_0 .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Pic^0(\mathcal{C})$ la clase de $Pic(\mathcal{C})$ formado por los divisores de grado 0. Si D y D' están en $Pic^0(\mathcal{C})$, entonces $deg(D - D') = deg(D) - deg(D') = 0 - 0 = 0$, por lo que todo elemento en la clase tiene el mismo grado. Veamos que este subconjunto es un subgrupo. Para esto nos basta con ver que $Pic^0(\mathcal{C})$ es cerrado bajo la operación de grupo y que contiene al neutro.

El neutro de $Pic(\mathcal{C})$ es (la clase de) el divisor $0 = \sum_{p \in \mathcal{C}} 0p$, por lo que $deg(0) = 0$, de donde $0 \in Pic^0(\mathcal{C})$. Por otro lado, como el mapa $deg : Div(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un morfismo de grupos, tenemos que si $D, D' \in Pic^0(\mathcal{C})$ entonces

$$deg(D + D') = deg(D) + deg(D') = 0 + 0 = 0,$$

de donde $D + D' \in Pic^0(\mathcal{C})$.

Ahora que sabemos que $Pic^0(\mathcal{C})$ es un (sub) grupo, queremos ver que el mapa $p \mapsto [p - p_0]$, que a cada punto $p \in \mathcal{C}$ le asocia la clase $[p - p_0]$ en $Pic^0(\mathcal{C})$, es una correspondencia uno a uno entre los puntos de \mathcal{C} y los elementos de $Pic^0(\mathcal{C})$. Para esto, nos alcanza con ver que si $D \in Pic^0(\mathcal{C})$, entonces existe un único punto $p \in \mathcal{C}$ tal que $D \sim p - p_0$.

Sea \tilde{D} un representante de $D \in Pic^0(\mathcal{C})$, aplicando Riemann-Roch al divisor $\tilde{D} + p_0$, deducimos

$$(6) \quad l(\tilde{D} + p_0) - l(K - \tilde{D} - p_0) = 1 + 1 - 1,$$

ya que $deg(\tilde{D} + p_0) = deg(\tilde{D}) + deg(p_0) = 0 + 1 = 1$, y como \mathcal{C} es una curva elíptica, entonces $g = 1$.

Luego, en virtud de la proposición 6.2, $deg(K) = 2 - 2 = 0$, por lo que $deg(K - \tilde{D} - p_0) = -1 < 0$. Por lo tanto, por el corolario 4.47, deducimos $l(K - \tilde{D} - p_0) = 0$. Juntando esto con la ecuación (6), tenemos $l(\tilde{D} + p_0) = 1$, es decir, hay una única clase de divisores no nulos linealmente equivalentes. Por lo tanto hay un único divisor efectivo linealmente equivalente a $\tilde{D} + p_0$. Como su grado es 1, tiene que ser un punto p . Acabamos de probar que existe un único punto $p \in \mathcal{C}$, tal que $p \sim \tilde{D} + p_0$, es decir, $\tilde{D} \sim p - p_0$. \square

Anexo

Resultados sobre funciones de variable compleja

Todas las demostraciones de esta subsección, pueden encontrarse por ejemplo en [4].

Recordamos que una *curva suave* en $W \subset \mathbb{C}$ es un mapa diferenciable $\gamma : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow W$, y una *curva suave a trozos* es una curva que es unión de curvas suaves. Decimos que una curva es *cerrada* si $\gamma(c) = \gamma(d)$, y es *simple* si γ es inyectiva (salvo quizás en c y d).

Recordamos también, que si $f : W \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, entonces la *integral de f a lo largo de la curva suave a trozos $\gamma : [c, d] \rightarrow W$* es

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_c^d f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Tenemos el siguiente resultado clásico en \mathbb{C} :

Teorema (Teorema de Cauchy). *Si γ es una curva cerrada simple en \mathbb{C} y f es una función que es holomorfa dentro y en γ , entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Definición. *Una función meromorfa f tiene un polo en a si y sólo si cerca de a podemos escribir*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

con $m > 0$ y $g(z)$ holomorfo en un entorno abierto de a , y con $g(a) \neq 0$.

Observación. *Esto es equivalente a*

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = g(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Definición. *El residuo de f en el polo a , como este exponente m y lo denotaremos $\text{Res}\{f : a\}$.*

A partir del teorema de Cauchy, tenemos el siguiente resultado resultado que usamos a menudo en este trabajo monográfico:

Teorema (Residuo de Cauchy). *Sea γ una curva cerrada simple en \mathbb{C} y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa dentro de la región acotada por γ , con polos a_1, \dots, a_t , y sin polos en γ . Entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_{j=1}^t \text{Res}\{f : a_j\}.$$

El signo \pm depende de la orientación de la curva.

Teorema (Función implícita para polinomios). *Sea $P \in \mathbb{C}[z, w]$,*

1. *Si*

$$P(z_0, w_0) = 0 \neq \frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0),$$

entonces existe una función holomorfa $f : U \rightarrow V$, donde U y V son entornos de z_0 y w_0 en \mathbb{C} , tal que $f(z_0) = w_0$. Además, si $z \in U$ y $w \in V$, entonces $f(z) = w$ implica $P(z, w) = 0$

2. *Más aún,*

$$P(z, w) = (w - f(z))Q(w, z),$$

donde Q es un polinomio en w , cuyos coeficientes son funciones holomorfas en z .

Lema. *Sean $P \in \mathbb{C}[z][w]$ un polinomio mónico de grado n , \mathcal{C} la curva algebraica asociada a P y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida $\phi(z, w) = z$. Entonces, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, existe un entorno $U \subset \mathbb{C}$ tal que cada componente conexa de $\phi^{-1}(U)$ contiene a lo sumo un punto de $\phi^{-1}(\{z_0\})$.*

DEMOSTRACIÓN. Con z_0 fijo, $P(z_0, w)$ es un polinomio mónico de grado n , por lo tanto tiene a lo sumo una cantidad finitas de raíces. Supongamos que

$$\phi^{-1}(\{z_0\}) = \{(z_0, w_0), \dots, (z_0, w_k)\}.$$

Luego

$$P(z_0, w) = \prod_{1 \leq i \leq k} (w - w_i)^{m_i},$$

con $m_1 + \dots + m_k = n$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $|w_i - w_j| > 2\epsilon$ para todo $i \neq j$. El lema anterior nos asegura que existe $\lambda > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces el polinomio $P(z, w)$ (visto como polinomio en la variable w , con coeficientes en $\mathbb{C}[z]$) tiene a lo sumo m_i raíces en el disco

$$D_i = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_i| < \epsilon\},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Por nuestra elección de ϵ , los discos D_i son disjuntos dos a dos, y como $m_1 + \dots + m_k = n$, si $|z - z_0| < \delta$, entonces todas las raíces de $P(z, w)$ están en

$$D_1 \cup \dots \cup D_k,$$

y por lo tanto

$$\phi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}) \subset \mathbb{C} \times (D_1 \cup \dots \cup D_k).$$

Finalmente, toda componente conexa de $\phi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\})$ está contenida en $\mathbb{C} \times D_i$ por algún $1 \leq i \leq k$, y por lo tanto contiene al o sumo un punto de $\phi^{-1}(\{z_0\})$. \square

Teorema (Teorema de la función inversa). 1. Sea $f : U \rightarrow V$ una biyección holomorfa entre dos abiertos U y V de \mathbb{C} . Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, y además, la función inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es holomorfa.
 2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un entorno de a , con $f'(a) \neq 0$. Entonces, la restricción de f a un entorno suficientemente chico de a en U es una biyección holomorfa sobre un entorno de $f(a)$ en \mathbb{C} .

Resultados sobre topología

En lo que sigue, X e Y son espacios topológicos.

Definición. Decimos que un mapa continuo $\pi : Y \rightarrow X$ es un cubrimiento, si todo $x \in X$, tiene un entorno $U \subset X$, tal que $\pi^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos de Y , los cuales se mapean homeomorficamente sobre U vía π .

Ejemplo. 1. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_2$ una curva proyectiva no singular, tal que $[1, 0, 0]$ no está contenido en \mathcal{C} . Si definimos $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ como $\phi[x, y, z] = [x, z]$, y denotamos por R el conjunto de los puntos de ramificación de ϕ , entonces

$$\phi : \mathcal{C} \setminus R \rightarrow \mathbb{P}_1 \setminus \phi(R),$$

es un cubrimiento.

2. Un ejemplo interesante de la topología algebraica, es el mapa $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$, definido como $\pi(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Tenemos que todo punto en S^1 tiene un entorno U (en este caso, un arco de circunferencia), tal que $\pi^{-1}(U)$ consiste en infinitas copias de este arco. Este mapa se utiliza, para probar, por ejemplo, que el grupo fundamental de S^1 es \mathbb{Z} .

Lema. Sean $\pi : Y \rightarrow X$ un cubrimiento y $f : A \rightarrow X$ un mapa continuo, con A conexo por caminos, localmente conexo por camino y simplemente conexo. Entonces:

1. Dados $a \in A$ e $y \in Y$ tales que $f(a) = \pi(y)$, existe un único mapa $F : A \rightarrow Y$ tal que

$$F(a) = y \quad \text{y} \quad \pi \circ F = f.$$

2. Si f es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces F es un homeomorfismo sobre una componente conexa de $\pi^{-1}(f(A))$.

Observación. El mapa F del lema anterior, es conocido usualmente como el "levantado" de f .

Lema. Sea $\pi : Y \rightarrow X$ un mapa continuo, donde cada x en X tiene un entorno $U \subset X$ tal que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ contiene a lo sumo un punto de $\pi^{-1}(x)$. Supongamos que Y es compacto y que $V \subset X$ es un abierto tal que $\pi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V$ es un cubrimiento. Si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es continua y $f^{-1}(V)$ contiene al intervalo $(0, 1)$, entonces, dados $\tau \in (0, 1)$ e $y \in Y$ tales que $\pi(y) = f(\tau)$, existe un único mapa continuo $F : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(\tau) = y$ y además $\pi \circ F = f$.

DEMOSTRACIÓN. El lema 6, nos dice que en nuestras hipótesis, existe un único mapa continuo $F : (0, 1) \rightarrow Y$ tal que $F(\tau) = y$, y además $\pi \circ F = f|_{(0,1)}$. Nos resta ver, que podemos extender este mapa F de manera continua, a todo el intervalo $[0, 1]$. Para esto, es suficiente mostrar que los límites de $F(t)$ cuando t tiende a 0 y a 1, respectivamente, son únicos.

Por hipótesis, como $f(0) \in X$, existe un entorno U de este, tal que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ contiene a lo sumo un punto de $\pi^{-1}(f(0))$. Por la continuidad de f , existe $\lambda > 0$, suficientemente chico, tal que $f((0, \lambda]) \subset U$, y por lo tanto

$$f((0, \lambda]) \subset \pi^{-1}(U).$$

Como $(0, \lambda]$ es conexo y F continuo, entonces $F((0, \lambda])$ es un conexo de $\pi^{-1}(U)$, por lo tanto, está contenida en alguna componente conexa, digamos W , de $\pi^{-1}(U)$.

Sean t_1, t_2, \dots una sucesión en $(0, \lambda]$ tal que $t_n \rightarrow 0$. Como Y es compacto, existe una subsucesión t_{n_1}, t_{n_2}, \dots convergente, y por lo tanto, por la continuidad de F , deducimos que $F(t_{n_k})$ converge a algún punto $p \in Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
\pi(p) &= \lim_k \pi \circ F(t_{n_k}) \\
&= \lim_k f(t_{n_k}) \\
&= f(0),
\end{aligned}$$

por lo que $p \in \pi^{-1}(U)$.

Como $F(t_n) \in W$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y W es abierto y cerrado (por ser una componente conexa), deducimos que p tiene que ser el único punto de $\pi^{-1}(f(0))$ que está en W (por hipótesis, en W hay a lo sumo un punto de $\pi^{-1}(f(0))$).

Con un argumento similar, podemos probar que $\lim_{t \rightarrow 1} F(t)$ tiende a un único punto. \square

Con un razonamiento similar al anterior, podemos probar un resultado análogo, cambiando $[0, 1]$ por Δ y $(0, 1)$ por $\Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, es decir:

Lema. *Sea $\pi : Y \rightarrow X$ un mapa continuo, donde cada x en X tiene un entorno $U \subset X$, tal que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ contiene a lo sumo un punto de $\pi^{-1}(x)$. Supongamos que Y es compacto y que $V \subset X$ es un abierto tal que $\pi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V$ es un cubrimiento. Si $f : \Delta \rightarrow X$ es continua y $f^{-1}(V)$ contiene al conjunto $\Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 0)\}$, entonces, dado $\tau \in \Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 0)\}$ e $y \in Y$ tales que $\pi(y) = f(\tau)$, existe un único mapa continuo $F : \Delta \rightarrow Y$ tal que $F(\tau) = y$ y además $\pi \circ F = f$.*

Lema. *El mapa $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$, definido como $\phi[x, y, z] = [x, z]$, cumple las hipótesis del lema anterior.*

Bibliografía

- [1] F. KIRWAN, *Complex algebraic curves*. Cambridge University Press (1992).
- [2] E. BRIESKORN and H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*. Transl. from the German by John Stillwell. Reprint of the hardback ed. (1986).
- [3] T. HUNGERFORD. *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston, Inc (1974).
- [4] J. CONWAY. *Functions of One Complex Variable*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag (1973).