



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Sincronización y extensividad de mapas acoplados en redes regulares

Juan Gancio Vázquez

Programa de Posgrado en Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2022



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Sincronización y extensividad de mapas acoplados en redes regulares

Juan Gancio Vázquez

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Director:

Dr. Nicolás Rubido

Montevideo – Uruguay

Junio de 2022

Gancio Vázquez, Juan

Sincronización y extensividad de mapas acoplados en redes regulares / Juan Gancio Vázquez. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2022.

XII, 89 p. 29, 7cm.

Director:

Nicolás Rubido

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Física, 2022.

Referencias bibliográficas: p. 79 – 79.

1. Sincronización, 2. Extensividad, 3. Mapas acoplados, 4. Redes Complejas, 5. Exponentes de Lyapunov. I. Rubido, Nicolás, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Prof. Arturo Martí

Dra. Prof. Cristina Masoller

Dra. Prof. Hilda Cerdeira

Dr. Prof. Pablo Monzón

Dr. Nicolás Rubido

Montevideo – Uruguay
Junio de 2022

A mis abuelos,
Susana, Belmar y Poupée,
Por prestarme tiempo para que
yo escribiera este trabajo.
Y por mucho más...

Agradecimientos

Dos personas merecen más crédito en la autoría de esta tesis que el mío propio. Requeriría más espacio del que aquí dispongo para hacer justicia a la deuda que con ellas mantengo, por lo que mencionaré solo una línea de las muchas que ellas merecen. A Noel, por su incondicional apoyo y compañía a lo largo de todo este proceso, y por haber compartido cada gota de sudor y lágrima derramada. A Nicolás, por la paciencia, y sobretodo, por no haber dejado nunca que se notara la distancia. A ambos, les pido perdón por haber alargado este proceso al punto del hartazgo.

Lo que sigue es una lista no exhaustiva, ni jerarquizada, de aquellas personas que aliviaron la carga de este proyecto. A Cecilia, por introducirme al área y por su apoyo constante. A Caracé, Maxi y Nico, con quienes compartí laboratorio, tutor y estudio. Y a Felipe, por no haber dudado nunca en el eventual fin de este trabajo.

A todo el grupo de Física No Lineal y aquellos que nuclea el laboratorio 333. Y a mis viejos, ellos saben de que maneras hicieron esto posible.

Gracias.

*¿En qué nos parecemos
tú y yo a la nieve?
Tú en lo blanca y galana,
yo en deshacerme.*

Canción popular española

RESUMEN

Los modelos de mapas acoplados en grillas (CML) son particularmente apropiados para el estudio de comportamientos espacialmente extendidos, como los patrones de onda, el caos espacio-temporal y la sincronización. La sincronización completa (CS) en los CML se da cuando todos los mapas tienen sus variables de estado con igual magnitud, formando un patrón uniforme en el espacio que evoluciona en el tiempo. La CS es un comportamiento colectivo que aparece en muchos sistemas naturales y que posee aplicaciones en el mundo real, como por ejemplo, en el diseño de redes eléctricas estables. Por otra parte, el comportamiento extensivo implica que una magnitud que describe el sistema es directamente proporcional al tamaño del sistema. Entonces, si un sistema es extensivo puede descomponerse en subsistemas independientes de dinámica similar. Para sistemas complejos como los CML, la extensividad puede ser analizada en términos de los exponentes de Lyapunov (LE), una medida invariante vinculada a las tasas de entropía. Específicamente, el sistema es extensivo si el espectro de LE converge a una curva asintótica a medida que el sistema crece, lo que implica que la suma de los LE positivos crece linealmente con el tamaño del sistema. En este trabajo, derivó valores críticos para los parámetros – intensidad de acoplamiento, LE máximo, y densidad de enlaces – que controlan la estabilidad lineal del subespacio de CS de mapas caóticos unidimensionales idénticos acoplados de forma difusiva en redes regulares (i.e., redes con distribución de grado uniforme) genéricas y en redes cíclicas (i.e., grillas periódicas con simetría de permutación cíclica) específicas. Las derivaciones se basan en los autovalores de la matriz Laplaciana, para los cuales presento expresiones cerradas para el mínimo autovalor no nulo y el máximo autovalor para redes regulares. Para el análisis de estabilidad, muestro que cualquier red regular puede ser clasificada en dos conjuntos disjuntos de acuerdo con una condición topológica a partir de los autovalores de la matriz Laplaciana y el grado de la red. También presento derivaciones para dos clases de redes cíclicas: los k -ciclos (i.e., grillas regulares con grado k par) y las k -escaleras de Möbius, las que introduzco para generalizar la escalera de Möbius de grado $k = 3$. Los resultados resaltan las diferencias en la estabilidad

del subespacio de CS de estas redes – incluso cuando ambas tienen el mismo grado – tanto en el límite de tamaño finito e infinito. Cuando los mapas en estos sistemas también tienen Jacobiana constante, discuto por qué si la CS es linealmente estable entonces el CML no puede ser extensivo, concluyendo que las condiciones previamente derivadas para la estabilidad lineal de la CS son también condiciones para el comportamiento no extensivo. En particular, encuentro que la conexión entre las condiciones de estabilidad y el comportamiento extensivo es más profunda para los CML con Jacobiana constante. Para este caso, analizo en detalle la variación del número de LE positivos al cambiar la intensidad de acoplamiento en las diferentes regiones en el espacio de parámetros, obteniendo 4 regiones con diferentes propiedades extensivas (i.e., tasas de entropía). Finalmente, analizo la tasa de entropía de dos topologías específicas – la red completa y la red anillo – como función de la intensidad de acoplamiento y el tamaño del sistema, concluyendo que ambas topologías son extensivas fuera de la región de sincronización completa.

Palabras claves:

Sincronización, Extensividad, Mapas acoplados, Redes Complejas, Exponentes de Lyapunov.

ABSTRACT

Coupled Map Lattice (CML) models are particularly suitable to study spatially extended behaviours, such as wave-like patterns, spatio-temporal chaos, and synchronisation. Complete synchronisation (CS) in CMLs emerges when all maps have their state variables with equal magnitude, forming a spatially-uniform pattern that evolves in time. CS is a collective behaviour emerging in many natural systems and with broad real-world applications, such as the design of stable electrical power-grids. On the other hand, the extensive behaviour implies that a quantity describing the system scales directly to the size of the system. Thus, if a system is extensive, it can be decomposed into independent subsystems of similar dynamics. For complex systems such as CMLs, extensivity can be analysed in terms of the Lyapunov Exponents (LE), an invariant measure related to entropy rates. Specifically, the system is extensive if the spectra of LE converges to an asymptotic curve as the system grows, where the sum of positive LE grows linearly with the size of the system. In this work, I derive critical values for the parameters – coupling strength, maximum LE, and link density – that control the synchronisation-manifolds linear stability of diffusively-coupled, identical, chaotic maps in generic regular graphs (i.e., graphs with uniform node degrees) and class-specific cyclic graphs (i.e., periodic lattices with cyclical node permutation symmetries). The derivations are based on the Laplacian matrix eigenvalues, where I provide closed-form expressions for the smallest non-zero eigenvalue and largest eigenvalue of regular graphs. From the stability analysis, I show that any regular graph can be classified into two disjoint sets according to a topological condition that uses the Laplacian eigenvalues and node degree of the graph. I also make derivations for two classes of cyclic graphs: k -cycles (i.e., regular lattices of even degree k) and k -Möbius ladders, which I introduce here to generalise the Möbius ladder of degree $k = 3$. The results highlight differences in the synchronisation manifold's stability of these graphs – even for identical node degrees – in the finite- and infinite-size limit. When the maps in these systems also have a constant Jacobian, I discuss why if the synchronisation is linearly-stable then the CML cannot be extensive, concluding that the previously derived conditions for

linearly-stable synchronisation are also conditions for non-extensive behaviour. In particular, I find that the connection between the stability conditions and the extensive behaviour goes deeper for these CMLs with constant Jacobian. In this case, I analyse thoroughly the parameter regions where the number of positive LE changes as the coupling strength is changed, obtaining 4 regions with different extensive properties (i.e., entropy rates). Finally, I analyse the entropy rate of two specific graph topologies – the complete graph and ring topology – as a function of the coupling strength and system’s size, concluding that both topologies are extensive outside the synchronisation region.

Keywords:

Synchronisation, Extensivity, Coupled maps, Complex Networks, Lyapunov Exponents.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
2	Métodos	9
2.1	Dinámica a tiempo discreto: mapas	10
2.1.1	Propiedades de \mathbf{f}_t	10
2.1.2	Órbitas y estabilidad lineal	11
2.1.3	Puntos fijos, órbitas periódicas, cuasi-periódicas y aperiódicas	14
2.2	Medidas invariantes	17
2.2.1	Medida invariante, cálculo de momentos y teorema ergódico	17
2.2.2	Exponentes de Lyapunov	18
2.2.3	Dimensiones fractales	21
2.2.4	Entropías: aditividad, extensividad y otras propiedades	23
2.2.5	Tasa de entropía	27
2.2.6	Extensividad y exponentes de Lyapunov	28
2.3	Mapas acoplados	29
2.3.1	Redes de mapas acoplados	29
2.3.2	Función maestra de la estabilidad de la sincronización	31
2.3.3	Exponentes de Lyapunov (LE) y exponentes de Lyapunov condicionales (CLE)	33
2.4	Topología de redes	33
2.4.1	Cotas para los autovalores de la Laplaciana	34
2.4.2	Propiedades espectrales de las redes cíclicas	35
3	Resultados	37
3.1	Condiciones generales para la sincronización estable de mapas caóticos idénticos en redes regulares	38

3.2	Estabilidad de la variedad de sincronización para clases específicas de redes cíclicas	42
3.2.1	Resultados para k -ciclos	42
3.2.2	Resultados para k -escaleras de Möbius	46
3.3	Relación entre sistemas de redes regulares con sincronización linealmente estable y su no extensividad	51
3.4	Signo de los exponentes de Lyapunov para sistemas de mapas acoplados en redes regulares con Jacobiana constante	52
3.4.1	Frontera del Caso 1: todos los exponentes de Lyapunov son positivos y se mantienen positivos al aumentar el acoplamiento	53
3.4.2	Frontera del Caso 2 – Tipo I: hay exponentes de Lyapunov de ambos signos donde cambian de signo los positivos al aumentar el acoplamiento	55
3.4.3	Frontera del Caso 2 – Tipo II: hay exponentes de Lyapunov de ambos signos donde cambian de signo los negativos al aumentar el acoplamiento	57
3.4.4	Frontera del Caso 3: los exponentes de Lyapunov positivos y negativos cambian de signo al aumentar el acoplamiento	57
3.4.5	Ubicación de los diferentes casos en el espacio de parámetros al aumentar el acoplamiento	58
3.5	Cálculo de la tasa de entropía a partir de los exponentes de Lyapunov para topologías específicas de redes cíclicas	59
3.5.1	Resultados para la red completa	60
3.5.2	Resultados para el 2-ciclo	63
4	Discusión de resultados	68
4.1	Redes regulares de mapas acoplados con sincronización linealmente estable	69
4.1.1	Condiciones generales de estabilidad	70
4.1.2	Condiciones de estabilidad específicas para redes cíclicas	71
4.2	Extensividad en redes regulares de mapas de Jacobiana constante	72
5	Conclusiones	74
6	Trabajos publicados	77

Capítulo 1

Introducción

La *ciencia de la complejidad*, nacida en el siglo XX, ha ganado cada vez mayor interés en la comunidad científica (Waldrop, 1993). La misma surge como un enfoque que se contrapone al tradicional enfoque reduccionista (Newtoniano) que dominó la física hasta principios del siglo XX.

El análisis reduccionista consiste en descomponer un fenómeno en sus componentes. Estos componentes pueden requerir ser reducidos aún más, proceso que se podría repetir hasta alcanzar el nivel atómico o las partículas elementales (Heylighen et al. 2007). Por lo tanto, el enfoque reduccionista es de naturaleza materialista, ya que todo fenómeno se reduce a un análisis de la materia que los constituye. De esta manera, la sociología se reduce a la psicología, la psicología a la biología, la biología a la química, y la química a la física. Por lo tanto, toda la ciencia es finalmente reducida a la física (Érdi, 2008).

Por otra parte, la ciencia de la complejidad centra su atención en estudiar el sistema como un todo y en los patrones colectivos que puedan emerger (Zimmerman et al. 1998). La complejidad no abarca únicamente una teoría, sino que se constituye de muchas teorías y conceptos nacidos desde diferentes disciplinas (Manson, 2001; Thurner et al. 2018; Zimmerman et al. 1998). Por este motivo es que la ciencia de la complejidad es altamente interdisciplinaria (Klein, 1984). A falta de una mejor definición, la ciencia de la complejidad es aquella que estudia *sistemas complejos* (Holland, 2014; Mitchell, 2009).

En una línea, un sistema complejo es aquel constituido por muchas componentes que interactúan entre sí de diferentes maneras (Holland, 2014; Mitchell y Newman, 2002). Esta definición incluye dos ingredientes fundamentales: poseer varias componentes y poseer interacciones entre ellas. Además, se han

observado otras características en los sistemas complejos, como lo son que el sistema sea abierto, no determinista, y de alta dimensión, o que se observan bucles de retroalimentación, no-linealidades y umbrales que separan diferentes dinámicas (Sánchez y Newman, 2018).

También es posible definir a los sistemas complejos en término de los comportamientos que exhiben, siendo la auto-organización y la aparición de comportamientos colectivos los principales ejemplos (Sánchez y Newman, 2018). La auto-organización es la capacidad del sistema de modificar su comportamiento para alcanzar algún patrón espacio-temporal sin necesidad de un control centralizado o instrucción externa (Haken y Portugali, 2016; Hooker, 2011). Por otro lado, la aparición de comportamientos colectivos refiere al proceso en que un comportamiento, propiedad o patrón espacio-temporal aparece en el sistema de forma inesperada (Hooker, 2011; Sánchez y Newman, 2018). Ambas definiciones están relacionadas, pero no son equivalentes. En particular, la auto-organización implica algún tipo de aparición de un comportamiento colectivo (Heylighen, 2008), pero no en el otro sentido (Halley y Winkler, 2008). Entre las propiedades emergentes de los sistemas complejos se encuentran la invariancia de escala, las estructuras coherentes, los eventos extremos, la memoria y la criticalidad (Sánchez y Newman, 2018).

Para caracterizar un sistema complejo es necesario una descripción cuantitativa, es decir, medir la complejidad del sistema. Muchas de las medidas de complejidad que se han desarrollado tienen origen en la teoría de la información y en la ciencia de la computación (Badii y Politi, 1999). Una medida usual de la complejidad es la entropía (Peliti y Vulpiani, 1988), la cual tiene origen en la termodinámica a partir de los trabajos de Clausius (Clausius, 1865) en la segunda mitad del siglo XIX. La entropía se introduce como una cantidad macroscópica que permite clasificar la reversibilidad de los procesos térmicos (Cropper, 1986). Con el desarrollo de la mecánica estadística (inicializado por Gibbs (Gibbs, 1902) y Boltzmann (Boltzmann, 1872, 1877) a finales del siglo XIX) se obtienen expresiones para la entropía en términos de variables microscópicas (Jaynes, 1965). Gracias a esta conexión entre lo microscópico y lo macroscópico, la entropía de Boltzmann-Gibbs del sistema macroscópico puede interpretarse como la incertidumbre sobre los estados microscópicos (Gell-Mann y Lloyd, 1996).

A mediados del siglo XX, Shannon (Shannon, 1948) deriva una expresión para la capacidad de información en un canal de comunicación similar a la en-

tropía de Boltzmann-Gibbs (por lo que a la entropía también se la conoce como entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon) (Gell-Mann y Lloyd, 1996; Wehrl, 1978). La entropía de Shannon requiere cumplir 3 condiciones (Bromiley et al. 2004): que sea una función continua de la distribución de probabilidades de los estados, si los estados son equiprobables la entropía debe ser una función monótona creciente de la cantidad de estados posibles, y debe ser una funcional aditiva. Estas condiciones son verificadas también por la entropía de Boltzmann-Gibbs. Además, existen también otras entropías, como las de Rényi (Rényi, 1961), las cuales verifican las 3 condiciones pero poseen diferente sensibilidad a los cambios en la forma de la distribución de probabilidad. Sin embargo, si se remueve la condición de aditividad, se pueden obtener generalizaciones de la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon (Bromiley et al. 2004) como las que se listan en Tsallis, 2019.

Una propiedad de un sistema, tal como la entropía o la energía del sistema, se dice extensiva si crece con el tamaño del sistema (Dunning-Davies, 1983). En particular, el concepto de *extensividad* estuvo ligado a la entropía desde un principio, ya que la entropía de Clausius verifica ser proporcional a la cantidad de materia involucrada (Tsallis et al. 2005) y la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon es extensiva para sistemas débilmente correlacionados (Tsallis, 2009b). Con más de un siglo de investigación, la relación entre la entropía y la extensividad todavía presenta importantes preguntas abiertas que cuestionan las bases epistemológicas de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs (Tsallis, 2009a) y la definición de extensividad (Takeuchi et al. 2009), impulsando la búsqueda de un concepto de entropía más general que permita su aplicación en sistemas complejos (que son sistemas fuertemente correlacionados), donde la entropía de Boltzmann-Gibbs falla (Tsallis, 2019). Por ejemplo, se tiene la entropía de Tsallis (Tsallis, 1988) (también llamada q -entropía), que es extensiva para sistemas correlacionados (Tsallis, 2009a).

Vale observar que los sistemas caóticos (sistemas deterministas, no lineales, con alta sensibilidad a las condiciones iniciales, y órbitas aperiódicas) son extensivos cuando el espectro de exponentes de Lyapunov (una medida invariante que cuantifica la sensibilidad a las condiciones iniciales por medio de la divergencia promedio entre órbitas cercanas) colapsa a una única curva al ser normalizado por el tamaño del sistema (Ruelle, 1982; Takeuchi et al. 2009). En este sentido, caos extensivo se ha observado en diferentes sistemas complejos, como en la convección de Rayleigh-Bénard (Egolf et al. 2000; Paul et

al. 2007), redes de reacción-difusión (Stahlke y Wackerbauer, 2009), mapas acoplados en redes aleatorias poco conectadas (Luccioli et al. 2012), y en el modelo de Lorenz-96 (Karimi y Paul, 2010).

En resumen, el origen de la complejidad de un sistema puede deberse tanto por los elementos que conforman al sistema como por las relaciones entre ellos. Las relaciones entre los elementos del sistema pueden resultar en estructuras complejas de interacciones (Érdi, 2008). La teoría de grafos (o teoría de las *redes complejas*) resulta la herramienta matemática más importante para representar estas estructuras, teoría que se ha expandido hacia a otras disciplinas gracias a los trabajos seminales de Watts y Strogatz, 1998 y Barabási y Albert, 1999, los cuales estudian sistemas con estructuras complejas (Boccaletti et al. 2006). Estas complejidades estructurales incluyen el efecto de pequeño mundo (Watts y Strogatz, 1998), las leyes de potencia en la distribución de grado (Barabási y Albert, 1999), y las comunidades (Girvan y Newman, 2002).

Por otro lado, lo complejo del sistema puede ser su evolución en el tiempo. El estudio de la *dinámica* de los sistemas es el estudio de la evolución temporal de los sistemas, por lo tanto conocidos como sistemas dinámicos (Mitchell, 2009). Un *sistema dinámico* consiste en un conjunto de posibles estados y una regla de evolución que determina el estado siguiente en término de estados pasados (Alligood et al. 1996).

Existen dos clases de sistemas dinámicos: las ecuaciones diferenciales (o sistemas a tiempo continuo) y los mapas iterados (o sistemas a tiempo discreto) (Strogatz, 1994). Un ejemplo de ecuaciones diferenciales son las ecuaciones de movimiento del péndulo. Para ángulos pequeños el movimiento del péndulo es simple (dinámica lineal), pero para ángulos mayores las no linealidades del sistema ganan mayor predominancia, lo que resulta en una dinámica más compleja (Ochs, 2011). Por otro lado, el mapa logístico (May, 1976) es un buen ejemplo de un sistema a tiempo discreto, el cual modela la evolución de una población con recursos finitos a partir de una ecuación cuadrática en que el estado futuro se basa únicamente en el estado presente. En este caso, se encuentra que al variar el parámetro de control del sistema se observan diferentes dinámicas, incluyendo caos (Feigenbaum et al. 1983).

Los mapas acoplados en grillas (CML por sus siglas en inglés: Coupled Map Lattices) son sistemas complejos modelados por mapas iterados que fueron introducidos como modelos para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos extendidos (Kaneko, 1984). Por ejemplo, se han utilizado como mo-

delos para explicar la convección (Yanagita y Kaneko, 1993), la ebullición (Yanagita, 1992), el crecimiento de cristales (Kessler et al. 1990), crecimiento de plantíos de monocultivos (Hendry et al. 1996), dinámicas de predador-presa (Solé y Valls, 1991), y la evolución de las secuencias genéticas (Cocho y Martinez-Mekler, 1991), entre otros. Los comportamientos observados en los CML abarcan desde patrones ordenados como ondas hasta caos espacio-temporal (turbulencia) (Amritkar y Gade, 1993; Kaneko, 1989; Lind et al. 2004; Palaniyandi et al. 2005). Los CML también han sido generalizados para incluir interacciones no locales (Kaneko, 1990), ya sea mediante funciones dependientes de la distancia (Anteneodo et al. 2003; de Souza Pinto et al. 2005; Rubido et al. 2011), remplazando las interacciones locales por redes complejas (Barahona y Pecora, 2002; Chavez et al. 2005; Watts y Strogatz, 1998; Wiley et al. 2006) o mediante interacciones con retraso (delay) (Martí et al. 2006; Masoller y Martí, 2005; Ponce C et al. 2009). En resumen, los CML (y sus generalizaciones) han permitido profundizar el entendimiento de comportamientos complejos, como la intermitencia (Kaneko, 1985; Xie y Cerdeira, 1996), los estados quimera (Dos Santos et al. 2020; Hagerstrom et al. 2012; Wolfrum y Omel'chenko, 2011), y la sincronización (Boccaletti et al. 2002; de San Roman et al. 1998; Gade y Hu, 2000; Jost y Joy, 2001)

La sincronización completa es uno de los comportamientos colectivos emergentes en muchos sistemas naturales y con muchas aplicaciones en el mundo real, tales como el diseño de redes eléctricas estables (Dörfler et al. 2013; Nardelli et al. 2014; Nishikawa y Motter, 2015), el estudio de la dinámica de poblaciones en un ecosistema (Stenseth et al. 1999), la predicción de extinciones (Earn et al. 2000), o el análisis de el mercado de valores (Basalto et al. 2005). Para los CML, la sincronización completa implica tener todos los mapas evolucionando tal que sus variables de estado poseen valores idénticos en cada tiempo (iteración), formando un patrón uniforme en el espacio. La evolución temporal de este patrón puede tener un comportamiento simple (por ejemplo, ser periódico) o complicado. Si la evolución temporal es aperiódica y presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, decimos que la sincronización es caótica (Pecora y Carroll, 1990, 2015). La dinámica del sistema en este estado puede analizarse, por ejemplo, mediante los exponentes de Lyapunov (dos Santos et al. 2007; Kaneko, 1986) (que se relacionan con la dimensión de Kaplan-Yorke (Frederickson et al. 1983; Kaplan y Yorke, 1979)) y la entropía de Kolmogorov-Sinai (Batista y Viana, 2002; Kolmogorov, 1958; Y. G. Sinai,

1959) del sistema. Por ejemplo, como la sensibilidad a las condiciones iniciales implica una divergencia exponencial entre trayectorias cercanas, la presencia de un exponente de Lyapunov positivo es suficiente para determinar que el sistema es caótico (Strogatz, 1994).

Uno de los principales avances en la investigación de la sincronización fue realizado por Pecora y Carroll, 1998, donde se define la Función Maestra de la Estabilidad (MSF – por sus siglas en inglés). La MSF permite realizar un análisis funcional de la estabilidad del subespacio de sincronización para redes genéricas de sistemas dinámicos (a tiempo discreto o continuo) idénticos y acoplados de forma difusiva (es decir, a través de una matriz Laplaciana). Entre las ventajas del formalismo, se destaca que la MSF permite desacoplar las propiedades dinámicas de las unidades que componen el sistema de las propiedades topológicas de la red de interacciones (similarmente al trabajo de Fujisaka y Yamada (Fujisaka y Yamada, 1983)). Sin embargo, debido a la amplia variedad de dinámicas y redes que pueden ser analizadas (Arenas et al. 2008; Brechtel et al. 2018; Huang et al. 2009), todavía persisten muchas preguntas abiertas que pueden ayudar en el diseño de sistemas síncronos estables y continuar el entendimiento de este fascinante comportamiento colectivo.

En esta tesis se derivan expresiones cerradas para diferentes parámetros críticos que controlan la posibilidad de que exista sincronización completa estable en sistemas de mapas caóticos unidimensionales idénticos, acoplados de forma difusiva en redes regulares genéricas y redes cíclicas específicas (redes que poseen simetría de permutación cíclica de sus nodos). Los parámetros críticos derivados incluyen a la mínima intensidad de acoplamiento, la mínima densidad de enlaces, y la máxima caoticidad que pueden tener los mapas para mantener una sincronización completa estable. Estas derivaciones se encuentran en la Sec. 3.1 y 3.2 de los Resultados, estando basadas en la MSF (Pecora y Carroll, 1998) y los autovalores de la matriz Laplaciana de la red (en particular en el mínimo no nulo y el máximo autovalor), lo que hace general al tratamiento. En particular, en la Sec. 3.2 se incluyen derivaciones para k -ciclos (también conocidas como redes Wiley-Strogatz-Girvan – Wiley et al. 2006) y k -escaleras de Möbius, topología introducida en este trabajo para generalizar la clásica escalera de Möbius con grado $k = 3$ (Guy y Harary, 1967; Pasotti, 2010) a mayores grados. Los resultados obtenidos para los parámetros críticos y los autovalores de las redes de tamaño finito muestran diferencias entre estas 2 topologías, que desaparecen cuando ambas redes convergen a la red completa.

En el límite termodinámico (tamaño infinito) se muestra que las expresiones dependen de la densidad de enlaces, también obteniendo diferencias entre las expresiones.

Para sistemas de mapas caóticos unidimensionales idénticos con Jacobiana constante (acoplados de forma difusiva en redes regulares), se estudian los diferentes casos que surgen del cambio en la cantidad de exponentes de Lyapunov (LE) positivos y cómo estos casos se relacionan con la superficies críticas que determinan la sincronización estable. En la Sec. 3.3 se muestra que este tipo de sistemas cuando están dentro de la región de sincronización estable no son extensivos. Entonces, situándose fuera de la región de parámetros que permite la sincronización estable, la Sec. 3.4 tiene las derivaciones y expresiones para las fronteras de los 4 casos posibles de LE positivos cuando se varía la intensidad de acoplamiento entre los mapas. A partir de estos resultados, en la Sec. 3.5 se derivan expresiones cerradas para las tasas de entropía (a partir de la identidad de Pesin (Pesin, 1977)) para la red completa y la red anillo. En particular, se encuentra que ambas redes pueden ser extensivas, y para la red completa, se proporciona además una expresión analítica para las curvas sobre las cuales la tasa de entropía específica del sistema es constante.

En líneas generales, este trabajo complementa el entendimiento general de los fenómenos de sincronización y extensividad en CML. Provee derivaciones matemáticas detalladas en redes regulares que llevan a resultados analíticos exactos. En particular, se extienden las condiciones para la estabilidad lineal de la sincronización derivados por Jost y Joy, 2001, incluyendo expresiones cerradas para los parámetros críticos, y se introduce una novedosa interpretación gráfica que representa estas condiciones en el espacio de parámetros. Se introduce también una nueva generalización de la escalera de Möbius para aumentar el grado de los nodos (de $k = 3$ a $k = N - 1$, donde N es el tamaño de la red), que no sólo tiene la ventaja de ser cíclica (otras generalizaciones no regulares ya han sido propuestas, Hussain et al. 2018; Idrees et al. 2020), sino que también explica los resultados numéricos entre k -ciclos y escaleras de Möbius en Barahona y Pecora, 2002.

Por otro lado, se proporciona un análisis de extensividad similar a aquellos que Antonopoulos y Baptista, 2017 y Araujo y Baptista, 2019 presentan para redes multiplex. En esta tesis el foco está en las redes regulares, las cuales usualmente forman los bloques constitutivos de las redes multiplex. Además, el análisis aquí presente es más detallado que los trabajos previos, ya que se

discuten 4 casos para el cambio en el número de exponentes de Lyapunov positivos (en lugar de los 2 casos que suelen incluirse en la literatura). En particular, los resultados obtenidos coinciden en el límite del acoplamiento infinitesimal con los resultados reportados en la literatura (Araujo y Baptista, [2019](#)). Finalmente, se encuentra que la red anillo es extensiva fuera de la región de sincronización estable (algo esperable de acuerdo con la literatura (Ruelle, [1982](#))) y se encuentra que la red completa es extensiva (algo que aunque ya ha sido reportado (Takeuchi et al. [2011](#)), no existe consenso sobre su validez (Antonopoulos y Baptista, [2017](#); Takeuchi et al. [2009](#))).

Capítulo 2

Métodos

En este capítulo se presentan los métodos y modelos utilizados en esta tesis. Se comienza introduciendo la dinámica de mapas, también conocidos como ecuaciones en diferencias o a tiempo discreto. Luego se presenta la teoría de la medida invariante como recurso para caracterizar los sistemas caóticos. Entonces, se presentan los exponentes de Lyapunov, las dimensiones fractales y la entropía de Boltzmann-Gibbs, y cómo estas tres cantidades están relacionadas. Se hace un particular énfasis en la teoría detrás de los exponentes de Lyapunov, ya que son estos los que finalmente se calculan en el trabajo y se utilizan para obtener la entropía de los sistemas considerados. También se introduce el concepto de extensividad y su aplicación en sistemas complejos.

En las últimas secciones de este capítulo, se desarrolla el modelo de mapas acoplados introducido por Kaneko, 1990, y de la Función Maestra de la Estabilidad introducida por Pecora y Carroll, 1990. Luego se introduce el espectro de autovalores de redes complejas (también conocido como teoría espectral de grafos), y en particular, de las redes cíclicas, las cuales serán foco de los resultados de esta tesis.

Es oportuno mencionar que en las dos primeras secciones, aunque los ejemplos presentados corresponden a mapas unidimensionales, la teoría desarrollada corresponde a mapas de cualquier dimensión, ya que como se muestra en las dos secciones finales, las redes de mapas acoplados pueden verse como un mapeo de dimensión mayor.

2.1. Dinámica a tiempo discreto: mapas

Los sistemas de tiempo discreto, también llamados mapas, dan una evolución en "pasos", en los cuales el nuevo estado del sistema es determinado a partir del estado anterior. Específicamente, las ecuaciones de evolución están dadas por

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t), \mathbf{x}_{t=0} = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{f}_t : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ es una función diferenciable (i.e., con primera derivada continua) D -dimensional (un campo vectorial) cuyos componentes a tiempo $t \in \mathbb{N}$ son $\mathbf{f}_t = \{f_t^{(1)}, f_t^{(2)}, \dots, f_t^{(D)}\}$, \mathcal{S} es el dominio de las variables dependientes, $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^D$ es el vector de estado del sistema al tiempo $t \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(D)}\}$, y \mathbf{x}_0 es la condición inicial. Al espacio vectorial de las variables dependientes se le denomina *espacio de fases*.

A partir de una condición inicial, \mathbf{x}_0 , podemos obtener sucesivos estados mediante la aplicación de la Ec. (2.1). La representación de estos estados, como función de t , se denomina *trayectoria*, $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$. Obsérvese que $\varphi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ y $\varphi_{t+1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_t(\varphi_t(\mathbf{x}_0))$, por lo tanto φ hereda todas las propiedades de \mathbf{f} .

La Ec. (2.1) representa un problema de valor inicial (también conocido como problema de Cauchy, en ecuaciones diferenciales). La existencia y unicidad de una solución, es decir, del conjunto infinito de puntos de una trayectoria, $\{\varphi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \varphi_1(\mathbf{x}_0), \varphi_2(\mathbf{x}_0), \dots\}$, puede verse notando que $\{\varphi_0(\mathbf{x}_0), \varphi_1(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_0(\varphi_0(\mathbf{x}_0)), \varphi_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_1(\varphi_1(\mathbf{x}_0)), \dots\}$, donde cada iteración de \mathbf{f}_t existe y es única (Kwapisz, 1991).

2.1.1. Propiedades de \mathbf{f}_t

Las iteradas de la Ec. (2.1), son las composiciones sucesivas de la función de evolución. Por ejemplo, la segunda iterada de la Ec. (2.1) se puede escribir como

$$\mathbf{x}_{t+2} = \mathbf{f}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1}) = \mathbf{f}_{t+1}(\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t)) = \mathbf{f}_{t+1} \circ \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t), \quad (2.2)$$

donde \circ simboliza la composición de funciones.

Si la función \mathbf{f} es autónoma, es decir, que no depende de t , podemos escribir la Ec. (2.2) como $\mathbf{x}_{t+2} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}_t)$. Es decir, una composición de \mathbf{f} consigo misma resulta en $\mathbf{f} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}^2$. Componiendo una vez más, tenemos que $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^2 = \mathbf{f}^3$, lo que nos permite generalizar a una composición de cualquier

orden, tal que

$$\mathbf{f}^{n+m} = \mathbf{f}^n \circ \mathbf{f}^m, \quad (2.3)$$

donde se deduce la propiedad de asociatividad:

$$\mathbf{f}^n \circ \mathbf{f}^m \circ \mathbf{f}^l = \mathbf{f}^{n+m} \circ \mathbf{f}^l = \mathbf{f}^n \circ \mathbf{f}^{m+l}. \quad (2.4)$$

Si el mapa es invertible, se tiene que también se verifica

$$\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}^0 = \mathbf{I}_D, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^n \circ \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}^n, \quad (2.6)$$

con \mathbf{I}_D es la matriz identidad de dimensión D . En este caso, las propiedades (2.3-2.6) definen un grupo donde los elementos son las iteradas de \mathbf{f} y la operación es la composición de funciones.

Los mapas pueden clasificarse según las características de la función \mathbf{f} : si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ tiene inversa, \mathbf{f}^{-1} , es decir si $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_{t+1})$ existe y es única, decimos que el mapa es invertible. Está demostrado (teorema de la función inversa) que un mapa es invertible si \mathbf{f} es biyectiva (Wiggins, 2003). Mientras que si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ no tiene inversa decimos que el mapa es no invertible.

Finalmente, sea $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^n : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{f}^n(\mathbf{x})}\mathcal{S}$, donde $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^n$ es el mapeo lineal del espacio tangente a \mathcal{S} en el punto \mathbf{x} al espacio tangente en el punto $\mathbf{f}^n(\mathbf{x})$. Se tiene que

$$d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^{n+m} = (d_{\mathbf{f}^m(\mathbf{x})}\mathbf{f}^n) \circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^m. \quad (2.7)$$

Si $\mathbf{R}_n(\mathbf{x})$ es la representación matricial de la transformación $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^n$, entonces se verifica que

$$\mathbf{R}_{n+m}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_n(\mathbf{f}^m(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{R}_m(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

La función $\mathbf{R}_n(\mathbf{x})$ que verifica la Ec. (2.8) define un cociclo multiplicativo del sistema \mathbf{f}^n . De aquí en más, simplificamos la notación como $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_1(\mathbf{x})$, que corresponde la matriz Jacobiana de la transformación \mathbf{f} . Es decir, si R_{ij} son los componentes de $\mathbf{R}(\mathbf{x})$, entonces $R_{ij} = \frac{\partial f^{(i)}(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$.

2.1.2. Órbitas y estabilidad lineal

Una *órbita*, $O(\mathbf{x}_0)$, es el conjunto de todos los puntos de la trayectoria que contiene a \mathbf{x}_0 . Si el mapa es invertible esto determina una secuencia bi-infinita

de puntos:

$$O(\mathbf{x}_0) = \{ \dots, \mathbf{f}^{-2}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}_0), \dots \}, \quad (2.9)$$

mientras que si el mapa es no invertible, se obtiene una secuencia infinita:

$$O(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{x}_t = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) \dots \}. \quad (2.10)$$

Por ejemplo, sea el mapa logístico (May, 1976) el cual es una función unidimensional no invertible,

$$f(x) = rx(1 - x), \quad (2.11)$$

donde r es un parámetro de control. Al tratarse de un mapa no-invertible, las órbitas toman la forma de la Ec. (2.10). Por otro lado, al variar el parámetro de control, $r \in [0, 4]$, nos permitirá observar diferentes dinámicas, por lo que nos servirá de ejemplo para ilustrar diferentes conceptos desarrollados en esta sección. En la Fig. 2.1 se muestra la función de evolución para $r = 4$ (panel izquierdo), y una ventana de 11 puntos de la trayectoria generada para una condición inicial arbitraria (panel derecho).

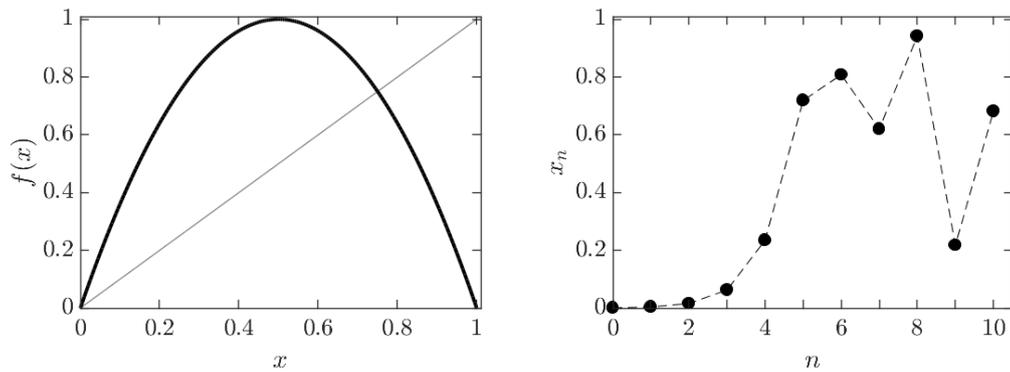


Figura 2.1: Ejemplo de un mapa logístico unidimensional. En el panel izquierdo se muestra en línea gruesa negra la representación gráfica de la función de evolución del mapa logístico, Ec. (2.11), con $r = 4$, y en línea fina gris la función identidad. En el panel derecho se muestran 11 puntos de una trayectoria con condición inicial $x_0 = 1,0 \times 10^{-3}$.

Para una trayectoria particular, $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$, decimos que es *estable* (según Lyapunov) si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que cualquier otra solución del sistema, $\varphi_t(\mathbf{y}_0)$, que verifica $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta(\epsilon)$, entonces $|\varphi_t(\mathbf{x}_0) - \varphi_t(\mathbf{y}_0)| < \epsilon$

para $t > 0$. Además, decimos que $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$ es *asintóticamente estable* si para cualquier otra solución, $\varphi_t(\mathbf{y}_0)$, existe una constante, $b > 0$, tal que si $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| < b$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_t(\mathbf{x}_0) - \varphi_t(\mathbf{y}_0)| = 0$ (Wiggins, 2003). En los casos que la trayectoria no es estable decimos que es *inestable*.

Para determinar la estabilidad de una trayectoria $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$, se considera otra trayectoria $\varphi_t(\mathbf{y}_0)$, que es cercana para $t = 0$, i.e., $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}_0$ con $|\mathbf{w}_0| \ll 1$. Para todo tiempo siguiente, $t > 0$, el desplazamiento relativo entre las trayectorias $\varphi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_t$ y $\varphi_t(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_t$ corresponde al vector \mathbf{w}_t ; es decir, $\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$. La evolución del vector \mathbf{w}_t queda dada por

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{w}_t + \mathcal{O}(|\mathbf{w}_t^2|). \quad (2.12)$$

Como $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{w}_{t+1}$, la evolución de trayectorias cercanas a la que nos interesa estudiar está dada por

$$\mathbf{w}_{t+1} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{w}_t + \mathcal{O}(|\mathbf{w}_t^2|). \quad (2.13)$$

Mientras $|\mathbf{w}_t| \ll 1$, la evolución de \mathbf{w}_t puede aproximarse por el mapeo lineal

$$\mathbf{w}_{t+1} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{w}_t = \mathbf{R}(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{w}_t, \quad (2.14)$$

la cual puede reescribirse como

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{R}(\mathbf{x}_t)\mathbf{R}(\mathbf{x}_{t-1}) \cdot \mathbf{w}_{t-1}. \quad (2.15)$$

Iterando de esta manera, se puede escribir el estado del vector \mathbf{w}_t al tiempo t en función de una condición inicial \mathbf{w}_0 :

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0, \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{Y}_t = \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t-1})\mathbf{R}(\mathbf{x}_{t-2}) \dots \mathbf{R}(\mathbf{x}_0)$. Entonces $\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{R}(\mathbf{x}_t)\mathbf{Y}_t$ y $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{I}$. Por lo tanto, \mathbf{Y}_t es la representación matricial de la función $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^t : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{f}^t(\mathbf{x})}\mathcal{S}$.

Sean $\lambda_n(\mathbf{Y}_t)$ y $\vec{\psi}_n$, los autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{Y}_t , respectivamente, que cumplen $\mathbf{Y}_t \vec{\psi}_n = \lambda_n(\mathbf{Y}_t) \vec{\psi}_n \forall n = 1, \dots, D$. Si se cumple que $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{Y}_t)\}| \neq 1 \forall n = 1, \dots, D$, es posible estudiar la estabilidad de la trayectoria $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$ a través de los autovalores $\lambda_n(\mathbf{Y}_t)$. Si $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{Y}_t)\}| < 1 \forall n = 1, \dots, D$, decimos que la trayectoria es *estable*; mientras que si

$|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{Y}_t)\}| > 1$, para algún $n \in \{1, \dots, D\}$, decimos que la trayectoria es *inestable*.

En caso de que no se verifique la condición $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{Y}_t)\}| \neq 1 \ \forall n = 1, \dots, D$, es necesario estudiar los términos no-lineales del desarrollo en la Ec. (2.13) para determinar la estabilidad de la trayectoria.

2.1.3. Puntos fijos, órbitas periódicas, cuasi-periódicas y aperiódicas

Las órbitas del sistema pueden clasificarse según diferentes comportamientos. Por ejemplo, decimos que \mathbf{x}^* es un *punto fijo* si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (2.17)$$

En este caso, la matriz Jacobiana de la transformación \mathbf{f} evaluada en \mathbf{x}^* es una matriz constante que no depende de t : $\mathbf{R}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}^*)$. De esta manera, la trayectoria para la condición $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^D$ cercana a \mathbf{x}^* es:

$$\{\mathbf{y}_0, \mathbf{R}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}_0, \mathbf{R}^2(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{R}^n(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}_0, \dots\} \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la estabilidad del punto fijo se puede estudiar a partir de los autovalores de $\mathbf{R}(\mathbf{x}^*)$, en lugar de los autovalores de \mathbf{Y}_t . En primer lugar, decimos que el punto fijo es *hiperbólico* si $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{R}(\mathbf{x}^*))\}| \neq 1 \ \forall n = 1, \dots, D$. Además, decimos que el punto fijo hiperbólico \mathbf{x}^* es *sumidero* si $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{R}(\mathbf{x}^*))\}| < 1 \ \forall n = 1, \dots, D$, o *inestable* si $|\operatorname{Re}\{\lambda_n(\mathbf{R}(\mathbf{x}^*))\}| > 1$ para algún $n \in \{1, \dots, D\}$.

Si una trayectoria vuelve al mismo punto luego de k iteraciones decimos que se trata de un punto k -periódico. Es decir, \mathbf{x}^* es un *punto de período k* si

$$\mathbf{f}^k(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (2.19)$$

Además, a los k estados que constituyen la órbita con condición inicial \mathbf{x}^* , $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^*), \dots, \mathbf{f}^{k-1}(\mathbf{x}^*)\}$, se le llama *órbita k -periódica* u *órbita periódica de período k* .

Podemos determinar la estabilidad de la órbita periódica, observando que un punto k -periódico de \mathbf{f} , es un punto fijo de la transformación \mathbf{f}^k , lo que nos permite aplicar los conceptos desarrollados en el análisis de la estabilidad

de puntos fijos. Obsérvese también que una solución periódica de período k , también es una solución de período nk , con $n \in \mathbb{N}$.

En la Fig. 2.2 se muestran diferentes dinámicas del mapa logístico: punto fijo, período 2, y período 4.

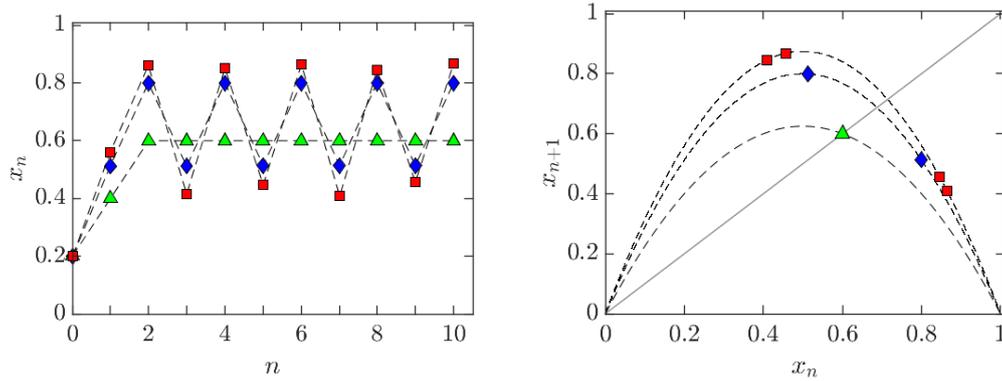


Figura 2.2: Ejemplo de diferentes dinámicas del mapa logístico. En el panel izquierdo se muestran tres trayectorias para diferentes configuraciones del mapa logístico: en triángulos verdes corresponde a un punto fijo ($r = 2.5$), en diamantes azules a un período 2 ($r = 3.2$), y en cuadrados rojos a un período 4 ($r = 3.5$). En todos los casos se muestran 11 puntos de la trayectoria con condición inicial $x_0 = 2 \times 10^{-1}$. En el panel derecho se muestran los estados finales de estas trayectorias (indicados con sus respectivos símbolos) sobre la función de evolución del mapa (líneas punteadas), donde la diagonal es la función identidad.

Una *órbita cuasi-periódica* yace en una curva cerrada o en un toro (para dimensiones superiores), que mediante un cambio de coordenadas suave la dinámica del mapa se corresponde a una rotación pura en el círculo (o toro, si $D > 1$), con un *número de rotación*, Γ , irracional (Das et al. 2016). Es decir, que cada coordenada, θ^i , del vector de estados transformado puede escribirse como

$$\theta_{t+1}^i = \theta_t^i + \Gamma \pmod{2\pi}, \quad (2.20)$$

con Γ irracional. Esto implica que estas órbitas no presentan un período de ningún orden, pero cubren densamente la curva o el toro en que yacen. Obsérvese que en el caso de que Γ sea un número racional se trata de una órbita periódica.

Las *órbitas aperiódicas* no presentan un período de ningún orden, pero tampoco presentan una estructura que puede reducirse al toro; como en el caso de las órbitas cuasi-periódicas. La aperiocidad es una de las características principales del caos. Aunque, para decir que la órbita es caótica, además de

ser aperiódica debe presentar sensibilidad a las condiciones iniciales (Alligood et al. 1996).

Los puntos fijos, las órbitas periódicas, cuasi-periódicas, y aperiódicas son *subconjuntos invariantes*. Específicamente, $A \subset \mathcal{S}$ se dice invariante bajo el mapa $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si para cualquier $\mathbf{x}_0 \in A$ se tiene que $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0) \in A \forall n$.

Decimos que un conjunto invariante, A , presenta *sensibilidad a las condiciones iniciales* si existe $\epsilon > 0$, tal que para cualquier $\mathbf{x} \in A$ y cualquier entorno U de \mathbf{x} , entonces existe $\mathbf{y} \in U$ y $t > 0$ que verifica que $|\mathbf{f}^t(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^t(\mathbf{y})| > \epsilon$. Por lo tanto, la sensibilidad a las condiciones iniciales implica que trayectorias cercanas divergen rápidamente.

Por ejemplo, el mapa logístico presenta una región caótica que se extiende desde $r \approx 3.57$ hasta $r = 4$ (Feigenbaum et al. 1983; Gutiérrez Ibarra, 2019). En $r = 4$ (panel derecho Fig. 2.1) el mapa logístico se encuentra en un régimen de caos completamente desarrollado, donde las trayectorias que parten desde cualquier condición inicial (excepto un conjunto de medida nula) cubren completamente (nuevamente, exceptuando un conjunto de medida nula) el intervalo $(0, 1)$ (Györgyi y Szépfalusy, 1984).

Por otro lado, se dice que un conjunto cerrado invariante, $A \subset \mathcal{S}$, es *atractivo* si existe un entorno U de A que verifica que $\mathbf{f}^t(U) \subset U \forall t \geq 0$ y $\bigcap_{n>0} \mathbf{f}^n(U) = A$. Decimos que el conjunto es *repelente* si $\mathbf{f}^t(U) \subset U \forall t \leq 0$ y $\bigcap_{n<0} \mathbf{f}^n(U) = A$ (donde \mathbf{f}^t con $t < 0$ no implica la invertibilidad del mapa, sino que indica al conjunto de pre-iteradas).

Si para el conjunto cerrado e invariante A , y para cualquiera dos subconjuntos abiertos, $U, V \subset A$, se tiene que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbf{f}^t(U) \cap V \neq \emptyset$, se dice que A es *topológicamente transitivo*.

Por lo tanto se define un *atractor* como un conjunto atractivo y topológicamente transitivo. Además, se dice que se trata de un *atractor extraño* si el atractor es caótico. La necesidad de introducir la noción de transitividad topológica puede apreciarse en la siguiente situación: mientras que el conjunto de todos los puntos fijos estables de un sistema es un subconjunto atractivo, la transitividad topológica permite diferenciar cada punto fijo estable como un atractor. De igual manera se define un *repelente* como un conjunto repelente y topológicamente transitivo.

En el ejemplo del panel derecho de la Fig. 2.2 se muestran los atractores (periódicos) del mapa logístico correspondientes a las configuraciones del panel izquierdo (identificándose con los respectivos símbolos), y en líneas punteadas

sus respectivas funciones de evolución.

2.2. Medidas invariantes

El análisis de mapas, en particular aquellos caóticos, puede resultar una tarea impracticable si las medidas que se realicen dependen de las condiciones iniciales que tomemos en el espacio de fases \mathcal{S} , ya que la medición no será una característica del sistema dinámico, sino de una trayectoria particular del sistema (Guckenheimer y Holmes, 2002; Kantz y Schreiber, 2004). Por lo tanto interesan aquellas medidas que son invariantes, como lo es la distribución de las trayectorias en \mathcal{S} .

2.2.1. Medida invariante, cálculo de momentos y teorema ergódico

La función μ se dice una *medida* si cumple con las siguientes tres propiedades: *no-negatividad* ($\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{S}$), *conjunto vacío nulo* ($\mu(\emptyset) = 0$), y *aditividad* (para el conjunto numerable, $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, de subconjuntos disjuntos de \mathcal{S} se tiene $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$). Para un tratamiento en profundidad de la teoría de la medida el lector puede referirse a Bogachev, 2007.

Se dice que μ es una *medida invariante* a la transformación \mathbf{f} en el espacio \mathcal{S} si se verifica que

$$\mu(\mathbf{f}^{-1}\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}. \quad (2.21)$$

También se dice que la transformación \mathbf{f} preserva la medida μ . Si además esta medida cumple con $\mu(\mathcal{S}) = 1$, decimos que es una *medida de probabilidad invariante*. La existencia de una medida invariante esta asegurada para un espacio compacto (I. G. Sinai, 1976).

Esta medida de probabilidad esta conectada con la *densidad de probabilidad invariante*, ρ , mediante $d\mu(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, lo que nos permite calcular momentos bajo la medida de probabilidad:

$$\langle \mathbf{x}^n \rangle_{\mu} = \int_{\mu(\mathcal{S})} \mathbf{x}^n d\mu = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{x}^n \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

donde $\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}$ corresponde a la integral múltiple en todo el espacio de fases.

Por ejemplo, la densidad de probabilidad invariante para el mapa logístico

con $r = 4$ es $\rho(x) = \left(\pi\sqrt{x(1-x)}\right)^{-1}$ (Lichtenberg y Lieberman, 1983), integrable en $x \in [0, 1]$. A partir de esta densidad de probabilidad podemos calcular, a modo de ejemplo, los momentos $\langle \mathbf{x} \rangle = \int_0^1 x \left(\pi\sqrt{x(1-x)}\right)^{-1} dx = 1/2$ y $\langle \mathbf{x}^2 \rangle = \int_0^1 x^2 \left(\pi\sqrt{x(1-x)}\right)^{-1} dx = 3/8$.

Una transformación \mathbf{f} que preserva la medida μ se dice *ergódica* (Einsiedler y Ward, 2013; Trinh, 2014) si para todo conjunto invariante, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, se tiene que

$$\mu(\mathcal{A}) = 0 \text{ o } \mu(\mathcal{A}) = 1. \quad (2.23)$$

Usualmente, la ergodicidad del sistema suele enunciarse a través del *Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin*, que establece que los promedios temporales coinciden con los promedios en el espacio de fases (I. G. Sinai, 1976; Trinh, 2014). Más formalmente, el teorema establece que, si $F \in \mathcal{L}^1$ (es decir, $\int_{\mu(\mathcal{S})} |F| d\mu < \infty$) es una transformación que preserva la medida, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^t F(\mathbf{f}^n \mathbf{x}) = \langle F \rangle. \quad (2.24)$$

2.2.2. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes característicos de Lyapunov (LCE por su sigla en inglés), o simplemente exponentes de Lyapunov (LE), fueron introducidos por Lyapunov (Lyapunov, 1892) como medidas asintóticas de la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial entre órbitas cercanas. Por lo tanto, los LE permiten caracterizar la dinámica subyacente del sistema, en particular, nos permite detectar si un sistema es caótico (Alligood et al. 1996; Kantz y Schreiber, 2004; Skokos, 2010; Strogatz, 1994). A continuación se presenta la derivación teórica de los exponentes de Lyapunov, de acuerdo con Skokos, 2010 y Wiggins, 2003.

Dada una trayectoria de referencia, \mathbf{x}_t , podemos tomar un vector \mathbf{w}_t que indica el desplazamiento entre esta trayectoria de referencia y una cercana, $\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$. La idea para el cálculo de exponentes de Lyapunov, es tomar dos trayectorias cercanas cuando $t = 0$, lo que implica \mathbf{w}_0 de módulo pequeño, y al igual que se planteó para el estudio de la estabilidad de las trayectorias, estudiar la evolución de \mathbf{w}_t a primer orden. Por lo tanto, la evolución de \mathbf{w}_t a primer orden está dada por el mapeo lineal (Ec.(2.14)) $\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{R}(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{w}_t$, donde $\mathbf{R}(\mathbf{x}_t)$ es la matriz Jacobiana de la transformación \mathbf{f} evaluada en el punto

\mathbf{x}_t . Nuevamente, se hace la conexión con la condición inicial, \mathbf{w}_0 , mediante la matriz \mathbf{Y}_t (Ec. (2.16)):

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0. \quad (2.25)$$

A partir de este mapeo lineal, se obtiene el *coeficiente de expansión* en la dirección de $\mathbf{w}_0 \neq 0$, como

$$\frac{\|\mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0\|}{\|\mathbf{w}_0\|} = \frac{\|d_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}^t(\mathbf{w}_0))\|}{\|\mathbf{w}_0\|} \approx \exp(\chi t), \quad (2.26)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma \mathcal{L}^2 (norma Euclidiana), $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^D (x^{(i)})^2\right)^{1/2}$. La Ec. (2.25) representa un mapeo lineal, por lo tanto en el lado derecho de la Ec. (2.26) se plantea su solución como una exponencial, lo que permite ver la relación entre el coeficiente de expansión y el exponente de Lyapunov, χ . El *exponente de Lyapunov unidimensional* en la dirección \mathbf{w}_0 , $\chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0)$, es la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de una trayectoria cercana a la trayectoria de referencia en \mathbf{x}_0 , en la dirección de \mathbf{w}_0 , por lo tanto:

$$\chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0\|, \quad (2.27)$$

donde \log es el logaritmo natural, y 'lím sup' refiere al límite superior, es decir, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$, con 'sup' el supremo. Obsérvese que $\chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0)$ no depende del módulo del vector \mathbf{w}_0 , ya que $\frac{1}{t} \log \|\mathbf{w}_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Si ahora consideramos $Q \leq D$ vectores independientes, \mathbf{w}_0^i con $i = 1, 2, \dots, Q$, y el subespacio que expanden estos vectores, E^Q , entonces el coeficiente de expansión en la dirección de este subespacio es $\text{vol}_Q(\mathbf{Y}_t, E^Q) / \text{vol}_Q(\mathbf{Y}_0, E^Q)$, donde $\text{vol}_Q(\mathbf{Y}_t, E^Q)$ es el volumen del Q -paralelogramo definido por los vectores $\mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0^1, \mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0^2, \dots, \mathbf{Y}_t \mathbf{w}_0^Q$. De esta manera, el *exponente característico de Lyapunov Q -dimensional* de \mathbf{Y}_t con respecto al subespacio E_Q es:

$$\chi(\mathbf{Y}_t, E_Q) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log (\text{vol}_Q(\mathbf{Y}_t, E^Q)), \quad (2.28)$$

donde nuevamente el exponente de Lyapunov no depende de $\text{vol}_Q(\mathbf{Y}_0, E^Q)$.

La desigualdad de Hadamard establece que el volumen de un Q -paralelogramo es menor que el producto del largo de sus lados, es decir, para la matriz \mathbf{M} con columnas $\{\mathbf{v}^i, i = 1, \dots, Q\}$, entonces $\det \mathbf{M} \leq \prod_{i=1}^Q \|\mathbf{v}^i\|$.

Esta desigualdad asegura que los exponentes de Lyapunov pueden acotarse superiormente y por lo tanto son finitos. Además, si los vectores \mathbf{w}_0^i conforman una base de \mathbb{R}^Q , entonces

$$\sum_{i=1}^Q \chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0^i) \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_t|. \quad (2.29)$$

En un subespacio de \mathbb{R}^Q , donde hay Q direcciones independientes, como los exponentes de Lyapunov no dependen del módulo del vector \mathbf{w}_0^i , o del volumen subespacio E^Q sobre el cual se calcula, entonces hay a lo sumo Q valores diferentes de $\chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0)$: $\chi_1 \leq \chi_2 \cdots \leq \chi_Q$.

Finalmente, la base $\{\mathbf{w}_0^i, i = 1, \dots, D\}$ de \mathbb{R}^D se dice *base normal* si verifica que

$$\sum_{i=1}^D \chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0^i) \leq \sum_{i=1}^D \chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{v}_0^i),$$

con $\{\mathbf{v}_0^i, i = 1, \dots, D\}$ cualquier otra base de \mathbb{R}^D . La función matricial \mathbf{Y}_t se dice *regular* si para cada base normal $\{\mathbf{w}_0^i, i = 1, \dots, D\}$ se verifica que

$$\sum_{i=1}^D \chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0^i) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_t|, \quad (2.30)$$

con 'lim inf' el límite inferior, es decir, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m)$, con 'inf' el ínfimo. De acuerdo con la Ec. (2.29), esto implica que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_t| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_n|, \quad (2.31)$$

por lo que el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_n|$ existe, es finito y cumple con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \mathbf{Y}_t| = \sum_{i=1}^D \chi(\mathbf{Y}_t, \mathbf{w}_0^i). \quad (2.32)$$

Esto nos permite sustituir los límites superiores en las definiciones anteriores por $\lim_{t \rightarrow \infty}$.

El *teorema ergódico multiplicativo o teorema de Oseledec* establece que si en el espacio de fases \mathcal{S} , con una medida de probabilidad invariante, μ , se tiene un difeomorfismo \mathbf{f} que es C^1 , y que verifica la regla de composición $\mathbf{f}^{n+m} = \mathbf{f}^n \circ \mathbf{f}^m$, entonces para casi todo $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ se verifica que:

1. La familia de cociclos multiplicativos $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^n : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{f}^n}\mathcal{S}$ es regular (Ec. (2.30)).
2. Los exponentes característicos de Lyapunov de todos los órdenes existen y son independientes de la elección de μ . En particular, se verifica la Ec. (2.32) si \mathbf{Y}_t es la representación matricial de $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}^t$.
3. La matriz simétrica y definida positiva

$$\Lambda_{\mathbf{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{Y}_t^T \mathbf{Y}_t)^{1/2t} \quad (2.33)$$

existe. Donde \mathbf{Y}_t corresponde a la definición de la Ec. (2.25). Los logaritmos de los autovalores de la matriz $\Lambda_{\mathbf{x}}$ corresponden a los s diferentes exponentes de Lyapunov unidimensionales.

Por lo tanto, el Teorema de Oseledec nos asegura que los logaritmos de los autovalores de \mathbf{Y}_t normalizados por las iteraciones t , convergen en el límite $t \rightarrow \infty$ y son independientes de las condiciones iniciales elegidas dentro de un conjunto invariante (Kantz y Schreiber, 2004).

Este teorema resulta de gran utilidad, ya que permite obtener los exponentes de Lyapunov a partir de los autovalores de una matriz simétrica, lo que implica que sus autovalores son reales.

2.2.3. Dimensiones fractales

Los LE caracterizan la convergencia o divergencia de trayectorias cercanas, mientras que las dimensiones fractales permiten caracterizar la geometría de los atractores. En particular, la geometría de los atractores extraños posee características de fractalidad.

Si μ es una medida de probabilidad invariante en el espacio de fases, entonces la probabilidad de encontrar una trayectoria en una bola $\mathcal{U}_{\epsilon}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^D$, de radio ϵ y centrada en \mathbf{x} , es $p_{\epsilon}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{U}_{\epsilon}(\mathbf{x})} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Si el objeto sobre el cual se calcula esta probabilidad es un fractal, i.e. un atractor extraño, se tiene que $p_{\epsilon}(\mathbf{x}) \sim \epsilon^D$ (Grassberger et al. 1988). Para el caso de un punto fijo, se tiene $D = 0$, para una órbita periódica $D = 1$, y para una órbita cuasi-periódica $D = q$, con $q > 1$ un número natural.

A partir de esta probabilidad, se define la integral de correlación generali-

zada (Caby et al. 2019; Kantz y Schreiber, 2004):

$$C_q(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^D} p_\epsilon(\mathbf{x})^{q-1} d\mu(\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

donde para $q = 2$ se obtiene la integral de correlación usual. Para valores enteros de $q \geq 2$, la integral de correlación se interpreta como la probabilidad de que q puntos seleccionados al azar de una órbita, se encuentren dentro de una bola \mathcal{U}_ϵ (Diks, 1999). La relación de escala

$$C_q(\epsilon) \propto \epsilon^{(q-1)D_q}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.35)$$

permite definir las *dimensiones generalizadas o de Renyi*, D_q , como

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log C_q(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (2.36)$$

El caso particular de $q = 1$ puede obtenerse por la regla de l'Hospital, y se conoce como la dimensión de la información:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \log p_\epsilon \rangle_\mu}{\log \epsilon}. \quad (2.37)$$

Para $q = 0$, la dimensión generalizada coincide con la dimensión de capacidad o de box counting. Para el caso general, se tiene que D_q es una función monótona decreciente de q , y si D_q efectivamente depende de q , entonces decimos que la medida es multi-fractal (Kantz y Schreiber, 2004).

Debido a que los atractores son invariantes bajo la dinámica del sistema, si consideramos un atractor que ocupa un volumen D_1 -dimensional en el espacio de fases, este volumen no se contrae ni estira al evolucionar el sistema en el tiempo.

Sea un sistema cuyo espectro de LE se encuentra ordenado, $\chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_D$, donde los $P < D$ primeros LE son positivos y los M primeros LE cumplen con $\sum_{i=1}^M \chi_i > 0$, siendo $D \geq M > P$. Por lo tanto, el volumen M -dimensional se expande a una tasa promedio de $\exp \left[\left(\sum_{i=1}^M \chi_i \right) t \right]$, aunque este volumen se contraiga en las direcciones de χ_i , con $i = P + 1, \dots, M$. Por otro lado, el volumen $(M + 1)$ -dimensional definido por los primeros $M + 1$ LE se contrae a una tasa promedio de $\exp \left[\left(\sum_{i=1}^{M+1} \chi_i \right) t \right]$, ya que $\sum_{i=1}^{M+1} \chi_i < 0$. Consecuentemente, el atractor del sistema debe tener una dimensión parcial

(fraccionaria), d , entre los naturales M y $M + 1$; es decir, $d - M < 1$. Finalmente, para que el atractor sea invariante, es decir, que no se expanda ni se contraiga, se debe tener que $\sum_{i=1}^M \chi_i + (d - M)\chi_{M+1} = 0$, donde se pondera la contribución del exponente χ_{M+1} por la parte fraccional de la dimensión del atractor.

De esta última expresión se define la *dimensión de Kaplan-Yorke* (Frederickson et al. 1983), D_{KY} , como

$$D_{KY} = M + \frac{\sum_{i=1}^M \chi_i}{|\chi_{M+1}|}, \quad (2.38)$$

donde $\sum_{i=1}^M \chi_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{M+1} \chi_i < 0$. Como puede verse en la Ec. (2.38), la parte entera de la dimensión es la cantidad de LE (en orden descendente) cuya suma es positiva, mientras que la parte fraccional corresponde a la interpolación lineal.

La conjetura de Kaplan-Yorke establece que D_{KY} es idéntica a la dimensión de la información, D_1 , aunque solo existe prueba rigurosa para mapas bidimensionales (Ledrappier y Young, 1985a, 1985b). Los cálculos de las dimensiones fractales resultan computacionalmente muy demandantes. Si se tiene una serie temporal de datos de largo N , la integral de correlación (Ec. (2.34)) corresponde a dos sumas de N términos cada una. Esto implica un costo computacional de N^2 para cada valor de ϵ que se requiera. Por lo tanto, la conjetura de Kaplan-Yorke no solo relaciona la geometría de atractor con los LE, sino que permite obtener la D_1 de una forma computacionalmente más accesible.

2.2.4. Entropías: aditividad, extensividad y otras propiedades

El concepto de entropía es común a varias áreas del conocimiento, como por ejemplo la mecánica estadística o la teoría de la información, y tiene diferentes interpretaciones. Por un lado puede interpretarse como una medida del desorden de un sistema (Boltzmann, 1872, 1877; Gibbs, 1902; Kantz y Schreiber, 2004) o como medida de la incertidumbre de una variable aleatoria (Cover y Thomas, 1999), o también como la cantidad de información generada por un sistema estocástico (Shannon, 1948). En particular, para un sistema de N estados discretos, se tiene que la entropía de Boltzmann-Gibbs, H_{BG} , del

sistema es

$$H_{BG} = -k \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad (2.39)$$

donde p_i son las probabilidades sobre los estados del sistema por lo que $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, y k una constante positiva tomada por convención ($k = k_B$ en termodinámica y $k = 1$ en teoría de la información). En cambio, si se trata de un sistema en que los estados se describen mejor mediante variables continuas, H_{BG} toma la forma:

$$H_{BG} = -k \int d\mathbf{x} p(\mathbf{x}) \log[\sigma p(\mathbf{x})], \quad (2.40)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$, $D \geq 1$ la dimensión del espacio de fases, y $\sigma \in \mathbb{R}$. En el caso general, la variable \mathbf{x} puede tener dimensiones físicas, por lo tanto σ es una constante con las mismas dimensiones físicas que \mathbf{x} . Por ejemplo, para el caso de un sistema Hamiltoniano clásico aislado de N cuerpos puntuales en un espacio D -dimensional, entonces $\sigma = \hbar^{ND}$. Además, $p(\mathbf{x})$ es una medida de probabilidad, por lo que cumple $\int d\mathbf{x} p(\mathbf{x}) = 1$.

No-negatividad. En primer lugar, se puede observar que, como $0 \leq p(x) \leq 1$, esto implica que $\log(p(x)) \leq 0$, por lo tanto se tiene que:

$$H_{BG} \geq 0. \quad (2.41)$$

Concavidad. Una función $f(x)$ se dice convexa sobre el intervalo (a, b) si para todo $x_1, x_2, \in (a, b)$, y $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

y f se dice cóncava si $-f$ es convexa. La desigualdad de la suma de logaritmos establece que, para los número no negativos a_1, \dots, a_n y b_1, \dots, b_n , se tiene $\sum_{i=1}^n a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq (\sum_{i=1}^n a_i) \log \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$, y permite probar la concavidad de la entropía. Sea la distribución de probabilidad uniforme, u , sobre los elementos de \mathcal{X} , es decir, $u(x) = 1/\#\{\mathcal{X}\} \forall x \in \mathcal{X}$, donde $\#\{\mathcal{X}\}$ es el número cardinal del conjunto \mathcal{X} . Esto permite escribir

$$-H(p) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{u(x)} \right) - \log(\#\{\mathcal{X}\}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
-H(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \log \left(\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{u} \right) - \log(\#\{\mathcal{X}\}) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} (\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \log \left(\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{\lambda u + (1-\lambda)u} \right) - \log(\#\{\mathcal{X}\}).
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de la suma del logaritmo

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{x \in \mathcal{X}} \left(\lambda p_1 \log \frac{\lambda p_1}{\lambda u} + (1-\lambda)p_2 \log \frac{(1-\lambda)p_2}{(1-\lambda)u} \right) - \log(\#\{\mathcal{X}\}) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} \left(\lambda p_1 \log \frac{p_1}{u} + (1-\lambda)p_2 \log \frac{p_2}{u} \right) - \log(\#\{\mathcal{X}\}) \\
&= \lambda \sum_{x \in \mathcal{X}} p_1 \log p_1 + \lambda \sum_{x \in \mathcal{X}} p_2 \log p_2 = \lambda(-H(p_1)) + (1-\lambda)(-H(p_2)),
\end{aligned}$$

lo que prueba la convexidad de la función $-H(p)$, por lo tanto $H(p)$ es una función cóncava.

Máxima a igual probabilidades Como la entropía es un funcional que depende únicamente de la información probabilística del sistema, es decir, de cómo es la distribución de probabilidad en los diferentes estados, y no de la probabilidad específica de un estado particular, esta es invariante ante cualquier permutación de los estados, o más precisamente, ante cualquier permutación de la probabilidades de los estados. Esto implica que la entropía debe poseer un extremo y este ocurre cuando los estados poseen igual probabilidades. Debido a que la entropía es cóncava, este extremo es un máximo. Por lo tanto, la propiedad de concavidad de la entropía implica también que es máxima cuando todos los estados tienen la misma probabilidad.

Expansibilidad. La entropía también es invariante ante la inclusión de nuevos estados con probabilidad nula:

$$H_{BG}(p_1, p_2, \dots, p_W) = H_{BG}(p_1, p_2, \dots, p_W, 0). \quad (2.42)$$

Aditividad. Si A y B son dos sistemas independientes, entonces $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$, se tiene que la entropía verifica

$$H_{BG}(A + B) = H_{BG}(A) + H_{BG}(B). \quad (2.43)$$

Esto implica que para N sistemas idénticos independientes, tenemos que $H(N) = NH(1)$, donde $H(1)$ es la entropía de un único sistema.

Extensividad. Un concepto cercano al de aditividad es el de extensividad. Decimos que para sistema de N elementos (independientes o no) H es *extensiva* si $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H(N)}{N} = \Omega$, con Ω una constante tal que $0 < |\Omega| < \infty$.

La entropía termodinámica, $dH = \delta Q/T$, originalmente propuesta por Clausius (Clausius, 1865), verifica la propiedad de extensividad, es decir, es proporcional a la cantidad de materia involucrada (Tsallis et al. 2005). El concepto de Clausius de la entropía es puramente macroscópico, mientras que la entropía de Boltzmann-Gibbs, H_{BG} (Ecs. (2.39) y (2.40)), considera los estados microscópicos con probabilidades, p_i o $p(\mathbf{x})$, para el caso discreto o continuo respectivamente. H_{BG} verifica ser extensiva bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, si el sistema está compuesto de N elementos idénticos independientes o casi-independientes (debilmente correlacionados), H_{BG} es extensiva en el límite termodinámico (Tsallis, 2009b). En casos de sistemas fuertemente correlacionados H_{BG} es no-extensiva (aunque es aditiva, Ec. (2.43)).

En Tsallis, 1988, se propone una posible generalización de H_{BG} , llamadas q -entropías, H_q , donde

$$H_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^q}{q - 1}, \quad (2.44)$$

y $H_{q=1} = H_{BG}$. Muchas de las propiedades de H_{BG} se verifican también para H_q (no-negatividad, extrema a igual probabilidades, expansibilidad, concavidad para $q > 0$), pero H_q no verifica la propiedad de aditividad para $q \neq 1$. Si A y B son dos sistemas independientes, $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$, entonces

$$\frac{H_q(A + B)}{k} = \frac{H_q(A)}{k} + \frac{H_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{H_q(A)}{k} \frac{H_q(B)}{k}, \quad (2.45)$$

por lo que H_q se dice no-aditiva si $q \neq 1$. Es esta no-aditividad que permite que H_q sea extensiva en sistemas fuertemente correlacionados, es decir que existe algún valor de $q = q_{ext}$, tal que $H_{q_{ext}}(A + B) \sim H_{q_{ext}}(A) + H_{q_{ext}}(B)$ en el límite

$N_A \rightarrow \infty$ y $N_B \rightarrow \infty$, con N_A y N_B el número de elementos de los subsistemas A y B respectivamente. Aunque $H_{q_{ext}}$ es extensiva para el sistema fuertemente correlacionado, no lo es para uno débilmente correlacionado (Tsallis, 2009b).

2.2.5. Tasa de entropía

A la producción de entropía por unidad de tiempo, se le conoce como *tasa de entropía*. Esta tasa cuantifica la cantidad de incertidumbre que el sistema genera por unidad de tiempo; es decir, cuán rápido se pierde la información del estado del sistema. Sin embargo, existe más de una manera de definir esta tasa (Tsallis, 2009a).

Una forma de implementar computacionalmente el cálculo de la tasa de entropía es la siguiente (Latora y Baranger, 1999). Se divide el espacio de fases en W celdas y aleatoriamente se colocan M condiciones iniciales. Cada una de estas condiciones iniciales se evolucionan en el tiempo, obteniendo $M_i(t)$, la cantidad de trayectorias que en el tiempo t se encuentran en la celda $i = 1, \dots, W$ ($\sum_{i=1}^W M_i(t) = M$). Esto define el conjunto de probabilidades $p_i(t) = M_i(t)/M$, del cual se calcula la entropía $H_{BG}(t)$. Por lo tanto, la tasa de entropía se define como

$$h = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{H_{BG}(t)}{t}, \quad (2.46)$$

donde límites no conmutan. Por ejemplo, si en la Eq. (2.46) se toma el límite $W \rightarrow \infty$ antes del límite $M \rightarrow \infty$, se obtiene un caso donde el conjunto de probabilidades tiene pobre estadística; es decir, muy pocos puntos, $M_i(t)$, para cada celda de la partición. Por otro lado, el límite $t \rightarrow \infty$ no conmuta con los otros límites ya que estos otros límites son los que permiten definir la entropía, y sólo luego de definida es que se puede estudiar su comportamiento en $t \rightarrow \infty$.

Al evolucionar en el tiempo, una bola de condiciones iniciales en el espacio de fases se deformará contrayéndose en las direcciones de los LE negativos, y se estirará en las direcciones de los LE positivos. Por lo tanto, si el estado del sistema se conoce con una incertidumbre equivalente a esta bola de condiciones iniciales, luego de evolucionar el sistema en el tiempo, el estado del sistema se conocerá con una incertidumbre correspondiente a una bola que se ha expandido en las direcciones de los LE positivos. De esta manera, son estos LE los que contribuyen al aumento de incertidumbre del sistema.

Como la entropía puede interpretarse como una medida de la incertidumbre, resulta natural que los LE positivos estén relacionados con la tasa de producción de entropía. Esta relación se conoce como la identidad de Pesin (Pesin, 1977), y toma la forma

$$h = \sum_{i: \chi_i > 0} \chi_i. \quad (2.47)$$

Se notará como P al número de términos que intervienen en la suma de la Ec. (2.47), es decir, P es el *número de exponentes de Lyapunov positivos*.

Al igual que sucede para el cálculo de la integral de correlación, el cálculo de la entropía de acuerdo con Ec. (2.46) requiere tomar un número grande de condiciones iniciales (para evitar el problema de estadística pobre) con respecto a una partición del estado de fases en N celdas, i.e., $W \propto N$. Luego, se deben evolucionar estas condiciones iniciales, resultando en una complejidad computacional mayor a $\mathcal{O}(N^2)$. Por lo tanto, la identidad de Pesin no solo es útil para relacionar la entropía (o la tasa de entropía más precisamente) con los LE, sino que también permite un cálculo más sencillo de la tasa de entropía a partir de los LE.

2.2.6. Extensividad y exponentes de Lyapunov

En 1982 Ruelle conjeturó que un sistema suficientemente grande puede dividirse en subsistemas independientes con una dinámica similar que ocupan regiones disjuntas en el espacio de fases (Ruelle, 1982). Si esto sucede, el espectro de exponentes de Lyapunov del sistema es la unión de los espectros de los subsistemas, y además, cada subsistema contribuye únicamente agregado degeneraciones al espectro. Obsérvese que si la conjetura de Ruelle se cumple y la cantidad de subsistemas independientes es proporcional al tamaño del sistema, de acuerdo a las definiciones de aditividad y extensividad de la Sec. 2.2.4, el sistema es extensivo. Por lo tanto, un sistema se dice que es extensivo si al graficar el espectro de exponentes de Lyapunov, χ_i , $i = 1, \dots, D$, contra el índice normalizado, $i/D \in (0, 1]$, este colapsa a una única curva en el límite $D \rightarrow \infty$ (Antonopoulos y Baptista, 2017; Ginelli et al. 2007; Livi et al. 1986). Esta definición implica que la tasa de entropía es extensiva, es decir, proporcional al tamaño del sistema, D (Araujo y Baptista, 2019). Esto se debe a que en el límite, $D \rightarrow \infty$, la suma de la Ec. (2.47) converge a la integral de la

región positiva de la curva asintótica del espectro, si el sistema es extensivo.

De acuerdo a la definición de extensividad (Sec. 2.2.4), decimos que la tasa de entropía, h , es extensiva si el límite $\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{h(D)}{D}$ es constante. En este trabajo se define la tasa de entropía específica, η , como

$$\eta = \frac{h(D)}{D}, \quad (2.48)$$

de forma de que si $\lim_{D \rightarrow \infty} \eta = \text{cte.}$, entonces el sistema es extensivo.

2.3. Mapas acoplados

2.3.1. Redes de mapas acoplados

Sean N mapas unidimensionales diferenciables, $f_i : \mathcal{S}_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_i$, donde $i = 1, \dots, N$ identifica cada mapa (los cuales pueden ser diferentes) y \mathcal{S}_i su dominio y co-dominio. Entonces, la ecuación de evolución de un mapa cuando está acoplado a los demás y conformando una red simétrica está dada por (Kaneko, 1990)

$$x_{t+1}^{(i)} = f_i(x_t^{(i)}) - \frac{\epsilon}{k_i} \sum_{j=1}^N L_{ij} f_j(x_t^{(j)}), \quad (2.49)$$

donde ϵ es la intensidad de acoplamiento ($0 \leq \epsilon \leq 1$), L_{ij} es el ij -ésimo elemento de la matriz Laplaciana, $\mathbf{L} = \mathbf{K} - \mathbf{A}$, siendo \mathbf{A} la matriz de adyacencia ($A_{ij} = A_{ji} = 1$, si el nodo i está conectado con el nodo j , y $A_{ij} = 0$ en otro caso), y $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_N\}$ la matriz diagonal que contiene el grado de cada nodo (o cantidad de vecinos, $k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$). Este tipo de acoplamiento suele llamarse *difusivo* (Chaté y Manneville, 1988; Kaneko, 1986, 1989; Shabunin, 2021), ya que el segundo término de la Ec. (2.49) puede descomponerse en diferencias entre el estado de cada mapa y aquellos a los que está conectado, lo que lo hace tomar forma similar a la ley de difusión de Fick (Reichl, 1998). La condición de $\epsilon \in [0, 1]$ asegura que si $x_0^{(i)} \in [0, 1] \forall i \in [1, N]$ y $f_i(x) \in [0, 1] \forall x \in [0, 1]$ y $\forall i \in [1, N]$, entonces $x_t^i \in [0, 1] \forall t \geq 0$ y $\forall i \in [1, N]$, por lo tanto, todas las trayectorias están acotadas.

La Ec. (2.49) describe una transformación N -dimensional, mapeando el estado de los N mapas en el instante t , $\vec{x}_t = \{x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(N)}\}$, al estado de los N mapas en el instante $t + 1$, $\vec{x}_{t+1} = \{x_{t+1}^{(1)}, \dots, x_{t+1}^{(N)}\}$. Esta transformación

puede escribirse de forma matricial como

$$\vec{x}_{t+1} = [\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}] \vec{f}(\vec{x}_t), \quad (2.50)$$

donde $\vec{f}(\vec{x}_t) = \{f_1(x_t^{(1)}), \dots, f_N(x_t^{(N)})\}$ representa el mapeo de los N mapas desacoplados en el tiempo t , \mathbf{I} es la matriz de identidad de tamaño $N \times N$, y $\mathbf{K}^{-1} = \text{diag}\{1/k_1, \dots, 1/k_N\}$.

Si $f_i = f \forall i$, y debido a que la matriz Laplaciana tiene la propiedad de sumar cero en cualquiera de sus filas ($\sum_j L_{ij} = 0 \forall i$), entonces existe una solución para la Eq. (2.50) donde el estado de todos los mapas evoluciona de forma síncrona. Es decir, $s_t = x_t^{(1)} = \dots = x_t^{(N)} \forall t$ es una solución de las Ecs. (2.49) y (2.50) cuando $f = f_1 = \dots = f_N$ y la red es simétrica. Esta solución es conocida como de *sincronización completa*. Los estados posibles en la sincronización completa definen una variedad (sub-espacio) en el espacio de estados, la cual posee codimensión 1, está ubicada a lo largo de la diagonal del espacio de estados $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_N$, y es invariante ante la dinámica de la Eq. (2.50). En el caso en que la dinámica de los mapas aislados es caótica, entonces la variedad de sincronización completa es invariante y además topológicamente transitiva.

La estabilidad (local) lineal de la variedad de sincronización puede determinarse en términos de la Función Maestra de la Estabilidad (MSF, por sus siglas en inglés) (Pecora y Carroll, 1998).

2.3.2. Función maestra de la estabilidad de la sincronización

La MSF permite estudiar la estabilidad lineal de la variedad de sincronización completa mediante los exponentes de Lyapunov (LE) de redes de sistemas dinámicos (o mapas) idénticos y acoplados difusivamente. Específicamente, se estudian los LE paralelos y transversales a la variedad de sincronización, los cuales también se conocen como Exponentes de Lyapunov Condicionales (CLE) (Chua et al. 1993; Pecora y Carroll, 1990). En términos de la MSF, el sistema puede sincronizar si los CLE transversales son negativos, indicando que las perturbaciones a las soluciones síncronas decaen exponencialmente rápido y entonces la variedad es linealmente estable (Barahona y Pecora, 2002). El rango de parámetros donde los CLE son negativos, depende de la dinámica de los mapas, la intensidad del acoplamiento, y el tipo de red utilizado para

acoplarlos; tal y como se deduce a continuación.

En particular, la MSF se obtiene perturbando el estado de sincronización completa, $s_t = x_t^{(1)} = \dots = x_t^{(N)}$, y analizando la evolución de la perturbación en el orden dominante. En el modelo de Kaneko, Ec. (2.50), una perturbación genérica al estado síncrono, $x_t^{(i)} = s_t + \xi_t^{(i)}$ (a primer orden en $\xi_t^{(i)}$), resulta

$$\vec{\xi}_{t+1} = [\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}] \mathbf{R}_{\vec{f}}(s_t) \vec{\xi}_t, \quad (2.51)$$

donde $\mathbf{R}_{\vec{f}}(s_t)$ representa la matriz Jacobiana de \vec{f} evaluada en el estado síncrono s_t . Aún más, en el modelo de Kaneko de la Ec. (2.49), \mathbf{R} es una matriz diagonal (incluso fuera del subespacio de sincronización), específicamente $\mathbf{R}_{\vec{f}}(\vec{x}_t) = \text{diag}\{\partial_1 f_1(x_t^{(1)}), \dots, \partial_N f_N(x_t^{(N)})\}$, donde $\partial_i f_i(x_t^{(i)}) = d f_i(x_t^{(i)}) / d x_t^{(i)}$ son las derivadas de los componentes del flujo vectorial con respecto a cada variable independiente. Asumiendo que todas las unidades dinámicas son iguales ($f_i = f \forall i$) y en el subespacio de sincronización, $\mathbf{R}_{\vec{f}}(s_t) = f'(s_t) \mathbf{I}$, Eq. (2.51) puede reescribirse como

$$\vec{\xi}_{t+1} = f'(s_t) [\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}] \vec{\xi}_t, \quad (2.52)$$

que corresponde al mapeo lineal $(\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L})$ de las perturbaciones a tiempo t , $\vec{\xi}_t$, modulado por la derivada instantánea del mapa, $f'(s_t)$.

La Ec. (2.52) corresponde a una ecuación variacional conocida como la Ecuación Maestra de la Estabilidad (MSE). Si la red es regular (esto es, una red donde todos los nodos tienen el mismo grado), se tiene que $\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{I}$, por lo que conmuta con cualquier matriz. Además, como \mathbf{L} es diagonalizable, entonces se puede escribir que $\mathbf{L} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$, donde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}\}$ es la matriz diagonal de autovalores (con $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$) y $\mathbf{P} = \{\vec{\psi}_0, \dots, \vec{\psi}_{N-1}\}$ representa los autovectores ortonormales (en columnas). Se notará al segundo autovalor más pequeño como $\lambda_F = \lambda_1$, y al autovalor más grande (máximo) como $\lambda_M = \lambda_{N-1}$. El autovalor λ_F es llamado usualmente conectividad algebraica o autovalor de Fiedler (Fiedler, 1973), y posee la propiedad que $\lambda_F > 0$ si la red es conexa (De Abreu, 2007), lo que será un supuesto a lo largo de todo este trabajo. Por lo tanto, si se multiplica por izquierda ambos lados de Ec. (2.52) y se realiza el cambio de variables $\vec{\zeta}_t = \mathbf{P}^{-1} \vec{\xi}_t$, se pueden desacoplar las perturbaciones al subespacio de sincronización mediante los autovalores de \mathbf{L} , obteniendo las siguientes ecuaciones de evolución para las perturbaciones

desacopladas

$$\zeta_{t+1}^{(n)} = \left(1 - \epsilon \frac{\lambda_n}{k}\right) f'(s_t) \zeta_t^{(n)}, \quad \text{con } n = 0, \dots, N-1. \quad (2.53)$$

La Ec. (2.53) nos permite expresar los CLEs, χ , como una contribución de las unidades dinámicas debido al exponente de Lyapunov del mapa aislado, χ_{dyn} , más un exponente que proviene de la topología y la intensidad de acoplamiento, $\chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k)$, el cual posee una expresión sencilla debido a que la red es regular y se puede utilizar la descomposición de \mathbf{L} (de lo contrario, es necesario conocer la descomposición de $\mathbf{I} - \epsilon \mathbf{K}^{-1}\mathbf{L}$). Específicamente, y de acuerdo con el teorema de Oseledec, los CLEs para la Ec. (2.53) son dados por

$$\chi_n = \log \left| 1 - \epsilon \frac{\lambda_n}{k} \right| + \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \frac{\log |f'(s_t)|}{T} = \chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k) + \chi_{dyn}, \quad \text{con } n = 0, \dots, N-1, \quad (2.54)$$

donde $\chi_0 = \chi_{dyn}$ (ya que $\lambda_0 = 0$ siempre) es el exponente paralelo a la variedad de sincronización y los restantes $N-1$ exponentes transversales (perpendiculares) son los que determinan la estabilidad de la variedad, siendo estable [marginamente] si $\chi_n < 0$ [$\chi_n \leq 0$] $\forall n > 0$. Esto significa que una variedad de sincronización es estable si los modos transversales verifican

$$\chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k) < -\chi_{dyn}. \quad (2.55)$$

Cuando el mapa es lo suficientemente caótico ($\chi_{dyn} \gg 0$), la zona de parámetros donde los CLEs son negativos puede hacerse significativamente angosta, e incluso desaparecer. Por lo tanto, la habilidad del sistema para sincronizar depende en la competencia entre la caoticidad del mapa, la topología de la red subyacente y la intensidad de acoplamiento.

2.3.3. Exponentes de Lyapunov (LE) y exponentes de Lyapunov condicionales (CLE)

Los exponentes de Lyapunov de la Ec. (2.54) son calculados para una solución particular, la de la sincronización completa. Por este motivo se les conoce como exponentes de Lyapunov condicionales (CLEs). Pueden existir otras soluciones asintóticas (otros atractores) fuera de la variedad de sincronización (M. Baptista et al. 2011). Por ejemplo, cuando la variedad de sincronización

es inestable, condiciones iniciales cercanas a la solución síncrona evolucionan hacia otro atractor donde se cumple que $s_t \neq x_t^{(1)} \neq \dots \neq x_t^{(N)} \forall t$. Por lo tanto, se tiene dos soluciones co-existentes, la síncrona y la asíncrona.

Ahora, si la Jacobiana de la transformación es constante, es decir si a las condiciones ya impuestas se agrega que la derivada de la función de evolución del mapa es constante, i.e, $f'(x_t) = g \forall x_t$, los exponentes de Lyapunov (LE) coinciden con los exponentes de Lyapunov condicionales (CLE) (Antonopoulos y Baptista, 2017; Araujo y Baptista, 2019; M. Baptista et al. 2011; M. S. Baptista et al. 2016). En ese caso, la Ec. (2.54) permite obtener los LE del sistema para toda solución de la Ec. (2.50).

2.4. Topología de redes

Las deducciones de las Ecs. (2.53) y (2.54) de la MSF y los CLE requirieron asumir que la red sea no direccionada (lo que hace a \mathbf{L} simétrica, por lo que sus autovalores serán reales) y regular (esto es, que todos los nodos tienen el mismo número de vecinos, lo que asegura la conmutabilidad de la inversa de la matriz de grados, \mathbf{K}^{-1}). Aún con estas restricciones, el análisis de la estabilidad de la variedad de sincronización para esta clase de redes no queda completo. Para poder completarlo es necesario además conocer el espectro de \mathbf{L} (o por lo menos, λ_F y λ_M); algo que no es genéricamente conocido para cualquier red regular. Afortunadamente, los autovalores de la matriz Laplaciana pueden ser acotados para el caso general y existe una clase de redes regulares para las cuales el espectro de autovalores de \mathbf{L} es completamente conocido: las redes cíclicas (Löwdin et al. 1960).

En las siguientes subsecciones se presentan las cotas para los autovalores de la Laplaciana, válidas para una red genérica cualquiera, y cómo estas se aplican para redes regulares. Luego se centra la atención únicamente en redes cíclicas, presentando una descripción completa de su espectro de autovalores.

2.4.1. Cotitas para los autovalores de la Laplaciana

El *teorema del círculo de Gershgorin* (Gershgorin, 1931) establece que, dada una matriz $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{N \times N}$, sea $D(B_{ii}, r_i)$ el disco de Gershgorin en el plano complejo con centro en B_{ii} y radio $r_i = \sum_{j \neq i}^N |B_{ij}|$, entonces todos los autovalores de \mathbf{B} se encuentran dentro de (por lo menos) un círculo de Gershgorin.

Aplicando el teorema a la matriz Laplaciana, debido a la propiedad de suma de fila nula, obtenemos $r_i = k$ y $D(k, k)$. Esto implica que todos los autovalores se encuentran dentro del círculo mayor, $D(k_M, k_M)$, correspondiente a la fila del nodo de mayor grado, k_M . Si además la red es no direccionada, los autovalores son reales, por lo que el Teorema de Gershgorin acota a los autovalores de \mathbf{L} al intervalo $[0, 2k_M]$. Finalmente, si la red además es regular todos los círculos de Gershgorin son idénticos, entonces

$$0 \leq \lambda_n \leq 2k. \quad (2.56)$$

Los autovalores máximo, λ_M , y de Fiedler, λ_F , de \mathbf{L} también pueden acotarse por abajo y por arriba, respectivamente, complementando las cotas dadas por el teorema de Gershgorin. El autovalor λ_M verifica la cota inferior (Merris, 1994)

$$\lambda_M \geq k_M + 1, \quad (2.57)$$

y el autovalor λ_F puede acotarse superiormente por (Mohar, 1997)

$$\lambda_F \leq \frac{N}{N-1} k_m, \quad (2.58)$$

donde k_m es el grado del nodo menor conectado. Juntando las condiciones de las Ecs. (2.56), (2.57) y (2.58) y considerando un red regular conexas, obtenemos las siguientes condiciones para los autovalores de \mathbf{L} :

$$\begin{cases} 0 < \lambda_F \leq k \frac{N}{N-1}, \\ k + 1 \leq \lambda_M \leq 2k. \end{cases} \quad (2.59)$$

2.4.2. Propiedades espectrales de las redes cíclicas

Las redes cíclicas son aquellas que preservan su topología cuando son transformadas por un grupo de simetrías que cíclicamente se permutan los nodos. Es decir, una permutación cíclica es una transformación tal que $\pi[\{1, 2, \dots, N-1, N\}] = \{2, \dots, N-1, N, 1\}$ (entonces, $\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi = \pi^N = \mathbf{I}$), y las redes cíclicas son aquellas que preservan su topología bajo el grupo de permutaciones $\{\pi, \pi^2, \dots, \pi^N\}$.

Para esta clase de redes, las matrices asociadas al grafo pueden expresarse en función de una única fila o columna (Zhang y Yang, 2007). Por ejemplo,

podemos tomar la primera fila de la matriz Laplaciana \mathbf{L} , $\{L_{1,j}\} = \{k = \sum_{j=1}^N A_{1j}, -A_{1,2}, \dots, -A_{1,N}\}$. En este caso, se tiene que para una red cíclica genérica, los autovalores $\lambda_n(\mathbf{L})$ son (Zhang y Yang, 2007)

$$\lambda_n(\mathbf{L}) = \sum_{j=1}^N L_{1,j} \exp\left(i \frac{2\pi n}{N}(j-1)\right). \quad (2.60)$$

Si además \mathbf{L} es simétrica, y por lo tanto tiene autovalores reales, entonces

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^N L_{1,j} \cos\left[\frac{2\pi n}{N}(j-1)\right] = k - \sum_{j=2}^N A_{1,j} \cos\left[\frac{2\pi n}{N}(j-1)\right]. \quad (2.61)$$

Se observa que debido a la simetría de la función coseno en la Ec. (2.61), se cumple que $\lambda_n = \lambda_{N-n+1} \forall n > 0$ y $\lambda_0 = 0$. Por lo tanto, casi todos los autovalores de redes cíclicas, simétricas, son (al menos) doblemente degenerados. Las excepciones son $\lambda_0 = 0$ (siempre) y $\lambda_{N/2}$ (si N es par).

Por ejemplo, la red menos conectada que se puede construir bajo las hipótesis del trabajo es el *anillo*, aquella en que cada nodo está conectado a dos vecinos formando una grilla unidimensional con condiciones de borde periódicas. Esta red tiene un espectro de autovalores que sigue la forma de un seno al cuadrado:

$$\lambda_n = 2 - 2 \cos\left[\frac{2\pi}{N}n\right] = 4 \sin^2\left[\frac{\pi}{N}n\right].$$

En el otro extremo, la red más conectada es la *red completa* o global, aquella en que cada nodo de la red está conectado con todos los otros nodos. En este caso se tiene un espectro no nulo constante, es decir, $\lambda_0 = 0$ como siempre, y $\lambda_n = N \forall n > 0$. Esto se puede ver partiendo de la Ec. (2.60), que en este caso se escribe

$$\lambda_n = N - 1 - \sum_{j=2}^N \exp\left(i \frac{2\pi n}{N}(j-1)\right).$$

La suma que aparece en la ecuación anterior es una suma geométrica. Definiendo $l = j - 1$, se tiene

$$\lambda_n = N - 1 - \sum_{l=1}^N \exp\left(i \frac{2\pi n}{N}l\right) = N - \sum_{l=0}^N \exp\left(i \frac{2\pi n}{N}l\right) = N.$$

Capítulo 3

Resultados

Es en este capítulo que se presentan los principales resultados obtenidos durante la ejecución del proyecto de tesis, siendo todos ellos originales. Las secciones que lo componen se organizan en dos grupos, que desarrollan las dos líneas principales de este trabajo.

En primer lugar, en las Secs. 3.1 y 3.2 se presentan los resultados relativos a la estabilidad del subespacio de sincronización completa en redes de mapas caóticos unidimensionales acoplados. En la Sec. 3.1 se presentan las condiciones necesarias para una sincronización completa estable en redes regulares genéricas, mientras que en la Sec. 3.2 se presentan ejemplos concretos para dos topologías de redes cíclicas.

En la segunda parte, Secs. 3.3-3.5, se estudia la extensividad (la relación entre la tasa de entropía y el tamaño del sistema) en mapas caóticos unidimensionales de Jacobiana constante acoplados en redes regulares. Para estos sistemas, en la Sec. 3.3 se discute la relación entre la sincronización linealmente estable y el comportamiento extensivo. Debido a que para calcular las tasas de entropía es necesario conocer cuales exponentes de Lyapunov son positivos, en la Sec. 3.4 se presentan los posibles escenarios de cómo se modifican los exponentes positivos al cambiar los parámetros del sistema, definiendo regiones y sus fronteras en el espacio de parámetros para estos escenarios al aumentar la intensidad de acoplamiento. Finalmente, en la Sec. 3.5 se presenta el cálculo de las tasas de entropía para dos topologías específicas, analizando las condiciones para las cuales estas son extensivas.

3.1. Condiciones generales para la sincronización estable de mapas caóticos idénticos en redes regulares

La condición de estabilidad de la solución síncrona $\chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k) < -\chi_{dyn} \forall n > 0$ (Ec. (2.55)), donde χ_{top} es la contribución a los exponentes de Lyapunov condicionales (CLE) que dependen de la topología de la red, y χ_{dyn} la que depende de las unidades dinámicas, implica que los CLE transversales al subespacio de sincronización, $\chi_n = \chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k) + \chi_{dyn} \forall n > 0$, son negativos. Esta condición depende de los autovalores de la matriz Laplaciana, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N-1}$, el grado de los nodos, k , la intensidad de acoplamiento, ϵ , y el exponente de Lyapunov de los mapas aislados, χ_{dyn} . Los autovalores de \mathbf{L} son ordenados de forma que $\{\lambda_n\}_{n=0}^{N-1} = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_F \leq \dots \leq \lambda_M\}$, donde λ_F es el autovalor de Fiedler (Fiedler, 1973) (esto es, el mínimo autovalor no nulo) y λ_M es el autovalor máximo.

Debido al valor absoluto en el logaritmo del exponente característico de la topología χ_{top} , i.e., $\chi_{top}(\epsilon\lambda_n/k) = \log |1 - \epsilon\lambda_n/k|$, la condición para la estabilidad de la variedad de sincronización completa se desdobra en

$$\begin{cases} \exp(-\chi_{dyn}) > 1 - \epsilon\lambda_n/k & \text{si } \epsilon\lambda_n/k < 1 \\ \exp(-\chi_{dyn}) > \epsilon\lambda_n/k - 1 & \text{si } \epsilon\lambda_n/k > 1 \end{cases}, \forall n > 0.$$

Como el espectro de autovalores de la red está acotado por los autovalores λ_F y λ_M , finalmente las condiciones de estabilidad se reducen a condiciones sobre estos dos autovalores normalizados: λ_F/k y λ_M/k . Por lo tanto, la condición de estabilidad puede condensarse en la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{S}_F(\chi_{dyn}, \epsilon) < \frac{\lambda_F}{k} \leq \frac{\lambda_M}{k} < \mathcal{S}_M(\chi_{dyn}, \epsilon), \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{S}_F(\chi_{dyn}, \epsilon) \equiv [1 - \exp(\chi_{dyn})]/\epsilon$ y $\mathcal{S}_M(\chi_{dyn}, \epsilon) \equiv [1 + \exp(\chi_{dyn})]/\epsilon$ definen dos superficies que no se intersectan, con $\mathcal{S}_M(\chi_{dyn}, \epsilon) > 1, \forall \chi_{dyn} > 0$ y $\epsilon \in (0, 1]$. Las desigualdades de la Ec. (3.1) determinan una cota inferior y otra cota superior para λ_F/k y λ_M/k como función de ϵ y χ_{dyn} . Cuando estas cotas son verificadas, todas las direcciones transversales a la variedad de sincronización son estables.

El Teorema del Círculo de Gershgorin (Gershgorin, 1931) acota los auto-

valores de \mathbf{L} al intervalo $[0, 2k_M]$, donde $k_M = \max\{k_i\}_{i=1}^N$. Esto implica que para redes regulares $\lambda_n/k \in (0, 2] \forall n > 0$ y que la Ec. (3.1) restringe el intervalo de autovalores extremos $[\lambda_F/k, \lambda_M/k] \subset (0, 2]$ entre las superficies \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M . Cuando este intervalo intersecta alguna de estas superficies, la variedad de sincronización pierde estabilidad.

A continuación se utiliza la Ec. (3.1) para determinar los valores críticos de los parámetros relevantes para los cuales se pierde la estabilidad de la sincronización; es decir, establecer los límites de la estabilidad de la variedad de sincronización al cambiar ϵ , χ_{dyn} , o las propiedades de la red cíclica (como su simetría, tamaño N , o grado k).

Las dos superficies limitantes en Ec. (3.1) – $\mathcal{S}_F(\chi_{dyn}, \epsilon)$ y $\mathcal{S}_M(\chi_{dyn}, \epsilon)$ – crean dos posibles escenarios en términos de cómo dos planos horizontales de altura λ_F/k y λ_M/k , intersectan las superficies al variar ϵ o χ_{dyn} , los cuales se ilustran en Fig. 3.1. Se define una curva crítica en la superficie inferior cuya altura corresponde a la intersección con el plano de altura λ_F/k , esto es, $[1 - \exp(\chi_{dyn})]/\epsilon = \lambda_F/k$. De manera similar, la curva crítica en la superficie superior corresponde a la intersección con el plano de altura λ_M/k , y es dada por $[1 + \exp(\chi_{dyn})]/\epsilon = \lambda_M/k$.

El caso de los paneles izquierdos de la Fig. 3.1 corresponde a redes regulares donde las curvas críticas comparten un punto común $(\epsilon^{(c)}, \chi_{dyn}^{max})$ para $\epsilon^{(c)} \in (0, 1]$; representado por símbolos rellenos en el panel. Este punto ocurre cuando $[1 - \exp(\chi_{dyn}^{max})]/(\lambda_F/k) = \epsilon^{(c)} = [1 + \exp(\chi_{dyn}^{max})]/(\lambda_M/k)$. Si $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$ o $\epsilon \neq \epsilon^{(c)}$ se pierde la estabilidad del subespacio.

En este punto en común $(\epsilon^{(c)}, \chi_{dyn}^{max})$, se tiene entonces que $[1 - \exp(\chi_{dyn}^{max})]/(\lambda_F/k) = [1 + \exp(\chi_{dyn}^{max})]/(\lambda_M/k)$. Por lo que se puede derivar la máxima caoticidad que permite la sincronización estable del sistema para esta clase de redes regulares,

$$\chi_{dyn}^{max} \equiv -\log \left[\frac{1 - (\lambda_F/\lambda_M)}{1 + (\lambda_F/\lambda_M)} \right] = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_F}{\lambda_M} \right). \quad (3.2)$$

El caso de los paneles derechos de la Fig. 3.1 corresponde a redes regulares donde no existe este punto (ocurre fuera del rango $\epsilon \in [0, 1]$). En este caso, a medida que ϵ se incrementa de 0 a 1 y χ_{dyn} se incrementa a lo largo de la curva crítica sobre la superficie inferior, $[1 - \exp(\chi_{dyn})]/\epsilon = \lambda_F/k$, la superficie limitante superior no es intersectada. Por lo tanto, la máxima caoticidad que permite la sincronización estable del sistema se da cuando $\epsilon^{(c)} = 1$, donde

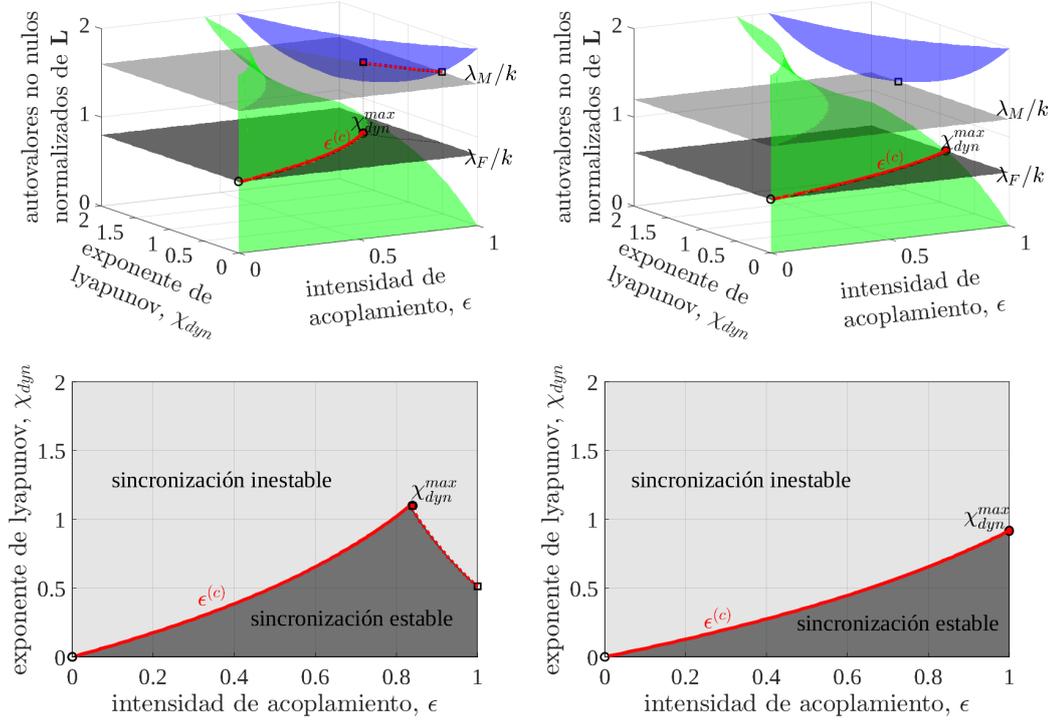


Figura 3.1: Criterio de estabilidad para mapas idénticos acoplados difusivamente en una red regular. Cada red fija los valores λ_F , λ_M y k , esto permite definir dos planos horizontales con altura λ_F/k y λ_M/k , respectivamente, como se muestra en los paneles superiores. La sincronización linealmente estable ocurre para aquellas configuraciones del sistema (exponente de Lyapunov del mapa aislado, χ_{dyn} , y intensidad de acoplamiento, ϵ) cuyos respectivos puntos sobre las superficies $\mathcal{S}_F(\chi_{dyn}, \epsilon)$ y $\mathcal{S}_M(\chi_{dyn}, \epsilon)$ se ubican simultáneamente por debajo del plano λ_F/k y por encima de λ_M/k , respectivamente. La mínima intensidad de acoplamiento necesaria para sincronizar los mapas, $\epsilon^{(c)}$, se define por la intersección del plano de altura λ_F/k con \mathcal{S}_F (línea continua en todos los paneles). Puede existir otra curva crítica debido a la intersección del plano de altura λ_M/k con la superficie \mathcal{S}_M (línea punteada en los paneles izquierdos). El punto en común de ambas curvas define el máximo exponente de Lyapunov, χ_{dyn}^{max} (símbolos rellenos), luego del cual la variedad de sincronización pierde estabilidad si χ_{dyn} o ϵ se incrementan. En los paneles inferiores se muestra la proyección sobre el plano horizontal de las curvas críticas, señalando las regiones del espacio de parámetros χ_{dyn} y ϵ , en que la sincronización completa es linealmente estable o inestable.

$[1 - \exp(\chi_{dyn}^{max})] = \lambda_F/k$; indicado por un círculo relleno en el panel derecho. Entonces,

$$\chi_{dyn}^{max} = -\log \left[1 - \frac{\lambda_F}{k} \right]. \quad (3.3)$$

Para definir el conjunto crítico de redes regulares que dividen los 2 casos mencionados, se iguala las Ecs. (3.2) y (3.3) para encontrar una relación entre

λ_F/k y λ_M/k ; esto es, $(1 - \lambda_F^{(c)}/\lambda_M^{(c)})/(1 + \lambda_F^{(c)}/\lambda_M^{(c)}) = (1 - \lambda_F^{(c)}/k)$, lo cual implica

$$\frac{\lambda_F^{(c)}}{k} + \frac{\lambda_M^{(c)}}{k} = 2. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, los paneles izquierdos en la Fig. 3.1 corresponde a redes regulares que verifican $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$ y e los paneles derechos en la Fig. 3.1 corresponde a redes regulares que verifican $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$. El conjunto crítico de redes – aquellas que verifican Ec. (3.4) – puede ser analizado tanto por la Ec. (3.2) o la Ec. (3.3).

Vale observar que para cualquier red genérica se tiene que $\lambda_F/k \in (0, N/(N-1)]$ y $\lambda_M/k \in [N/(N-1), 2]$ (Ec. (2.59)). Por lo tanto, siempre se cumple que $N/(N-1) < \lambda_F/k + \lambda_M/k \leq N/(N-1) + 2 = (3N-1)/(N-1)$. En particular, para una red completa, $\mathcal{C}_N(k = N-1)$ (i.e., una red cíclica con $k = N-1$ con cada nodo acoplado a todos los otros), se tiene que $\lambda_F/k = \lambda_M/k = N/(N-1)$, entonces, $\lambda_F/k + \lambda_M/k = 2N/(N-1) > 2$. Esto implica que una red completa corresponde a una situación como la de los paneles izquierdos de la Fig. 3.1. Por lo tanto, de acuerdo a la Ec. (3.2), $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k = N-1)] = \infty$, lo que indica que estas redes pueden sincronizar cualquier mapa caótico establemente para algún $\epsilon \in (\epsilon^{(c)}, 1]$. En el otro extremo, la red anillo, $\mathcal{C}_N(k = 2)$, con N par se tiene que $\lambda_M/k = 2$, y como $\lambda_F > 0$, esta topología también corresponde a una situación como la de los paneles izquierdos de la Fig. 3.1. En este caso, a partir de la Ec. (3.2), se obtiene que $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k = 2)] \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, lo que implica que redes de tamaño infinito en esta topología, no es posible sincronizar ningún mapa caótico.

En ambas clases de redes regulares, la *mínima intensidad de acoplamiento necesaria para mantener sincronización linealmente estable* para diferentes exponentes de Lyapunov, está dada por la curva crítica inferior $\mathcal{S}_F(\epsilon^{(c)}, \chi_{dyn}) = [1 - \exp(-\chi_{dyn})]/\epsilon^{(c)} = \lambda_F/k$, y es válida hasta χ_{dyn}^{max} ; dependiendo de la red regular, ya sea a partir de Ec. (3.2) o Ec. (3.3). Es decir,

$$\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k} \right)^{-1}, \quad \forall \chi_{dyn} \in (0, \chi_{dyn}^{max}]. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, si $\epsilon \geq \epsilon^{(c)}$ y $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$, la solución síncrona es estable. Para redes donde $\lambda_F + \lambda_M \geq 2k$ existe un acoplamiento máximo, tal que si este es superado la solución síncrona pierde la estabilidad. En ambos paneles de la Fig. 3.1 se muestra la curva crítica descrita por $\epsilon^{(c)}$ con una línea ro-

ja continua. En el caso de una red completa, $\mathcal{C}_N(k = N - 1)$, se tiene que $\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_N(k = N - 1), \chi_{dyn}] = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] (N - 1)/N$, $\forall \chi_{dyn} \in (0, \infty)$, por lo que $\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_N(k = N - 1), \infty] = (N - 1)/N < 1$. En el otro extremo, la red anillo, $\mathcal{C}_N(k = 2)$, se tiene que $\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_N(k = 2), \chi_{dyn}] = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] / [1 - \cos(2\pi/N)]$, $\forall \chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$. Obsérvese que en este último caso puede ocurrir que $\epsilon^{(c)} > 1$, lo que implica que no siempre es posible conseguir una configuración que permita la sincronización estable del sistema.

3.2. Estabilidad de la variedad de sincronización para clases específicas de redes cíclicas

En esta sección se derivan expresiones cerradas para los puntos críticos de la estabilidad de la variedad de sincronización (Ecs. (3.2)-(3.5)) en dos clases específicas de redes cíclicas, incluyendo sus densidades de enlaces críticas. Estas dos clases son: los k -ciclos, $\mathcal{C}_N(k)$, y las k -escaleras de Möbius, $\mathcal{M}_N(k)$. Las $\mathcal{C}_N(k)$ son redes cíclicas con grado par, donde cada nodo esta conectado a sus k vecinos más cercanos en una estructura de anillo (también se conocen como redes Wiley-Strogatz-Girvan (Wiley et al. 2006)). Por otro lado, la $\mathcal{M}_N(k)$ es una generalización de las escaleras de Möbius (Guy y Harary, 1967; Pasotti, 2010) (que tienen grado $k = 3$). Esta generalización es introducida aquí para permitir incrementar el grado a $3 \leq k \leq N - 1$, pero manteniendo una estructura similar. Las derivaciones que se presentan a continuación para $\mathcal{C}_N(k)$ y $\mathcal{M}_N(k)$ incluyen redes de tamaño finito y en el límite termodinámico.

3.2.1. Resultados para k -ciclos

Estas redes tienen grado $k = 2q$, con $q \in \mathbb{N} > 0$, y pueden representarse por la matriz Laplaciana, $\mathbf{L}[\mathcal{C}_N(k = 2q)]$, cuya primera fila está dada por

$$L_{1j} = \begin{cases} k & \text{si } j = 1, \\ -1 & \text{si } j = 2, \dots, \frac{k}{2} + 1, \\ -1 & \text{si } j = N, \dots, N - (\frac{k}{2} - 1), \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.6)$$

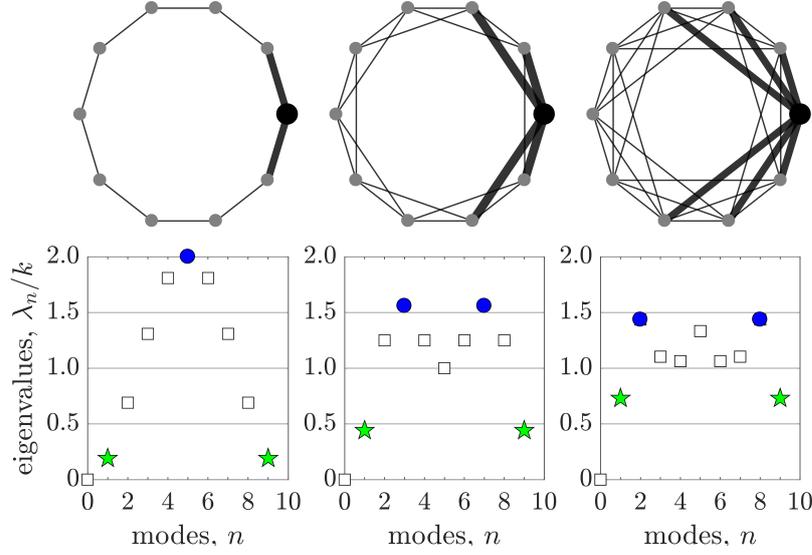


Figura 3.2: k -ciclos de 10 nodos con los autovalores de la matriz Laplaciana normalizados. De izquierda a derecha, los paneles superiores muestran un 2-ciclo ($k = 2$), un 4-ciclo ($k = 4$), y un 6-ciclo ($k = 6$), donde se resaltan los vecinos de un único nodo con líneas gruesas. Los paneles inferiores muestra los respectivos autovalores de la Laplaciana normalizados, donde se resaltan con estrellas y círculos el mínimo no nulo (Fiedler) y el máximo, respectivamente.

Debido a la ciclicidad de la topología y a la simetría del coseno en la Ec. (2.61), se encuentra (Ver apéndice: k -ciclos) que los autovalores de $\mathcal{C}_N(k)$ están dados por

$$\lambda_n[\mathcal{C}_N(k)] = k - 2 \sum_{s=1}^{k/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N} s\right) = k + 1 - \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi(k+1)}{N}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)} \right], \quad (3.7)$$

la cual es válida para $n = 0, \dots, N - 1$. En particular, se puede mostrar (utilizando identidades trigonométricas) que $\sin[\pi n(k+1)/N] / \sin(\pi n/N) = k+1$ cuando $n = 0$.

La Ec. (3.7) representa una forma cerrada para calcular los autovalores de un k -ciclo, los cuales comúnmente se obtienen por métodos numéricos. Por ejemplo, la Fig. 3.2 muestra tres k -ciclos y sus respectivos espectros de autovalores normalizados – de izquierda a derecha, $\mathcal{C}_{10}(2)$, $\mathcal{C}_{10}(4)$, y $\mathcal{C}_{10}(6)$ – donde se resalta que el primer autovalor no nulo es doblemente degenerado.

Para encontrar los puntos críticos de la estabilidad local de la variedad de sincronización, se necesita conocer de la Ec. (3.7) cuál es el mínimo autovalor no nulo, λ_F , y el máximo autovalor, λ_M . Para cualquier grado $k = 2q$, se

encuentra que (Ver apéndice: *k*-ciclos) estos autovalores corresponden a

$$\lambda_F[\mathcal{C}_N(k)] = \min_{n>0} \{\lambda_n\} = \lambda_1 = k + 1 - \frac{\sin(\pi(k+1)/N)}{\sin(\pi/N)}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_M[\mathcal{C}_N(k)] &= \max_{n>0} \{\lambda_n\} = \max\{\lambda_{\lfloor 3N/2(k+1) \rfloor}, \lambda_{\lceil 3N/2(k+1) \rceil}\} = \\ &= k + 1 - \min \left\{ \frac{\sin\left(\lfloor \frac{3N}{2(k+1)} \rfloor \frac{\pi(k+1)}{N}\right)}{\sin\left(\lfloor \frac{3N}{2(k+1)} \rfloor \frac{\pi}{N}\right)}, \frac{\sin\left(\lceil \frac{3N}{2(k+1)} \rceil \frac{\pi(k+1)}{N}\right)}{\sin\left(\lceil \frac{3N}{2(k+1)} \rceil \frac{\pi}{N}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ redondea el argumento al entero anterior y $\lceil \cdot \rceil$ al entero siguiente.

Para *k*-ciclos de gran tamaño ($N \gg 1$) y con densidad de enlace no nula ($\rho = k/(N-1) > 0$), la Ec. (3.8) puede aproximarse por $\lambda_F/k \simeq 1 - \text{sinc}[\pi(k+1)/N]$, donde $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ y $(k+1)/k \rightarrow 1$. Esto implica que en el límite $N \rightarrow \infty$ y $\rho = k/(N-1)$ finito, $\lambda_F/k \rightarrow 1 - \text{sinc}(\pi\rho) < 1$. Análogamente, la Ec. (3.9) se aproxima por $\lambda_M/k \simeq 1 - \sin(3\pi/2)/(k+1) \sin[3\pi/2(k+1)]$, por lo que $\lambda_M/k \rightarrow 1 + 2/3\pi > 1$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Vale resaltar que de acuerdo con las Ecs. (3.8) y (3.9), los *k*-ciclos son tales que $\lambda_M/k + \lambda_F/k < 2$ para $2 < k < k_C$, con k_C el *grado crítico del k-ciclo* que hace $\lambda_M/k_C + \lambda_F/k_C = 2$ (Ver apéndice: *k*-ciclos). En particular, se observa que $k_C \rightarrow N-1$ en el límite termodinámico, lo que implica que la mayoría de los *k*-ciclos pertenecen a la clase de redes regulares con $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k)]$ dado por la Ec. (3.3) – con excepción de la red anillo, $\mathcal{C}_N(2)$. Es decir que los *k*-ciclos cercanos a la red completa, $\mathcal{C}_N(k \geq k_C)$, se vuelven un conjunto despreciable en el límite termodinámico.

Entonces, la *máxima caoticidad que puede ser sincronizada de manera estable en un k-ciclo* con $2 < k < k_C$ se obtiene substituyendo λ_F de la Ec. (3.8) en la Ec. (3.3), lo que resulta en

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k)] = \chi_{dyn}^F = -\log \left[\frac{\sin[\pi(k+1)/N]}{k \sin(\pi/N)} - \frac{1}{k} \right]. \quad (3.10)$$

En términos de ρ , la Ec. (3.10) se expresa como

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(\rho)] = -\log \left[\frac{\sin(\pi\rho(N-1)/N + \pi/N)}{\rho(N-1) \sin(\pi/N)} - \frac{1}{\rho(N-1)} \right],$$

que en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$ con ρ finito) resulta en

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_\infty(\rho)] = -\log [\text{sinc}(\pi\rho)]. \quad (3.11)$$

Se observa que los k -ciclos con grados fuera del rango, i.e., con $k = 2$ o $k > k_C$, tienen $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k)]$ determinado por la Ec. (3.2), la cual requiere expresiones para λ_F (Ec. (3.8)) y λ_M (Ec. (3.9)). Esto conlleva a una expresión más compleja para $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k)]$ que las de las Ecs. (3.10) y (3.11), cuya derivación queda por fuera de este trabajo.

Independiente del grado k , es posible derivar una expresión cerrada para la *mínima intensidad de acoplamiento*, $\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_N(k), \chi_{dyn}]$, *necesaria para mantener sincronización localmente estable en k -ciclos*. Esta expresión se obtiene substituyendo la Ec. (3.8) en la Ec. (3.5), lo cual resulta en

$$\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_N(k), \chi_{dyn}] = \frac{k [1 - \exp(-\chi_{dyn})]}{k + 1 - \sin(\pi(k + 1)/N) / \sin(\pi/N)}, \quad (3.12)$$

que es válida si $\chi_{dyn} < \chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_N(k)]$. En el límite termodinámico,

$$\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_\infty(\rho), \chi_{dyn}] = \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{1 - \text{sinc}(\pi \rho)}, \quad \text{if } \chi_{dyn} < \chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_\infty(\rho)]. \quad (3.13)$$

En el panel izquierdo de la Fig. 3.3 se muestra $\epsilon^{(c)}[\mathcal{C}_\infty(\rho), \chi_{dyn}]$ en escala logarítmica y con códigos de colores, donde se señala $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_\infty(\rho)]$ con una línea gruesa (diagonal) punteada. Debajo de esta línea, la sincronización es linealmente inestable, lo que corresponde a k -ciclos con pocas conexiones y mapas con exponente de Lyapunov mayor a $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_\infty(\rho)]$.

A partir del límite termodinámico de la Ec. (3.11), se puede derivar la *mínima densidad de enlaces necesaria para mantener sincronización linealmente estable en k -ciclos de tamaño infinito*, la cual está dada por

$$\rho_c = \frac{1}{\pi} \text{sinc}^{-1}(\exp(-\chi_{dyn})), \quad \text{para } 0 < \chi_{dyn} < \chi_{dyn}^{max}[\mathcal{C}_\infty(\rho)]. \quad (3.14)$$

Esto implica que es necesario que $\rho \geq \rho_c$ para mantener sincronización localmente estable para un número infinito de mapas acoplados con exponente de Lyapunov χ_{dyn} , y arreglados de acuerdo a esta topología. Por ejemplo, para $\chi_{dyn} = \log(2)$ (como es el caso para un mapa logístico con $r = 4$, el mapa tienda con $r = 2$, o el mapa shift), la Ec. (3.14) resulta en $\rho_c = \text{sinc}^{-1}(1/2)/\pi \simeq 0.60335$, lo que corresponde a un k -ciclo denso.

En la práctica, se puede utilizar la Ec. (3.14) para encontrar ρ_c como función, por ejemplo, del parámetro de control r del mapa logístico, como se muestra en el panel derecho de la Fig. 3.3. De esta manera, es posible compa-

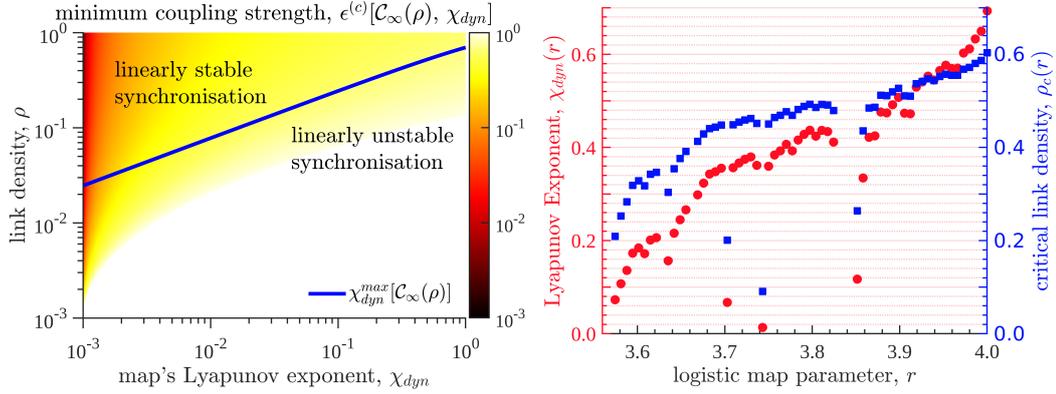


Figura 3.3: Puntos críticos de la estabilidad de la variedad de sincronización para k -ciclos de tamaño infinito. El panel izquierdo muestra en código de color (y en escala logarítmica) la mínima intensidad de acoplamiento, $\epsilon^{(c)}$ [Eq. (3.13)], necesaria para mantener la sincronización linealmente estable como función de la densidad de enlaces, ρ , y el exponente de Lyapunov del mapa aislado, χ_{dyn} . La línea continua indica la máxima caoticidad, χ_{dyn}^{max} [Eq. (3.11)], que puede sincronizarse de manera estable en dicho k -ciclo. El panel derecho muestra un ejemplo numérico para mapas logísticos acoplados en k -ciclos. Los círculos (rojos) rellenos corresponden al exponente de Lyapunov del mapa aislado, $\chi_{dyn}(r)$, como función del parámetro del mapa logístico, r , y los cuadrados (azules) rellenos muestran la predicción de la densidad de enlaces crítica (mínima), ρ_c , en el límite termodinámico (se excluyen las soluciones no-caóticas, i.e., $\chi_{dyn} \leq 0$).

rar los cambios en $\chi_{dyn}(r)$ con los cambios en $\rho_c(r)$ a medida que r decrece. Como es de esperar, debido a que $\chi_{dyn}(r < 4) < \chi_{dyn}(r = 4)$, se encuentra que los k -ciclos verifican que $\rho_c(r < 4) < \rho_c(r = 4)$.

3.2.2. Resultados para k -escaleras de Möbius

Estas redes cíclicas son una generalización de la escalera de Möbius. Las escaleras de Möbius son redes cíclicas con $k = 3$ o 4 vecinos (Guy y Harary, 1967; Pasotti, 2010), donde existe una analogía con la banda de Möbius – una variedad bi-dimensional no-orientable. Una escalera de Möbius con $k = 3$ puede construirse agregando $N/2$ nuevos enlaces (con $N > 3$ y par) que conectan los nodos diametralmente opuestos de un 2-ciclo. Estos enlaces son conocidos como *peldaños* (rungs en inglés) y se muestran en el panel izquierdo de la Fig. 3.4. Sin embargo, las escaleras de Möbius tienen una densidad de enlaces que tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, aquí se introduce una manera de construir k -escaleras de Möbius, $\mathcal{M}_N(k)$, con k arbitrario, de manera de poder mantener ρ finito cuando $N \rightarrow \infty$.

Se generalizan los *peldaños* agregando $k - 2$ enlaces a cada nodo de un 2-ciclo (i.e., un anillo, $\mathcal{C}_N(2)$) conectando cada nodo con los $k - 2$ nodos más lejanos del 2-ciclo. Esta construcción está restringida a tener N impar [par] si k es par [impar], lo que se verifica siempre que $N + 5 - k = 2q$, con $q \in \mathbb{N} > 2$ y $k \leq N - 1$. La primera fila de $\mathbf{L}[\mathcal{M}_N(k)]$ está dada por

$$L_{1j} = \begin{cases} k & \text{si } j = 1, \\ -1 & \text{si } j = 2, N - 1 \text{ (enlaces del 2-ciclos)}, \\ -1 & \text{si } j = (N + 5 - k)/2, \dots, (N - 1 + k)/2 \text{ (peldaños)}, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.15)$$

La Fig. 3.4 muestra dos representaciones de la clásica escalera de Möbius (con $k = 3$ y $N = 10$), donde el panel derecho se muestra como se relaciona con la banda de Möbius. Los nodos pueden arreglarse formando dos anillos concéntricos, donde los peldaños conectan el anillo interior y exterior. Estos dos anillos representan bordes de la banda y el cruzamiento de dos, el pliegue de la misma. Sin embargo, esta analogía solo es válida para las 3-escaleras de Möbius y no se extiende para la generalización propuesta, como puede verse en la Fig. 3.5.

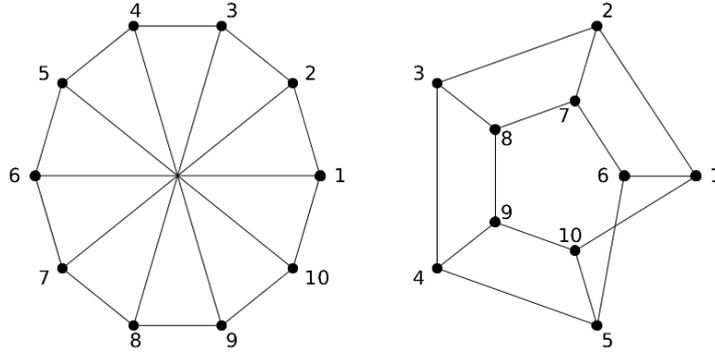


Figura 3.4: Dos representaciones de la 3-escalera de Möbius con 10 nodos. En el panel izquierdo los nodos están arreglados en un único anillo, donde los peldaños corresponden a los enlaces diametrales. A la derecha, los nodos se encuentran arreglados en dos anillos, uno interior y otro exterior, donde los peldaños corresponden a los enlaces que conectan estos dos anillos.

Análogamente a como se procede con los k -ciclos, se encuentra una expresión cerrada para los autovalores de la Laplaciana de las k -escaleras de Möbius substituyendo la Ec. (3.15) en la Ec. (2.61) (Ver apéndice: *k-escaleras*

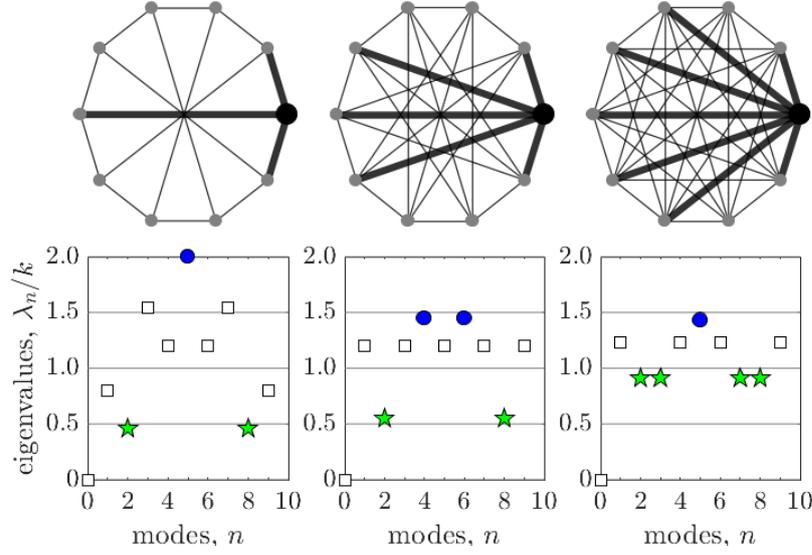


Figura 3.5: k -escaleras de Möbius de 10 nodos con sus respectivos espectros normalizados. De izquierda a derecha, los paneles superiores muestran una escalera de Möbius ($k = 3$) y 2 generalizaciones: la 5-escalera de Möbius ($k = 5$) y la 7-escalera de Möbius ($k = 7$). Los paneles inferiores muestran sus respectivos autovalores normalizados de la Laplaciana (con estrellas indicando los autovalores de Fiedler y con círculos los autovalores máximos) como en la Fig. 3.2.

de Möbius). Esto es,

$$\begin{aligned} \lambda_n[\mathcal{M}_N(k)] &= k - 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - \sum_{j=(N-k+5)/2}^{(N-1+k)/2} \cos\left(\frac{2\pi n(j-1)}{N}\right) = \\ &= k + 1 - \left[\frac{\sin(3\pi n/N) + (-1)^n \sin(\pi n(k-2)/N)}{\sin(n\pi/N)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir de la Ec. (3.16) se puede probar que $\lambda_M[\mathcal{M}_N(k)] = \max_n \{\lambda_n\} = \lambda_1$ si $7 \leq k \leq N-1$, y que $\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)] = \min_n \{\lambda_n > 0\} = \lambda_2$ si $3 \leq k \leq k_c \simeq (2N+8)/5$ (Ver apéndice: k -escaleras de Möbius). Fuera de estos rangos para los grados k , λ_F y λ_M cambian a otros modos. Entonces, cuando $\lambda_M[\mathcal{M}_N(k)] = \lambda_1$ se tiene

$$\lambda_M[\mathcal{M}_N(k)] = \lambda_1 = k + 1 - \left[\frac{\sin(3\pi/N) - \sin(\pi(k-2)/N)}{\sin(\pi/N)} \right], \quad (3.17)$$

que para $N \rightarrow \infty$ y ρ no diluido (i.e., evitando ρ pequeño tal que $k \geq 7$)

$$\frac{\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)]}{k} \simeq 1 - \frac{3}{2\rho(N-1)} + \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} \rightarrow 1 + \text{sinc}(\pi\rho). \quad (3.18)$$

Por otra parte, cuando $3 \leq k \leq k_c \simeq (2N + 8)/5$ y $\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)] = \lambda_2$,

$$\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)] = k + 1 - \left[\frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k-2)/N)}{\sin(2\pi/N)} \right], \quad (3.19)$$

que para $N \rightarrow \infty$ y $\rho < \rho_c \simeq 2/5$ (i.e., diluido o evitando ρ grande)

$$\frac{\lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]}{k} \simeq 1 - \frac{3}{\rho(N-1)} - \frac{\sin(2\pi\rho)}{2\pi\rho} \rightarrow 1 - \text{sinc}(2\pi\rho). \quad (3.20)$$

De acuerdo con las Ecs. (3.17) y (3.19), las k -escaleras de Möbius son tales que $\lambda_M/k + \lambda_F/k < 2$ (como los k -ciclos) cuando $7 \leq k < k_{\mathcal{M}}$ o $\lambda_M/k + \lambda_F/k > 2$ cuando $k_{\mathcal{M}} < k \leq k_c \simeq (2N + 8)/5$, siendo $k_{\mathcal{M}}$ el *grado crítico para las k -escaleras de Möbius* que verifica $\lambda_M/k_{\mathcal{M}} + \lambda_F/k_{\mathcal{M}} = \lambda_1/k_{\mathcal{M}} + \lambda_2/k_{\mathcal{M}} = 2$. Específicamente, $k_{\mathcal{M}}$ es determinado a partir de (Ver apéndice: *k -escaleras de Möbius*)

$$\alpha_N = \frac{\sin(2\pi(k_{\mathcal{M}} - 2)/N)}{\sin(2\pi/N)} - \frac{\sin(\pi(k_{\mathcal{M}} - 2)/N)}{\sin(\pi/N)},$$

donde $\alpha_N = 2 - \sin(3\pi/N) / \sin(\pi/N) - \sin(6\pi/N) / \sin(2\pi/N)$. Por ejemplo, cuando $N = 505$ se obtiene (numéricamente) que $k_{\mathcal{M}} \simeq 62$, como sucede en la Fig. 3.6. En los paneles se representan el autovalor máximo y de Fiedler para las k -escaleras de Möbius, resaltando con áreas sombreadas los casos cuando $\lambda_M/k + \lambda_F/k > 2$ (en el resto, $\lambda_M/k + \lambda_F/k < 2$).

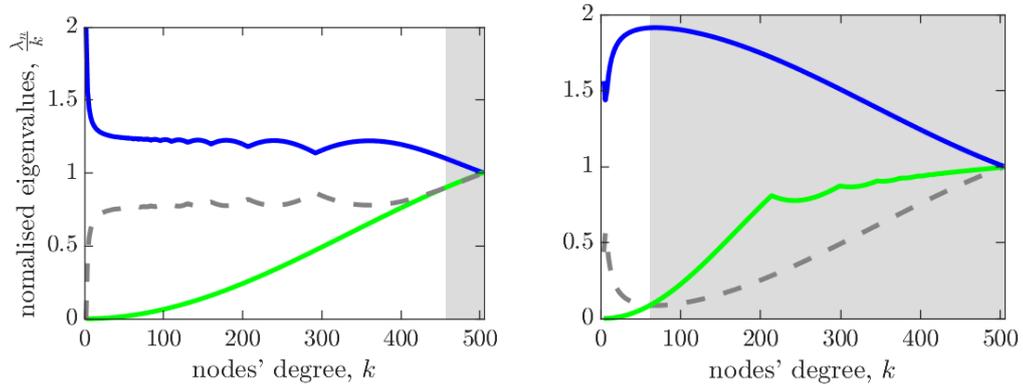


Figura 3.6: Máximos y mínimos autovalores normalizados para k -ciclos (izquierda) y k -escaleras de Möbius (derecha) con 505 nodos. La línea azul [verde] corresponde al máximo [mínimo] autovalor normalizado λ_M/k [λ_F/k]. La línea punteada gris muestra $2 - \lambda_M/k$. Mientras esta distancia sea más grande que λ_F/k , λ_M no juega ningún rol en la estabilidad de la variedad de sincronización. Sin embargo, esta distancia se hace más pequeña que λ_F/k en las regiones sombreadas en ambos paneles, donde la estabilidad también depende de λ_M/k .

Por lo tanto, los puntos críticos en la estabilidad de la variedad de sincronización para las k -escaleras de Möbius – máximo exponente de Lyapunov que puede ser sincronizado, $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_N(k)]$, y mínima intensidad de acoplamiento, $\epsilon^{(c)}[\mathcal{M}_N(k)]$ – dependen de si el grado k es mas pequeño o más grande que $k_{\mathcal{M}}$.

Para $7 \leq k < k_{\mathcal{M}}$, la *máxima caoticidad que puede ser sincronizada en k -escaleras de Möbius* se determina substituyendo $\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)]$ de la Ec. (3.19) en la Ec. (3.3), lo cual resulta en

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_N(k)] = -\log \left(\frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k-2)/N)}{k \sin(2\pi/N)} - \frac{1}{k} \right). \quad (3.21)$$

Para el límite termodinámico se tiene que $\lambda_2[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k \simeq 1 - \text{sinc}(2\pi\rho)$ [Ec. (3.20)]. Entonces, el máximo exponente de Lyapunov que se puede sincronizar establemente es

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_\infty(\rho)] \simeq -\log[\text{sinc}(2\pi\rho)], \quad (3.22)$$

que es válido para $0 < \rho \lesssim k_{\mathcal{M}}/(N-1)$. Sin embargo, se observa que $k_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$, lo que significa que χ_{dyn}^{max} es válido únicamente para k -escaleras de Möbius de tamaño finito. También se observa que esta expresión para χ_{dyn}^{max} es diferente de la expresión para k -ciclos infinitos [Ec. (3.11)] únicamente en que duplica el argumento de la función del seno cardinal (sinc).

Para $k_{\mathcal{M}} < k \leq k_c \simeq (2N+8)/5$, $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_N(k)]$ es determinado substituyendo $\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)]$ y $\lambda_M[\mathcal{M}_N(k)]$ de las Ecs. (3.17) y (3.19) en la Ec. (3.2),

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_N(k)] = -\log \left[\frac{\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)] - \lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]}{\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)] + \lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]} \right]. \quad (3.23)$$

De forma similar a los k -ciclos, en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$) se puede definir una *densidad crítica de enlaces*, $\rho_{\mathcal{M}}$, para k -escaleras de Möbius de tamaño infinito tales que $\lambda_1[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k + \lambda_2[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k = 2$, encontrando que $\rho_{\mathcal{M}} = 0$ o 1 (Ver apéndice: *k -escaleras de Möbius*), lo que significa que la Ec. (3.23) es válida en el rango $k \in (6, k_c]$. Aún más, $\lambda_1[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k = 1 + \text{sinc}(\pi\rho)$ [Ec. (3.18)] y $\lambda_2[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k = 1 - \text{sinc}(2\pi\rho)$ [Ec. (3.20)], lo que significa que

$$\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_\infty(\rho)] = -\log \left[\frac{\text{sinc}(\pi\rho) + \text{sinc}(2\pi\rho)}{2 + \text{sinc}(\pi\rho) - \text{sinc}(2\pi\rho)} \right]. \quad (3.24)$$

Ahora es posible derivar expresiones cerradas para el *acoplamiento mínimo*

necesario para mantener una sincronización completa localmente estable en k -escaleras de Möbius con $7 \leq k \leq k_c \simeq (2N + 8)/5$ substituyendo $\lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]$ en Ec. (3.5). Esto resulta en

$$\epsilon^{(c)}[\mathcal{M}_N(k), \chi_{dyn}] = \frac{k [1 - \exp(-\chi_{dyn})]}{(k + 1) - \left[\frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k-2)/N)}{\sin(2\pi/N)} \right]}, \quad (3.25)$$

válido para $\chi_{dyn} \in (0, \chi_{dyn}^{max}]$, donde $\chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_N(k)]$ está determinado por Ec. (3.21) cuando $7 \leq k < k_M$ y por Ec. (3.23) cuando $k_M < k \leq k_c \simeq (2N + 8)/5$. En el límite termodinámico, Ec. (3.25) se transforma en

$$\epsilon^{(c)}[\mathcal{M}_\infty(\rho), \chi_{dyn}] = \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{1 - \text{sinc}(2\pi\rho)}, \text{ if } \chi_{dyn} < \chi_{dyn}^{max}[\mathcal{M}_\infty(\rho)], \quad (3.26)$$

que es similar a la expresión para los k -ciclos de tamaño infinito de la Ec. (3.13).

3.3. Relación entre sistemas de redes regulares con sincronización linealmente estable y su no extensividad

La sincronización completa corresponde a un estado de entropía mínimo (por lo menos local) en un sistema acoplado de mapas idénticos. Esto se debe a que la incertidumbre generada por el sistema corresponde a la incertidumbre generada por un único mapa. En otras palabras, el conocer el estado de una sola unidad dinámica equivale a conocer el estado de todo el sistema. Aún más, para un sistema en estado de sincronización completa, el agregar una nueva unidad dinámica idéntica en la solución síncrona no modifica la entropía del sistema, por lo tanto se trata de un estado no extensivo.

Si ahora consideramos, además, un sistema de mapas idénticos acoplados cuya Jacobiana es constante (i.e., $f'(x_t) = g \forall x_t$), entonces los exponentes de Lyapunov (LE) coinciden con los LE de la variedad de sincronización (CLE) (M. Baptista et al. 2011). Entonces, bajo estas hipótesis, un estado de sincronización linealmente estable posee todos los LE negativos, excepto uno, el que corresponde al LE de un mapa aislado, χ_{dyn} . Esto implica que, si el agregar una nueva unidad dinámica idéntica al sistema no modifica la estabilidad del mismo, entonces la tasa de entropía permanece constante al aumentar el ta-

maño del sistema, es decir, $h(N) = \chi_{dyn} \forall N > 1$, implicando que el sistema es no-extensivo. Obsérvese que en este caso, no es necesario que la nueva unidad dinámica se agregue en el estado síncrono, sino que el agregarle no modifique la estabilidad del sistema. Consecuentemente, la sincronización linealmente estable y la extensividad son comportamientos incompatibles (no pueden suceder simultáneamente) para sistemas de mapas idénticos acoplados con Jacobiana constante.

Esta incompatibilidad implica que las condiciones críticas para la sincronización completa linealmente estable son una frontera también para la región extensiva. Por otro lado, la condición de estabilidad (Ec. (2.55)) queda satisfecha siempre que $\chi_{dyn} \leq 0$, cuando los mapas son periódicos no son extensivos ya que la sincronización es siempre estable. Por lo tanto, de aquí en más el enfoque es en mapas caóticos, $\chi_{dyn} > 0$, dónde la condición de estabilidad puede ser violada y entonces pueden existir regiones de extensividad.

De acuerdo con las Ecs. (3.2) y (3.3), existe un máximo exponente de Lyapunov del mapa aislado, χ_{dyn}^{max} , de forma de que si $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$ el sistema admite sincronización linealmente estable para algún rango de la intensidad de acoplamiento, ϵ . Por lo tanto, tomando $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$ se puede evitar la región no-extensiva del espacio de parámetros. Por otro lado, para los casos en que $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$, también existe un valor crítico de la intensidad de acoplamiento, $\epsilon^{(c)}$ (Ec. (3.5)), tal que si $\epsilon \in [\epsilon^{(c)}, 1]$ también se admite la sincronización estable. Nuevamente, si se considera $\epsilon < \epsilon^{(c)}$, se evita la región no-extensiva.

3.4. Signo de los exponentes de Lyapunov para sistemas de mapas acoplados en redes regulares con Jacobiana constante

A partir de esta sección se restringe el estudio a mapas cuya matriz Jacobiana es constante, como es el caso del mapa shift ($f(x) = 2x \pmod{1}$), de forma de que los exponentes de Lyapunov (LE) coinciden con los LE de la variedad de sincronización (CLE). Bajo esta hipótesis, en esta sección se describen los diferentes escenarios posibles para el cambio en el número de exponentes de Lyapunov positivos, P , a medida que se modifica la intensidad de acoplamiento, ϵ , y el LE del mapa aislado, χ_{dyn} , y cómo estos escenarios se relacionan con las superficies limitantes, \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M . Ante un pequeño incremento de ϵ , o un

pequeño decrecimiento de χ_{dyn} , pueden ocurrir los siguientes cuatro escenarios.

- **Caso 1:** todos los LE son positivos, y continúan de esta manera al cambiar levemente ϵ o χ_{dyn} .
- **Caso 2 – Tipo I:** se tienen tanto exponentes positivos como negativos, donde algunos de los exponentes positivos se vuelven negativos al cambiar levemente ϵ o χ_{dyn} .
- **Caso 2 – Tipo II:** se tienen tanto exponentes positivos como negativos, donde algunos de los exponentes negativos se vuelven positivos al cambiar levemente ϵ o χ_{dyn} .
- **Caso 3:** se tiene tanto exponentes positivos y negativos para ϵ y algunos exponentes de ambas clases cambian su signo al cambiar levemente ϵ o χ_{dyn} .

Estos casos son mutuamente excluyentes, y la posibilidad de que ocurra alguno de estos escenarios define regiones en el espacio de parámetros. En las subsecciones siguientes se presentan las fronteras para las regiones de cada uno de estos casos, y su relación con las superficies limitantes, \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , en el caso particular de considerar únicamente una variación en la intensidad de acoplamiento, es decir, con χ_{dyn} constante. Además, se presenta la ubicación de las diferentes regiones en el espacio de parámetros.

3.4.1. Frontera del Caso 1: todos los exponentes de Lyapunov son positivos y se mantienen positivos al aumentar el acoplamiento

La Fig. 3.7 muestra el caso genérico donde un sistema de mapas idénticos con Jacobiana constante acoplados en una red regular posee todos los exponentes de Lyapunov (LE) positivos: Caso 1. Este caso corresponde a que todos los autovalores no nulos de la Laplaciana (normalizados) de la red se ubican por debajo de la superficie limitante inferior, \mathcal{S}_F (superficie verde en la Fig. 3.7), y se mantienen en esta región al aumentar ϵ (intervalos verticales negros en la Fig. 3.7).

El límite del Caso 1 se da cuando el máximo autovalor normalizado, λ_M/k , interseca \mathcal{S}_F (primer autovalor normalizado en cruzar \mathcal{S}_F) al aumentar el acoplamiento ϵ . La intersección genera una curva de nivel, $\epsilon^{(1)}$ (curva magenta

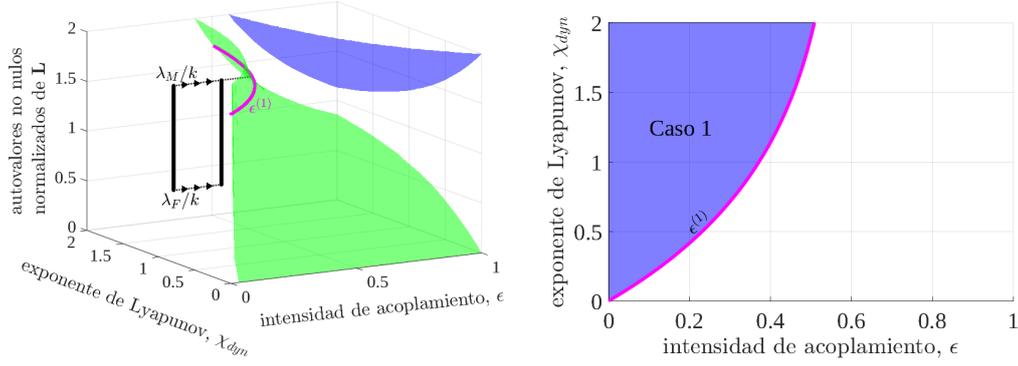


Figura 3.7: Situación límite para el caso donde todos los exponentes de Lyapunov (LE) positivos. El intervalo vertical (negro) en el panel izquierdo representa el espectro no nulo de la Laplaciana normalizada de una red regular ($[\lambda_F/k, \lambda_M/k]$) y su traslado (flechas) a medida que se aumenta ϵ . El intervalo se ubica por debajo de la superficie limitante \mathcal{S}_F (verde) para a un sistema con LE positivos: Caso 1. La curva (magenta) sobre \mathcal{S}_F representa el límite de la región dónde puede ocurrir este caso, determinada al variar ϵ y χ_{dyn} de los mapas de acuerdo con $\epsilon^{(1)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k}\right)^{-1}$. En el panel derecho se muestra la proyección de esta curva sobre el plano horizontal, indicándose en azul la región correspondiente al Caso 1.

en la Fig. 3.7), que depende de χ_{dyn} y λ_M/k . Específicamente, tomando la condición $\mathcal{S}_F(\chi_{dyn}, \epsilon) = \lambda_M/k$ se obtiene esta curva límite, que está dada por

$$\epsilon^{(1)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k}\right)^{-1}. \quad (3.27)$$

Por lo que se está en un Caso 1 si $\epsilon \in [0, \epsilon^{(1)})$ y $\chi_{dyn} > 0$. Se nota además que la frontera del Caso 1 [Ec. (3.27)] depende del tamaño del sistema a través de λ_M/k , por lo que se modifica al cambiar el tamaño del sistema.

3.4.2. Frontera del Caso 2 – Tipo I: hay exponentes de Lyapunov de ambos signos donde cambian de signo los positivos al aumentar el acoplamiento

Los Casos 2 corresponden a sistemas de mapas idénticos con Jacobiana constante acoplados en redes regulares donde los autovalores no nulos de la Laplaciana normalizados se ubican parcialmente entre las superficies limitantes \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , lo que implica tener un sistema con exponentes de Lyapunov (LE) positivos y negativos. En particular, el Caso 2 – Tipo I se da cuando el espectro

de autovalores posee una parte de los autovalores no nulos entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , y los restantes autovalores por debajo de \mathcal{S}_F , como se puede ver en ambos paneles de la Fig. 3.8.

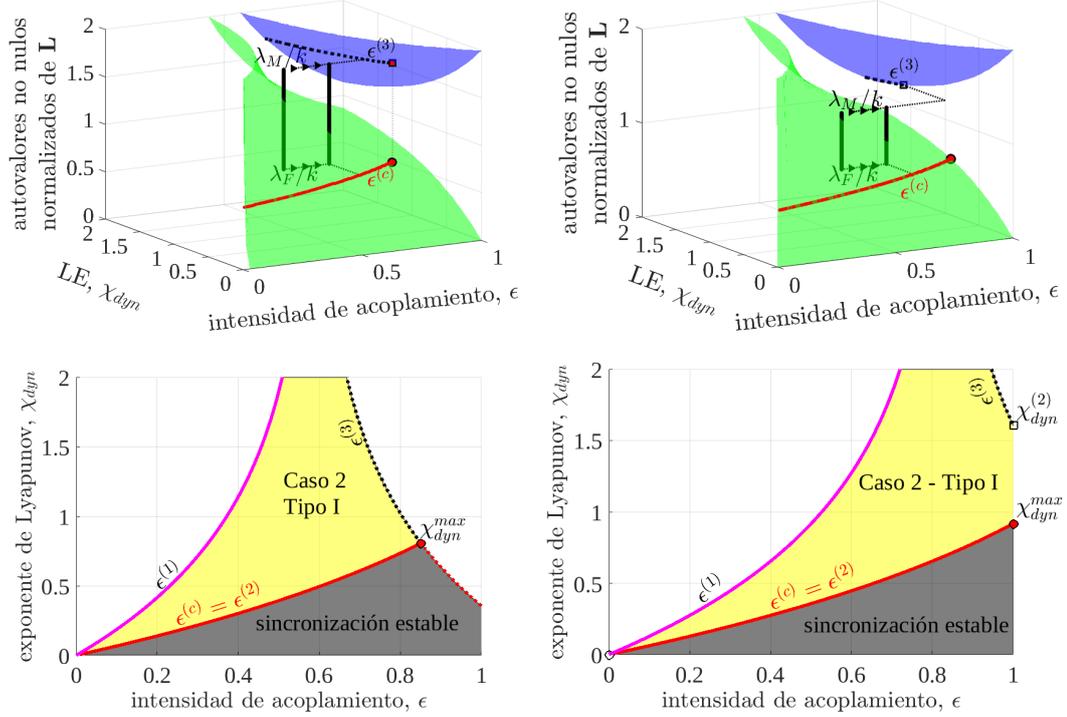


Figura 3.8: Escenario de Caso 2 – Tipo I para el cambio en la cantidad de LE positivos. En negro se muestra el traslado del espectro no nulo de la Laplaciana para una red genérica, con $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$ (panel superior izquierdo), y $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$ (panel superior derecho). Al aumentar ϵ , autovalores que se encuentra por debajo de la superficie \mathcal{S}_F ingresan en la región entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , por lo tanto LE positivos se hacen negativos. La curva roja corresponde a $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k}\right)^{-1} \forall \chi_{dyn} \in (0, \chi_{dyn}^{max}]$, que de ser cruzada se ingresa en régimen de sincronización estable. La línea punteada negra, corresponde al límite de la región de este caso, $\epsilon^{(3)} = [1 + \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k}\right)^{-1}$. Los símbolos rellenos corresponden a $\chi_{dyn}^{max} = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_F}{\lambda_M}\right)$, en los paneles izquierdos, y $\chi_{dyn}^{max} = -\log \left[1 - \frac{\lambda_F}{k}\right]$, en los paneles derechos, y el cuadrado vacío a $\chi_{dyn}^{(2)} = -\log \left[1 - \frac{\lambda_M}{k}\right]$. En los paneles inferiores se muestra la proyección en el plano horizontal de las curvas que delimitan la región correspondiente al este caso, indicada en amarillo.

A medida que se incrementa el acoplamiento o decrementa la caoticidad de los mapas aislados, siempre se pasa del Caso 1 (donde el espectro de autovalores está por debajo de \mathcal{S}_F) al Caso 2 – Tipo I, donde la frontera entre estos

casos está dado por la curva $\epsilon^{(1)}$ determinada en la Ec. (3.27). Además de esta frontera inferior para el Caso 2 – Tipo I, existe también una frontera superior que aparece al continuar aumentando el acoplamiento y que se desdobra dependiendo del tipo de red regular.

Si se continúa aumentando la intensidad de acoplamiento, dos curvas limitan la región de Caso 2 – Tipo I. Si $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$ (Ec. (3.2) o (3.3)), el límite coincide con el acoplamiento crítico de la sincronización completa, $\epsilon^{(c)}$ (Ec.(3.5)), como se muestra por la línea roja en la Fig. 3.8.

Si $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$, y el sistema verifica que $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$ (panel izquierdo de la Fig. 3.8), el límite de la región de Caso 2 – Tipo I ocurre cuando λ_M interseca con \mathcal{S}_M (lo que genera la curva de nivel $\epsilon^{(3)}$ que es la línea punteada negra en la Fig. 3.8), dado por

$$\epsilon^{(3)} = [1 + \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k} \right)^{-1}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto, si $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$, se trata de una región de Caso 2 – Tipo I cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(c)})$ y $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$. Cuando $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$, las fronteras del caso están dadas por $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(3)})$.

Si $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$ y $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$ (panel derecho de la Fig. 3.8), existe un intervalo de χ_{dyn} para el cual no hay otro comportamiento en el número de LE positivos, es decir, el límite de la región de Caso 2 – Tipo I es $\epsilon = 1$. Esto se da para $\chi_{dyn} \in (\chi_{dyn}^{max}, \chi_{dyn}^{(2)})$, con

$$\chi_{dyn}^{(2)} = -\log \left[1 - \frac{\lambda_M}{k} \right], \quad (3.29)$$

indicado por un cuadrado vacío en el panel derecho de la Fig. 3.8. Entonces el límite de la región de Caso 2 – Tipo I está dado por la curva que describe $\epsilon^{(3)}$ (Ec. (3.28), línea punteada en el panel derecho de la Fig. 3.8).

En resumen, se trata de una región de Caso 2 – Tipo I cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(c)})$ y $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$, sin importar de qué clase de red se trata. Si la red verifica que $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$, también se tiene una región de este Caso cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(3)})$ y $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$. En cambio si $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, también se tiene de una región de Caso 2 – Tipo I cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, 1]$ y $\chi_{dyn}^{max} < \chi_{dyn} < \chi_{dyn}^{(2)}$, o cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(3)})$ y $\chi_{dyn} \geq \chi_{dyn}^{(2)}$.

3.4.3. Frontera del Caso 2 – Tipo II: hay exponentes de Lyapunov de ambos signos donde cambian de signo los negativos al aumentar el acoplamiento

El Caso 2 – Tipo II ocurre únicamente en redes donde se verifica que $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$. En este caso, el espectro posee una región sobre la superficie \mathcal{S}_M , y otra entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , como se muestra en la Fig. 3.9. Al aumentar ϵ , los LE negativos se vuelven positivos. La región donde ocurre este caso está delimitada por las curvas $\epsilon^{(3)}$ (Ec. (3.28), línea puntada roja en Fig. 3.9) y $\epsilon^{(2)}$ (línea continua negra en Fig. 3.9), con

$$\epsilon^{(2)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k} \right)^{-1}. \quad (3.30)$$

Donde se tiene que $\epsilon^{(2)} = \epsilon^{(e)}$, si $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$.

Es decir, para $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$, se trata de una región Caso 2 – Tipo II cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(3)}, 1)$ y $\chi_{dyn} \in (\chi_{dyn}^{(2)}, \chi_{dyn}^{max})$, o cuando $\epsilon \in (\epsilon^{(2)}, 1]$ y $\chi_{dyn} \geq \chi_{dyn}^{max}$.

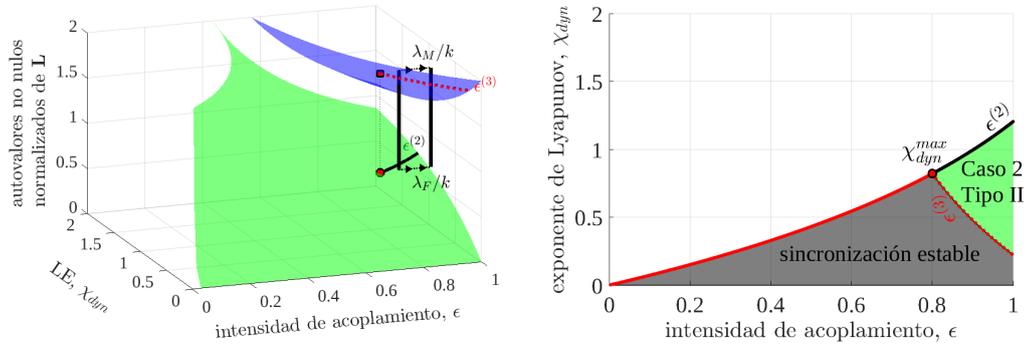


Figura 3.9: Escenario de Caso 2 – Tipo II para el cambio en la cantidad de LE positivos. En el panel izquierdo se muestra el traslado del espectro no nulo de la Laplaciana para una red genérica con $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$. Al aumentar ϵ , autovalores que se encuentran en la región entre las superficies limitantes, pasa a ubicarse por encima de \mathcal{S}_M , por lo tanto, LE negativos se hacen positivos. La curva punteada roja corresponde a $\epsilon^{(3)} = [1 + \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k} \right)^{-1}$, que de ser cruzada se ingresa en régimen de sincronización estable. La línea continua negra, corresponde a $\epsilon^{(2)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k} \right)^{-1}$. Los símbolos rellenos corresponden a $\chi_{dyn}^{max} = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_F}{\lambda_M} \right)$. En el panel derecho se muestra la proyección en el plano horizontal de las curvas que delimitan la región correspondiente a este caso, indicado en verde.

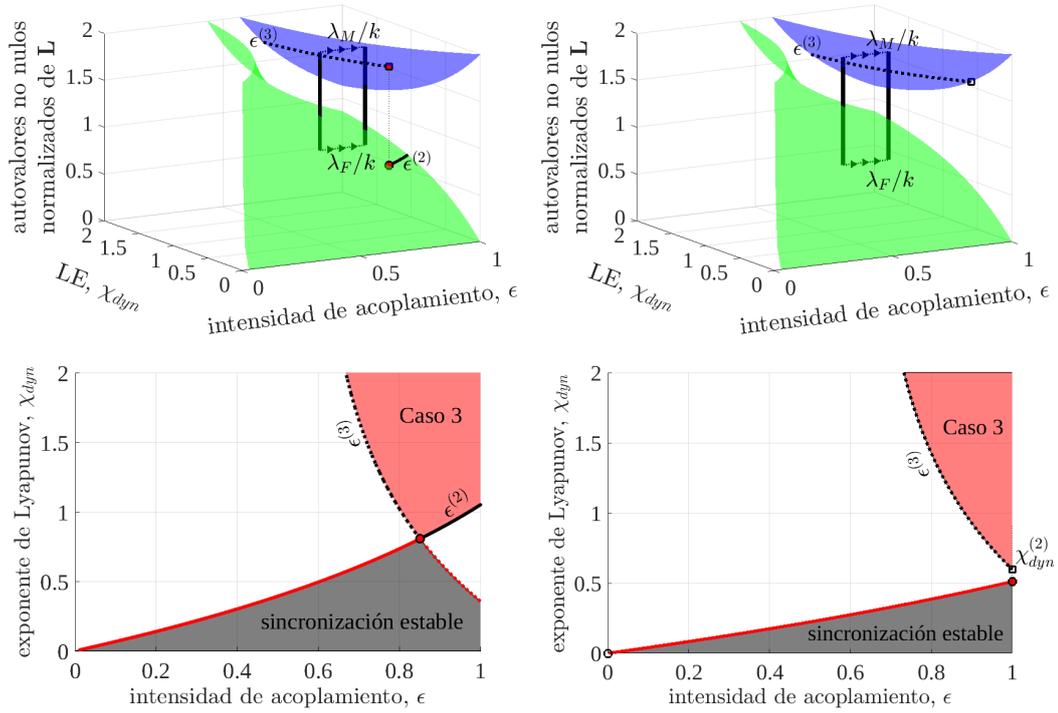


Figura 3.10: Escenario de Caso 3 para el cambio en la cantidad de LE positivos. En los paneles superiores se muestra el traslado del espectro no nulo de la Laplaciana para una red genérica, con $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$ (panel izquierdo), y $\lambda_F/k + \lambda_M/k \leq 2$ (panel derecho). Al aumentar ϵ , autovalores que se encuentran por debajo de la superficie \mathcal{S}_F ingresan en la región entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , y autovalores que se encuentran entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , se mueven a la región por arriba de \mathcal{S}_M . Por lo tanto LE positivos se hacen negativos, mientras que también LE negativos se hacen positivos. La curva negra continua en el panel izquierdo corresponde a $\epsilon^{(2)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k}\right)^{-1}$, y la línea punteada negra a $\epsilon^{(3)} = [1 + \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_M}{k}\right)^{-1}$. Los símbolos rellenos corresponden a $\chi_{dyn}^{max} = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_F}{\lambda_M}\right)$, y el cuadrado vacío a $\chi_{dyn}^{(2)} = -\log \left[1 - \frac{\lambda_M}{k}\right]$. En los paneles inferiores se muestra la proyección de las curvas que delimitan la región de este caso, señalada en color rojo.

3.4.4. Frontera del Caso 3: los exponentes de Lyapunov positivos y negativos cambian de signo al aumentar el acoplamiento

El Caso 3 corresponde a cuando el espectro posee regiones tanto por debajo de \mathcal{S}_F , encima de \mathcal{S}_M , y entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , como se muestra en la Fig. 3.10. Al aumentar ϵ , puede ocurrir que tanto LE que eran positivos se hagan negativos, como que LE negativos se vuelvan positivos. Esto sucede ya que, simultánea-

mente, autovalores que se encuentra por debajo de la superficie \mathcal{S}_F ingresan en la región entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , y autovalores que se encuentran entre \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , se mueven a la región por arriba de \mathcal{S}_M .

Este caso ocurre siempre que $\chi_{dyn} \geq \chi_{dyn}^{max}$. Si $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$ (paneles izquierdos de la Fig. 3.10), la región que corresponde a Caso 3 se da para $\epsilon \in (\epsilon^{(3)}, \min\{\epsilon^{(2)}, 1\})$ y $\chi_{dyn} \geq \chi_{dyn}^{max}$. Si $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$ (paneles derechos de la Fig. 3.10), la región se da para $\epsilon \in (\epsilon^{(3)}, 1]$ y $\chi_{dyn} \geq \chi_{dyn}^{(2)}$.

3.4.5. Ubicación de los diferentes casos en el espacio de parámetros al aumentar el acoplamiento

En la Fig. 3.11 se muestra la ubicación en el espacio de parámetros de los diferentes casos para el cambio en el número de LE positivos al aumentar la intensidad de acoplamiento. Dada las dos clases de redes regulares posibles, las cuales corresponden a $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$ (panel izquierdo) o $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$ (panel derecho), se pueden observar en la Fig. 3.11 las 4 situaciones donde la sincronización es inestable en el espacio de parámetros (identificadas con diferentes colores), cuyos límite corresponden a las curvas $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$, y $\epsilon^{(c)}$.

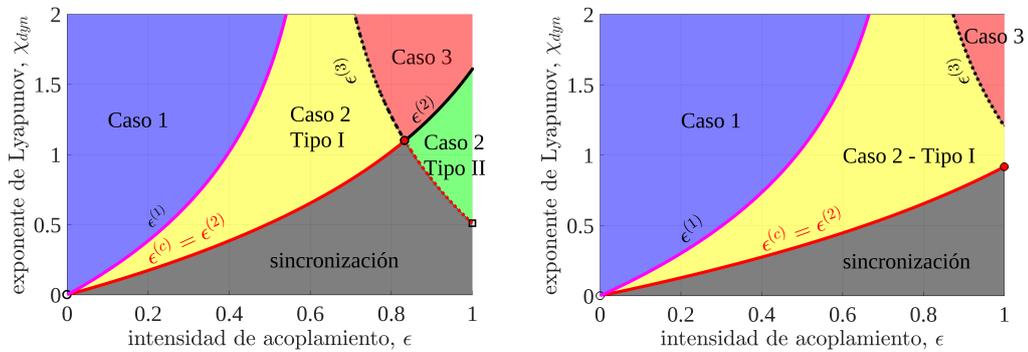


Figura 3.11: Esquema de la ubicación en el espacio de parámetros de los diferentes casos del cambio del número de LE positivos. En el panel izquierdo se muestran las regiones en el espacio paramétrico para los diferentes posibles casos en el cambio del número de LE positivos para redes donde $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$, mientras que en el panel derecho corresponde a redes donde $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$. En azul corresponde a la región de Caso 1, en amarillo a Caso 2 – Tipo I, en verde a Caso 2 – Tipo II, y en rojo a Caso 3. La región gris corresponde a la sincronización completa linealmente estable, i.e., región no-extensiva. Además también se muestran la curvas correspondientes a $\epsilon^{(1)}$ (línea magenta continua), $\epsilon^{(2)}$ (línea negra continua), y $\epsilon^{(3)}$ (línea punteada). Cuando $\epsilon^{(2)}$ o $\epsilon^{(3)}$ coinciden con las curvas críticas de la Fig. 3.1, en particular con $\epsilon^{(c)}$, se indica en color rojo.

3.5. Cálculo de la tasa de entropía a partir de los exponentes de Lyapunov para topologías específicas de redes cíclicas

En esta sección se presentan los cálculos de las tasas de entropía para sistemas de mapas caóticos idénticos, con Jacobiana constante, acoplados en dos topologías de redes cíclicas, la red completa ($\mathcal{C}_N(N-1)$) y el anillo (o 2-ciclo, $\mathcal{C}_N(2)$), como función del tamaño de la red, N , y la intensidad de acoplamiento, ϵ . A partir de estos cálculos, se analiza las condiciones bajo las cuales el sistema es extensivo. La tasa de entropía, h , es determinada a partir de los exponentes de Lyapunov (LE), utilizando la identidad de Pesin, $h = \sum_{\chi_i > 0} \chi_i$ (Ec. (2.47)). Esta identidad requiere conocer qué LE son positivos, y para esto, se recurre a los diferentes casos discutidos en las Secs. 3.4.1-3.4.4.

3.5.1. Resultados para la red completa

La red completa, que corresponde un caso particular de k -ciclos con $k = N - 1$, tiene autovalores (Ec. (3.7)) $\lambda_0 = 0$ (como siempre) y $\lambda_n = N \forall n > 0$. Entonces el espectro exponentes de Lyapunov (LE) es

$$\begin{cases} \chi_0 = \chi_{dyn} \\ \chi_n = \chi_{dyn} + \log \left| 1 - \epsilon \frac{N}{N-1} \right| \text{ para } n > 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

También, como ya se mencionó, $\chi_{dyn}^{max} = +\infty$, lo que implica que el sistema puede sincronizar cualquier caoticidad. Por lo tanto, la intensidad crítica de acoplamiento (Ec. (3.5)) está definida para todo $\chi_{dyn} > 0$: $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{N-1}{N} \right)$. Fuera de la región de sincronización, $\epsilon < \epsilon^{(c)}$, no es necesario el valor absoluto en la Ec. (3.31).

Debido a que todos los LE son iguales para $n > 0$, y asumiendo $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$ o $\epsilon < \epsilon^{(c)}$, entonces todos los LE son positivos (Caso 1), por lo tanto todos son incluidos en la suma de la identidad de Pesin (Ec. (2.47)). Entonces,

$$\begin{aligned} h &= \sum_{\chi_i > 0} \chi_i = \chi_{dyn} + (N-1) \left(\chi_{dyn} + \log \left[1 - \epsilon \frac{N}{N-1} \right] \right) \\ &= N\chi_{dyn} + (N-1) \log \left[1 - \epsilon \frac{N}{N-1} \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde el primer término es extensivo, mientras que el segundo puede ser extensivo con una apropiada elección de la intensidad de acoplamiento como función

del tamaño del sistema, $\epsilon(N)$.

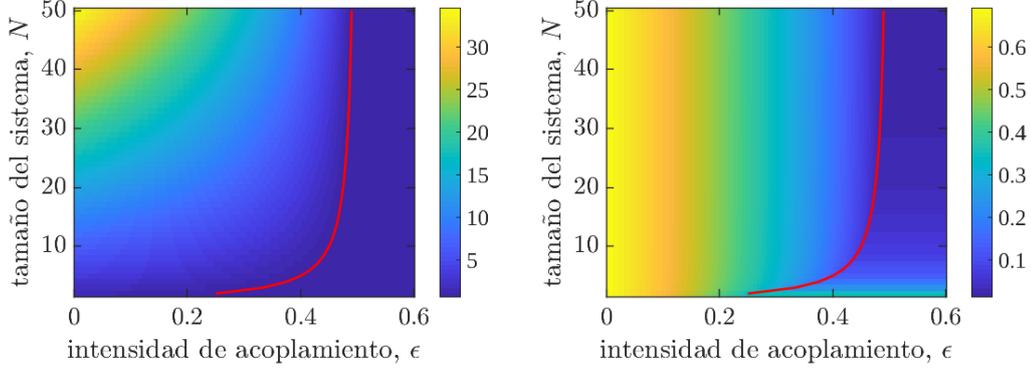


Figura 3.12: Tasa de entropía, h , y tasa de entropía específica, η , para la red completa. En el panel izquierdo se muestra la tasa de entropía, h , calculada a partir de la identidad de Pesin, $h = \sum_{i: \chi_i > 0} \chi_i$, para una red de mapas con $\chi_{dyn} = \log(2)$. En el panel derecho se muestra la correspondiente tasa de entropía específica, $\eta = h/N$. En ambos paneles, la línea roja corresponde a la intensidad de acoplamiento crítica, $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k}\right)^{-1}$, que delimita la región de sincronización linealmente estable.

Por ejemplo, en el caso de mapas débilmente acoplados, $\epsilon \rightarrow 0$, el segundo término desaparece y el mapa es extensivo. Esto coincide con los resultados presentados en Araujo y Baptista, 2019. También, en el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$, el argumento del logaritmo es constante, por lo que h es extensiva.

Para ϵ no nulo y en redes de tamaño finito, para que h sea extensiva se busca que

$$(N - 1) \log \left[1 - \epsilon \frac{N}{N - 1} \right] = CN,$$

con C una constante positiva. Entonces

$$\epsilon(N) = \frac{N - 1}{N} \left[1 - \exp \left(C \frac{N}{N - 1} \right) \right], \quad (3.33)$$

es la intensidad de acoplamiento (como función de N) que mantiene la extensividad al variar el tamaño del sistema. La constante C identifica la solución particular para cada sistema. Para un sistema dado, es decir, un red de tamaño N y intensidad de acoplamiento ϵ , que se desea crecer o contraer extensivamente, se obtiene C a partir de Ec. (3.33). También se puede fijar el valor de C en relación con el valor de $\epsilon(N)$ en el límite $N \rightarrow \infty$, esto es,

$\epsilon_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon(N) = 1 - \exp(C)$, entonces $C = \log[1 - \epsilon_\infty]$. Por lo tanto,

$$\epsilon(N) = \frac{N-1}{N} \left[1 - (1 - \epsilon_\infty)^{\frac{N}{N-1}} \right]. \quad (3.34)$$

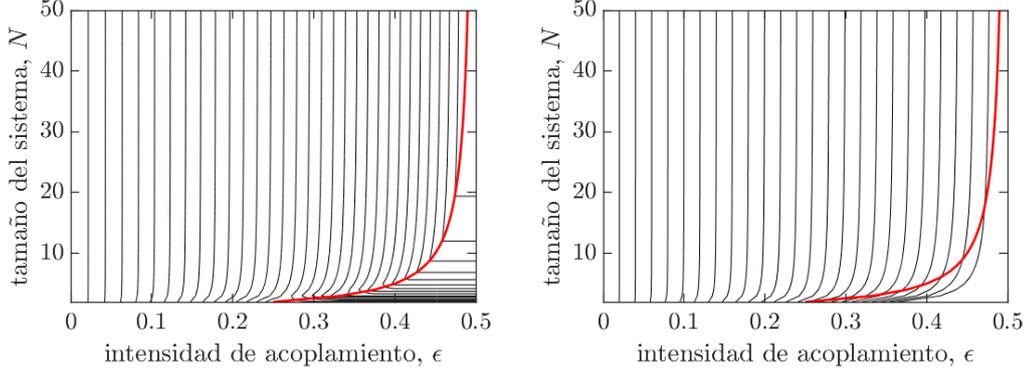


Figura 3.13: Curvas de tasa entropía específica constante para la red completa. En el panel izquierdo se muestran las curvas de nivel para la tasa de entropía específica calculadas a partir del panel derecho de la Fig. 3.12. En el panel derecho se muestra la reconstrucción de estas curvas de tasa de entropía constante a partir de la expresión de la $\epsilon(N) = \frac{N-1}{N} \left[1 - (1 - \epsilon_\infty)^{\frac{N}{N-1}} \right]$. La línea roja corresponde a la intensidad de acoplamiento crítica, $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k} \right)^{-1}$, que delimita la región de sincronización linealmente estable.

En la Fig. 3.12 se muestra la tasa de entropía (panel izquierdo) calculada a partir de la identidad de Pesin (Ec. (2.47)) sobre el espectro de LE de la Ec. (3.31) y tomando $\chi_{dyn} = \log(2)$ (debido a la hipótesis de Jacobiana constante esto correspondería, por ejemplo, al mapa shift) y su correspondiente entropía específica (panel derecho), $\eta = h/N$ (Ec. (2.48)). La línea roja (en ambos paneles), que corresponde a la intensidad de acoplamiento crítica, $\epsilon^{(c)}$ (Ec. (3.5)), delimita por izquierda a la región de sincronización linealmente estable, donde el sistema es no extensivo. Se observa que esta región también corresponde al mínimo de h .

En la Fig. 3.13 se muestran las curvas de η constante correspondientes a curvas sobre las cuales se modifica el tamaño del sistema extensivamente. En el panel izquierdo las curvas se obtienen a partir de las curvas de nivel del panel derecho de la Fig. 3.12, mientras que en el panel derecho las curvas se obtienen a partir de la Ec. (3.34). Se observa que las curvas de tasa de entropía constante coinciden fuera de la región de sincronización estable.

3.5.2. Resultados para el 2-ciclo

En este caso, donde cada nodo está conectado a sus dos vecinos más próximos, el espectro de autovalores de la Laplaciana sigue la forma de un seno cuadrado. Explícitamente:

$$\lambda_n = 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right), \quad (3.35)$$

para $n > 0$, y $\lambda_0 = 0$ como siempre. Por lo tanto los LE son

$$\begin{cases} \chi_0 = \chi_{dyn} \\ \chi_n = \chi_{dyn} + \log\left|1 - 2\epsilon \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right| \text{ para } n > 0. \end{cases}$$

En esta topología puede mostrarse que $\chi_{dyn}^{max} \rightarrow 0$ cuando $N \gg 1$, lo que significa que mapas apenas caóticos no pueden sincronizarse establemente. Esto implica que la región no-extensiva (de sincronización estable) ocupa una región muy pequeña del espacio de parámetros. Específicamente, la intensidad de acoplamiento crítica que delimita esta región es

$$\epsilon^{(c)} = \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{2 \sin^2(\pi/N)}, \quad (3.36)$$

condicionado a que $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max} = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{4 \sin^2(\pi/N)}{\lambda_M}\right)$, donde $\lambda_M = 2$ si N par. Si N impar entonces el autovalor λ_M corresponde a la Ec.(3.9).

Por ejemplo, para el caso de un mapa con LE $\chi_{dyn} = \log(2)$ (como el mapa shift), evaluando la Ec. (3.36) en $\epsilon^{(c)} > 1$ se obtiene que para $N > 6$ no existe región de sincronización estable. También se verifica que para $N < 6$, $\chi_{dyn}^{max} < \log(2)$.

A la hora de calcular la tasa de entropía, h , esta topología presenta una mayor dificultad, ya que el número de LE que se incluyen en la suma de la identidad de Pesin depende de la región del espacio de parámetros donde se calcula. Además, esta topología presenta tres diferentes escenarios en el cambio del número de LE positivos, P : Caso 1, Caso 2 – Tipo I, y Caso 3. Se supondrá, de aquí en más que se trata de una red con N par, de esta manera el modo que corresponde a λ_M es $n = N/2$ (que coincide también en el límite termodinámico), y es no degenerado. Para un caso de una red con N impar, λ_M debe obtenerse a partir de la Ec.(3.9).

En el caso en que $\epsilon \rightarrow 0$ (para χ_{dyn} finito) corresponde a una región de

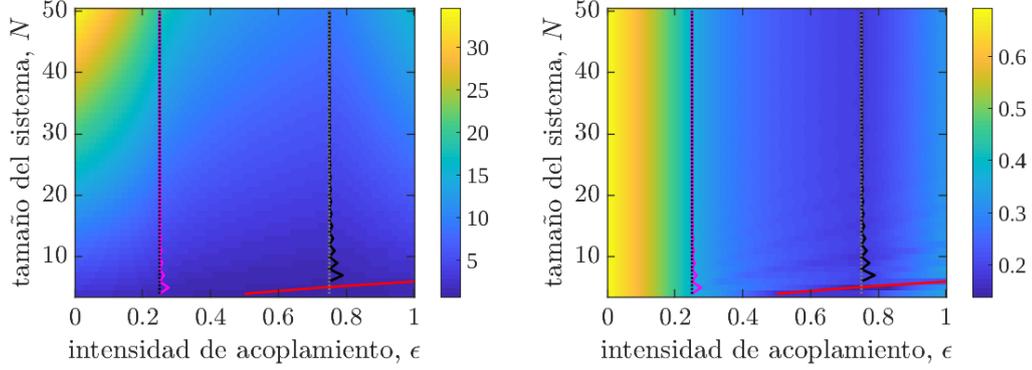


Figura 3.14: Tasa de entropía, h , y tasa de entropía específica, η , para la red anillo. En el panel izquierdo se muestra la tasa de entropía, h , calculada a partir de la identidad de Pesin, $h = \sum_{i: \chi_i > 0} \chi_i$, para una red de mapas con $\chi_{dyn} = \log(2)$. En el panel derecho se muestra la correspondiente tasa de entropía específica, $\eta = h/N$. En ambos paneles, la línea roja corresponde a la intensidad de acoplamiento crítica, $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k}\right)^{-1}$, que delimita la región de sincronización linealmente estable.

Caso 1. El límite de esta región, Ec. (3.27), corresponde a

$$\epsilon^{(1)} = \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{2}. \quad (3.37)$$

Para el caso en que $\chi_{dyn} = \log(2)$, entonces $\epsilon^{(1)} = 0.25$.

En la región $\epsilon \in [0, \epsilon^{(1)}]$, que corresponde a un Caso 1, todos los exponentes son positivos, por lo tanto

$$h = N\chi_{dyn} + \sum_{n=1}^{N-1} \log \left[1 - 2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right]. \quad (3.38)$$

Mediante una expansión de McLaurin del logaritmo se puede re-escribir la Ec. (3.38) como

$$h = N\chi_{dyn} - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left[2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right]^j \frac{1}{j}, \quad (3.39)$$

donde los primero tres términos de la expansión son sumas cerradas (Ver anexo: 2-ciclo):

$$h = N\chi_{dyn} - \epsilon N - \frac{3}{4}\epsilon^2 N - \frac{5}{6}\epsilon^3 N + O(\epsilon^4). \quad (3.40)$$

Obsérvese que, aunque los primeros términos de la expansión son negativos, la

Ec. (3.40) es positiva por construcción. Sea $F(\epsilon) = \epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2 + \frac{5}{6}\epsilon^3$, entonces

$$h = N(\chi_{dyn} - F(\epsilon)) - O(\epsilon^4),$$

donde el sistema es extensivo, a tercer orden en ϵ , mientras que $\chi_{dyn} > F(\epsilon)$.

En la región media, $\epsilon^{(1)} < \epsilon < \epsilon^{(3)}$, que corresponde aun Caso 2 – Tipo I, se tienen direcciones inestables que son estabilizadas a medida que se aumenta ϵ . En este caso, $\epsilon^{(3)}$ corresponde a

$$\epsilon^{(3)} = \frac{1 + \exp(-\chi_{dyn})}{2}, \quad (3.41)$$

que para el caso en que $\chi_{dyn} = \log(2)$ se tiene $\epsilon^{(3)} = 0.75$.

Esta topología presenta la ventaja de que los modos se estabilizan en orden decreciente, comenzando por $n = N/2$ (no degenerado), y en pares. Por lo tanto, las direcciones restantes inestables (LE positivo), corresponden a los modos $n \in [0, (P-1)/2]$, y sus degeneraciones, con P el número de LE positivos. La condición $\chi_{(P-1)/2} = \chi_{top}(\epsilon\lambda_{P/2}/k) + \chi_{dyn} = 0$ (a partir de la Ec. (2.54)) indica el colapso de la dirección correspondiente a $\chi_{(P-1)/2}$, que implica que todos los modos n y sus degeneraciones, con $\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$, son estables, por lo tanto se tiene P direcciones inestables. La condición puede invertirse para obtener el número de LE positivos, P ,

$$P(\epsilon, N) = 2 \left\lfloor \frac{N}{2\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{\epsilon} \right) \right\rfloor + 1, \quad (3.42)$$

donde el operador $\lfloor \cdot \rfloor$ corresponde a la función piso. El término del argumento de la función piso, corresponde a la curva donde ocurre el colapso de $\chi_{(P-1)/2}$, indicando que todavía existen $(P-1)/2$ modos transversales inestables. Cada uno de estos modos se encuentra doblemente degenerado, de ahí el factor 2. Por lo tanto, todo este sumando corresponde a los autovalores de la laplaciana que se encuentran por debajo de la superficie \mathcal{S}_F , sin contar el modo $n = 0$, que es siempre positivo por lo tanto debe agregarse aparte.

Entonces, para esta región se obtiene

$$h(P) = P\chi_{dyn} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{P-1}{2}} \log \left| 1 - 2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right|, \quad (3.43)$$

una expresión que depende de P , Ec. (3.42). Esto implica que la validez de

la Ec. (3.43), para cada P , está limitada a la región donde se tiene P LE positivos. Esto hace que la construcción del caso general sea complicada, ya que requiere pegar varias soluciones para cubrir una porción significativa del espacio paramétrico.

Por otro lado, en el límite termodinámico se puede substituir la sumatoria en la Ec. (3.43) por una integral,

$$h(P) = P\chi_{dyn} + 2 \int_0^{x_{max}} \log |1 - 2\epsilon \sin^2(x)| dx, \quad (3.44)$$

con $x_{max} = \frac{\pi(P^*-1)}{2}$, $P^* \in [P, P+1)$, y P de acuerdo con Eq. (3.42). Asumiendo que P^* sigue una expresión similar a Ec. (3.42), pero sin función piso, entonces P^* es una cantidad extensiva, lo que implica que x_{max} no depende de N , entonces h también es extensiva en esta región.

Finalmente, en la región $\epsilon \in (\epsilon^{(3)}, 1]$ (suponiendo $\chi_{dyn} > \chi_{dyn}^{max}$), que corresponde a un Caso 3, ocurre tanto que direcciones inestables se vuelven estables, como que direcciones estables se vuelven inestables. Esto se debe a que los LE positivos se corresponden con autovalores que se ubican por debajo de la superficie \mathcal{S}_F , y por encima de \mathcal{S}_M , respectivamente. En este caso, por una lado, se suma el espectro de LE que se encuentra por debajo de \mathcal{S}_F (una contribución similar a la Ec. (3.43)), y por otro lado, se suma el espectro de LE por encima de \mathcal{S}_M . Por lo tanto, resulta útil escribir el número de LE positivos, P , como

$$P = P_1 + P_2 + 1, \quad (3.45)$$

donde $P_1 = 2 \left\lfloor \frac{N}{2\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\chi_{dyn})}{\epsilon} \right) \right\rfloor$ (igual al término que aparece en la Ec. (3.42)) corresponde a la cantidad de autovalores que se encuentran por debajo de \mathcal{S}_F y $P_2 = (N - 1) - 2 \left\lfloor \frac{N}{2\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 + \exp(-\chi_{dyn})}{\epsilon} \right) \right\rfloor$ corresponde a la cantidad de autovalores que se encuentran por encima de \mathcal{S}_M (ya que $2 \left\lfloor \frac{N}{2\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{1 + \exp(-\chi_{dyn})}{\epsilon} \right) \right\rfloor$ corresponde a la cantidad de autovalores que se encuentran por debajo de \mathcal{S}_M). Finalmente, como P_1 y P_2 no incluyen el autovalor λ_0 , debe agregarse 1 para incluir el modo $n = 0$.

En este caso,

$$h(P) = P\chi_{dyn} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{P_1}{2}} \log \left| 1 - 2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right| + 2 \sum_{n=P_2/2}^{\frac{N}{2}} \log \left| 1 - 2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right|, \quad (3.46)$$

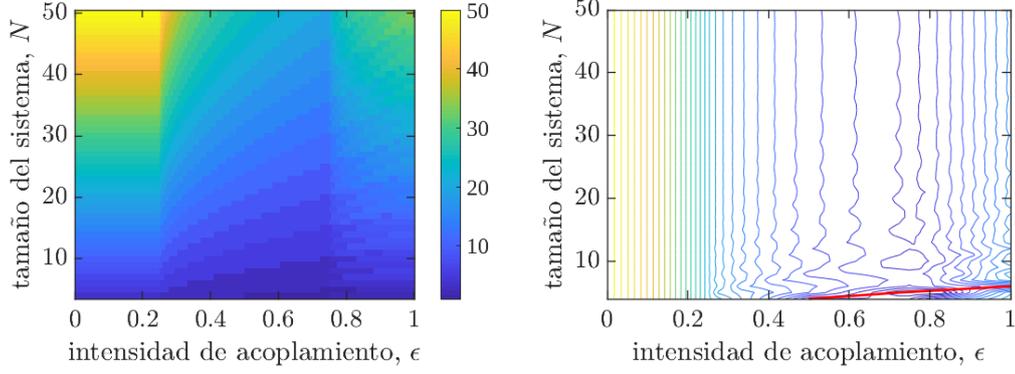


Figura 3.15: Número de LE positivos, P , y curvas de nivel para la tasa de entropía específica, η , para la red anillo. En el panel izquierdo se muestra el número de exponentes de Lyapunov positivos, P , para una red de mapas con $\chi_{dyn} = \log(2)$. En el panel derecho se muestra la correspondiente tasa de entropía específica, $\eta = h/N$. La línea roja corresponde a la intensidad de acoplamiento crítica, $\epsilon^{(c)} = [1 - \exp(-\chi_{dyn})] \left(\frac{\lambda_F}{k}\right)^{-1}$, que delimita la región de sincronización linealmente estable.

donde las mismas consideraciones de validez que se aplican a la Ec. (3.43) se aplican aquí también. De igual manera, pueden substituirse las sumas por integrales en el límite termodinámico:

$$h(P) = P\chi_{dyn} + 2 \int_0^{x_{max}} \log |1 - 2\epsilon \sin^2(x)| dx + 2 \int_{x_{min}}^{\pi/2} \log |1 - 2\epsilon \sin^2(x)| dx, \quad (3.47)$$

con $x_{max} = \frac{\pi}{N} \frac{P_1^*}{2}$, $P_1^* \in [P_1, P_1 + 1)$, $x_{min} = \frac{\pi}{N} \frac{P_2^*}{2}$, $P_2^* \in [P_2, P_2 + 1)$, y P de acuerdo con Eq. (3.45). Nuevamente, siguiendo la discusión que se hizo para Ec. (3.43), puede verse que tanto x_{min} como x_{max} no dependen de N , por lo tanto h también es extensiva en esta región.

Capítulo 4

Discusión de resultados

La función maestra de la estabilidad (MSF, Pecora y Carroll, 1998) permite determinar la estabilidad de la solución síncrona de un sistema de mapas idénticas acoplados en una red, logrando separar la dinámica de los mapas de las propiedades espectrales de la estructura de la red de acoplamientos (Arenas et al. 2008). En el caso general, el cálculo de la estabilidad del estado de sincronización completa a través de la MSF se realiza mediante aproximaciones, teoría de perturbaciones, o cálculo numérico, ya que en general, no se tienen expresiones analíticas para el espectro de autovalores de la red o para los exponentes de Lyapunov (LE) de los mapas. Además, la MSF se utiliza generalmente para determinar la capacidad de sincronizar del sistema a partir del cociente de autovalores λ_M/λ_F (Barahona y Pecora, 2002; Hong et al. 2004; Nishikawa et al. 2003), donde λ_F es el mínimo autovalor no nulo de la Laplaciana de la red (llamado autovalor de Fiedler) y λ_M el máximo. Por el contrario, en este trabajo de tesis se derivan expresiones analíticas exactas, que no solo permiten determinar la capacidad de sincronizar de los sistemas estudiados, sino que también permiten estudiar cómo esta capacidad depende de los diferentes parámetros de control del sistema, tales como el tamaño de la red, la cantidad de enlaces, la intensidad de acoplamiento, o la caoticidad de los mapas (determinada por sus LE).

A lo largo de la tesis se ha hecho énfasis en que las derivaciones son genéricas y válidas para cualquier red regular: redes donde todos los nodos poseen el mismo número de vecinos (cada mapa está acoplado con igual número de mapas). Además, siempre que fue posible, se obtuvieron expresiones cerradas no trascendentales para los parámetros críticos que determinan la estabilidad

del estado de sincronización o la tasa de entropía de N mapas acoplados. Para ilustrar la aplicación de la teoría derivada en las expresiones genéricas, se incluyeron cálculos específicos para diferentes redes cíclicas (las cuales conforman una clase particular de red regular), donde el espectro de autovalores de la Laplaciana posee expresiones conocidas en función de bases de Fourier.

4.1. Redes regulares de mapas acoplados con sincronización linealmente estable

El primer resultado presentado en esta tesis refiere al desdoblamiento de las condiciones de estabilidad de la variedad de sincronización (Ec. (3.1)). Este resultado, ya ha sido introducido en otros trabajos, como por ejemplo en Jost y Joy, 2001, donde también se analizan los acoplamientos críticos (mínimos y máximos) que permiten la sincronización estable del sistema. En esta tesis se extiende el análisis de las propiedades de la red y los parámetros que permiten un estado síncrono linealmente estable más allá del trabajo de Jost y Joy, 2001, incluyendo expresiones analíticas generales para el acoplamiento crítico mínimo necesario para mantener un estado síncrono, el exponente de Lyapunov máximo de los mapas aislados que permiten una sincronización completa y la densidad de enlaces necesaria para que exista la sincronía.

Además, y de manera original, se interpretan las condiciones de estabilidad determinadas por la MSF como dos superficies, \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M , que generan condiciones sobre los autovalores de la Laplaciana de la red (Ec. (3.1)). Estas superficies dependen de 2 parámetros de control que son independientes del tamaño del sistema: la intensidad del acoplamiento entre los mapas, ϵ , y el exponente de Lyapunov de un mapa aislado, χ_{dyn} . Esta interpretación permite visualizar todos los parámetros que intervienen en la estabilidad de la sincronización en un gráfico tridimensional (Fig. 3.1), donde al incluir los autovalores de la Laplaciana de la red (que dependen del tamaño del sistema y conforman un segmento vertical que puede atravesar las superficies) se establecen las fronteras de la estabilidad de la sincronización.

Específicamente, redes regulares diferentes poseen autovalores de sus Laplacianas que equivalen a distintos tamaños y posiciones del segmento vertical en el gráfico tridimensional, mientras que ϵ y χ_{dyn} determinan la posición horizontal del segmento. Esta posición cambia cuando se modifican ϵ o χ_{dyn} y

entonces los autovalores de una red regular particular pueden cruzar las superficies \mathcal{S}_F y/o \mathcal{S}_M . Como resultado general, se encuentra que la sincronización es localmente estable si el segmento de autovalores se encuentra en la región comprendida entre las superficies.

4.1.1. Condiciones generales de estabilidad

Las fronteras de la estabilidad de la variedad de sincronización son determinadas por las superficies \mathcal{S}_F o \mathcal{S}_M , lo cual implica que la estabilidad local de una red regular de acoplamientos puede perderse cuando al modificar ϵ o χ_{dyn} el espectro de autovalores atraviesa \mathcal{S}_F o \mathcal{S}_M . En esta tesis se muestra que existen dos clases de redes regulares acorde a la estabilidad de sus variedades de sincronización. Esta clasificación ya ha sido reconocida en otros trabajos (Arenas et al. 2008), pero aquí se proporciona un criterio explícito para su clasificación que está basado en los autovalores extremos de la Laplaciana de la red normalizados por el grado.

Por un lado, se muestra que existe un conjunto de redes regulares en la que la estabilidad se pierde únicamente violando la condición impuesta por \mathcal{S}_F . Estas redes cumplen que $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, siendo λ_F [λ_M] el autovalor de Fiedler [máximo] de la Laplaciana y k el grado (número de vecinos). Por otro lado, existe otro conjunto de redes regulares en la que la estabilidad se pierde al violar la condición impuesta por \mathcal{S}_M , las cumplen que $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$.

En el caso de las redes regulares donde $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, se encuentra que la máxima magnitud del exponente Lyapunov del mapa aislado que puede ser sincronizado establemente, χ_{dyn}^{max} , depende únicamente del autovalor λ_F (Ec. (3.3)). Además, debido a la forma de \mathcal{S}_F (siendo que $\frac{d\mathcal{S}_F}{d\epsilon} < 0$), el aumentar ϵ favorece la estabilidad, por lo que χ_{dyn}^{max} se da para $\epsilon = 1$ (la máxima intensidad de acoplamiento posible). Por el contrario, disminuir ϵ eventualmente desestabiliza la sincronización, por lo que existe una curva de acoplamiento crítico mínimo como función de χ_{dyn} , $\epsilon^{(c)}$ (Ec. (3.5)), tal que si $\epsilon \in (0, \epsilon^{(c)})$ se pierde la estabilidad de la variedad de sincronización.

En el caso de las redes regulares donde $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$, se encuentra que χ_{dyn}^{max} depende de λ_M y λ_F (Ec. (3.2)). La superficie \mathcal{S}_M también verifica que $\frac{d\mathcal{S}_M}{d\epsilon} < 0$, pero como se trata de una cota superior para el espectro de autovalores, aumentar ϵ en esta clase de redes no siempre favorece la estabilidad. Esto implica que hay una curva crítica de acoplamiento máximo (línea roja

punteada en el panel izquierdo de la Fig. 3.1), tal que para valores mayores de ϵ o χ_{dyn} también se pierde la estabilidad de la sincronización. Para $\chi_{dyn} \leq \chi_{dyn}^{max}$ esta curva coincide con la curva de nivel que en la Sec. 3.4 se nota como $\epsilon^{(3)}$ (Ec. (3.28)) y que corresponde a la intersección de λ_M con \mathcal{S}_M .

4.1.2. Condiciones de estabilidad específicas para redes cíclicas

La primera topología cíclica en ser analizada corresponde a los k -ciclos: Sec. 3.2.1. En esta topología cada nodo está conectado a los k vecinos más cercanos y k es par. Para estas redes, se obtuvo una expresión cerrada para el espectro de autovalores de la Laplaciana (Ec. (3.7)) y se encontró que $\lambda_F = \lambda_1$ (Ec. (3.8)), donde $\lambda_F/k \rightarrow 1 - \text{sinc}(\pi \rho)$ en el límite termodinámico. Además, para el autovalor máximo se obtiene que $\lambda_M \approx \lambda_{\frac{3N}{2(k+1)}}$ (Ec. (3.9)), donde en el límite termodinámico se tiene $\lambda_M/k \rightarrow 1 + 2/3\pi > 1$.

Entonces, se encuentra que los k -ciclos con $2 < k < k_C$ cumple que $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, donde el valor de k_C es aquel que hace que $\lambda_F/k_C + \lambda_M/k_C = 2$. En el límite $N \rightarrow \infty$, se obtiene que $k_C \rightarrow N - 1$, por lo tanto, casi todas los k -ciclos verifican $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$. Visto de otra manera, en el límite termodinámico, solo dos k -ciclos pertenecen a las redes que verifican $\lambda_F/k + \lambda_M/k \geq 2$: el anillo ($k = 2$) y la red completa ($k = N - 1$).

La segunda topología cíclica analizada son las k -escaleras de Möbius: Sec. 3.2.2. Cuando se mencionan las escaleras de Möbius en la literatura, se hace referencia a una red cíclica con $k = 3$, la cual ha sido construida partiendo de un anillo de N nodos que se le han agregado $N/2$ enlaces (con N par) conectando nodos diametralmente opuestos (resultando en una red como la que se muestra en el panel izquierdo de la Fig. 3.4) (Pasotti, 2010). Esta red puede arreglarse en una configuración que se parece a una cinta de Möbius (panel derecho de la Fig. 3.4), dándole el nombre a la red. Aunque de menor mención en la literatura, el trabajo que introduce las escaleras de Möbius con $k = 3$ también lo hace para $k = 4$ (Guy y Harary, 1967), ambas como redes mínimamente no-planares (i.e., con un número de cruzamiento igual a 1).

Aunque ya existe una generalización de las escaleras de Möbius (Idrees et al. 2020), la generalización falla en ser regular y mínimamente no-planar. Por este motivo, en este trabajo se propone una nueva generalización de las escaleras de Möbius, las aquí llamadas k -escaleras de Möbius, que permite construir redes

cíclicas (por lo tanto regulares) con las propiedades de las escaleras de Möbius de $k = 3$ y 4 (Guy y Harary, 1967). La construcción que se presenta en la tesis es similar a la descrita para $k = 3$: se parte de una topología tipo anillo y se agregan enlaces conectando la región más lejana a cada nodo.

Para las k -escaleras de Möbius, cuando $7 \leq k < k_{\mathcal{M}}$ se obtiene que $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, donde $k_{\mathcal{M}}$ es aquel que verifica $\lambda_F/k_{\mathcal{M}} + \lambda_M/k_{\mathcal{M}} = 2$. En el límite termodinámico se obtiene que $k_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$, lo cual implica que en el límite (contrariamente a lo que pasaba con los k -ciclos) las k -escaleras de Möbius siempre cumplen que $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$. Esto tiene una consecuencia importante en los resultados derivados, ya que por ejemplo, se obtuvo que para $7 \leq k < k_{\mathcal{M}}$ y en el límite termodinámico $\chi_{dyn}^{max} \simeq -\log[\text{sinc}(2\pi\rho)]$ (Ec. (3.22)). Aunque este resultado puede ser útil para ser utilizado como una aproximación a redes de tamaño finito, en el límite termodinámico estricto su región de validez es nula.

Como observación final sobre las topologías específicas, se tiene que ambas convergen a la red completa en el límite $k \rightarrow N - 1$ por la manera en que son construidas. Cualitativamente, esto explica porqué ambas verifican que $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$ cuando $k \rightarrow N - 1$ (para redes finitas), y que tanto λ_F y λ_M convergen al mismo punto cuando $k = N - 1$ en ambos paneles de la Fig. 3.6.

4.2. Extensividad en redes regulares de mapas de Jacobiana constante

La segunda mitad de este trabajo consistió en obtener la tasa de entropía para los mapas unidimensionales acoplados en redes regulares mediante la identidad de Pesin, y verificar si se cumple que son extensivos. Esto es, se buscó verificar que $0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{h}{N} < \infty$, con h la tasa de entropía y N el tamaño del sistema. En particular, se presentó un análisis similar al realizado en Antonopoulos y Baptista, 2017 y Araujo y Baptista, 2019. En contraste con estos trabajos que analizan la extensividad en redes multiplex, esta tesis se centra en estudiar redes regulares, que usualmente forman los bloques que constituyen las redes multiplex. En general, se encuentran coincidencias y discrepancias entre los resultados de esta tesis y aquellos para redes multiplex.

En primer lugar, aquí se muestra de que existen cuatro posibles escenarios para la variación de la cantidad de LE positivos, y que los mismos están

determinados por la posición del espectro de autovalores de la Laplaciana en relación a las superficies limitantes \mathcal{S}_F y \mathcal{S}_M . Tres de los casos aquí presentados se reducen a uno de los casos que se presentan en Antonopoulos y Baptista, 2017 y Araujo y Baptista, 2019 para redes multiplex; por lo que en esta tesis se obtiene mayor detalle en el análisis. En particular, el estudio de las fronteras y distribución de las regiones para los 4 casos se realizó considerando únicamente un aumento en la intensidad del acoplamiento, manteniendo los otros parámetros del sistema constantes. Esto permitió mostrar que en los sistemas analizados y fuera de la región de sincronización estable, siempre es posible construir una curva de la intensidad de acoplamiento como función del tamaño de la red, $\epsilon(N)$, sobre la cual la tasa de entropía específica es constante.

En segunda instancia, se muestra que fuera de la región de sincronización linealmente estable, la red completa es siempre extensiva. Este resultado no solo contrasta con los resultados para las redes multiplex, donde se establece que es necesario que $\epsilon \propto 1/N$ (Antonopoulos y Baptista, 2017) o $\epsilon \ll 1/N$ (Araujo y Baptista, 2019) para tener un sistema extensivo, sino que también se menciona en la literatura que el comportamiento extensivo no puede ocurrir en sistemas globalmente acoplados (Takeuchi et al. 2009). De todas formas, el comportamiento extensivo en sistemas globalmente acoplados ya ha sido observado (Takeuchi et al. 2011).

Finalmente, para la red anillo, se encuentra que es extensiva para todo el rango de la intensidad de acoplamiento $\epsilon \in (0, 1]$, algo que coincide con los resultados presentados en Antonopoulos y Baptista, 2017. Esto también se encuentra en concordancia con que es aceptado que sistemas con interacciones de corto alcance son extensivos (Ruelle, 1982).

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis complementa el entendimiento general del fenómeno de sincronización en redes de mapas acoplados, y provee derivaciones matemáticas detalladas sobre la estabilidad y la extensividad del sistema para redes regulares. En particular, se extienden las condiciones de estabilidad lineal de la variedad de sincronización completa derivadas en Jost y Joy, 2001, para incluir expresiones cerradas para los parámetros críticos e incluir una novedosa interpretación gráfica del problema. También se presenta una nueva generalización de la escalera de Möbius a k -escaleras de Möbius. Esta generalización, no sólo presenta la ventaja de ser cíclica y poseer un límite termodinámico finito, sino que también explica la relación de los resultados numéricos de k -ciclos y escaleras de Möbius en Barahona y Pecora, 2002.

Otros trabajos han derivado diferentes propiedades del subespacio de sincronización para redes de mapas acoplados y analizado redes con heterogeneidades en la distribución de grado. Por ejemplo, se ha reportado que los mapas caóticos lineales a trazos acoplados en redes de tipo anillo, aumentan su entropía para acoplamientos fuertes (Batista y Viana, 2002). Si conexiones aleatorias son agregadas al anillo (i.e., modelo Watts-Strogatz, M. E. Newman, 2000; M. E. Newman y Watts, 1999a, 1999b; Watts y Strogatz, 1998), entonces la caoticidad del sistema decrece al aumentar el número de estas conexiones aleatorias (dos Santos et al. 2007), lo cual corresponde a la emergencia de sincronía. Si en lugar de conexiones aleatorias se agregan interacciones de largo alcance, entonces el acoplamiento mínimo necesario para un estado síncrono estable es conocido (Anteneodo et al. 2003) (incluso para mapas no lineales), como también los tiempos del estado transitorio (de Souza Pinto et al. 2005).

En líneas generales, este trabajo de tesis ha consistido en el análisis de la dinámica de mapas unidimensionales, idénticos y acoplados de forma difusiva (de la manera propuesta por Kaneko, 1984, 1992) en redes regulares (redes en la que todos los nodos tienen la misma cantidad de vecinos). En particular, se presentan derivaciones analíticas de las condiciones que permiten alcanzar un estado de sincronización completa que es linealmente estable cuando los mapas son caóticos, así como también expresiones que permiten obtener la tasa de entropía para los casos en que el sistema posee una Jacobiana constante y los mapas no se encuentran sincronizados. Los resultados obtenidos para la estabilidad de la sincronización completa son derivados a partir de la función maestra de estabilidad, MSF (Pecora y Carroll, 1998), y en el caso de la entropía, son derivados a partir del formalismo de los exponentes de Lyapunov (LE) (Lyapunov, 1892) y la identidad de Pesin (Pesin, 1977).

Los resultados aquí presentados sobre la extensividad de las redes analizadas complementan también el entendimiento general sobre la dinámica de sistemas acoplados. En particular, se estudia en detalle las condiciones para las cuales redes anillo y redes completas son extensivas, un tema de relevancia ya que ambas topologías suelen utilizarse como los bloques fundamentales para la construcción en redes multiplex (Araujo y Baptista, 2019; M. S. Baptista et al. 2016). Para ambas redes, los resultados obtenidos en esta tesis coinciden con aquellos presentados en Araujo y Baptista, 2019 en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. También se obtiene que ambas redes son extensivas en el límite $N \rightarrow \infty$ para intensidades de acoplamiento menores a la intensidad crítica, $\epsilon < \epsilon^{(c)}$. Más aún, se muestra que es posible construir una función de la intensidad de acoplamiento en función del tamaño de la red, $\epsilon(N)$ (Ecs. 3.33 y 3.34), de forma que la tasa de entropía se mantenga proporcional al tamaño de la red N para cualquier $\epsilon < \epsilon^{(c)}$ y N .

Para construir la función $\epsilon(N)$ es necesario conocer cuáles LE son positivos, por lo que se presenta un estudio genérico de cómo se modifican el signo de los LE del sistema al modificar la intensidad de acoplamiento (Sec. 3.4). Se muestra que existen cuatro posibles escenarios en el cambio del número de LE positivos, los cuales complementan los dos escenarios ya reportados en la literatura (Antonopoulos y Baptista, 2017). Aunque tres de los escenarios aquí considerados se reducen a un único escenario en trabajos previos, la ventaja de trabajar con los nuevos casos propuestos pueden apreciarse en los resultados presentados en la topología anillo (Sec. 3.5.2). Aún más, las superficies limi-

tantes presentadas en el estudio de sincronización, resultan ser importantes también en el estudio de la extensividad, ya que la posición del espectro de autovalores respecto a estas superficie determina de qué caso se trata (Fig. 3.11).

Varias líneas de trabajo quedan abiertas al concluir esta tesis. Este trabajo ha considerado únicamente mapas unidimensionales, pero sus resultados podrían extenderse para mapas de mayor dimensión, pudiéndose estudiar si los puntos críticos pasan a depender de la variable por la cual los mapas se acoplan. Además, los resultados podrían generalizarse a redes con heterogeneidad en la distribución de grado mediante una análisis perturbativo, donde el orden cero correspondería a una red regular. Esto permitiría analizar, por ejemplo, redes de pequeño mundo, siempre y cuando la heterogeneidad en la distribución sea pequeña y no como en las redes libres de escala. Por otro lado, en los resultados sobre extensividad se han considerado algunas restricciones particulares. Por ejemplo, las regiones para los escenarios de cómo se modifica el signo de los exponentes de Lyapunov se estudiaron considerando únicamente variaciones en la intensidad de acoplamiento. El estudio podría repetirse considerando la variación de otro parámetro, como el exponente de Lyapunov del mapa aislado. Finalmente y a modo de ejemplo, se estudió la extensividad de las redes de anillo y completas, pero el estudio puede incluir otras topologías de redes regulares, tales como la propuesta k -escalera de Möbius.

Capítulo 6

Trabajos publicados

- Gancio, J., & Rubido, N. (2022). Critical parameters of the synchronization's stability for coupled maps in regular graphs. *Chaos, Solitons & Fractals*, 158, 112001.
 - **Resumen:** Trabajo que presenta las derivaciones de las Sec. 3.1 y 3.2 relativos a la estabilidad del subespacio de sincronización para mapas caóticos idénticos acoplados en redes regulares.
 - **Contribución J. Gancio:** Análisis formal, visualización de los resultados, escritura del manuscrito.
- Gancio, J., & Rubido, N. (2021). Community detection by resistance distance: automation and benchmark testing. In *International Conference on Complex Networks and Their Applications* (pp. 309-320). Springer, Cham.
 - **Resumen:** Trabajo donde se propone una mejora para un algoritmo de detecciones de comunidades en redes basado en la distancia resistiva. Se realiza una evaluación del desempeño del método sobre redes de referencia.
 - **Contribución J. Gancio:** Diseño del algoritmo, implementación numérica, escritura del manuscrito.
- Gutiérrez, C., Gancio, J., Cabeza, C., & Rubido, N. (2021). Finding the resistance distance and eigenvector centrality from the network's eigenvalues. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 569, 125751.
 - **Resumen:** Trabajo donde se propone una aproximación para la medida de distancia resistiva de la red y una expresión exacta para

el autovector central, basadas únicamente en los autovalores de la matriz Laplaciana.

- **Contribución J. Gancio:** Simulaciones numéricas.

Bibliografía

- Alligood, K. T., Sauer, T. D. y Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Corrected). Springer.
- Amritkar, R. y Gade, P. (1993). Wavelength doubling bifurcations in coupled map lattices. *Physical Review Letters*, 70(22), 3408.
- Anteneodo, C., Pinto, S. E. d. S., Batista, A. M. y Viana, R. L. (2003). Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Physical Review E*, 68(4), 045202.
- Antonopoulos, C. G. y Baptista, M. S. (2017). Maintaining extensivity in evolutionary multiplex networks. *Plos One*, 12(4), e0175389.
- Araujo, M. A. y Baptista, M. S. (2019). Extensivity in infinitely large multiplex networks. *Applied Network Science*, 4(1), 1-18.
- Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y. y Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93-153.
- Badii, R. y Politi, A. (1999). *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics* (Cambridge Nonlinear Science Series) (1st). Cambridge University Press.
- Baptista, M., Kakmeni, F. M., Del Magno, G. y Hussein, M. (2011). How complex a dynamical network can be? *Physics Letters A*, 375(10), 1309-1318.
- Baptista, M. S., Szmoski, R. M., Pereira, R. F. y Pinto, S. E. (2016). Chaotic, informational and synchronous behaviour of multiplex networks. *Scientific Reports*, 6(1), 1-9.
- Barabási, A.-L. y Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439), 509-512.
- Barahona, M. y Pecora, L. M. (2002). Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, 89(5), 054101.

- Basalto, N., Bellotti, R., De Carlo, F., Facchi, P. y Pascazio, S. (2005). Clustering stock market companies via chaotic map synchronization. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 345(1-2), 196-206.
- Batista, A. M. y Viana, R. L. (2002). Kolmogorov–Sinai entropy for locally coupled piecewise linear maps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 308(1-4), 125-134.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. y Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2), 1-101.
- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M. y Hwang, D.-U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5), 175-308.
- Bogachev, V. I. (2007). *Measure theory* (Vol. 1). Springer.
- Boltzmann, L. (1872). Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules [Reimpreso en The Kinetic Theory of Gases. July 2003, 262-349]. *Sitzungsberichte Akad. Wiss.*, 66, 275-370.
- Boltzmann, L. (1877). On the Relationship between the Second Fundamental Theorem of the Mechanical Theory of Heat and Probability Calculations Regarding the Conditions for Thermal Equilibrium [Traducido por Sharp K. y Matschinsky F., y reimpreso en Entropy. 2015; 17(4):1971-2009.]. *Sitzungsberichte Akad. Wiss.*, 76, 373-43.
- Brechtel, A., Gramlich, P., Ritterskamp, D., Drossel, B. y Gross, T. (2018). Master stability functions reveal diffusion-driven pattern formation in networks. *Physical Review E*, 97(3), 032307.
- Bromiley, P., Thacker, N. y Bouhova-Thacker, E. (2004). Shannon entropy, Renyi entropy, and information. *Statistics and Inf. Series (2004-004)*, 9, 10-42.
- Caby, T., Faranda, D., Mantica, G., Vaienti, S. y Yiou, P. (2019). Generalized dimensions, large deviations and the distribution of rare events. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 400, 132143.
- Chaté, H. y Manneville, P. (1988). Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 32(3), 409-422. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789\(88\)90065-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90065-6)
- Chavez, M., Hwang, D.-U., Amann, A., Hentschel, H. y Boccaletti, S. (2005). Synchronization is enhanced in weighted complex networks. *Physical Review Letters*, 94(21), 218701.

- Chua, L. O., Itoh, M., Kocarev, L. y Eckert, K. (1993). Chaos synchronization in Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 3(01), 93-108.
- Clausius, R. (1865). On various forms of the principal equations of mechanical theory. *Ann. Phys*, 201, 353-400.
- Cocho, G. y Martinez-Mekler, G. (1991). On a coupled map lattice formulation of the evolution of genetic sequences. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 51(1-3), 119-130.
- Cover, T. M. y Thomas, J. A. (1999). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons.
- Cropper, W. H. (1986). Rudolf Clausius and the road to entropy. *American journal of physics*, 54(12), 1068-1074.
- Das, S., Dock, C. B., Saiki, Y., Salgado-Flores, M., Sander, E., Wu, J. y Yorke, J. A. (2016). Measuring quasiperiodicity. *EPL (Europhysics Letters)*, 114(4), 40005.
- De Abreu, N. M. M. (2007). Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear algebra and its applications*, 423(1), 53-73.
- de San Roman, F., Boccaletti, S., Maza, D. y Mancini, H. (1998). Weak synchronization of chaotic coupled map lattices. *Physical Review Letters*, 81(17), 3639.
- de Souza Pinto, S. E., Lunardi, J. T., Saleh, A. M. y Batista, A. M. (2005). Some aspects of the synchronization in coupled maps. *Physical Review E*, 72(3), 037206.
- Diks, C. (1999). *Nonlinear time series analysis: methods and applications* (Vol. 4). World Scientific.
- Dörfler, F., Chertkov, M. y Bullo, F. (2013). Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(6), 2005-2010.
- Dos Santos, V., Borges, F. S., Iarosz, K. C., Caldas, I. L., Szezech, J. D., Viana, R. L., Baptista, M. S. y Batista, A. M. (2020). Basin of attraction for chimera states in a network of Rössler oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30(8), 083115.
- dos Santos, A., Woellner, C., Lopes, S., Batista, A. y Viana, R. (2007). Lyapunov spectrum of a lattice of chaotic systems with local and non-local couplings. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2), 702-710.

- Dunning-Davies, J. (1983). On the meaning of extensivity. *Physics Letters A*, *94*(8), 346-348.
- Earn, D. J., Levin, S. A. y Rohani, P. (2000). Coherence and conservation. *Science*, *290*(5495), 1360-1364.
- Egolf, D. A., Melnikov, I. V., Pesch, W. y Ecke, R. E. (2000). Mechanisms of extensive spatiotemporal chaos in Rayleigh–Bénard convection. *Nature*, *404*(6779), 733-736.
- Einsiedler, M. y Ward, T. (2013). Ergodic theory. *Springer*, *4*(4), 4-5.
- Érdi, P. (2008). *Complexity explained*. Springer.
- Feigenbaum, M. J. et al. (1983). Universal behavior in nonlinear systems. *Physica. D, Nonlinear Phenomena*, *7*(1-3), 16-39.
- Fiedler, M. (1973). Algebraic connectivity of graphs. *Physical Review Letters*, *23*(2), 298-305.
- Frederickson, P., Kaplan, J. L., Yorke, E. D. y Yorke, J. A. (1983). The Liapunov dimension of strange attractors. *Journal of Differential Equations*, *49*(2), 185-207.
- Fujisaka, H. y Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, *69*(1), 32-47.
- Gade, P. M. y Hu, C.-K. (2000). Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions. *Physical Review E*, *62*(5), 6409.
- Gell-Mann, M. y Lloyd, S. (1996). Information measures, effective complexity, and total information. *Complexity*, *2*(1), 44-52.
- Gershgorin, S. A. (1931). Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *zv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, *6*, 749-754.
- Gibbs, J. W. (1902). *Elementary principles in statistical mechanics: developed with especial reference to the rational foundations of thermodynamics*. C. Scribner's sons.
- Ginelli, F., Poggi, P., Turchi, A., Chaté, H., Livi, R. y Politi, A. (2007). Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors. *Physical review letters*, *99*(13), 130601.
- Girvan, M. y Newman, M. E. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *99*(12), 7821-7826.

- Grassberger, P., Badii, R. y Politi, A. (1988). Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors. *Journal of Statistical Physics*, 51(1), 135-178.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (2002). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* (7th). Springer.
- Gutiérrez Ibarra, C. (2019). *Bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados* (Tesis de maestría). Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias - PEDECIBA.
- Guy, R. K. y Harary, F. (1967). On the Möbius ladders. *Canadian mathematical bulletin*, 10(4), 493-496.
- Györgyi, G. y Szépfalussy, P. (1984). Properties of fully developed chaos in one-dimensional maps. *Journal of statistical physics*, 34(3), 451-475.
- Hagerstrom, A. M., Murphy, T. E., Roy, R., Hövel, P., Omelchenko, I. y Schöll, E. (2012). Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics*, 8(9), 658-661.
- Haken, H. y Portugali, J. (2016). Information and self-organization.
- Halley, J. D. y Winkler, D. A. (2008). Classification of emergence and its relation to self-organization. *Complexity*, 13(5), 10-15.
- Hendry, R., McGlade, J. y Weiner, J. (1996). A coupled map lattice model of the growth of plant monocultures. *Ecological Modelling*, 84(1-3), 81-90.
- Heylighen, F. (2008). Complexity and self-organization. *Encyclopedia of Library and Information Sciences*, 3, 1215-1224.
- Heylighen, F., Cilliers, P. y Gershenson, C. (2007). Complexity and philosophy. En J. Bogg y R. Geyer (Eds.), *Complexity, Science and Society*. Radcliffe Publishing. Radcliffe Abingdon.
- Holland, J. H. (2014). *Complexity: A very short introduction*. OUP Oxford.
- Hong, 2., Kim, B. J., Choi, M. y Park, H. (2004). Factors that predict better synchronizability on complex networks. *Physical Review E*, 69(6), 067105.
- Hooker, C. (2011). Introduction to Philosophy of Complex Systems: A: Part A: Towards a framework for complex systems. *Philosophy of Complex Systems* (pp. 3-90). Elsevier.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y.-C. y Pecora, L. M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Physical Review E*, 80(3), 036204.

- Hussain, Z., Khan, J. A., Munir, M., Saleem, M. S. y Iqbal, Z. (2018). Sharp bounds for partition dimension of generalized Möbius ladders. *Open Mathematics*, 16(1), 1283-1290.
- Idrees, M., Ma, H., Wu, M., Nizami, A. R., Munir, M. y Ali, S. (2020). Metric Dimension of Generalized Möbius Ladder and its Application to WSN Localization. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 24(1), 3-11.
- Jaynes, E. T. (1965). Gibbs vs Boltzmann entropies. *American Journal of Physics*, 33(5), 391-398.
- Jost, J. y Joy, M. P. (2001). Spectral properties and synchronization in coupled map lattices. *Physical Review E*, 65(1), 016201.
- Kaneko, K. (1990). Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D: Nonlinear phenomena*, 41(2), 137-172.
- Kaneko, K. (1984). Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: Towards a prelude of a "field theory of chaos". *Progress of Theoretical Physics*, 72(3), 480-486.
- Kaneko, K. (1985). Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices. *Progress of Theoretical Physics*, 74(5), 1033-1044.
- Kaneko, K. (1986). Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 23(1-3), 436-447.
- Kaneko, K. (1989). Spatiotemporal chaos in one-and two-dimensional coupled map lattices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 37(1-3), 60-82.
- Kaneko, K. (1992). Overview of coupled map lattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(3), 279-282.
- Kantz, H. y Schreiber, T. (2004). *Nonlinear time series analysis* (Vol. 7). Cambridge University Press.
- Kaplan, J. L. y Yorke, J. A. (1979). Chaotic behavior of multidimensional difference equations. *Functional differential equations and approximation of fixed points* (pp. 204-227). Springer.
- Karimi, A. y Paul, M. R. (2010). Extensive chaos in the Lorenz-96 model. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, 20(4), 043105.
- Kessler, D. A., Levine, H. y Reynolds, W. N. (1990). Coupled-map lattice model for crystal growth. *Physical Review A*, 42(10), 6125.

- Klein, J. T. (1984). Interdisciplinarity and complexity: An evolving relationship. *structure*, 71, 72.
- Kolmogorov, A. N. (1958). A new invariant of transitive dynamical systems. *Dokl. Akad. NauL. SSSR*, 119, 861.
- Kwapisz, M. (1991). On boundary value problems for difference equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 157(1), 254-270.
- Latora, V. y Baranger, M. (1999). Kolmogorov-Sinai entropy rate versus physical entropy. *Physical Review Letters*, 82(3), 520.
- Ledrappier, F. y Young, L.-S. (1985a). The metric entropy of diffeomorphisms: Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Annals of Mathematics*, 509-539.
- Ledrappier, F. y Young, L.-S. (1985b). The metric entropy of diffeomorphisms: part II: relations between entropy, exponents and dimension. *Annals of Mathematics*, 540-574.
- Lichtenberg, A. y Lieberman, M. (1983). *Regular and Stochastic Motion*, Springer, Berlin.
- Lind, P. G., Corte-Real, J. y Gallas, J. A. (2004). Pattern formation in diffusive-advective coupled map lattices. *Physical Review E*, 69(6), 066206.
- Livi, R., Politi, A. y Ruffo, S. (1986). Distribution of characteristic exponents in the thermodynamic limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 19(11), 2033.
- Löwdin, P., Pauncz, R. y De Heer, J. (1960). On the calculation of the inverse of the overlap matrix in cyclic systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1(6), 461-467.
- Luccioli, S., Olmi, S., Politi, A. y Torcini, A. (2012). Collective dynamics in sparse networks. *Physical Review Letters*, 109(13), 138103.
- Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of the stability of motion [reimpreso en *International Journal of Control*, 1992, 55 (3), 531-534]. *Mathematical Society of Kharkov*.
- Manson, S. M. (2001). Simplifying complexity: a review of complexity theory. *Geoforum*, 32(3), 405-414.
- Martí, A. C., Ponce, M. y Masoller, C. (2006). Chaotic maps coupled with random delays: Connectivity, topology, and network propensity for synchronization. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371(1), 104-107.

- Masoller, C. y Martí, A. C. (2005). Random delays and the synchronization of chaotic maps. *Physical Review Letters*, 94(13), 134102.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261, 459.
- Merris, R. (1994). Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications*, 197, 143-176.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity: A guided tour*. Oxford University Press.
- Mitchell, M. y Newman, M. (2002). Complex systems theory and evolution. *Encyclopedia of Evolution*, 1, 1-5.
- Mohar, B. (1997). Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. *In Graph symmetry*. Springer, Dordrecht., 225-275.
- Nardelli, P. H., Rubido, N., Wang, C., Baptista, M. S., Pomalaza-Raez, C., Cardieri, P. y Latva-aho, M. (2014). Models for the modern power grid. *The European Physical Journal Special Topics*, 223(12), 2423-2437.
- Newman, M. E. (2000). Models of the small world. *Journal of Statistical Physics*, 101(3), 819-841.
- Newman, M. E. y Watts, D. J. (1999a). Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, 263(4-6), 341-346.
- Newman, M. E. y Watts, D. J. (1999b). Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical review E*, 60(6), 7332.
- Nishikawa, T. y Motter, A. E. (2015). Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization. *New Journal of Physics*, 17(1), 015012.
- Nishikawa, T., Motter, A. E., Lai, Y.-C. y Hoppensteadt, F. C. (2003). Heterogeneity in oscillator networks: Are smaller worlds easier to synchronize? *Physical Review Letters*, 91(1), 014101.
- Ochs, K. (2011). A comprehensive analytical solution of the nonlinear pendulum. *European Journal of Physics*, 32(2), 479.
- Palaniyandi, P., Muruganandam, P. y Lakshmanan, M. (2005). Desynchronized wave patterns in synchronized chaotic regions of coupled map lattices. *Physical Review E*, 72(3), 037205.
- Pasotti, A. (2010). Constructions for cyclic Moebius ladder systems. *Discrete mathematics*, 310(22), 3080-3087.
- Paul, M., Einarsson, M., Fischer, P. y Cross, M. (2007). Extensive chaos in Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review E*, 75(4), 045203.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10), 2109.

- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, *64*, 821-824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (2015). Synchronization of chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *25*(9), 097611.
- Peliti, L. y Vulpiani, A. (1988). *Measures of complexity*. Springer.
- Pesin, Y. B. (1977). Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, *32*(4), 55.
- Ponce C, M., Masoller, C., Martí, A. C. et al. (2009). Synchronizability of chaotic logistic maps in delayed complex networks. *The European Physical Journal B*, *67*(1), 83-93.
- Reichl, L. E. (1998). *A modern course in statistical physics* (2nd ed). Wiley.
- Rényi, A. (1961). On measures of information and entropy. *Proceedings of the 4th Berkeley symposium on mathematics, statistics and probability*, *1*(547).
- Rubido, N., Cabeza, C., Kahan, S., Ramírez Ávila, G. y Marti, A. C. (2011). Synchronization regions of two pulse-coupled electronic piecewise linear oscillators. *The European Physical Journal D*, *62*(1), 51-56.
- Ruelle, D. (1982). Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, *87*(2), 287-302.
- Sánchez, R. y Newman, D. (2018). Primer on complex systems. *A Primer on Complex Systems* (pp. 3-39). Springer.
- Shabunin, A. (2021). Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *31*(7), 073132.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, *27*(3), 379-423.
- Sinai, I. G. (1976). *Introduction to ergodic theory* (Vol. 18). Princeton University Press.
- Sinai, Y. G. (1959). On the notion of entropy of a dynamical system. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, *124*(3), 768-771.
- Skokos, C. (2010). The Lyapunov characteristic exponents and their computation. *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets* (pp. 63-135). Springer.

- Solé, R. V. y Valls, J. (1991). Order and chaos in a 2D Lotka-Volterra coupled map lattice. *Physics Letters A*, 153(6-7), 330-336.
- Stahlke, D. y Wackerbauer, R. (2009). Transient spatiotemporal chaos is extensive in three reaction-diffusion networks. *Physical Review E*, 80(5), 056211.
- Stenseth, N. C., Chan, K.-S., Tong, H., Boonstra, R., Boutin, S., Krebs, C. J., Post, E., O'Donoghue, M., Yoccoz, N. G., Forchhammer, M. C. et al. (1999). Common dynamic structure of Canada lynx populations within three climatic regions. *Science*, 285(5430), 1071-1073.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley Pub.
- Takeuchi, K. A., Chaté, H., Ginelli, F., Politi, A. y Torcini, A. (2011). Extensive and subextensive chaos in globally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters*, 107(12), 124101.
- Takeuchi, K. A., Ginelli, F. y Chaté, H. (2009). Lyapunov analysis captures the collective dynamics of large chaotic systems. *Physical Review Letters*, 103(15), 154103.
- Thurner, S., Hanel, R. y Klimek, P. (2018). *Introduction to the theory of complex systems*. Oxford University Press.
- Trinh, K. D. (2014). An Introduction to Ergodic Theory. *A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology* (pp. 297-309). Springer.
- Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1), 479-487.
- Tsallis, C. (2009a). *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*. Springer Science & Business Media.
- Tsallis, C. (2009b). Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), 257-266.
- Tsallis, C. (2019). Beyond Boltzmann-Gibbs-Shannon in physics and elsewhere. *Entropy*, 21(7), 696.
- Tsallis, C., Gell-Mann, M. y Sato, Y. (2005). Extensivity and entropy production. *Europhysics News*, 36(6), 186-189.
- Waldrop, M. M. (1993). *Complexity: The emerging science at the edge of order and chaos*. Simon; Schuster.
- Watts, D. J. y Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of “small-world” networks. *nature*, 393(6684), 440-442.

- Wehrl, A. (1978). General properties of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 50(2), 221.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- Wiley, D. A., Strogatz, S. H. y Girvan, M. (2006). The size of the sync basin. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(1), 015103.
- Wolfrum, M. y Omel'chenko, E. (2011). Chimera states are chaotic transients. *Physical Review E*, 84(1), 015201.
- Xie, F. y Cerdeira, H. A. (1996). Coherent-ordered transition in chaotically coupled maps. *Physical Review E*, 54(4), 3235.
- Yanagita, T. (1992). Phenomenology of boiling: A coupled map lattice model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(3), 343-350.
- Yanagita, T. y Kaneko, K. (1993). Coupled map lattice model for convection. *Physics Letters A*, 175(6), 415-420.
- Zhang, H. y Yang, Y. (2007). Resistance distance and Kirchhoff index in circulant graphs. *International journal of quantum chemistry*, 107(2), 330-339.
- Zimmerman, B., Lindberg, C. y Plsek, P. (1998). A complexity science primer: What is complexity science and why should I learn about it. *Adapted From: Edgewise: Lessons From Complexity Science for Health Care Leaders, Dallas, TX: VHA Inc.*

APÉNDICES

k-ciclos – derivación de expresiones cerradas para los autovalores

Estas redes, $\mathcal{C}_N(k)$, solo permiten conexiones entre los k vecinos más cercanos a cada nodo, donde k debe ser un número par. Entonces, los autovalores de la matriz Laplaciana se escriben, $\lambda_n[\mathcal{C}_N(k)]$ ($n = 0, \dots, N - 1$), a partir de la Ec. (2.61) como

$$\lambda_n[\mathcal{C}_N(k)] = \sum_{j=1}^N L_{1,j} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(j-1)\right) = k - 2 \sum_{s=1}^{k/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}s\right). \quad (1)$$

Aca se deriva una expresión cerrada para la suma del lado derecho (l.d.) de Eq. (1) expresando el coseno en su forma exponencial. Eso es

$$l.d. = 2 \sum_{s=1}^{k/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}s\right) = \sum_{s=0}^{k/2} \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}s\right] + \sum_{s=0}^{k/2} \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}s\right] - 2,$$

donde se reemplaza las 2 sumas geométricas por sus correspondientes resultados. Es decir,

$$\begin{aligned} l.d. &= \frac{1 - \exp[i2\pi n(1+k/2)/N]}{1 - \exp[i2\pi n/N]} + \frac{1 - \exp[-i2\pi n(1+k/2)/N]}{1 - \exp[-i2\pi n/N]} - 2 = \\ &= \frac{1 - \exp[i\pi n(k+2)/N]}{1 - \exp[i2\pi n/N]} + \frac{1 - \exp[-i\pi n(k+2)/N]}{1 - \exp[-i2\pi n/N]} - 2, \end{aligned}$$

que se puede transformar usando que $1 - \exp[\pm i\phi] = \pm 2i \sin(\phi/2) \exp[\pm i\phi/2]$ para una variable de fase arbitraria ϕ . Como resultado,

$$\begin{aligned} r.h.s. &= \frac{2i \sin(\pi n(k+2)/2N) \exp[i\pi n(k+2)/2N]}{2i \sin(\pi n/N) \exp[i\pi n/N]} + \\ &+ \frac{(-2i) \sin(\pi n(k+2)/2N) \exp[-i\pi n(k+2)/2N]}{(-2i) \sin(\pi n/N) \exp[-i\pi n/N]} - 2 = \\ &= \frac{\sin(\pi n(k+2)/2N)}{\sin(\pi n/N)} \exp\left[i\frac{\pi n}{2N}k\right] + \frac{\sin(\pi n(k+2)/2N)}{\sin(\pi n/N)} \exp\left[-i\frac{\pi n}{2N}k\right] - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r.h.s. = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{2N}k\right) \frac{\sin(\pi n(k+2)/2N)}{\sin(\pi n/N)} - 2. \end{aligned}$$

Ahora, usando que $2 \cos(\beta) \sin(\alpha) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ en el *l.d.*,

$$l.d. = \frac{\sin(\pi n(2k+2)/2N) + \sin(\frac{\pi n}{N})}{\sin(\pi n/N)} - 2 = \frac{\sin(\pi n(k+1)/N)}{\sin(\pi n/N)} - 1.$$

Finalmente, el resultado explícito obtenido para la Ec. (1) es

$$\lambda_n[\mathcal{C}_N(k)] = k - l.d. = k + 1 - \frac{\sin(\pi n(k+1)/N)}{\sin(\pi n/N)}. \quad (2)$$

k -ciclos – Mínimo y máximo autovalor de la matriz Laplaciana

Se nota que $\lambda_0[\mathcal{C}_N(k)] = 0$ para cualquier $\mathcal{C}_N(k)$, que puede verificarse a partir de la Ec. (1), y que $\lambda_n[\mathcal{C}_N(k = N - 1)] = N$, $\forall n > 0$ para una red completa. También se observa que $\frac{n}{N} \in [0, 1)$, $\forall n$, pero debido a que el coseno en la Ec. (1), solo los primeros (no nulos) modos $\frac{n}{N} \in (0, 1/2]$ son relevantes; los restantes n contribuyen como degeneraciones de los primeros. A medida que n se incrementa desde 1 hasta $\lfloor N/2 \rfloor$, el denominados en la Ec. (2) decrece monótonamente (sin cambio de signo), haciendo a la fracción cada vez más relevante. Consecuentemente, el menor autovalor no nulo, λ_F , de cualquier $\mathcal{C}_N(k)$ corresponde al primer modo; esto es,

$$\lambda_F[\mathcal{C}_N(k)] \equiv \min_{n \in [1, N/2]} \{\lambda_n[\mathcal{C}_N(k)]\} = \lambda_1. \quad (3)$$

Por otra parte, para maximizar Ec. (2) y encontrar el autovalor máximo, λ_M , se restringe los modos a aquellos que hacen $\sin(n\pi(k+1)/N) = -1$. La primera solución posible corresponde a cuando $n\pi(k+1)/N = 3\pi/2$, que se verifica cuando $n = \lfloor 3N/2(k+1) \rfloor$ (redondeando el argumento $3N/2(k+1)$ a uno de los dos enteros más próximos). Debido a que $k \in [2, N-1]$ para cualquier k -ciclo (lo que implica que $(k+1) \in [3, N]$), se trata de una solución válida para el máximo autovalor de la matriz Laplaciana, λ_M . Específicamente,

$$\lambda_M[\mathcal{C}_N(k)] = \max \{ \lambda_{\lfloor 3N/2(k+1) \rfloor}, \lambda_{\lfloor 3N/2(k+1) \rfloor} \}. \quad (4)$$

Sumando los autovalores normalizados de las Ecs. (3) y (4), se obtiene

$$\frac{\lambda_F}{k} + \frac{\lambda_M}{k} = \frac{\lambda_1}{k} + \frac{\text{máx} \{ \lambda_{\lfloor 3N/2(k+1) \rfloor}, \lambda_{\lceil 3N/2(k+1) \rceil} \}}{k}, \quad (5)$$

donde $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$ para $2 < k < k_C$, y $\lambda_F/k + \lambda_M/k > 2$ para $k > k_C$ (o $k = 2$), siendo k_C el grado crítico determinado para el caso cuando $\lambda_F/k_C + \lambda_M/k_C = 2$, que explícitamente corresponde a

$$\frac{2}{k_C} - \frac{1}{k_C} \left[\frac{\sin(\pi(k_C + 1)/N)}{\sin(\pi/N)} \right] - \frac{1}{k_C} \text{mín} \left\{ \frac{\sin\left(\lfloor \frac{3N}{2(k_C+1)} \rfloor \frac{\pi(k_C+1)}{N}\right)}{\sin\left(\lfloor \frac{3N}{2(k_C+1)} \rfloor \frac{\pi}{N}\right)}, \frac{\sin\left(\lceil \frac{3N}{2(k_C+1)} \rceil \frac{\pi(k_C+1)}{N}\right)}{\sin\left(\lceil \frac{3N}{2(k_C+1)} \rceil \frac{\pi}{N}\right)} \right\} = 0.$$

En experimentos numéricos se observa que esta ecuación se verifica en una región donde $\text{mín}\{\dots\} = \sin(2\pi(k_C + 1)/N) / \sin(2\pi/N)$, cuando $N > 11$. Entonces, para $N > 11$, el grado crítico está dado por la ecuación

$$2 - \frac{\sin(\pi(k_C + 1)/N)}{\sin(\pi/N)} - \frac{\sin(2\pi(k_C + 1)/N)}{\sin(2\pi/N)} = 0, \quad (6)$$

y en el límite termodinámico se cumple que

$$\frac{\lambda_F[\mathcal{C}_N(k)]}{k} + \frac{\lambda_M[\mathcal{C}_N(k)]}{k} \rightarrow 2 - \text{sinc}(\pi \rho_C) - \text{sinc}(2\pi \rho_C) = 0.$$

Consecuentemente, una solución para $\lambda_F/k_C + \lambda_M/k_C = 2$ en el límite termodinámico es $\rho_C = 1$, haciendo que $\lambda_F/k + \lambda_M/k < 2$, $\forall \rho \in (0, 1)$, para k -ciclos de tamaño infinito.

k -escaleras de Möbius – derivación de expresiones cerradas para los autovalores

Estas redes se definen por la matriz Laplaciana dada por Ec. (3.15), implicando que los autovalores $\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)]$ (con $n = 0, \dots, N - 1$) de la Ec. (2.61) son

$$\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)] = k - 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - \sum_{j=(N+5-k)/2}^{(N-1+k)/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(j-1)\right). \quad (7)$$

Acá se derivan expresiones explícitas para la suma en el lado derecho (*l.d.*) de la Ec. (7) utilizando exponenciales complejas y correindo el índice $j - 1$ al índice j . Esto es,

$$\begin{aligned} l.d. &= \sum_{j=(N+5-k)/2}^{(N-1+k)/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(j-1)\right) = \sum_{j=(N+3-k)/2}^{(N-3+k)/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}j\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=(N+3-k)/2}^{(N-3+k)/2} \left\{ \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}j\right] + \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}j\right] \right\}, \end{aligned}$$

donde se corre nuevamente el índice j , de forma que $j' = j - (N + 3 - k)/2$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} l.d. &= \frac{1}{2} \exp\left[i\frac{\pi n}{N}(N-k+3)\right] \sum_{j'=0}^{k-3} \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}j'\right] + \\ &+ \frac{1}{2} \exp\left[-i\frac{\pi n}{N}(N-k+3)\right] \sum_{j'=0}^{k-3} \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}j'\right]. \end{aligned}$$

Cuando se substituyen los resultados de las sumas geométricas de j' en el *l.d.*,

$$\begin{aligned} l.d. &= \frac{1}{2} \exp\left[i\frac{\pi n}{N}(N-k+3)\right] \left(\frac{1 - \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}(k-2)\right]}{1 - \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}\right]} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \exp\left[-i\frac{\pi n}{N}(N-k+3)\right] \left(\frac{1 - \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}(k-2)\right]}{1 - \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}\right]} \right), \end{aligned}$$

que se puede transformar utilizando que $1 - \exp[\pm i\phi] = \pm 2i \sin(\phi/2) \exp[\pm i\phi/2]$ para una variable de fase aleatoria ϕ . Comenzando por transformar el denominar y luego el numerador de las sumas geométricas, se obtiene

$$\begin{aligned} l.d. &= \frac{1}{4i} \exp\left[i\frac{\pi n}{N}(N-(k-3))\right] \exp\left[-i\frac{\pi n}{N}\right] \left(\frac{1 - \exp\left[i\frac{2\pi n}{N}(k-2)\right]}{\sin(n\pi/N)} \right) \\ &- \frac{1}{4i} \exp\left[-i\frac{\pi n}{N}(N-(k-3))\right] \exp\left[i\frac{\pi n}{N}\right] \left(\frac{1 - \exp\left[-i\frac{2\pi n}{N}(k-2)\right]}{\sin(n\pi/N)} \right) = \\ &= \frac{2i}{4i} \exp\left[i\frac{\pi n}{N}(N-(k-2))\right] \exp\left[i\frac{\pi n}{N}(k-2)\right] \frac{\sin(n\pi(k-2)/N)}{\sin(n\pi/N)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2i}{4i} \exp \left[-i \frac{\pi n}{N} (N - (k - 2)) \right] \exp \left[-i \frac{\pi n}{N} (k - 2) \right] \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)} = \\
& = \frac{1}{2} \exp \left[i \frac{\pi n}{N} N \right] \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)} + \frac{1}{2} \exp \left[-i \frac{\pi n}{N} N \right] \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)} \Rightarrow \\
& \Rightarrow r.h.s. = \cos(n \pi) \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)} = (-1)^n \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia, la expresión explícita para la Ec. (7) es

$$\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)] = k - 2 \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) - (-1)^n \frac{\sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)}, \quad (8)$$

lo que muestra la contribución del anillo (primeros dos términos) y los peldaños (último término). En particular, utilizando que $2 \cos(\beta) \sin(\alpha) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, se tiene

$$\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)] = k + 1 - \left[\frac{\sin(3\pi n/N) + (-1)^n \sin(n \pi (k - 2)/N)}{\sin(n \pi/N)} \right], \quad (9)$$

donde se notan similitudes (el término $k + 1$, el hecho que $\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)] = 0$ para $n = 0$ y $\lambda_n[\mathcal{M}_N(N - 1)] = N - 1$ para $n > 0$, y la simetría en n alrededor $N/2$) y diferencias (los términos entre paréntesis rectos) con la Ec. (2) para los k -ciclos.

k -escaleras de Möbius – Mínimo y máximo autovalor de la matriz Laplaciana

En este caso, $\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)]$ ya no es el autovalor de Fiedler – como se tenía para la Ec. (3) para los k -ciclos – sino que el máximo autovalor, para casi todo k . Para mostrar esto, se nota que el denominador en la expresión entre paréntesis rectos es una función monótona creciente de $n \in (0, N/2]$, lo que implica que el término entre paréntesis rectos es más significativo cuanto más pequeño es n . Un numerador negativo siempre tiende a maximizar el autovalor, lo que ocurre cuando n es par siempre y cuando ambos senos en el numerador no cambien de signo. En particular, el numerador es negativos para $n = 1$, $\sin(3\pi/N) - \sin(\pi(k - 2)/N) < 0$, siempre que $k \in (5, N - 1)$. Sin embargo, a medida que n es incrementado, el denominador se incrementa también,

decreciendo la contribución del término entre paréntesis. Como resultado,

$$\lambda_M[\mathcal{M}_N(k)] \equiv \max_{n \in [1, N/2]} \{\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)]\} = \lambda_1 \text{ if } k \in (6, N-1). \quad (10)$$

Para $k \leq 6$, pueden realizarse experimentos numéricos para encontrar el modo que maximiza el autovalor de la Laplaciana en Eq. (9). Por ejemplo, cuando $k = 6$, se encuentra que las k -escaleras de Möbius con N impar tienen un autovalor máximo para el modo que es aproximadamente $n/N \simeq 0.412$; y cuando $k = 3$ (y N par), el máximo autovalor está dado para el modo $n/N = 0.5$, lo que implica que $\lambda_M[\mathcal{M}_N(3)] = \lambda_{N/2}$. Esto muestra que el modo correspondiente al máximo autovalor para las k -escaleras de Möbius cambia de acuerdo con el tamaño y el grado de la red cuando $k \leq 6$.

Ahora, se argumenta que el autovalor de Fiedler $\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)]$ corresponde al siguiente autovalor más chico. En particular, se encuentra que

$$\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)] \equiv \min_{n \in [1, N/2]} \{\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)]\} = \lambda_2 \text{ if } k \in [3, k_c], \quad (11)$$

donde $k_c < N/2$ se deriva de la identidad trascendental $\lambda_2 = \lambda_3$, la cual corresponde a cuando el autovalor de Fiedler pasa de ser el segundo modo, al tercero. Explícitamente,

$$\left[\frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k_c - 2)/N)}{\sin(2\pi/N)} \right] = \left[\frac{\sin(9\pi/N) - \sin(3\pi(k_c - 2)/N)}{\sin(3\pi/N)} \right],$$

de la cual se obtiene que aproximadamente $k_c \simeq (2N + 8)/5$. De forma similar, se encuentra que

$$\lambda_F[\mathcal{M}_N(k)] \equiv \min_{n \in [1, N/2]} \{\lambda_n[\mathcal{M}_N(k)]\} = \lambda_3 \text{ if } k \in (k_c, k'_c), \quad (12)$$

donde k'_c se deriva de la identidad trascendental $\lambda_3 = \lambda_4$, la cual se lee

$$\left[\frac{\sin(9\pi/N) - \sin(3\pi(k_c - 2)/N)}{\sin(3\pi/N)} \right] = \left[\frac{\sin(12\pi/N) + \sin(4\pi(k_c - 2)/N)}{\sin(4\pi/N)} \right].$$

Otros grados críticos se obtienen progresivamente aumentando el modo al cual corresponde al autovalor de Fiedler, hasta converger a la red completa, cuando $k = N - 1$ y todos los autovalores son iguales y se verifica que $\lambda_n[\mathcal{M}_N(k = N - 1)] = N, \forall n > 0$.

Considerando Ecs. (10) y (11), se tiene que, para $k \in (6, k_c]$,

$$\frac{\lambda_M}{k} + \frac{\lambda_F}{k} = \frac{\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)]}{k} + \frac{\lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]}{k} = 2 \frac{(k+1)}{k},$$

$$-\frac{1}{k} \left[\frac{\sin(3\pi/N) - \sin(\pi(k-2)/N)}{\sin(\pi/N)} \right] - \frac{1}{k} \left[\frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k-2)/N)}{\sin(2\pi/N)} \right].$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $\lambda_2/k + \lambda_1/k < 2$ cuando $7 \leq k < k_M$ y $\lambda_2/k + \lambda_1/k > 2$ cuando $k_M < k \leq k_c \simeq (2N+8)/5$, con k_M siendo el grado crítico determinado por el caso cuando $\lambda_F/k_M + \lambda_M/k_M = 2$. Esto es,

$$\frac{(k_M+1)}{k_M} - 1 = \frac{\sin(3\pi/N) - \sin(\pi(k_M-2)/N)}{2k_M \sin(\pi/N)} + \frac{\sin(6\pi/N) + \sin(2\pi(k_M-2)/N)}{2k_M \sin(2\pi/N)},$$

$$1 = \left[\frac{\sin(2\pi(k_M-2)/N)}{2\sin(2\pi/N)} - \frac{\sin(\pi(k_M-2)/N)}{2\sin(\pi/N)} \right] + \frac{\sin(3\pi/N)}{2\sin(\pi/N)} + \frac{\sin(6\pi/N)}{2\sin(2\pi/N)},$$

$$\alpha_N = \frac{\sin(2\pi(k_M-2)/N)}{\sin(2\pi/N)} - \frac{\sin(\pi(k_M-2)/N)}{\sin(\pi/N)}, \quad (13)$$

donde se define la constante, $\alpha_N \equiv 2 - \sin(3\pi/N)/\sin(\pi/N) - \sin(6\pi/N)/\sin(2\pi/N)$, que solo depende de N . Entonces, Ec. (13) es una ecuación trascendental que permite determinar el grado crítico que diferencia entre las 2 clases de k -escaleras de öbius: aquellas para las cuales $\lambda_F/k_M + \lambda_M/k_M < 2$ y las otras para las que $\lambda_F/k_M + \lambda_M/k_M > 2$.

Se nota que cuando $N \rightarrow \infty$, se puede utilizar las Ecs. (3.18) y (3.20) en el límite termodinámico de $\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)]$ y $\lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]$. Como resultado, se obtiene

$$\frac{\lambda_1[\mathcal{M}_N(k)]}{k} + \frac{\lambda_2[\mathcal{M}_N(k)]}{k} \rightarrow 2 + \text{sinc}(\pi\rho) - \text{sinc}(2\pi\rho). \quad (14)$$

Consecuentemente, existe una densidad crítica de enlaces para k -escaleras de öbius de tamaño infinito, ρ_M , cuando $\text{sinc}(\pi\rho_M) - \text{sinc}(2\pi\rho_M) = 0$, con las soluciones $\rho_M = 0$ y $\rho_M = 1$. Esto implica que las k -escaleras de öbius de tamaño infinito verifican $\lambda_2[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k + \lambda_1[\mathcal{M}_\infty(\rho)]/k > 2$, valido para $\rho \in (0, 1)$, y coinciden con los k -ciclos en la red completa para $\rho = 1$.

Derivación de los términos extensivos para la red anillo

Aquí se derivan las expresiones cerradas que se obtienen de los primeros términos del desarrollo de la Ec.(3.39):

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left[2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right]^j \frac{1}{j}. \quad (15)$$

Para $j = 1$, la Ec.(15) se escribe como

$$\sum_{n=1}^{N-1} 2\epsilon \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right),$$

donde la expresión del lado derecho (*l.d.*) se obtiene mediante la identidad trigonométrica de reducción de potencia, i.e., $2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$. Haciendo el la suma del primer término y escribiendo el seno en su forma exponencial, se tiene,

$$l.d. = \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right) = \epsilon \left(N - 1 - \sum_{n=1}^{N-1} \left[\exp \left(i \frac{2\pi n}{N} \right) + \exp \left(-i \frac{2\pi n}{N} \right) \right] \frac{1}{2} \right).$$

Ahora se busca escribir las sumatorias como sumas geométricas, entonces

$$\begin{aligned} l.d. &= \epsilon \left(N - 1 - \left[\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(i \frac{2\pi n}{N} \right) + \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(-i \frac{2\pi n}{N} \right) - 2 \right] \frac{1}{2} \right) \\ &= \epsilon \left(N - \left[\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(i \frac{2\pi n}{N} \right) + \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(-i \frac{2\pi n}{N} \right) \right] \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

donde se tiene que estas sumas geométricas son idénticamente nulas. Esto es,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(i \frac{2\pi n}{N} \right) = \frac{1 - \exp(2\pi i)}{1 - \exp(2\pi i/N)} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(-i \frac{2\pi n}{N} \right) = \frac{1 - \exp(-2\pi i)}{1 - \exp(-2\pi i/N)} = 0,$$

ya que $\exp(\pm 2\pi i) = 1$. Por lo tanto $l.d. = \epsilon N$.

Para el caso $j = 2$, la Ec. (15) se escribe como

$$2\epsilon^2 \sum_{n=1}^{N-1} \sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \left[3 - 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \right],$$

donde nuevamente el lado derecho (*l.d.*) se obtuvo a partir de la identidad trigonométrica de reducción de potencia: $8 \sin^4(x) = 3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)$. El trabajo es idéntico al caso $j = 1$, se hace la primera suma y se escriben los cosenos en su forma exponencial,

$$\begin{aligned} l.d. = \frac{\epsilon^2}{4} & \left[3N - 3 - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right) \right], \end{aligned}$$

transformando las sumatorias en sumas geométricas,

$$\begin{aligned} l.d. = \frac{\epsilon^2}{4} & \left[3N - 3 - 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) + 4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right) - 1 \right] \\ & = \frac{\epsilon^2}{4} \left[3N - 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right], \end{aligned}$$

donde por iguales argumentos que en el caso $j = 1$, se tiene que todas las sumas son nulas. Finalmente se tiene $l.d. = 3\epsilon^2/4$.

En el caso $j = 3$, el tratamiento también es similar. En este caso, la Ec. (15) se escribe como

$$\frac{8}{3}\epsilon^3 \sum_{n=1}^{N-1} \sin^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{\epsilon^3}{12} \sum_{n=1}^{N-1} \left[10 - 15 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 6 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right) \right],$$

donde nuevamente la igualdad del lado derecho (*l.d.*) corresponde la identidad de reducción de exponente, i.e., $32 \sin^6(x) = 10 - 15 \cos(2x) + 6 \cos(4x) - \cos(6x)$.

Repitiendo el proceso:

$$\begin{aligned}
l.d. &= \frac{\epsilon^3}{12} \left[10N - 10 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{15}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \right. \\
&+ 3 \left. \left(\exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \\
&\left. \left. \right) \right] \\
&= \frac{\epsilon^3}{12} \left[10N + \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{15}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \right. \\
&+ 3 \left. \left(\exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \\
&\left. \left. \right) \right] \\
&= \epsilon^3 \left[\frac{5}{6}N + \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{15}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \right. \\
&+ 3 \left. \left(\exp\left(i\frac{4\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{4\pi n}{N}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \right. \\
&\left. \left. \right) \right],
\end{aligned}$$

donde nuevamente todas las sumas que aparecen son idénticamente nulas. Por lo tanto, $l.d. = 5\epsilon^3 N/6$.