Estimación de Home range bajo un esquema de muestreo con restricciones

Aportes desde la teoría estadística

Manuel Hernández Banadik

Programa de Posgrado en Maestría en Ingeniería Matemática
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2022

Estimación de Home range bajo un esquema de muestreo con restricciones

Aportes desde la teoría estadística

Manuel Hernández Banadik

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Maestría en Ingeniería Matemática, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magister en Maestría en Ingeniería Matemática.

Director de tesis:
D.Sc. Prof. Alejandro Cholaquidis

Codirector:
D.Sc. Prof. Ricardo Fraiman

Montevideo – Uruguay
Junio de 2022

Hernández Banadik, Manuel

Estimación de Home range bajo un esquema de muestreo con restricciones / Manuel Hernández Banadik. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, 2022.

IX, 44 p.: il.; $29,7$cm.

Director de tesis:

Alejandro Cholaquidis

Codirector:

Ricardo Fraiman

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Maestría en Ingeniería Matemática, 2022.

Referencias bibliográficas: p. 36 – 38.

1. Movimiento Browniano reflejado, 2. Home range, 3. Estimación de conjuntos, 4. Procesos estocásticos. I. Cholaquidis, Alejandro *et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Maestría en Ingeniería Matemática. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

D.Sc. Prof. José Rafael León

D.Sc Prof. Ernesto Mordecki

D.Sc. Prof. Juan Kalemkerian

Montevideo – Uruguay
Junio de 2022

A mi abuelo Jacobo.

Agradecimentos

Quiero agradecer a mis tutores Ricardo y Alejandro. De su parte recibí muchísima ayuda, apoyo y contención, desde lo técnico y lo humano. Solo me surgen sentimientos y palabras muy positivas hacia ellos, por eso mi explícito agradecimiento por aguantarme y valorar mis muy marginales aportes.

Quiero agradecer también a Ernesto Mordecki, Roberto Markarian, Marco Scavino y Leonardo Moreno, profesores que fueron un gran acompañamiento en alguna parte de este proceso y fueron claves para hacerme entender lo que para mí hubiera sido imposible de entender en solitario.

Gracias a Cecilia Papalardo y a Beatriz Pateiro-López por su ayuda para resolver algunos problema computacionales.

Gracias a la ANII por el apoyo económico para realizar este trabajo.

Gracias a mis compañeros y docentes del Instituto de Estadística. Gracias a mis compañeros del Departamento de Biometría, Estadística y Cómputo de la Facultad de Agronomía, por su constante apoyo y aliento.

Gracias a toda mi familia, en especial a Rosina.

Lista de figuras

Lista de tablas

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Introducción

El movimiento animal es un objeto de estudio de relevancia para la ecología y las ciencias ambientales; desde mediados del siglo XX se han propuesto distintos métodos para su análisis. Buena parte de este desarrollo se debe a la aparición de nuevas tecnologías que permiten obtener y registrar datos de mayor complejidad. Un aspecto central en este campo es determinar el **Home Range** (HR) de una especie. La definición de HR más aceptada es la que propone Burt (1943) que lo define como aquella región en la cual el individuo desarrolla la mayor parte de sus actividades: la obtención del alimento, su reproducción y el cuidado de sus crías.

Si bien se la considera una definición fundacional que ha guiado la investigación entorno a cómo estimar el HR, diversos autores han señalado (Fleming et al., 2015; Kie et al., 2010) el desafío de expresar esa definición con el rigor matemático necesario para formular el problema como un problema de inferencia estadística. El propio Burt señala que si el animal sale *ocasionalmente* de esta área, el territorio que recorre en esa expedición no debe ser considerado parte del HR. De modo que pueden surgir preguntas acerca de cómo delimitar esta área, qué se considera una *salida ocasional*, etc.

Las primeras aproximaciones a este problema proponían, a partir de observaciones de la posición de un individuo, utilizar el cierre convexo de ese conjunto (el convexo *más chico* que lo contiene) como estimador de HR (ver Figura 1.1). Esta propuesta tiene el mérito de la simpleza, pero tiene sus claras desventajas: asume la convexidad de un conjunto del que apenas conocemos una cantidad finita de puntos y es muy sensible a la observación de un punto aislado. Puede ocurrir que en la zona donde habite la especie estudiada, haya

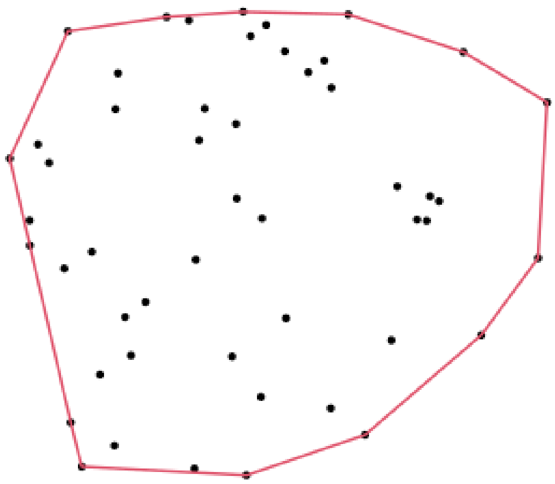

Figura 1.1: Un conjunto de puntos arbitrario y su cierre convexo, en linea roja.

un lago, una montaña, la presencia amenazante de un depredador, o algún límite que impida que los individuos transiten por allí. Si el animal rodeara esta zona, al tomar el cierre convexo, la estaríamos incluyendo en la estimación. Por otro lado, imaginemos que el individuo sale fugazmente de su área de acción, también el cierre convexo contendrá esta región que a priori no resulta de interés para el estudio.

Hay otras variantes que consideran cierres r-convexos (ver Definición 5 en página 10) o uniones de cierres r-convexos, que le dan mayor flexibilidad al estimador, solucionando algunos de sus inconvenientes, ver por ejemplo Getz and Wilmers (2004).

Todas estas propuestas no consideran la dimensión temporal de ese movimiento, a tales efectos, no importa el orden en que se producen esos registros, ni la distancia temporal que hay entre ellos. Hoy en día, mediante sistemas de posicionamiento global (GPS), se puede tener registros de movimiento de forma *casi* continua en el tiempo, lo que induce una alta autocorrelación entre las observaciones, por tanto al ignorar la cuestión temporal se está descartando mucha información. En la Figura 1.2 se puede ver un ejemplo simulado de dos trayectorias distintas que pasan por los mismos puntos. Este aspecto ha sido

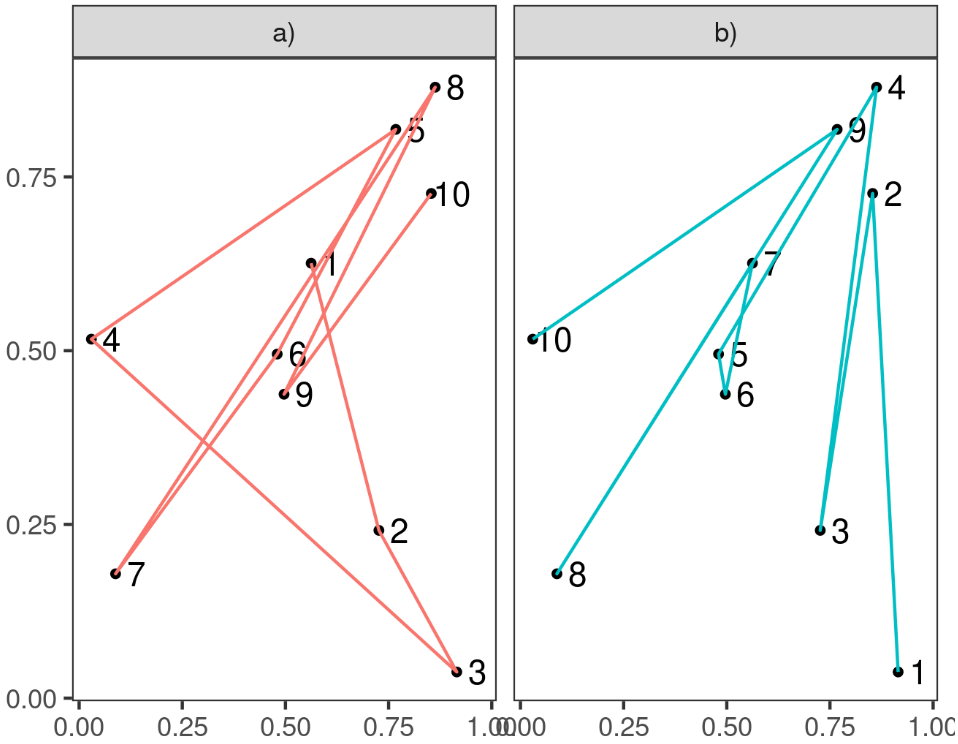

Figura 1.2: Dos trayectorias distintas que pasan por los mismos puntos.

atendido por la literatura (Noonan et al., 2019; Fleming et al., 2014, 2015), y se han propuesto nuevas formas de estimar el HR modelando el movimiento animal a través de un proceso estocástico en tiempo continuo.

Este camino que resulta muy natural, aún mantiene el desafío de lograr definir rigurosamente qué es lo que se quiere estimar. En Worton (1989) se propone, con los datos de la localización de los individuos, utilizar métodos de núcleos para estimar una función de densidad que describa con qué probabilidad el individuo se encuentra en determinada región. En Fleming et al. (2015), se introduce una variante de este estimador por núcleos, con un criterio de elección de la ventana de suavizado que tenga en cuenta la autocorrelación del proceso. Para ello, se proponen algunos modelos de procesos estocásticos en tiempo continuo, para los cuales se ajusta una función de autocovarianza usando los datos observados. Sin embargo, no hay ningún resultado que asegure la consistencia de este estimador y, más alarmante quizás, muchos de los modelos propuestos (por ejemplo procesos estocásticos integrados, como el Ornstein-Uhlenbeck integrado) no tienen una distribución estacionaria.

Para este trabajo seguiremos el escenario propuesto en Cholaquidis et al. (2016, 2021b) y revisado en Papalardo (2019). Supondremos que tenemos datos de la posición de un individuo a lo largo del tiempo, que se corresponden con una discretización de la trayectoria de un **movimiento Browniano reflejado con drift** (RBMD, ver Sección 2.1). Es decir, se asumirá que el animal vive en una región acotada y su movimiento se modela por un proceso de difusión reflejado en ese conjunto. Parece razonable pensar que determinado tipo de animales terrestres se mueven en una zona con límites geográficos que no pueden atravesar como ríos, montañas.

En esos trabajos se demuestra la existencia y unicidad del RBMD como proceso estocástico cuando su soporte es un conjunto con frontera suave. Se prueba que tiene una distribución estacionaria y se proponen estimadores consistentes de distintos parámetros de interés, tales como el conjunto que es soporte del proceso, la función de drift y la distribución estacionaria. A priori, la elección del movimiento Browniano como modelo admite discusión, puesto que, puede parecer poco natural modelar el movimiento de un ser vivo mediante un proceso cuyas trayectorias son no diferenciables en casi todo punto. En la Sección 2.1.2 se dan argumentos en favor de esta elección.

1.1. Objetivos

El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades de los estimadores cuando los datos provienen de un esquema de muestreo con restricciones. Se propone un modelo denominado 'on-off' que consiste en observar el proceso de forma intermitente: se lo observa durante un intervalo de tiempo de duración δ_1, y se lo deja de observar durante un intervalo de duración δ_2. Se demuestra que los estimadores mantienen sus buenas propiedades y en algunos casos se obtienen mejores tasas de convergencia.

Esta incorporación tiene un impacto muy positivo desde el punto de vista de la aplicación. Optimizar la cantidad de observaciones tiene múltiples ventajas, las baterías de los dispositivos utilizados tiene una duración acotada y generar más registros, implica un uso más intenso de la batería y una consecuente reducción de su vida útil. El seguimiento de animales más grandes como elefantes, permite colocar baterías más grandes y de mayor duración, pero en animales más pequeños, el peso del dispositivo es una restricción importante. Por otro lado, para el funcionamiento del GPS se requiere del acceso a una conexión satelital, este es un recurso costoso para estos estudios. En cualquier caso, este esquema de muestreo permite maximizar la relación entre la información obtenida y la cantidad de datos registrados.

Buena parte de este trabajo se encuentra sometida a revisión editorial. Una versión preliminar de ese manuscrito se puede ver en Cholaquidis et al. (2021a).

Organización del trabajo

En el Capítulo 2 se introduce el movimiento Browniano reflejado con drift, se describen algunas de sus propiedades, se estudian qué condiciones geométricas debe cumplir el soporte para que el proceso esté bien definido y se tenga la consistencia de los estimadores. Por otro lado, en la sección 2.1.2 dan algunas ideas que justifican su elección como modelo de movimiento animal. En la última sección, se introduce el modelo de observación 'on-off'. En el Capítulo 3 se definen estimadores para el soporte del proceso y para su distribución estacionaria. En el Capítulo 4 se presentan resultados empíricos de un estudio de simulación y en el Capítulo 5 se aplica esta metodología en un caso real.

Las simulaciones y los cálculos computacionales fueron hechas en lenguaje **R** (R Core Team, 2021), utilizando la integración con **C++** que provee **Rcpp** (Eddelbuettel and Balamuta, 2018). Para el cómputo de los cierres r-convexos se ha utilizado la biblioteca **RcppAlphahull** (Airoldi, 2019) que tiene versiones más ágiles de las funciones de la bibilioteca **alphahull** (Pateiro-Lopez et al., 2019). Para la simulación del RBMD y para el cálculo de las distancias se escribieron códigos propios en **Rcpp**, que están disponibles en el repositorio público `https://github.com/emehache/RBM`.

1.2. Notación, definiciones y resultados previos

- Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ se denota por ∂S, $\mathrm{int}(S)$, y $\bar{S}$ a la frontera, interior y clausura de S, respectivamente.
- $B(x, \epsilon)$ la bola de centro x y radio ϵ.
- Dado un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^d$, $S^{(\epsilon)} = \{x \in S : B(x, \epsilon) \subset S\}$ es el conjunto $\epsilon-$paralelo interior de S.

- Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ y $x \in \mathbb{R}^d$ denotamos $d(x, A) = \text{ínf}\{\|x - a\| : a \in A\}$.
- Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Por simplicidad notaremos $\omega_d := \mu(B(0, 1))$, la medida en $\mathbb{R}^d$ de la bola unitaria.
- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, denotamos por $\|\nu\|_{TV}$ a la norma de variación total de ν, definida como

$$\|\nu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu(A)|.$$

- Dados A y C dos conjuntos compactos, no vacíos de $\mathbb{R}^d$, definimos la distancia de Hausdorff entre ellos como

$$d_H(A, C) = \text{máx}\{\sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{c \in C} d(c, A)\}.$$

- Siendo μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, y dados A y C dos conjuntos $\mu-$medibles de $\mathbb{R}^d$, definimos la distancia en medida entre A y C como

$$d_\mu(A, C) = \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A)$$

donde $A \setminus C = A \cap C^c$.

La distancia de Hausdorff y la distancia en medida, miden discrepancias entre conjuntos pero en distintos sentidos. Dos conjuntos pueden estar arbitrariamente cerca (o incluso a distancia 0) según una de ellas y arbitrariamente lejos según la otra. Un ejemplo de esto se ve en la Figura 1.3. En un caso hay un círculo rojo y un círculo azul con una deformación. Como los círculos son del mismo radio y sus centros están cercanos, y a su vez la *deformación* del círculo azul no aumenta mucho su área, estos dos conjuntos están cerca en medida de Lebesgue. Sin embargo, la deformación puede aumentar arbitrariamente la distancia de Hausdorff. En el otro caso, es al revés. Hay un círculo y un conjunto de puntos sorteados uniformemente en su interior. La distancia de Hausdorff tenderá a 0 cuando aumente la cantidad de puntos, sin embargo la distancia en medida será constante ya que el círculo tiene área π y la unión de los puntos tiene medida 0.

El siguiente teorema, probado en Cuevas et al. (2012), establecerá un vínculo entre ambas distancias. En particular, dice que la convergencia en la distancia de Hausdorff de una sucesión de conjuntos, y la convergencia en Hausdorff de sus fronteras, implican la convergencia de la distancia en medida de los conjuntos.

Teorema 1 (Cuevas et al. (2012)). *Dada una sucesión de conjuntos* $\{S_n\}$, *todos subconjuntos compactos no vacíos de* $\mathbb{R}^d$, *y dado un conjunto* $S \subset \mathbb{R}^d$ *compacto no vacío, con* $\mu(\partial S) = 0$. *Si* $d_H(S_n, S) \to 0$ *y* $d_H(\partial S_n, \partial S) \to 0$ *entonces* $d_\mu(S_n, S) \to 0$.

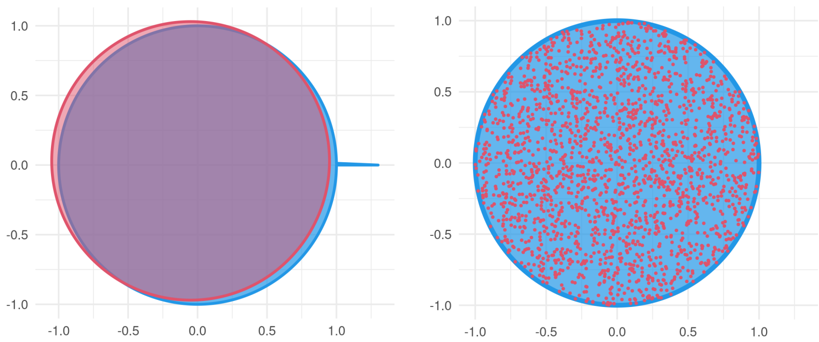

Figura 1.3: A la izquierda: la distancia en medida (considerando la medida Lebesgue) entre el conjunto rojo y el azul puede ser arbitrariamente chica, sin embargo la deformación que tiene el conjunto azul lo *aleja* del conjunto rojo en el sentido de la distancia de Hausdorff. En el caso de la derecha: los dos conjuntos están próximos en distancia de Hausdorff, sin embargo el rojo puede tener medida de Lebesgue arbitrariamente pequeña.

Definición 1 (Conjunto de borde C^k). *Extraída de (Evans, 2010, página 710). Dado un conjunto* $S \subset \mathbb{R}^d$ *acotado, decimos que su borde* ∂S *es* C^k *si para todo punto* $x \in \partial S$, *existe un* $r > 0$ *y una función de clase* C^k, $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *tal que, a menos de reorientar y renombrar los ejes, tenemos que*

$$S \cap B(x, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in B(x, r) : x_d \geq \gamma(x_1, \ldots, x_{d-1})\}.$$

Intuitivamente, esto quiere decir, que localmente el borde del conjunto es el gráfico de alguna función de clase C^k. *Esto impone una condición sobre qué tan suave es la frontera del conjunto.*

Capítulo 2

Descripción del modelo

2.1. Movimiento Browniano reflejado con drift (RBMD)

Definición 2 (RBMD). *Sea S un conjunto abierto, conexo y acotado, tal que ∂S es C^2. Dado un movimiento Browniano d-dimensional $\{B_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathbf{P}_x)$ y una función $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$, el movimiento Browniano reflejado con drift (RBMD), con punto de arranque $X_0 = x \in \mathrm{int}(S)$, es la única solución fuerte a la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t \nabla f(X_s)ds + \int_0^t \mathbf{n}(X_s)d\xi_s, \quad \text{donde } X_t \in \overline{S},\ \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$

Donde $\mathbf{n}(u)$ denota el vector unitario normal a la frontera ∂S en el punto $u \in \partial S$. Asumimos que ∇f es Lipschitz. El proceso $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ es lo que se llama el tiempo local del proceso en el conjunto ∂S, que satisface:

$$\xi_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \in \partial S\}} d\xi_s, \qquad \xi_0 = 0.$$

Esta ecuación diferencial estocástica está emparentada con el problema de Neumann, donde la solución está definida en un conjunto y se imponen condiciones para la derivada de la solución en el borde del conjunto. Intuitivamente, podemos observar que un proceso que verifique (2.1) debe comportarse como un Browniano con drift en el interior del conjunto, y cuando intenta escapar del conjunto, *recibe una fuerza* en la dirección normal al borde del conjunto

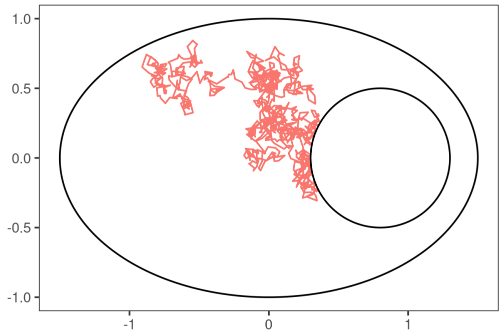

Figura 2.1: Gráfico de la trayectoria de un movimiento Browniano reflejado con drift en una elipse agujereada.

que hace que el incremento del proceso en ese momento sea hacia el interior del conjunto, en otras palabras, lo hace rebotar.

En la Figura 2.1 se puede ver una simulación de una trayectoria de un RBMD en un compacto de $\mathbb{R}^2$. La función de drift en este caso es $\nu(x, y) = (-x, -y)$.

2.1.1. Restricciones sobre la forma de S

La existencia y unicidad de esta solución ha sido ampliamente estudiada. Si bien la atención parece centrarse en el proceso, el conjunto S juega un rol fundamental, de hecho, es imprescindible imponer condiciones sobre su forma para asegurar la existencia y unicidad del RBMD.

En Tanaka (1979) se prueba la existencia y unicidad cuando S es convexo, luego en Saisho (1987) se extiende el resultado para una familia de conjuntos mucho menos restrictiva: se trata de una clase que está entre los conjuntos cono-convexos y aquellos que verifican la condición de rodamiento libre (ver Definición 6). Por más detalles sobre esto consultar Saisho (1987) o (Cholaquidis et al., 2016, páginas 7 y 8).

Por otro lado, uno de los objetivos es estimar el conjunto S a partir de la trayectoria de un RBMD, por lo tanto será necesario que el proceso visite todo el conjunto en tiempo finito. Será de rigor imponer algunas condiciones sobre la forma del conjunto para asegurar la consistencia de los estimadores. En lo que sigue introducimos algunas definiciones y resultados que servirán para formalizar estas ideas.

Definición 3 (Dominio no-trampa, Burdzy et al. (2006)). *Decimos que* S *es un dominio* no-trampa *para un proceso estocástico* $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ *si para toda bola cerrada* $B \subset S$ *de radio positivo se cumple que* $\sup_{x\in S} \mathbf{E}_x[\text{ínf}\{t > 0 : X_t \in B\} < \infty]$, *donde* $\mathbf{E}_x$ *denota la esperanza con respecto a* $\mathbf{P}_x$.

El hecho de que el dominio sea *no-trampa* es crucial para poder recuperar el conjunto S observando una trayectoria del proceso. En Burdzy et al. (2006) se estudian qué condiciones verifican los conjuntos que no verifican la definición de *no-trampa* para el movimiento Browniano reflejado. Informalmente, son conjuntos que tienen fronteras que no son suaves y eso puede hacer que el proceso *se quede atrapado* cerca de la frontera.

Proposición 1 (Proposición 1 de Cholaquidis et al. (2021b)). *Sea* $S \subset \mathbb{R}^d$ *una región acotada tal que* ∂S *es* C^2. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *la solución de* (2.1), *entonces* S *es no-trampa para* $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Dado $S \subset \mathbb{R}^d$ compacto, denotaremos $\text{Unp}(S)$ al conjunto:

$$\text{Unp}(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{existe una única proyección de } x \text{ sobre } S\}.$$

Definición 4 (Reach de un conjunto, Federer (1959)). *Sea* $S \subset \mathbb{R}^d$, *definimos:*

$$\begin{aligned} \text{reach}(S)(x) &= \sup\{r \geq 0 : B(x,r) \subset \text{Unp}(S)\}, \\ \text{reach}(S) &= \text{ínf}\{\text{reach}(S)(x) : x \in S\}. \end{aligned}$$

Definición 5 ($r-$convexidad). *Dado un conjunto* $S \subset \mathbb{R}^d$ *y* $r > 0$, *decimos que* S *es* r*-convexo si* $S = C_r(S)$ *donde*

$$C_r(S) := \bigcap_{\left\{B(x,r):\ B(x,r)\cap S=\emptyset\right\}} \Big(B(x,r)\Big)^c$$

es su cierre $r-$*convexo.*

Recordemos que el cierre convexo de un conjunto (la intersección de todos los convexos que lo contienen), se puede definir alternativamente como la intersección de los complementos de los semiplanos que no intersectan al conjunto. Podemos pensar el cierre $r-$convexo como una generalización de lo anterior cambiando los semiplanos por bolas de radio r. En la Figura 2.2, se muestra un conjunto arbitrario de puntos en $\mathbb{R}^2$ y su cierre $r-$convexo para $r = 0.15$ y $r = 0.20$. Cuando $r \to \infty$ lo que se obtiene es el cierre convexo.

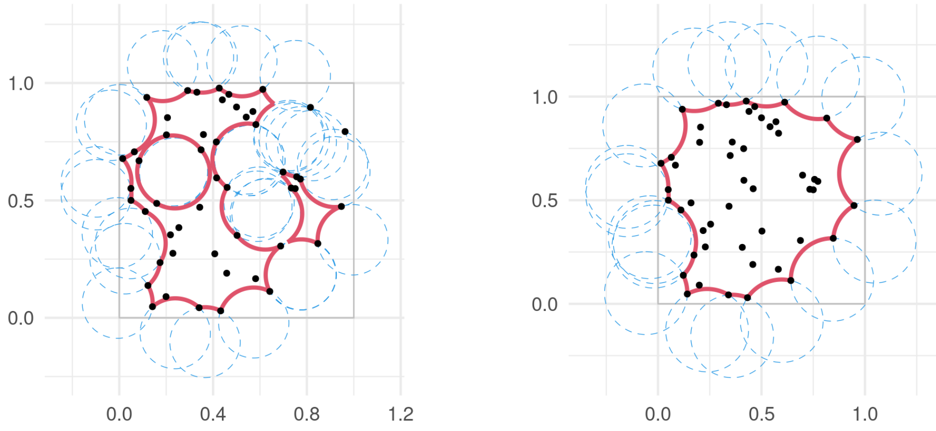

Figura 2.2: Cierre $r-$convexo de un conjunto de 100 puntos con distribución uniforme en $[0,1] \times [0,1]$. En el caso de la izquierda $r = 0.15$, en el caso de la derecha $r = 0.2$.

Definición 6 (r-rodamiento libre, Walther (1999)). *Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ compacto, diremos que una bola de radio r rueda libremente por S^c si para todo $x \in \partial S$ existe una bola B_x de radio r tal que $x \in \partial B_x$ y $B_x \cap S = \emptyset$.*

De la misma forma se define la condición de rodamiento libre por S.

Las siguientes proposiciones están probadas en Cuevas et al. (2012).

Proposición 2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ compacto. Si $\operatorname{reach}(S) \geq r > 0$ entonces S es r-convexo.*

Proposición 3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ compacto, r-convexo para algún $r > 0$ entonces por S^c rueda libremente una bola de radio r.*

Teorema 2 (Cuevas et al. (2012)). *Sea $\{S_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ que satisfacen que por su complemento rueda libremente una bola de radio r. Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ compacto, no vacío, tal que $d_H(S_n, S) \to 0$. Entonces*

a) $d_H(\partial S_n, \partial S) \to 0$.

b) *Si* $\operatorname{reach}(S_n) \geq r > 0$, *entonces tenemos que* $d_\mu(S_n, S) \to 0$.

El RBMD definido sobre un conjunto de borde C^2 tiene muy buenas propiedades: por un lado, se verifican las condiciones necesarias para su existencia y unicidad; por otro lado, admite una única distribución estacionaria; además con probabilidad 1 visitará infinitas veces cualquier abierto del conjunto. Aquí es importante otra vez resaltar la importancia de la forma del conjunto. Si S tuviera más de una componente conexa, claramente el RBMD no podría visitarlo todo, y podría haber más de una distribución estacionaria que dependa del punto de arranque. En la sección siguiente se dan algunas ideas que justifican la elección del RBMD como modelo de movimiento animal, y en el Capítulo 3 se presentan diversos resultados teóricos sobre las propiedades del proceso y sobre los estimadores.

2.1.2. El RBMD como modelo de movimiento animal

Los modelos utilizados para analizar el movimiento animal se han ido complejizando gracias a la disponibilidad de nuevas tecnologías para registrar y proveer de datos.

Si registramos la posición de un animal con suficiente tiempo entre una observación y otra, podemos considerar que esos datos están incorrelacionados. Este quizás era el caso cuando los ecólogos empezaron a analizar el movimiento animal y no tenían posibilidad de muestrear con alta frecuencia. Buena parte de los primeros estudios se hacían incluso ignorando la dimensión temporal de estas observaciones, usando lo que se llama *trapping data*: datos que registran, mediante algún mecanismo, que un animal pasó por determinado lugar, pero no hay información temporal guardada allí, (Hayne, 1949; Ribble et al., 2002; Socias-Martínez et al., 2022). En Worton (1989) se propone caracterizar el HR estimando la distribución de la cual provienen estas variables, en particular propone asumir que existe una densidad y estimarla por núcleos. Luego, una estimación del HR se puede obtener al considerar los conjuntos de nivel de dicha estimación.

En la medida que es posible muestrear con mayor frecuencia este proceso (menor intervalo de tiempo entre observaciones), se tiene mayor resolución del fenómeno en cuestión y aumenta la dependencia entre las observaciones. Esto es análogo con la resolución de una imagen digital. En una imagen de alta resolución, la información que hay en dos píxeles contiguos esperamos que sea similar, mientras que si la imagen pierde resolución, lo que habitualmente se conoce como “imagen pixelada” podemos esperar cambios más bruscos entre dos píxeles contiguos. Es curioso notar que, cuando ocurre esto, coloquialmente es aceptada la idea de que se pierde información: supongamos que teníamos 1000 píxeles para describir un rostro, y ahora el mismo rostro está representado por menos píxeles. Pero en el contexto de teoría de la información, 10 píxeles de la imagen de alta resolución son menos informativos que 10 píxeles de la segunda imagen.

Varios investigadores han coincidido en señalar que el estimador por núcleos en su formulación clásica está concebido para tratar con datos iid (Noonan et al., 2019; Fleming et al., 2015; Calabrese et al., 2016), y que como esa hipótesis no se verifica en los conjuntos de datos más modernos, en estos casos se produce una subestimación del HR. El argumento es que si se tiene un conjunto de observaciones independientes, se tiene una cierta *cantidad de información* acerca del movimiento en cuestión. Pero si ahora ese movimiento es muestreado a mayor frecuencia, cada observación está *rodeada* de un conjunto de observaciones que suaviza esa trayectoria pero que no aporta mayor información a efectos de conocer el área que habita ese individuo. Entonces, si bien se tiene más observaciones por unidad de tiempo, el tamaño 'efectivo' de la muestra, no aumentó. El estimador por núcleos asigna un determinado peso a cada dato observado, que tiene que ver con la ventana de suavizado y con el tamaño de muestra, por tanto este tamaño de muestra efectivo debe considerarse al asignar esta ponderación.

En la Figura 2.3, se muestra un ejemplo del efecto de aumentar la frecuencia de muestreo en el estimador por núcleos (eligiendo la ventana por validación cruzada). Este método de núcleos brinda como estimación una función de densidad, el borde del conjunto de nivel al que dicha densidad estimada le asigna probabilidad 0.98 está representado en contorno negro en la figura.

A partir de observar este fenómeno, es que en Fleming et al. (2015) se propone un nuevo estimador por núcleos, denominado *autocorrelated kernel density estimator* (AKDE), que lo que hace es tener en cuenta la autocorrelación de las observaciones para que el conjunto estimado no quede tan concentrada en torno a la trayectoria observada, evitando así subestimarlo. Entonces este método propone estimar los parámetros de la función de autocovarianza de algún proceso estocástico a partir de los datos e incorporar esa función en el cálculo del ancho de la ventana del núcleo.

El problema que se ignora en este trabajo, y en otros donde se incorpora esta metodología, es que no está asegurada la existencia del objeto que se quiere estimar. De hecho, con el objetivo de tener trayectorias suaves, se proponen modelos de procesos estocásticos integrados (como el Ornstein-Uhlenbeck integrado) que no admiten una distribución estacionaria.

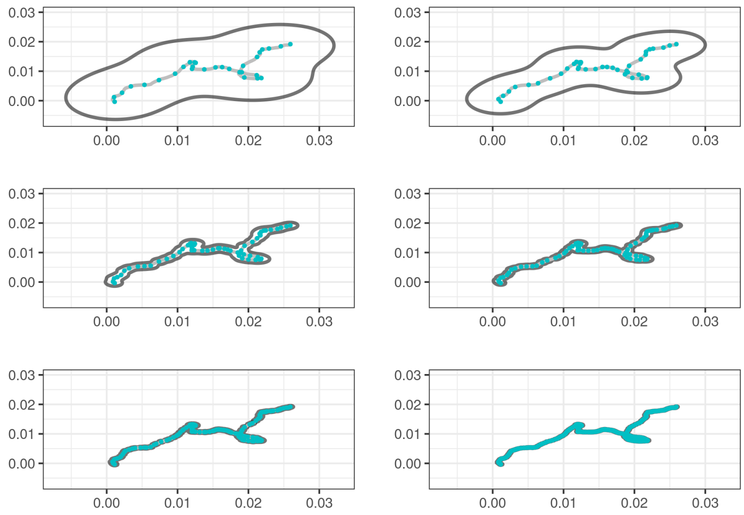

Figura 2.3: Efecto en la estimación de un conjunto de nivel de la densidad mediante núcleos, al aumentar la frecuencia de muestreo de un proceso estocástico. Se tiene una trayectoria de un proceso estocástico representada en color gris, con 200 puntos. De izquierda a derecha, y de arriba a abajo se presentan los resultados tomando una muestra de 30, 40, 60, 80, 120, 200 puntos de ese proceso en cada caso.

En Calabrese et al. (2016) se revisan distintos procesos estocásticos y sus propiedades como modelos de movimiento animal, las más deseables son: la permanencia del proceso en una región (lo que se asocia con la relevancia de determinar el HR), la autocorrelación de las posiciones (que el proceso tenga trayectorias continuas) y la autocorrelación en las velocidades (que el proceso tenga trayectorias suaves). Allí de desaconseja el uso del movimiento Browniano por no estar estocásticamente acotado. En nuestro caso, al considerar el RBMD, estamos restringiendo este proceso a permanecer en un conjunto compacto, que es lo que consideraremos como HR y es uno de los objetos que queremos estimar.

Que el proceso no tenga trayectorias suaves no es dilapidario, a fin de cuentas, lo que queremos modelar no es necesariamente toda la trayectoria del animal, si no un conjunto finito de registros de su posición, y lo suave que resulte la trayectoria discretizada, dependerá de la distancia temporal entre las observaciones. Si consideramos un proceso con trayectorias diferenciables, en carácter general, no será markoviano.Por tanto, el RBMD logra el equilibrio de ser un modelo bien estudiado, para el que se tiene teoría que asegura la consistencia de los estimadores planteados y que no está alejado de la aplicación en casos reales.

2.2. Modelo de observación intermitente 'on-off'

Definimos nuestro modelo 'on-off' de la siguiente manera:

Definición 7 (Modelo 'on-off'). *Dados*

- $S \subset \mathbb{R}^d$ *un conjunto compacto.*
- $\{X_t : t > 0\}$ *un movimiento Browniano reflejado en* S.
- *Dos parámetros* $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$
- *Una función* $\{a_t : t > 0\}$ *que toma valores en* $\{0, 1\}$ *intermitentemente, donde* $a_t = 1$ *en períodos de largo* δ_1 *y* $a_t = 0$ *en períodos de largo* δ_2. *Más precisamente,*

$$a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[k(\delta_1+\delta_2),(k+1)\delta_1+k\delta_2]}(t).$$

Definimos el proceso

$$X_T^{ON} = \{X_t : t \in \mathcal{I}, t < T\}, \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{I} := \{t : a_t = 1\} = \cup_{k=0}^{\infty}[k(\delta_1 + \delta_2), (k + 1)\delta_1 + k\delta_2]$.

Observación 1. *Observemos que el procesos* X_T^{ON} *está definido únicamente en una unión de intervalos disjuntos. La función* a_t *funciona como una llave 'on-off': el proceso es observado en los tiempos* $\{t : a_t = 1\}$. *Este conjunto de tiempos está dado por una unión de intervalos de duración* δ_1, *mientras que el proceso es desconocido en una unión de intervalos de longitud* δ_2.

La intuición atrás del uso de este modelo se basa en que las propiedades estadísticas de los estimadores no deberían variar demasiado por perder, de forma más o menos controlada, algunos tramos de la trayectoria. Veremos en los Capítulos 3 y 4 resultados teóricos y simulaciones experimentales que validan esta idea.

En la Figura 2.4 se representan gráficamente los dos modelos de observación aplicados a un proceso estocástico unidimensional (representada su evolución en el tiempo).

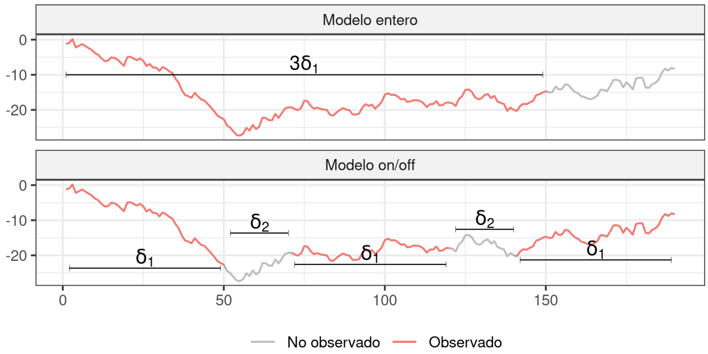

Figura 2.4: Esquema de observación bajo cada modelo. En el eje horizontal está representado el tiempo, en cada gráfico se presenta con color la trayectoria observada. Arriba: el proceso se observa en el intervalo $[0, T = 3\delta_1]$. Abajo: el proceso se observa en una unión de intervalos disjuntos, donde la medida de la unión es T.

En la Figura 2.5 se puede ver una trayectoria simulada de un RBMD muestreada según este esquema, en rojo se señala la parte de la trayectoria observada, que se corresponde con los momentos en los que el GPS está encendido; y en gris se muestra la parte de la trayectoria no observada, que se corresponde con los momentos en los que el GPS está apagado.

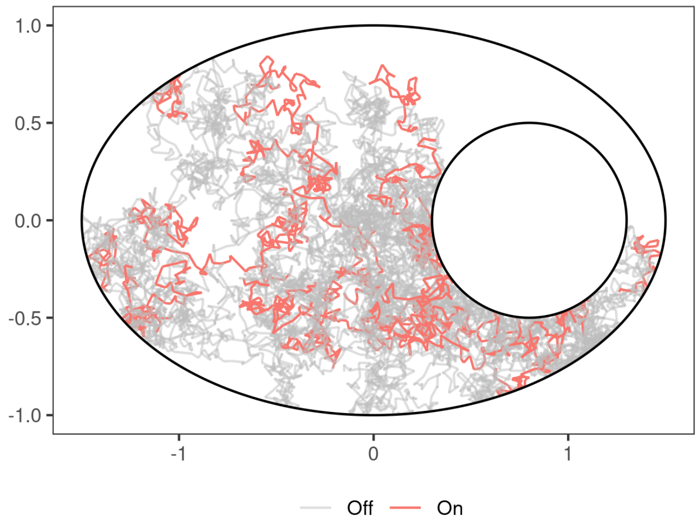

Figura 2.5: Simulación de la trayectoria de un RBMD bajo el modelo 'on-off', en rojo se presenta la parte de la trayectoria observada, y en gris la parte de la trayectoria no observada.

Capítulo 3

Estimadores y resultados teóricos

En este capítulo se presentan resultados teóricos sobre propiedades del RBMD definido sobre un conjunto de borde C^2. Se definen estimadores de este conjunto, y de la distribución estacionaria del proceso y se presentan resultados asintóticos sobre su consistencia. Se siguen las ideas de Cholaquidis et al. (2021b) complementando algunos resultados que no fueron probados en ese trabajo e incorporando la novedad de trabajar con el proceso obtenido a través del esquema de muestreo 'on-off' definido en la Sección 2.2.

Previamente se introducen algunas definiciones sobre procesos y cadenas de Markov extraídos de Meyn and Tweedie (1993). Aquellas demostraciones que son de interés se pueden ver en el Anexo 1, para las restantes siempre se incluyen las referencias dónde se pueden encontrar.

Definición 8 (Medida invariante)**.** *Una medida de probabilidad π sobre un conjunto S es invariante para un proceso de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ homogéneo en el tiempo, si*

$$\int_S \mathbf{P}_x(X_t \in A)d\pi(x) = \pi(A), \text{ para todo } t > 0 \text{ y todo } A \subset S \ \pi\text{-medible},$$

donde $\mathbf{P}_x(X_t \in A) = \mathbf{P}(X_t \in A | X_0 = x)$.

Definición 9 (Proceso de Markov ergódico)**.** *Un proceso de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ con espacio de estados S es ergódico si existe una medida de probabilidad π*

invariante tal que

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{P}_x(X_t \in \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} = 0, \text{ para todo } x \in S.$$

Se dice que la medida invariante π es la distribución estacionaria del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

La ergodicidad de un proceso es una propiedad relevante para poder recuperar aspectos poblacionales del proceso a través de sus trayectorias. Cabe recordar acá lo comentado en la Sección 2.1.2. Supongamos que tenemos un proceso estocástico con una distribución estacionaria del que observamos una subcadena. Supongamos también que el mecanismo por el cual obtenemos las observaciones de esta cadena responde a que aumentamos la frecuencia de muestreo en el proceso original, tal como se presenta en la Figura 2.3. Como resultado tendremos una cadena (los puntos celestes en la Figura 2.3) que admite una distribución estacionaria pero que no es ergódica. Por más que el tamaño de muestra aumente no podremos recuperar algunas propiedades estadísticas del proceso.

Definición 10 (Cadena de Markov geométricamente ergódica)**.** *Decimos que una cadena de Markov es geométricamente ergódica, si existe una probabilidad π sobre S y constantes γ, ρ tales que $\gamma > 0$ y $0 < \rho < 1$, de forma tal que*

$$|\mathbf{P}_x(X_n \in A) - \pi(A)| \leq \gamma\rho^n, \text{ para todo } A \in \mathfrak{B}(S), n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente proposición, demostrada en Burdzy et al. (2006) para el caso del RBM (sin drift) y en Cholaquidis et al. (2021b) para el caso del RBMD, será clave para para probar la consistencia de la trayectoria como estimador del Home Range en el sentido de la distancia de Hausdorff.

Proposición 4 (Ergodicidad del RBMD, Proposición 2 de Cholaquidis et al. (2021b))**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado tal que ∂S es C^2. Sea π la distribución estacionaria de $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Entonces existen constantes positivas α y β tales que*

$$\sup_{x\in S} \left\|\mathbf{P}_x(X_t \in \cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{TV} \leq \beta e^{-\alpha t}.$$

3.1. Estimación de S

A partir de la observación de una realización del RBMD se puede definir un estimador del conjunto S considerando el cierre r-convexo de su trayectoria (para algún valor de r). El siguiente teorema prueba que la trayectoria en sí misma (y cualquier subconjunto medible de S que la contenga) es un buen estimador del conjunto, en el sentido de la distancia de Hausdorff. La trayectoria, como subconjunto de $\mathbb{R}^d$ tendrá medida nula, por tanto para tener la convergencia en el sentido de la distancia en medida es que tomamos el cierre r-convexo. Del corolario del teorema y la observación siguiente se deduce su consistencia.

Además este resultado da cuenta de la mejora que implica la utilización del modelo 'on-off'. Da una cota superior para la distancia de Hausdorff entre S y cualquier subconjunto medible de S que contenga a la trayectoria, cuando ésta es observada según este modelo. Y esto se puede comparar con el caso en que la trayectoria se observa de forma ininterrumpida por un período de tiempo de igual longitud.

Teorema 3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto tal que $S = \overline{\operatorname{int}(S)}$ y ∂S es C^2. Sea X_T^{ON} definido en (2.2). Supongamos que el drift es una función Lipschitz, dada por el gradiente de alguna función f y asumamos que la distribución estacionaria π tiene densidad g. Denotemos $c := \inf_{x \in S} g(x)$. Sea S_T cualquier conjunto medible que contenga a X_T^{ON} c.s., tal que $S_T \subset S$, sea $\varepsilon < 2(2\beta/c\omega_d)^{1/d}$.*

Asumamos que

$$\delta_1 > \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{2\beta}{c\omega_d(\varepsilon/2)^d}\right). \tag{3.1}$$

Sea $T = p\delta_1 + (p-1)\delta_2$. Entonces

$$\mathbf{P}\{d_H(S_T, S) > \varepsilon\} \leq C_1 \exp(-C_2 p\delta_1) \exp(-C_3(p-1)). \tag{3.2}$$

Si embargo, si el GPS está encendido durante el intervalo $[0, p\delta_1]$, la cota es

$$\mathbf{P}\{d_H(\widetilde{S}_{p\delta_1}, S) > \varepsilon\} \leq C_1 \exp(-C_2 p\delta_1) \tag{3.3}$$

donde $\widetilde{S}_{p\delta_1}$ es cualquier conjunto medible que contenga a $X_{p\delta_1} = \{X_t : t < p\delta_1\}$, y contenido en S. C_1, C_2, C_3 son constantes positivas cuyos valores están explicitados en la demostración. Solo dependen de $\varepsilon, \mu(S), \beta, \alpha$ y ω_d.

Observación 2. *La elección de los parámetros es un problema práctico importante. Observar que dado B, la duración de la batería del GPS, tenemos que $p = B/\delta_1$. Entonces, dado δ_1 y B, p queda determinado. Las ecuaciones* (3.2) *y* (3.3) *sugieren tomar p tan grande como sea posible, y luego δ_1 tan chico como sea posible, siempre que verifique las condiciones* (3.1) *y $p\delta_1 = B$. Esta elección es consistente con los resultados obtenidos en las simulaciones y el ejemplo con datos reales. Observar que si incrementamos p (y achicamos δ_1), disminuye la autocorrelación del proceso discretizado. Esto va en la misma dirección que la regla empírica, bien conocida por quienes se dedican a la estimación del* **HR** *y comentada en el capítulo anterior, que establece que disminuir la autocorrelación aumenta el tamaño de muestra efectivo. (Ver Noonan et al. (2019)).*

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del Teorema 3, para cualquier conjunto medible S_T que contenga a X_T^{ON}c.s. tenemos*

a) $d_H(S_T, S) \to 0 \quad c.s.$

b) para algún $r > 0$, $d_H(C_r(X_T^{ON}), S) \to 0 \quad c.s.$.

Este corolario es una consecuencia directa del Teorema 3 y se prueba siguiendo las mismas ideas que se usan para probar el Corolario 1 en Cholaquidis et al. (2016). Para la parte b), notar que como consecuencia directa de (Walther, 1999, Teorema 1), si ∂S es C^2 entonces, S y $\bar{S}^c$ son r-convexos, para algún $r > 0$, y por tanto, $C_r(X_T^{ON})$ es un subconjunto medible de S.

Observación 3. *Bajo las hipótesis del Teorema 3 tenemos la convergencia en distancia de Hausdorff de una sucesión de conjuntos r-convexos. Esto implica la convergencia de sus fronteras (aquí estamos usando el Teorema 2). Entonces, ahora aplicamos el Teorema 1, y tenemos la convergencia en medida de los conjuntos, es decir, $d_\mu(C_r(X_T^{ON}), S) \to 0$.*

Observación 4. *Al momento de construir el cierre r-convexo de la trayectoria, r es un parámetro a fijar. En (Rodríguez-Casal and Saavedra-Nieves, 2021, Sección 3.1) se propone un estimador consistente del valor de r para el cual un conjunto es r-convexo.*

3.2. Estimación de la distribución estacionaria

En la ecuación diferencial estocástica (2.1) el drift $\nu(x)$ está dado por el gradiente ∇f de una función f,

$$\nu(x) = -\frac{1}{2}\nabla f(x). \tag{3.4}$$

Tal como se enuncia en la Proposición 5, la densidad g de la distribución estacionaria para el proceso (observado de forma ininterrumpida o de forma intermitente) está enteramente relacionada con esta función f.

Proposición 5. *Sea S un dominio acotado tal que ∂S es C^2. Asumamos que ∇f es Lipschitz en $\overline{S}$. Entonces la medida π es la única medida estacionaria de $\{X_t\}_{t\geq 0}$, es absolutamente continua y su densidad está dada por:*

$$g(x) := d\pi(x) = ce^{-f(x)}\mathbb{I}_S(x)dx, \tag{3.5}$$

donde c es una constante de normalización.

Observación 5. *Si $\nu = 0$, se obtiene el movimiento Browniano reflejado sin drift y la distribución estacionaria es uniforme en S (Burdzy et al., 2006).*

Al igual que en Cholaquidis et al. (2021b), considerando una submuestra de puntos $\{X_1, \ldots, X_n\}$ en los que el GPS está encendido, un estimador de la densidad g es:

$$\hat{g}_n(x) = \frac{c}{n\tau_n^d}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{\tau}\right)\mathbf{1}_{C_r(X_T^{ON})}(x), \tag{3.6}$$

donde $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función núcleo no negativa, $C_r(X_T^{ON})$ es el cierre r-convexo de la trayectoria, y c es una constante de normalización. El siguiente teorema establece la convergencia uniforme, casi segura, de $\hat{g}_n$ y la consistencia de sus conjuntos de nivel en el sentido de la distancia de Hausdorff y en medida.

Antes definamos, para una función g y $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel λ, $G_g(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) > \lambda\}$, por tanto $\partial G_g(\lambda)$ es el borde del conjunto de nivel λ.

Teorema 4. *A las hipótesis del Teorema 3, agreguemos además la condición de que g sea Lipschitz. Sea $\aleph_n = \{X_{(k+1)\delta_1 + k\delta_2} : k = 0, \ldots, n-1\}$, y sea $\hat{g}_n$ definido en (3.6), basado en $\aleph_n$. Asumamos que K es no negativa, Lipschitz* *y que* $\int K(t)dt = 1$. *Sea* $\tau = \tau_n \to 0$, *tal que* $n\tau^{d+2}/\log(n)^{2(1+\kappa)} \to 0$ *y* $\sqrt{n\tau^d}/\log(n)^{2+\kappa} \to \infty$ *para algún* $\kappa > 0$. *Entonces*

$$\beta_n \sup_{x \in S} |\hat{g}_n(x) - g(x)| \to 0 \quad c.s..$$

donde $\beta_n = \mathcal{O}\left(\sqrt{n\tau^d}/\log(n)^{1+\kappa}\right)$.

Además, si $\lambda > 0$ *es tal que* $\partial G_g(\lambda) \neq \emptyset$, g *es* C^2 *en un entorno* E *del conjunto de nivel* λ *y el gradiente de* g *es estrictamente positivo en* E, *entonces* $d_H(\partial G_g(\lambda), \partial G_{\hat{g}_n}(\lambda)) = o(1/\beta_n)$ *casi seguramente.*

Los conjuntos de nivel proveerán información significativa acerca del tiempo que pasa el animal en esas regiones, en particular el Home Range se corresponderá con los conjuntos de nivel λ, para un valor de λ grande.

Un estimador de la función de drift ν, se puede obtener utilizando una regla plug-in. Por las ecuaciones (3.4) y (3.5) tenemos la relación que hay entre ν y la densidad g, y dado que tenemos un estimador consistente $\hat{g}_n$ para g, tenemos el siguiente estimador plug-in para ν: $\hat{\nu}(x) = \frac{1}{2}\nabla \log(\hat{g}_n(x))$.

De forma alternativa, un estimador no paramétrico consistente para ν, que no depende de una estimación de g, se puede ver en puede ver en (Cholaquidis et al., 2021b, Sección 3.3).

Capítulo 4

Estudio de simulación

En este capítulo presentamos un estudio de simulación en el que comparamos empíricamente los dos esquemas de muestreo propuestos: por un lado, la observación del proceso de forma ininterrumpida, y por otro lado, la observación bajo el modelo 'on-off'.

Por ser un proceso estocástico en tiempo continuo, lo que podemos simular es una versión discretizada de sus trayectorias, por tanto un parámetro a definir es el paso de discretización, que denotaremos h. Luego tenemos los parámetros δ_1 y δ_2, del modelo 'on-off'. En este estudio, fijamos los valores $h \in \{0.001, 0.002, 0.003\}$ y $\delta_1/h, \delta_2/h \in \{100, 250, 500\}$, y para cada terna (h, δ_1, δ_2) simulamos 50 trayectorias del proceso. En cada trayectoria simulada, a su vez, se aplicaron los dos esquemas de muestreo y con cada uno aproximamos computacionalmente la distancia de Hausdorff entre la trayectoria y el conjunto, y la distancia en medida entre el cierre r-convexo de la trayectoria y el conjunto.

Consideramos un RBMD en el conjunto $S = E \setminus B((4/5, 0), 1/2)$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2/9 + y^2 \leq 1\}$ (ver Figura 4.1), con función de drift dada por $\mu(x, y) = -(x, y)$. La densidad estacionaria es

$$g(x) = \frac{1}{c} e^{-(x^2+y^2)} \mathbb{I}_S(x, y) \quad \text{donde } c = \iint_S \exp\left[-(x^2 + y^2)\right] dxdy. \tag{4.1}$$

En la Figura 4.1 se puede ver en línea negra el conjunto S, y en colores los conjuntos de nivel de la densidad estacionaria. En la Sección 4.3 se mostrarán resultados de su estimación.

Para obtener simulaciones de trayectorias del RBMD, seguimos el esquema propuesto en Bossy et al. (2004) descrito a continuación.

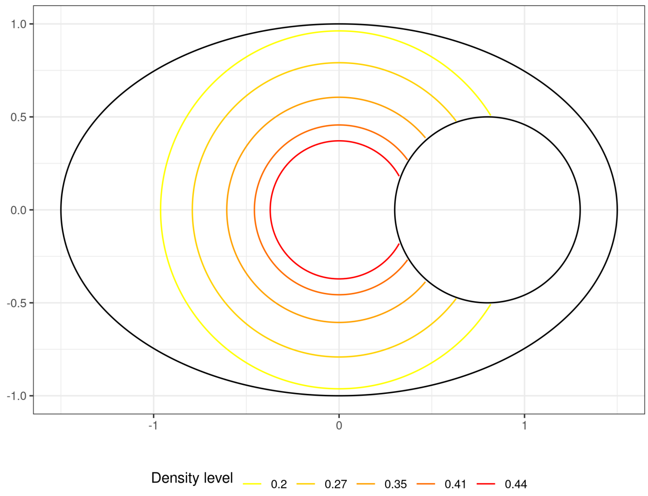

Figura 4.1: Conjuntos de nivel teóricos para la densidad g dada por (4.1) en colores, y en negro está representado el borde del conjunto S.

Denotaremos $\mathrm{sym}(z)$ al punto simétrico con el punto z con respecto a ∂S. Dado un paso $h > 0$ y un punto de partida $X_0 = x \in S$, y suponiendo que obtuvimos en el paso i-ésimo un punto $X_i \in S$, para producir el siguiente punto, definimos:

$$Y_{i+1} = X_i + Z_i + h\nabla f(X_i),$$

donde Z_i es un vector aleatorio Gaussiano, centrado, independiente de $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$, con matriz de covarianza $h \times (I_d)_{\mathbb{R}^2}$.

Luego:

- Si $Y_{i+1} \in S$, dejamos $X_{i+1} = Y_{i+1}$.
- Si $Y_{i+1} \notin S$ y $\mathrm{sym}(Y_{i+1}) \in S$, definamos $X_{i+1} = \mathrm{sym}(Y_{i+1})$.
- Si $Y_{i+1} \notin S$ y $\mathrm{sym}(Y_{i+1}) \notin S$, definamos $X_{i+1} = X_i$.

En la Figura 4.2 se puede ver un ejemplo de cómo se refleja un proceso en el borde de una elipse.

Finalmente, el modelo 'on-off' se obtiene de $X_1, \ldots, X_N$ donde nos quedamos solamente con aquellos X_i tales que $i \in \cup_{k=0}^{\infty}\{[k(\delta_1 + \delta_2)/h, (k+1)\delta_1/h + k\delta_2/h]\}$. En este caso simulamos cadenas de largo $N = 10^5$ pasos.

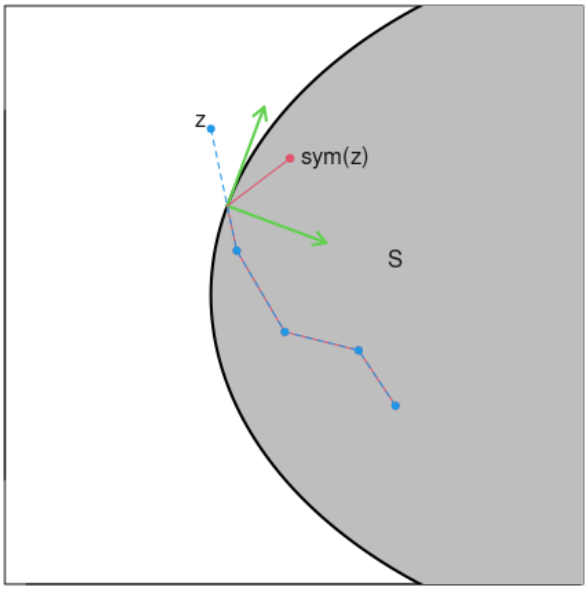

Figura 4.2: Ejemplo de reflexión de un proceso, donde el conjunto S es una elipse. En azul punteado se muestra la trayectoria *original*, y en rojo sólido se grafica la trayectoria reflejada.

4.1. Comportamiento de la distancia de Hausdorff

En la Tabla 4.1 se muestran los promedios de las distancias de Hausdorff calculadas sobre las 50 réplicas para los distintos valores de δ_1, δ_2, h para el modelo 'on-off'. En todas las tablas además presentamos entre paréntesis las medianas de las mismas cantidades.

Los mismos cálculos están presentados en la Tabla 4.2, para el caso en que de las trayectorias se observan la misma cantidad de puntos pero de forma ininterrumpida.

Una comparación entre los dos modelos se puede ver en la Tabla 4.3 y la Figura 4.3. La Figura 4.3 muestra en cada uno de los 9 paneles y para los distintos valores de h, las distancias de Hausdorff para la realización en los dos esquemas: en círculo rojo se presenta para la observación ininterrumpida, y en cuadrado azul para el caso 'on-off'. Las parejas de puntos que se corresponden con una misma simulación están unidas por segmentos. La Tabla 4.3 muestra la media (y la mediana entre paréntesis) de la proporción de la ganancia de

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.1534 (0.1009)	0.2188 (0.1769)	0.2882 (0.2263)
0.001	250	0.1414 (0.0942)	0.1814 (0.1209)	0.2358 (0.1757)
0.001	500	0.1341 (0.0906)	0.1444 (0.0992)	0.1968 (0.1392)
0.002	100	0.0689 (0.0519)	0.1119 (0.0862)	0.1735 (0.1382)
0.002	250	0.0555 (0.0382)	0.0780 (0.0547)	0.1260 (0.0887)
0.002	500	0.0508 (0.0330)	0.0648 (0.0431)	0.0885 (0.0625)
0.003	100	0.0495 (0.0424)	0.0863 (0.0688)	0.1375 (0.1099)
0.003	250	0.0404 (0.0305)	0.0508 (0.0401)	0.0761 (0.0619)
0.003	500	0.0370 (0.0282)	0.0424 (0.0342)	0.0563 (0.0439)

Tabla 4.1: Media y mediana sobre 50 repeticiones de la distancia de Hausdorff, para las trayectorias observadas bajo el modelo 'on-off', con $N = 10^5$ pasos.

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.3072 (0.3128)	0.5151 (0.5134)	0.6478 (0.6726)
0.001	250	0.1983 (0.1143)	0.3090 (0.3128)	0.4603 (0.4726)
0.001	500	0.1469 (0.0811)	0.2043 (0.1143)	0.3072 (0.3128)
0.002	100	0.1214 (0.0784)	0.2580 (0.1476)	0.4047 (0.3165)
0.002	250	0.0800 (0.0435)	0.1215 (0.0784)	0.2178 (0.1216)
0.002	500	0.0674 (0.0368)	0.0826 (0.0453)	0.1215 (0.0784)
0.003	100	0.0632 (0.0520)	0.1260 (0.1026)	0.2774 (0.1668)
0.003	250	0.0426 (0.0352)	0.0632 (0.0520)	0.1006 (0.0849)
0.003	500	0.0376 (0.0286)	0.0473 (0.0368)	0.0632 (0.0520)

Tabla 4.2: Media y mediana sobre 50 repeticiones de la distancia de Hausdorff, para las trayectorias observadas de continuo, con $N = 10^5$ pasos.

eficiencia dada por

$$1 - \frac{\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_H(S_i^{ON}, S)}{\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_H(S_i^{[0:p\delta_1]}, S)},$$

donde S_i^{ON} refiere a cualquier conjunto medible que contenga a la i-ésima trayectoria simulada, observada bajo el modelo 'on-off'; análogamente $S_i^{[0,p\delta_1]}$ refiere a cualquier conjunto medible que contenga a la i-ésima trayectoria simulada, observada en el período de tiempo $[0, \delta_1]$.

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.5008 (0.6775)	0.5753 (0.6554)	0.5551 (0.6635)
0.001	250	0.2866 (0.1760)	0.4129 (0.6136)	0.4878 (0.6282)
0.001	500	0.0874 (−0.1169)	0.2931 (0.1325)	0.3594 (0.5550)
0.002	100	0.4323 (0.3381)	0.5665 (0.4156)	0.5713 (0.5634)
0.002	250	0.3055 (0.1235)	0.3581 (0.3029)	0.4212 (0.2705)
0.002	500	0.2457 (0.1054)	0.2162 (0.0498)	0.2720 (0.2024)
0.003	100	0.2169 (0.1839)	0.3156 (0.3291)	0.5043 (0.3413)
0.003	250	0.0523 (0.1315)	0.1960 (0.2280)	0.2439 (0.2709)
0.003	500	0.0159 (0.0141)	0.1045 (0.0706)	0.1101 (0.1546)

Tabla 4.3: Media y mediana de la proporción de ganancia de eficiencia dada por $1 - \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_H(S_i^{ON}, S)/\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_H(S_i^{[0:p\delta_1]}, S)$.

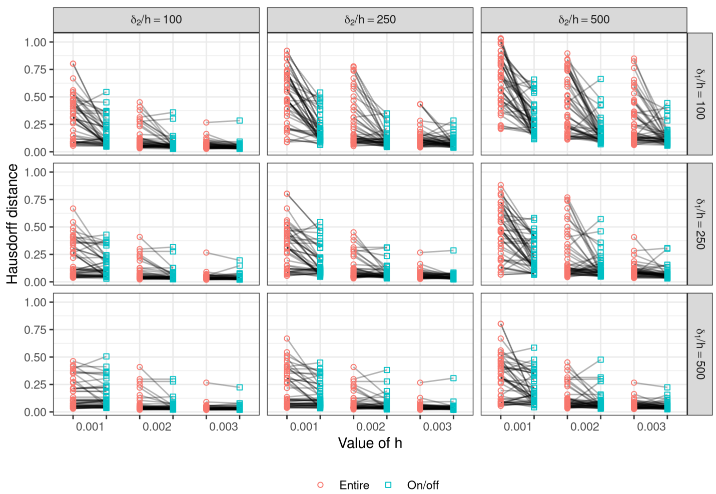

Figura 4.3: 50 realizaciones del valor de la distancia de Hausdorff entre la trayectoria observada bajo el modelo 'on-off' y el conjunto S (representadas con los cuadrados celestes). Cada punto está unido mediante un segmento con el correspondiente valor que toma la distancia de Hausdorff entre el conjunto y la trayectoria pero observada de corrido durante $[0, p\delta_1]$ (representado con círculo rojo), para diferentes valores de δ_1 y δ_2.

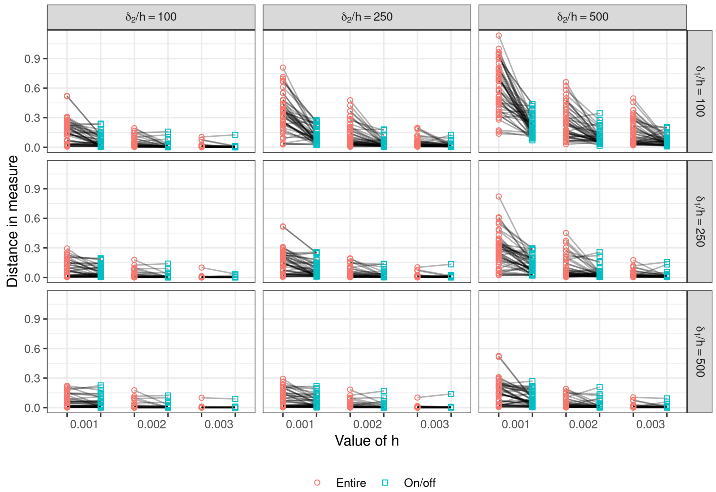

Figura 4.4: 50 realizaciones del valor de la distancia en medida entre la trayectoria observada bajo el modelo 'on-off' y el conjunto S (representadas con los cuadrados celestes). Cada punto está unido mediante un segmento con el correspondiente valor que toma la distancia de Hausdorff entre el conjunto y la trayectoria pero observada de corrido durante $[0, p\delta_1]$ (representado con círculo rojo), para diferentes valores de δ_1 y δ_2.

4.2. Comportamiento de la distancia en medida

El mismo análisis se hizo para la distancia en medida. El promedio (y mediana) sobre las 50 réplicas de la distancia en medida entre el cierre r-convexo de la trayectoria (se consideró $r = 0.4$) y el conjunto S. La Tabla 4.4 muestra esto para el modelo 'on-off', y la Tabla 4.5 para el otro caso. En la Tabla 4.6 se muestra, de nuevo, la eficiencia relativa entre el modelo 'on-off' por sobre el otro.

La Figura 4.4 es el equivalente a la Figura 4.3 para el caso de la distancia en medida.

4.3. Estimación de la densidad estacionaria y sus conjuntos de nivel

La Figura 4.5 muestra los conjuntos de nivel estimados para diferentes valores de (δ_1, δ_2), la densidad g está dada por (4.1). Los conjuntos de nivel

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.0602 (0.0309)	0.1151 (0.0917)	0.2132 (0.2053)
0.001	250	0.0489 (0.0260)	0.0758 (0.0442)	0.1239 (0.1108)
0.001	500	0.0413 (0.0159)	0.0504 (0.0247)	0.0828 (0.0663)
0.002	100	0.0151 (0.0062)	0.0364 (0.0228)	0.0980 (0.0720)
0.002	250	0.0096 (0.0028)	0.0189 (0.0077)	0.0395 (0.0198)
0.002	500	0.0089 (0.0021)	0.0132 (0.0037)	0.0225 (0.0095)
0.003	100	0.0064 (0.0032)	0.0205 (0.0124)	0.0582 (0.0464)
0.003	250	0.0031 (0.0015)	0.0077 (0.0036)	0.0163 (0.0091)
0.003	500	0.0033 (0.0010)	0.0050 (0.0018)	0.0083 (0.0039)

Tabla 4.4: Media y mediana sobre 50 repeticiones de la distancia en medida, para las trayectorias observadas bajo el modelo 'on-off', con $N = 10^5$ pasos y diferentes valores de h, δ_1 y δ_2.

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.1514 (0.1459)	0.3463 (0.3485)	0.6047 (0.5812)
0.001	250	0.0783 (0.0404)	0.1522 (0.1452)	0.2762 (0.2660)
0.001	500	0.0501 (0.0160)	0.0840 (0.0450)	0.1519 (0.1463)
0.002	100	0.0383 (0.0141)	0.1211 (0.0655)	0.2521 (0.2289)
0.002	250	0.0192 (0.0039)	0.0382 (0.0123)	0.0924 (0.0419)
0.002	500	0.0157 (0.0025)	0.0202 (0.0051)	0.0385 (0.0131)
0.003	100	0.0112 (0.0047)	0.0418 (0.0251)	0.1483 (0.0895)
0.003	250	0.0043 (0.0015)	0.0110 (0.0044)	0.0271 (0.0158)
0.003	500	0.0036 (0.0010)	0.0053 (0.0021)	0.0112 (0.0047)

Tabla 4.5: Media y mediana sobre 50 repeticiones de la distancia en medida, para las trayectorias observadas de continuo, con $N = 10^5$ pasos.

h	δ_1/h	δ_2/h 100	250	500
0.001	100	0.6027 (0.7882)	0.6677 (0.7369)	0.6475 (0.6468)
0.001	250	0.3750 (0.3564)	0.5020 (0.6957)	0.5516 (0.5834)
0.001	500	0.1762 (0.0094)	0.4001 (0.4505)	0.4551 (0.5471)
0.002	100	0.6051 (0.5580)	0.6996 (0.6514)	0.6110 (0.6853)
0.002	250	0.4987 (0.2901)	0.5051 (0.3715)	0.5726 (0.5281)
0.002	500	0.4330 (0.1598)	0.3478 (0.2714)	0.4166 (0.2728)
0.003	100	0.4270 (0.3285)	0.5110 (0.5073)	0.6072 (0.4819)
0.003	250	0.2866 (−0.0015)	0.2970 (0.1785)	0.3975 (0.4236)
0.003	500	0.0786 (−0.0903)	0.0529 (0.1464)	0.2543 (0.1551)

Tabla 4.6: Media y mediana de la proporción de ganancia de eficiencia dada por $1 - \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_\mu(S_i^{ON}, S)/\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_\mu(S_i^{[0:p\delta_1]}, S)$.

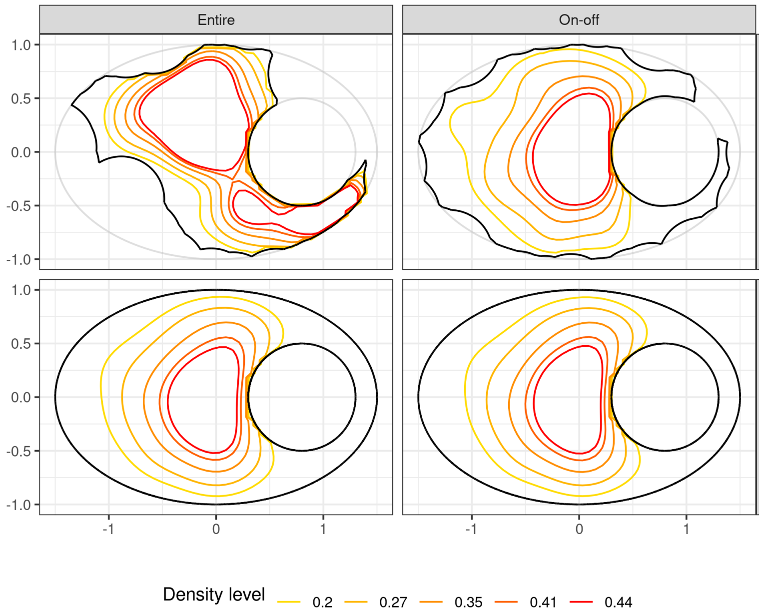

Figura 4.5: Arriba: curvas de nivel de la densidad estimada cuando $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 500$ con un total de observaciones de $p\delta_1 = 2030$. Abajo: curvas de nivel de la densidad estimada cuando $\delta_1 = 500, \delta_2 = 10$ con un total de observaciones de $p\delta_1 = 98809$. Los paneles de la izquierda se corresponden a una estimación hecha con trayectorias observadas de corrido, y los de la derecha a trayectorias observadas bajo el modelo 'on-off'.

teóricos se muestran en la Figura 4.1.

En todos los casos, se utilizó el estimador (3.6), con un núcleo gaussiano, y el ancho de banda $\tau = 0.2$ se seleccionó mediante validación cruzada

La estimación mejora mucho cuando se utiliza el modelo 'on-off' en una trayectoria de pocos puntos. La cantidad de puntos con los que se estimó la densidad en los gráficos de la primera fila es $p\delta_1/h = 2030$, mientras que en los gráficos de abajo se utilizaron trayectorias de $p\delta_1/h = 98809$ puntos, y en este caso el desempeño de los dos modelos es muy similar.

Un gráfico tridimensional de la densidad estimada para el caso de los gráficos de arriba de la Figura 4.5, se puede ver en la Figura 4.6.

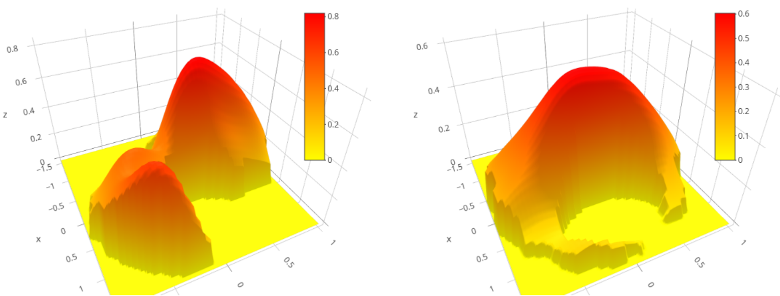

Figura 4.6: Densidad estimada usando un kernel gaussiano con ventana $\tau = 0.2$. A la derecha para una trayectoria observada bajo el modelo 'on-off' con $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 500$ con un total de observaciones de $p\delta_1 = 2030$. A la izquierda la densidad estimada para la trayectoria observada de corrido durante $[0, 2030h]$.

Capítulo 5

Aplicación a datos reales

En este capítulo se muestra el desempeño del modelo 'on-off' aplicándolo a un caso de datos reales. Consideramos un conjunto de datos con 1577 posiciones registradas de un elefante en el Longo National Park en el oeste de Gabón. Estos datos están disponibles en el repositorio Movebank (`movebank.org`, estudio "Forest Elephant Telemetry Programme", ID 1818825) y ya han sido utilizados en Cholaquidis et al. (2021b).

Primero estimamos el cierre r-convexo de esta trayectoria entera. Luego, imaginamos que esta trayectoria no es conocida completamente y, dados unos δ_1, δ_2, h solo accedemos a una cantidad $p\delta_1/h$ de registros, donde p es tal que $p\delta_1 + (p-1)\delta_2$ es igual al total de observaciones. Entonces podemos comparar cómo da la estimación usando las primeras $p\delta_1/h$ observaciones y utilizando el modelo de observación intermitente.

En la Figura 5.1 se muestra con línea negra sólida el borde del cierre 0.02-convexo de la trayectoria completa, y para los dos caminos propuestos.

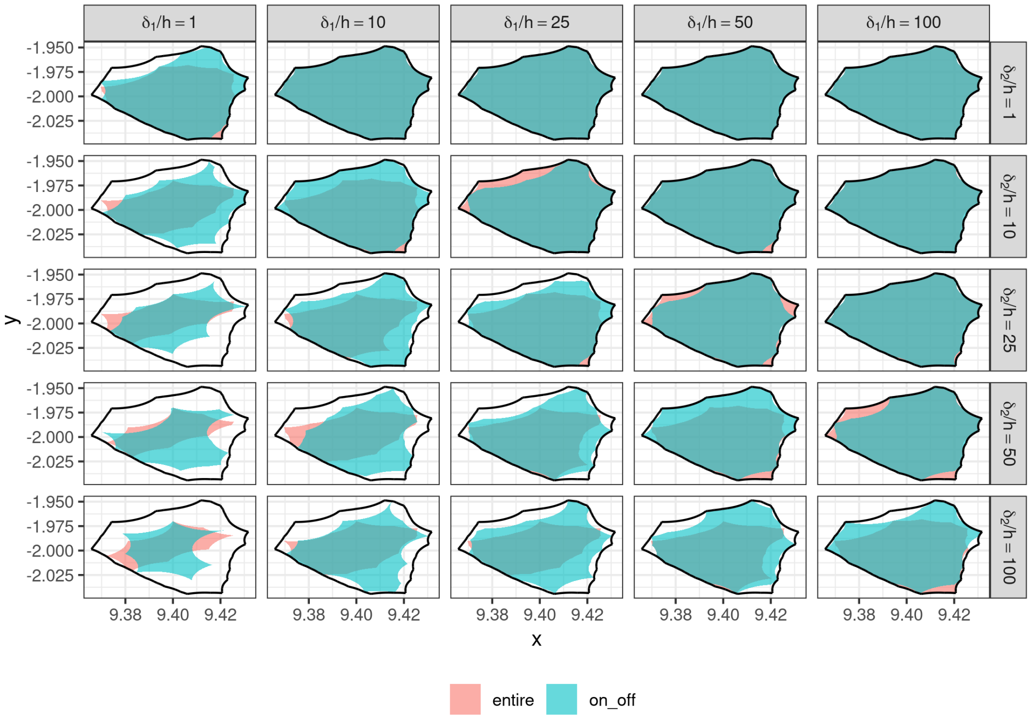

Figura 5.1: Cada panel muestra, para diferentes valores de δ_1, δ_2, el cierre 0.02-convexo de la trayectoria, observada en el intervalo $[0, p\delta_1 h]$ (en rojo), y el cierre 0.02-convexo de la trayectoria observada bajo el modelo 'on-off'. En línea sólida, se presenta la frontera del cierre 0.02-convexo de toda la trayectoria disponible.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo busca estudiar qué pasa con el comportamiento de la trayectoria de un RBMD cuando se lo observa de forma intermitente, según el modelo denominado 'on-off' descrito en la sección 2.2. La motivación está dada por el uso de este modelo para describir las trayectorias de un cierto individuo monitoreado por un dispositivo GPS.

Se logra probar que el proceso estocástico resultante mantiene las propiedades del proceso observado de forma continua: tiene la misma distribución invariante y es ergódico. A su vez se puede obtener se puede obtener una subcadena discreta que es geométricamente ergódica y a través de núcleos se puede estimar uniformemente la densidad estacionaria.

El cierre r-convexo de la trayectoria del proceso, es una estimación del soporte de esta densidad. Y es consitente en el sentido de la distancia de Hausdorff y en medida. Se obtienen mejores cotas, en probabilidad, para el error de estimación cuando la trayectoria se observa según el modelo 'on-off' en relación a cuando se observa de forma continua, durante la misma cantidad de tiempo.

Referencias bibliográficas

Airoldi, F. (2019). *RcppAlphahull: alpha-convex hull and alpha-shape computation.* R package version 1.0.

Bossy, M., Gobet, E., and Talay, D. (2004). A symmetrized euler scheme for an efficient approximation of reflected diffusions. *Journal of applied probability*, 41(3):877–889.

Burdzy, K., Chen, Z.-Q., and Marshall, D. E. (2006). Traps for reflected brownian motion. *Mathematische Zeitschrift*, 252(1):103–132.

Burt, W. H. (1943). Territoriality and home range concepts as applied to mammals. *Journal of mammalogy*, 24(3):346–352.

Calabrese, J. M., Fleming, C. H., and Gurarie, E. (2016). ctmm: an r package for analyzing animal relocation data as a continuous-time stochastic process. *Methods in Ecology and Evolution*, 7(9):1124–1132.

Cholaquidis, A., Fraiman, R., and Hernandez, M. (2021a). Home range estimation under a restricted sampling scheme. *arXiv preprint arXiv:2106.02035*.

Cholaquidis, A., Fraiman, R., Lugosi, G., and Pateiro-López, B. (2016). Set estimation from reflected brownian motion. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 78(5):1057–1078.

Cholaquidis, A., Fraiman, R., Mordecki, E., and Papalardo, C. (2021b). Level sets and drift estimation for reflected brownian motion with drift. *Statistical Sinica*, 31:29 – 51.

Cuevas, A., Fraiman, R., and Pateiro-López, B. (2012). On statistical properties of sets fulfilling rolling-type conditions. *Advances in Applied Probability*, 44(2):311–329.

Eddelbuettel, D. and Balamuta, J. J. (2018). Extending *R* with *C++*: A Brief Introduction to *Rcpp*. *The American Statistician*, 72(1):28–36.

Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc.

Federer, H. (1959). Curvature measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(3):418–491.

Fleming, C. H., Calabrese, J. M., Mueller, T., Olson, K. A., Leimgruber, P., and Fagan, W. F. (2014). From fine-scale foraging to home ranges: a semivariance approach to identifying movement modes across spatiotemporal scales. *The American Naturalist*, 183(5):E154–E167.

Fleming, C. H., Fagan, W. F., Mueller, T., Olson, K. A., Leimgruber, P., and Calabrese, J. M. (2015). Rigorous home range estimation with movement data: a new autocorrelated kernel density estimator. *Ecology*, 96(5):1182–1188.

Getz, W. M. and Wilmers, C. C. (2004). A local nearest-neighbor convex-hull construction of home ranges and utilization distributions. *Ecography*, 27(4):489–505.

Harrison, J. M. and Williams, R. J. (1987). Multidimensional reflected brownian motions having exponential stationary distributions. *The Annals of Probability*, pages 115–137.

Hayne, D. W. (1949). Calculation of size of home range. *Journal of mammalogy*, 30(1):1–18.

Kie, J. G., Matthiopoulos, J., Fieberg, J., Powell, R. A., Cagnacci, F., Mitchell, M. S., Gaillard, J.-M., and Moorcroft, P. R. (2010). The home-range concept: are traditional estimators still relevant with modern telemetry technology? *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 365(1550):2221–2231.

Meyn, S. and Tweedie, R. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability.* London: Springer-Verlag.

Noonan, M. J., Tucker, M. A., Fleming, C. H., Akre, T. S., Alberts, S. C., Ali, A. H., Altmann, J., Antunes, P. C., Belant, J. L., Beyer, D., et al.

(2019). A comprehensive analysis of autocorrelation and bias in home range estimation. *Ecological Monographs*, 89(2):e01344–.

Papalardo, C. (2019). Difusiones reflejadas: Home range, distribución de utilización, core area y dinámica del movimiento. Master's thesis, Universidad de la República.

Pateiro-Lopez, B., Rodriguez-Casal, A., and . (2019). *alphahull: Generalization of the Convex Hull of a Sample of Points in the Plane*. R package version 2.2.

R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Ribble, D. O., Wurtz, A. E., McConnell, E. K., Buegge, J. J., and Welch Jr, K. C. (2002). A comparison of home ranges of two species of peromyscus using trapping and radiotelemetry data. *Journal of Mammalogy*, 83(1):260–266.

Rodríguez-Casal, A. and Saavedra-Nieves, P. (2021). Spatial distribution of invasive species: an extent of occurrence approach. *TEST*, pages 1–26.

Saisho, Y. (1987). Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Probability Theory and Related Fields*, 74(3):455–477.

Socias-Martínez, L., Peckre, L. R., and Noonan, M. J. (2022). Are trapping data still suited for home range estimation? an analysis with various estimators, asymptotic models and data ordering procedures. *bioRxiv*.

Tanaka, H. (1979). Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Mathematical Journal*, 9(1):163–177.

Walther, G. (1999). On a generalization of blaschke's rolling theorem and the smoothing of surfaces. *Mathematical methods in the applied sciences*, 22(4):301–316.

Worton, B. J. (1989). Kernel methods for estimating the utilization distribution in home-range studies. *Ecology*, 70(1):164–168.

APÉNDICES

Apéndice 1

Demostraciones

Demostración de Proposición 5

Para obtener la distribución estacionaria, usaremos el lema, que se puede demostrar siguiendo las ideas de la prueba del Lema 2.1(i) de Harrison and Williams (1987).

Denotemos $\mathcal{L}$, al generador infinitesimal del RBMD. $\mathcal{L}(h)(x) = \text{lím}_{t\downarrow 0}(1/t)(\mathbf{E}_x(h(X_t)) - h(x))$, y denotemos por $C_c^2(\overline{S})$ al conjunto de las funciones doblemente diferenciables con soporte compacto en algún dominio que contenga a $\overline{S}$.

Se puede probar que $\mathcal{L}h = \frac{1}{2}\Delta h - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle$, para $h \in C_c^2(\overline{S})$, ver Cholaquidis et al. (2021b).

Lema 1. *Sea S un dominio acotado tal que ∂S is C^2. Supongamos que $p\colon \overline{S} \to \mathbb{R}$ es C^2, que p es positiva en S, y que $\int_S p(x)dx = 1$. Entonces p es la densidad de la (única) distribución invariante para (2.1) si y solo si*

$$\int_S p(x)\mathcal{L}h(x)dx = 0 \tag{1.1}$$

Demostración de Proposición 5

Demostración. Por Lema 1, la medida π es la distribución estacionaria si y solo si, para toda $h \in C_c^2(\overline{S})$ con $\langle \mathbf{n}(x), \nabla h(x)\rangle = 0$ para todo $x \in \partial S$, se tiene que $0 = \int_S ce^{-f(x)}\mathcal{L}h(x)dx$. Y esto es una consecuencia directa de la primera identidad de Green:

$$
\begin{aligned}
-\int_S e^{-f(x)}\Delta h(x) &= \int_{\partial S} e^{-f(x)}\langle \nabla h(x), \mathbf{n}(x)\rangle d\sigma(x) + \int_S e^{-f(x)}\langle \nabla f(x), \nabla h(x)\rangle dx \\
&= \int_S e^{-f(x)}\langle \nabla f(x), \nabla h(x)\rangle dx,
\end{aligned}
$$

donde σ es la medida en la superficie ∂S. $\square$

Demostración del Teorema 3

Demostración. Definamos $\delta = c\omega_d(\varepsilon/2)^d/2$, $n = \left\lfloor \frac{T}{\frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta}} \right\rfloor$, y $t_i = \frac{i}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta}$ para $i = 1, \dots, n$.

Notar que la condicición para ε asegura que $\beta/\delta > 1$. Informalmente, $t_1, \dots, t_n$ divide el intervalo $[0, T]$ en n intervalos de longitud $\frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta}$.

Asumiendo que a tiempo T se completó el período de observación del proceso, y tomando p el número de períodos en los que se observó el proceso, se tiene que $\delta_1 = l_1(t_i - t_{i-1})$ y $\delta_2 = l_2(t_i - t_{i-1})$ para algunos enteros l_1 y l_2. Tenemos entonces que $T = p\delta_1 + (p-1)\delta_2$, y $n = p\,l_1 + (p-1)l_2$. Hay $p\,l_1$ observaciones, por tanto tenemos $p\,l_1 - 1$ probabilidades de transición, de las cuales $p-1$ ocurren entre períodos distintos de observación (entre esas dos observaciones hay todo un período en el que el proceso no se observa). Asumiremos que el proceso está encendido en el intervalo $[T - \delta_1, T]$.

Sea $S^{(\varepsilon)}$ el conjunto ε-paralelo interior de S.

Llamemos $I_n := \{1, \dots, n\} \cap \{i : a_{t_i} = 1\}$, a los índices en los cuales el proceso es observado. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{d_H(S_T, S) > \varepsilon\} \leq &\mathbf{P}\{\exists x \in S^{(\varepsilon)} : \forall t \in \mathcal{I}, t < T : X_t \notin B(x, \varepsilon)\} \\
\leq &\mathbf{P}\{\exists x \in S^{(\varepsilon)} : \forall i \in I_n : X_{t_i} \notin B(x, \varepsilon)\}.
\end{aligned}
$$

Sean $x_1, \dots, x_N \in S^{(\varepsilon)}$ tales que $S^{(\varepsilon)} \subset B(x_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(x_N, \varepsilon/2)$, y sea N el entero positivo más chico tal que es posible construir ese cubrimiento de $S^{(\varepsilon)}$. $N = N(\varepsilon/2)$ es el llamdo $\varepsilon/2$ número de cubrimiento de $S^{(\varepsilon)}$. Se puede probar que $N \leq \mu(S)/\mu(B(0, \varepsilon/4))) = (\varepsilon/4)^{-d}\mu(S)/\omega_d$.

Si para algún $x \in S$ tenemos que $X_{t_i} \notin B(x, \varepsilon)$ para todo $i \in I_n$, entonces existe un $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $X_{t_i} \notin B(x_j, \varepsilon/2)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Entonces, continuando las desigualdades más arriba:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{d_H(S_T,S)>\varepsilon\} \leq & \mathbf{P}\{\exists j\in\{1,\dots,N\}:\forall i\in I_n : X_{t_i}\notin B(x_j,\varepsilon/2)\} \\ \leq & N\sup_{x\in S^{(\varepsilon)}}\mathbf{P}\{\forall i\in I_n : X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\}.\end{aligned}$$

Luego, aproximaremos la probabilidad del lado derecho. Recordemos que el proceso está siendo observado en el intervalo $[T-\delta_1,T]$, entonces $n\in I_n$. Para todo $x\in S^{(\varepsilon)}$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\forall i\in I_n : X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad =\mathbf{P}\{X_{t_n}\notin B(x,\varepsilon/2)|\forall i\in I_{n-1}: X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad\quad \times\mathbf{P}\{\forall i\in I_{n-1}: X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad =\mathbf{P}\{X_{t_n}\notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad\quad \times\mathbf{P}\{\forall i\in I_{n-1}: X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad\quad \text{(dado que } X_t \text{ es un proceso de Markov)}\end{aligned}$$

Denotemos por π a la distribución invariante del proceso $\{X_t^{ON}\}_{t>0}$. Iteremos este procedimiento para los últimos l_1 pasos en los cuales el proceso está siendo observado. Entonces

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\forall i\in I_n : X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} = \\ &\qquad = \mathbf{P}\{X_{t_n}\notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\}\times\cdots\times \\ &\mathbf{P}\{X_{t_{n-l_1+2}}\notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-l_1+1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\}\times\mathbf{P}\{\forall i\in I_{n-l_1+1}: X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &= \mathbf{P}\{\forall i\in I_{n-l_1+1}: X_{t_i}\notin B(x,\varepsilon/2)\}\prod_{i=0}^{l_1-2}\mathbf{P}\{X_{t_{n-i}}\notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-i-1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\}\end{aligned}$$

Ahora, por la Proposición 4 y la definición de δ ($\delta=c\omega_d(\varepsilon/2)^d/2$), para todo $i=0,\dots,l_1-2$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{X_{t_{n-i}}\notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-i-1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\} = \\ &\qquad 1-\mathbf{P}\{X_{t_{n-i}}\in B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-i-1}}\notin B(x,\varepsilon/2)\} \\ &\qquad \leq 1-\pi(B(x,\varepsilon/2))+\beta\exp\{-\alpha(t_{n-i}-t_{n-i-1})\} \\ &\qquad = 1-\pi(B(x,\varepsilon/2))+\delta \\ &\qquad \leq 1-c\omega_d(\varepsilon/2)^d+\delta = 1-c\omega_d(\varepsilon/2)^d/2\end{aligned}$$

Entonces

$$\prod_{i=0}^{l_1-2} \mathbf{P}\{X_{t_{n-i}} \notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-i-1}} \notin B(x,\varepsilon/2)\} \leq (1 - c\omega_d(\varepsilon/2)^d/2)^{l_1-1}$$

Usando un argumento similar, podemos acotar el término $\mathbf{P}\{\forall i \in I_{n-l_1-1} : X_{t_i} \notin B(x,\varepsilon/2)\}$. Observemos que a tiempo t_{n-l_1+1} el proceso está siendo observado, pero no está siendo observado en el tiempo t_{n-l_1}, ni tampoco en los tiempos t_{n-l_1-j} para $j = 0,\ldots,l_2-1$. Esto implica que $I_{n-l_1+1} = \{n - l_1 + 1\} \cup I_{n-l_1-l_2}$. Entonces

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\forall i \in I_{n-l_1+1} : X_{t_i} \notin B(x,\varepsilon/2)\} = \\ &\mathbf{P}(X_{t_{n-l_1+1}} \notin B(x,\varepsilon/2)|X_{t_{n-l_1-l_2}} \notin B(x,\varepsilon/2))\mathbf{P}\{\forall i \in I_{n-l_1-l_2} : X_{t_i} \notin B(x,\varepsilon/2)\} \leq \\ &\qquad (1 - c\omega_d(\varepsilon/2)^d + \beta e^{-\alpha\delta_2})\mathbf{P}\{\forall i \in I_{n-l_1-l_2} : X_{t_i} \notin B(x,\varepsilon/2)\}\end{aligned}$$

Iterando este argumento, $\mathbf{P}\{\forall i \in I_n : X_{t_i} \notin B(x,\varepsilon/2)\}$ está acotada superiormente por

$$\begin{aligned}&(1 - c\omega_d(\varepsilon/2)^d/2)^{p(l_1-1)}(1 - c\omega_d(\varepsilon/2)^d + \beta e^{-\alpha\delta_2})^{p-1} \\ \leq &\exp\{-(l_1-1)p\delta\}\exp\left\{-(p-1)(2\delta - \delta(\delta/\beta)^{l_2-1})\right\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

Para comparar la ganancia que se tiene usando el modelo 'on-off' respecto a observar el proceso de forma ininterrumpida en $[0, p\delta_1]$, notemos que

$$\exp\{-(l_1-1)p\delta\} = \exp\left\{-\frac{(l_1-1)pt_1}{t_1}\delta\right\},$$

y $(l_1-1)t_1 = \delta_1 - t_1$. Entonces, si el proceso se observa de corrido (esto es que $l_2 = 0$),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{d_H(\widetilde{S}_{p\delta_1}, S) > \varepsilon\} \leq \frac{(\varepsilon/4)^{-d}\mu(S)}{\omega_d}\exp\left\{-\frac{c\omega_d(\varepsilon/2)^d p(\delta_1 - \frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta})}{2\frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta}}\right\} \\ = C_1\exp(-C_2 p\delta_1)\end{aligned}$$

Sin embargo, por (1.2) en el modelo 'on-off' la cota obtenida es

$$\mathbf{P}\{d_H(S_T,S)>\varepsilon\}\leq\frac{(\varepsilon/4)^{-d}\mu(S)}{\omega_d}\exp\left\{-\frac{c\omega_d(\varepsilon/2)^d p(\delta_1-\frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta})}{2\frac{1}{\alpha}\log\frac{\beta}{\delta}}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\delta(p-1)(2-(\delta/\beta)^{l_2-1})\right\}=C_1\exp(-C_2p\delta_1)\exp(-C_3(p-1))$$

□

Demostración del Teorema 4

Demostración. Es sencillo de probar, siguiendo las ideas que se usan para probar la Proposición 2 en Cholaquidis et al. (2021b), que la cadena $\aleph_n$ es de Markov y es geométricamente ergódica.

Entonces $\beta_n\sup_{x\in S}|\hat{g}_n(x)-g(x)|\to 0\quad c.s.$ se obtiene como una aplcación directa del Teorema 1 en Cholaquidis et al. (2021b). Por el Corolario 1, junto con la Observación 4 del mismo trabajo, se tiene que $d_H(\partial G_g(\lambda),\partial G_{\hat{g}_n}(\lambda))=o(1/\beta_n)\quad c.s.$. □