

XIV CONGRESO  
LATINOAMERICANO  
DE HIDRAULICA

APROXIMACION TEORICA AL FENOMENO DE LA PERDIDA DE LA SIMETRIA  
DEL FLUJO HELICOIDAL CON ALTO NUMERO DE REYNOLDS.

HIDROMECANICA

R. Guarga.

Director del Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería  
Ambiental de la Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay.

Resumen:

Se presenta una descripción teórica del flujo helicoidal con alto  $N^{\circ}$  de Reynolds que permite anticipar - en forma cualitativa - la pérdida de simetría axial que exhiben estos flujos en determinadas condiciones. En el trabajo se comparan las predicciones teóricas con resultados experimentales consignados en varias referencias. De la comparación resulta que las mencionadas predicciones son consistentes con estos resultados.

Summary:

A theoretical description of swirling flow with high Reynolds number that allows to anticipate - in qualitatively form - the lost of axial symmetry that these flows show in particular conditions, is presented. In the paper the theoretical predictions are compared with the experimental data that appear in references. It results that the predictions are verified by the data.

## 1 - Introducción

El flujo helicoidal se presenta en variadas aplicaciones de gran interés práctico. En algunos casos dicha flujo aparece como un problema no deseado, tal como ocurre en las alas deltas o en la turbomaquinaria. En otros casos, se aprovechan sus características fundamentales en dispositivos de interés técnico, como son por ejemplo, los ciclones e hidrociclones, las válvulas de vórtice o el tubo de Hilsch-Ranque, (Escudier, 1987).

El origen del presente trabajo se encuentra en los problemas de oscilaciones de presión que se presentan en las turbinas a reacción (Francis y Kaplan) originados por la presencia de flujo helicoidal - en el interior de dichas máquinas - en determinadas condiciones de operación.

Se ha visto que, en muchos casos, las oscilaciones de presión producidas en las turbomáquinas, están asociados a la pérdida de simetría axial (PSA) del flujo helicoidal. Esta PSA ocurre en las complejas geometrías internas de las turbomáquinas pero también puede observarse en geometrías mucho más simples tales como en el extremo aguas abajo de cilindros de sección circular o conos actuando como expansiones (difusores).

En las figuras 1 y 2 se presentan casos de PSA en flujos helicoidales con alto  $N^{\circ}$  de Reynolds (FHAR). La PSA se visualiza mediante la presencia de una masa gaseosa en el interior del flujo líquido. Dicha masa gaseosa no perturba sensiblemente el flujo y muestra la existencia o la ausencia de simetría axial en el flujo. En la figura 1a se muestra un FHAR con simetría axial evolucionando a través de una expansión y en la figura 1b se muestra un FHAR con mayor momento angular que el anterior y donde aparece el fenómeno de la PSA. En la figura 2a se muestra el fenómeno de la PSA en una expansión (cono divergente) y en la figura 2b se muestra la PSA en el difusor de un modelo de turbina Francis.

No existen referencias conocidas por el autor donde se consignen observaciones al fenómeno de la PSA en los FHAR fluyendo en ciclones ó hidrociclones o en una reducción (cono convergente).

## 2 - Estado actual del problema.

El caso de flujo helicoidal más estudiado es el que ocurre en el borde de ataque de las alas delta. Este flujo presenta un fenómeno que en la literatura técnica se conoce como "ruptura de vórtice" (vortex breakdown). Una excelente revisión crítica de los trabajos referidos a la "ruptura de vórtice" fue efectuada por Leibovich, 1983.

Los problemas del flujo helicoidal asociados con la turbomaquinaria hidráulica presentan una diferencia esencial con los anteriores pues su  $N^{\circ}$  de Reynolds es del orden de  $10^5$  o mayor cuando para los casos consignados por Leibovich, el  $N^{\circ}$  de Reynolds es de  $2 \times 10^4$  o menor. Respecto al efecto del  $N^{\circ}$  de Reynolds sobre los aspectos esenciales de la PSA, puede verse la experiencia descrita por So, 1967. Allí se muestra como el fenómeno de la ruptura del vórtice, en su forma clásica, está asociado a los Reynolds bajos.

La descripción experimental del FHAR en la turbomaquinaria - tanto en lo que se refiere a la cinemática así como a la oscilación de presiones y a las presiones medias - ha sido efectuada por varios autores. Pueden citarse a título de ejemplo Hosoi, 1965; Palde, 1972; Gerich et al, 1975; Nishi, 1980; Doerfler, 1982;

Bettochi et al, 1982; Guarga, 1986. Como contribución teórica de relevancia debe señalarse la de Fanelli, 1989 en lo que se refiere a la elaboración de un modelo del flujo sin simetría axial. Asimismo pueden encontrarse referencias de mediciones - cinemáticas y de presiones medias - efectuadas en ciclones o hidrociclones (Battacharyya, 1984).

Sin embargo para estudiar los aspectos básicos del fenómeno de la PSA en los FHAR conviene examinar dicho fenómeno en las geometrías más simples (expansiones y reducciones).

Las mediciones cinemáticas y de presión - oscilatoria y media - en geometrías simples, son escasas. Los trabajos que consignan datos experimentales, son los siguientes So, 1967; Cassidy et al, 1970; Palde, 1972; Senoo, 1978; Guarga, 1984, 1985, 1989.

En cuanto a los estudios teóricos del fenómeno de la PSA en los FHAR el autor no conoce trabajos que traten este problema específico. La formulación de un modelo teórico que contribuya a la comprensión cualitativa de dicho fenómeno es el objetivo fundamental de este trabajo.

### 3 - Formulación del modelo.

Para la formulación del modelo se procederá según el camino clásico descrito en Batchelor 1967 (captítulo 6), para el análisis de un escurrimiento estacionario y con simetría axial, de un fluido perfecto e incompresible, con un núcleo cilíndrico rotacional ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Este camino ya fue seguido por Lambourne, 1965, para analizar del fenómeno de la ruptura de vórtice. El desarrollo que aquí se presenta para el tratamiento de los FHAR, tiene algunos elementos básicos en común con el referido análisis de Lambourne.

El escurrimiento se considerará confinado en dos fronteras materiales diferentes. Una primera frontera material cilíndrica de radio  $a_1$  y una segunda frontera material también cilíndrica, de radio  $b_1$ . Dichas fronteras cilíndricas serán coaxiales. En la frontera de radio  $a_1$  se considera una sección A, perpendicular al eje de simetría axial y en la frontera de radio  $b_1$  se considera una sección B, también perpendicular al eje de simetría. Se admitirá que el flujo pasa primero por la sección A para luego pasar por la sección B y se admitirá asimismo que en la sección B no hay inversión de velocidad. En consecuencia todo el fluido que pasa por B pasó por A. La transición entre ambas fronteras cilíndricas se realiza mediante una frontera cuya geometría permite el pasaje del flujo del tramo cilíndrico donde se halla la sección A al tramo cilíndrico donde se ubica la sección B.

En la figura 3 se presenta un corte de la región de flujo y se indica el eje Oz del sistema de coordenadas cilíndricas que se empleará. Se admitirá además y a los efectos de simplificar al máximo los aspectos analíticos, que el flujo en ambos tramos cilíndricos es simétrico axialmente, estacionario y cilíndrico; esto es, independiente de la coordenada z.

En la sección A se considerará un flujo rotacional (denominado "núcleo") que ocupa la región cilíndrica  $r \leq a_2$  ( $a_2 < a_1$ ) y un flujo irrotacional que ocupa el espacio anular  $a_2 < r < a_1$  (ver figura 4). En consecuencia y bajo las hipótesis enunciadas, en la sección B se tendrá un flujo rotacional (núcleo) que ocupa la región  $r \leq b_2$  ( $b_2 \leq b_1$ ) y un flujo irrotacional en  $b_2 < r < b_1$ .

Puede demostrarse fácilmente para un fluido perfecto y a partir de la ecuación de Euler y de la conservación de la masa, que las distribuciones de velocidades en las secciones A y B se tendrá la siguiente expresión general:

$$v_1 = 0 \quad v_2 = v_2(r) \quad v_3 = v_3(r) \quad (1)$$

donde  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  son las componentes radial, tangencial y axial de la velocidad  $\bar{v}$ . A continuación se analizarán las funciones  $v_2(r)$  y  $v_3(r)$  en las secciones A y B. Se comenzará considerando el flujo irrotacional.

### 3.1 - Flujo irrotacional.

En la región de flujo irrotacional puede también demostrarse fácilmente que las distribuciones de velocidad - en las secciones A y B - deben tener la siguiente forma respectivamente:

$$\text{Sección A: } v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{K}{r}, \quad v_3 = V_{A1} \quad \text{en } a_2 < r < a_1 \quad (2)$$

$$\text{Sección B: } v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{K}{r}, \quad v_3 = V_{B1} \quad \text{en } b_2 < r < b_1 \quad (3)$$

siendo  $K$ ,  $V_{A1}$  y  $V_{B1}$  constantes positivas.

$K$  y  $V_{A1}$  serán datos del problema y  $V_{B1} = V_{A1} (a_1^2 - a_2^2) / (b_1^2 - b_2^2)$

### 3.2 - Flujo rotacional.

En la región de flujo rotacional, (núcleo) se define una función de corriente  $\psi$ . Ello es posible por ser el fluido incompresible y axialmente simétrico. En las secciones A y B la función  $\psi$  solo dependerá de  $r$ .

Se define asimismo una función de carga específica  $H = p/\rho + v^2/2$  siendo  $p$  la presión,  $\rho$  la densidad del fluido y  $v$  el módulo de la velocidad.

A partir de la ecuación de Euler y de la conservación de la masa puede deducirse que:

$$\frac{d}{dt} (v_2 r) = 0 \quad (4)$$

Ello implica que sobre cada trayectoria  $v_2 r = C$  siendo  $C = C(\psi)$ .

Asimismo  $H = H(\psi)$ . Admitiendo en la sección A la siguiente distribución de velocidades.

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \Omega r, \quad v_3 = V_{A2} \quad (\text{vórtice de Rankine}) \quad (5)$$

siendo  $\Omega$  y  $V_{A2}$  constantes positivas.

Procediendo a calcular  $\psi$  siguiendo a Batchelor (cap. 6) y en la hipótesis, ya enunciada, de que en la sección B no hay inversión de velocidad ( $v_3 \geq 0$  para todo  $r$ ) se obtiene:

$$\psi_B(\xi) = V_{A2} a_2^2 \left[ \frac{\xi^2}{2} + \xi \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \cdot \frac{J_1(K\xi)}{J_1(K\beta)} \right] \quad (6)$$

siendo  $\xi = r/a_2$ ,  $\beta = b_2/a_2$ ,  $K = 2\Omega a_2/V_{A2}$ ,  $\xi \leq \beta$  y  $J_1$  una función de Bessel de 1ª especie y de orden uno.

Disponiendo de la función de corriente en la sección B, puede calcularse fácilmente la distribución de velocidad y de vorticidad en B. A los efectos de lo que sigue, sólo interesa el cálculo de  $v_\theta$ . Aplicando la relación  $v_\theta = \partial\psi/\partial r \cdot 1/r$  se tiene de (6)

$$\frac{v_\theta}{V_{A2}} = 1 + K \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \cdot \frac{J_0(K\xi)}{J_1(K\beta)} \quad (7)$$

siendo  $J_0$  una función de Bessel de 1ª especie y de orden cero.

### 3.3 - Cálculo del diámetro del núcleo en la sección B.

Para calcular el diámetro del núcleo en la sección B se establecerá la condición de que la presión - impuesta por el flujo irrotacional - sobre la superficie de corriente  $\psi_B(\beta)$  (siendo  $\psi_B(\beta) = \psi_A(1)$ ), sea igual a la impuesta por el flujo rotacional. Para ello se calcularán ambas presiones independientemente y al igualarlas resultará la ecuación cuya raíz será precisamente  $\beta$ .

Expresando la presión en forma adimensional como  $P = 2p/V_{A2}^2 \rho$ , se tiene:

$$P_I = \frac{K^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2\beta^2} \right) + \mu^2 \left[ 1 - \left( \frac{\delta_A^2 - 1}{\delta_B^2 - \beta^2} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$P_R = 1 + \frac{K^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2\beta^2} \right) - \left[ 1 + K \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \cdot \frac{J_0(K\beta)}{J_1(K\beta)} \right]^2 \quad (9)$$

siendo  $P_I$  y  $P_R$  las presiones adimensionales en los flujos irrotacional y rotacional respectivamente y  $\delta_A = a_1/a_2$ ,  $\delta_B = b_1/a_2$  y  $\mu = V_{A1}/V_{A2}$ .

La ecuación de la cual resultará  $\beta$ , dados  $K$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  y  $\mu$  será la siguiente:

$$P_I(K, \beta, \delta_A, \delta_B, \mu) = P_R(K, \beta) \quad (10)$$

## 4 - Análisis de la inversión de velocidad y de los perfiles de velocidad en la sección B.

A los efectos del presente trabajo y con la finalidad de reducir la extensión de la exposición, en el análisis que sigue se trabajará siempre en el intervalo  $0 < K\beta < 2.405$ . Esta limitación

obedece al caracter cuasi-periodico de las funciones de Bessel  $J_0$  y  $J_1$ . Al imponer el valor 2.405 - la menor raíz positiva de  $J_0$  - como extremo superior del intervalo, el análisis que sigue se simplifica considerablemente y simultaneamente se conserva como intervalo de análisis un entorno significativo de la condición  $K\beta = 0$  que representa al flujo sin momento angular ( $\Omega = 0$ ). Dicho entorno es el que interesa en la práctica. La limitación impuesta para  $K\beta$  se admitirá tanto en la sección B como en la A.

Derivando (7) respecto a  $\beta$  puede verse que en  $\xi = 0$  (eje de las fronteras) existe un extremo de  $v_3/v_{AZ}$ . Dicho extremo es único en el intervalo  $0 < \xi \leq \beta$ . Asimismo en el intervalo  $0 < K\beta < 2.405$  arriba establecido, se verifica que para  $\beta < 1$  el extremo es un máximo y para  $\beta > 1$  es un mínimo. En consecuencia, si  $\beta < 1$  no habrá inversión de velocidad en la sección B.

Si  $\beta > 1$  puede existir inversión de velocidad. Para excluir la inversión basta asegurar que  $v_3 \geq 0$  en el eje, pues allí se tiene la velocidad mínima. Imponiendo  $\xi = 0$ , de (7) sale la expresión:

$$1 + K \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \cdot \frac{1}{J_1(K\beta)} = 0 \quad (11)$$

Dicha expresión define una función  $\beta_0 = \beta_0(K)$  tal que, dado  $K$  si  $\beta \leq \beta_0$  en el núcleo de la sección B no existe inversión de velocidad.

Para el caso particular  $\beta = \beta_0$  aparece un punto de estancamiento en el eje.

La expresión obtenida en (6), es válida formalmente si y sólo si  $\beta \leq \beta_0$  pues la deducción efectuada, como ya se señaló, parte de que  $v_3 \geq 0$  en la sección B. En la figura 5 se presenta la función  $\beta_0(K)$  y se muestran algunos perfiles de velocidad para  $\beta = 0.5; 1; 2; 3; 4$  y para  $K = 2$ .

El análisis precedente muestra que el núcleo rotacional posee perfiles de velocidad axial cualitativamente diferentes según el núcleo aumente su diámetro ( $\beta > 1$ ) o lo disminuya ( $\beta < 1$ ). Si  $\beta > 1$  el perfil de velocidades es del tipo "estela" y si  $\beta < 1$  es del tipo "chorro".

## 5 - Descripción teórica de la evolución del flujo.

La expresión (9) de la presión adimensionada  $P_R$  creada por el flujo rotacional en la superficie de corriente que le separa del flujo irrotacional, establece que  $P_R$  es solamente función de  $K$  y  $\beta$ .

Es pues una función independiente de la geometría que confina el flujo y de la cinemática del flujo irrotacional. Este resultado es de gran importancia a los efectos del análisis que sigue.

Considérese la curva  $P_R(K, \beta)$  con  $K$  como parámetro y  $\beta$ ,  $P_R$  como variables. El estado del flujo en la sección B, será descrito por un punto en la curva  $P_R(K, \beta)$  dado  $K$ .

Si en una primera aproximación, se imagina el flujo a través de la transición que lo lleva de la sección A a la B, como una

sucesión de estados representables por las variables  $\beta$ ,  $P_R$ , la evolución del flujo rotacional en la transición (expansión o contracción) podrá expresarse por un desplazamiento del punto  $\beta$ ,  $P_R$  sobre la curva  $P_R(K, \beta)$  siendo  $K$  un dato del problema. Dicho desplazamiento será obtenido por la variación continua del radio adimensional  $\delta$  de una hipotética sección de salida. Dicho radio  $\delta$  será igual a  $\delta_A$  para describir el estado del flujo en la sección A e igual a  $\delta_B$  para describir el estado en la sección B. Para el análisis de la evolución del flujo, se hará variar  $\delta$  en el intervalo  $\delta_A \leq \delta \leq \delta_B$ .

Obsérvese que el procedimiento arriba descrito no difiere esencialmente, del empleado tradicionalmente por los ingenieros hidráulicos en el análisis de transiciones en los flujos a superficie libre (ver por ejemplo Henderson, 1966, sec. 2.20).

En lo que sigue se empleará el procedimiento propuesto para el estudio de la evolución del flujo en estudio a través de diferentes transiciones de interés práctico.

#### 6 - Las curvas $P_R$ y $P_I$ en función de $\beta$ .

En la figura 7 se presentan varias curvas  $P_R(K, \beta)$  para diferentes valores de  $K$  ( $K = 1; 2; 2.4$ ). Las curvas se han representado con trazo lleno para  $\beta \leq \beta_0(K)$  (flujo sin inversión de velocidad). A los efectos del presente análisis, solamente son válidos los tramos de curva en los que  $\beta \leq \beta_0(K)$ . Como puede observarse y demostrarse fácilmente las curvas  $P_R$ , dentro del intervalo  $0 < K\beta < 2.405$ , pueden presentar una ó dos ramas de crecimiento monótono.

En la figura 8 se presentan varias curvas  $P_I(K, \beta, \delta_A, \delta_B, \mu)$  para  $K = 2$ ,  $\delta_A = 3$ ,  $\mu = 1$  y diferentes valores de  $\delta_B$  ( $\delta_B = 2; 2.5; 3; 4; 5$ ). Las curvas  $P_I$  (como puede también observarse y demostrarse), dentro del intervalo  $0 < K\beta < K\delta_B$ , presentan siempre un máximo absoluto y dos ramas de crecimiento monótono.

La curva  $P_I$  indica la presión "impuesta" por el flujo irrotacional sobre el núcleo. La curva  $P_R$  indica la presión que el núcleo puede "soportar" en su conformación axialmente simétrica, cilíndrica y estacionaria. De la intersección de ambas curvas resultan las soluciones de la ecuación (10) y por lo tanto el estado del flujo en la sección B. De una simple observación de las figuras 7 y 8 surge que pueden no existir soluciones (intersecciones) o puede haber una solución o más de una. Ello será motivo de un posterior análisis.

#### 7 - Origen de la evolución.

Interesa, en primer lugar, localizar sobre la curva  $P_R(K, \beta)$  con  $K$  dado, el punto que representa el estado del flujo en la sección A. Para ello basta encontrar el punto correspondiente a  $\beta = 1$  sobre dicha curva. Dicho punto se denominará "punto de

origen" y se indicará con la letra A.

Sustituyendo  $\beta = 1$  en (9) se deduce que el punto de origen tiene la ordenada  $K^2/4$ . En la Figura 7, se indica el punto de origen en todas las curvas allí trazadas.

Puede demostrarse fácilmente a partir de (9) que para  $K < 2.983$  el punto de origen se localiza siempre en la rama ascendente, de la curva  $P_R(K, \beta)$ . En consecuencia, trabajando en el intervalo  $0 < K\beta < 2.405$ , para  $\beta = 1$ , se tendrá que a los efectos del presente análisis el punto de origen se localiza siempre en dicha rama.

Localizado el punto de origen sobre la curva  $P_R(K, \beta)$  para  $K$  dado, interesa ahora estudiar la evolución del flujo a partir de dicho punto. La evolución del flujo se obtendrá, como se explicó en la sección 5, mediante la variación continua del parámetro  $\delta$  entre  $\delta_A \leq \delta \leq \delta_B$ .

Interesa conocer el sentido de dicha evolución. Esto es, saber si  $\beta$  crecerá o decrecerá con la evolución impuesta.

## 8 - Comportamiento del flujo en contracciones y expansiones.

En esta sección se investigará la localización - sobre la curva  $P_R(K, \beta)$  con  $K$  dado - del punto B representativo del estado del flujo en la sección B, con  $\delta_B \neq \delta_A$ .

Se considerará en primer lugar una contracción ( $\delta_B < \delta_A$ ). Para  $K < 2.405$  la curva  $P_I(K, \beta, \mu, \delta_A, \delta_B)$  con  $K, \mu, \delta_A$  y  $\delta_B$  dados, corta siempre a la curva  $P_R(K, \beta)$  en un punto. Ello puede concluirse de inmediato localizando los ceros de la función diferencia  $P_R - P_I$  con  $\beta$  variable. En la figura 9 se han representado las curvas  $P_R$  y  $P_I$  para  $K = 2$  con  $\mu = 1, \delta_A = 3$  y  $\delta_B = 1.5, 2.0, 2.5$ . En los tres casos se ha indicado el punto B de corte así como la evolución del estado del flujo a partir del punto de origen A ( $\beta = 1$ ) de acuerdo con lo visto en la sección 5. Puede demostrarse fácilmente que la figura representa la evolución en toda contracción. Nótese que en una contracción, en la sección B se tiene siempre  $\beta < 1$ . En consecuencia, para una contracción, el modelo desarrollado indica que siendo  $0 < K < 2.405$  siempre se encontrará una solución al flujo en la sección B.

En segundo lugar se considerará una expansión ( $\delta_B > \delta_A$ ). También de un examen directo de la forma de la función  $P_R - P_I$  con  $\beta$  como variable, se concluye que  $P_I$  puede cortar a  $P_R$  en dos, uno o ningún punto. En la figura 10 se ha representado la curva  $P_R$  para  $K = 2$  y la curva  $P_I$  con  $\mu = 1, \delta_A = 3$  y diferentes valores de  $\delta_B$ . En la figura referida se muestran los tres casos mencionados. Para  $\delta_B = 3.02$  se tiene dos puntos de corte  $B_1$  y  $B_2$ , para  $\delta_B = 3.08$  se tiene un solo punto B pues las curvas son tangentes y para  $\delta_B = 3.10$  no se tiene ningún punto de corte.

Cuando se tiene un solo punto de corte, este será el punto que representa el estado del flujo en B. Sin embargo cuando se tienen

dos puntos de corte ( $B_1$  y  $B_2$ ) la decisión sobre cual representa el estado del flujo en B debe hacerse aplicando el procedimiento propuesto en la sección 5. Aplicando dicho procedimiento se concluye que será el punto  $B_1$  el que representa el estado del flujo en la sección B. El caso en que no existe punto de corte, será analizado en la sección siguiente.

### 9 - La inexistencia de solución para el flujo en la sección B.

Cuando no existe punto de corte, ello indica que la ecuación (10), en las hipótesis con las que se construyó el modelo (flujo axialmente simétrico, estacionario y cilíndrico), no tiene solución. Sin embargo, no puede excluirse en principio, la existencia de flujos que verifiquen las ecuaciones básicas pero que no cumplan las hipótesis impuestas ya que éstas fueron establecidas con la sola finalidad de facilitar la resolución analítica del problema. En consecuencia y siguiendo una línea de interpretación ya sugerida por Lambourne, 1965, Batchelor 198, Sarpkaya, 1971 y Hall 1972; para el análisis del fenómeno de la ruptura de vórtice; se admitirá que la ausencia de solución equivale a la PSA del flujo. (\*)

Esta interpretación puede sustentarse de la siguiente forma. Considérese la expansión  $\delta_B$  tal que exista un solo punto de corte. Dicha expansión corresponde a la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$P_I(K, \beta, \delta_A, \delta_B, \mu) = P_R(K, \beta) \quad (12)$$

$$\frac{d(P_R - P_I)}{d\beta} = 0$$

donde  $\beta$  y  $\delta_B$  son las incógnitas y  $K$ ,  $\delta_A$  y  $\mu$  los datos.

La segunda ecuación impone la tangencia de las curvas. Sea  $\beta_C$ ,  $\delta_{BC}$  la solución buscada. Dicha solución corresponde a valores que se denominarán críticos de B y  $\delta_B$ . Para los mismos, el núcleo en la sección B (simétrico, cilíndrico y estacionario) estará determinado. Sea ahora una expansión  $\delta_{BC} + \epsilon$  siendo  $\epsilon$  positivo y todo lo pequeño que se desee. En la hipotética sección B que le corresponderá a esta expansión ya no existirá solución en las hipótesis del modelo pues las curvas  $P_R$  y  $P_I$  no se cortarán. Sin embargo el núcleo, siendo un tubo vorticoso, no puede "desaparecer" dentro del fluido, por lo tanto éste deberá existir en la sección B aunque alguna o algunas de las hipótesis del modelo ya no se cumplan. La designación de expansión "crítica" para  $\delta_B$  se

(\*) - Aquí aparece una diferencia esencial respecto a la analogía con los flujos a superficie libre. En éstos, la no existencia de solución para la transición implica la imposibilidad de todo flujo en la transición. Para hacer posible nuevamente el flujo en la transición se requiere un cambio del flujo en el canal en su totalidad, no ya un cambio local.

justifica, en el contexto del modelo desarrollado, pues para  $\delta_B > \delta_{BC}$  el flujo en B presenta PSA.

Otra forma de plantear el problema de la PSA es resolver el sistema (12) tomando como datos  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  y  $\mu$ , y como incógnitas  $\beta$  y  $K$ . El resultado será  $\beta_C$  y  $K_C$ . Si se examina la función  $(P_R - P_I)$  como función de  $K$ , se puede ver fácilmente que si  $K > K_C$  hay PSA (no hay solución) y si  $K < K_C$  no hay PSA (hay solución).

La correspondencia entre la inexistencia de solución y la PSA en la sección B es cualitativamente coherente - como se verá - con los fenómenos que se han observado experimentalmente para los FHAR.

#### 10 - Comportamiento del flujo en tubos cilíndricos.

Para tubos cilíndricos se tendrá que  $\delta_A = \delta_B$  y en este caso una solución de (10) es siempre  $\beta = 1$  como se deduce del examen de las expresiones (8) y (9) de  $P_I$  y  $P_R$  respectivamente. Para esta solución el estado del flujo en la sección B será idéntico al de la sección A (punto de origen).

Si las curvas  $P_I$  y  $P_R$  tuviesen otra intersección en el caso  $\delta_A = \delta_B$  analizado, la descripción teórica de la evolución del flujo rotacional que se ha desarrollado en la sección 5, implica que el punto representativo del estado del flujo no puede desplazarse sobre la curva  $P_R(K, \beta)$  con  $K$  dado, pues todas las secciones intermedias son idénticas a la sección A y por lo tanto  $\beta = 1$  seguirá siendo una solución de (10) en todas las secciones intermedias.

En consecuencia y de acuerdo con el enfoque desarrollado, el modelo indica que en el tubo cilíndrico no se presentará, bajo ninguna circunstancia, el fenómeno de la PSA.

#### 11 - Comparación cualitativa entre los resultados del modelo y las observaciones experimentales en los FHAR.

En esta sección se harán algunas comparaciones de tipo cualitativo entre los principales resultados obtenidos con el modelo desarrollado y observaciones experimentales en los FHAR efectuadas por diferentes autores.

##### 11.1 - Inversión de velocidad y perfil de velocidades en los FHAR.

Para contrastar cualitativamente las predicciones del modelo en cuanto al perfil de velocidades para una expansión, puede verse el trabajo de Senoo, 1978. Este autor presenta experiencias de FHAR ( $Re \sim 1.7 - 4.5 \times 10^5$ ) en un difusor cónico. Se observa en  $v_2$  el vórtice de Rankine en la sección de entrada y en  $v_3$  el perfil tipo "estela" en la salida.

El autor no tiene conocimiento de mediciones en contracciones, para corroborar el perfil tipo "chorro" que el modelo prevee.

## 11.2 - Evolución de los FHAR en expansiones.

La existencia de simetría axial en los FHAR en expansiones cónicas se observa en la figura 1a (experiencia realizada en el Inst. de Mecánica de los Fluidos e Ing. Ambiental de la Univ. del Uruguay en 1990). Aumentando  $K$  se llega a la situación de PSA que se muestra en la figura 1b. La expansión a la cual está sometido el FHAR es de  $\delta_B / \delta_A = 1.3$ . En consecuencia, el fenómeno observado es cualitativamente compatible con la predicción del modelo.

Esto

es, para  $K < K_C$  no hay PSA y para  $K > K_C$  hay PSA. En el caso presentado  $K_C$  estará comprendido entre el valor de  $K$  correspondiente a la figura 1a y el correspondiente a la figura 1b.

Nótese que el parámetro  $K$  del modelo desarrollado es una medida adimensionada del momento angular. Para flujos en expansiones, como se vio en la sección 8, la PSA va asociada al aumento del  $K$  respecto al flujo con simetría axial.

También en Gore 1964, se destaca la existencia de FHAR con simetría axial así como la pérdida de dicha simetría (PSA) al aumentar el momento angular del flujo.

En el trabajo experimental de Palde, 1972; se presentan medidas de frecuencias de las pulsaciones de presión asociadas a la PSA para  $Re \sim 10^5$  en expansiones (geometrías cónicas) muy variadas. No se determina el pasaje del flujo simétrico al flujo con PSA. Los flujos con PSA que se presentan poseen valores de  $K$  altos (quizás no menor de  $K = 2$ ).

Guarga, 1989, da cuenta de pulsaciones de presión asociadas a la PSA de FHAR en una expansión (cono de  $7.5^\circ$  de ángulo al vértice y 505 mm de largo) con  $a_1 = 50$  mm y  $Re \sim 10^5$ .

## 11.3 - Evolución de los FHAR en contracciones.

El autor no conoce ninguna referencia a PSA en FHAR confinados en geometrías cónicas operando como contracciones.

Estas geometrías se emplean en los dispositivos separadores de tipo ciclónico y con ese motivo ha sido estudiado ampliamente el FHAR en ellas. Dicho flujo es en general más complejo que el estudiado en el texto porque parte del núcleo rotacional se hace fluir en sentido inverso al de la velocidad axial media del flujo irrotacional. Sin embargo cuando se sustituye el flujo inverso por aire y se visualiza la línea de presión mínima, ésta siempre es coaxial. Ver por ejemplo Battacharyya, 1984.

En consecuencia, todo indicaría que la predicción efectuada por el modelo de inexistencia de la PSA en los FHAR en contracciones, es también coherente con las observaciones.

## 11.4 - FHAR en geometrías cilíndricas.

Los FHAR en geometrías cilíndricas han sido estudiados especialmente por varios autores. Pueden citarse entre otros a Cassidy et al 1970; Palde, 1972 y Guarga 1984, 1985 y 1989. Cassidy, Palde y Guarga constatan pulsaciones y por lo tanto PSA, en el extremo aguas abajo del tubo cilíndrico. Estos resultados experimentales aparentemente contradicen la conclusión a la cual se llegó en la sección 10, sobre la imposibilidad de la PSA en los tubos cilíndricos. Sin embargo ello no es así puesto que los tres

autores citados observan la PSA, como se dijo, en el extremo de aguas abajo del tubo. Dicha PSA es consecuencia de la expansión que sufre el flujo al salir del tubo cilíndrico y entrar en un recinto infinito. En la figura 11 se presenta una fotografía y un esquema, presentados por Guarga 1989, donde se muestra como el flujo mantiene su simetría axial hasta el extremo aguas abajo del tubo y allí la pierde al estar sometido a una expansión, tal como era de esperar.

En consecuencia, el material experimental conocido confirma también la conclusión teórica de la no existencia del fenómeno de la PSA en los tubos cilíndricos.

## 12 - Conclusiones.

El modelo desarrollado es cualitativamente consistente con los resultados experimentales conocidos referidos a la PSA en los FHAR. Ello justifica la realización de un próximo trabajo de tipo experimental dirigido a estudiar el grado de aproximación cuantitativa que pudiera obtenerse del modelo planteado.

## 13 - Agradecimientos.

A los Prof. Enzo Levi de México y Michele Fanelli de Italia por las sugerencias y el estímulo recibidos cuando el material presentado se estaba elaborando y a los ingenieros de las secciones de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería de la UNAM de México y del Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental de la Univ. de la República de Uruguay por su valiosa colaboración.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - Batchelor, G. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge, Univ. Press, 1967.
- 2 - Battacharyya, P. "The flow field inside a conventional hydrocyclone". Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Hydrocyclones, Sept. 1984, Bath, England. pp 323 - 335.
- 3 - Bettocchi, R. et al. "Analyse experimentale de l'écoulement dans la zone axiale des canaux adducteurs des turbines-helices". La Houille Blanche N° 7, 8, 1982, pp 599 - 606.
- 4 - Benjamin, B. "Theory of the vortex breakdown phenomenon", J. Fluid Mechanics 14, 1962, pp 593 - 629.
- 5 - Cassidy, J. et al. "Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown". J. Fluid Mech., Vol. 41, Part 4, 1970, pp 727 - 736.
- 6 - Doerfler, P. "System dynamics of the Francis turbine half load surge". IAHR, 3<sup>rd</sup> Division Symposium, Amsterdam, 1982, pp 39/1 - 39/15.
- 7 - Escudier, M. "Confined vortices in flow machinery" Annual Review of Fluid Mechanics. Volume 19, 1987 pp 27 - 52.
- 8 - Fanelli, M. "Mathematical models of the vortex rope surge effects in the draft tube of Francis turbine working at partial load". IAHR, Journal of Hyd. Research, Vol. 27, N° 6, 1989, pp 769 - 807.
- 9 - Gerich, R., et al "Measurements of the unsteady and

- cavitating flow in a model Francis turbine of high specific speed". Journal of Fluids Eng. ASME, Dec. 1975, pp 402 - 411.
- 10 - Gore, R. et al, "Backflows in rotating fluids moving axially through expanding cross sections". A.I.Ch.E. Journal, Vol. 10, N°1, Jan. 1964, pp 83 - 88.
  - 11 - Guarga, R. et al, "Some fundamental characteristics of oscillatory swirling flows in cylindrical tubes and cones" in "Current state of technology in hydraulic machinery", Gower Technical and Science Press, 1989, pp 85 - 105.
  - 12 - Guarga R. et al. "Estudio experimental de las características oscilatorias de vórtices confinados en tubos cilíndricos". XI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, AIH, Nov. 1984, Bs. As., Argentina, pp 93 - 105.
  - 13 - Guarga R., et al. "Oscillatory characteristics of swirling, confined, turbulent and non-cavitating flows". Second Meeting Proc. of the IAHR Work Group on The Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillatory Conditions, México, D.F., México, Set. 1985, pp 14/1 - 14/10.
  - 14 - Guarga, R. et al. "Comparative study of La Angostura draft tube vortex oscillatory behaviour". Proc. IAHR 3<sup>rd</sup> Division Symposium Sept. 1986, Montreal, Canada; pp 6/1 - 6/11.
  - 15 - Hall, M., "Vortex breakdown". Annual Review of Fluid Mechanics. Vol. 4, 1972, pp 195 - 217.
  - 16 - Henderson, F. "Open channel flow", Macmillan Publishing C°, 1966.
  - 17 - Hosoi, Y. "Experimental investigations of pressure surge in draft tubes of Francis water turbine". Hitachi Review, Vol. 14, N° 12, 1965, pp 1 - 12.
  - 18 - Lambourne, N., "The Breakdown of certain type of vortex". Ministry of Aviation, Aeronautical Research Council. Current Papers. C.E. N° 915. Sept. 1965, pp 1 - 21.
  - 19 - Leibovich, S., "Vortex stability and breakdown: survey and extension". Am. Inst. of Aeronautics and Astronautics, Vol. 22, N° 9, 1983, pp 1192 - 1206.
  - 20 - Nishi, M. et al "Flow regimes in an elbow-type draft tube IAHR, 3<sup>rd</sup> Division Symposium Amsterdam 1982, pp 38/1 - 38/13.
  - 21 - Palde, U. "Influence of draft tube shape on surging characteristics of reaction turbines", USBR, USA, Tech. Report REC-ERC-72-24, Jul, 1972. pp 1 - 29.
  - 22 - Sarpkaya, T. "Vortex breakdown in swirling conical flows". Am. Inst. of Aeronautics and Astronautics, Vol. 9, N° 9, 1971, pp 1792 - 1799.
  - 23 - Senoo, Y. "Swirl flow in conical diffusers". Bull. of the JSME, Vol. 21, N° 151. Jan. 1978, pp 112 - 119.
  - 24 - So, K. "Vortex phenomena in a conical diffuser". Am. Inst. of Aeronautics and Astronautics, Vol. 5, N° 6, June 1967, pp. 1072 - 1078.

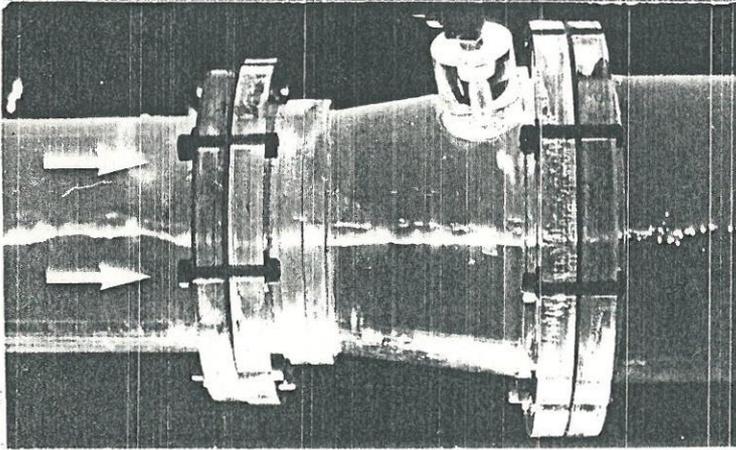


Figura 1a - Flujo helicoidal con simetría axial

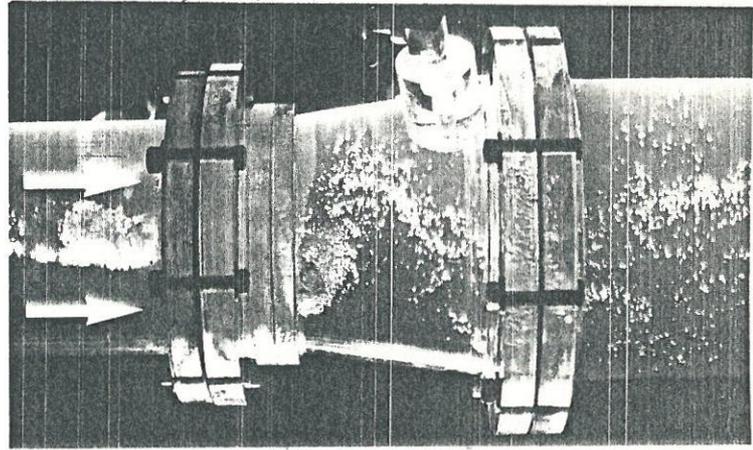


Figura 1b - Flujo helicoidal sin simetría axial

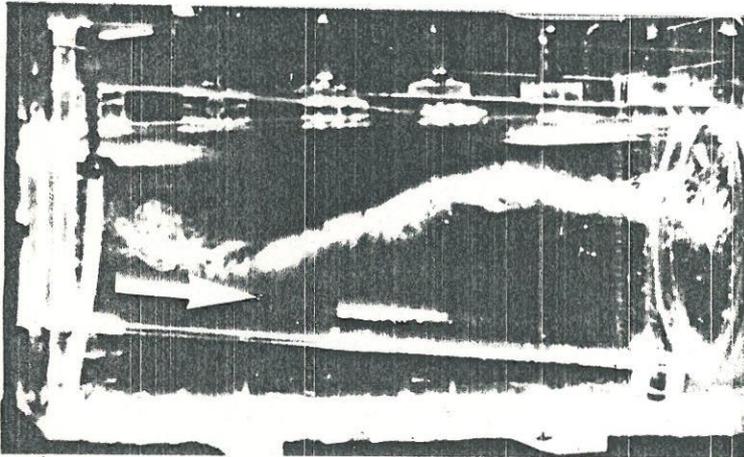


Figura 2a - Flujo helicoidal sin simetría axial en un difusor cónico.

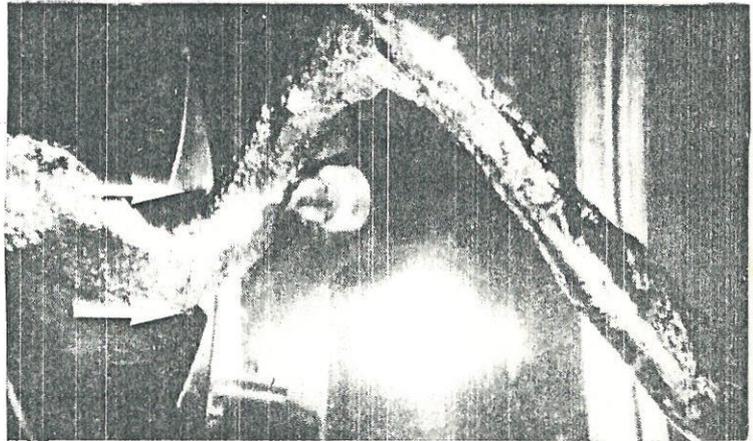


Figura 2b - Flujo helicoidal sin simetría axial en el difusor de una turbina Francis.

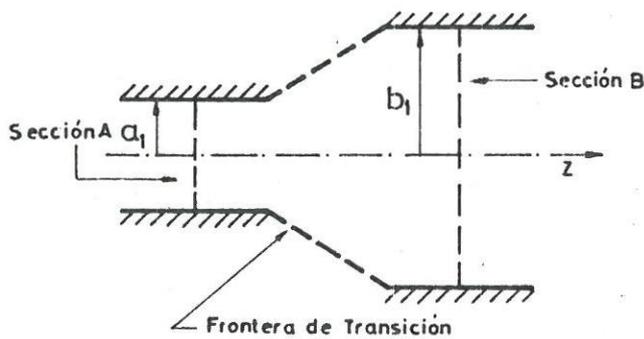


Figura 3 - Fronteras del flujo.

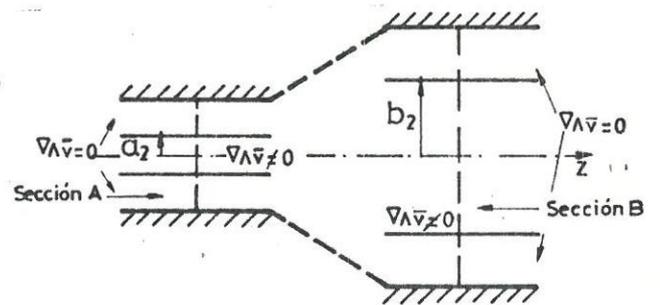


Figura 4 - Flujo rotacional y flujo irrotacional.

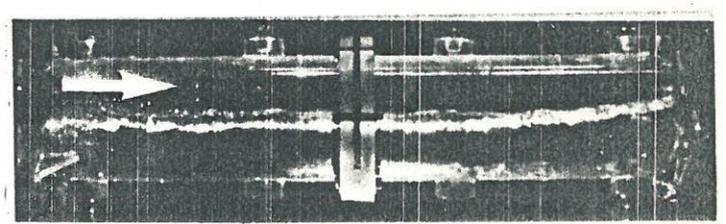
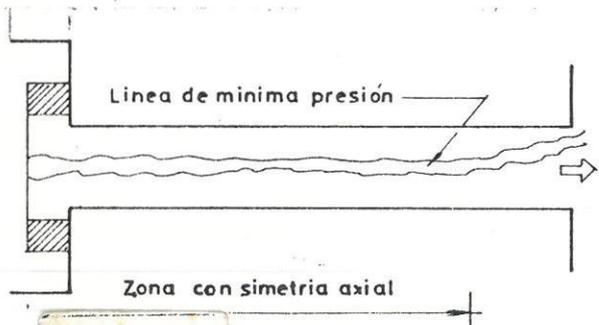
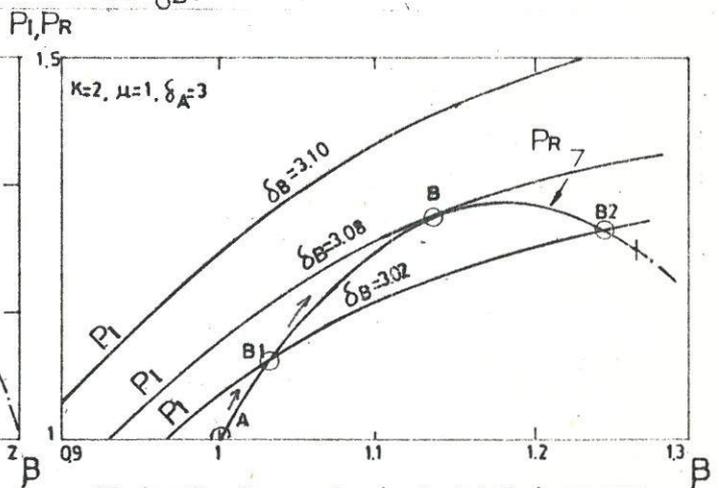
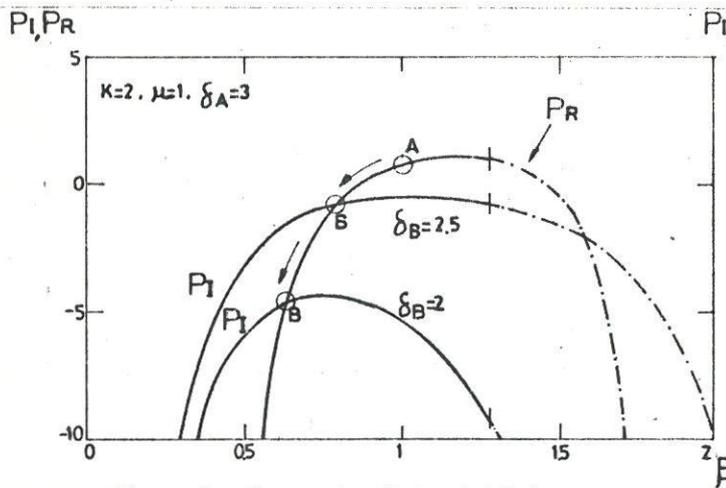
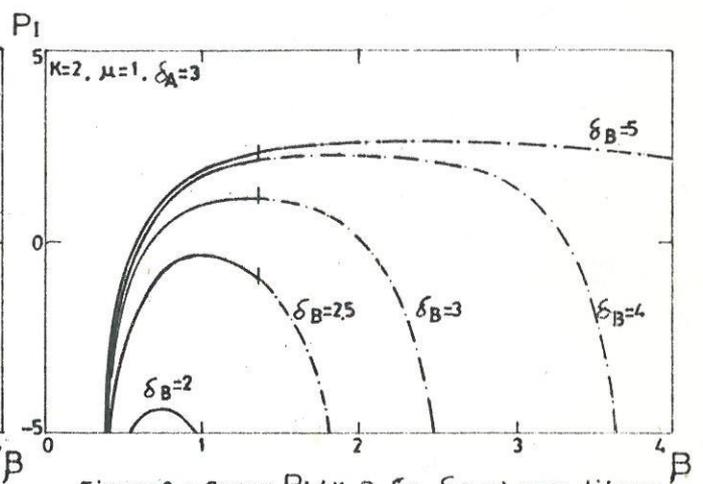
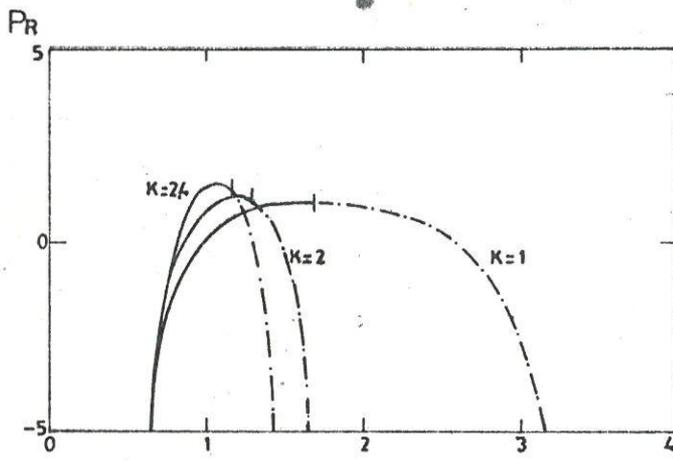
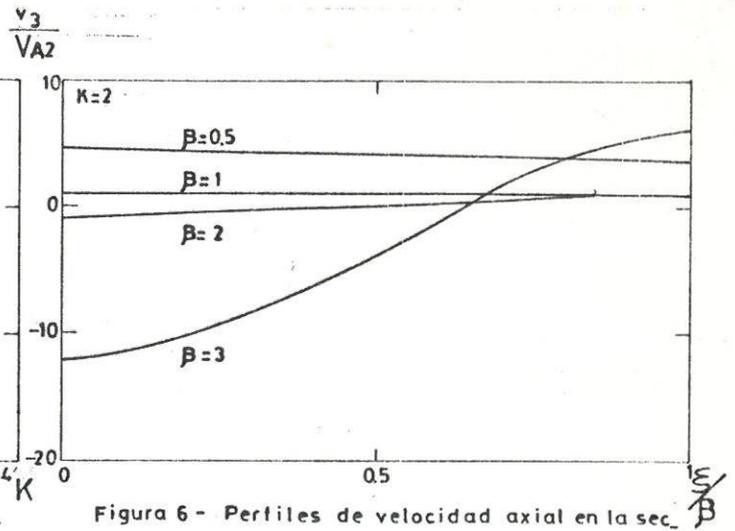
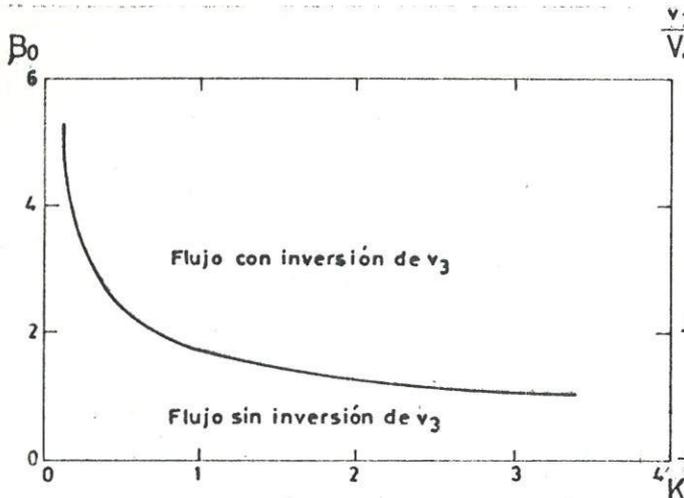


Figura 11- Flujo helicoidal en geometría cilíndrica. Tiempo de exposición 1/2000 s.