



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Universidad de la República
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística
Informe de Pasantía

Simulación de la Solución Probabilística del Problema de Dirichlet

Agustín Estramil

Tutor:
Ing. Enrique Cabaña

Tribunal:
Dr. Mathias Bourel
Ing. Enrique Cabaña
Dr. Marco Scavino

Montevideo, Mayo de 2017.

Universidad de la República
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba el trabajo de Pasantía **Simulación de la Solución Probabilística del Problema de Dirichlet**.

Agustín Estramil

Tutor: Enrique Cabaña

Licenciatura en Estadística

Puntaje

Tribunal

Profesor (nombre y firma)

Profesor (nombre y firma)

Profesor (nombre y firma)

Fecha

Resumen

El Problema de Dirichlet consiste en encontrar una función armónica en una región abierta y acotada, con valores prefijados en el borde de la región. En el plano, si la región es un círculo o un rectángulo entonces el problema tiene solución exacta que puede ser hallada mediante desarrollos en series de Fourier trigonométricas. Si la región es una figura más general, no es posible asegurar que se pueda hallar una solución analítica exacta por lo cual se suelen obtener aproximaciones numéricas.

Este problema también admite una solución de carácter probabilístico que es general en cuanto a la forma de la región. Una alternativa a los métodos utilizados tradicionalmente para obtener aproximaciones numéricas es la simulación de esta solución probabilística. En este trabajo se presenta un procedimiento para la resolución numérica del Problema de Dirichlet en regiones planas generales mediante la simulación de la solución probabilística.

Palabras claves: Simulación, Proceso de Wiener, Proceso detenido.

Agradecimientos

A mis padres por el apoyo incondicional de siempre.

A mi querido profesor Enrique Cabaña por los aportes, sugerencias y comentarios que me hizo durante el desarrollo de este trabajo pero sobre todo, por las ideas que me ha dejado desde que lo conocí en el curso de Álgebra Lineal del año 2012.

A mis amigos y compañeros de la Licenciatura en Estadística, Cindy Abreo, Gonzalo Hornos y Cecilia Paciel con quienes compartimos innumerables momentos, les agradezco por haber estado cerca todos estos años y por ser los grandes compañeros que son.

Índice

1. Introducción	1
2. Funciones armónicas	3
2.1. Fórmula de Green	3
2.2. Teorema del Promedio y Principio de Máximo	4
3. Problema de Dirichlet en regiones planas	8
3.1. Una solución en el rectángulo $A = (0, a) \times (0, b)$	8
3.1.1. La solución es la integral respecto de una solución particular	11
3.1.2. La solución $u(x, y, t)$ extendida a todo el perímetro es una función de distribución de probabilidad	12
3.2. Una solución en el disco $D_\rho = \{(x, y)^{tr.} : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$	13
4. Solución probabilística del Problema de Dirichlet	15
4.1. Proceso de Wiener típico: definición y características principales	16
4.1.1. Una solución general para el Problema de Dirichlet	17
4.2. Condiciones de regularidad del borde ∂D	18
4.3. Tiempo de llegada del proceso de Wiener al borde del disco D_ρ	19
4.3.1. Tiempo esperado de llegada al borde de D_ρ cuando el proceso parte del centro de D_ρ	20
4.3.2. Tiempo esperado de llegada al borde de D_ρ cuando el proceso parte del punto $(x, y) \in D_\rho$	21
5. Simulación de la solución probabilística en círculos y regiones generales	22
5.1. Idea principal del procedimiento de simulación	23
5.1.1. Precisiones previas a la implementación	23
5.2. Construcción de la región G y del conjunto \mathcal{P}	25
5.2.1. Algoritmos para la construcción del conjunto \mathcal{P}	26
5.3. Simulación del punto de llegada	30
5.3.1. Algoritmo que simula un punto de llegada	31
6. Estimación estadística de la solución	32
6.1. Errores cometidos en la estimación estadística	33
6.2. Un modelo aproximado para estimar el error	34
6.2.1. Un estimador de la solución aproximadamente insesgado	35

7. Resultados obtenidos de las simulaciones	36
7.1. Rendimiento del procedimiento de simulación	37
7.2. Errores cometidos en la estimación	39
7.3. Cálculo del tiempo esperado de llegada al borde	41
8. Conclusiones finales	44

1. Introducción

Sean D una región abierta y acotada de \mathbb{R}^n y f una función de clase C^2 , definida en el dominio D . El operador de Laplace, denotado con el símbolo Δ , se define como

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D.$$

Dados un dominio D con las características mencionadas y una función g , definida en el borde de D , ∂D , el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace consiste en encontrar una función u que satisfaga

$$\Delta u = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in D \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial D \tag{2}$$

Una función que satisface la ecuación (1) en un dominio D abierto (no necesariamente acotado) se denomina armónica en D y la ecuación (2) se denomina condición de borde del problema. Si bien el problema existe en cualquier dimensión, en este trabajo se considerarán únicamente dominios planos ($n = 2$).

Dados un dominio y una condición de borde, si el problema admite solución entonces la solución es única.

Una posible interpretación física del problema de Dirichlet (adaptada de [4] y [7]) surge de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \Delta f(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

denominada ecuación del calor. Esta ecuación modela la distribución de temperatura en una región D al cabo de tiempo t . A diferencia de lo que sucede con la ecuación (1), si se fija únicamente una condición de borde (temperatura en el borde) entonces la solución de este problema no queda determinada de manera única, por lo que es necesario fijar también una temperatura inicial $f(\mathbf{x}, 0)$. Se define $u(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}, t)$ como la temperatura en estado estacionario. Dado que para todo $T > 0$, $f(\mathbf{x}, t + T)$ satisface la ecuación (3), la condición de borde y la condición de temperatura inicial, es razonable suponer que lo mismo pasa con la función u . Sustituyendo u en (3) se obtiene (1). Por lo tanto, una solución del problema de Dirichlet $u(\mathbf{x})$ puede ser interpretada como la temperatura de estado estacionario en $\mathbf{x} \in D$ con

temperatura g prefijada en el borde.

La dificultad de encontrar una solución analítica radica esencialmente en la forma del dominio D . Si el dominio es un rectángulo o un disco entonces el problema tiene soluciones sencillas basadas en series de Fourier trigonométricas. En cambio, si el dominio es una región más general, no es posible garantizar que el problema admita una solución analítica, por lo cual normalmente se suele hacer aproximaciones numéricas de la solución.

En 1944 el matemático japonés Shizuo Kakutani publicó un resultado que vincula el problema de Dirichlet con el proceso de Wiener bidimensional. El resultado establece que el valor esperado del proceso que comienza en $\mathbf{x} \in D$, detenido en el borde de D es solución del problema. El objetivo del presente trabajo es resolver numéricamente el problema de Dirichlet mediante la simulación del resultado de Kakutani.

El trabajo abarca esencialmente dos partes. La primera parte, contenida en las secciones 2, 3 y 4, comienza con una introducción general al problema en la que se presentan algunos resultados sobre funciones armónicas y la resolución del problema cuando D es un disco y un rectángulo. Al final de la sección 2 se demuestra el Principio de Máximo, resultado que luego es utilizado en las secciones 3.1.1 y 3.1.2 para probar que la solución del problema con dominio rectangular es una esperanza. Finalmente, en 4 se hace una introducción al proceso de Wiener, se propone una solución probabilística y se demuestra mediante el Teorema del Promedio que esta presunta solución es una función armónica que cumple con la condición de borde.

La segunda parte del trabajo se encuentra contenida en las secciones 5, 6 y 7, y aborda la resolución numérica del problema mediante la simulación de la solución probabilística presentada en 4. Esta parte comienza con una construcción geométrica de un procedimiento de simulación de trayectorias del proceso de Wiener bidimensional detenidas en el borde de D . La sección 6 propone dos estimadores para la solución probabilística basados en las trayectorias detenidas y posibles maneras de acotar el error cometido con cada estimador. Finalmente, en 7 se exponen los resultados numéricos obtenidos con los estimadores presentados en 6, en una región particular en la que se conoce la solución exacta debido a la elección particular de la condición de borde. En esta sección se calcula el error exacto y se lo compara con las estimaciones de las cotas desarrolladas en 6.

2. Funciones armónicas

Sea D una región abierta del plano. Una función es armónica en D si verifica la ecuación de Laplace, que en el plano queda dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in D, \quad (4)$$

también denotada con $\Delta u = 0$.

2.1. Fórmula de Green

Sean D una región acotada cuyo borde es una curva $C = \partial D$ suficientemente regular de longitud L , y ℓ una función que asocia a cada punto t del intervalo $[0, L]$ un punto $\ell(t) = (x(t), y(t))$ de C . La función ℓ es una parametrización de C positivamente orientada. Al extremo inferior del intervalo se le asocia un punto de origen $\ell(0) = \mathcal{O}$ de C elegido de forma arbitraria, y se supone sin pérdida de generalidad que la longitud del arco entre \mathcal{O} y $\ell(t)$ es t , esto es,

$$\int_0^t \|\ell'(s)\| ds = t \quad (5)$$

donde la integral (5) es la distancia del arco delimitado por \mathcal{O} y $\ell(t)$. Cuando una parametrización cumple (5) se suele decir que la curva se encuentra parametrizada con la longitud del arco.

Si g es una función cuyo dominio contiene a C , la integral $\int_C g$ o bien $\int_C g(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$ se define como $\int_0^L g(\ell(t)) dt$, y la integral respecto de una de las coordenadas de ℓ , por ejemplo $\int_C g dx$ se define como $\int_0^L g(\ell(t)) dx(t)$.

La fórmula de Green establece que si f y g tienen derivadas parciales continuas entonces se cumple la igualdad

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dy - g dx). \quad (6)$$

Si bien esta fórmula es válida para cualquier región conexa y acotada D , en este caso sólo se utilizará y se demostrará para el caso en el que D es un disco.

Demostración de la Fórmula de Green en el disco

Si la región D_ρ es el disco de centro $(0, 0)$ y radio ρ , y C_ρ la circunferencia que delimita a D_ρ entonces

$$\iint_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{-\rho}^{\rho} \int_{-\sqrt{\rho^2-y^2}}^{\sqrt{\rho^2-y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la última integral se puede escribir

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(\sqrt{\rho^2-y^2}, y) dy - \int_{-\rho}^{\rho} f(-\sqrt{\rho^2-y^2}, y) dy. \quad (7)$$

Haciendo el cambio de variable $y = -\rho \sin \varphi$ en la integral del primer sumando e $y = \rho \sin \varphi$ en la del segundo, y teniendo en cuenta que $\sqrt{\rho^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = |\rho \cos \varphi| = -\rho \cos \varphi$ para todo $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, la suma (7) queda

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(-\ell(\varphi))(-\rho \cos \varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\ell(\varphi))\rho \cos \varphi d\varphi \quad (8)$$

donde $\ell(\varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Partiendo el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ en la unión $[\pi/2, \pi] \cup [\pi, 3\pi/2]$ y haciendo un cambio de variable, la integral del primer sumando puede ser escrita como

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} f(-\ell(\varphi - \pi))(-\rho \cos(\varphi - \pi)) d\varphi + \int_0^{\pi/2} f(-\ell(\varphi + \pi))(-\rho \cos(\varphi + \pi)) d\varphi.$$

Dado que $\cos(\varphi - \pi) = \cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$ y $\sin(\varphi - \pi) = \sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi$ se obtiene que los integrandos de la suma anterior son iguales al integrando del segundo sumando de (8). Finalmente, se concluye que

$$\iint_{D_\rho} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_0^{2\pi} \rho f(\ell(\varphi)) \cos \varphi d\varphi = \int_{C_\rho} f dy, \quad (9)$$

donde la última igualdad se obtiene a partir de la transformación $t = \varphi \rho$.

Con un razonamiento análogo se demuestra que $\iint_{D_\rho} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = -\int_{C_\rho} g dx$, y sumando a la ecuación (9) se obtiene la fórmula de Green para el disco.

2.2. Teorema del Promedio y Principio de Máximo

Sean u una función armónica en D y C_ρ la circunferencia de radio ρ y centro (x_0, y_0) contenida en D y parametrizada con $\ell(\varphi) = (x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 +$

$\rho \sin \varphi$) con $\varphi \in [0, 2\pi]$. Cualquier punto de la circunferencia C_ρ puede ser escrito como $\mathbf{d} = \ell(\varphi)$ donde $\varphi = t/\rho$ es el ángulo formado entre el segmento que une (x_0, y_0) con \mathbf{d} y el segmento que une (x_0, y_0) con $(x_0 + \rho, y_0)$, y $t \in [0, 2\pi\rho]$ es la distancia a lo largo de C_ρ del punto tomado como punto de origen a $\ell(\varphi)$. El vector normal unitario al punto \mathbf{d} está dado por $\mathbf{n} = (\cos(t/\rho), \sin(t/\rho))$, y la derivada de u en la dirección de \mathbf{n} en un punto $\mathbf{p} = (x_p, y_p) \in D$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{p}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{p} + \delta \mathbf{n}) - u(\mathbf{p})}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{p}) + \langle \nabla u(\mathbf{p}), (\mathbf{p} + \delta \mathbf{n} - \mathbf{p}) \rangle + o(\delta \mathbf{n}) - u(\mathbf{p})}{\delta} \\ &= \langle \nabla u(\mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial u}{\partial x}(x_p, y_p) \cos(t/\rho) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_p, y_p) \sin(t/\rho). \end{aligned}$$

Si $x(t) = x_0 + \cos(t/\rho)$ e $y(t) = y_0 + \sin(t/\rho)$, de la igualdad anterior resulta

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial y} \left(-\frac{dx}{dt} \right) \quad (10)$$

y utilizando la fórmula de Green en la integral de la expresión anterior

$$\int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \rho \int_0^{2\pi\rho} \frac{\partial u}{\partial x} dw - \frac{\partial u}{\partial y} dv = \rho \iint_{D_\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dv dw = 0. \quad (11)$$

La última igualdad se obtiene por ser u una función armónica.

Teorema 2.1. (Teorema del Promedio)

Si u es armónica en D entonces para cualquier disco D_ρ de radio ρ y centro (x_0, y_0) contenido en D se cumple que

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\rho^2 \pi} \iint_{D_\rho} u = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} u.$$

Demostración. El promedio de u en el disco D_ρ está dado por

$$M_\rho = \frac{1}{\rho^2 \pi} \iint_{D_\rho} u(x, y) dx dy = \frac{1}{\rho^2 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) dr d\varphi.$$

La última igualdad surge a partir de un cambio de variables a coordenadas polares. Aplicando el método de integración por partes a la integral en $[0, \rho]$ se obtiene

$$\frac{1}{\rho^2 \pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - \int_0^\rho \frac{r^2}{2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr \right) d\varphi.$$

Dado que $\int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{r^2}{2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr d\varphi = \int_0^\rho \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi dr = 0$, se llega a que el promedio de u en el disco es igual al promedio en la circunferencia. Con $\varphi = t/\rho$

$$\begin{aligned} M_\rho &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos w, y_0 + \rho \sin w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi\rho} u(x_0 + \rho \cos(t/\rho), y_0 + \rho \sin(t/\rho)) dt = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} u. \end{aligned}$$

Resta probar que el promedio M_ρ no depende del radio de la circunferencia. Para esto basta verificar que la derivada respecto de ρ es cero.

$$\begin{aligned} \frac{dM_\rho}{d\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \rho \cos w, y_0 + \rho \sin w) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + \rho \cos w, y_0 + \rho \sin w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0 + \rho \cos w, y_0 + \rho \sin w) = \int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, dado que M_ρ es constante para cualquier valor de ρ

$$M_\rho = \lim_{r \rightarrow 0} M_r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos w, y_0 + r \sin w) dw = u(x_0, y_0). \quad (13)$$

□

Recíprocamente, si u cumple la propiedad del promedio para todo punto \mathbf{p} interior de D entonces u es armónica en D .

Demostración. (Adaptada de [4])

Para verificar la reciprocidad del teorema se definen las circunferencias C_ε de centro $(0, 0)$ y $C_\varepsilon + \mathbf{p}$ de centro \mathbf{p} contenidas en D . Por la propiedad del promedio se cumple que

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C_\varepsilon + \mathbf{p}} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} u(\mathbf{z} + \mathbf{p}) d\mathbf{z}. \quad (14)$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de segundo orden de u se obtiene

$$u(\mathbf{z} + \mathbf{p}) = u(\mathbf{p}) + \mathbf{z}^{tr} \cdot \nabla u(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \mathbf{z}^{tr} \cdot \mathbf{H} \mathbf{z} + o(\|\mathbf{z}\|^2), \quad \mathbf{z} \in D_\varepsilon$$

donde \mathbf{H} representa a la matriz hessiana de u evaluada en \mathbf{p} . Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (14) y definiendo $\ell(t) = (\varepsilon \cos t/\varepsilon, \varepsilon \sin t/\varepsilon)$ se obtiene que

$$\int_{C_\varepsilon} \mathbf{z}^{tr} \cdot \nabla u(\mathbf{p}) d\mathbf{z} = 0 \quad \text{y} \quad (15)$$

$$\int_{C_\varepsilon} \mathbf{z}^{tr} \mathbf{H} \mathbf{z} d\mathbf{z} = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{p}) \cos^2 t/\varepsilon + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \sin^2 t/\varepsilon dt = \varepsilon^3 \pi \Delta u(\mathbf{p}). \quad (16)$$

Finalmente, la ecuación (14) queda

$$u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}) + \frac{\varepsilon^2}{4} \Delta u(\mathbf{p}) + o(\varepsilon^2), \quad (17)$$

de donde surge que $\Delta u(\mathbf{p}) = o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2$, y haciendo ε tender a cero se llega a que u es armónica. \square

Teorema 2.2. (Principio de Máximo)

Si u es armónica en el dominio abierto y conexo D , y alcanza su máximo en algún punto de D entonces u es idénticamente constante en D .

Demostración. Suponiendo que u tiene máximo en D y no es idénticamente constante entonces existe un conjunto cerrado $A = \{(x, y) : u(x, y) = M\}$ contenido en D , donde $M = \max\{u(x, y) : (x, y) \in D\}$. El complemento de A queda determinado por el conjunto abierto

$$A^C = \{(x, y) : u(x, y) < M\} \quad (18)$$

Sea \mathbf{x} un punto de D en el que u alcanza M . Por el teorema del promedio existe un disco abierto D_ε centrado en \mathbf{x} tal que el promedio en el disco coincide con $u(\mathbf{x})$, es decir

$$M = u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^2 \pi} \iint_{D_\varepsilon} u. \quad (19)$$

Por ser $u(\mathbf{x})$ el máximo de u en D_ε se cumple que $u(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D_\varepsilon$ pero la función u debe ser constante en todo D_ε porque $u(\mathbf{x})$ coincide con el promedio en el disco, y si u tomara valores menores a M entonces el promedio sería menor que M . Luego, $D_\varepsilon \subseteq A$ y para cualquier $\mathbf{y} \in A$ existe un disco centrado en \mathbf{y} contenido en A lo que implica que el conjunto A es abierto.

Entonces se deduce que A es abierto y cerrado al mismo tiempo, y $D = A \cup A^C$ la unión de dos conjuntos abiertos. Para que D sea conexo se debe cumplir que uno de los dos conjuntos sea vacío. El conjunto A no es vacío porque u tiene máximo en D , por lo tanto A^C es vacío con lo cual se llega a que $u(x, y) = M$ para todo $(x, y) \in D$. \square

El contrarrecíproco del teorema anterior establece que si u es armónica y no es constante en D entonces alcanza el máximo en ∂D . Si u vale g en ∂D

entonces $u(x, y) \leq \text{máx } g$ para todo $(x, y) \in D \cup \partial D$.

Análogamente, dado que si u es armónica entonces $-u$ también es armónica, se verifica que $-u \leq \text{máx } -g$. Esto implica que $\text{mín } g = -\text{máx } -g \leq u$ y por lo tanto

$$\text{mín } g \leq u(x, y) \leq \text{máx } g \quad (20)$$

para todo $(x, y) \in D \cup \partial D$.

3. Problema de Dirichlet en regiones planas

En esta sección se resuelve de forma analítica el Problema de Dirichlet en dos regiones planas. Como se introdujo en la sección 1, este problema consiste en encontrar una función u armónica en el conjunto $D \cup \partial D$ con condición de borde dada por $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{si } (x, y) \in D \quad (21)$$

$$u = g \quad \text{si } (x, y) \in \partial D \quad (22)$$

3.1. Una solución en el rectángulo $A = (0, a) \times (0, b)$

Cuando la región D es un rectángulo, el problema con condición de borde g definida en ∂D puede resolverse analíticamente sumando las soluciones de los cuatro problemas con condición de borde nula en tres de los lados y g_i que surge de fijar el valor de la abscisa u ordenada correspondiente al lado restante.

A continuación se resolverá el problema con condición de borde no nula en el lado superior y nula en el resto de los lados. Este nuevo problema consiste en encontrar una función que verifique la ecuación de Laplace (21) y que cumpla las siguientes condiciones de borde:

$$u(x, b) = g_1(x) \quad \text{para } 0 < x < a \quad (23)$$

$$u(a, y) = u(x, 0) = u(0, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (24)$$

Para resolverlo de forma analítica se utilizará el método de separación de variables que consiste en buscar soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ que satisfagan la ecuación de Laplace y las condiciones de borde homogéneas (valor nulo en tres de los lados), y luego combinarlas linealmente para que

cumplan la condición de borde no homogénea (valor g_1 en el lado superior). De sustituir esta solución en (21) resulta la igualdad

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0. \quad (25)$$

Estos dos sumandos son funciones que dependen de variables distintas y por lo tanto uno de ellos debe ser igual a una constante positiva y el otro igual a la constante opuesta.

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)$$

$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales admiten soluciones de la forma

$$X(x) = \alpha_1 \cos(\lambda x) + \alpha_2 \sin(\lambda x) \quad (26)$$

$$Y(y) = \beta_1 e^{\lambda y} + \beta_2 e^{-\lambda y} \quad (27)$$

El caso en que el primer sumando de la ecuación (25) es positivo y el segundo es negativo, es decir $X''(x) = \lambda^2 X(x)$ e $Y''(y) = -\lambda^2 Y(y)$, tiene como única solución la trivial puesto que al imponer $u(a, y) = u(0, y) = 0$ en $X(x) = \beta_1 e^{\lambda x} + \beta_2 e^{-\lambda x}$ resulta que $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Sustituyendo las condiciones de borde (24) en $u(x, y) = X(x)Y(y)$ se obtiene que $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 0$ y $\alpha_2 \sin(\lambda a) = 0$ es decir $\lambda = n\pi/a$. Existe una familia de soluciones

$$u_n(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (28)$$

y cualquier combinación lineal finita $F_m(x, y) = \sum_{n=1}^m \alpha_n u_n(x, y)$ es también una solución:

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^m -\alpha_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

La combinación lineal infinita que resulta de hacer tender m a infinito en F_m , es decir

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (29)$$

verifica las tres condiciones de borde homogéneas. La condición no homogénea será utilizada para determinar los coeficientes α_n pero hasta no calcularlos no se puede afirmar que la solución de la ecuación (29) verifica ecuación de Laplace. Estos coeficientes serán determinados por el desarrollo en serie de

Fourier de la función \tilde{g} en el intervalo $[-a, a]$, siendo \tilde{g} la extensión impar de la condición de borde (23),

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -g_1(-x) & \text{si } -a \leq x < 0 \\ g_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \end{cases}. \quad (30)$$

El desarrollo de Fourier de \tilde{g} en $[-a, a]$

$$\tilde{g}(x) \sim \frac{\beta'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \beta'_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (31)$$

donde, utilizando que \tilde{g} es impar

$$\alpha'_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \tilde{g}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

y

$$\beta'_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \tilde{g}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 0 \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

La condición de borde $u(x, b)$ puede ser escrita a partir de la combinación lineal (29) y a partir del desarrollo de Fourier de \tilde{g} .

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (32)$$

De esta última ecuación se deduce que $\alpha_n = \alpha'_n / \sinh(n\pi b/a)$ y la solución del problema de Dirichlet es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a g(z) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) dz \sin(n\pi x/a) \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \quad (33)$$

Resta probar que la serie $u(x, y)$ verifica la ecuación de Laplace. Para esto se utiliza un resultado (contenido en [1]) que establece que si una sucesión de funciones f_m de clase C^1 definidas en un intervalo I tal que f_m y f'_m convergen uniformemente a funciones f y g respectivamente, entonces $f' = g$. Basta entonces definir la sucesión f_m como la suma parcial de la serie $\sum \alpha_n u_n$ y f'_m la suma parcial de $\sum \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$, y ver que convergen uniformemente. Para esto se utilizará el criterio de Weierstrass que consiste en acotar el término general de cada una por el término general de una serie convergente, en este caso

$$|\alpha_n u_n| \leq e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} \quad (34)$$

$$\left| \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq \frac{n\pi}{a} e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} \quad (35)$$

Análogamente, se define f'_m como $\sum \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial y}$ y se verifica que

$$\left| \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| \leq e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(b+y)} \quad (36)$$

de donde se deduce que $\frac{\partial}{\partial y} \sum \alpha_n u_n = \sum \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial x} \sum \alpha_n u_n = \sum \alpha_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$.

Finalmente se define f''_m como $\sum \alpha_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ y se verifica que

$$\left| \alpha_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} \quad (37)$$

con lo cual $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum \alpha_n u_n = \sum \alpha_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$.

Sea $u_{g_1}^{(a,b)}(x, y)$ la solución encontrada anteriormente, donde a y b indican que se trata del problema con dominio $(0, a) \times (0, b)$. Esta solución puede ser adaptada para obtener las soluciones de los problemas con condición de borde g_i en alguno de los otros tres lados y nula en los lados restantes. La solución del problema con condiciones de borde g_1, g_2, g_3 y g_4 en los lados superior, izquierdo, inferior y derecho está dada por la suma

$$u_{g_1}^{(a,b)}(x, y) + u_{g_2}^{(b,a)}(b - y, x) + u_{g_3}^{(a,b)}(a - x, b - y) + u_{g_4}^{(b,a)}(y, a - x). \quad (38)$$

3.1.1. La solución es la integral respecto de una solución particular

El problema con condición de borde $g(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq t\}}$ en el lado superior y nula en el resto de los lados tiene solución

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{(1 - \cos(n\pi t/a))}{\sinh(n\pi b/a)} \sin(n\pi x/a) \sinh(n\pi y/a) \quad (39)$$

obtenida a partir de la ecuación (33). Las sumas parciales, $F_m(x, y, t)$, de esta última serie tienen derivada

$$\frac{\partial}{\partial t} F_m(x, y, t) = \sum_{n=1}^m \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}t\right) \sin(n\pi x/a) \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)}. \quad (40)$$

Utilizando nuevamente el criterio de Weierstrass y que

$$\left| \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \right| \leq e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)}$$

se deduce que las series $u(x, y, t)$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} F_m(x, y, t)$ convergen uniformemente, con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a} t\right) \sin(n\pi x/a) \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)}. \quad (41)$$

Según la ecuación (33), la solución general para cualquier condición de borde superior puede escribirse como

$$u(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^a g(z) \frac{\partial}{\partial z} F_m(x, y, z) dz. \quad (42)$$

Un resultado similar al mencionado anteriormente para derivabilidad y convergencia uniforme, establece que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones f_n a una función f en un intervalo cerrado y acotado I implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_I f$, [1]. Dado que la condición de borde g se puede elegir acotada, la sucesión

$$g(z) \frac{\partial}{\partial z} F_m(x, y, z) \quad (43)$$

converge uniformemente, con lo cual

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^a g(z) \frac{\partial}{\partial z} F_m(x, y, z) dz = \int_0^a g(z) \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) dz \quad (44)$$

es decir

$$u(x, y) = \int_0^a g(z) du(x, y, z). \quad (45)$$

3.1.2. La solución $u(x, y, t)$ extendida a todo el perímetro es una función de distribución de probabilidad

El perímetro del rectángulo puede ser parametrizado en el segmento $[0, 2a + 2b]$ de modo que cada punto del segmento se corresponda con un único punto del borde del rectángulo. En este caso se trabajará con la parametrización que hace corresponder a 0 con el punto $(0, b)$ del borde, con lo cual la condición de borde $g(\ell(t))$ queda definida en el intervalo $[0, 2a + 2b]$, donde

$$\ell(t) = \begin{cases} (t, b) & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ (a, a + b - t) & \text{si } a < t < a + b \\ (2a + b - t, 0) & \text{si } a + b < t \leq 2a + b \\ (0, t - 2a - b) & \text{si } 2a + b < t \leq 2a + 2b \end{cases} \quad (46)$$

Anteriormente se calculó la solución para del problema con condición de borde $\mathbb{1}_{\{x \leq t\}}$ en el lado superior y 0 en los otros lados. Una generalización $u(x, y, t)$ de la solución anterior, puede obtenerse a partir de la fórmula (38) y de la parametrización $\ell(t)$, definiendo $g(w) = \mathbb{1}_{\{w \leq t\}}$ para todo $w \in [0, 2a + 2b]$, es decir, la condición de borde es una función que vale 1 en todos los puntos del perímetro que se corresponden con los del intervalo $[0, t]$ y 0 en los restantes.

Utilizando el contrarrecíproco del Principio de Máximo, resumido en las desigualdades (20), se puede afirmar que con la condición de borde definida anteriormente se cumple que $0 \leq u(x, y, t) \leq 1$ para todo $(x, y) \in D \cup \partial D$. Dado que la suma de funciones armónicas es una función armónica, para valores dados de t y $\delta > 0$ la solución $u(x, y, t + \delta) = u(x, y, t) + u^*(x, y, \delta)$, donde $u^*(x, y, \delta)$ denota a la solución del problema con condición de borde $\mathbb{1}_{\{t < w \leq t + \delta\}}$. Finalmente, para todo $t \geq 0$ se cumple que

$$0 = u(x, y, 0) \leq u(x, y, t) < u(x, y, t + \delta) \leq u(x, y, 2a + 2b) = 1, \quad (47)$$

lo que quiere decir que para cada par (x, y) , $u(x, y, t)$ es una función de distribución de probabilidad y

$$u(x, y) = \int_0^{2a+2b} g(\ell(t)) du(x, y, t)$$

es la esperanza de g con respecto a la distribución cuya densidad es $\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t)$.

3.2. Una solución en el disco $D_\rho = \{(x, y)^{tr.} : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$

Este problema consiste en hallar una función $U(x, y)$ que satisfaga la ecuación de Laplace, $\Delta U = 0$, y que en el borde de D_ρ tome el valor g . Para hallar esta solución se realiza un cambio de variables a coordenadas polares, $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, con lo cual se obtiene una solución en el plano (r, φ) que será denotada indistintamente con $u(r, \varphi)$ o u . Con esta notación, la condición de borde queda dada por $u(\rho, \varphi) = g(\varphi)$, donde g es una función periódica y continua.

La solución de este problema está dada por la integral de Poisson, que se define como

$$u(r, \varphi) = \frac{\rho^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - t) + r^2} dt. \quad (48)$$

A los efectos de probar que la solución del problema en el disco está dada la función anterior, se escribe la ecuación de Laplace en función de r

y φ mediante el cambio de variables mencionado anteriormente, $U(x, y) = U(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(r, \varphi)$. Con esto se obtiene que

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0. \quad (49)$$

Para resolver esta ecuación se procede con el método de separación de variables, buscando soluciones de la forma $u(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi)$ se llega a la igualdad

$$r \frac{(rR'(r))'}{R(r)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)},$$

de la que se deduce que ambos miembros son constantes por tratarse de una igualdad de funciones que dependen de distintas variables. De aquí resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden,

$$\begin{aligned} \phi''(\varphi) &= -\lambda^2 \phi(\varphi) \quad \text{y} \\ rR'(r) + r^2 R''(r) &= \lambda^2 R(r). \end{aligned}$$

Dado que la primer ecuación depende del ángulo φ , la función ϕ debe ser periódica, de período 2π . Por lo tanto, la solución de esta ecuación está dada, al igual que en la sección (3.1), por

$$\phi(\varphi) = \alpha \sin(\lambda\varphi) + \beta \cos(\lambda\varphi) \quad (50)$$

con $\lambda = n \in \mathbb{N}$ para que sea periódica.

La segunda ecuación admite soluciones $(cr)^{-\lambda}$ y $(cr)^\lambda$. La primera se descarta porque no es continua en $r = 0$, por lo que la solución de la segunda ecuación queda dada por $R(r) = (cr)^n$, con c a determinar. Por lo tanto, existe una familia de soluciones $u_n(r, \varphi) = (cr)^n(\alpha_n \sin(n\varphi) + \beta_n \cos(n\varphi))$ de la ecuación de Laplace y la combinación lineal finita de estas soluciones

$$F_m(r, \varphi) = \sum_{n=0}^m (cr)^n (\alpha_n \sin(n\varphi) + \beta_n \cos(n\varphi))$$

es también una solución, y F_∞ es solución si la serie que se obtiene al calcular el límite converge uniformemente.

Resta determinar los coeficientes para que la solución de la ecuación de Laplace verifique la condición de borde. Para esto se utiliza el desarrollo de Fourier de la función $g(\varphi)$, dado por

$$g(\varphi) \sim \frac{1}{2} \beta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \sin(n\varphi) + \beta'_n \cos(n\varphi)$$

donde

$$\alpha'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt) dt \quad y \quad \beta'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) dt.$$

Imponiendo que $F_\infty(\rho, \varphi) = g(\varphi)$ se obtiene que $c = 1/\rho$, $\alpha_n = \alpha'_n$ y $\beta_n = \beta'_n$. Sustituyendo estos valores en $F_\infty(r, \varphi)$ y utilizando las identidades

$$\sin(n\varphi) \sin(nt) = -\frac{1}{2} [\cos(n\varphi + nt) - \cos(n\varphi - nt)]$$

y

$$\cos(n\varphi) \cos(nt) = \frac{1}{2} [\cos(n\varphi + nt) + \cos(n\varphi - nt)],$$

se obtiene que

$$F_\infty(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(n\varphi - nt) dt. \quad (51)$$

Dado que g es continua en $[0, 2\pi]$, se cumple que $|g(t)| \leq k$ para $t \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto, el valor absoluto del término general de la serie anterior se puede acotar por $2\pi k(r/\rho)^n$, lo que implica que la serie converge uniformemente, con lo cual

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n} \cos(n\varphi - nt) \right) dt. \quad (52)$$

Utilizando las identidades

$$\cos(n\tau) = \frac{e^{in\tau} + e^{-in\tau}}{2} = \frac{(\cos \tau + i \sin \tau)^n + (\cos \tau - i \sin \tau)^n}{2}$$

se deduce que la serie de la integral (52) está dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n} \cos(n\tau) = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos \tau + r^2},$$

con $\tau = \varphi - t$. Sustituyendo este último valor en (52) se obtiene (48).

4. Solución probabilística del Problema de Dirichlet

Anteriormente se dedujo que la solución del Problema de Dirichlet puede ser escrita como la esperanza respecto de una función de distribución $u(x, y, t)$ pero hasta ahora no se ha mencionado a qué variable aleatoria corresponde esa distribución de probabilidad. En esta sección se verificará que la solución encontrada anteriormente está dada por la esperanza del punto de llegada de un proceso de Wiener bidimensional al borde de la región D .

4.1. Proceso de Wiener típico: definición y características principales

El proceso de Wiener típico unidimensional se define como una familia de variables aleatorias $\{w(t): t \geq 0\}$, que cumple que para cada valor de t , la variable $w(t)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza t .

El proceso de Wiener se caracteriza por las siguientes propiedades:

- (i) Comienza en el origen, es decir $w(0) = 0$.
- (ii) Las trayectorias de $w(t)$ son funciones continuas y no diferenciables para todo $t \geq 0$.
- (iii) Los incrementos son estacionarios: $w(t+s) - w(s)$ tiene la misma distribución que $w(t)$.
- (iv) Los incrementos son independientes, es decir, si $s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$ se verifica que $\mathbf{E}((w(s_2) - w(s_1))(w(t_2) - w(t_1))) = 0$.
- (v) Si $s \leq t$, la covarianza $\mathbf{Cov}(w(s), w(t)) = \mathbf{E}(w(s)w(t)) = s$.

Una propiedad que cumple el proceso de Wiener típico es la propiedad de cambio de escala, la cual establece que la transformación $w(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ es también un proceso de Wiener típico.

El proceso de Wiener bidimensional está dado por $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t))^{tr}$, donde w_1 y w_2 son procesos de Wiener típicos, unidimensionales e independientes. Fijando t , la variable bidimensional $\mathbf{w}(t)$ tiene distribución normal bivariada de media $(0, 0)^{tr}$ y varianza $t\mathbf{I}_2$. También se pueden extender las cuatro propiedades expuestas para el caso univariante. En particular, si $s \leq t$ la propiedad (v) puede ser generalizada mediante el cálculo de

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t)) &= \mathbf{E}(\mathbf{w}(s)\mathbf{w}(t)^{tr}) = \mathbf{E} \begin{pmatrix} w_1(s)w_1(t) & w_1(s)w_2(t) \\ w_2(s)w_1(t) & w_2(s)w_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = s\mathbf{I}_2. \end{aligned}$$

Si A es la matriz asociada a una isometría en el plano, es decir, para todo par de vectores x e y de \mathbb{R}^2 se cumple que $\|x - y\|^2 = \|Ax - Ay\|^2$ entonces la transformación $A\mathbf{w}(t)$ tiene la misma distribución que $\mathbf{w}(t)$. Esto se cumple porque cualquier transformación lineal de un vector normal tiene distribución

normal, con esperanza y varianza determinadas a partir de la matriz A . En este caso $\mathbf{E}A\mathbf{w}(t) = A\mathbf{E}\mathbf{w}(t) = (0, 0)^{tr}$, y dado que la transformación es una isometría, la varianza queda $\mathbf{Var}(A\mathbf{w}(t)) = A^{tr}\mathbf{Var}(\mathbf{w}(t))A = tA^{tr}A = tI_2$.

El tiempo de absorción de $\mathbf{w}(t)$ en el borde de una región D está dado por

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0: \mathbf{w}(t) \notin \text{int}(D)\} \quad (53)$$

y $\mathbf{w}(\tau_D)$ es el proceso de Wiener bidimensional detenido en el borde de D . Si la región D está dada por el disco D_ρ entonces cualquier rotación que conserva las distancias (isometría), $A\mathbf{w}(\tau_{D_\rho})$, es un punto del borde de D_ρ y por lo anterior tiene la misma distribución que $\mathbf{w}(\tau_{D_\rho})$, con lo que se deduce que el proceso $\mathbf{w}(t)$ llega con probabilidad uniforme a cualquier punto de la circunferencia de radio ρ . Esto se traduce en que $\mathbf{w}(\tau_{D_\rho}) = (\rho \cos U/\rho, \rho \sin U/\rho)$, donde U tiene distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi\rho]$.

4.1.1. Una solución general para el Problema de Dirichlet

La solución propuesta está dada por

$$u(x, y) = \mathbf{E}(g(\mathbf{w}(\tau_D)) | \mathbf{w}(0) = (x, y)) \quad (54)$$

donde g es la condición de borde del problema.

La función u definida anteriormente satisface la condición de borde del problema porque si (x, y) es un punto del borde de D entonces $\tau_D = 0$ con probabilidad 1, lo que implica que $u(x, y) = g(x, y)$.

Para verificar que es una función armónica se verificará que cumple con la propiedad del promedio y se utilizará el recíproco del teorema del promedio (2.1). Para esto se define D_δ , un disco de centro (x, y) y radio δ contenido en D . Utilizando una propiedad conocida de la esperanza, la ecuación (54) puede ser escrita

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(g(\mathbf{w}(\tau_D)) | \mathbf{w}(\tau_{D_\delta})) | \mathbf{w}(0) = (x, y)) \\ &= \mathbf{E}(u(\mathbf{w}(\tau_{D_\delta})) | \mathbf{w}(0) = (x, y)) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la definición de u .

Finalmente, utilizando que $\mathbf{w}(\tau_{D_\delta})$ con punto de partida (x, y) tiene distribución uniforme en el borde de D_ρ , la esperanza anterior se calcula como

$$u(x, y) = \int_{\partial D_\delta} \frac{1}{2\pi\delta} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (55)$$

de donde se deduce que la función definida en (54) cumple la propiedad del promedio y por lo tanto es armónica en D . Con esto se termina de verificar que la fórmula (54) es una solución del problema de Dirichlet, que debido a su naturaleza se denomina “solución probabilística” del problema.

4.2. Condiciones de regularidad del borde ∂D

Hasta el momento se ha supuesto que las regiones D en las que el problema de Dirichlet admite solución deben ser conexas y acotadas, pero no se han hecho supuestos sobre el borde de las regiones. A continuación se darán algunas condiciones que debe cumplir el borde de D para asegurar que el problema admita una solución u continua en el borde [4], esto es

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in D}} \mathbf{E}(g(\mathbf{w}(\tau_D)) | \mathbf{w}(0) = \mathbf{x}) = g(\mathbf{a}) \quad (56)$$

para toda función g medible y continua en \mathbf{a} .

Definición Un punto $\mathbf{x} \in \partial D$ es singular con respecto a D^c si

$$\mathbf{P}(T_{D^c} > 0 | \mathbf{w}(0) = \mathbf{x}) > 0 \quad (57)$$

donde T_{D^c} es el primer momento en el que el proceso alcanza a D^c ,

$$T_{D^c} = \inf\{t > 0 : \mathbf{w}(t) \in D^c\}.$$

En caso contrario, si $\mathbf{x} \in \partial D$ cumple $\mathbf{P}(T_{D^c} > 0 | \mathbf{w}(0) = \mathbf{x}) = 0$ entonces se dice que \mathbf{x} es un punto regular. Esta última probabilidad y la definida en (57) son complementarias por la *ley 0-1* de Blumenthal, explicitada en [4] y en [5].

La definición de regularidad implica que si una trayectoria del proceso de Wiener comienza en un punto regular del borde de D , entonces en todo intervalo $(0, s)$, $s > 0$ habrá puntos por fuera de la región, es decir, el proceso sale de la región en tiempo 0. En cambio, si un punto es singular, la trayectoria del proceso que comienza en ese punto tarda una cantidad positiva de tiempo antes de salir de la región.

Un resultado teórico, incluido en [5], que establece que si $\mathbf{x} \in D$ es un punto singular entonces el problema no puede ser resuelto en ese punto, pues si bien la función es armónica en ese punto no es continua en el borde, es decir, no se cumple (56). Un resultado más general, incluido en [4], afirma que fijando $\mathbf{a} \in \partial D$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) se verifica la ecuación (56) para toda función g continua y acotada;
- (ii) el punto \mathbf{a} es regular; y
- (iii) para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in D}} \mathbf{P}(\tau_D > \varepsilon | \mathbf{w}(0) = \mathbf{x}) = 0.$$

Se puede observar que si la trayectoria del proceso comienza en un punto interior a D y alcanza un punto singular del borde entonces el proceso no se detiene en ese punto ya que continúa en el interior de D .

Estos resultados son útiles para caracterizar a la regularidad en términos de la solución probabilística pero no alcanzan para determinar si una figura tiene borde regular o no. En [4] se da una condición suficiente de regularidad que involucra únicamente a la geometría de la curva ∂D .

Sea $C(\mathbf{y}, \varphi)$ el cono de dirección \mathbf{y} y apertura φ ,

$$C(\mathbf{y}, \varphi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \varphi\}$$

Definición Un punto $\mathbf{a} \in \partial D$ satisface la condición del cono de Zaremba si existen $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ y $0 < \varphi < \pi$ tales que el cono trasladado $\mathbf{a} + C(\mathbf{y}, \varphi)$ está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

El teorema incluido en [4] que da una condición suficiente de regularidad para un punto $\mathbf{a} \in \partial D$, establece que si para algún $r > 0$ el punto \mathbf{a} satisface la condición del cono de Zaremba en el conjunto $\mathbf{a} + D_r \cap D$, donde $\mathbf{a} + D_r$ es el disco de centro \mathbf{a} y radio r , entonces \mathbf{a} es regular.

4.3. Tiempo de llegada del proceso de Wiener al borde del disco D_ρ

En la ecuación (53) se definió el tiempo de absorción del proceso en el borde de una región D . Si la región D es el círculo de radio ρ , entonces el tiempo de absorción en el borde de D_ρ puede ser escrito como

$$T_\rho = \min\{t \geq 0 : \|\mathbf{w}(t)\| \geq \rho\}, \quad (58)$$

el cual, no es otra cosa que el tiempo que el proceso tarda en alejarse ρ del punto de partida.

4.3.1. Tiempo esperado de llegada al borde de D_ρ cuando el proceso parte del centro de D_ρ

Sea M_t el apartamiento del punto de partida máximo de un proceso de Wiener típico en el intervalo $[0, t]$, esto es

$$M_t = \text{máx}\{\|\mathbf{w}(s)\| : 0 \leq s \leq t\}. \quad (59)$$

A partir de estas definiciones se obtiene la siguiente igualdad de sucesos

$$\{T_\rho > t\} \stackrel{d.}{=} \{M_t < \rho\}. \quad (60)$$

Dado que el proceso $\mathbf{W}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathbf{w}(\lambda t)$ es también un proceso de Wiener típico se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{máx}\{\|\mathbf{w}(s)\| : 0 \leq s \leq \lambda t\} = \text{máx}\{\mathbf{W}(s) : 0 \leq s \leq t\}, \quad (61)$$

lo cual implica que $\mathbf{P}(M_{\lambda t} < \rho\sqrt{\lambda}) = \mathbf{P}(M_t < \rho)$. Tomando $\lambda = 1/t$,

$$\mathbf{P}(M_1 < \rho/\sqrt{t}) = \mathbf{P}(M_t < \rho).$$

Sea G la función de distribución de M_1 . La función de distribución de T_ρ está dada por

$$F_\rho(t) = \mathbf{P}(T_\rho < t) = 1 - \mathbf{P}(M_t < \rho) = 1 - G(\rho/\sqrt{t}).$$

Utilizando una propiedad conocida de la esperanza que se cumple para variables aleatorias no negativas, se deduce que la esperanza de T_ρ está dada por

$$\int_0^\infty (1 - F_\rho(t))dt = \int_0^\infty G(\rho/\sqrt{t})dt = \int_0^\infty G(z)2\frac{\rho^2}{z^3}dz = \tau\rho^2,$$

donde

$$\tau = 2 \int_0^\infty \frac{G(z)}{z^3}dz.$$

El valor de τ se calcula numéricamente a partir de la simulación de los valores $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ obtenidos de M_1 , mediante la aproximación

$$2 \sum_{j=1}^n \frac{(m_j - m_{j-1})G((m_j + m_{j-1})/2)}{((m_j + m_{j-1})/2)^3} = 2 \sum_{j=1}^n \frac{(m_j - m_{j-1})(j - 1/2)/n}{((m_j + m_{j-1})/2)^3},$$

de donde se obtiene $\tau = 0,4523756$.

4.3.2. Tiempo esperado de llegada al borde de D_ρ cuando el proceso parte del punto $(x, y) \in D_\rho$

En la sección anterior se mostró que el tiempo esperado de llegada de un proceso de Wiener típico al borde del disco D_ρ centrado en el punto de partida del proceso es $\tau\rho^2$. Sea $f(x, y)$ la esperanza del tiempo de llegada del proceso que parte de (x, y) al borde de una región D . Si D_ρ es un disco de radio ρ centrado en (x, y) que se encuentra contenido en D , entonces la esperanza $f(x, y)$ se puede escribir como la suma

$$f(x, y) = \tau\rho^2 + f(x + \rho \cos U, y + \rho \sin U),$$

donde el primer sumando es el tiempo esperado que el proceso tarda en llegar al disco partiendo de (x, y) , y el segundo es el tiempo esperado que tarda en llegar al borde de D partiendo del punto de llegada al borde del disco. Utilizando que el punto de llegada del proceso al borde del disco centrado en el punto de partida tiene distribución uniforme, la expresión anterior se puede escribir

$$f(x, y) = \tau\rho^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

Derivando esta última igualdad dos veces respecto de ρ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = 2\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) \cos^2 \varphi \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) \sin^2 \varphi \right] d\varphi \end{aligned}$$

y pasando al límite cuando $\rho \rightarrow 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = 2\tau + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right], \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = -4\tau, \quad (62)$$

que es un caso particular de la denominada ecuación de Poisson.

Luego, la esperanza al tiempo de llegada al borde de D_ρ se obtiene resolviendo el problema

$$\Delta f = -4\tau \quad \text{si } (x, y) \in D_\rho \quad (63)$$

$$f = 0 \quad \text{si } (x, y) \in \partial D_\rho. \quad (64)$$

Para esto, se escribe al laplaciano de f en coordenadas polares como se mostró en la sección (3.2) donde se obtuvo que

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f + \frac{\partial^2}{\partial r^2} f. \quad (65)$$

Dado que un giro en el disco sobre su centro no cambia los parámetros del problema, una solución de la ecuación (63) en coordenadas polares debe ser función únicamente de r , es decir, $f(r, \varphi) = g(r)$. Buscando soluciones de esta forma con (63) se llega a la igualdad

$$-4\tau = g'' + \frac{g'}{r}.$$

La ecuación homogénea $g''/g' + 1/r = 0$ tiene soluciones $\log g' + \log r = c$ con c constante, es decir, $g'(r) = k/r$, con k constante. El método de variación de constantes de Lagrange consiste en buscar soluciones de la forma $g'(r) = k(r)/r$. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación se obtiene

$$-4\tau = k'(r)/r - k(r)/r^2 + k(r)/r^2 = k'(r)/r$$

de donde se deduce que $k(r) = -2\tau r^2 + a$ y por lo tanto $g'(r) = -2\tau r + a/r$. Integrando de ambos lados de la igualdad se obtiene que $g(r) = -\tau r^2 + a \log r + b$.

Dado que la solución es acotada en el disco se tiene que $a = 0$, y si el punto se encuentra en el borde del disco la esperanza debe ser cero, es decir $g(\rho) = 0$, lo que implica que $b = \tau \rho^2$. Se concluye entonces que la esperanza del tiempo de llegada al borde del disco está dada por $\tau(\rho^2 - r^2)$. Si el punto está en el centro ($r = 0$) se obtiene la ecuación hallada en la sección anterior.

5. Simulación de la solución probabilística en círculos y regiones generales

En la sección (4.1) se mostró que el punto de llegada de una trayectoria de un proceso de Wiener bidimensional $\mathbf{w}(\tau_{D_\rho})$ que parte de \mathbf{p} al borde del disco

D_ρ centrado en \mathbf{p} tiene distribución uniforme en el borde de D_ρ . Con este resultado, si $\ell(t)$ es una parametrización de la circunferencia con la longitud del arco, definida en un intervalo I , simular un valor de $\mathbf{w}(\tau_{D_\rho})$ que parte de \mathbf{p} , consiste en generar un valor U de una variable aleatoria uniforme en I y luego calcular $\ell(U)$.

A continuación se describe un procedimiento iterativo que utiliza el resultado anterior para simular un valor de $\mathbf{w}(\tau_D)$ que comienza en $\mathbf{z} \in D$, donde D es una región cualquiera, en la que no necesariamente se conoce la distribución de probabilidad del punto de llegada del proceso. Por ejemplo, si la región D es un disco pero el punto de partida del proceso no coincide con el centro de D , entonces el punto de llegada no tiene una distribución sencilla.

5.1. Idea principal del procedimiento de simulación

El procedimiento consiste en aproximarse de forma iterativa al borde de la región D , simulando en cada iteración el punto de llegada del proceso al borde del círculo más grande contenido en D centrado inicialmente en el punto de partida \mathbf{z} , y luego en el punto de llegada de la iteración anterior. En la k -ésima iteración se obtiene un punto $\mathbf{w}^{(k)}$ que representa al valor de la trayectoria al cabo de dicha iteración. Este valor se genera simulando un punto de llegada al borde del disco D_{r_k} , que es el disco más grande contenido en D en la iteración k . Para esto se genera un valor U_k uniforme en $[0, 2\pi]$ e independiente del pasado, se calcula el radio $r_k = \text{mín}\{\text{dist}(\mathbf{p}_k, \mathbf{z}) : \mathbf{z} \in D\}$ donde

$$\mathbf{p}_k = \begin{cases} \mathbf{z} & \text{si } k = 1 \\ \mathbf{w}^{(k-1)} & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

y finalmente, utilizando la parametrización $(r_k \cos t, r_k \sin t)$ de D_{r_k} se obtiene $\mathbf{w}^{(k)} = (r_k \cos U_k, r_k \sin U_k)$.

5.1.1. Precisiones previas a la implementación

La idea descrita anteriormente tiene dos problemas que deben ser contemplados para que el método pueda ser implementado como algoritmo. Estos dos problemas son los que originan mayores errores en las simulaciones de los puntos de llegada. Dado que uno de los problemas que se describe es intrínseco al propio procedimiento, y que el otro surge al intentar implementar dicho procedimiento, resulta imposible no cometer error en las simulaciones:

- En la mayoría de las regiones D , la intersección del borde de D con el borde de D_{r_k} es un conjunto que tiene probabilidad nula de ser alcanzado por una trayectoria de un proceso de Wiener. Por lo tanto, si bien se puede llegar a estar muy cerca, la probabilidad de alcanzar el borde al aproximarse por círculos es cero.
- El círculo de centro \mathbf{p}_k más grande contenido en D es el que tiene radio $r_k = \min\{\text{dist}(\mathbf{p}_k, z) : z \in \partial D\}$. Al implementar el procedimiento como un algoritmo es necesario aproximar a la curva $\mathcal{C} = \partial D$ con un conjunto $\mathcal{P} = \{p_j = p(c_j), j = 0, 1, \dots, k\}$ donde $p(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de \mathcal{C} en $[0, L]$ y $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_k = L$. Luego, los radios r_k son reemplazados por los radios $R_k = \min\{\text{dist}(\mathbf{p}_k, z) : z \in \mathcal{P}\}$, lo cual implica que si el segmento de extremos \mathbf{p}_k y p_i no es perpendicular a la tangente de \mathcal{C} en el punto p_i , entonces el círculo de radio R_k sobrepasa a la región D , y en este caso el proceso puede alcanzar un punto que esté por fuera de D .

Para resolver estos problemas, se construye una región de parada G , de tal modo que contenga al borde de D y que para todo $\mathbf{x} \in D$, el conjunto $\{\mathbf{z} : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{P})\}$ esté contenido en $D \cup G$. Esta definición de la región G hará que las sucesivas iteraciones se detengan en la primera iteración en que la trayectoria alcanza a la región G . La última iteración es $K = \min\{k \in \mathbb{N}^* : \mathbf{w}^{(k)} \in G\}$ y el punto de llegada $\mathbf{w}^{(K)}$ es un punto de G pero no necesariamente es un punto perteneciente al borde de D . Por este motivo es necesario que los puntos de G se encuentren lo suficientemente próximos al borde de D .

La región G que se propone es el conjunto

$$G = \bigcup_{j=1}^k D_T(p_j) \quad \text{con} \quad D_T(p_j) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z - p_j\| \leq T\}$$

siendo $p_j, j = 0, 2, \dots, k$ los puntos de \mathcal{P} y $T > 0$ un valor de tolerancia que indica el error que se está dispuesto a cometer en la simulación de una trayectoria del proceso, puesto que el punto de llegada estará en la región G y por lo tanto distará de \mathcal{P} menos de T .

En el procedimiento que viene siendo desarrollado, cada trayectoria del proceso de Wiener se detiene en la primer iteración en la que esta alcanza a la región G con las sucesivas aproximaciones por círculos. En cada iteración, es posible que la trayectoria termine antes de cortar la curva \mathcal{C} , es decir, es posible que el procedimiento detenga a la trayectoria cuando aún se encuentra

en D . Si esto ocurre, existe una pequeña probabilidad de que la verdadera trayectoria se aleje una vez que alcanza a la región G y llegue a un lugar alejado al que se encontraba cuando alcanzó G . Si bien esta probabilidad es pequeña, hay que tener en cuenta que es tanto más pequeña cuanto menor sea la región G , lo que equivale a decir que esta probabilidad disminuye al disminuir el radio de tolerancia T .

Antes de continuar con la construcción de la región G se definen las regiones $D_{\mathcal{P}}$ como el interior de la poligonal generada por los puntos \mathcal{P} y $D_0 = D \setminus G$. Estas regiones cumplen

$$D_0 \subset D_{\mathcal{P}} \subset D \cup G.$$

5.2. Construcción de la región G y del conjunto \mathcal{P}

Como se mencionó anteriormente, la región G tiene el objetivo de hacer que el procedimiento termine cuando el proceso se acerca suficientemente al borde por primera vez. De lo contrario, o bien el proceso se aproximaría infinitas veces al borde, o bien se escaparía de D .

La región G cumple con su objetivo si contiene a la curva ∂D y si todo disco centrado en $\mathbf{p} \in D_0$ cuyo radio es la mínima distancia de \mathbf{p} a \mathcal{P} se encuentra contenido en $D \cup G$.

- (i) Los discos de centro \mathbf{p}_k y radio R_k están contenidos en $D \cup G$ si la distancia euclídea entre p_{j-1} y p_j es menor o igual que $\sqrt{3}T$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$.
- (ii) La curva $\mathcal{C} = \partial D$ está contenida en G si se cumple (i) y si la distancia sobre la curva

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \int_{c_{j-1}}^{c_j} \|\mathbf{p}'(s)\| ds$$

es menor o igual $2T$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$.

Demostración de (i). La distancia de $\mathbf{p}_k \in D_0$ a un punto p_j de \mathcal{P} se puede escribir como

$$R_k = \text{mín}\{\text{dist}(\mathbf{p}_k, z) : z \in D_T(p_j)\} + T = m_k + T$$

puesto que el punto de la circunferencia $\partial D_T(p_j)$ cuya distancia a \mathbf{p}_k es mínima está dado por el punto cuya normal saliente pasa por \mathbf{p}_k . Luego, m_k es la mínima distancia de \mathbf{p}_k a G y se cumple que el disco D_{m_k} es el disco más

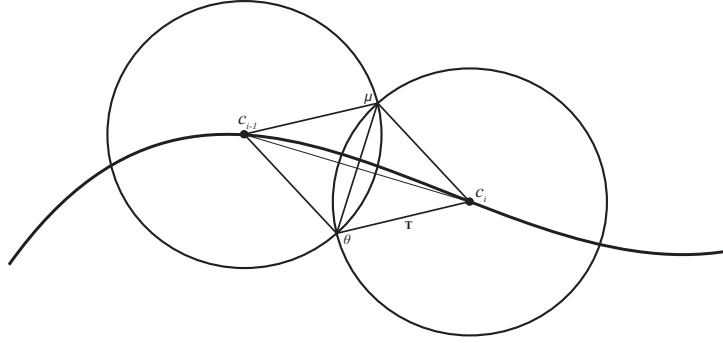


Figura 1: Segmento de la curva \mathcal{C} , unión de los discos $D_T(p_{j-1})$ y $D_T(p_j)$ con $\text{dist}(p_{j-1}, p_j) = \sqrt{3}T$.

grande contenido en D_0 y además está contenido en D_{R_k} con el que comparte el centro \mathbf{p}_k . Por lo tanto, cualquier segmento de longitud $R_k = m_k + T$ con extremo \mathbf{p}_k tiene un intervalo de longitud menor o igual que T por fuera de D_0 . Por lo tanto, se deduce que el disco D_{R_k} está contenido en $D_0 \cup G$ si la distancia del segmento formado por los puntos de las intersecciones $\{\theta, \mu\} = \partial D_T(p_{j-1}) \cap \partial D_T(p_j)$ es mayor o igual a T . Para que esto suceda, el ángulo formado entre los segmentos $\overline{p_{j-1}, \mu}$ y $\overline{p_{j-1}, p_j}$ debe ser de al menos $30^\circ = \pi/6$, con lo cual, fijando la distancia $\text{dist}(\mu, \theta) = T$ se obtiene

$$\frac{\text{dist}(p_{j-1}, p_j)/2}{\text{dist}(p_{j-1}, \mu)} = \frac{\text{dist}(p_{j-1}, p_j)/2}{T} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si T se mantiene constante y aumenta el ángulo entonces debe disminuir la distancia entre p_{j-1} y p_j . De esto último se deduce que $\text{dist}(p_{j-1}, p_j) = \|p_{j-1} - p_j\| \leq \sqrt{3}T$. \square

Demostración de (ii). Basta probar que el arco de extremos p_{j-1} y p_j está contenido en $D_j = D_T(c_{j-1}) \cup D_T(c_j)$. Esto ocurre porque si hubiera un punto p en el complemento de D_j entonces la distancia

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p) + \text{dist}_{\mathcal{C}}(p, p_j)$$

sería mayor que $2T$, puesto que cada sumando sería mayor que T . \square

5.2.1. Algoritmos para la construcción del conjunto \mathcal{P}

A continuación se presentarán dos algoritmos que son utilizados para construir el conjunto \mathcal{P} . Estos algoritmos son aproximados ya que para su

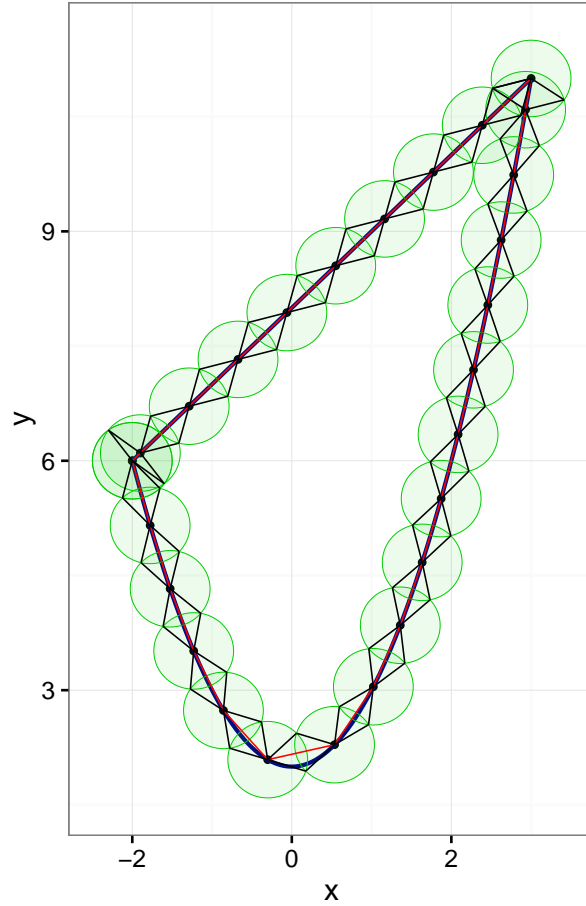


Figura 2: Ejemplo de región G (verde) y poligonal $\partial D_{\mathcal{P}}$ (rojo) en la figura $D = \{(x, y)^{tr.} \in \mathbb{R}^2: x^2 + 2 \leq y \leq x + 8\}$ delimitada por la curva \mathcal{C} (azul), con radio de tolerancia $T = 0,5$.

construcción se realizan supuestos que no aseguran el cumplimiento de todas las condiciones. En el capítulo siguiente se pondrán a prueba estos algoritmos y se verificará si los errores cometidos en las simulaciones son pequeños.

Anteriormente se dedujo que los puntos p_0, p_1, \dots, p_k de \mathcal{P} deben cumplir las desigualdades

$$\|p_j - p_{j-1}\| \leq \sqrt{3}T \quad \text{y} \quad \text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) \leq 2T, \quad (66)$$

para $j = 1, \dots, k$, donde $\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j)$ es la distancia sobre la curva, que se

calcula como

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \int_{c_{j-1}}^{c_j} \|\ell'(s)\| ds, \quad (67)$$

siendo $\ell(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización de \mathcal{C} y $\ell(c_j) = p_j$. Dado que se cumple que $\|p_j - p_{j-1}\| \leq \text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j)$, para que se verifiquen las desigualdades (66) alcanza con elegir a los puntos p_j con distancia $\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \sqrt{3}T$.

Caso (a)

En este caso se supone que las funciones $\ell = (x, y)$ son una parametrización de \mathcal{C} que cumplen $\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)} ds = t$.

Con este supuesto, la integral (67) se puede escribir como

$$\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \int_0^{c_j} \|\ell'(s)\| ds - \int_0^{c_{j-1}} \|\ell'(s)\| ds = c_j - c_{j-1},$$

por lo cual los puntos se deben elegir de modo que $c_j - c_{j-1} \leq 2T$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Imponiendo que $\text{dist}_{\mathcal{C}}(p_{j-1}, p_j) = \sqrt{3}T$ y aproximando la integral (67) con

$$\sqrt{3}T = \int_{c_{j-1}}^{c_j} \|\ell'(s)\| ds \approx (c_j - c_{j-1}) \|\ell'(t^*)\|$$

se puede obtener c_j a partir de c_{j-1} y de un valor aproximado de $\ell'(t^*)$, con t^* arbitrario, perteneciente al intervalo $[c_{j-1}, c_j]$. Por lo tanto, resulta de utilidad definir la función

$$d(s, t, T) = (t - s) \frac{\sqrt{3}T}{\|\ell(t) - \ell(s)\|}. \quad (68)$$

Finalmente, se procede de acuerdo al siguiente algoritmo:

Algoritmo 1: Genera conjunto \mathcal{P} de \mathcal{C} parametrizada con la longitud del arco.

Entrada: radio de tolerancia (T), parametrización (ℓ) y longitud del intervalo (L).

Salida : conjunto \mathcal{P} .

```

1  $c_0 \leftarrow 0$ 
2  $c_1 \leftarrow \sqrt{3}T$ 
3  $c_1 \leftarrow d(0, c_1, T)$ 
4  $c_1 \leftarrow d(0, c_1, T) \wedge 2T$ 
5  $j \leftarrow 1$ 
6 mientras  $c_j < L$  hacer
7    $c_{j+1} \leftarrow c_j + d(c_{j-1}, c_j, T) \wedge 2T$ 
8    $c_{j+1} \leftarrow c_j + d(c_j, c_{j+1}, T) \wedge 2T$ 
9    $c_{j+1} \leftarrow (c_j + d(c_j, c_{j+1}, T) \wedge 2T) \wedge L$ 
10   $j \leftarrow j + 1$ 
11 fin
12  $k \leftarrow j$ 
13  $\mathcal{P} \leftarrow \{\ell(c_j) : j = 0, 1, \dots, k\}$ 

```

Caso (b)

Cuando no se supone que la curva \mathcal{C} esté parametrizada con la longitud del arco se procede a estimar la derivada de la cuerda de extremos $p_{j-1} = (x_{j-1}, y_{j-1})$ y $p_j = (x_j, y_j)$. Para esto, se impone que la longitud de la cuerda sea $\sqrt{3}T$ y se realiza la siguiente aproximación:

$$\sqrt{3}T = \|p_{j-1} - p_j\| \approx (t_j - t_{j-1})\sqrt{\dot{x}^2(t^*) + \dot{y}^2(t^*)}$$

con t^* perteneciente a $[t_{j-1}, t_j]$. Se define una discretización suficientemente fina $t = \{t_j : t_{j+1} - t_j = \delta, j = 1, \dots, m\}$ del intervalo $[0, L]$ y las funciones

$$\epsilon(x) = \text{mín}\{|t_j - x| : j = 1, \dots, m\},$$

$$\pi_t(x) = \text{mín}\{h : |t_h - x| = \epsilon(x)\}.$$

En este caso, el algoritmo no incluye la verificación de que la longitud del arco de extremos p_{j-1} y p_j sea menor que $2T$, y no se asegura que eso ocurra.

Algoritmo 2: Genera conjunto \mathcal{P} de \mathcal{C} mediante aproximaciones sucesivas de la derivada.

Entrada: radio de tolerancia (T), parametrización ($\ell = (x, y)$) y discretización del intervalo (t).

Salida : conjunto \mathcal{P} .

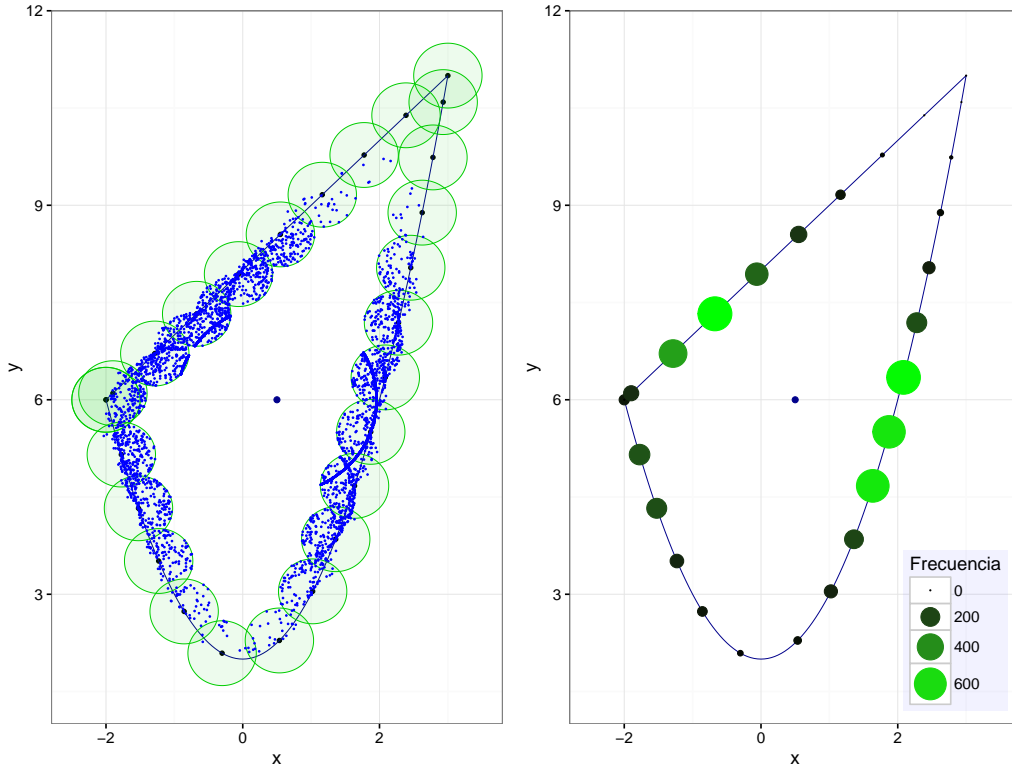
```

1  $i_0 \leftarrow 1$ 
2  $j \leftarrow 0$ 
3 mientras  $i_j < m$  hacer
4    $der \leftarrow \frac{\sqrt{(x_{i_{j+1}} - x_{i_j})^2 + (y_{i_{j+1}} - y_{i_j})^2}}{t_{i_{j+1}} - t_{i_j}}$ 
5    $i_{j+1} \leftarrow \pi_t(t_{i_j} + \sqrt{3T/der})$ 
6    $der \leftarrow \frac{\sqrt{(x_{i_{j+1}} - x_{i_j})^2 + (y_{i_{j+1}} - y_{i_j})^2}}{t_{i_{j+1}} - t_{i_j}}$ 
7    $i_{j+1} \leftarrow \pi_t(t_{i_j} + \sqrt{3T/der})$ 
8    $j \leftarrow j + 1$ 
9 fin
10  $k \leftarrow j$ 
11  $\mathcal{P} \leftarrow \{\ell(t_{i_j}) : j = 0, 1, \dots, k\}$ 

```

5.3. Simulación del punto de llegada

En las secciones precedentes se ha descrito un procedimiento que permite obtener el punto de llegada de una trayectoria del proceso de Wiener a la región G , la cual contiene al borde de D y cuyos puntos están suficientemente próximos (distan menos de T) al borde. Con este procedimiento se puede obtener una muestra $\mathbf{w}^{[1]}, \mathbf{w}^{[2]}, \dots, \mathbf{w}^{[N]}$ de trayectorias detenidas en G . Para obtener una muestra de N puntos de llegada a la curva \mathcal{C} el procedimiento asigna como punto de llegada a \mathcal{C} el punto de \mathcal{P} que dista menos del punto de llegada a G . Estas dos situaciones se pueden visualizar en los siguientes gráficos, en los que se considera la misma región D y el mismo radio de tolerancia T que en el gráfico (2). En el gráfico (a) se visualizan 5000 trayectorias detenidas en la región G , mientras que en el gráfico (b) se puede visualizar que las trayectorias detenidas en G son aproximadas a los puntos más próximos de \mathcal{P} .



(a) Puntos de llegada a la de región G .

(b) Puntos de llegada a \mathcal{P} .

Figura 3: Muestra de tamaño $N = 5000$ trayectorias del proceso de Wiener que parten de $v = (1/2, 6)^{tr}$.

5.3.1. Algoritmo que simula un punto de llegada

Dado el conjunto $\mathcal{P} = \{p_j : j = 0, 1, \dots, k\}$, se definen las funciones

$$r(x) = \min\{\|p_j - x\| : j = 0, 1, \dots, k\},$$

$$j(x) = \min\{j : \|p_j - x\| = r(x)\} \text{ y}$$

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = p_{j(x)},$$

y sea $U(x)$ una variable aleatoria uniforme en la circunferencia de radio $r(x)$ centrada en x , e independiente del pasado.

El siguiente algoritmo define a las variables aleatorias W , K y R . El valor de W pretende ser una aproximación de $w(\tau_D)$, K cuenta la cantidad de iteraciones (círculos) necesarias para llegar a G , y R es la suma de los radios al cuadrado de los círculos. Este último valor se utiliza para calcular el tiempo esperado de llegada del proceso.

Algoritmo 3: Simula un punto de llegada del proceso que parte de v a la curva \mathcal{C} .

Entrada: punto de partida (v), discretización de \mathcal{C} (conjunto \mathcal{P}) y radio de tolerancia (T).

Salida : punto de llegada a \mathcal{C} (W), cantidad de círculos necesarios para llegar a G (K) y suma de los radios al cuadrado (R).

```

1  $x \leftarrow v$ 
2  $K \leftarrow 0$ 
3  $R \leftarrow 0$ 
4 mientras  $r(x) > T$  hacer
5   |  $x \leftarrow U(x)$ 
6   |  $K \leftarrow K + 1$ 
7   |  $R \leftarrow R + r^2(x)$ 
8 fin
9  $R \leftarrow R + r^2(x)$ 
10  $W \leftarrow \pi_{\mathcal{P}}(x)$ 

```

6. Estimación estadística de la solución

En la sección (4.1.1) se mostró que el problema de Dirichlet con condición de borde g admite solución

$$u(x, y) = \mathbf{E}(g(\mathbf{w}(\tau_D)) | \mathbf{w}(0) = (x, y))$$

en cualquier región D conexa y de borde suficientemente regular. Al tratarse de una esperanza, si se cuenta con $\mathbf{w}^{(1)}(\tau_D), \mathbf{w}^{(2)}(\tau_D), \dots, \mathbf{w}^{(N)}(\tau_D)$, N trayectorias independientes del proceso de Wiener detenido en el borde de D con punto de partida (x, y) , entonces la solución anterior puede ser estimada estadísticamente con el promedio muestral

$$\bar{g}(x, y) =: \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)). \quad (69)$$

Dado que no es posible tener los valores $\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)$, estos se aproximan con $\hat{\mathbf{w}}_n =: p_{j_n}$ con $p_{j_n} \in \mathcal{P}$, $j = 1, 2, \dots, k$ y $n = 1, \dots, N$ obtenidos a partir del procedimiento detallado en el algoritmo (3). En la notación utilizada en la descripción del algoritmo, p_{j_n} es el punto de \mathcal{P} que minimiza la distancia a $\mathbf{w}^{[n]} \in G$ al aproximar $\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)$. En la n -ésima iteración del procedimiento se genera el valor $g(p_{j_n}) := g_{j_n}$ que se utiliza como estimación de $g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D))$

y en lugar de estimar la solución $u(x, y)$ con $\bar{g}(x, y)$, se propone el estimador

$$\tilde{u}(x, y) =: \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_{j_n}. \quad (70)$$

6.1. Errores cometidos en la estimación estadística

En las estimaciones obtenidas a partir de $\tilde{u}(x, y)$ se cometen dos errores. Uno de ellos es el error estadístico que se debe al estimar un valor esperado con un promedio muestral, y el otro es el error sistemático cometido por detener las trayectorias del proceso en la región G y por estimar el punto de llegada al borde con el punto del conjunto \mathcal{P} cuya distancia al punto de llegada a G es mínima, es decir, se trata del error cometido al aproximar $\mathbf{w}^{(j)}(\tau_D)$ con p_{j_n} .

Una cota para el error estadístico puede ser estimada con la longitud de un intervalo de confianza para el promedio $\tilde{u}(x, y)$, que puede ser obtenido de forma sencilla utilizando la independencia e idéntica distribución de las trayectorias detenidas estimadas y la distribución asintótica del promedio muestral en estas condiciones. El intervalo con 95 % de confianza queda dado por $\tilde{u}(x, y) \pm 1,96 \times S/\sqrt{N}$, siendo S la desviación típica de una realización la muestra $g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_N}$. Por otra parte, dado que la función g es acotada, las variables g_{j_n} son acotadas y por la ley fuerte de los grandes números se tiene que $\tilde{u}(x, y)$ y los límites de confianza tienden a $u(x, y)$ cuando $N \rightarrow \infty$, con lo cual, la cota para el error estadístico puede ser reducida al aumentar N .

Con el procedimiento propuesto no es posible asegurar que el valor de la trayectoria del proceso en el borde, $\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)$, se encuentre próximo al valor de la trayectoria $\mathbf{w}^{[n]}$ detenida en la región G y por lo tanto no es posible asegurar que $\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)$ se encuentre próximo a p_{j_n} . Esto se debe a que el procedimiento detiene la trayectoria en la primera iteración en la que la trayectoria se encuentra en G pero en la realidad, si bien es poco probable, puede ocurrir que una vez que la trayectoria alcanza G se aleje del borde y se detenga en otro valor alejado de p_{j_n} .

Si el fenómeno mencionado no ocurre, es decir, $\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)$ se encuentra próximo a p_{j_n} entonces una posible estimación para la cota para el error sistemático es

$$E_T =: \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\hat{\mathbf{w}}_n) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)) - g(\hat{\mathbf{w}}_n)|$$

$$\lesssim \frac{T}{N} \sum_{n=1}^N |g'(\hat{\mathbf{w}}_n)|$$

donde g' es la derivada en la curva. El símbolo “ \lesssim ” se debe a que si bien la cota es razonable no es posible garantizar que la desigualdad se cumpla. Esto dependerá de la forma del borde y por supuesto del valor de T que se elija. Hay que tener en cuenta que la desigualdad triangular es una cota grosera por lo que es de esperar que en algunas situaciones esta cota no sea útil.

En el caso del error estadístico, si E_N es la longitud del del intervalo de confianza entonces

$$|u(x, y) - \bar{g}(x, y)| \lesssim E_N,$$

mientras el error sistemático se encuentra posiblemente acotado por una constante E_T que depende de la derivada de g y de T ,

$$|\bar{g}(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \lesssim E_T.$$

A partir de estas desigualdades se observa que la magnitud del error global e_g puede ser probablemente acotada por

$$|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq |u(x, y) - \bar{g}(x, y)| + |\tilde{u}(x, y) - \bar{g}(x, y)| \lesssim E_N + E_T.$$

6.2. Un modelo aproximado para estimar el error

El modelo aproximado consiste en suponer

$$g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)) = g_{j_n} + B_n U_n (g_{j_{n+1}} - g_{j_n}) + (1 - B_n) U_n (g_{j_n} - g_{j_{n-1}}) \quad (71)$$

con $U_n \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ y $B_n \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ independientes. La justificación de este modelo es la siguiente: se supone que la trayectoria detenida en el borde, cuya aproximación es p_{j_n} se encuentra en el arco delimitado por $p_{j_{n-1}}$ y $p_{j_{n+1}}$. La diferencia $g_{j_{n-1}} - g_{j_n}$ se aproxima con $U_n (g_{j_{n-1}} - g_{j_n})$ y $g_{j_n} - g_{j_{n+1}}$ se aproxima con $U_n (g_{j_n} - g_{j_{n+1}})$, y se supone que la probabilidad de llegar a uno u otro intervalo es $1/2$.

Al igual que en la estimación de la cota del error sistemático de la sección (6.1), es necesario aclarar que si bien la probabilidad de que ocurra es alta, y tanto más alta cuanto menor es T , nada garantiza que $\mathbf{w}(\tau_D)$ esté en el arco de extremos $p_{j_{n-1}}$ y $p_{j_{n+1}}$.

El error cometido está dado por

$$e_g(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y) = \mathbf{E}g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_{j_n}$$

y su esperanza bajo el modelo propuesto es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e_g(x, y) &= u(x, y) - \mathbf{E}\tilde{u}(x, y) = \mathbf{E} [g(\mathbf{w}^{(n)}(\tau_D)) - g_{j_n}] \\ &= \mathbf{E} [B_n U_n (g_{j_{n+1}} - g_{j_n}) + (1 - B_n) U_n (g_{j_n} - g_{j_{n-1}})] \\ &= \mathbf{E} U_n \left[\frac{1}{2} (g_{j_{n+1}} - g_{j_n}) + \frac{1}{2} (g_{j_n} - g_{j_{n-1}}) \right] = \frac{1}{4} \mathbf{E} [g_{j_{n+1}} - 2g_{j_n} + g_{j_{n-1}}] \end{aligned}$$

con lo cual, se puede aproximar

$$\mathbf{E}e_g(x, y) \approx \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^N [g_{j_{n+1}} - 2g_{j_n} + g_{j_{n-1}}] \quad (72)$$

6.2.1. Un estimador de la solución aproximadamente insesgado

La fórmula (72) proporciona una estimación del sesgo de $\tilde{u}(x, y)$ dado por $-\mathbf{E}e_g(x, y)$. Un estimador aproximadamente insesgado de $u(x, y)$ es el que resulta de restarle a \tilde{u} su sesgo:

$$u^*(x, y) =: \tilde{u}(x, y) + \mathbf{E}e_g(x, y) = \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^N [g_{j_{n+1}} + 2g_{j_n} + g_{j_{n-1}}] \quad (73)$$

Sea $h_{j_n} =: g_{j_{n+1}} + 2g_{j_n} + g_{j_{n-1}}$. La varianza del nuevo estimador está dada por

$$\mathbf{Var}(u^*(x, y)) = \frac{1}{16N} \mathbf{Var}(h_{j_n})$$

la cual puede ser estimada empíricamente mediante $\frac{1}{16N} S_h^2$ donde

$$S_h^2 =: \sum_{n=1}^N h_{j_n}^2 - \left(\sum_{n=1}^N h_{j_n} \right)^2.$$

A partir de esta estimación y admitiendo la aproximación Normal de media u^* y varianza S_h^2/N para el promedio, se construyen intervalos de confianza para $u(x, y)$ centrados en $u^*(x, y)$

$$\mathbf{P} \left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) \frac{S_h}{4\sqrt{N}} \leq u(x, y) - u^*(x, y) \leq \Phi^{-1}(\alpha) \frac{S_h}{4\sqrt{N}} \right) = 1 - \alpha.$$

Con el estimador insesgado (73) se obtiene que el error cometido

$$\mathcal{E}(x, y) =: u(x, y) - u^*(x, y)$$

tiene esperanza cero y se puede acotar con la longitud del intervalo de confianza. Esta acotación incluye a los dos errores que fueron analizados de forma separada en (6.1) y un error adicional que es el error cometido por el modelo (71).

7. Resultados obtenidos de las simulaciones

En esta sección se explora de manera empírica la validez de las aproximaciones de la solución $u(x, y)$ obtenidas con los estimadores $\tilde{u}(x, y)$ y $u^*(x, y)$ desarrollados en la sección (6) a partir de los algoritmos presentados en la sección (5). Para esto, se elige un dominio particular D , un punto v interior a D y una condición de borde g para los cuales la solución analítica del problema sea conocida en el punto v . La elección conveniente de g garantiza que la estimación numérica obtenida pueda ser comparada con el valor de la verdadera solución en cualquier punto del dominio, y por lo tanto que se puedan calcular de manera exacta los errores $e_g(v)$ y $\mathcal{E}(v)$.

Como se mencionó anteriormente, existe un error estadístico que se comete al estimar el valor esperado $u(x, y)$ con un promedio muestral, y otro error que se comete al detener las trayectorias muestrales en la primer iteración en la que la trayectoria alcanza G , lo cual no necesariamente coincide con la trayectoria detenida en el borde de D . Estos dos errores pueden ser acotados de forma separada si se utiliza el estimador $\tilde{u}(x, y)$ (70), con lo cual una cota para el error global (en este caso denotado con $e_g(x, y)$) queda determinada por la suma de las cotas de los dos errores. Alternativamente, si se utiliza el estimador $u^*(x, y)$ (73) se halla una cota unificada para el error global ($\mathcal{E}(x, y)$) dada por la longitud del intervalo de confianza, la cual será denotada con \mathcal{E}_N . Para visualizar estos resultados, se eligen distintos radios de tolerancia T y distintas cantidades de réplicas N , y para cada estimación que surge de combinar N y T se calculan los errores $e_g(v)$ y $\mathcal{E}(v)$, y sus cotas. Todas las muestras se extraen de manera independiente, para todos los valores de N y T considerados.

Se considera el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 2 \leq y \leq x + 8\},$$

cuyo gráfico puede visualizarse en las figuras (2) y (3), y la función

$$g(x, y) = e^x \cos y$$

como condición de borde. Esta función es armónica en todo el plano, por lo cual la solución del problema está dada por $u(x, y) = g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$. Luego, se comparan los resultados obtenidos con 36 radios de tolerancia dados por $T = 0,001, 0,002, 0,005, 0,01, 0,02, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5$ y con tamaños de muestra $N = 5000, 10000, 50000, 100000, 250000, 400000, 500000$. Finalmente, se fijan los parámetros $N = 500000$ y $T = 0,001$, y se grafican los resultados obtenidos con 40 puntos de partida distintos con el objetivo de comparar la estimación del tiempo esperado de llegada al borde, partiendo de cada punto.

7.1. Rendimiento del procedimiento de simulación

El siguiente gráfico muestra la distribución de frecuencias de la cantidad de círculos (iteraciones) que produce el algoritmo 3 en cada réplica. Se trata de la variable K que devuelve el algoritmo.

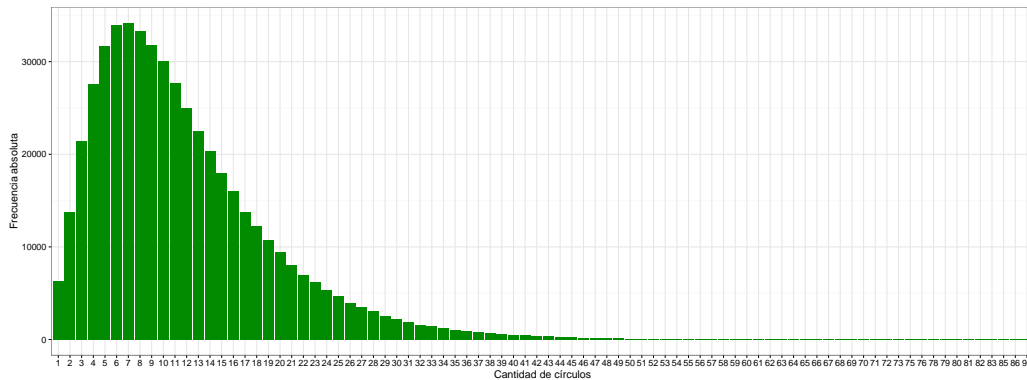


Figura 4: Distribución de frecuencias de la cantidad de círculos en una muestra de tamaño 500000 con $T = 0,001$ y punto de partida $v = (-1, 6)$.

Estos datos son ajustados a una distribución Geométrica de parámetro (probabilidad de éxito) p , estimado mediante el método de máxima verosimilitud, el cual establece que $\hat{p} = 1/\bar{K}$.

La justificación de esta distribución se debe a que el recorrido de K es no acotado superiormente, y a que K cuenta la cantidad de círculos necesarios para que la trayectoria se aproxime suficientemente al borde. Eso puede

ser pensado como que en cada réplica en la que se estima el punto de llegada de una trayectoria, el algoritmo realiza tantos experimentos como sean necesarios hasta el primer experimento en el que se “obtiene un éxito”, donde “obtener un éxito” significa alcanzar a la región G . Es necesario aclarar que en el procedimiento descrito, la probabilidad de éxito varía en cada experimento y en este ajuste se asume que esta probabilidad es constante o aproximadamente constante.

Finalmente, bajo la distribución ajustada, Geométrica($1/\bar{K}$) con $\bar{K} = 11,71$, la probabilidad $\mathbf{P}(K \leq 20) \approx 0,85$. Esta probabilidad es parecida a la probabilidad estimada con la función de distribución empírica de K , que en 20 acumula 0,87.

En la siguiente figura se muestra el tiempo computacional medido en minutos que tomó hacer 500.000 réplicas con los distintos valores de T . Los cálculos fueron realizados con un procesador de 2.4 GHz.

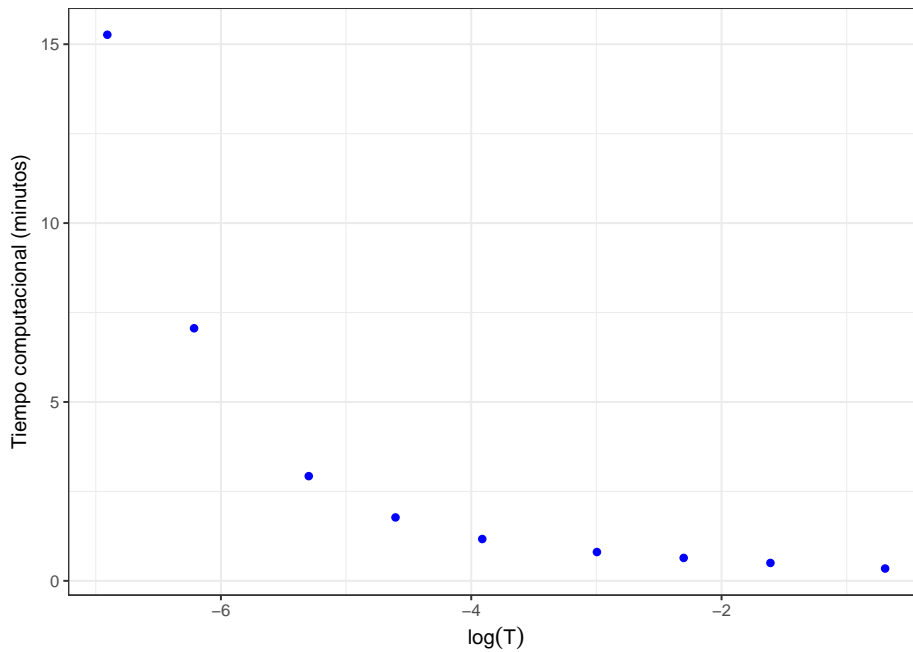


Figura 5: Tiempo computacional de 500.000 réplicas con los distintos radios de tolerancia.

El tiempo computacional depende de la cantidad de réplicas N y del radio de tolerancia T que se elija para aproximar a la curva \mathcal{C} con \mathcal{P} . Cuanto más

pequeño es el radio de tolerancia, mayor es la cantidad de puntos del conjunto \mathcal{P} y por lo tanto mayor es la cantidad de distancias que el algoritmo calcula en cada iteración para estimar el radio del círculo más grande contenido en D . Esto se visualiza en la siguiente tabla, en la cual se muestra la cantidad de puntos que tiene el conjunto \mathcal{P} para cada uno de los radios de tolerancia considerados.

T	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$\#\mathcal{P}$	12.394	6.198	2.480	1.241	621	249	125	63	26

Cuadro 1: Cantidad de puntos de \mathcal{P} según el radio de tolerancia T .

7.2. Errores cometidos en la estimación

En las siguientes tablas se exponen las estimaciones obtenidas en el punto $v = (-1, 6)$ con los dos estimadores \tilde{u} y u^* , el error cometido con u^* y las cotas $E_N + E_T$ y \mathcal{E}_N de los errores e_g y \mathcal{E} para los distintos valores de N y T considerados.

N	$\tilde{u}(-1, 6)$	$u^*(-1, 6)$	$ \mathcal{E}(-1, 6) $	E_N	$E_N + E_T$	\mathcal{E}_N
5.000	0,3459	0,3459	0,0073	0,0976	0,0987	0,0957
10.000	0,3373	0,3373	0,0159	0,0664	0,0675	0,0650
50.000	0,3614	0,3614	0,0082	0,0300	0,0311	0,0294
100.000	0,3474	0,3474	0,0058	0,0212	0,0223	0,0208
250.000	0,3552	0,3552	0,0020	0,0134	0,0145	0,0131
400.000	0,3518	0,3518	0,0014	0,0106	0,0117	0,0104
500.000	0,3545	0,3545	0,0013	0,0094	0,0105	0,0092

Cuadro 2: Comparación entre $u(-1, 6) \approx 0,3532$, $\tilde{u}(-1, 6)$ y $u^*(-1, 6)$. El radio de tolerancia es $T = 0,001$ y $E_T \approx 0,00118$.

T	$\tilde{u}(-1, 6)$	$u^*(-1, 6)$	$ \mathcal{E}(-1, 6) $	E_T	$E_N + E_T$	\mathcal{E}_N
0,001	0,3545	0,3545	0,0013	0,0011	0,0105	0,0092
0,002	0,3527	0,3527	0,0005	0,0022	0,0116	0,0092
0,005	0,3507	0,3507	0,0025	0,0055	0,0149	0,0092
0,010	0,3511	0,3511	0,0022	0,0110	0,0205	0,0092
0,020	0,3536	0,3535	0,0003	0,0218	0,0312	0,0092
0,050	0,3566	0,3561	0,0028	0,0545	0,0640	0,0092
0,100	0,3583	0,3564	0,0032	0,1071	0,1164	0,0091
0,200	0,3521	0,3450	0,0082	0,2051	0,2142	0,0087
0,500	0,3436	0,3008	0,0524	0,4264	0,4350	0,0072

Cuadro 3: Comparación entre $u(-1, 6) \approx 0,3532$, $\tilde{u}(-1, 6)$ y $u^*(-1, 6)$. El tamaño de muestra es $N = 500000$ y $E_N \approx 0,009$.

Como es posible observar en las tablas, debido a la aleatoriedad de las estimaciones no es posible asegurar que el error disminuya al aumentar el tamaño de muestra o al reducir el radio de tolerancia. Por otra parte, también se observa que fijando $T = 0,001$ el error absoluto, $|\mathcal{E}|$, es menor que 6×10^{-3} si se consideran valores de N mayores o iguales a 100.000 y fijando $N = 500.000$ se observan errores menores que $3,5 \times 10^{-3}$ para $T \leq 0,1$.

De la primera tabla se deduce que para todos los valores de N la cota del error estadístico del estimador \tilde{u} , E_N , es parecida a la cota del error global cometido al utilizar u^* , \mathcal{E}_N . Como es de esperar, ambas cotas tienden a 0 cuando N se hace más grande. Los intervalos de confianza de longitudes E_N y \mathcal{E}_N fueron calculados con $\alpha = 0,05$. En la segunda tabla se observa que E_T aumenta cuando aumenta T mientras que \mathcal{E}_N es aproximadamente constante para los distintos valores de T . A partir de estas tablas se confirma que la cota \mathcal{E}_N es una cota de mejor calidad que $E_N + E_T$.

Estos resultados se visualizan en la siguiente figura, en la que se grafican el valor de la verdadera solución en $(-1, 6)$, las estimaciones obtenidas con los dos estimadores y sus respectivos intervalos de confianza de longitudes E_N y \mathcal{E}_N . En ella se observa que cuando la tolerancia es pequeña los intervalos de confianza para u^* y \tilde{u} (verde y negro respectivamente) coinciden y contienen a la solución verdadera.

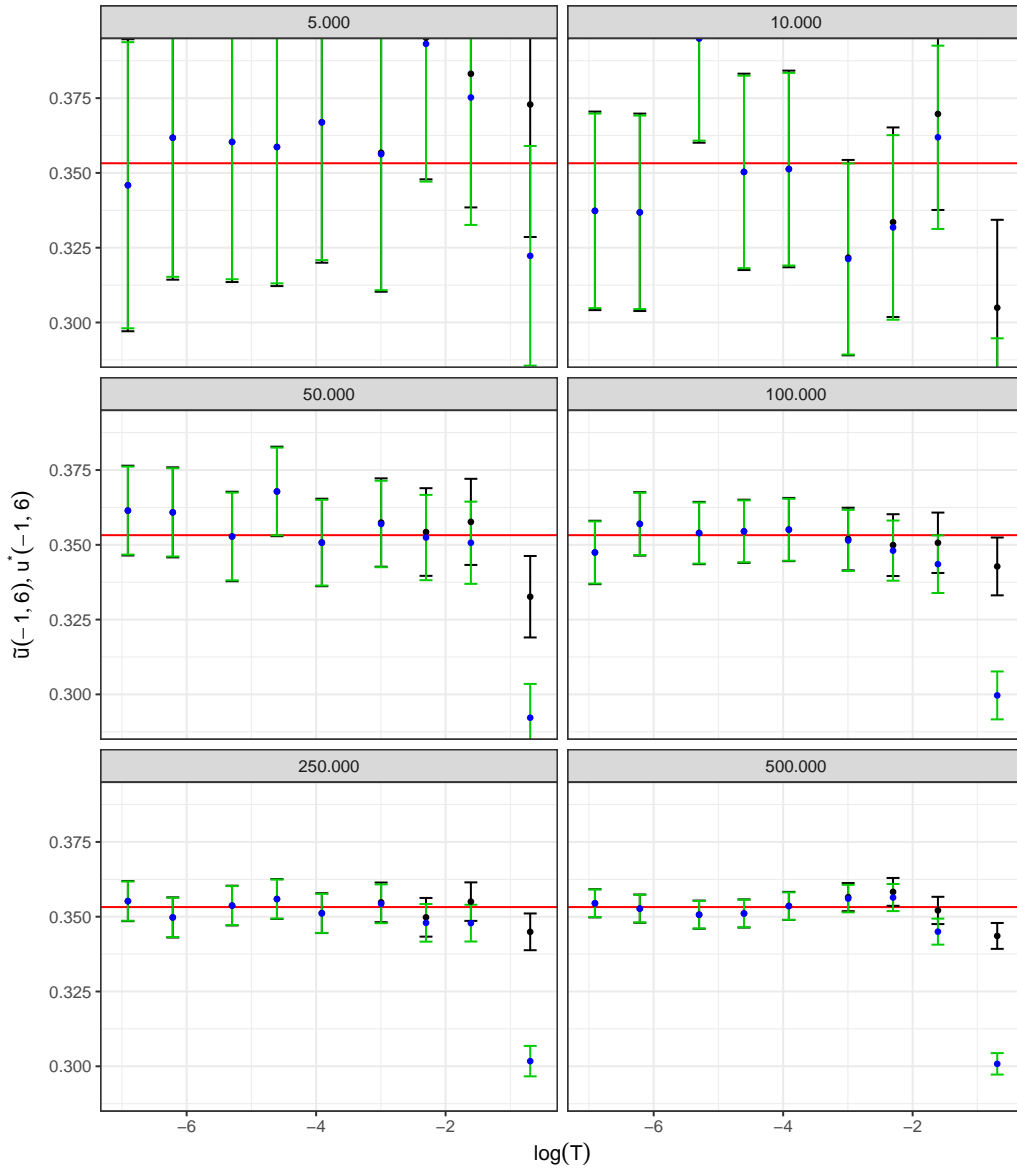


Figura 6: Estimaciones obtenidas con u^* (azul) y \tilde{u} (negro) con intervalos de confianza (verde y negro) y $u(-1, 6) \approx 0,3532$ (rojo).

7.3. Cálculo del tiempo esperado de llegada al borde

En la sección 4.3 se mostró que el tiempo esperado de llegada de un proceso de Wiener al borde de de un disco de radio ρ está dado por $\tau\rho^2$, con $\tau \approx 0,4523756$. También se mostró que en el caso general, el tiempo esperado

de llegada al borde de una región D cualquiera es solución del problema de Poisson $\Delta f = -4\tau$.

En el procedimiento desarrollado, se simula el valor de una trayectoria del proceso detenida en el borde aproximándose de forma iterativa por círculos, con lo cual el tiempo de llegada $\tau_D(x, y)$ de una trayectoria que parte de (x, y) puede ser estimado con

$$\hat{\tau}_D(x, y) =: \tau \sum_{k=1}^K r_k^2$$

donde K es la cantidad (aleatoria) de iteraciones y r_k es el radio del círculo correspondiente a la k -ésima iteración. A partir de la generación de N trayectorias detenidas se obtienen N tiempos $\hat{\tau}_D^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ que permiten calcular

$$\bar{\tau}(x, y) =: \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_D^{(i)}(x, y)$$

En el siguiente gráfico se pueden visualizar las estimaciones de los tiempos esperados para distintos tamaños de muestra y distintos radios de tolerancia. Los cálculos corresponden a las mismas réplicas utilizadas para las estimaciones del gráfico 6.

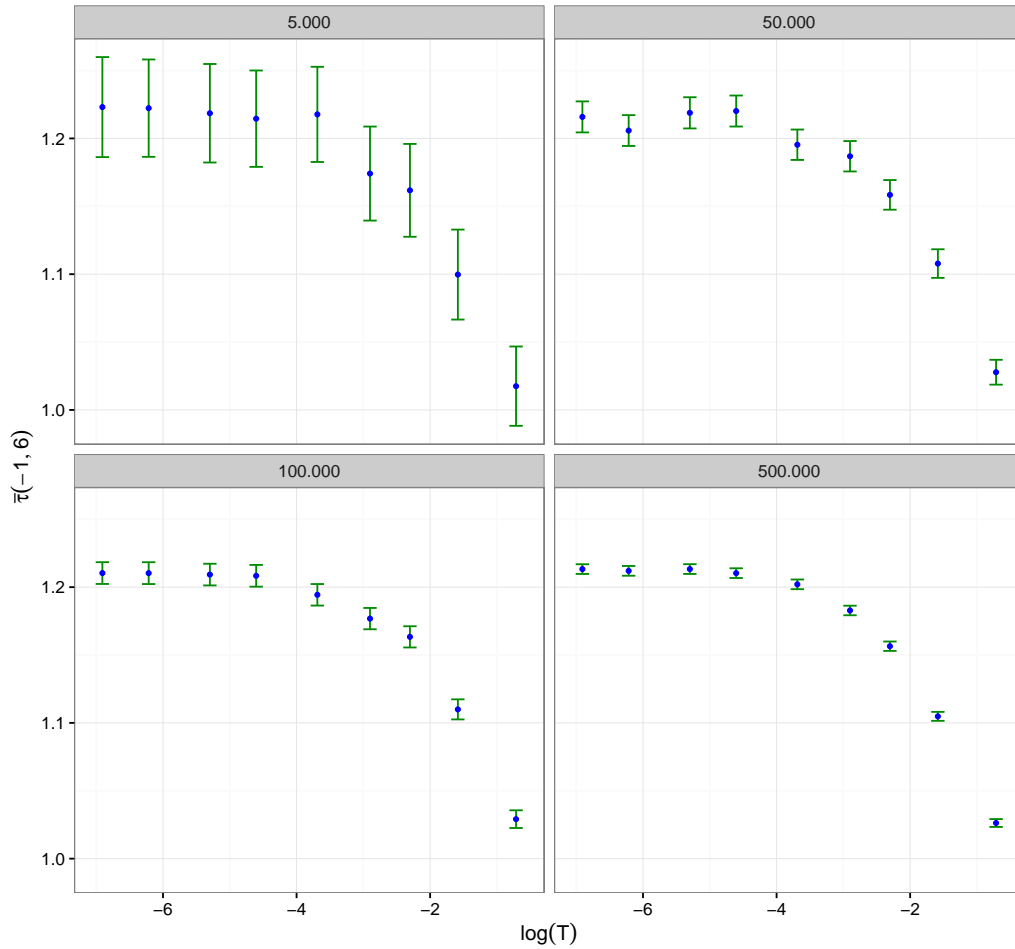


Figura 7: Estimaciones obtenidas del tiempo esperado de llegada τ_D para nueve valores de T (azul) con intervalo de confianza para $\bar{\tau}$ (verde).

En el gráfico se puede visualizar que el tiempo esperado de llegada al borde disminuye cuando aumenta el radio de tolerancia. Esto ocurre porque cuanto más grande es el radio de tolerancia menor es la región $D_0 = D \setminus G$, por lo tanto, menor la región en que se mueven las trayectorias antes de ser detenidas en G .

El tiempo esperado de llegada al borde de un proceso de Wiener es una medida de la profundidad de un punto en una región, es decir, un punto es tanto más profundo en una región cuanto mayor es el tiempo esperado de llegada al borde del proceso que parte de dicho punto. Esto se puede visualizar en la siguiente figura en la que se grafican 40 puntos de partida

distribuidos arbitrariamente en toda la región D con círculos que los rodean, donde el radio de cada círculo es proporcional al tiempo esperado de llegada. Los círculos más azulados y grandes corresponden a los puntos más profundos en D

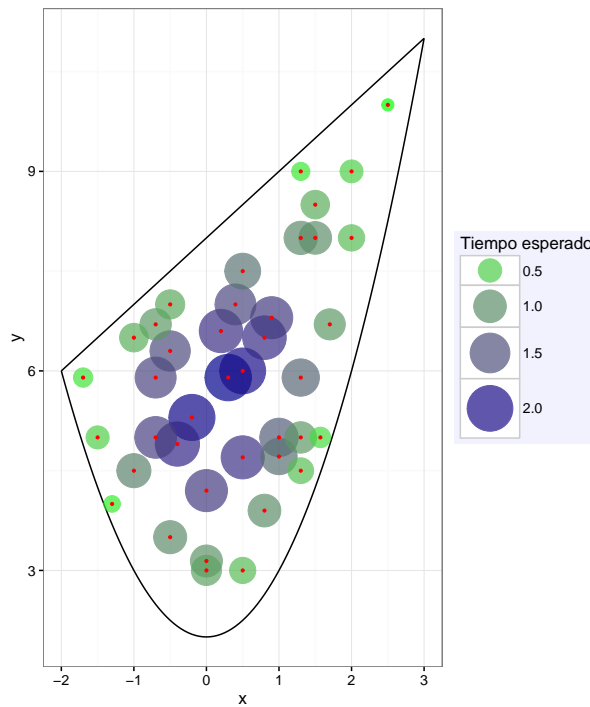


Figura 8: Profundidad de 40 puntos (rojo). La referencia indica el valor del tiempo esperado de llegada.

8. Conclusiones finales

El procedimiento desarrollado permite obtener la solución numérica del problema de Dirichlet en regiones planas acotadas y de borde suficientemente regular. Una vez implementados los algoritmos que permiten llevar a cabo el procedimiento, las soluciones se obtienen de forma sencilla ya que sólo se requiere establecer una parametrización del borde de la región.

Dada una parametrización de la curva, el algoritmo construye una discretización óptima del borde, esto es, un conjunto que contiene la menor cantidad de puntos necesarios para hacer que las trayectorias del proceso de Wiener no salgan de la región, o a lo sumo se detengan en el exterior en un

punto suficientemente próximo al borde. A pesar de que la discretización es óptima, y si bien ocurre que con probabilidad alta el algoritmo realiza pocas iteraciones (menos de 20), cada iteración resulta muy costosa debido a que en cada una de ellas se calcula la distancia euclídea entre el punto de llegada de la iteración anterior a todos los puntos del conjunto discreto que se utiliza para representar al borde de la región. Por este motivo, el costo computacional aumenta al aumentar la cantidad de réplicas con las que se quiere estimar el promedio o al utilizar una discretización más fina disminuyendo el radio de tolerancia.

Las soluciones traen aparejado un error sistemático que surge de discretizar el borde de la región y de hacer que las trayectorias del proceso de Wiener se detengan en una región de parada próxima al borde, y un error estadístico que surge de estimar el valor esperado con un promedio. Estos errores pueden ser reducidos al disminuir el radio de tolerancia, lo cual genera que la región de parada se encuentre más próxima al borde, y al aumentar la cantidad de réplicas del punto de llegada, con lo cual se obtiene una mejor estimación de la esperanza. Una posibilidad para acotar el error global, es acotar a estos dos errores de manera individual y luego acotar al error global con la suma de estas cotas. Como alternativa a este procedimiento, se considera un modelo probabilístico para el error global y una corrección para el estimador que hace que este sea insesgado. A partir de este modelo se obtiene una cota unificada para el error global.

En el ejemplo desarrollado se observó que los errores cometidos con ambos estimadores (corregido y no corregido) fueron considerablemente chicos para todos los radios de tolerancia y cantidades de réplicas utilizados. Por otra parte, se verificó que la cota obtenida con el estimador insesgado resulta más apropiada que la que se obtiene con el otro estimador. En ambos casos, la estimación de la cota se vuelve inoperante cuando el radio de tolerancia es grande, independientemente de la cantidad de réplicas que se realice. De manera contraria, en este ejemplo se observó que para valores de tolerancia pequeños, el error y sus cotas resultaron pequeños aun cuando la cantidad de réplicas es chica. Esto daría la pauta de que si fuera necesario ahorrar tiempo computacional sería preferible reducir la cantidad de réplicas en lugar de aumentar el radio de tolerancia. Tanto la calidad de la cota como el tamaño del error cometido dependen de la forma que tenga el borde y de la condición de borde, por lo cual nada garantiza que eso se cumpla de manera general.

Referencias

- [1] Apostol, T. (1974). *Mathematical Analysis* (2nd ed.), Addison-Wesley. pp.218-230
- [2] Cabaña, E. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*, Notas para el Curso de la Licenciatura en Estadística, Universidad de la República. pp.98-115
- [3] Courant, T., John F. (1996). *Introducción al cálculo y al análisis matemático* Vol. 2, Limusa. pp.799-801
- [4] Karatzas, I., Shreve, S. (1987). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.), Graduate Texts in Mathematics, Springer. pp.239-251
- [5] Knight, F. (1933). *Essentials of Brownian motion and diffusion*, Mathematical surveys; no. 18, American Mathematical Society. pp.66-68
- [6] Marsden, J. Tromba, A. (1991). *Cálculo vectorial* (3ra ed.), Addison-Wesley Iberoamericana. pp.414-418;491-497
- [7] Meda, S. (2013). *The Dirichlet problem for the Laplace operator*, Università degli Studi di Milano-Bicocca. pp.1-7