

# Tesis de Maestría en Física



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



## Rol de los quarks en las interacciones en Cromodinámica Cuántica Infrarroja

Felipe Figueroa

Orientadora: Marcela Peláez

PEDECIBA  
Universidad de la República  
Montevideo  
2020

## **Tribunal de defensa de tesis:**

- Presidente de mesa: Dr. Raúl Donangelo, donangel@fing.edu.uy,
- Dra. Marcela Peláez, mpelaez@fing.edu.uy,
- Dra. Paola Bermolen, paola@fing.edu.uy,
- Dr. Pablo Pais, pol@fisica.edu.uy,
- Dr. Miguel Campiglia, campi@fisica.edu.uy ,
- Suplente: Dr. Nicolás Wschebor, nicws@fing.edu.uy.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Los legos de la Naturaleza . . . . .	7
1.2. Breve biografía de la Cromodinámica Cuántica . . . . .	9
1.3. Cromodinámica Cuántica . . . . .	11
1.4. Cuantización . . . . .	15
1.4.1. Formalismo funcional . . . . .	15
1.4.2. Procedimiento de Faddeev-Popov . . . . .	18
1.5. QCD perturbativa . . . . .	23
1.6. Accediendo al infrarrojo . . . . .	26
1.7. El lagrangiano correcto . . . . .	27
<b>2. Modelo de Curci-Ferrari</b>	<b>31</b>
2.1. El régimen infrarrojo de QCD según el lattice . . . . .	31
2.2. El lagrangiano de Curci-Ferrari . . . . .	35
2.3. Reglas de Feynman . . . . .	36
2.3.1. Derivación de las reglas de Feynman . . . . .	36
2.3.2. Diagramas 1-PI . . . . .	41
2.4. Regularización y Renormalización . . . . .	43
2.5. Grupo de Renormalización . . . . .	45
2.6. Resultados previos obtenidos con el modelo de Curci-Ferrari . . . . .	47
<b>3. El vértice de tres gluones</b>	<b>49</b>
3.1. Diagramas de Feynman del vértice de tres gluones a 1-loop . . . . .	50
3.2. Estructura tensorial del vértice de tres gluones . . . . .	53
3.3. Integrales Maestras y el algoritmo de Laporta . . . . .	55
<b>4. Resultados</b>	<b>59</b>
4.1. Esquema Infrared Safe . . . . .	59
4.2. Ajuste de parámetros . . . . .	64
4.3. Comparación con el lattice . . . . .	67
4.4. Resultados en la aproximación quenched . . . . .	69
4.5. Resultados con quarks dinámicos . . . . .	72
<b>5. Conclusiones</b>	<b>75</b>
Bibliografía . . . . .	78

# Resumen

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría gauge no abeliana que describe la interacción nuclear fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales y la responsable de que los quarks formen estados ligados para dar lugar a protones, neutrones y al resto de la materia bariónica presente en el universo. Para realizar cálculos en esta clase de teorías es necesario fijar el gauge para eliminar las redundancias originadas en la simetría gauge, y la forma estándar de hacerlo es a través del conocido procedimiento de Faddeev-Popov. Este procedimiento permite obtener un lagrangiano fijado gauge con el que es posible hacer cálculos perturbativos que reproducen exitosamente los resultados de los experimentos realizados a energías altas.

Sin embargo, el cálculo del running de la constante de acoplamiento realizado perturbativamente a partir del lagrangiano de Faddeev-Popov muestra que la misma diverge en el régimen infrarrojo a una escala finita de energía usualmente llamada  $\Lambda_{QCD}$ . La interpretación habitual de este hecho es que la QCD es de naturaleza inherentemente no perturbativa en este régimen. Por otro lado, es sabido que el procedimiento de Faddeev-Popov no está justificado a bajas energías ya que a esas escalas aparecen copias de Gribov, es decir diferentes configuraciones de los campos que satisfacen la condición de gauge. Además, simulaciones numéricas que no necesitan del procedimiento de Faddeev-Popov para fijar el gauge muestran que la constante de acoplamiento no diverge a bajas energías si no que se mantiene moderada, sugiriendo la posibilidad de algún tratamiento perturbativo de este régimen.

Este hecho y el comportamiento del propagador del gluón a bajas energías observado en las simulaciones llevaron hace algunos años a la postulación del modelo de Curci-Ferrari en el gauge de Landau como una forma viable de reproducir los resultados de las simulaciones en este régimen usando teoría de perturbaciones. El modelo consiste en una extensión del lagrangiano de Faddeev-Popov en ese mismo gauge agregando un término de masa para los gluones. Este término es interpretado como una forma efectiva de tomar en cuenta los efectos de las copias de Gribov en el infrarrojo sin alterar los resultados en el régimen ultravioleta. Al día de hoy varios cálculos perturbativos han sido hechos con este modelo con un gran nivel de coincidencia con las simulaciones.

El objetivo de esta tesis es profundizar en el estudio del régimen infrarrojo de la Cromodinámica Cuántica utilizando el modelo de Curci-Ferrari. En particular, extendemos el cálculo ya realizado con el modelo para el vértice de tres gluones para la teoría de Yang-Mills a la teoría con quarks dinámicos.

Realizamos el cálculo a 1-loop del vértice de tres gluones en una configuración de momentos arbitraria y en el caso general de un número arbitrario de sabores de quarks y el grupo  $SU(N)$ , y lo comparamos con simulaciones numéricas en configuraciones de impulso particulares teniendo en cuenta los efectos del Grupo de Renormalización, tanto para la teoría de Yang-Mills como para la teoría con quarks dinámicos. Observamos que el cálculo a 1-loop permite reproducir los resultados de las simulaciones de manera satisfactoria.

Palabras clave: Cromodinámica Cuántica, Régimen Infrarrojo.

# Abstract

Quantum Chromodynamics (QCD) is the non-Abelian gauge theory that describes the strong interaction, one of the four fundamental forces and the responsible for allowing quarks to bind together giving birth to protons, neutrons and all the other forms of baryonic matter present in the universe. To perform computations in non-Abelian gauge theories one must fix the gauge to get rid of the redundancies originated in the gauge symmetry, and the standard way of doing so is by the well known Faddeev-Popov procedure. This procedure provides a gauge-fixed Lagrangian that can be used to make perturbative computations that successfully match experimental data at high energies.

However, the computation of the running coupling constant performed perturbatively from the Faddeev-Popov Lagrangian shows that the coupling constant diverges in the infrared at a finite energy scale usually called  $\Lambda_{QCD}$ . The usual interpretation of this fact is that QCD is inherently non-perturbative in this regime. On the other hand, it is known that the Faddeev-Popov procedure is not well justified at low energies since at these scales one finds Gribov copies, i.e. different field configurations that satisfy the same gauge fixing condition. Moreover, numerical simulations that do not rely on the Faddeev-Popov procedure show that the coupling constant does not diverge but remains moderate at low energies, suggesting the possibility of a perturbative treatment of this regime.

This fact and the behaviour of the gluon propagator at low energies observed in simulations motivated the proposal a few years ago of the Curci-Ferrari model in Landau gauge as a viable way of reproducing the results obtained from simulations in the infrared with perturbation theory. The model consists on the addition of a gluon mass term to the Faddeev-Popov Lagrangian in that same gauge. This mass term is assumed to be an effective way of taking into account the effects arising from Gribov copies in the infrared while at the same time leaving the ultraviolet limit of the theory unaltered. The model has already been used in numerous perturbative computations with great agreement with simulations.

The goal of this thesis is to further investigate the infrared regime of QCD using the Curci-Ferrari model. In particular, we extend the computation made with the model for the three-gluon vertex in Yang-Mills theory to the general case including dynamical quarks.

We performed the 1-loop computation of the three-gluon vertex for an arbitrary momentum configuration and in the more general case of an arbitrary number of quark flavours and the  $SU(N)$  group. We compared our results with numerical simulations in different momentum configurations taking into account Renormalization Group effects, both for Yang-Mills theory and including dynamical quarks. We found that the 1-loop computation reproduces the results from simulations with very good accuracy.

Keywords: Quantum Chromodynamics, Infrared Regime.

# Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin la guía y el apoyo de mi orientadora Marcela Peláez. En los dos años que duró este recorrido siempre estuvo ahí para darme respuestas, consejos y motivación.

También quiero agradecer a Nicolás Wschebor y al resto de los integrantes del grupo de Sistemas Fuertemente Correlacionados del Instituto de Física de Facultad de Ingeniería por las charlas y el trabajo compartido, y a la CAP y a la ANII por el apoyo económico.

Finalmente, agradezco a todas las personas que me acompañaron en este camino y me ayudaron a llegar hasta acá.

Gracias a todos.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Los legos de la Naturaleza

Desde los inicios de la humanidad, incontables hombres y mujeres han dedicado sus vidas a entender la realidad física y explicar los fenómenos que en ella transcurren. Una de las preguntas más fundamentales que pueden hacerse sobre el mundo material es la siguiente: ¿Cuál es la sustancia de la que se componen las cosas? ¿Existe un número finito de ingredientes a partir de los cuales se constituyen los diferentes y variados objetos que conocemos, desde las estrellas en el espacio hasta la yerba para el mate?

A lo largo de la historia han surgido numerosas respuestas a estas preguntas. Por ejemplo, entre los filósofos griegos, fundamentalmente entre los de la escuela de Mileto, era habitual la idea de que toda la materia se compone a nivel último de cuatro elementos: aire, tierra, fuego y agua. Este enfoque fue compartido por grandes pensadores de la época tales como Anaximandro, Tales y Anaxímenes, aunque con discrepancias en cuál de estos elementos era a su vez el fundamental. Más cercana a nuestra visión actual de la cuestión fue la posición de filósofos como Anaxágoras, Demócrito y Leucipo, que sostuvieron que la realidad está formada por bloques fundamentales a los que llamaron átomos (del griego *άτομο*, sin división) rodeados de vacío. Esta línea de pensamiento fue bastante ignorada en la antigüedad pero recobró fuerza con la teoría atómica propuesta por Dalton a comienzos del siglo XIX, finalmente dando lugar medio siglo después a la tabla periódica de Mendeléyev. En ella, Mendeléyev agrupó y clasificó los elementos conocidos en su época ordenándolos según su peso atómico.

La gran cantidad de elementos conocidos y la periodicidad de sus propiedades como función del peso atómico sugieren (correctamente) la idea de que éste no es el fin de la historia. Hoy en día sabemos que los átomos no son tan indivisibles como creían los griegos, si no que están compuestos por un núcleo atómico formado por protones y neutrones y una nube electrónica que rodea al mismo, y son las propiedades de esta nube electrónica las que dan a la tabla periódica su estructura.

La respuesta más moderna que ha producido la humanidad a nuestra pregunta es conocida como el Modelo Estándar de Física de Partículas, cuyos componentes elementales se muestran en la figura 1.2. Ésta teoría fue desarrollada mayormente en los años 70 y obtuvo su última consagración experimental en el año 2012 con



Figura 1.1: Los famosos "Tres de Mileto".

el descubrimiento de la partícula predicha por la misma llamada bosón de Higgs. Según el Modelo Estándar, el universo está poblado por un número relativamente pequeño de partículas fundamentales a partir de las cuales se constituye todo lo demás. Estas partículas pueden clasificarse en dos grandes grupos: los fermiones, de los que está compuesta la materia, y los bosones, que (a excepción del bosón de Higgs) juegan el papel de mediadores de las fuerzas fundamentales.

Tres generaciones  
de la materia (fermiones)

	I	II	III		
masa →	2,4 MeV/c <sup>2</sup>	1,27 GeV/c <sup>2</sup>	171,2 GeV/c <sup>2</sup>	0	0
carga →	2/3	2/3	2/3	0	0
espín →	1/2	1/2	1/2	1	2
nombre →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> Foton	<b>G</b> Graviton
	4,8 MeV/c <sup>2</sup>	104 MeV/c <sup>2</sup>	4,2 GeV/c <sup>2</sup>	0	? GeV/c <sup>2</sup>
	-1/3	-1/3	-1/3	0	0
	1/2	1/2	1/2	1	0
Quark	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>g</b> Gluon	<b>H</b> Boson Higgs
	<2,2 eV/c <sup>2</sup>	<0,17 MeV/c <sup>2</sup>	<15,5 MeV/c <sup>2</sup>	91,2 GeV/c <sup>2</sup>	
	0	0	0	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>ν<sub>e</sub></b> Neutrino electrónico	<b>ν<sub>μ</sub></b> Neutrino muónico	<b>ν<sub>τ</sub></b> Neutrino tauónico	<b>Z<sup>0</sup></b> Boson Z	
	0,511 MeV/c <sup>2</sup>	105,7 MeV/c <sup>2</sup>	1,777 GeV/c <sup>2</sup>	80,4 GeV/c <sup>2</sup>	
	-1	-1	-1	±1	
	1/2	1/2	1/2	1	
Lepton	<b>e</b> Electrón	<b>μ</b> Muón	<b>τ</b> Tau	<b>W<sup>±</sup></b> Boson W	
					Bosones de gauge

Figura 1.2: Cuadro de las partículas del modelo Estándar.

Los núcleos de los átomos que forman la materia ordinaria (es decir, con la que interactuamos cotidianamente en la Tierra) están formados a su vez por protones y neutrones. Como podemos notar mirando la figura 1.2, estos no son partículas

fundamentales, si no que son estados ligados de otras partículas llamadas quarks. En general, los estados ligados formados por quarks se llaman Hadrones, y estos incluyen a los protones y neutrones que componen el núcleo atómico. Los quarks interactúan entre sí a través de la interacción nuclear fuerte, la misma que de forma residual es la responsable de mantener unidos los núcleos atómicos a pesar de la repulsión electromagnética que ejercen entre sí los protones. Los fermiones que no sienten la fuerza fuerte son llamados leptones, siendo su representante más famoso el electrón.

Los quarks pueden agruparse según su *sabor*, propiedad que por supuesto no debe interpretarse en sentido literal. Existen seis tipos o sabores de quarks: down, up, strange, charm, bottom y top. La materia que nos compone esta formada principalmente por quarks tipo up y down y por electrones. Esto se debe a que los protones están compuestos por dos quarks tipo up y un quark tipo down, y los neutrones por dos quarks tipo down y un quark tipo up.

Los quarks up y down, el electrón y el neutrino electrónico forman lo que se conoce como *primera generación de materia*. Como puede verse en la figura 1.2 existen tres generaciones de materia, teniendo las partículas de cada generación propiedades similares a las de su partícula correspondiente en la generación anterior pero una masa mayor.

La teoría aceptada hoy en día para describir la interacción microscópica entre quarks y por consecuencia entre los hadrones es conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés). La QCD es una teoría cuántica de campos de gauge no abeliana invariante ante transformaciones del grupo SU(3), y su campo de gauge asociado es llamado gluón, siendo éste por lo tanto la partícula mediadora de la interacción nuclear fuerte (análoga al fotón en el electromagnetismo). Los componentes fundamentales de la Cromodinámica Cuántica son entonces los quarks y los gluones, y la teoría ha sido utilizada con gran éxito para calcular el espectro de los hadrones y sus interacciones y cuenta al día de hoy con gran sustento empírico.

## 1.2. Breve biografía de la Cromodinámica Cuántica

El camino recorrido para llegar a lo que hoy conocemos como QCD comenzó en los 60, cuando Gell-Mann y Zweig [1] [2] observaron de forma independiente que era posible clasificar a los hadrones según su masa y sus interacciones formando patrones que sugerían una estructura subyacente, de forma análoga a los descubrimientos de Mendeléyev un siglo antes. Éste hecho los llevo a proponer el modelo de quarks en 1964, según el cual los bariones (hadrones pesados) estaban formados por tres quarks y los mesones (hadrones livianos) por un quark y un antiquark. Todos los hadrones conocidos en la época podían entenderse asumiendo que existían tres tipos de quarks: *up*, *down* y *strange*, con cargas  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$  y  $-\frac{1}{3}$  la carga del electrón respectivamente. Posteriormente se predijo y comprobó experimentalmente la existencia de tres tipos (o sabores) más de quarks: *charm*, *bottom* y *top*, con cargas  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$ .

De acuerdo con el modelo de quarks, la forma más directa de obtener información experimental sobre la dinámica de los mismos es estudiar el interior de los hadrones

bombardeándolos con partículas sin estructura a modo de sonda. A principios de los 60 comenzaron los primeros experimentos de estas características en el *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) de California, en los cuales se colisionaba electrones con protones a altas energías en un proceso conocido como *Deep Inelastic Scattering* (DIS). Los resultados de estos experimentos no eran consistentes con una distribución de carga uniforme para el protón. Feynman y Bjorken [4] [3] sugirieron que los electrones se comportaban como si colisionaran con partículas casi libres contenidas dentro del protón, a las que Feynman llamó partones. En estudios posteriores se identificó a los partones con los quarks, ya que contaban con los mismos números cuánticos que los predichos por Gell-Mann y Zweig en su modelo.

Los experimentos de SLAC impusieron una condición muy severa que debía satisfacer una teoría candidata a explicar la dinámica de los quarks: La interacción entre los quarks debe volverse más débil a medida que disminuye la distancia entre ellos. Dado que las interacciones a cortas distancias están asociadas a energías altas, los quarks deben como partículas casi libres a altas energías. Esta propiedad es conocida como libertad asintótica, y es una de las características más importantes de la Cromodinámica Cuántica.

Al estudiarse las diferentes teorías de campos conocidas en la época se encontró que la mayoría no satisfacía este criterio. Sólomente las teorías de gauge no abelianas, es decir teorías de gauge en el que el grupo de simetría interno es no conmutativo, daban lugar a la posibilidad de presentar libertad asintótica. Estas teorías habían sido introducidas por Yang y Mills en los años 50 [5], y Faddeev y Popov mostraron cómo cuantizarlas en 1967 [6]. Finalmente, a principios de los 70 t'Hooft probó su renormalizabilidad [7], y Politzer, Wilczek y Gross [8] [9] demostraron finalmente que satisfacían la propiedad de libertad asintótica utilizando métodos del grupo de renormalización. Poco después Coleman y Gross [10] demostraron que las teorías de gauge no abelianas son las únicas teorías con libertad asintótica para un espacio-tiempo de 4 dimensiones, no dejando lugar a dudas de que la interacción fuerte debía estar descrita por una teoría de esta clase.

Quedaba sin embargo la cuestión de cuál es el grupo de simetría de la teoría gauge no abeliana que describe la interacción fuerte. En paralelo a estos trabajos, se sospechaba en la época que los quarks debían poseer un número cuántico adicional, ya que se había descubierto la existencia de partículas como el barión  $\Delta^{++}$ , de spin  $\frac{3}{2}$ . Analizando sus números cuánticos se vio que estaba formada por tres quarks de sabor up con el mismo spin.

$$|\Delta^{++}, J_3 = \frac{3}{2}\rangle = |u \uparrow u \uparrow u \uparrow\rangle$$

La existencia de esta partícula en el modelo original de quarks viola el principio de exclusión de Pauli, que afirma que no puede existir más de un fermión en un estado cuántico dado. Por lo tanto, debía haber algún otro número cuántico con al menos tres valores posibles para los quarks, de forma de resolver este problema. Este nuevo número cuántico fue llamado *color*, y se postuló que los quarks, además de tener spin y sabor, podían venir en tres colores: rojo, verde y azul. El nombre Cromodinámica Cuántica surge de la palabra griega *chrôma* para color. Gell-Mann y Fritzsche [11][12] propusieron identificar el color con el número cuántico que surge de la simetría no-abeliana de la teoría gauge que describe la interacción fuerte, y

postularon el grupo  $SU(3)$  para esta simetría.

Una propiedad que diferencia a los quarks de, por ejemplo, los electrones, es la propiedad de confinamiento. Los quarks siempre aparecen formando estados ligados (los Hadrones) y no se los encuentra como partículas libres en la naturaleza. En general, las partículas con color (quarks y gluones) tienen esta propiedad de confinamiento. La QCD permite describir el confinamiento del color postulando que las partículas que las partículas observables deben ser singletes de color, es decir estados invariantes ante transformaciones del grupo  $SU(3)$ . Es importante remarcar que esto es un postulado y que dar una explicación del confinamiento a partir de primeros principios es una de las preguntas abiertas más importantes de la física teórica.

El establecimiento de  $SU(3)$  como el grupo de simetría gauge de la teoría permitió resolver la mayoría de las dificultades existentes en ese momento, estableciéndose QCD como la teoría para describir la dinámica de los quarks con la interacción fuerte. Sus protagonistas son entonces los quarks y los bosones de gauge llamados gluones, que juegan el rol de mediadores de la fuerza fuerte. Al tratarse de un grupo no conmutativo los gluones poseen carga de color y por lo tanto no sólo interactúan con los quarks si no también entre sí. En esta propiedad está el origen de muchas de las características más notables de QCD, incluyendo la libertad asintótica.

### 1.3. Cromodinámica Cuántica

Cómo se discutió en la sección anterior, la Cromodinámica Cuántica es una teoría cuántica de campos gauge no abeliana basada en el grupo  $SU(3)$ . En ésta sección damos una breve introducción a esta clase de teorías, utilizando el caso más general del grupo  $SU(N)$ , con  $N$  arbitrario. Para una descripción más detallada el lector puede referirse a [13] [14] [15]. Las nociones necesarias de teoría de grupos y representaciones que se asumen en este trabajo pueden encontrarse en [16].

Las teorías gauge no abelianas son un caso particular de las teorías cuánticas de campos, en las que las partículas son descritas por campos locales cuya dinámica está gobernada por un lagrangiano invariante ante transformaciones de gauge (es decir que las transformaciones dependen de la coordenada espacio-temporal). pertenecientes a un determinado grupo. Debido a que las transformaciones son parametrizadas por parámetros continuos (en este caso las coordenadas espacio-tiempo), las teorías gauge no abelianas están construídas a partir de grupos de Lie. Si los generadores del álgebra del grupo conmutan entre sí decimos que la teoría es abeliana. Éste es el caso de la Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés), la teoría basada en el grupo  $U(1)$  que describe la interacción electromagnética. Si los generadores no conmutan, como es el caso de  $SU(3)$  y por lo tanto de QCD, decimos que la teoría es no abeliana.

Los elementos  $U$  del grupo unitario  $U(N)$  preservan el producto interno  $\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U | \Phi \rangle$ , es decir  $U^\dagger U = Id$ . Los elementos del grupo  $SU(N)$  cumplen además con la propiedad  $\det(U) = 1$ . Por esta razón, una transformación arbitraria del grupo  $SU(N)$  puede escribirse  $U(x) = e^{-ig\theta^a(x)T^a(R)}$ , donde  $\theta^a(x)$  es una función arbitraria, los  $T^a(R)$  son los generadores del álgebra de Lie del grupo  $SU(N)$  en una representación  $R$  dada y el índice  $a$  toma valores  $a = 1, \dots, N^2 - 1$ . Las propiedades de un grupo de Lie están determinadas por las reglas de conmutación que satisfacen

los elementos de su álgebra,  $[T^a(R), T^b(R)] = if^{abc}T^c(R)$  siendo  $f^{abc}$  las constantes de estructura del grupo.

El Lagrangiano invariante gauge puede tener diferentes tipo de campos involucrados representando diferentes partículas. Dichos campos se asocian con los espacios posibles donde actúan las representaciones del grupo  $SU(N)$ . Para obtener una teoría gauge no abeliana simétrica ante el grupo  $SU(N)$  debemos estudiar cuales son los posibles términos invariantes que pueden aparecer en el lagrangiano. Esto significa que los diferentes campos pueden pertenecer a diferentes representaciones del grupo  $SU(N)$ , pero deben estar agrupados de forma tal que cada término pertenezca a la representación escalar.

Una de las representaciones más relevantes para la física es la representación fundamental. La representación fundamental es la representación no trivial de dimensión más baja del grupo, y los generadores en esta representación están asociados a matrices hermiticas  $N \times N$ . Los campos que transforman en ésta representación son conjuntos de  $N$  componentes  $\psi_i$  que transforman de la siguiente manera:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x). \quad (1.1)$$

En el caso de una transformación infinitesimal, se puede considerar  $U(x)_{ij} \sim \delta_{ij} - ig\theta^a(x)T_{ij}^a(F)$ , y por lo tanto los campos transforman de la siguiente manera:

$$\psi_i(x) \rightarrow U_{ij}(x)\psi_j(x) \sim \psi_i(x) - ig\theta^a(x)T_{ij}^a(F)\psi_j(x) \quad (1.2)$$

donde  $T^a(F)$  son los generadores en la representación fundamental normalizados tal que  $\text{Tr}[T^a(F)T^b(F)] = \frac{\delta^{ab}}{2}$ . Dado que los generadores en la representación fundamental aparecerán con frecuencia omitiremos en ellos la referencia a la representación para simplificar la notación. De esta manera, cada vez que nos refiramos a los generadores  $T^a$  sin aclarar la representación estaremos hablando de los generadores  $T^a(F)$  en la representación fundamental.

La representación fundamental es la representación a la cual pertenecen los quarks. El campo correspondiente a los quarks tiene entonces tres componentes asociadas al grupo  $SU(3)$ , o lo que es lo mismo, una asociada a cada color.

La otra representación que necesitaremos es la representación adjunta de  $SU(N)$ , la cual actúa sobre el espacio vectorial generado por los propios generadores del álgebra del grupo. Dado que hay  $N^2 - 1$  generadores, la representación adjunta es  $N^2 - 1$ -dimensional. Los generadores en esta representación están asociados a matrices  $N^2 - 1 \times N^2 - 1$  que cumplen la siguiente propiedad:

$$(T_{adj}^a)^{bc} = -if^{abc}$$

Esta representación es importante porque es la representación en la que transforman los campos de gauge. En el caso de  $SU(3)$  la representación adjunta es de dimensión 8, y por lo tanto el campo asociado a los gluones posee 8 componentes. Podemos expandirlo en la base de los generadores del álgebra del grupo, teniendo:

$$A_\mu(x) = T_{adj}^a A_\mu^a(x).$$

Ante una transformación de gauge los gluones transforman entonces de la siguiente manera:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \quad (1.3)$$

Puede deducirse entonces que ante una transformación infinitesimal cada componente  $A_\mu^a$  transforma:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} \sim A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a + f^{abc} \theta^b A_\mu^c \quad (1.4)$$

Tenemos ya todos los ingredientes necesarios para construir un lagrangiano invariante ante el grupo  $SU(N)$ . En primer lugar, a partir de la regla de transformación (1.2) para los quarks es inmediato ver que términos de la forma  $\psi^\dagger \psi$  serán invariantes. Sin embargo, términos de esa clase no son invariantes ante transformaciones de Lorentz. Dado que deseamos mantener esa simetría en nuestra teoría, definimos el espinor adjunto  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ , donde  $\gamma_0$  es una de las matrices de Dirac definidas por  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ . Es sencillo demostrar que  $\bar{\psi} \psi$  es simultáneamente invariante Lorentz y  $SU(3)$ .

Hasta ahora todo se parece al conocido lagrangiano de Dirac. Sin embargo, al intentar agregar términos cinéticos nos encontramos con un problema. La derivada del campo de quarks no transforma de la misma manera que el campo mismo:

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu (\psi(x) - ig\theta^a(x) T^a \psi(x)) = \partial_\mu \psi(x) - ig\theta^a(x) T^a \partial_\mu \psi(x) - ig\partial_\mu \theta^a(x) T^a \psi(x)$$

Vemos entonces que el hecho de que el parámetro  $\theta$  sea una función de  $x$  estropea las propiedades de transformación de  $\partial_\mu \psi$ . Esto significa que copiar el término cinético  $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  del lagrangiano de Dirac arruinaría la invariancia gauge de nuestra teoría. Afortunadamente, es posible solucionar este problema definiendo la derivada covariante  $D_\mu$ :

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig A_\mu^a T^a \psi \quad (1.5)$$

Dado que los bosones de gauge transforman en la representación adjunta del grupo, es posible ver que la  $D_\mu \psi$  sí tiene la regla de transformación necesaria para conservar la invariancia del término cinético, es decir:

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow (D_\mu \psi)'(x) = U(x) D_\mu \psi(x)$$

De esta manera el término  $\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi$  es invariante  $SU(3)$ . Es importante notar que la derivada covariante no sólo vuelve dinámico al campo  $\psi$  si no que introduce una interacción entre los quarks y el campo de gauge, ya que con esa definición el lagrangiano incluye el término  $-ig\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ .

El único término que nos falta para obtener el lagrangiano de QCD es el que da la dinámica al campo gluónico. Éste se construye a partir de una generalización del tensor de campo electromagnético de QED,  $F_{\mu\nu}$ , que toma en cuenta la naturaleza no abeliana del grupo  $SU(N)$ :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.6)$$

Es posible verificar entonces que el término  $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$  es invariante gauge. Debido a la componente no abeliana en el tensor  $F_{\mu\nu}$  aparecen términos de interacción cúbicos y cuárticos además del término cinético para el campo de gauge. Llegamos de esta forma al finalmente al lagrangiano de QCD:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu D_\mu - M_i)\psi_i, \quad (1.7)$$

donde  $N_f$  es el número de sabores de quarks y  $M_i$  la masa del quark de sabor  $i$ -ésimo  $\psi_i$ .

Vale la pena mencionar que un término de la forma  $\Theta^{ab}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_a^{\mu\nu}F_b^{\rho\sigma}$  donde  $\Theta^{ab}$  es una matriz constante y  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  el tensor de Levi-Civita, también es invariante gauge. Sin embargo, es posible escribir este término como una derivada total, por lo que no contribuye a la integral funcional asumiendo que los campos decaen lo suficientemente rápido. Por esta razón no afectará a las ecuaciones de movimiento de los campos ni a los diagramas de Feynman, y no es entonces incluido en el lagrangiano.

También sería posible construir términos invariantes de mayor orden en los campos y sus derivadas, pero un simple análisis dimensional nos permitiría concluir que términos de esta clase son no renormalizables. Ésto quiere decir que están asociados a operadores irrelevantes, y a las escalas de energía relevantes para nosotros podemos ignorar sus contribuciones.

Observando el lagrangiano de QCD (1.7) vemos que si llevamos a 0 la constante  $g$  que introdujimos en la definición de la derivada covariante y en la regla de transformación para  $A_\mu$  obtenemos el lagrangiano de una teoría libre para los campos  $\psi$  y  $A_\mu$ . La constante  $g$  determina entonces la intensidad de las interacciones de la teoría, y recibe por eso el nombre de constante de acoplamiento. Es importante notar que imponer la invariancia gauge del lagrangiano tiene como consecuencia que las interacciones entre quarks y gluones, tres gluones y cuatro gluones estén regidas por la misma constante de acoplamiento a nivel bare.

Finalmente introducimos la versión euclídea del lagrangiano de QCD:

$$\mathcal{L}_{QCD}^E = \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i(-\gamma^\mu D_\mu + M_i)\psi_i. \quad (1.8)$$

Si bien el escenario natural para las teorías cuánticas de campos es el espacio de Minkowski, es posible trabajar con una teoría definida en el espacio euclídeo mediante una rotación de Wick, definida por la transformación  $t = it_E$ . De esta manera podemos vincular la métrica de Minkowski con una métrica euclídea utilizando el tiempo complejo  $t_E$ :

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = -(dt_E^2 + d\vec{x}^2)$$

Ésto ofrece la ventaja de simplificar los cálculos en las simulaciones numéricas con las que comparamos nuestros resultados, y por esa razón en este trabajo utilizamos

la forma euclídea del lagrangiano de QCD. Vale destacar el hecho de que al trabajar en el euclídeo no hay distinción entre índices de Lorentz superiores e inferiores.

## 1.4. Cuantización

En la sección anterior obtuvimos el lagrangiano renormalizable más general para una teoría de gauge no abeliana invariante ante transformaciones del grupo  $SU(N)$  y nos concentramos en el caso particular de  $SU(3)$ , ya que es el caso que corresponde a QCD. En esta sección presentamos brevemente el formalismo funcional propuesto originalmente por Feynman [17] para cuantizar teorías de campos partiendo del lagrangiano clásico correspondiente. Para una descripción más detallada puede consultarse la bibliografía sugerida en la sección anterior, o también [18].

La cuantización de una teoría de campos no es un procedimiento único, y en general pueden existir diversos métodos que permiten cuantizar una teoría clásica y obtener las mismas predicciones físicas del sistema cuántico. Los dos métodos más ampliamente utilizados son el formalismo de operadores canónico, también llamado cuantización canónica, y el formalismo funcional.

La cuantización canónica consiste en promover a los campos clásicos a operadores pertenecientes a un espacio de Hilbert y dotarlos de relaciones de conmutación. En este contexto, las funciones de Green  $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle$  que caracterizan a la teoría se obtienen como el valor esperado en el vacío de productos de operadores de campo:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle$$

donde  $\phi$  representa un campo arbitrario (escalar, fermión, boson de gauge, etc),  $\hat{\phi}$  su operador asociado en la representación de Heisenberg,  $T$  es el operador tiempo ordenado y  $|0\rangle$  es el vacío de la teoría, es decir el autoestado del operador hamiltoniano con el menor autovalor. Este método es el que permite establecer la conexión más directa entre el formalismo canónico de la mecánica cuántica y las teorías cuánticas de campos, ya que la evolución temporal de los operadores se obtiene del operador hamiltoniano construido a partir de la transformada de Legendre del lagrangiano clásico. Sin embargo, su utilización para la cuantización de teorías de gauge es compleja, ya que el formalismo hamiltoniano oculta las simetrías del lagrangiano de la teoría a nivel clásico.

### 1.4.1. Formalismo funcional

En el formalismo funcional, por otro lado, se trabaja con el lagrangiano clásico y por lo tanto se exhibe de forma manifiesta la invariancia gauge. Éste segundo formalismo está basado en el principio de superposición característico de la mecánica cuántica, según el cual la amplitud de probabilidad de encontrar a un sistema físico en un estado final dado conociendo su estado inicial es igual a la suma de las amplitudes de todos los posibles caminos por los que el sistema puede llegar del estado inicial al estado final. Cada camino contribuye entonces con una amplitud proporcional a  $e^{iS[\phi]}$ , donde  $S[\phi]$  es la acción clásica en el espacio de Minkowski evaluada

en la configuración de los campos asociada a ese camino en particular. Las funciones de Green en el formalismo funcional están entonces dadas por:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$

donde la integral funcional es sobre todas las posibles configuraciones de los campos. Es posible pasar a una integral en el espacio euclideo mediante la ya descrita rotación de Wick, obteniendo una expresión para las funciones de Green en términos de la acción euclídea  $S_E = \int d^d x \mathcal{L}_E$ :

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}}$$

La expresión anterior es análoga a la de un valor medio de mecánica estadística con el peso de Boltzmann sustituido por  $e^{-S_E[\phi]}$ . Es habitual en mecánica estadística obtener valores esperados tomando derivadas de la función de partición en presencia de un campo externo  $J$ , y nos inspiramos en este hecho para la funcional generatriz de funciones de correlación  $Z[J]$ :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi] + \sum \int d^d x J_i(x) \phi_i(x)}$$

donde la suma es sobre todos los campos  $\phi_i$  que aparecen en el lagrangiano. Siguiendo el método ideado por Schwinger [19] es sencillo ver de la definición de  $Z[J]$  que podemos obtener cualquier función de correlación tomando derivadas funcionales respecto de las fuentes y evaluando en campo externo nulo:

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_n}(x_n)} \Big|_{J=0}$$

Es conveniente también introducir la funcional generatriz de funciones de correlación conexas  $W[J]$ , definida por  $Z[0]e^{W[J]} = Z[J]$ . Tomando sus derivadas respecto de las fuentes obtenemos las funciones de correlación conexas:

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle_c = \frac{\delta^{(n)} W[J]}{\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_n}(x_n)} \Big|_{J=0}$$

Finalmente, definimos la acción efectiva o funcional generatriz de funciones de correlación 1-PI como la transformada de Legendre de  $W[J]$  respecto de las fuentes:

$$\Gamma[\Phi] = -W[J] + \int d^d x J_i(x) \Phi_i(x)$$

donde  $\Phi_i(x) = \langle \phi_i(x) \rangle = \frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)}$ .

Las funciones de correlación 1-PI (one particle irreducible) son una clase de funciones de correlación que forma un subconjunto de las funciones de correlación conexas. Sin embargo, puede demostrarse que cualquier función de correlación conexas puede expresarse en términos de funciones de correlación 1-PI (ver por ejemplo [15]).

Si utilizáramos la representación diagramática de las funciones de correlación conocida como diagramas de Feynman, veríamos que las funciones de correlación 1-PI están asociadas a diagramas que no pueden ser separados en dos cortando solamente una línea interna. Análogamente a lo que observamos con  $Z[J]$  y  $W[J]$ , derivando  $n$  veces  $\Gamma[\Phi]$  respecto del valor medio de los campos obtenemos una expresión para la función de correlación 1-PI con  $n$  patas externas.

El formalismo funcional permite trabajar de forma explícita con las simetrías del problema, y por lo tanto deja en evidencia los problemas que surgen a partir de la invariancia gauge de la teoría. En primer lugar, uno se encuentra con la aparición de graves divergencias en las integrales funcionales. Consideremos por ejemplo el término  $Z[0]$  dado por

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}.$$

Tanto la acción  $S_E$  como la medida de integración son invariantes ante transformaciones de gauge. Todas las configuraciones de los campos que difieran entre sí por una transformación de gauge dejarán invariante a la acción, y por lo tanto contribuirán un factor idéntico a la integral funcional.

Más específicamente, llamemos  $\phi^\theta$  a la transformación de gauge del campo  $\phi$  con parámetro  $\theta$ . Definimos la órbita de gauge del campo  $\phi$  al conjunto  $\{\phi^\theta\}$  para todos los valores de  $\theta$ . Estas corresponden a las configuraciones físicamente equivalentes del campo  $\phi$  obtenidas al iterar la aplicación de transformaciones de gauge sobre el mismo.

Al realizar la integral funcional en  $Z[0]$  debemos integrar sobre todas las configuraciones de los campos. En particular, debemos integrar sobre la órbita de gauge del campo  $\phi$  y por lo tanto la integral diverge, ya que la misma es una región infinita del espacio de configuraciones de los campos donde el integrando tiene el mismo valor.

Este tipo de divergencias aparecen constantemente en las integrales funcionales. Idealmente, desearíamos poder seleccionar un representante  $\phi^{\bar{\theta}}$  de entre las configuraciones de la órbita de gauge e integrar sobre las configuraciones inequivalentes de los campos. Ésto puede realizarse imponiendo una *condición de gauge* del tipo  $f[\phi^{\bar{\theta}}, x] = 0$  en un proceso conocido como fijación de gauge. El conjunto de los campos que satisfacen dicha condición definen la superficie de fijación de gauge.

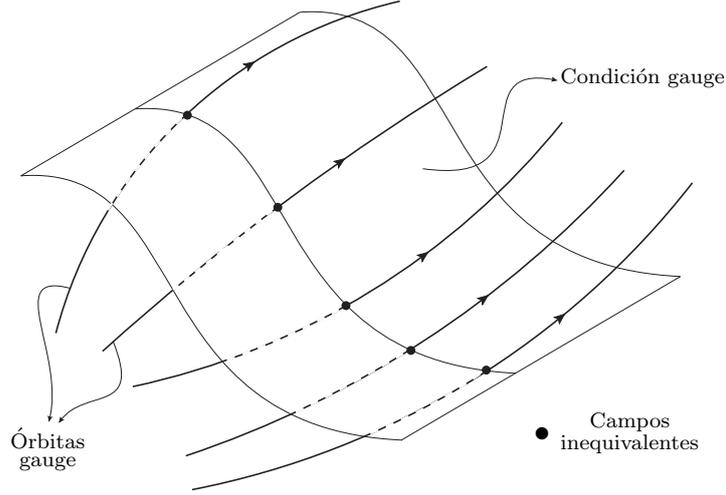


Figura 1.3: Representación esquemática de la fijación de gauge, donde diferentes órbitas cruzan la superficie de gauge. Imagen extraída de [20]

El método para fijar el gauge en teorías expresadas en el formalismo lagrangiano fue desarrollado por Faddeev y Popov en los años 60 [6]. El procedimiento de Faddeev-Popov permite obtener un lagrangiano fijado gauge con el que es posible realizar cálculos asumiendo que la condición de gauge tiene una solución única. Sin embargo, esto resulta no ser cierto para algunos casos en los que existen diferentes campos  $\phi^\theta$  en una misma órbita que satisfacen la condición de gauge. En estos gauges el procedimiento de Faddeev-Popov no está justificado, y las consecuencias de este hecho podrían explicar algunas de las propiedades infrarrojas de QCD. Volveremos sobre este tema más tarde, pero antes introduciremos el procedimiento de Faddeev-Popov estándar en la siguiente sección.

### 1.4.2. Procedimiento de Faddeev-Popov

La idea central detrás del procedimiento de Faddeev-Popov es separar en la integral funcional la integral sobre la superficie de gauge, es decir sobre las configuraciones físicamente inequivalentes de los campos, de la integración sobre las órbitas de gauge. Ésta segunda integral aportará sólo un factor correspondiente al volumen del grupo de gauge que no modificará los observables físicos.

Dado que la parte no trivial del procedimiento es la correspondiente a los campos de gauge, olvidaremos a los fermiones por un rato y en lo que queda de esta sección trabajaremos sólo con la parte de Yang-Mills del lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2, \quad Z[0] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^d x \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2}.$$

Como ya mencionamos, ante una transformación de gauge infinitesimal de parámetro  $\theta$  el campo  $A_\mu^a$  transforma de la siguiente manera:

$$A_\mu^a \rightarrow {}^\theta A_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f^{abc}\theta^b A_\mu^c.$$

Denotamos  $\hat{A}_\mu$  a la solución de la condición de gauge  $f_a[\theta A_\mu, x] = 0$ , que asumiremos única. Es importante notar que necesitamos satisfacer una condición para cada componente  $A_\mu^a$  del campo de gauge.

Para aislar la integral sobre la superficie de fijación de gauge, introducimos la funcional  $\Delta_f(A_\mu)$  definida por

$$\Delta_f(A_\mu)^{-1} = \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\theta A_\mu]], \quad (1.9)$$

donde la medida de integración es  $\mathcal{D}\theta = \prod_a \mathcal{D}\theta^a$ , y  $\delta[f_a]$  es la delta de Dirac funcional. Si multiplicamos la funcional  $Z[0]$  por la identidad (1.9) tenemos

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^d x \mathcal{L}(A_\mu)} \delta[f_a[\theta A_\mu]] \Delta_f(A_\mu) \quad (1.10)$$

Demostremos a continuación que el integrando es en realidad independiente de  $\theta$ , y por lo tanto la integral en el parámetro de gauge puede factorizarse dando lugar a una constante. El lagrangiano es invariante gauge, por lo que podemos realizar la sustitución  $\mathcal{L}(A_\mu) \rightarrow \mathcal{L}(\theta A_\mu)$  en (1.10) sin afectar el valor de  $Z[0]$ . La medida de integración  $\mathcal{D}A_\mu$  también es invariante, ya que los términos  $\frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a$  y  $f^{abc} \theta^b A_\mu^c$  en una transformación de gauge infinitesimal pueden interpretarse como una traslación y una rotación respectivamente, y por lo tanto no alteran la medida de integración. Finalmente, podemos mostrar que  $\Delta_f(A_\mu)$  es invariante gauge.

Sea  $A'_\mu$  el campo de gauge conectado a  $A_\mu$  por una transformación de gauge de parámetro  $\bar{\theta}$ , es decir

$$A'_\mu = \bar{\theta} A_\mu$$

con  $\bar{\theta}$  fijo. Tenemos entonces que  $\theta A'_\mu$  es  $\theta(\bar{\theta} A_\mu) \equiv \tilde{\theta} A_\mu$ , con  $\tilde{\theta} = \theta + \bar{\theta}$ . Sustituyendo en la definición de  $\Delta_f^{-1}(A'_\mu)$  tenemos:

$$\Delta_f^{-1}(A'_\mu) = \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\theta A'_\mu]] = \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\tilde{\theta} A_\mu]] = \int \mathcal{D}\tilde{\theta} \delta[f_a[\tilde{\theta} A_\mu]] = \Delta_f^{-1}(A_\mu)$$

En la tercer igualdad utilizamos que la medida de integración  $\mathcal{D}\theta$  es invariante ante traslaciones  $\theta \rightarrow \tilde{\theta}$ .

Demostremos entonces que  $\Delta_f$  es invariante gauge. Todas las cantidades en la ecuación (1.10) son invariantes excepto el argumento de la delta. Sustituyendo  $\mathcal{L}(A_\mu) \rightarrow \mathcal{L}(\theta A_\mu)$ ,  $\mathcal{D}A_\mu \rightarrow \mathcal{D}^\theta A_\mu$  y  $\Delta_f(A_\mu) \rightarrow \Delta_f(\theta A_\mu)$  tenemos:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}^\theta A_\mu e^{-\int d^d x \mathcal{L}(\theta A_\mu)} \delta[f_a[\theta A_\mu]] \Delta_f(\theta A_\mu).$$

Podemos ahora realizar el cambio de variables  $\theta A_\mu \rightarrow A_\mu$  en la integral sobre los bosones de gauge. De esta forma desaparece la dependencia en  $\theta$  de la integral en  $A_\mu$ , y la integral se factoriza en dos términos independientes:

$$Z[0] = \left( \int \mathcal{D}\theta \right) \left( \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^d x \mathcal{L}(A_\mu)} \delta[f_a[A_\mu]] \Delta_f(A_\mu) \right)$$

El primer término corresponde a la integral sobre las órbitas de gauge y contribuye un factor  $\mathcal{V}$  igual al volumen del grupo de gauge. Este volumen es infinito, pero se cancelará en el cálculo de todos los observables físicos. El segundo término corresponde a la integral sobre los campos de gauge restringidos a la superficie de gauge.

Logramos extraer las divergencias provenientes de las redundancias en la integral funcional, pero para poder hacer cálculos aún necesitamos conocer la forma de la funcional  $\Delta_f(A_\mu)$ . Podemos hacer ésto de forma sencilla utilizando la identidad

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\theta A_\mu]] \det \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{f_a=0} \quad (1.11)$$

que generaliza la identidad habitual para la delta de una función al cálculo funcional. Dado que estamos asumiendo que la condición de gauge tiene una solución única  $\hat{\theta}$ , el determinante funcional de la ecuación (1.11) cumple

$$\det \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{f_a=0} = \det \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

y es por lo tanto independiente del parámetro de gauge  $\theta$  y puede ser sacado para afuera de la integral. Tenemos entonces:

$$1 = \det \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\theta A_\mu]]$$

Comparando con la definición de  $\Delta_f(A_\mu)$  obtenemos el resultado buscado:

$$\Delta_f(A_\mu) = \det M_f^{ab}(x, y), \quad M_f^{ab}(x, y) \equiv \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (1.12)$$

Dado que  $\Delta_f(A_\mu)$  es invariante gauge, la matriz  $M_f^{ab}(x, y)$  también lo es, y podemos elegir evaluarla sobre la superficie de fijación de gauge, de tal forma que  $\hat{\theta} = 0$ :

$$M_f^{ab}(x, y) = \hat{M}_f^{ab}(x, y) = \left( \frac{\delta f_a[\theta \hat{A}_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{\theta=0}$$

Restringiéndonos a transformaciones de gauge infinitesimales tenemos:

$$\hat{M}_f^{ab}(x, y) = \left( \frac{\delta f_a[\hat{A}_\mu(x) + \frac{1}{g} \hat{D}_\mu \theta(x)]}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{\theta=0} \quad (1.13)$$

con  $(D_\mu \theta)^a = \partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A_\mu^b \theta^c$ .

Ya contamos con una expresión analítica para  $M_f$  para una condición de gauge arbitraria y logramos restringir la integral funcional a las configuraciones inequivalentes de los campos. Por lo tanto, el problema de la fijación de gauge está formalmente resuelto. Sin embargo, para poder realizar cálculos perturbativos es conveniente que todos los términos en la integral funcional formen parte de la exponencial, de manera de poder tratarlos como interacciones. Desearíamos entonces

reescribir la delta que restringe la integración a la superficie de fijación de gauge y el determinante de la matriz  $M_f$  en forma de exponenciales.

Para el caso de la delta introducimos los campos auxiliares  $B_a(x)$  a través de la integral gaussiana

$$\frac{1}{\mathcal{N}(\xi)} \int \mathcal{D}B e^{-\frac{1}{2\xi} \int d^d x B_a(x) B_a(x)} = 1$$

donde  $\xi$  es una constante arbitraria y  $\mathcal{N}(\xi)$  es un coeficiente que normaliza la integral. Como las  $B_a(x)$  no dependen de  $\theta^a(x)$  podemos modificar la condición de gauge de forma que  $f_a[A_\mu] - B_a = 0$ . Haciendo esa modificación e insertando la identidad anterior en la ecuación para  $Z[J]$  tenemos

$$Z[0] = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{N}(\xi)} \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}B \delta[f_a[A_\mu] - B_a] (\det \hat{M}_f) e^{-\int d^d x \mathcal{L}(A_\mu) - \frac{1}{2\xi} B_a(x) B_a(x)}.$$

Realizando la integral sobre los  $B_a$  logramos pasar la delta que impone la condición de gauge a la exponencial a modo de un multiplicador de lagrange:

$$Z[0] = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{N}(\xi)} \int \mathcal{D}A_\mu (\det \hat{M}_f) e^{-\int d^d x (\mathcal{L}(A_\mu) - \frac{1}{2\xi} (f_a[A_\mu])^2)}.$$

El último paso que debemos dar es la pasar a la exponencial el término  $\det \hat{M}_f$ . Para esto utilizamos el hecho de que el determinante de una matriz  $A$  puede escribirse en términos de una integral gaussiana sobre variables de Grassman:

$$\det(\mathcal{A}) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^d x \int d^d y \bar{\psi}^a(x) \mathcal{A}_{ab}(x, y) \psi(y)^b \right\},$$

donde  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  son variables de Grassman, es decir números anticonmutantes. Por más detalles respecto a las variables de Grassman y la demostración de la identidad anterior referimos al lector a la bibliografía sugerida al principio de la sección.

Para aplicar esta identidad a nuestro problema vamos a adoptar una condición de gauge particular de manera de obtener una forma explícita para la matriz  $M_f$ . De ahora en más trabajaremos en el gauge de Landau, definido por la condición de gauge

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0$$

Sustituyendo  $f_a = \partial_\mu$  en la definición de  $M_f$  e imponiendo la condición de gauge tenemos

$$M_f^{ab}(x, y) = \partial_\mu \left( \frac{1}{g} \delta^{ab} \partial_\mu + f^{acb} A_\mu^c \right) \delta^{(d)}(x - y),$$

el cual es llamado el operador un operador diferencial llamado operador de Faddeev-Popov.

Finalmente podemos escribir el término  $\det M_f$  de la siguiente forma:

$$\det M_f = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left\{ - \int d^d x \partial_\mu \bar{c}^a(x) (\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{acb} A_\mu^c) c(x)^b \right\},$$

donde hemos absorbido un factor  $\frac{1}{g}$  en la normalización de  $c$  y  $\bar{c}$ . Los campos grassmanianos  $c$  y  $\bar{c}$  son llamados usualmente fantasmas o *ghosts* de Faddeev-Popov, ya que no son partículas físicas, si no que son campos auxiliares que cancelan los efectos espúreos causados por la invariancia gauge. No aparecen por lo tanto como estados asintóticos, si no que sus contribuciones son siempre a través de loops. Son campos de espín 0 con estadística fermiónica, y transforman en la representación adjunta del grupo de gauge. Por lo tanto, la derivada covariante actuando sobre un ghost es

$$(D_\mu c)^a = \partial_\mu c^a + g f^{abc} A_\mu^b c^c.$$

Finalmente llegamos al lagrangiano fijado gauge para la teoría de Yang-Mills:

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2.$$

Si bien podríamos conformarnos con este resultado, realizaremos una última modificación al lagrangiano fijado gauge que utilizaremos en este trabajo. Esto se debe a que trabajar en el gauge de Landau implica restringir a los campos de gauge a aquellas configuraciones que satisfacen  $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ . Como veremos, esto es equivalente a tomar el límite  $\xi \rightarrow 0$ , y quisieramos reescribir el término de fijación de gauge  $\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2$  de forma que  $\xi$  no aparezca en el denominador.

Para esto utilizaremos nuevamente la integración gaussiana de un campo auxiliar. Introducimos el campo bosónico auxiliar  $h^a$ , y consideramos la integral

$$\int \mathcal{D}h^a e^{-\int d^d x (\sqrt{\frac{\xi}{2}} h^a + \frac{i}{\sqrt{2\xi}} \partial_\mu A_\mu^a)^2}.$$

Esta integral no es más que una gaussiana, y por lo tanto su resultado es una constante que no afecta los resultados físicos y puede ser omitida en la funcional  $Z$ . Desarrollando el cuadrado en la integral tenemos:

$$e^{-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2} \propto \int \mathcal{D}h^a e^{-\int d^d x (\frac{\xi}{2} (h^a)^2 + i h^a \partial_\mu A_\mu^a)}.$$

Podemos entonces utilizar el campo auxiliar  $h^a$  para imponer la condición de gauge y reemplazar el término  $\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2$  en el lagrangiano por  $(\frac{\xi}{2} (h^a)^2 + i h^a \partial_\mu A_\mu^a)$ .

Tomando el límite  $\xi \rightarrow 0$  y volviendo a agregar los términos del lagrangiano asociados a los quarks obtenemos el lagrangiano fijado gauge de QCD que utilizaremos de ahora en más en esta tesis, conocido como el lagrangiano de Faddeev-Popov:

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a. \quad (1.14)$$

## 1.5. QCD perturbativa

Para estudiar el lagrangiano de Faddeev-Popov usando teoría de perturbaciones dividimos el mismo en dos partes: el *lagrangiano libre*  $\mathcal{L}_0$  y el *lagrangiano de interacción*  $\mathcal{L}_{int}$  definidos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu \partial_\mu + M_i) \psi_i + \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a, \\ \mathcal{L}_{int} &= \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{1}{4} g^2 (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 \\ &\quad + i g \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i \gamma_\mu A_\mu^a T^a \psi_i + g f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c.\end{aligned}$$

Dado que el lagrangiano de interacción es proporcional a la constante de acoplamiento, si ésta es pequeña podemos desarrollar la exponencial en la integral funcional en potencias de  $\mathcal{L}_{int}$ :

$$e^{-\int d^d x \mathcal{L}} \sim e^{-\int d^d x \mathcal{L}_0} \left( 1 - \int d^d x \mathcal{L}_{int} + \frac{1}{2} \left( \int d^d x \mathcal{L}_{int} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \int d^d x \mathcal{L}_{int} \right)^3 + \dots \right).$$

De ésta manera cualquier función de correlación de la teoría con interacciones puede ser calculada en términos de una suma infinita de funciones de correlación de una teoría libre, es decir tomando como peso la distribución gaussiana  $e^{-\int d^d x \mathcal{L}_0}$ .

El cálculo perturbativo consiste en truncar esta suma a un orden dado de potencias de  $g$ . Mientras la constante de acoplamiento se mantenga pequeña este método permite hacer cálculos con un alto nivel de precisión manteniendo sólo los órdenes más bajos del desarrollo, y ha sido utilizado para calcular con éxito secciones eficaces de diversos procesos de QCD a altas energías. Estos resultados han permitido validar la Cromodinámica Cuántica como la teoría correcta para la descripción de la interacción entre quarks y gluones.

El éxito de la QCD perturbativa para realizar cálculos a energías altas se debe a la ya mencionada propiedad de libertad asintótica de la teoría, según la cual la intensidad de las interacciones disminuye al aumentar la energía. Más concretamente, ésto significa que la constante de acoplamiento disminuye al aumentar la escala de energía del proceso en cuestión.

Para estudiar cuantitativamente la variación de la constante de acoplamiento con la escala de energía  $\mu$  se define la función  $\beta_g$

$$\beta_g(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}.$$

Para realizar un cálculo perturbativo de  $\beta_g$  es necesario definir la constante de acoplamiento  $g$  en términos de los vértices que aparecen en el lagrangiano de interacción. Desarrollaremos estas ideas en mayor detalle más adelante, y por ahora

nos limitaremos a mencionar que éste fue el cálculo realizado por Wilczek, Gross y Politzer para demostrar la existencia de libertad asintótica de QCD [8], [9].

El resultado perturbativo para la función  $\beta_g$  es

$$\beta_g(g(\mu)) = -\beta_0 \frac{g(\mu)^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5) \quad (1.15)$$

con

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N - \frac{4}{3}T_f N_f,$$

donde  $T_f$  es el índice de la representación fundamental, definido por

$$\text{Tr}[T^a(F)T^b(F)] = T_f \delta^{ab}$$

Siguiendo la normalización usual de los generadores, tenemos  $T_f = \frac{1}{2}$ .

Vemos que la función  $\beta_g$  es una función negativa de  $g$ . Ésto implica que  $g$  es efectivamente una función decreciente de  $\mu$ . Es sencillo integrar la ecuación (1.15) y obtener una solución perturbativa para la dependencia o *running* de  $g$  con la escala  $\mu$ :

$$g^2(\mu) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2 \beta_0}{16\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)},$$

donde  $g_0$  es el valor de la constante de acoplamiento en una escala de referencia  $\mu_0$  que llamamos escala de renormalización.

En la figura (1.4) se muestra la comparación entre el cálculo perturbativo del *running* de la constante  $\alpha_s \equiv \frac{g^2}{16\pi^2}$  con el valor hallado experimentalmente utilizando diferentes procesos. La concordancia es impactante, validando el uso de la teoría de perturbaciones a escalas  $\mu \gg 1\text{GeV}$

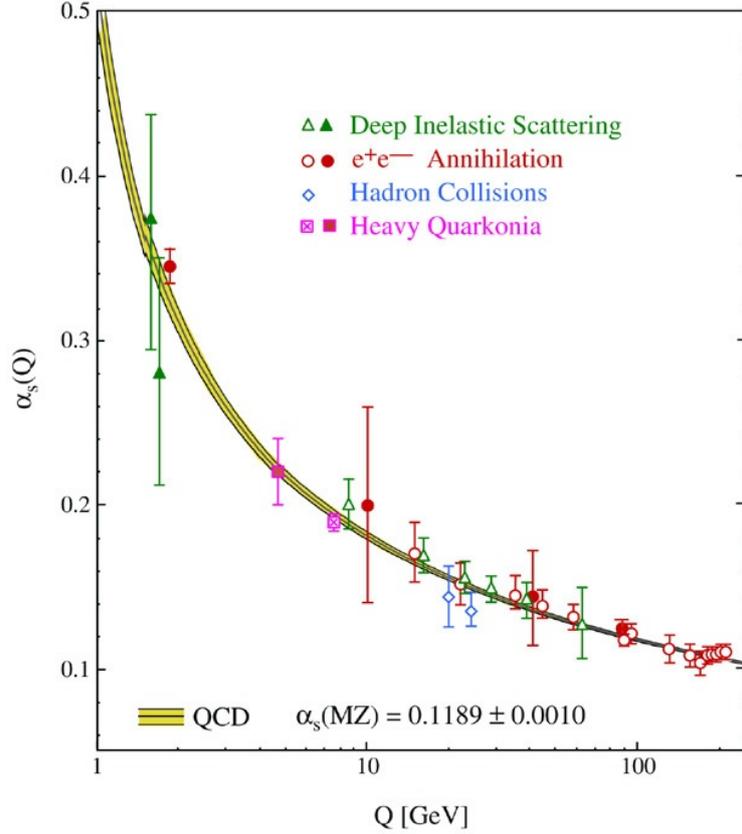


Figura 1.4: Datos experimentales para el running de  $\alpha_s = \frac{g^2}{16\pi^2}$  comparados con la predicción de QCD. Imagen extraída de [21].

Observando la figura 1.4 vemos sin embargo que a energías del orden de 1 GeV la constante  $\alpha_s$  alcanza valores relativamente grandes. De hecho, el cálculo perturbativo de  $\beta_g$  predice la existencia de un polo de Landau a bajas energías, es decir que la constante de acoplamiento diverge a una escala finita de energía usualmente llamada  $\Lambda_{QCD}$ .

Podemos estimar el valor de  $\Lambda_{QCD}$  hallando la escala a la que la expresión perturbativa de  $g$  diverge. No es difícil encontrar la siguiente expresión perturbativa para  $\Lambda_{QCD}$ :

$$\Lambda_{QCD} = \mu_0 e^{-\frac{16\pi^2}{\beta_0 g_0^2}}.$$

Utilizando resultados experimentales para  $\mu_0$  y  $g_0$  se encuentra que  $\Lambda_{QCD}$  es del orden de unos cientos de MeV. La consecuencia de este hecho es que a energías inferiores a esta escala la teoría de perturbaciones usual no funciona, ya que no contamos con un parámetro de desarrollo pequeño. La interpretación clásica de esta cuestión es que el régimen infrarrojo de la Cromodinámica Cuántica es inherentemente no perturbativo, y que es inevitable la búsqueda de caminos alternativos a la teoría de perturbaciones para su estudio.

Estas escalas de energía son sin embargo de gran interés, ya que es a estas escalas donde se dan los procesos de hadronización, es decir en los que los quarks

forman estados ligados para dar lugar a la gran cantidad de bariones y mesones que observamos en la naturaleza. Éste hecho motivó el desarrollo de métodos no perturbativos para estudiar la teoría en este régimen. A continuación mencionaremos brevemente algunos de ellos, como las ecuaciones de Schwinger-Dyson, el grupo de renormalización no perturbativo y las simulaciones numéricas.

## 1.6. Accediendo al infrarrojo

Para acceder al régimen infrarrojo (i.e. de bajas energías) de QCD se han desarrollado diversos métodos semi-analíticos no basados en la teoría de perturbaciones. Mencionaremos brevemente dos de ellos: las ecuaciones de Schwinger-Dyson [22] [23] y el grupo de renormalización no perturbativo [24] (NPRG). Ambos consisten en sistemas de infinitas ecuaciones acopladas vinculando funciones de correlación entre diferentes campos. Para volver al problema tratable, es necesario introducir aproximaciones o truncamientos en estos conjuntos de ecuaciones. Esto tiene la ventaja de que permite implementar esquemas de aproximación distintos al desarrollo perturbativo, pero las aproximaciones utilizadas no suelen estar bien justificadas y se basan más que nada en *ansatz* para las soluciones o en observaciones fenomenológicas.

Una alternativa que no requiere de este tipo de aproximaciones son las simulaciones de Monte Carlo [25], y hasta la fecha son la herramienta que más información nos ha proporcionado sobre el comportamiento de la teoría a bajas energías. Esta técnica consiste en estudiar la teoría en una red discreta de volumen finito usualmente llamada *lattice* por su nombre en inglés. De esta manera es posible utilizar computadoras para realizar la integral funcional numéricamente.

La integral funcional en el espacio euclídeo involucra sumar sobre todas las configuraciones posibles de los campos asignándole a cada configuración un peso  $e^{-S}$ , y en éste formalismo el valor medio de un operador  $\mathcal{O}$  está dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S}}.$$

Como en el *lattice* trabajamos con un espacio-tiempo discreto y de volumen finito, la integral funcional se convierte en una suma sobre un número finito (aunque típicamente muy grande) de configuraciones. Podemos calcular esta integral generando cada configuración  $\{\phi_\alpha\}$  con una probabilidad  $e^{-S_{lattice}[\phi_\alpha]}$ . La función de correlación en el *lattice* es entonces de la forma

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N_{conf}} \sum_{\alpha=1}^{N_{conf}} \mathcal{O}[\phi_\alpha]$$

donde  $N_{conf}$  es el número de configuraciones, y  $S_{lattice}$  es una acción definida sobre los puntos de la red de manera de que sean invariantes gauge y que en el límite continuo (es decir, cuando el paso de la red tiende a cero) converja a la acción invariante de gauge de QCD. Ésta definición no es única, y existen diferentes acciones invariantes discretas con el mismo límite continuo variando en velocidad de convergencia y en complejidad, siendo varias acciones discretas usadas en la práctica.

Es evidente que los resultados de las simulaciones del lattice mejoran en la medida en que disminuimos el paso de la red y aumentamos el tamaño de la misma. Sin embargo, el enorme número de configuraciones de los campos rápidamente vuelve al problema intratable hasta para las computadoras más potentes, y el desafío principal para los que se dedican a este tipo de cálculos es lograr trabajar con números de configuraciones manejables y a la vez mantener errores pequeños.

Otra ventaja de trabajar en el lattice es que no es necesario fijar el gauge para calcular el valor medio de observables, es decir de cantidades invariantes gauge. Sin embargo, dado que las simulaciones del lattice son la herramienta disponible más confiable para acceder al límite infrarrojo de la teoría, muchas veces se busca calcular cantidades dependientes del gauge para comparar con resultados analíticos.

El procedimiento para fijar el gauge en el lattice consiste básicamente en generar una configuración  $\{\phi_\alpha\}$  a partir de la acción  $S_{lattice}$  invariante de gauge, y luego iterar la aplicación de transformaciones de gauge hasta obtener una configuración  $\{\theta\phi_\alpha\}$  que satisfaga la condición de gauge deseada. Para calcular el valor esperado de un operador en este gauge se utilizan solamente estas configuraciones, teniendo entonces

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{GF} = \frac{1}{N_{conf}} \sum_{\alpha=1}^{N_{conf}} \mathcal{O}[\theta\phi_\alpha].$$

Este procedimiento no afecta el cálculo para los operadores invariantes, ya que  $\mathcal{O}[\theta\phi_\alpha] = \mathcal{O}[\phi_\alpha]$ . También es notorio que la fijación de gauge en el lattice no padece del problema de la posible multiplicidad de soluciones a la condición de gauge, ya que por construcción se selecciona una y sólo una configuración de los campos que la satisfaga.

El gauge más utilizado en las simulaciones es el ya mencionado gauge de Landau, ya que su implementación numérica puede reducirse a un algoritmo estándar de maximización de funciones sin la necesidad de introducir ghosts u otras complicaciones [25]. Dado que buscamos comparar nuestros resultados analíticos con simulaciones realizadas en el lattice, elegimos este gauge para nuestro trabajo.

## 1.7. El lagrangiano correcto

En las secciones anteriores vimos que el procedimiento de Faddeev-Popov nos permite fijar el gauge y realizar cálculos utilizando la teoría de perturbaciones en acuerdo con los experimentos realizados a altas energías. Sin embargo, el desarrollo perturbativo estándar presenta problemas en el infrarrojo, y mencionamos algunos métodos alternativos para trabajar en dicho régimen. A pesar de que es posible obtener resultados analíticos con los métodos no perturbativos mencionados, éstos suelen ser complejos y basarse en aproximaciones que no están justificadas. Por otro lado, los cálculos numéricos hechos en el lattice permiten obtener información sobre el comportamiento de diferentes cantidades en el infrarrojo, pero no nos permiten comprender los mecanismos detrás de lo observado ni las relaciones entre los diferentes elementos de la teoría.

Sin embargo, es razonable plantearse la siguiente pregunta: ¿Es realmente la teoría de perturbaciones la que falla en el infrarrojo o es posible que el lagrangiano fijado gauge que estamos utilizando no sea el correcto? Como mencionamos brevemente y desarrollaremos en mayor profundidad a continuación, el procedimiento de Faddeev-Popov asume la unicidad de la solución a la condición de gauge. Sin embargo, esta afirmación no está bien justificada en el gauge de Landau, y la existencia de múltiples configuraciones de los campos que satisfacen la condición de gauge (llamadas usualmente copias de Gribov) puede introducir cambios en el lagrangiano fijado gauge que modifiquen la teoría a bajas energías y que podrían habilitar la posibilidad de un desarrollo perturbativo [26], [61]. Esta segunda visión es la que se desarrolla en esta tesis, en la que argumentaremos que es posible utilizar la teoría de perturbaciones en el infrarrojo realizando modificaciones al lagrangiano fijado gauge de QCD de manera de reproducir los resultados del lattice a bajas energías y los cálculos hechos con QCD estándar a altas energías.

El primer paso en esta dirección es mostrar que el lagrangiano de Faddeev-Popov no está justificado en el infrarrojo. Para eso recordemos que un paso clave en la cuantización de Faddeev-Popov es la inserción de la identidad dada por la ecuación (1.11) dentro de la integral funcional. Para obtenerla extendimos la expresión para la delta de Dirac de una función de  $n$  variables ante un cambio de variable al cálculo funcional:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta[f_a[\theta A_\mu]] \det \left( \frac{\delta f_a[\theta A_\mu](x)}{\delta \theta^b(y)} \right) \Big|_{f_a=0}.$$

Sin embargo, esta identidad sólo es cierta si la condición de gauge  $f_a$  es invertible como función de  $\theta$ , es decir, si la solución  $\hat{\theta}$  a  $f_a[\theta A_\mu] = 0$  es única, ya que de lo contrario el determinante del Jacobiano de la transformación es singular. No sólo eso, si no que también usamos explícitamente la unicidad de  $\hat{\theta}$  para sacar al determinante de la transformación hacia afuera de la integral e identificarlo con la funcional  $\Delta_f$ .

Restrinjámonos al gauge de Landau. La superficie de fijación de gauge está dada por los campos  $A_\mu$  que satisfacen  $\partial_\mu A_\mu = 0$ . Consideremos dos configuraciones  $A_\mu$  y  ${}^\theta A_\mu$  pertenecientes a la misma órbita de gauge, y veamos qué condición debe cumplirse para que ambas satisfagan la condición de gauge  $\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu {}^\theta A_\mu = 0$ .

Si  $A_\mu$  y  ${}^\theta A_\mu$  están lo suficientemente cerca en el espacio de configuraciones de los campos podemos utilizar la forma infinitesimal de la transformación de gauge, teniendo

$${}^\theta A_\mu = A_\mu + D_\mu \theta$$

con  $D_\mu \theta = (D_\mu \theta)^a T^a$ , y  $D_\mu$  es la derivada covariante en la representación adjunta  $D_\mu \theta^a = \partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A_\mu^c \theta^b$ .

Sólo es posible que ambas configuraciones satisfagan la condición de gauge si existe una solución a la ecuación

$$\partial_\mu D_\mu \theta = 0. \tag{1.16}$$

El término a la izquierda de la ecuación es el operador de Faddeev-Popov  $\mathcal{M}^{ab} = \partial^2 \delta^{ab} + g f^{abc} A_\mu^c \partial_\mu$  ya definido anteriormente. Existirán copias de Gribov entonces si el operador de Faddeev-Popov tiene autovectores de autovalor nulo o *zero modes*.

Gribov demostró [26] que para los grupos SU(N) la ecuación (1.16) tiene soluciones no triviales y por lo tanto hay valores de  $A_\mu$  para los que el operador de Faddeev-Popov da lugar a copias de Gribov.

Concluimos entonces que el lagrangiano de Faddeev-Popov no está bien justificado. Uno podría preguntarse ahora como es posible que haya sido utilizado con tal éxito para realizar calculos en el régimen perturbativo. La razón por la que ésto ocurre es que en este régimen  $A_\mu \sim 0$ , y la ecuación (1.16) se reduce a la ecuación de Laplace para  $\theta$ :

$$\partial^2 \theta = 0,$$

la cual no tiene soluciones no triviales para condiciones de borde nulas en el infinito. Éste es el caso también de las teorías de gauge abelianas como QED, para las que las constantes de estructura  $f^{abc}$  son nulas y por lo tanto no presentan copias de Gribov.

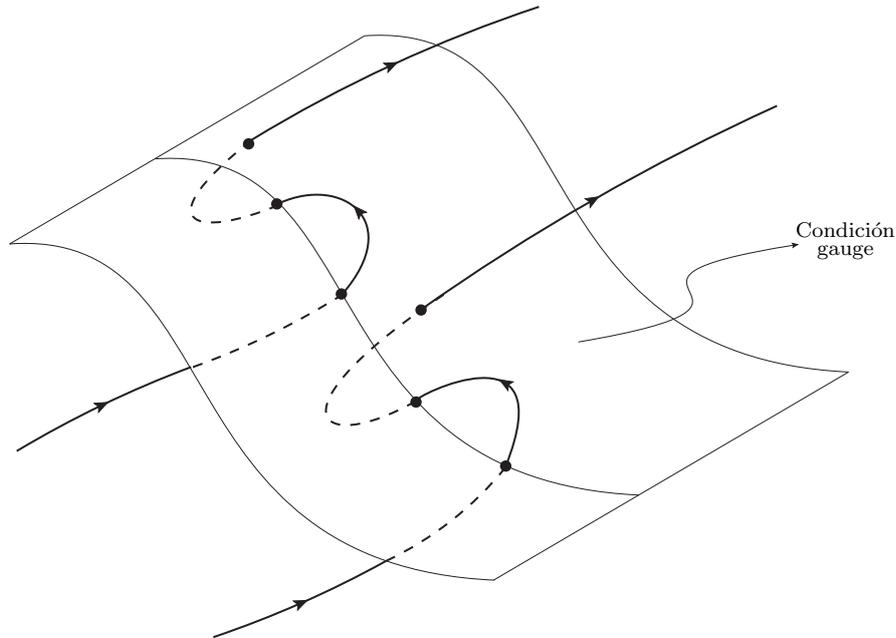


Figura 1.5: Representación de las copias de Gribov dentro de una misma órbita de gauge. Imagen extraída de [20]

La pasada discusión nos enfrenta al hecho de que no sabemos cuál es el lagrangiano fijado gauge correcto para el régimen infrarrojo ya que el procedimiento de Faddeev-Popov no sirve para fijar el gauge de manera consistente. Una solución tentativa al problema fue propuesta por Gribov y consiste en restringir la integración a la región donde el operador de Faddeev-Popov es definido positivo, conocida como primera región de Gribov, de manera de que la condición (1.16) sólo tenga soluciones triviales. La cuestión resultó no ser tan sencilla, ya que la positividad del operador de Faddeev-Popov garantiza la no existencia de copias de Gribov infinitesimalmente

cercanas unas a otras pero no excluye la existencia de copias de Gribov separadas por distancias finitas, y fue demostrado [27] [29] que efectivamente existen copias de Gribov de esta clase. A pesar de este problema, este enfoque es prometedor y trabajos posteriores en esta dirección han intentado restringir aún más la integración sobre el espacio de configuraciones para obtener el lagrangiano fijado gauge válido en el infrarrojo [28].

En este trabajo, sin embargo, seguimos una línea de razonamiento diferente: Dado que no conocemos la forma del lagrangiano en el infrarrojo, podríamos preguntarnos cuál es el lagrangiano más sencillo que reproduce los resultados del lattice en el infrarrojo y que es compatible con los cálculos de QCD estándar, y que nos permite también extender la teoría de perturbaciones al régimen infrarrojo. Una respuesta a esta pregunta fue dada por Tissier y Wschebor [30], y consiste en modificar el lagrangiano de Faddeev-Popov agregando un término de masa para los gluones. El lagrangiano correspondiente resulta ser un caso particular del modelo de Curci-Ferrari propuesto en los años 70 [31] y será introducido en el siguiente capítulo.

Este modelo ha sido utilizado con éxito para reproducir el comportamiento infrarrojo de las funciones de correlación a dos puntos (i.e. propagadores) a uno y dos loops [32] [56]. También se utilizó para calcular funciones de correlación a tres puntos a un loop en el régimen *quenched*, es decir sin considerar la dinámica de los quarks, dando muy buenos resultados [58]. La inclusión de la dinámica de los quarks dificulta los cálculos en el lattice, y por esta razón sólo recientemente hay disponibles simulaciones numéricas para las funciones a tres puntos que tomen en cuenta los quarks dinámicos. El objetivo de esta tesis es extender los cálculos hechos con el modelo para incluir la dinámica de los quarks, concentrándonos en el vértice de tres gluones, y así poder comparar las predicciones del modelo con las recientes simulaciones.

# Capítulo 2

## Modelo de Curci-Ferrari

En la sección anterior mencionamos por primera vez el modelo de Curci-Ferrari [31] como un intento de extender la teoría de perturbaciones al régimen infrarrojo de manera compatible con los resultados del lattice, pero no mostramos cuáles son de hecho esos resultados. A continuación mostraremos algunos de los resultados del lattice para el régimen infrarrojo de QCD que motivaron la propuesta del modelo en [30]. Posteriormente introduciremos el lagrangiano de Curci-Ferrari en el gauge de Landau y presentaremos sus reglas de Feynman. Discutiremos algunas de las propiedades de la teoría e introduciremos los conceptos de regularización, renormalización y flujo de renormalización. Finalmente mostraremos algunos resultados previos obtenidos con el modelo y su comparación con el lattice.

### 2.1. El régimen infrarrojo de QCD según el lattice

Presentaremos a continuación algunos resultados del lattice que son la motivación principal para la utilización del modelo de Curci-Ferrari como un lagrangiano fenomenológico para describir el infrarrojo. Los resultados del lattice más importantes en este sentido son dos: el comportamiento a bajas energías de la constante de acoplamiento y del propagador del gluón.

Mencionamos en el capítulo anterior que de acuerdo al cálculo perturbativo hecho con el lagrangiano de Fadeev-Popov, la constante de acoplamiento de QCD presenta un polo de Landau a energías de unos cientos de MeV. Sin embargo, las simulaciones numéricas muestran un comportamiento muy diferente. En las figuras 2.1 y 2.2 observamos los resultados del lattice para el flujo de la constante de acoplamiento extraídas del vértice ghost-gluón y del vértice de tres gluones respectivamente.

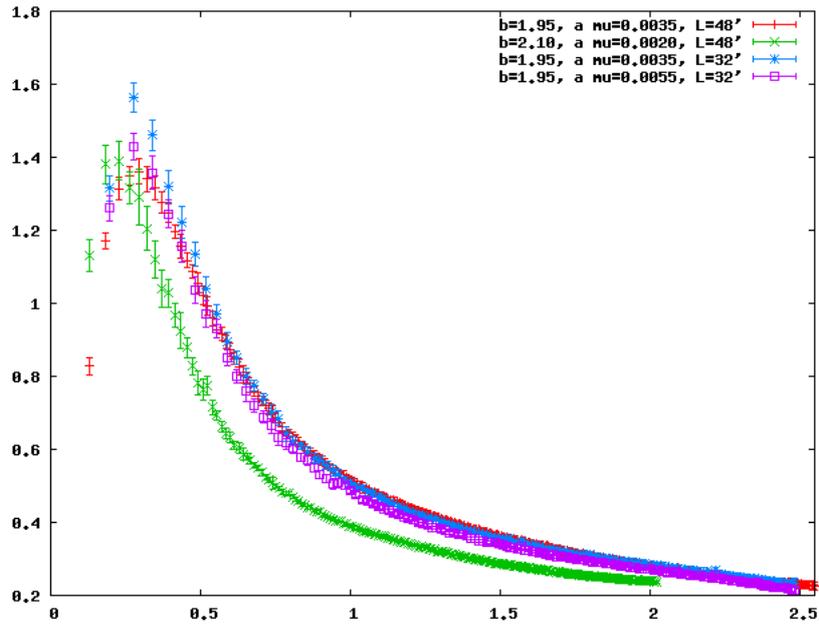


Figura 2.1: Running de la constante de acoplamiento del fantasma en función del momento (en GeV) para distintos parámetros de red. (Gráfica extraída de [35])

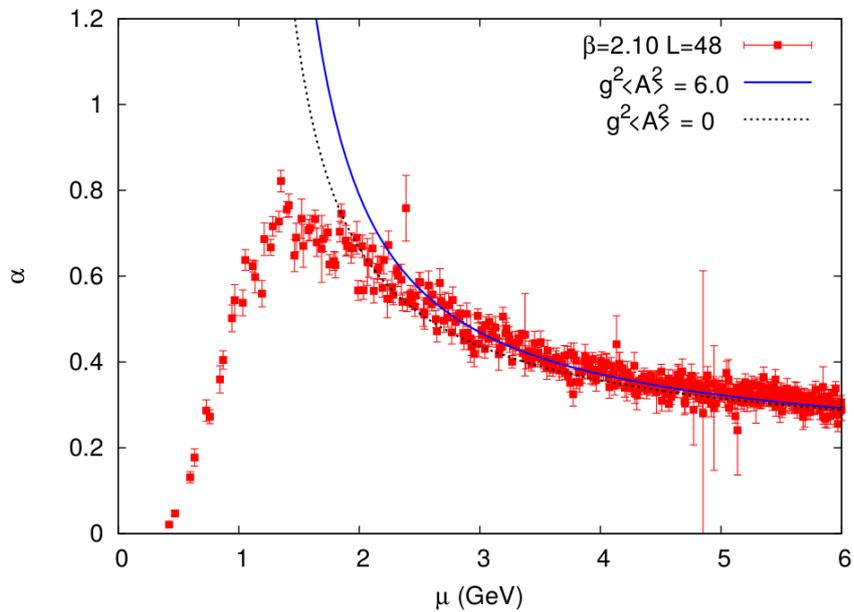


Figura 2.2: En rojo el running de la constante de acoplamiento de tres gluones en función del momento. (Gráfica extraída de [36])

Los resultados del lattice muestran que la constante de acoplamiento no sólo no diverge si no que permanece en valores moderados, en total contradicción con el resultado obtenido con el lagrangiano de Fadeev-Popov. Estos resultados nos permiten imaginar la posibilidad de implementar un desarrollo perturbativo a energías bajas, sobre todo teniendo en cuenta que la constante de acoplamiento que efectivamente aparece en el desarrollo no es  $\alpha_s$  si no  $\frac{N\alpha_s}{4\pi}$ . Para el grupo SU(3) tenemos que los valores más altos alcanzados por la constante de acoplamiento efectiva en ambas figuras son del orden de  $\frac{N\alpha_s}{4\pi} \sim 0,3$ , por lo que el error entre un orden y el siguiente del desarrollo perturbativo sería de aproximadamente un 30% en el peor de los casos. Si bien la situación es significativamente peor que en teorías claramente perturbativas como la Electrodinámica Cuántica, en el que el parámetro de desarrollo es  $\sim \frac{1}{137}$ , está lejos de ser el escenario catastrófico predecido por el lagrangiano de Fadeev-Popov junto a la teoría de perturbaciones usual. Tenemos entonces una de las propiedades que debe satisfacer nuestro modelo: el lagrangiano fijado gauge correcto debe permitir esquemas de renormalización libres de polos de Landau en el infrarrojo.

El segundo resultado del lattice que mostraremos para motivar al modelo de Curci-Ferrari es el comportamiento del propagador del gluón en el infrarrojo. El propagador del gluón,  $D_{\mu\nu}^{ab}$ , se define como la función de correlación entre dos campos gluónicos:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle(q).$$

Utilizando el formalismo funcional es sencillo ver que el propagador a nivel árbol (i.e. al nivel más bajo del desarrollo perturbativo) está dado por

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle_0 = \frac{\delta^{(2)} S_0}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b}, \quad (2.1)$$

dónde  $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle_0$  es el propagador a nivel árbol y  $S_0$  es la acción libre. Si realizáramos el cálculo a nivel árbol utilizando el lagrangiano de Fadeev-Popov en el gauge de Landau obtendríamos la siguiente expresión para  $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle_0$ :

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle_0(q^2) = \frac{\delta^{ab}}{q^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \equiv \frac{\delta^{ab}}{q^2} P_{\mu\nu}^\perp(q), \quad (2.2)$$

donde hemos definido el proyector transversal  $P_{\mu\nu}^\perp(q)$ . En el gauge de Landau la estructura tensorial del propagador del gluón *full* (es decir, al considerar las interacciones) es la misma que la del propagador a nivel árbol, y por eso se define la función de vestidura o *dressing function* del gluón  $D(q^2)$ :

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = D(q^2) \delta^{ab} P_{\mu\nu}^\perp(q). \quad (2.3)$$

Notemos que la función de vestidura del gluón a nivel árbol en el lagrangiano de Fadeev-Popov es  $\frac{1}{q^2}$ , y por lo tanto diverge cuando  $q \rightarrow 0$ .

Veamos ahora cuáles son los resultados del lattice para el propagador del gluón. En la figura 2.3 se muestra el resultado de un cálculo hecho en el lattice para  $D(q^2)$ :

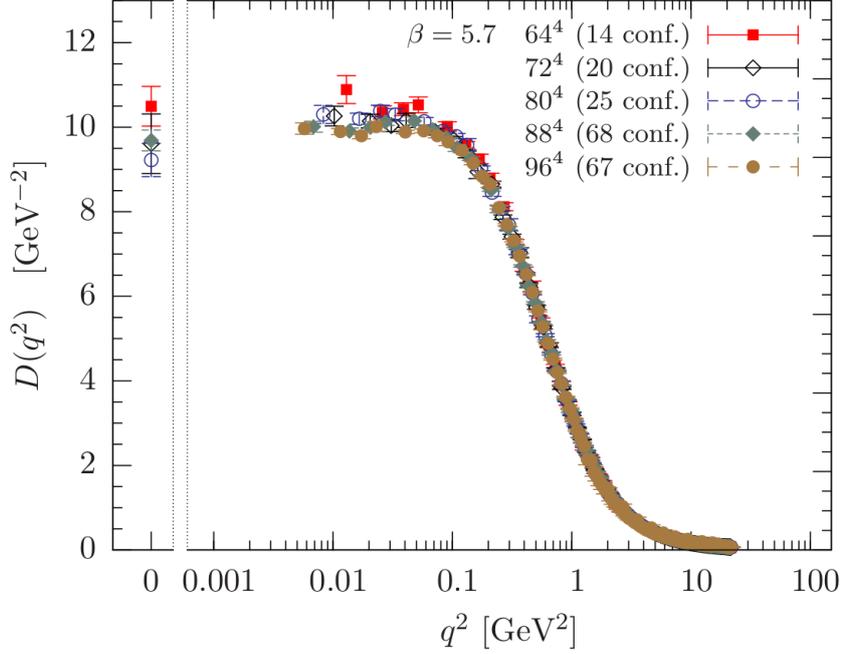


Figura 2.3: Función de vestidura del gluón para redes de diferente volumen e igual distancia entre puntos

Nuevamente los resultados de las simulaciones en el infrarrojo están en conflicto con la predicción del lagrangiano de Fadeev-Popov. El propagador del gluón no diverge en el infrarrojo, si no que satura en un valor finito cuando  $q \rightarrow 0$ . Este fue resultado reportado en numerosos estudios independientes hechos en el lattice [37–40].

La saturación en el infrarrojo es el comportamiento típico de los propagadores de partículas masivas. Si agregáramos un término de masa  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A_\mu^a$  para el gluón al lagrangiano de Fadeev-Popov y repitiéramos el cálculo del propagador a nivel árbol obtendríamos el siguiente resultado:

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle_0(q^2) = \frac{\delta^{ab}}{q^2 + m^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \frac{\delta^{ab}}{q^2 + m^2} P_{\mu\nu}^\perp(q), \quad (2.4)$$

El propagador masivo a nivel árbol no diverge en el infrarrojo, si no que satura en un valor  $\frac{1}{m^2}$ , y mantiene el comportamiento tipo  $\frac{1}{q^2}$  a momentos altos.

La adición de un término de masa para los gluones al lagrangiano de Fadeev-Popov permite reproducir de manera sencilla la saturación del propagador a momento nulo, y como veremos más adelante regulariza la teoría en el infrarrojo eliminando al polo de Landau de la constante de acoplamiento. Por estas razones se propuso modificar al lagrangiano de Fadeev-Popov incluyendo al término de masa:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{FP} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A_\mu^a.$$

Si bien aún no se entiende como generar este término de masa de primeros principios, el mismo ha sido interpretado como una manera efectiva de tomar en cuenta los efectos causados por las copias de Gribov [41] [42].

## 2.2. El lagrangiano de Curci-Ferrari

El lagrangiano obtenido al agregar un término de masa para los gluones en el lagrangiano de Fadeev-Popov es el siguiente:

$$\mathcal{L}_{CF} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) define al lagrangiano de Curci-Ferrari en el gauge de Landau, y es el lagrangiano con el que trabajamos en esta tesis. Es llamado de esta forma porque como se mencionó anteriormente este modelo es un caso particular de una familia de lagrangianos propuestos por Curci y Ferrari [31] en 1976, en los que agregaban términos de masa tanto para los campos de gauge como para los ghosts de las teorías de Yang-Mills.

El modelo de Curci-Ferrari fue propuesto en su momento como una forma alternativa al mecanismo de Higgs para trabajar con bosones vectoriales masivos, pero fue desechado rápidamente porque se encontró que había inconsistencias en el procedimiento para definir el espacio de estados físicos de la teoría. Si bien no entraremos en detalles sobre esta cuestión (para una descripción más detallada ver por ejemplo [15], [43]), el método estándar para definir el espacio de estados físicos de la Cromodinámica Cuántica permite excluir del espacio de Hilbert de estados físicos (es decir los estados asintóticos observables mucho antes o después de las interacciones) a los ghosts y otros estados no físicos generados por el procedimiento de Fadeev-Popov. Este método está basado en la simetría BRST, una simetría presente en el lagrangiano de Fadeev-Popov que tiene la particularidad de ser nilpotente, es decir que la aplicación de dos transformaciones BRST consecutivas produce el estado nulo. Esto implica que el conjunto imagen  $Im(Q_S)$  del operador  $Q_S$  generador de las transformaciones BRST está incluido en el núcleo  $Ker(Q_S)$  del operador. Imponiendo que los elementos de matriz  $\langle \alpha | \beta \rangle$  entre dos estados físicos  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  sean independientes del gauge se llega a la conclusión de que los estados físicos pertenecen a  $Ker(Q_S)$ . Dado que  $Q_S$  es nilpotente, dos estados que difieran por un estado perteneciente a  $Im(Q_S)$  producirán los mismos elementos de matriz y son por lo tanto equivalentes. Esto permite definir el espacio de estados físicos  $\mathcal{V}_{phys}$  como la cohomología de la simetría BRST:

$$\mathcal{V}_{phys} = \frac{Im(Q_S)}{Ker(Q_S)}.$$

Este enfoque permite demostrar que los ghosts y las polarizaciones longitudinales de los gluones no pertenecen al estado físico y también la unitariedad de la teoría.

El problema con el lagrangiano de Curci-Ferrari es que la inclusión de un término de masa para los gluones rompe la simetría BRST, por lo que el procedimiento para definir el espacio de estados físicos usual no es válido. De hecho, I. Ojima demostró [44] que la definición usual del espacio de estados físicos produce estados de norma negativa al ser aplicado al modelo de Curci-Ferrari, rompiendo la unitariedad de la

teoría. Esto llevó a los físicos de la época a descartar el modelo, siendo la pregunta de la unitariedad del modelo de Curci-Ferrari y la correcta definición de su espacio de estados físicos es un problema abierto al día de hoy.

Sin embargo, estudios realizados con enfoques no perturbativos como las ecuaciones de Schwinger-Dyson y también simulaciones hechas en el lattice han observado la aparición de estados de norma negativa asociados al propagador del gluón usando la definición del espacio físico usual [46–52]. La interpretación más usual de este hecho es que la violación de la positividad en el propagador del gluón está relacionada con el confinamiento y la imposibilidad de observar gluones como estados asintóticos. En cualquier caso, estos estudios muestran que la definición usual del espacio físico podría no ser la adecuada aún sin introducir un término de masa para los gluones. Dado entonces que de cualquier manera no sabemos construir el espacio de estados físicos correcto, tiene sentido utilizar el modelo de Curci-Ferrari que al menos permite realizar un estudio más sencillo del régimen infrarrojo de QCD.

Una propiedad muy importante que debe tener una teoría cuántica de campos para ser predictiva es la renormalizabilidad. Una teoría es renormalizable si es posible redefinir la normalización de los campos, las masas y las constantes de acoplamiento de manera de absorber divergencias que aparecen en las integrales que debemos calcular al utilizar la teoría de perturbaciones. Este punto será tratado más en detalle posteriormente cuando introduzcamos el esquema de renormalización utilizado en este trabajo.

En la demostración de la renormalizabilidad de las teorías de gauge no abelianas se utiliza la invariancia BRST de las mismas. Si bien el lagrangiano de Curci-Ferrari no cuenta con esta simetría, es posible definir una simetría BRST modificada (no nilpotente) ante la que es invariante y que es suficiente para probar su renormalizabilidad [45].

## 2.3. Reglas de Feynman

### 2.3.1. Derivación de las reglas de Feynman

Anteriormente discutimos cómo es posible realizar un desarrollo en la constante de acoplamiento para expresar cualquier función de correlación de la teoría completa en términos de funciones de correlación calculadas en la teoría libre. Es posible representar este desarrollo perturbativo de forma diagramática en un método introducido en los años 50 por Richard Feynman. Utilizando este método es posible asociar a cada término del desarrollo perturbativo un *diagrama de Feynman*, simplificando enormemente los cálculos.

Para ver como funciona lo mejor es utilizar un ejemplo. Por simplicidad consideremos la teoría sin quarks, y supongamos que queremos calcular el propagador del gluón a orden  $\mathcal{O}(g^2)$ . Para calcular el propagador del gluón debemos realizar la siguiente integral funcional:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) e^{iS[A_\rho, c, \bar{c}]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{iS[A_\rho, c, \bar{c}]}}. \quad (2.6)$$

Como hicimos anteriormente, separamos el lagrangiano en el lagrangiano libre  $\mathcal{L}_0$  y el lagrangiano de interacción  $\mathcal{L}_{int}$ . Para el modelo de Curci-Ferrari sin quarks estos son:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + ib^a \partial_\mu A_\mu^a, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{1}{4} g^2 (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + g f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c. \quad (2.9)$$

Concentrémonos en el numerador de la ecuación (2.6). Desarrollando la exponencial de la integral funcional a orden  $\mathcal{O}(g^2)$  tenemos:

$$\begin{aligned} num = & \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) e^{iS_0} \left\{ 1 - g \int d^d z \left( \frac{1}{2} f^{def} (\partial_\rho A_\sigma^d(z) \right. \right. \\ & \left. \left. - \partial_\sigma A_\rho^d(z)) A_\rho^e(z) A_\sigma^f(z) + f^{def} \partial_\rho \bar{c}^d(z) A_\rho^e(z) c^f(z) \right) - g^2 \left( \frac{1}{4} \int d^d z (f^{def} A_\rho^e(z) A_\sigma^f(z))^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left[ \int d^d z \frac{1}{2} f^{def} (\partial_\rho A_\sigma^d(z) - \partial_\sigma A_\rho^d(z)) A_\rho^e(z) A_\sigma^f(z) + f^{def} \partial_\rho \bar{c}^d(z) A_\rho^e(z) c^f(z) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \left[ \int d^d w \frac{1}{2} f^{ghi} (\partial_\alpha A_\beta^g(w) - \partial_\beta A_\alpha^g(w)) A_\alpha^h(w) A_\beta^i(w) + f^{ghi} \partial_\alpha \bar{c}^g(w) A_\alpha^h(w) c^i(w) \right] \right) \right\} + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned}$$

El término de orden  $\mathcal{O}(g^0)$  es naturalmente el propagador de la teoría libre a menos de la normalización de la función de correlación. Vemos que los términos de órdenes superiores son también proporcionales a funciones de correlación calculadas en la teoría libre, es decir usando el peso gaussiano  $e^{-S_0}$ , pero involucrando un mayor número de campos. Dado que el valor medio de un número impar de campos es 0 en una distribución gaussiana, las primeras correcciones no triviales al propagador libre aparecen a orden  $\mathcal{O}(g^2)$ . Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} num = & Z_0[0] \left\{ \langle A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} \rangle_0 - \frac{g^2}{4} f^{def} f^{dgh} \int d^d z \langle A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} A_\rho^{e,z} A_\sigma^{f,z} A_\rho^{g,z} A_\sigma^{h,z} \rangle_0 \right. \\ & + \frac{g^2}{8} f^{def} f^{ghi} \int d^d z d^d w \langle A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} (\partial_\rho A_\sigma^{d,z} - \partial_\sigma A_\rho^{d,z}) A_\rho^{e,z} A_\sigma^{f,z} (\partial_\alpha A_\beta^{g,w} - \partial_\beta A_\alpha^{g,w}) A_\alpha^{h,w} A_\beta^{i,w} \rangle_0 \\ & \left. + \frac{g^2}{2} f^{def} f^{ghi} \int d^d z d^d w \langle A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} \partial_\rho \bar{c}^{d,z} A_\rho^{e,z} c^{f,z} \partial_\alpha \bar{c}^{g,w} A_\alpha^{h,w} c^{i,w} \rangle_0 + \mathcal{O}(g^3) \right\}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

donde hemos escrito la dependencia en las coordenadas espacio-tiempo como su-praíndices para hacer la expresión más compacta y  $Z_0[0]$  es la funcional generatriz de la teoría libre evaluada en ausencia de fuentes:

$$Z_0[0] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S_0[A, \bar{c}, c]}.$$

Para calcular funciones de correlación en la teoría gaussiana utilizamos el teorema de Wick ([13–15]), según el cual una función de correlación de  $n$  campos gaussianos puede expresarse como la suma de todas las contracciones dos a dos, es decir que para un campo arbitrario  $\phi$ :

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_0 = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0 \dots \langle \phi(x_{n-1}) \phi(x_n) \rangle_0 + \langle \phi(x_1) \phi(x_3) \rangle_0 \dots \langle \phi(x_{n-1}) \phi(x_n) \rangle_0 + \text{todos los productos posibles de funciones de correlación a dos puntos}$$

Cada término en nuestra expresión para el numerador va a estar dado entonces por productos de funciones de correlación gaussianas entre dos campos, llamadas usualmente contracciones y denotadas de la siguiente manera:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0 \equiv \overline{\phi_1 \phi_2}.$$

Por ejemplo, algunos de los términos que contribuyen a la función de correlación de seis gluones que aparece en el numerador son:

$$\langle A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} A_\rho^{e,z} A_\sigma^{f,z} A_\rho^{g,z} A_\sigma^{h,z} \rangle_0 = \overline{A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} A_\rho^{e,z} A_\sigma^{f,z} A_\rho^{g,z} A_\sigma^{h,z}} + \overline{A_\mu^{a,x} A_\nu^{b,y} A_\rho^{e,z} A_\sigma^{f,z}} \overline{A_\nu^{b,y} A_\rho^{e,z} A_\rho^{g,z} A_\sigma^{h,z}} + \dots \quad (2.11)$$

Es sencillo dar una interpretación diagramática a esta expresión. Cada contracción entre dos campos corresponde a un propagador libre. Si representamos cada coordenada espacio-temporal con un punto y a cada propagador gluónico uniendo dos puntos por una línea rizada podemos asociar a cada término un diagrama:

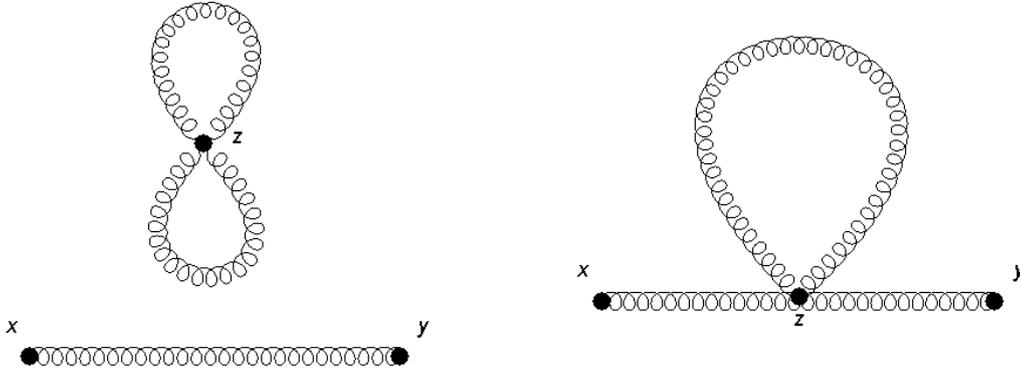


Figura 2.4: Diagramas correspondientes a los términos de la ecuación (2.11).

donde hemos omitido índices de Lorentz y de color para simplificar la imagen.

Hay una diferencia importante entre estos dos diagramas: en el primero de ellos existe un subdiagrama que no está conectado con las patas externas  $x$  e  $y$ . Estos diagramas son llamados *diagramas con fluctuaciones de vacío*, y puede verse [13] que la contribución de los mismos a las funciones de correlación es cancelada exactamente por el denominador  $Z[0]$ . De esta forma, solo los diagramas sin fluctuaciones de vacío contribuyen a las funciones de correlación.

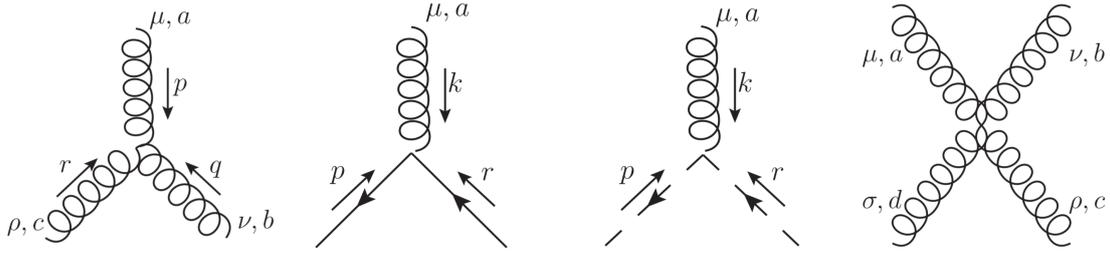


Figura 2.5: Vértices que aparecen en el lagrangiano de interacción: Vértice de tres gluones, quark-antiquark-gluón, ghost-antighost-gluón y cuatro gluones.

Notemos también que el término cuadrático en los gluones del lagrangiano de interacción (que es el que da lugar a la función de correlación de seis gluones en la ecuación (2.10)) aporta un *vértice* donde se encuentran cuatro propagadores y una integral en la coordenada interna  $z$ , además de un factor proporcional a  $g^2$  y las constantes de estructura. Esto sucede cada vez que aparezca un término de  $\mathcal{L}_{int}$  en el desarrollo de la integral funcional. Observando la expresión para  $\mathcal{L}_{int}$  veremos que aparte del vértice de cuatro gluones incluye vértices de tres gluones, quark-antiquark-gluón y ghost-antighost-gluón.

Ya estamos en condiciones de escribir las reglas de Feynman del modelo de Curci-Ferrari, que permiten asociar a los vértices y propagadores de cada diagrama una expresión matemática. Cada diagrama representa a su vez una integral presente en el desarrollo perturbativo.

Es más sencillo trabajar con las reglas de Feynman en el espacio de momentos, en el que la integral en la coordenada interna correspondiente a cada vértice se transforma en una delta de conservación de los momentos del vértice. Una derivación detallada de las reglas de Feynman del modelo puede encontrarse en el apéndice A de [43].

Cada diagrama tiene asociado un factor de simetría que debe ser calculado según las siguientes reglas:

- Hay un signo de menos por cada loop fermiónico.
- Hay un  $(-1)^v/v!$  (donde  $v$  es el número de vértices) que proviene del desarrollo de la exponencial.
- Hay un  $1/3!$  por cada vértice de tres gluones.
- Hay un  $1/4!$  por cada vértice de cuatro gluones.
- Hay un factor extra para los diagramas que tienen diferentes tipos de vértices que provienen de desarrollar  $\mathcal{L}_{int}$ . Tendremos un factor  $v!/(v_1!v_2!v_3!)$  donde  $v_i$  representa el número de vértices de un tipo dado.
- Finalmente debemos agregar el factor combinatorio debido a las distintas contracciones provenientes del teorema de Wick para eliminar dobles conteos.

Propagador  
del fantasma

$$D_0^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2}$$

Propagador  
del gluón

$$D_{0,\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \frac{1}{p^2+m^2} P_{\mu\nu}^\perp(p)$$

Propagador  
del quark

$$D_{0,\psi\bar{\psi}}^{ab} = \delta^{ab} \frac{-i\gamma_\mu p_\mu + M}{p^2+M^2}$$

Vértice  
gluón-fantasma  
-antifantasma

$$\left[ \Gamma_{c\bar{c}A}^{(3),\text{tree-level}} \right]_\mu^{bca} (r, p, k) = -igf^{abc} p_\mu$$

Vértice  
gluón-quark  
-antiquark

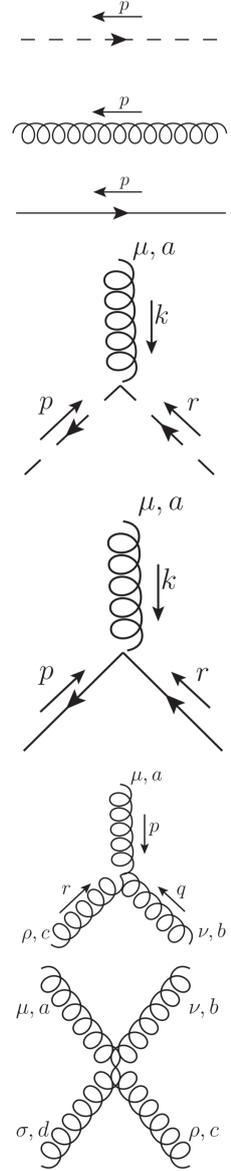
$$\left[ \Gamma_{\psi\bar{\psi}A}^{(3),\text{tree-level}} \right]_\mu^a (r, p, k) = igT^a \gamma_\mu$$

Vértice de  
3 gluones

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma^{(3),\text{tree-level}} \right]_{\mu\nu\rho}^{abc} (p, q, r) &= igf^{abc} [(q-r)_\mu \delta_{\nu\rho} \\ &+ (r-p)_\nu \delta_{\mu\rho} + (p-q)_\rho \delta_{\mu\nu}] \end{aligned}$$

Vértice de  
4 gluones

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma^{(4),\text{tree-level}} \right]_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} &= g^2 [f^{ea}b f^{ecd} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \\ &+ f^{eac} f^{ebd} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \\ &+ f^{ead} f^{ecb} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho})] \end{aligned}$$



Cuadro 2.1: Reglas Feynman del modelo de Curci-Ferrari.

El último paso es integrar sobre los momentos internos y desechar una delta de conservación del momento total, obteniendo la contribución del diagrama a la función de correlación.

Una observación importante es el hecho de que para una función de correlación dada hay una relación uno a uno entre el orden del desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento y el número de momentos internos independientes o *loops* que aparecen en los diagramas. Por esta razón, es usual la terminología *diagramas a n-loops* al referirnos a un orden dado del desarrollo perturbativo. Un diagrama con 0 loops corresponde al orden más bajo posible del desarrollo perturbativo de una función de correlación. Cobra sentido ahora la expresión *nivel árbol* introducida anteriormente para referirnos al nivel más bajo de la teoría de perturbaciones, ya que hace referencia al hecho de que los diagramas sin loops tienen apariencia de árboles.

### 2.3.2. Diagramas 1-PI

Ahora que conocemos la interpretación diagramática de la teoría de perturbaciones podemos hacer más preciso lo que afirmamos cuando dijimos que la funcional  $\Gamma[\Phi]$  es la funcional generatriz de funciones de correlación 1-PI.

Las funciones de correlación 1-PI son aquellas asociadas a diagramas del tipo *1-Particle Irreducible*. Éstos son diagramas a los que no es posible separar en dos cortando sólo una línea interna. Por ejemplo, en las figuras 2.7 y 2.6 se muestran ejemplos de diagramas 1-PI y no 1-PI.

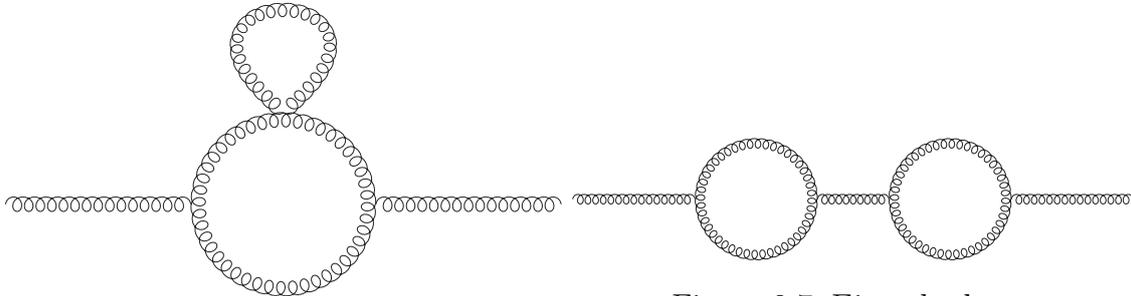


Figura 2.6: Ejemplo de un diagrama 1-PI.

Figura 2.7: Ejemplo de un diagrama que no es 1-PI, sino que se compone de dos 1-PI.

Análogamente a lo que sucede para funciones de correlación conexas, una función de correlación 1-PI de  $n$  campos puede ser calculada como la suma de todos los diagramas 1-PI con  $n$  patas externas.

Dijimos también al definir la funcional  $\Gamma[\Phi]$  que cualquier función de correlación conexas puede ser escrita en términos de funciones 1-PI. Veamos cómo funciona para el propagador del gluón.

Algunos de los primeros términos de la función de correlación 1-PI a dos puntos del gluón (denotada  $\Gamma_{AA}^{(2)}$ ) se muestran en la figura 2.8.

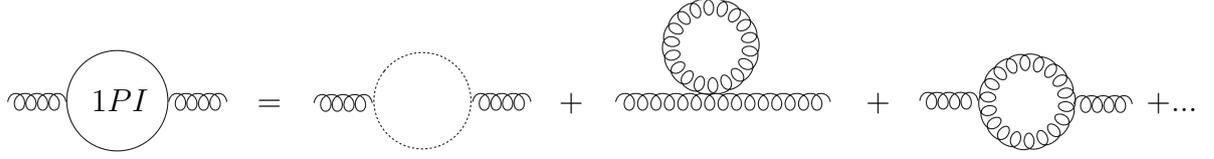


Figura 2.8: Algunos diagramas que contribuyen a la función de correlación 1-PI de dos gluones

Es sencillo ver que cualquier término de orden más alto en el desarrollo del propagador del gluón va a estar dado por diagramas 1-PI unidos por propagadores libres. Podemos entonces escribir el propagador completo en términos de diagramas 1-PI como se muestra en la figura 2.9.

$$\begin{aligned}
 \text{Propagador completo} &= \text{Propagador libre} + \text{Diagrama 1-PI} + \dots \\
 &= \text{Propagador libre} \left( 1 + \text{Diagrama 1-PI} + \text{Diagrama 1-PI} \text{ Diagrama 1-PI} + \dots \right) \\
 &= \text{Propagador libre} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \text{Diagrama 1-PI}^n \right) \\
 &= \text{Propagador libre} \left( 1 - \text{Diagrama 1-PI} \right)^{-1} \\
 &= \left( \text{Propagador libre} - \text{Diagrama 1-PI} \right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma_{AA}^{(2)}}
 \end{aligned}$$

Figura 2.9: Propagador del gluón en términos de diagramas 1-PI.

Vemos entonces que el propagador del gluón es el inverso de  $\Gamma_{AA}^{(2)}$ . La derivación que hicimos no depende del tipo de campo, por lo que esto también es cierto para los propagadores del ghost y del quark, definiéndose también  $\Gamma_{cc}^{(2)}$  y  $\Gamma_{\psi\psi}^{(2)}$ .

El caso de las funciones de correlación entre más de dos campos es más sencillo. Una función de correlación conexa cualquiera puede siempre escribirse en términos de diagramas nivel árbol en los que los propagadores son los propagadores completos  $\frac{1}{\Gamma^{(2)}}$  y los vértices son funciones de correlación 1-PI. Por ésta razón a las funciones de correlación 1-PI se les llama también vértices propios o sencillamente vértices.

Para el caso de una función de correlación a tres puntos, tenemos entonces:

$$G^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = -D(p_1)D(p_2)D(p_3)\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3),$$

donde los  $D(p_i)$  son los propagadores full de los campos correspondientes, y el signo negativo es puesto por convención.

## 2.4. Regularización y Renormalización

Cuando uno desea utilizar los métodos descritos anteriormente para realizar cálculos más allá del nivel árbol, rápidamente se encuentra con integrales divergentes. Más concretamente, al integrar sobre los momentos internos típicamente nos encontramos con integrales de la forma

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((q+p)^2 + x)((q+k)^2 + y)},$$

donde  $p$ ,  $k$ ,  $x$  e  $y$  son en principio constantes arbitrarias, pero que en la práctica corresponden a los momentos entrantes al loop y a las masas de los propagadores dentro del mismo respectivamente. Esta integral diverge logarítmicamente cuando  $q \rightarrow \infty$  en cuatro dimensiones, y esa es la razón por la que este tipo de divergencias se las conoce como *divergencias ultravioletas*. Las divergencias ultravioletas plagan las teorías cuánticas de campos, y fueron la causa de que inicialmente muchos físicos desacreditaran a este tipo de teorías.

El origen de estas divergencias puede encontrarse en el hecho de que estamos integrando sobre todas las escalas de energía, y por lo tanto asumiendo que nuestra teoría es válida en todo ese rango. Sin embargo, sabemos que nuestra descripción de la física debe fallar a alguna escala de energía, cuando menos a la escala de Planck en la que los efectos cuánticos de la gravedad se vuelven relevantes. Es necesario entonces encontrar una forma de lidiar sistemáticamente con estas divergencias.

El primer paso consiste en regularizar las integrales. Para esto existen varios métodos, de los cuales el más sencillo probablemente sea la inclusión de un cut-off ultravioleta usualmente llamado  $\Lambda$  como límite superior de las integrales. Este cut-off corresponde a la escala de energía a la que la teoría pierde validez y surge de forma natural en el contexto de la formulación de teoría de campos de la mecánica estadística, en la que la escala  $\Lambda$  es el inverso del paso de la red cristalina.

Utilizando el método del cut-off ultravioleta obtendríamos resultados dependientes de  $\Lambda$ :

$$\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_\Lambda(\Lambda) = \int_{q < \Lambda} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((q+p)^2 + x)((q+k)^2 + y)},$$

y podemos recuperar el problema original tomando el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

El paso siguiente es redefinir los campos, las masas y la constante de acoplamiento para absorber la dependencia en  $\Lambda$  en un proceso llamado *renormalización*. La constante de acoplamiento, los campos y las masas que aparecen en el lagrangiano original se llaman cantidades *bare* o desnudas, y las cantidades redefinidas se conocen como *renormalizadas*. La constante de proporcionalidad entre una cantidad bare y su cantidad renormalizada correspondiente se denomina *factor de renormalización* y se denota con una  $Z$ . Definimos entonces:

$$\begin{aligned} A_{0\mu}^a &= \sqrt{Z_A} A_{\mu}^a, & \psi_0 &= \sqrt{Z_\psi} \psi, & \bar{c}_0^a &= \sqrt{Z_c} \bar{c}^a, \\ g_0 &= Z_g g, & m_0^2 &= Z_{m^2} m^2, & M_0^2 &= Z_{M^2} M^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde el subíndice "0" identifica a las cantidades bare. Los factores de renormalización son utilizados para absorber la dependencia en  $\Lambda$  de las integrales, y por lo tanto divergen al tomar el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

En este ejemplo utilizamos el método del cut-off porque es el más claro a la hora de comprender los conceptos de regularización y renormalización. Sin embargo este método tiene serias desventajas, ya que la introducción de la escala  $\Lambda$  rompe tanto la invariancia gauge como la invariancia ante transformaciones de Lorentz de la teoría. Por ese motivo en este trabajo utilizamos el método de regularización dimensional que no presenta estas dificultades.

El método consiste en calcular las integrales analíticamente para dimensión arbitraria  $d$ , bajo la hipótesis de que el resultado de las mismas se comporta de forma continua al variar la dimensión del espacio-tiempo y basados en la observación de que las integrales con divergencias UV logarítmicas en cuatro dimensiones son regulares en  $d < 4$ . Esto supone reemplazar la integral 4-dimensional en el espacio de momentos por una integral en  $d$  dimensiones:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}.$$

Las integrales son calculadas analíticamente como función de  $d$  y se realiza un desarrollo en el parámetro  $\epsilon$  definido por

$$d = 4 - 2\epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

En este contexto las divergencias aparecen como términos proporcionales a  $\frac{1}{\epsilon}$  en los resultados de las integrales, y los factores de renormalización se definen para absorber estos términos. Suele separarse a los factores de renormalización en su parte divergente y su parte finita:

$$Z = \frac{Z_{div}}{\epsilon} + Z_{finito}.$$

Independientemente del método de regularización utilizado, es necesario elegir un *esquema de renormalización* para definir a los factores de renormalización. Esto implica imponer el valor a determinada escala de momento  $\mu$  a un conjunto de funciones de correlación renormalizadas de forma de poder obtener los factores de renormalización a través de las definiciones (2.12). La escala  $\mu$  introducida en este proceso es conocida como *escala de renormalización*.

Es posible definir diferentes esquemas de renormalización que absorban la parte divergente de las cantidades bare en los factores de renormalización, pero que dan resultados diferentes para la parte finita de los mismos.

Veamos un ejemplo: El propagador bare del ghost es de la forma

$$D_0^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{J_0(p)}{p^2},$$

donde hemos definido la función de vestidura bare del ghost  $J_0(p)$ . El propagador bare se vincula con el propagador renormalizado a través de

$$D_0^{ab}(p) = Z_c D^{ab}(p),$$

lo que implica

$$J_0(p) = Z_c J(p).$$

En el esquema que utilizaremos y definiremos más adelante, una de las condiciones que impondremos será que el propagador del ghost renormalizado tenga la forma del propagador a nivel árbol a la escala de renormalización  $\mu$ . De esta forma tenemos

$$D^{ab}(\mu) = \delta^{ab} \frac{1}{\mu^2} \quad \Longrightarrow \quad J(p = \mu) = 1.$$

Esta ecuación nos permite encontrar el factor de renormalización  $Z_c$  en términos del propagador bare a escala  $\mu$ :

$$Z_c = J_0(\mu).$$

Vimos explícitamente en este ejemplo que los factores de renormalización dependen tanto del esquema de renormalización elegido como de la escala de renormalización  $\mu$ .

## 2.5. Grupo de Renormalización

Ahora que definimos las cantidades renormalizadas podemos hacer más precisa la observación que hicimos en la introducción cuando dijimos que la constante de acoplamiento varía con la escala de energía. Las constantes bare del lagrangiano son fijas, pero en el proceso de renormalización introdujimos la escala  $\mu$  al definir los factores de renormalización, y por lo tanto las cantidades renormalizadas son dependientes de la misma.

La dependencia de las cantidades bare respecto a la escala de renormalización  $\mu$  puede expresarse en términos de las *funciones*  $\beta$  y las *dimensiones anómalas*  $\gamma$  definidas por:

$$\begin{aligned} \beta_g(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{dg}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}, \\ \beta_{m^2}(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{dm^2}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}, \\ \beta_{M_i^2}(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{dM_i^2}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}, \\ \gamma_A(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{d \log Z_A}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}, \\ \gamma_\psi(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{d \log Z_\psi}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}, \\ \gamma_c(g, m^2, \{M_i^2\}) &= \mu \frac{d \log Z_c}{d\mu} \Big|_{g_0, m_0^2, M_{i0}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

A priori la escala de renormalización  $\mu$  es una escala arbitraria que no tiene necesariamente relación con la escala de energía típica de los procesos físicos a estudiar.

Sin embargo, al realizar cálculos perturbativos con nuestra teoría renormalizada surgen términos de la forma  $\log(\frac{p}{\mu})$ , donde  $p$  es el momento de la función de correlación considerada. Si la escala de renormalización  $\mu$  está muy lejos de  $p$  las contribuciones de estos términos se vuelven muy grandes aún estando multiplicados por la constante de acoplamiento, complicando el análisis perturbativo, y por lo tanto es necesario elegir  $\mu$  cercana a  $p$ . Sin embargo, usualmente deseamos estudiar un proceso en un rango amplio de momentos, y la elección de una escala  $\mu$  fija imposibilita los cálculos.

Este problema fue el que llevó a Gell-Mann y Low [53] a proponer utilizar una escala de renormalización  $\mu$  variable de manera de que siempre sea cercana a la escala de momento  $p$  en consideración, controlando el problema de los grandes logaritmos. Una introducción pedagógica al tema puede encontrarse en [54].

Para implementar esta idea obtuvieron una ecuación conocida como la ecuación del grupo de renormalización de Gell-Mann-Low que vincula el valor de una función de correlación renormalizada a una escala fija  $\mu_0$  con el de la misma función de correlación renormalizada a otra escala  $\mu$ .

La derivación de la misma consiste en notar que las funciones de correlación bare  $G_0$  no dependen de la escala de renormalización  $\mu$ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} G_0(p, g_0, m_0, \{M_i\}_0) = 0.$$

Sin embargo, la función de Green bare expresada en términos de la función de Green renormalizada depende de  $\mu$  explícita e implícitamente a través de la constante de acoplamiento, las masas y los campos renormalizados. Para una función de correlación involucrando  $n_A$  gluones externos,  $n_c$  ghosts externos y  $n_\psi$  quarks externos tenemos:

$$G_0(p, g_0, m_0, \{M_i\}_0) = Z_A^{\frac{1}{2}n_A} Z_c^{\frac{1}{2}n_c} Z_\psi^{\frac{1}{2}n_\psi} G(p, \mu g(\mu), m(\mu), \{M_i(\mu)\}). \quad (2.14)$$

Sustituyendo en la derivada de  $G_0$  y utilizando las definiciones de las funciones  $\beta$  y  $\gamma$  obtenemos la ecuación del grupo de renormalización para  $G$ :

$$\left( \mu \partial_\mu + \frac{1}{2}(n_A \gamma_A + n_c \gamma_c + n_\psi) + \beta_g \partial_g + \beta_{m^2} \partial_{m^2} + \sum_i^{N_f} \beta_{M_i^2} \partial_{M_i^2} \right) G(p, \mu, g, m, \{M_i\}) = 0,$$

En la práctica, en este trabajo trabajaremos con los vértices propios  $\Gamma^{(n)}$ . Para los vértices propios la ecuación del grupo de renormalización es

$$\left( \mu \partial_\mu - \frac{1}{2}(n_A \gamma_A + n_c \gamma_c + n_\psi) + \beta_g \partial_g + \beta_{m^2} \partial_{m^2} + \sum_i^{N_f} \beta_{M_i^2} \partial_{M_i^2} \right) \Gamma(p, \mu, g, m, \{M_i\}) = 0. \quad (2.15)$$

Puede demostrarse [15] que las soluciones a la ecuación (2.15) cumplen con la siguiente propiedad de scaling:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n_A, n_c, n_\psi)}(\{p_i\}, \mu, g(\mu), m(\mu), \{M_i\}(\mu)) &= z_A(\mu)^{n_A/2} z_c(\mu)^{n_c/2} z_\psi(\mu)^{n_\psi/2} \\ &\times \Gamma^{(n_A, n_c, n_\psi)}(\{p_i\}, \mu_0, g(\mu_0), m(\mu_0), \{M_i\}(\mu_0)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde el vértice propio del lado izquierdo está renormalizado a escala  $\mu$  y el de la derecha a escala  $\mu_0$ , las funciones  $g(\mu)$ ,  $m(\mu)$  y  $\{M\}_i(\mu)$  son obtenidas integrando las funciones  $\beta$  y las funciones  $z_A$ ,  $z_c$  y  $z_\psi$  están definidas por

$$\begin{aligned}\log z_A(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_A(g(\mu'), m(\mu'), \{M_i\}(\mu')), \\ \log z_c(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_c(g(\mu'), m(\mu'), \{M_i\}(\mu')), \\ \log z_\psi(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_\psi(g(\mu'), m(\mu'), \{M_i\}(\mu')).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Hemos obtenido entonces una forma de vincular una función de correlación o vértice propio renormalizado a una escala arbitraria  $\mu_0$  con el mismo vértice renormalizado a escala  $\mu$ . Usaremos este resultado para renormalizar todas nuestras cantidades a una escala  $\mu_0 = 1$  GeV y evitar el problema de los grandes logaritmos vinculando las funciones de correlación renormalizadas a esa escala con las mismas renormalizadas a escala  $\mu = p$ .

## 2.6. Resultados previos obtenidos con el modelo de Curci-Ferrari

En esta última sección del capítulo presentaremos algunos resultados obtenidos anteriormente utilizando el modelo de Curci-Ferrari para demostrar el éxito que ha tenido a la hora de expolar el régimen infrarrojo de QCD.

En la figura 2.10 se muestra el cálculo hecho con el modelo de Curci-Ferrari para el propagador del gluón, la función de vestidura del gluón y la función de vestidura del ghost, y la comparación de estas cantidades con resultados del lattice. Dichas cantidades fueron calculadas a 1-loop en [55], donde también se calculó el propagador del quark. Posteriormente el cálculo para los propagadores del ghost y gluón fue extendido a 2-loops en [56]. El esquema de renormalización utilizado fue el esquema *Infrared Safe* que definiremos posteriormente y es el mismo que utilizamos en esta tesis.

Es evidente que la concordancia entre los cálculos hechos con el modelo de Curci-Ferrari y las simulaciones del lattice es excelente. No sólo esto, si no que a pesar de que los cálculos a 1-loop ya muestran una alta concordancia con los resultados del lattice, esta aumenta significativamente al extender el cálculo a 2-loops. El hecho de que la precisión de los cálculos aumente al incluir las contribuciones a 2-loops respalda la idea de que es posible estudiar el régimen infrarrojo de QCD perturbativamente.

Además del cálculo de los propagadores, el modelo de Curci-Ferrari ha sido utilizado para el cálculo a 1-loop del vértice quark-antiquark-gluón [57] y de los vértices ghost-antighost-gluón y tres gluones sin considerar la dinámica de los quarks [58]. También se ha explorado la posibilidad de definir constantes de acoplamiento renormalizadas diferentes para el vértice de tres gluones y el vértice ghost-antighost-gluón y el efecto que esto tiene en el cálculo de los propagadores [59].

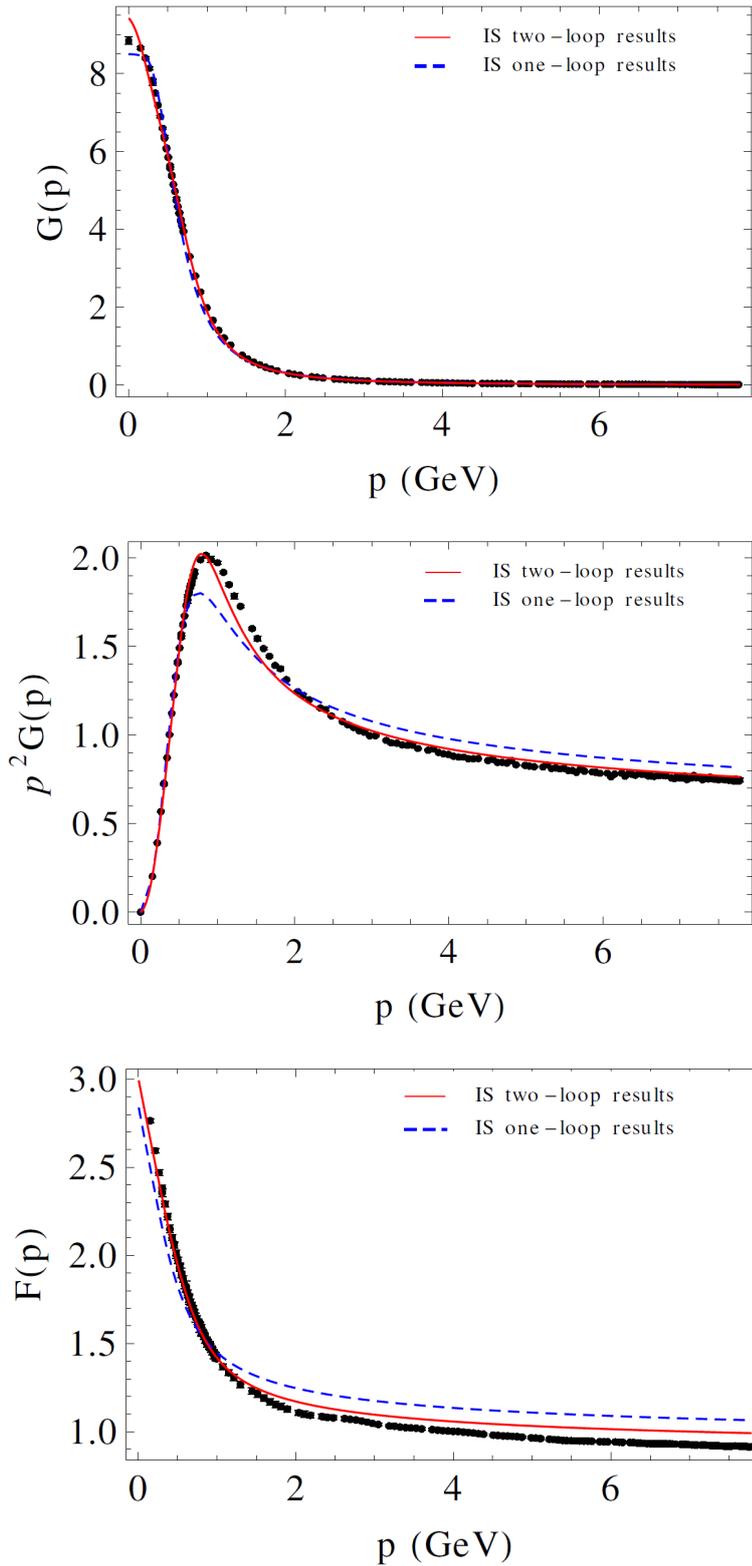


Figura 2.10: Comparación con resultados del lattice de [60] para el propagador del gluón (arriba), la función de vestidura del gluón (medio) y la función de vestidura del ghost (abajo). Figuras extraídas de [56]

# Capítulo 3

## El vértice de tres gluones

En el capítulo anterior introdujimos el modelo de Curci-Ferrari y mencionamos sus propiedades más importantes. Recordamos que el lagrangiano de Curci-Ferrari en el gauge de Landau está dado por

$$\mathcal{L}_{CF} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i + ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a,$$

con las derivadas covariantes  $D_\mu$  y el tensor  $F_{\mu\nu}$  definidos por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ (D_\mu c)^a &= \partial_\mu c^a + gf^{abc} A_\mu^b c^c, \\ D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - ig A_\mu^a T^a \psi, \end{aligned}$$

Discutimos los argumentos fenomenológicos para utilizar el modelo de Curci-Ferrari, mencionamos algunos cálculos realizados anteriormente con el mismo y mostramos los resultados obtenidos para los propagadores a 1 y 2-loops y su comparación con el lattice.

En este capítulo presentaremos el objeto que es el tema central de esta tesis: El vértice de tres gluones. El vértice de tres gluones es muy importante para la QCD, ya que es el responsable fundamental de la naturaleza no abeliana de la teoría [8], [9], [12], [64].

El vértice de tres gluones es un objeto mucho más complicado de tratar que los propagadores y una de las funciones de correlación más difíciles de calcular. Esto se debe a que depende de dos momentos independientes, es decir de tres escalares, mientras que el propagador sólo depende de uno. Posee además una estructura tensorial compleja, y para estudiarlo es necesario calcular varias funciones escalares asociadas a cada uno de los tensores que lo constituyen.

Las correcciones perturbativas al vértice de tres gluones son importantes para el cálculo de procesos ocurridos en los colisionadores de hadrones como la producción de multijets [65], y en el régimen ultravioleta ha sido estudiado perturbativamente con la QCD estándar llegando hasta 2-loops en configuraciones de momento particulares, para gluones on-shell o en el límite quirral [66], [67], [68].

La región infrarroja está menos explorada, y diferentes enfoques han sido utilizados para su estudio, principalmente a través del formalismo de las ecuaciones de Schwinger-Dyson [23], [62], [63].

Fue también calculado por Peláez, Tissier y Wschebor utilizando el modelo de Curci-Ferrari a 1-loop en [58], pero en ese trabajo se utilizó la aproximación quenched, es decir sin considerar la contribución de los quarks al vértice, ya que en ese momento no existían simulaciones numéricas unquenched con las cuales comparar.

Por otro lado, las simulaciones numéricas para el vértice de tres gluones en el infrarrojo son muy ruidosas, y sólo recientemente se han realizado trabajos en el lattice con barras de error relativamente pequeñas en esa región para el caso con quarks dinámicos.

Por estas razones, en esta tesis agregaremos la contribución dinámica de los quarks al vértice de tres gluones extendiendo el cálculo de [58], y compararemos con datos del lattice unquenched más precisos.

Dado que para calcular el vértice de tres gluones no es necesario ajustar ningún nuevo parámetro respecto a los que ya se tenían para el cálculo de los propagadores, los resultados obtenidos son una predicción pura del modelo de Curci-Ferrari y por lo tanto una buena forma de continuar validando el modelo.

En este capítulo presentaremos al vértice de tres gluones y los diagramas de Feynman que contribuyen al mismo así como su estructura tensorial. También introduciremos las *integrales maestras*, herramienta que utilizaremos para realizar nuestros cálculos.

### 3.1. Diagramas de Feynman del vértice de tres gluones a 1-loop

En esta sección presentamos los diagramas que contribuyen a la corrección a 1-loop del vértice de tres gluones. Los cuatro diagramas diferentes que aparecen en el cálculo se muestran en la figura 3.1.

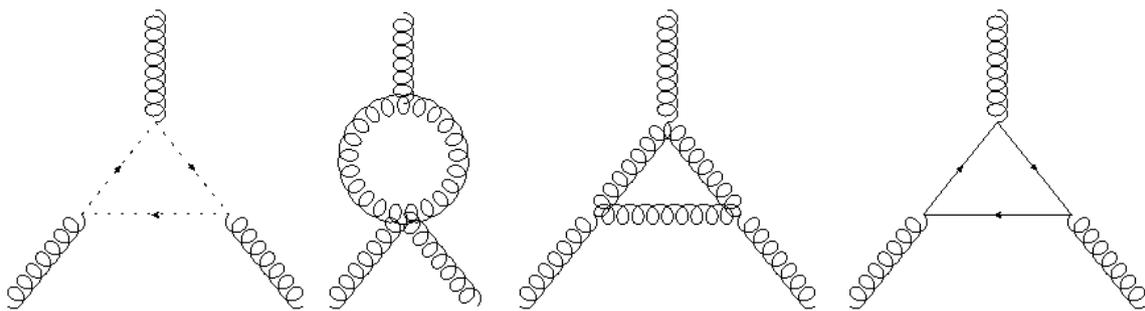


Figura 3.1: Diagramas que contribuyen a la corrección a 1-loop del vértice de tres gluones

Los primeros tres diagramas fueron los calculados utilizando el modelo de Curci-Ferrari en [58] ya que pertenecen al sector de Yang-Mills de la teoría. El primero corresponde a un loop de ghosts, y representa en realidad dos diagramas inequivalentes: uno con el loop corriendo en sentido horario y otro en sentido antihorario.

El segundo es un loop de gluones involucrando vértices de tres y cuatro gluones. Representa tres diagramas diferentes correspondientes a cambiar el gluon externo del vértice de tres gluones. El tercero contiene un loop de gluones involucrando tres vértices de tres gluones, y es el diagrama más difícil de calcular a causa de la compleja estructura tensorial del vértice de tres gluones sumada a la presencia de tres propagadores gluónicos. Las expresiones para estos diagramas en términos de integrales de Feynman en el modelo de Curci-Ferrari puede obtenerse sencillamente utilizando las reglas de Feynman presentadas en el capítulo anterior, y están presentadas en [43]. Vale la pena destacar que la presencia del término de masa para el gluón regulariza las integrales que aparecen en el segundo y tercer diagrama eliminando su divergencia infrarroja. El único diagrama divergente cuando el momento interno va a cero es el correspondiente al loop de ghosts.

El cuarto diagrama representa la contribución del sector de los quarks al cálculo a 1-loop del vértice de tres gluones. Si bien en esta tesis se realizaron los cálculos para todos los diagramas involucrados en el vértice de tres gluones, es éste último el que representa una novedad frente a los trabajos anteriores y por lo tanto lo trataremos en más detalle y lo denotaremos  $D4_{AAA}$  para ser consistentes con la notación de [43]

Al igual que para el diagrama con un loop de ghosts, la contribución del loop de quarks corresponde a dos diagramas: uno con el loop en sentido antihorario que denotaremos  $D4_{AAA}^{[1]}$  y otro con el loop en sentido horario al que denotaremos  $D4_{AAA}^{[2]}$ . En la figura 3.2 se muestra la descripción de ambas contribuciones en detalle.

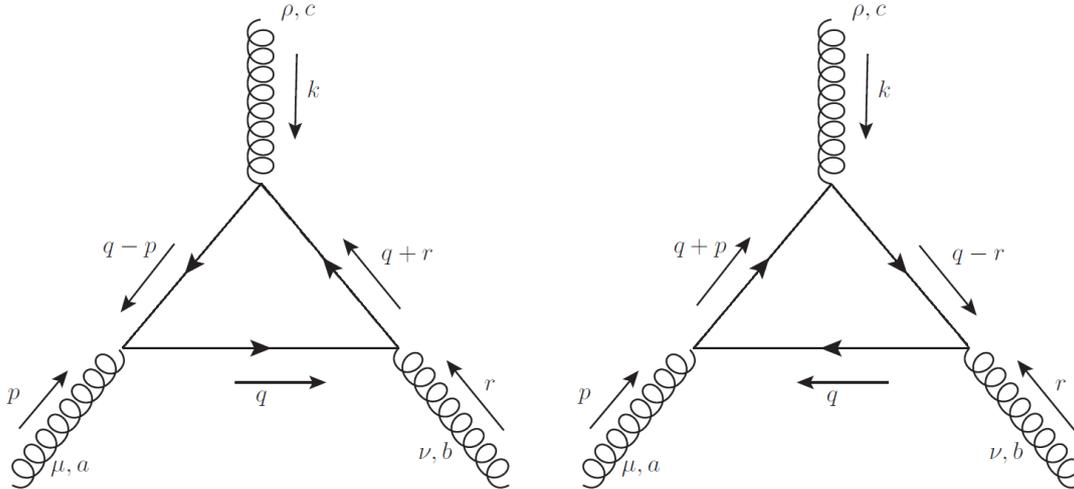


Figura 3.2: Descripción del diagrama con tres vértices quark-gluón. Denotamos  $D4_{AAA}^{[1]}$  al de la izquierda y  $D4_{AAA}^{[2]}$  al de la derecha.

Utilizaremos las reglas de Feynman para obtener expresiones analíticas para  $D4_{AAA}^{[1]}$  y  $D4_{AAA}^{[2]}$ . Considerando el factor  $-1$  del loop de fermiones, el factor  $-1/3!$  del desarrollo de la exponencial y el factor combinatorio proveniente del teorema de Wick vemos que el factor global de simetría del diagrama es 1. Notando que en un loop cerrado debemos tomar trazas tanto sobre las matrices de Dirac como sobre los generadores en la representación fundamental que intervienen en el loop, llegamos a las siguientes expresiones para  $D4_{AAA}^{[1]}$  y  $D4_{AAA}^{[2]}$ :

$$D4_{AAA}^{[1]} = -ig^3 \text{Tr}(T^a T^c T^b) \text{Tr} \left( \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{-i(\not{q} - \not{p}) + M}{(q-p)^2 + M^2} \gamma_\rho \frac{-i(\not{q} + \not{r}) + M}{(q+r)^2 + M^2} \gamma_\nu \frac{-i\not{q} + M}{q^2 + M^2} \right),$$

$$D4_{AAA}^{[2]} = -ig^3 \text{Tr}(T^a T^b T^c) \text{Tr} \left( \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{-i\not{q} + M}{q^2 + M^2} \gamma_\nu \frac{-i(\not{q} - \not{r}) + M}{(q-r)^2 + M^2} \gamma_\rho \frac{-i(\not{q} + \not{p}) + M}{(q+p)^2 + M^2} \right),$$

donde hemos usado la notación habitual  $\not{p} = \gamma_\mu p_\mu$

Es interesante mencionar el hecho de que estos diagramas son, a menos de las trazas sobre las  $T^a$ , idénticos a los diagramas que aparecen en QED al calcular la función de correlación de tres fotones a 1-loop. En QED existe un teorema conocido como el Teorema de Furry [15] que afirma que la contribución de este diagrama a la función de correlación de tres fotones es nula. Más generalmente, cualquier diagrama formado por un polígono cerrado de líneas fermiónicas conectado a un número impar de fotones no contribuye a las funciones de correlación. Ignorando los términos de color esto puede verse fácilmente realizando el cambio de variable  $q \rightarrow -q$  en el segundo diagrama, notando que para una matriz  $\mathcal{A}$  cualquiera  $\text{Tr}(\mathcal{A}) = \text{Tr}(\mathcal{A}^T)$  y utilizando el operador conjugación de carga  $\mathcal{C}$  definido por

$$\mathcal{C} \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu^T.$$

De esta forma uno encuentra que las contribuciones de los diagramas correspondientes a  $D4_{AAA}^{[1]}$  y  $D4_{AAA}^{[2]}$  en QED se cancelan. Este hecho es consecuencia de que la corriente electromagnética de QED cambia de signo ante la acción del operador  $\mathcal{C}$ , y dado que la teoría es invariante ante la conjugación de carga todas las funciones de correlación con un número impar de patas externas de fotones deben ser nulas.

Lo que salva la contribución de este tipo de diagramas en QCD son las trazas sobre los generadores  $T^a$ . Utilizando la definición de las constantes de estructura  $f^{abc}$  del grupo  $\text{SU}(N)$  es posible demostrar la siguiente identidad:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{iN}{2} f^{abc}.$$

El diagrama  $D4_{AAA}^{[1]}$  es proporcional a  $\text{Tr}(T^a T^c T^b)$  y  $D4_{AAA}^{[2]}$  a  $\text{Tr}(T^a T^b T^c)$ , y por lo tanto la identidad anterior aporta un signo negativo extra. De esta manera ambas contribuciones se suman, y la contribución total del loop de quarks está dada por

$$D4_{AAA} = Ng^3 f^{abc} \text{Tr} \left( \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{-i\not{q} + M}{q^2 + M^2} \gamma_\nu \frac{-i(\not{q} - \not{r}) + M}{(q-r)^2 + M^2} \gamma_\rho \frac{-i(\not{q} + \not{p}) + M}{(q+p)^2 + M^2} \right). \quad (3.1)$$

Hemos dejado expresado el diagrama en términos de las matrices  $\gamma_\mu$ , pero para hacer cálculos es necesario evaluar la traza sobre las matrices  $\gamma_\mu$  de forma que su estructura tensorial quede escrita en términos de los momentos  $p_\mu$  y la métrica  $\delta_{\mu\nu}$ . Ésto es posible utilizando la definición de las matrices  $\gamma_\mu$  en el espacio euclídeo:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Si bien no hay mayores complicaciones a la hora de realizar este cálculo, el diagrama expresado de esta forma presenta muchos términos sin ser particularmente iluminador, y por lo tanto no lo presentamos aquí.

El análisis anterior demuestra que si bien la estructura del diagrama es igual a la presente en QED, el hecho de que su contribución sea no nula es un efecto de la naturaleza no abeliana de la QCD.

Obtuvimos expresiones análogas a la ecuación (3.1) para los diferentes diagramas que contribuyen al vértice. Estas expresiones son el input para nuestro algoritmo de Mathematica que las calcula y expresa el resultado en términos de un conjunto de integrales llamadas *Integrales Maestras* que introduciremos al final del capítulo. Sin embargo, antes discutiremos la estructura tensorial del vértice.

## 3.2. Estructura tensorial del vértice de tres gluones

Como dijimos anteriormente, una de las características del vértice de tres gluones que lo vuelve complejo de calcular es su rica estructura tensorial. En esta sección estudiaremos los diferentes tensores que lo componen e introduciremos la descomposición tensorial propuesta por J. S. Ball y T. W. Chiu [69] que permite explotar las simetrías del vértice de forma más eficiente.

Antes de eso definiremos algunas convenciones respecto a la notación. Recordemos en primer lugar que el vértice de tres gluones es la función de correlación 1-PI de tres gluones, y podemos obtenerla derivando la funcional generatriz de funciones 1-PI:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, k, r) = \frac{\delta^{(3)}\Gamma}{\delta A_\mu^a(p)\delta A_\nu^k(r)\delta A_\rho^c(z)}.$$

Se relaciona con la función de Green de tres gluones a través de

$$\langle A_\mu^a(p)A_\nu^b(k)A_\rho^c(r) \rangle = -D_{\mu\mu'}^{aa'}(p)D_{\nu\nu'}^{bb'}(k)D_{\rho\rho'}^{cc'}\Gamma_{\mu'\nu'\rho'}^{a'b'c'}(p, k, r),$$

donde  $D_{\mu\nu}^{ab}(q)$  es el propagador full del gluón

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = D(q^2)\delta^{ab}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) = D(q^2)\delta^{ab}P_{\mu\nu}^\perp(q),$$

$P_{\mu\nu}^\perp(q)$  es el proyector transversal y  $D(q^2)$  es la función de vestidura del gluón.

En el cálculo que hicimos para la corrección al vértice dada por el loop de quarks, vimos que la dependencia en el color se factorizaba en una constante de estructura  $f^{abc}$  multiplicando a la integral. Ésto sucede de manera general, y Smolyakov demostró que en el gauge de Landau la estructura de color del vértice de tres gluones está dada por la constante de estructura  $f^{abc}$  a todo orden de la teoría de perturbaciones [70]. Utilizaremos además la convención usual de extraer un factor  $(-ig)$  de la definición del vértice, definiendo la la función  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  de la siguiente manera:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, k, r) = -igf^{abc}\Gamma_{\mu\nu\rho}(p, k, r). \quad (3.2)$$

La función  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  es la cantidad que utilizamos en nuestros cálculos, y con frecuencia nos referiremos a ella como el vértice de tres gluones a pesar de que formalmente el vértice es  $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, k, r)$ .

Finalmente, los momentos de los gluones externos serán siempre considerados entrantes al vértice, de manera que se cumple  $p + k + r = 0$ .

Habiendo definido las convenciones a utilizar pasamos ahora a describir la estructura tensorial del vértice de tres gluones. La misma no es difícil de deducir: Dado que los tres gluones son vectores ante transformaciones del grupo de Lorentz, el vértice debe tener un índice de Lorentz por cada uno de ellos. Debe además depender únicamente de dos momentos entrantes a causa de la conservación del momento en el vértice.

Como consecuencia de este hecho sólo podemos tener dos clases de estructuras tensoriales presentes en el vértice: Términos formados por tres momentos (de la forma  $p_\mu p_\nu p_\rho$ ,  $p_\mu p_\nu k_\rho \dots$ ) y términos formados por un momento y la métrica euclídea (de la forma  $p_\mu \delta_{\nu\rho}$ ,  $k_\nu \delta_{\mu\rho} \dots$ ). Podemos convencernos fácilmente de que hay ocho términos diferentes del primer tipo y seis términos diferentes del segundo, y por lo tanto tenemos catorce posibles términos en la estructura tensorial del vértice.

Sin embargo, dado que los gluones son bosones el vértice debe ser simétrico ante permutaciones de las patas externas. Esta simetría reduce el número de términos independientes a seis, y vemos por lo tanto que la base de tensores descrita en el párrafo anterior no es la más conveniente. Quisieramos descomponer al vértice utilizando una estructura tensorial que pusiera de manifiesto las simetrías del vértice.

Una descomposición tensorial con estas características fue propuesta por Ball y Chiu [69], y consiste en parametrizar el vértice utilizando seis funciones escalares:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu\rho}(p, k, r) = & A(p^2, k^2, r^2)\delta_{\mu\nu}(p - k)_\rho + B(p^2, k^2, r^2)\delta_{\mu\nu}(p + k)_\rho \\
& - C(p^2, k^2, r^2)(\delta_{\mu\nu}p \cdot k - p_\nu k_\mu)(p - k)_\rho + \frac{1}{3}S(p^2, k^2, r^2)(p_\rho k_\mu r_\nu + p_\nu k_\rho r_\mu) \\
& + F(p^2, k^2, r^2)(\delta_{\mu\nu}p \cdot k - p_\nu k_\mu)(p_\rho k \cdot r - k_\rho p \cdot r) \\
& + H(p^2, k^2, r^2) \left[ -\delta_{\mu\nu}(p_\rho k \cdot r - k_\rho p \cdot r) + \frac{1}{3}(p_\rho k_\mu r_\nu - p_\nu k_\rho r_\mu) \right] + \text{permutaciones cíclicas}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Las funciones escalares  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $H$  y  $S$  juegan el rol de los coeficientes de la base de tensores propuesta por Ball y Chiu, y tienen las siguientes propiedades de simetría: Las funciones  $A$ ,  $C$  y  $F$  son simétricas bajo permutaciones de sus dos primeros argumentos, la función  $B$  es antisimétrica bajo permutaciones de sus dos primeros argumentos, la función  $H$  es totalmente simétrica y la función  $S$  es totalmente antisimétrica ante el interambio de cualquier par de sus argumentos.

Es importante notar que las funciones  $F$  y  $H$  son totalmente transversales, es decir que dan cero al ser contraídas con cualquier momento externo. Por otro lado, las simulaciones del lattice sólo tienen acceso al vértice de tres gluones a través de la función de correlación dada por el vértice contraído con los propagadores de los gluones externos. Dado que en el gauge de Landau los propagadores son transversales, la parte longitudinal del vértice se pierde en el proceso. En particular

esto quiere decir que las funciones  $B$  y  $S$  no son accesibles a través de simulaciones del lattice.

El método que utilizamos en nuestros cálculos fue emplear un algoritmo de Mathematica para proyectar cada diagrama sobre las diferentes componentes de la base tensorial de Ball-Chiu de manera de extraer las contribuciones de todas las funciones escalares por separado a cada diagrama. Esto nos permitió reducir significativamente la dificultad numérica de los cálculos, ya que de esta forma sólo es necesario calcular las seis funciones escalares definidas en la ecuación (3.3) en vez de las catorce que hubieramos tenido que calcular de haber usado la base en apariencia más natural  $\{p_\mu p_\nu p_\rho, p_\mu p_\nu k_\rho, \dots p_\mu \delta_{\nu\rho}, k_\nu \delta_{\mu\rho}, \dots\}$ . Luego podemos reconstruir el vértice completo utilizando las propiedades de simetría de las funciones escalares para obtener todos los coeficientes de la estructura tensorial permutando los argumentos de las seis funciones calculadas.

### 3.3. Integrales Maestras y el algoritmo de Laporta

En la sección anterior mencionamos que el primer paso de nuestro algoritmo de Mathematica para calcular los diagramas de Feynman que contribuyen a las correcciones a 1-loop del vértice de tres gluones es escribirlo en términos de la base propuesta por Ball-Chiu. De esta forma podemos extraer las funciones  $A(p^2, k^2, r^2)$ ,  $B(p^2, k^2, r^2)$ ,  $C(p^2, k^2, r^2)$ ,  $F(p^2, k^2, r^2)$ ,  $H(p^2, k^2, r^2)$  y  $S(p^2, k^2, r^2)$  correspondientes a cada diagrama. El siguiente paso del algoritmo es manipular las expresiones de manera que las integrales sean exclusivamente sobre funciones escalares cuya dependencia en el momento interno  $q$  quede contenida en los denominadores de la forma  $\frac{1}{q^2}$  provenientes de los propagadores, es decir que de manera general queden expresadas de la siguiente forma:

$$\mathcal{J}(p^2, k^2, r^2) = \mathcal{C}(p^2, k^2, r^2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m_1^2)^{n_1}} \frac{1}{((q+p)^2 + m_2^2)^{n_2}} \frac{1}{((q-k)^2 + m_3^2)^{n_3}},$$

donde  $\mathcal{J}(p^2, k^2, r^2)$  es una de las funciones escalares  $A, B, C, F, H$  o  $S$ ,  $\mathcal{C}(p^2, k^2, r^2)$  es un coeficiente que no depende de  $q$ , los exponentes  $n_i$  son números enteros y las  $m_i$  corresponden a las diferentes masas que pueden aparecer en los propagadores, es decir

$$m_i = \begin{cases} 0 \\ m \\ M \end{cases}.$$

Para lograr expresar los diagramas en términos de integrales de la forma de  $\mathcal{J}$  debemos explicitar la dependendencia tensorial del numerador. Para ver como funciona, tomemos como ejemplo la siguiente integral:

$$\mathcal{I}_{\mu\nu}(p, m_1, m_2) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 + m_1^2)((q+p)^2 + m_2^2)}.$$

La integral  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$  depende de un sólo momento  $p$  y tiene dos índices de Lorentz. Por lo tanto, su estructura tensorial debe ser de la forma

$$\mathcal{I}_{\mu\nu}(p, m_1, m_2) = \mathcal{I}_1(p, m_1, m_2)\delta_{\mu\nu} + \mathcal{I}_2(p, m_1, m_2)p_\mu p_\nu.$$

Para determinar las integrales  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  contraemos  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$  con  $\delta_{\mu\nu}$  y  $p_\mu p_\nu$  obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\delta_{\mu\nu}\mathcal{I}_{\mu\nu} &= d\mathcal{I}_1 + p^2\mathcal{I}_2, \\ p_\mu p_\nu\mathcal{I}_{\mu\nu} &= p^2\mathcal{I}_1 + p^4\mathcal{I}_2.\end{aligned}$$

Vemos que el análisis anterior es válido para cualquier función dependiente de un sólo impulso y con dos índices de Lorentz, y no solamente para esta elección particular de  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$ . Siguiendo con este ejemplo, realizando la contracción de  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$  obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 + m_1^2)((q+p)^2 + m_2^2)} &= d\mathcal{I}_1 + p^2\mathcal{I}_2, \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(p \cdot q)^2}{(q^2 + m_1^2)((q+p)^2 + m_2^2)} &= p^2\mathcal{I}_1 + p^4\mathcal{I}_2.\end{aligned}$$

El siguiente paso es relacionar los términos del numerador con los propagadores en el denominador. Esto puede hacerse usando por ejemplo:

$$\begin{aligned}q^2 &= (q^2 + m_1^2) - m_1^2, \\ \frac{1}{2}((q+p)^2 - q^2 - p^2) &= \frac{1}{2}(((q+p)^2 + m_2^2) - m_2^2 - (q^2 + m_1^2) + m_1^2 - p^2).\end{aligned}$$

Utilizando estas sustituciones obtenemos la siguiente expresión para la contracción  $\delta_{\mu\nu}\mathcal{I}_{\mu\nu}$ :

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{((q+p)^2 + m_2^2)} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{m_1^2}{(q^2 + m_1^2)((q+p)^2 + m_2^2)} = d\mathcal{I}_1 + p^2\mathcal{I}_2.$$

Contrayendo  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$  con  $p_\mu p_\nu$  obtenemos una ecuación similar relacionando las integrales escalares  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  con integrales de la forma de  $\mathcal{J}$ , y resolviendo el sistema de ecuaciones podemos expresar la integral  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$  en términos de integrales escalares.

Este procedimiento es generalizable a integrales más complejas. Sólo debemos parametrizar su estructura tensorial teniendo en cuenta la cantidad de índices de Lorentz y de momentos externos y luego contraer la expresión con cada uno de los tipos de tensores que aparecen en la descomposición de la integral original. De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones análogo al mostrado en el ejemplo, y resolviéndolo logramos expresar nuestra integral en la forma buscada.

El algoritmo de Mathematica implementa este procedimiento de forma automática llevando las integrales presentes en el vértice de tres gluones a la forma de  $\mathcal{J}$ . Sin

embargo, en el mejor de los casos es muy difícil (y muchas veces imposible) calcular analíticamente estas integrales de forma directa. Por esta razón nuestro enfoque consiste en relacionarlas con un número pequeño de integrales más sencillas llamadas *Integrales Maestras*. Éstas son análogas a las integrales de Passarino-Veltman [72] pero en el espacio euclídeo. Siguiendo las convenciones de normalización de [73], las Integrales Maestras están definidas de la siguiente manera:

$$A[m_1] = \bar{C} \int d^d q \frac{1}{[q^2 + m_1^2]}, \quad (3.4)$$

$$B[p_1, m_1, m_2] = \bar{C} \int d^d q \frac{1}{[q^2 + m_1^2][(q + p_1)^2 + m_2^2]}, \quad (3.5)$$

$$C[p_1, p_2, m_1, m_2, m_3] = \bar{C} \int d^d q \frac{1}{[q^2 + m_1^2][(q + p_1)^2 + m_2^2][(q - p_2)^2 + m_3^2]}. \quad (3.6)$$

El coeficiente  $\bar{C}$  está dado por  $\bar{C} = 16\pi^2 \frac{\bar{\mu}^{2\epsilon}}{(2\pi)^d}$ , y la *escala de regularización*  $\bar{\mu}$  se relaciona con la escala de renormalización  $\mu$  a través de  $\mu^2 = 4\pi e^{-\gamma} \bar{\mu}^2$ , donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni.

Vale la pena aclarar la razón por la cual se introduce la escala de regularización  $\bar{\mu}$ . Al utilizar el método de regularización dimensional para el cálculo de integrales de Feynman los resultados suelen quedar expresados en términos de la función  $\Gamma$  de Riemann. A modo de ejemplo veamos la siguiente integral:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - d/2}}$$

Si tomamos  $\alpha = 2$ , en el límite en que  $d \rightarrow 4 - 2\epsilon$  debemos desarrollar la función  $\Gamma$  alrededor de 0. La serie de Laurent de la función  $\Gamma$  alrededor de 0 está dada por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon).$$

La escala de regularización se define de esa forma para absorber los términos proporcionales a la constante  $\gamma$  al realizar el desarrollo en  $\epsilon$  de las Integrales Maestras.

Las Integrales Maestras A y B pueden ser resueltas analíticamente en términos de las masas y los momentos externos en el límite  $d = 4 - 2\epsilon$ , y sus expresiones analíticas están presentadas en [73]. Por otro lado, la Integral Maestra C debe ser tratada numéricamente para cada configuración de los momentos externos. También es importante notar que mientras que las integrales A y B tienen una parte divergente cuando  $d = 4 - 2\epsilon$ , la integral C es regular.

Para reducir nuestras integrales a Integrales Maestras utilizamos el algoritmo FIRE5 desarrollado por A. V. Smirnov [74]. El mismo es una implementación en Mathematica del algoritmo de reducción de Laporta [75].

La idea del algoritmo es utilizar relaciones obtenidas por medio de integración por partes [76] para reducir todas las integrales presentes en las funciones escalares a Integrales Maestras. Más concretamente, consideremos una familia de integrales de Feynman dadas como funciones de  $n$  parámetros enteros  $\{a_1, \dots, a_n\}$ :

$$\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) = \int \dots \int \frac{d^d q_1 \dots d^d q_m}{E_1^{a_1} \dots E_n^{a_n}},$$

donde los denominadores  $E_i$  son de la forma  $E_i \sim ((q_i + k_i)^2 + m_i^2)^2$ .

Asumiendo condiciones de borde nulas en el infinito para los campos vemos que la integral de una derivada total es 0:

$$\int \dots \int d^d q_1 \dots d^d q_m \frac{\partial}{\partial q_i} \left( p_j \frac{1}{E_1^{a_1} \dots E_n^{a_n}} \right) = 0, \quad (3.7)$$

donde  $p_j$  es uno de los momentos externos.

La ecuación (3.7) puede expresarse como una ecuación entre elementos de la familia  $\mathcal{F}$ :

$$\sum_i \alpha_i \mathcal{F}(a_1 + b_{i,1}, \dots, a_n + b_{i,n}) = 0,$$

donde  $b_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$  y las  $\alpha_i$  son funciones lineales de los exponentes  $a_j$ . Estas relaciones permiten expresar un elemento cualquiera de la familia de diagramas en términos de los demás. El algoritmo consiste en generar las ecuaciones necesarias para expresar la integral de Feynman deseada exclusivamente en términos de integrales de Feynman con exponentes iguales a 0 o 1. Para el caso correspondiente al vértice de tres gluones en el que el número de términos  $E_i$  es  $n = 3$  y hay un sólo momento interno, ésto es equivalente a expresar al mismo en términos de las Integrales Maestras definidas en las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6).

La salida del algoritmo de Mathematica es entonces cada una de las funciones escalares para cada diagrama contribuyente al vértice de tres gluones expresada en términos de las Integrales Maestras para una configuración de momentos arbitraria. Las expresiones obtenidas de esta forma son extensas y no muy esclarecedoras. Sin embargo, ésto nos permite tanto reconstruir el vértice completo y evaluarlo en configuraciones de momento particulares como estudiar el comportamiento de cada una de sus componentes por separado.

# Capítulo 4

## Resultados

En los capítulos anteriores presentamos el modelo de Curci-Ferrari como una forma viable de tener acceso al régimen infrarrojo de QCD utilizando la teoría de perturbaciones, y en el último capítulo introdujimos finalmente el objeto de estudio de esta tesis: el vértice de tres gluones. Presentamos su estructura tensorial y como es posible parametrizarla de forma conveniente utilizando la base de Ball-Chiu, y describimos el método a través del cuál realizamos nuestros cálculos: la descomposición en Integrales Maestras.

En este capítulo presentaremos los resultados que forman el cuerpo de esta tesis. En primer lugar definiremos el esquema de renormalización utilizado en esta tesis, el esquema *Infrared Safe*, y mostraremos las soluciones a la ecuación del grupo de renormalización en este esquema. Posteriormente explicaremos como se ajustan los parámetros del modelo para comparar nuestros resultados con el lattice y definiremos las diferentes cantidades a comparar, ya que en el lattice no se trabaja directamente con el vértice si no con funciones escalares obtenidas al contraer al mismo con diferentes tensores. Finalmente mostraremos la comparación de nuestros cálculos con simulaciones del lattice tanto en la aproximación quenched como para la QCD completa.

### 4.1. Esquema Infrared Safe

En el capítulo dos introdujimos el concepto de renormalización, proceso en el cuál redefinimos los campos, masas y constantes de acoplamiento de manera de absorber las divergencias ultravioletas que aparecen en las integrales de Feynman. Mencionamos que para ésto es necesario imponer condiciones a las cantidades renormalizadas. Estas condiciones fijan el *esquema de renormalización* utilizado. Si bien las cantidades físicas no deberían depender del esquema de renormalización, dado que estamos truncando el desarrollo perturbativo a 1-loop cierta dependencia es esperable. La dependencia de los cálculos a 1-loop respecto al esquema de renormalización en el modelo de Curci-Ferrari fue estudiada por ejemplo en [58].

En este trabajo no nos ocuparemos de eso, si no que trabajaremos exclusivamente con el esquema *Infrared Safe* propuesto originalmente en [32]. Éste está definido fijando la forma de los propagadores del gluón y del ghost en la escala de renormalización. Su característica más importante es el hecho de que para algunas condiciones

iniciales no presenta un polo de Landau, si no que la constante de acoplamiento permanece finita en el infrarrojo. Por lo tanto podemos utilizar la ecuación del grupo de renormalización para elegir la escala  $\mu$  igual a  $p$  para todo rango de energía.

Antes de definir el esquema, recordemos la relación entre las cantidades renormalizadas y bare relevantes. Para los campos, masas y constante de acoplamiento tenemos:

$$\begin{aligned} A_0^{a\mu} &= \sqrt{Z_A} A^{a\mu}, & c_0^a &= \sqrt{Z_c} c^a, & \bar{c}_0^a &= \sqrt{Z_{\bar{c}}} \bar{c}^a, \\ g_0 &= Z_g g, & m_0^2 &= Z_{m^2} m^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Al lector atento puede llamarle la atención que no hemos incluido al campo del quark  $\psi$  ni a su masa  $M$ . Ésto se debe a que como a nivel árbol las cantidades bare y renormalizadas deben ser iguales, los factores de renormalización necesariamente son de la forma  $Z \sim 1 + \mathcal{O}(g^2)$ . Dado que los quarks aparecen en el vértice de tres gluones y en los propagadores del ghost y gluón sólo dentro de loops, el efecto de redefinir las cantidades asociadas al quark contribuiría recién a orden 2-loops, y es por lo tanto irrelevante para nuestro cálculo a 1-loop.

Para los propagadores del ghost y gluón y para el vértice de tres gluones tenemos la siguiente relación entre las cantidades bare y renormalizadas:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b}^{(2)}(p) &= Z_A \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b, 0}^{(2)}(p), \\ \Gamma_{c^a \bar{c}^b}^{(2)}(p) &= Z_c \Gamma_{c^a \bar{c}^b, 0}^{(2)}(p), \\ \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)}(p, r) &= Z_A^{3/2} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c, 0}^{(3)}(p, r). \end{aligned} \quad (4.2)$$

El esquema Infrared Safe está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma^\perp(p = \mu) &= m^2 + \mu^2, & J(p = \mu) &= 1, \\ Z_{m^2} Z_A Z_c &= 1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\Gamma^\perp(p)$  es la parte transversal de  $\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b}^{(2)}(p)$ , y recordamos que  $J(p)$  es la función de vestidura del ghost. El esquema Infrared Safe impone entonces que la parte longitudinal del propagador del gluón y el propagador del ghost tengan su forma nivel árbol a la escala de renormalización  $\mu$ .

La ecuación  $Z_{m^2} Z_A Z_c = 1$  fue observada en primer lugar para las partes divergentes en cálculos perturbativos [77], [78], y es consecuencia de un teorema de no renormalización para la masa del gluón demostrado en [79], [80], [32].

Para fijar la renormalización de la constante de acoplamiento utilizamos el *esquema de Taylor* [81], en el que la constante de acoplamiento es definida como el vértice ghost-antighost-gluón cuando el momento del ghost entrante es 0. En esta configuración todas las contribuciones al vértice ghost-antighost-gluón de orden mayor al nivel árbol se anulan. Ésto se debe a que como se puede ver en la figura 4.1, todas las correcciones a 1-loop o más del vértice necesariamente contienen un vértice ghost-antighost-gluón interno conectado al ghost externo entrante al diagrama.

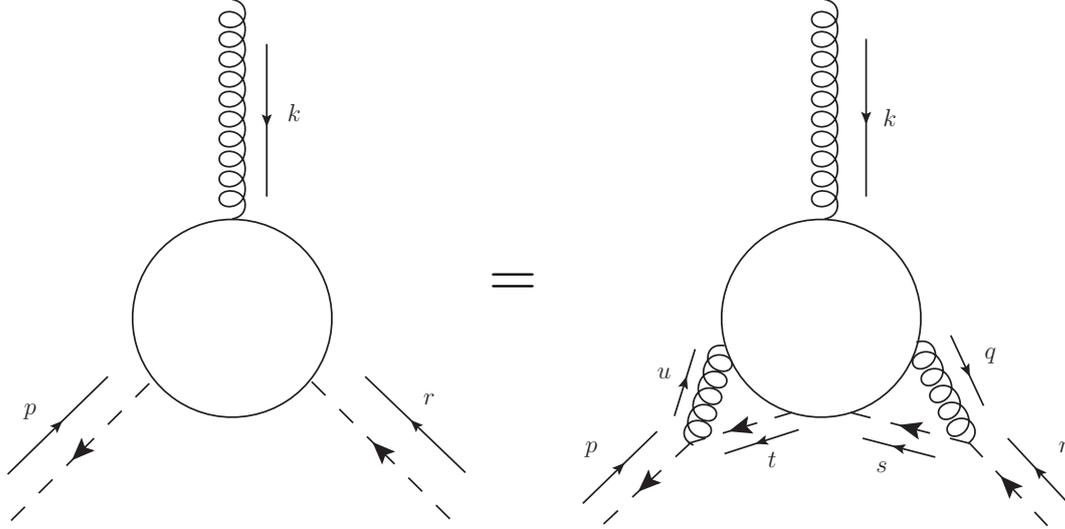


Figura 4.1: Forma genérica de los diagramas con loops del vértice ghost-antighost-gluón. Imagen extraída de [20]

Este vértice aportará un factor multiplicativo proporcional al momento del antighost saliente  $-igf^{abc}s_\mu$  a cualquier diagrama de orden mayor al nivel árbol. Por otro lado, el propagador del gluón interno conectado a este vértice aportará un factor  $\frac{\delta^{aa'}}{q^2+m^2}P_{\mu\mu'}^\perp(q)$ . Vemos entonces que en la configuración en que el momento del ghost externo entrante es  $r = 0$  se cumple  $s = -q$ , y por lo tanto cualquier diagrama de orden mayor al nivel árbol contribuyente al vértice ghost-antighost-gluón está multiplicado por un factor proporcional a  $q_\mu P_{\mu\mu'}^\perp(q) = 0$ . Vemos entonces que en esta configuración la expresión para el vértice ghost-antighost-gluón a nivel árbol es exacta:

$$\Gamma_{c\bar{c}A\mu}^{(3) bca}(0, p, -p) = -ig_0 f^{abc} p_\mu.$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de cantidades renormalizadas tenemos:

$$\frac{1}{Z_c \sqrt{Z_A}} \Gamma_{c\bar{c}A\mu}^{(3) bca}(0, p, -p) = -iZ_g g f^{abc} p_\mu.$$

Exigir que las cantidades renormalizadas sean finitas implica que la parte divergente del producto de los factores de renormalización presentes en la ecuación anterior debe anularse, es decir

$$Z_c \sqrt{Z_A} Z_g = 1 + g^2 \times (\text{finito}).$$

Imponiendo esta relación también a la parte finita de los factores de renormalización obtenemos la ecuación que utilizaremos para la renormalización de la constante de acoplamiento:

$$Z_c \sqrt{Z_A} Z_g = 1. \tag{4.4}$$

Las condiciones dadas por las ecuaciones (4.3) y (4.4) permiten definir todos los factores de renormalización de manera consistente. La solución del sistema de ecuaciones a orden  $\mathcal{O}(g^2)$  es la siguiente:

$$Z_{m^2} = 1 - \left( \frac{1}{\mu_0^2} \Sigma_{AA\perp}^{1loop}(p = \mu_0) + \frac{m^2 + \mu_0^2}{\mu_0^4} \Sigma_{C\bar{C}}^{1loop}(p = \mu_0) \right), \quad (4.5a)$$

$$Z_C = 1 + \frac{1}{\mu_0^2} \Sigma_{C\bar{C}}^{1loop}(p = \mu_0), \quad (4.5b)$$

$$Z_A = 1 + \left( \frac{1}{\mu_0^2} \Sigma_{AA\perp}^{1loop}(p = \mu_0) + \frac{m^2}{\mu_0^4} \Sigma_{C\bar{C}}^{1loop}(p = \mu_0) \right), \quad (4.5c)$$

$$Z_g = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0^2} \Sigma_{AA\perp}^{1loop}(p = \mu_0) + \frac{m^2 + 2\mu_0^2}{\mu_0^4} \Sigma_{C\bar{C}}^{1loop}(p = \mu_0) \right), \quad (4.5d)$$

$$(4.5e)$$

donde hemos introducido las *autoenergías* del gluón y del ghost, definidas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b}^{(2)}(p) &\equiv p^2 + m^2 - \Sigma_{AA}(p), \\ \Gamma_{c^a \bar{c}^b}^{(2)}(p) &\equiv p^2 - \Sigma_{C\bar{C}}(p). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para obtener los factores de renormalización a orden  $\mathcal{O}(g^2)$  calculamos los propagadores del ghost y del gluon a 1-loop y sustituímos sus expresiones evaluadas en la escala de renormalización  $p = \mu_0$  en las ecuaciones (4.5). Las expresiones completas de los factores de renormalización son demasiado largas para ser mostradas aquí. Los resultados para la parte divergente de los factores  $d = 4 - 2\epsilon$  son los siguientes:

$$\begin{aligned} Z_c &= 1 + \frac{3g^2 N}{64\pi^2 \epsilon}, \\ Z_A &= 1 + \frac{g^2}{96\pi^2} \frac{(13N - 8N_f T_f)}{\epsilon}, \\ Z_{m^2} &= 1 - \frac{g^2}{192\pi^2} \frac{(35N - 16N_f T_f)}{\epsilon}, \\ Z_g &= 1 - \frac{g^2}{96\pi^2} \frac{(11N - 4N_f T_f)}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Una ventaja importante del esquema IS es el hecho de que podemos relacionar fácilmente las funciones  $\beta$  con las dimensiones anómalas de los campos (ver las definiciones dadas en la ecuación (2.13)). Utilizando la ecuación (4.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \beta_g &= \mu \frac{dg}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{Z_g} g_0 = \mu g_0 \frac{d}{d\mu} (\sqrt{Z_A} Z_c) \\ &= \mu g_0 \left( \sqrt{Z_A} \frac{dZ_c}{d\mu} + Z_c \frac{d\sqrt{Z_A}}{d\mu} \right) = g \left( \gamma_C + \frac{1}{2} \gamma_A \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde hemos utilizado además que la constante de acoplamiento bare no depende de  $\mu$ .

Podemos hacer algo similar para la función  $\beta_{m^2}$  utilizando el teorema de no renormalización para la masa del gluón ??:

$$\begin{aligned}\beta_{m^2} &= \mu \frac{dm^2}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} Z_m^{-1} m_0^2 = -\mu \frac{m_0^2}{Z_m} \frac{d \log Z_m}{d\mu} \\ &= m^2 \frac{d \log Z_A Z_c}{d\mu} = m^2 (\gamma_A + \gamma_c).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) forman un sistema de ecuaciones diferenciales que es posible integrar para hallar la dependencia de la constante de acoplamiento y de la masa del gluón respecto a la escala  $\mu$ . Dadas las condiciones iniciales para la  $m$  y  $g$  a cierta escala  $\mu_0$  es posible estudiar el flujo de ambos parámetros al variar la escala de energía. Este trabajo ha sido hecho para el modelo de Curci-Ferrari, y en la figura 4.2 se muestran resultados extraídos de [61].

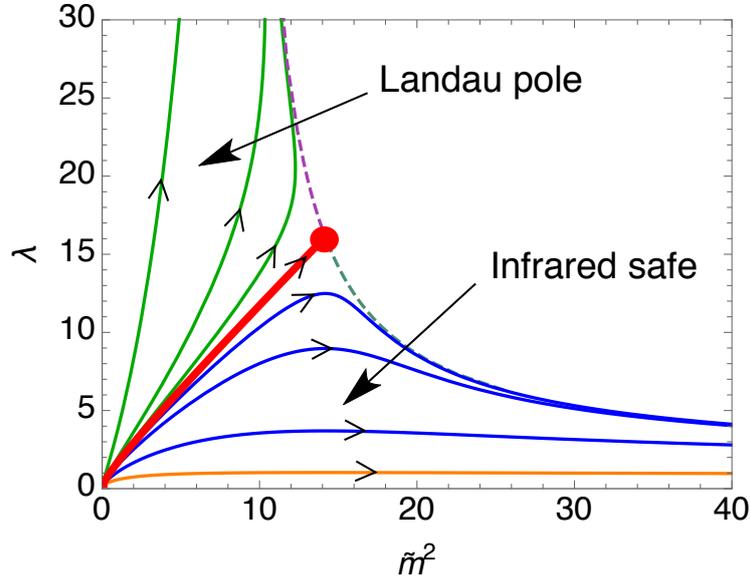


Figura 4.2: Trayectorias de  $m$  y  $\lambda = \frac{Ng^2}{16\pi}$  para diferentes condiciones iniciales del grupo de renormalización en el esquema Infrared Safe. Las trayectorias azules no presentan un polo de Landau, mientras que para las verdes la constante de acoplamiento diverge para  $\mu$  finito.

Extraída de [61].

Vemos que como se mencionó anteriormente, existen condiciones iniciales para las cuales la teoría no presenta un polo de Landau infrarrojo.

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) pueden ser utilizadas también para obtener expresiones para las funciones  $z_A(\mu, \mu_0)$  y  $z_c(\mu, \mu_0)$  que relacionan los vértices renormalizados a escalas  $\mu$  y  $\mu_0$  (ver ecuación (2.16)). Éstas se definirían como

$$\begin{aligned}\log z_A(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_A(g(\mu'), m(\mu')), \\ \log z_c(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_c(g(\mu'), m(\mu')).\end{aligned}$$

Escribiendo  $\gamma_A$  en términos de  $\beta_g$  y  $\beta_{m^2}$  tenemos:

$$\begin{aligned} \log z_A(\mu, \mu_0) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_A = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} 2 \left( \frac{\beta_{m^2}(\mu')}{m^2(\mu')} - \frac{\beta_g(\mu')}{g(\mu')} \right) \\ 2 \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu \left( \frac{1}{m^2(\mu')} \frac{d}{d\mu'} m^2(\mu') - \frac{1}{g(\mu')} \frac{d}{d\mu'} g(\mu') \right) &= 2 \left( \log \frac{m^2(\mu)}{m^2(\mu_0)} - \log \frac{g(\mu)}{g(\mu_0)} \right), \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente expresión para  $z_A$ :

$$z_A(\mu, \mu_0) = \frac{m^4(\mu)g^2(\mu_0)}{m^4(\mu_0)g^2(\mu)}. \quad (4.10)$$

Un razonamiento análogo permite obtener una ecuación para  $z_c(\mu, \mu_0)$ :

$$z_c(\mu, \mu_0) = \frac{m^2(\mu_0)g^2(\mu)}{m^2(\mu)g^2(\mu_0)}. \quad (4.11)$$

Podemos aplicar la ecuación del grupo de renormalización (2.16) al vértice de tres gluones. Sustituyendo las expresiones halladas para  $z_A$  y  $z_c$  tenemos:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}(p, r, \mu_0) = \frac{g^4(\mu)m^6(\mu_0)}{g^4(\mu_0)m^6(\mu)} \Gamma_{\mu\nu\rho}(p, r, \mu), \quad (4.12)$$

donde  $\Gamma_{\mu\nu\rho}(p, r, \mu')$  es el vértice renormalizado a escala  $\mu'$ , y hay un factor  $\frac{g(\mu_0)}{g(\mu)}$  extra a raíz de que estamos utilizando la definición (3.2) para  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ .

## 4.2. Ajuste de parámetros

Para poder comparar nuestros resultados con las simulaciones del lattice es necesario realizar un ajuste de los parámetros libres del modelo de Curci-Ferrari. En esta sección presentamos estos parámetros y el método utilizado para ajustarlos.

Una de las ventajas del modelo de Curci-Ferrari es que cuenta con un número pequeño de parámetros libres. Aparte de una constante multiplicativa global que vincula nuestro esquema de renormalización con la renormalización del lattice, sólo es necesario ajustar las condiciones iniciales del flujo de renormalización de las masa del gluón y del quark y de la constante de acoplamiento, es decir, los valores de  $m(\mu_0)$ ,  $M(\mu_0)$  y  $g(\mu_0)$  a una escala  $\mu_0$  arbitraria que nosotros fijamos a 1 GeV. Esto es válido para comparar con simulaciones que utilicen quarks con masas degeneradas. En el caso de que se consideraran quarks con masas diferentes sería necesario ajustar cada una por separado o establecer una relación a priori entre las masas de los diferentes quarks.

Las condiciones iniciales de la constante de acoplamiento y las masas se obtienen eligiendo el conjunto de parámetros que mejor ajusten simultáneamente los propagadores del ghost y del gluón. Estos valores fueron obtenidos en [55], [58], pero explicamos aquí el proceso por completitud.

Para cuantificar la coincidencia entre los propagadores calculados con el modelo de Curci-Ferrari y las simulaciones del lattice definimos los errores cuadráticos de la siguiente manera:

$$\chi_{AA}^2 = \frac{1}{4\mathcal{N}} \sum_i (\Gamma_{lt.}^\perp(\mu_0)^2 + \Gamma_{lt.}^\perp(p_i)^2) \left( \frac{1}{\Gamma_{lt.}^\perp(p_i)} - \frac{1}{\Gamma_{th.}^\perp(p_i)} \right)^2, \quad (4.13)$$

$$\chi_{c\bar{c}}^2 = \frac{1}{4\mathcal{N}} \sum_i (J_{lt.}(\mu_0)^{-2} + J_{lt.}(p_i)^{-2}) (J_{lt.}(p_i) - J_{th.}(p_i))^2,$$

donde los subíndices *lt.* y *th.* denotan los resultados del lattice y los cálculos con el modelo de Curci-Ferrari respectivamente, y  $\mathcal{N}$  es el número de muestras consideradas.

Para ajustar los parámetros hay que calcular los propagadores en función del momento para diferentes conjuntos de condiciones iniciales, y para cada condición inicial obtener un valor para  $\chi_{AA}^2$  y  $\chi_{c\bar{c}}^2$ . Este trabajo fue realizado tanto para la aproximación quenched [58] como para la teoría unquenched con diferentes espectros de quarks [55].

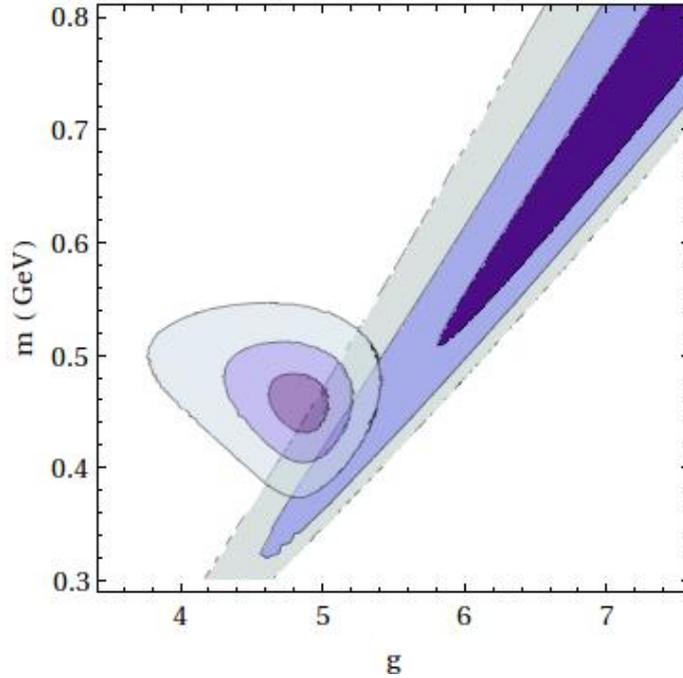


Figura 4.3: Curvas de nivel en la aproximación quenched para  $\chi_{AA}^2$  y  $\chi_{c\bar{c}}^2$  en el esquema IS en  $d = 4$  utilizando diferentes condiciones iniciales  $g_0$  y  $m_0$ . La región diagonal más extensa corresponde a  $\chi_{c\bar{c}}^2$  y la región elíptica más pequeña a  $\chi_{AA}^2$ . Los errores (de más oscuro a más claro) corresponden a 4%, 7% y 10%. Extraída de [58]

En la figura 4.3 se muestran las curvas de nivel para  $\chi_{AA}^2$  y  $\chi_{c\bar{c}}^2$  utilizando la aproximación quenched y el esquema IS en  $d = 4$ . Al ver las curvas de nivel vemos que no hay condiciones iniciales  $g_0$  y  $m_0$  que produzcan el menor error posible en ambos propagadores a la vez. Sin embargo, hay una región amplia de parámetros aceptables en las que ninguno de los errores supera el 10%.

En la figura 4.4 se muestran las curvas de nivel para  $\chi_{AA}^2$  y  $\chi_{c\bar{c}}^2$  considerando dos sabores de quarks con la misma masa en el esquema IS y  $d = 4$  al variar el valor

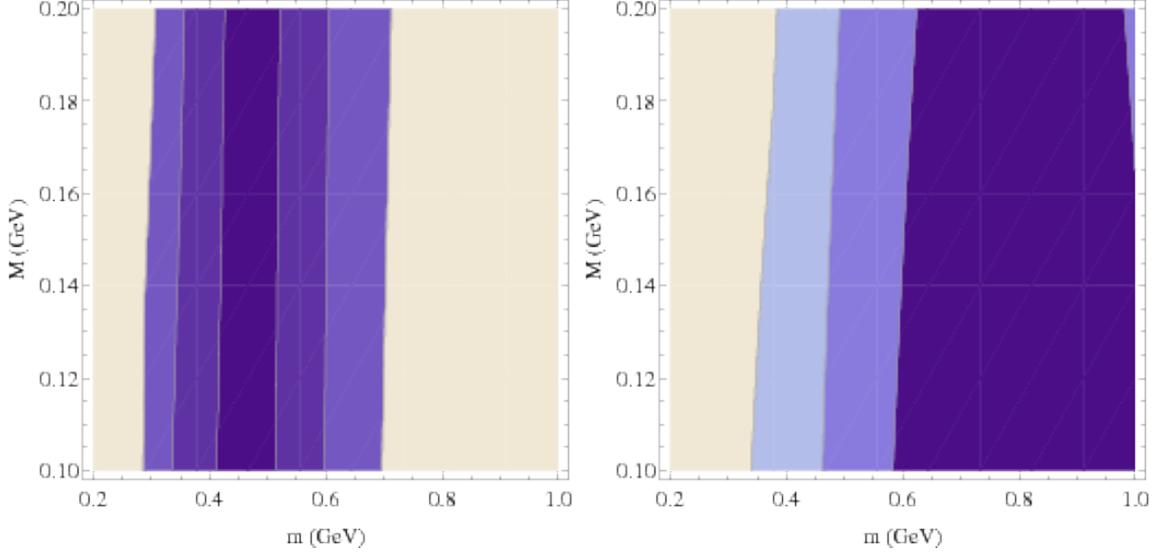


Figura 4.4: Curvas de nivel con  $N_f = 2$  para  $\chi_{AA}^2$  (izquierda) y  $\chi_{c\bar{c}}^2$  (derecha) en el esquema IS en  $d = 4$  utilizando diferentes condiciones iniciales  $M_0$  y  $m_0$ . Las curvas corresponden a errores de 8%, 10% y 12% en el caso de  $\chi_{AA}^2$ , y 1.5%, 2% y 2.2% en el caso de  $\chi_{c\bar{c}}^2$ . Los errores son casi insensibles al valor de  $M_0$ . Extraída de [55].

inicial de las masas del quark y gluón. Es notable el hecho de que los errores son prácticamente insensibles a la condición inicial de la masa del quark.

Los valores obtenidos para  $m_0$ ,  $M_0$  y  $g_0$  para el caso sin quarks y el caso con dos sabores con masa degenerada se muestra en el cuadro 4.1

	$m_0$ (GeV)	$M_0$ (GeV)	$g_0$
Quenched	0.35	-	3.6
Unquenched ( $N_f = 2$ )	0.42	0.13	4.5

Cuadro 4.1: Valores de las masas del quark y gluón ( $M_0$  y  $m_0$ ) y de la constante de acoplamiento ( $g_0$ ) a la escala de renormalización  $\mu_0 = 1$  GeV obtenidos al ajustar los propagadores con los resultados del lattice para el caso quenched y  $N_f = 2$ .

Una vez fijados estos valores solo hace falta fijar una constante global multiplicativa para comparar cualquier función de correlación con el lattice. Esto implica en particular que nuestros resultados para el vértice de tres gluones son una predicción pura del modelo, ya que no utilizamos ningún ajuste extra para compararlo con el lattice.

La constante multiplicativa global que es necesario ajustar proviene del hecho de que la normalización de nuestras funciones de correlación renormalizadas no coincide con la utilizada en el lattice. Para fijarla minimizamos el error cuadrático entre una cantidad dada calculada con el modelo y los resultados correspondientes del lattice.

Supongamos que queremos comparar nuestros cálculos para una cantidad  $y$  con simulaciones numéricas, y llamemos  $\mathcal{C}$  a la constante multiplicativa que deseamos

ajustar. Ajustaremos el valor de  $\mathcal{C}$  de manera que minimice la siguiente cantidad:

$$\sum_i \frac{(\mathcal{C}y_{th.,i} - y_{lt.,i})^2}{\mathcal{N}},$$

donde nuevamente los subíndices  $lt.$  y  $th.$  denotan los resultados del lattice y los cálculos con el modelo de Curci-Ferrari respectivamente, y  $\mathcal{N}$  es el número de muestras consideradas.

Derivando la expresión anterior respecto de  $\mathcal{C}$  e igualando su derivada a cero para hallar el mínimo, obtenemos una expresión para el valor de  $\mathcal{C}$  que minimiza la diferencia entre el lattice y nuestros cálculos:

$$\mathcal{C} = \frac{\sum_i y_{th.,i} y_{lt.,i}}{\sum_i y_{th.,i}^2}. \quad (4.14)$$

Dado que el valor de esta constante está vinculado a diferencias entre nuestra normalización y la normalización del lattice, ésta deberá ser hallado para cada juego de simulaciones, ya que la normalización del lattice depende de parámetros utilizados en la simulación tales como el paso de la red o su volumen.

### 4.3. Comparación con el lattice

Como mencionamos anteriormente, la salida de nuestro algoritmo de Mathematica es una expresión para las funciones escalares que contribuyen al vértice para una configuración arbitraria de momentos. Sin embargo, para realizar simulaciones en el lattice es necesario escoger alguna configuración particular para los impulsos de las partículas externas.

Por otro lado, en el lattice no se simula el vértice completo si no que se construyen cantidades escalares a partir del mismo contrayéndolo con diferentes tensores. Ésto se debe simplemente al hecho de que las cantidades escalares son más manejables numéricamente que el tensor  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  completo. Las funciones escalares utilizadas en el lattice varían, y por lo general es necesario construir la función escalar correspondiente para cada simulación a partir de nuestro resultado para vértice completo.

En esta sección presentaremos las configuraciones de los impulsos externos utilizadas en las simulaciones con las que comparamos nuestros resultados y las diferentes funciones escalares que en ellas se emplean.

En esta tesis comparamos nuestros resultados con datos del lattice provenientes de [82] para la aproximación quenched y de [83] para la teoría con quarks. Éstas son hasta donde sabemos los resultados del lattice para el vértice de tres gluones más recientes.

Las configuraciones de los momentos externos utilizadas en [82] son denominadas *configuración simétrica* y *configuración asimétrica*. En la configuración simétrica los tres gluones entrantes tienen momentos de igual módulo, y por lo tanto está caracterizada por

$$\begin{cases} p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2, \\ p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_3 = -\frac{p^2}{2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

En la configuración asimétrica el impulso de uno de los gluones externos es nulo, y está dada por

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = -p_3 = p. \end{cases} \quad (4.16)$$

La configuración de los impulsos externos utilizada en [83] es denominada *configuración ortogonal*, y se caracteriza por tener dos momentos externos ortogonales entre sí:

$$\begin{cases} p_1 \cdot p_2 = 0, \\ p_1^2 = p_2^2 = p^2, \\ p_3^2 = 2p^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Las funciones escalares definidas en [82] para la configuración simétrica se obtienen parametrizando la función de correlación de tres gluones en esta configuración de la siguiente manera:

$$\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2) A_\rho^c(p_3) \rangle = f^{abc} (T^{sym}(p^2) \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3) + S^{sym}(p^2) \lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3)),$$

donde los tensores  $\lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3)$  y  $\lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3)$  se definen como

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3) &= \Gamma_{\mu'\nu'\rho'}^{(0)}(p_1, p_2, p_3) P_{\mu'\mu}^\perp(p_1) P_{\nu'\nu}^\perp(p_2) P_{\rho'\rho}^\perp(p_3), \\ \lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3) &= \frac{(p_1 - p_2)_\rho (p_2 - p_3)_\mu (p_3 - p_1)_\nu}{p^2}, \end{aligned}$$

y  $\Gamma_{\mu'\nu'\rho'}^{(0)}(p_1, p_2, p_3)$  es la estructura tensorial del vértice de tres gluones a nivel árbol:

$$\Gamma_{\mu'\nu'\rho'}^{(0)}(p_1, p_2, p_3) = \delta_{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\rho + \delta_{\nu\rho}(p_2 - p_3)_\mu + \delta_{\rho\mu}(p_3 - p_1)_\nu.$$

Utilizando la definición de la ecuación (3.2) para  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  y la relación entre las funciones de correlación conexas y 1-PI tenemos:

$$g\Gamma_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) = \frac{T^{sym}(p^2)}{D^3(p^2)} \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3) + \frac{S^{sym}(p^2)}{D^3(p^2)} \lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3) \quad (4.18)$$

$$\equiv g\Gamma_T^{sym}(p^2) \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3) + g\Gamma_S^{sym}(p^2) \lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3), \quad (4.19)$$

donde  $D(p^2)$  es la función de vestidura del gluón y hemos definido las funciones escalares  $g\Gamma_T^{sym}(p^2)$  y  $g\Gamma_S^{sym}(p^2)$ .

Enfocándonos en el factor con la estructura tensorial del vértice a nivel árbol tenemos

$$T^{sym}(p^2) = g\Gamma_T^{sym}(p^2) D^3(p^2).$$

La función  $T^{sym}(p^2)$  puede ser proyectada a partir del vértice a través de

$$g\Gamma_T^{sym}(p^2) = \frac{\Gamma_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) \mathcal{W}_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3)}{\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) \mathcal{W}_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3)}, \quad (4.20)$$

con

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) = \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(p_1, p_2, p_3) + \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3).$$

En la configuración asimétrica se definen cantidades análogas con la salvedad de que el tensor  $\lambda_{\mu\nu\rho}^S(p_1, p_2, p_3)$  es completamente longitudinal al ser evaluado en esta configuración, y por lo tanto no contribuye a las funciones de correlación al ser contraído con los propagadores de los gluones externos. Las cantidades  $T^{asym}(p^2)$  y  $g\Gamma_T^{asym}(p^2)$  se definen por:

$$g\Gamma_T^{asym}(p^2) = \frac{\Gamma_{\mu\nu\rho}(0, p, -p)\tilde{\mathcal{W}}_{\mu\nu\rho}(0, p, -p)}{\tilde{\mathcal{W}}_{\mu\nu\rho}(0, p, -p)\tilde{\mathcal{W}}_{\mu\nu\rho}(0, p, -p)}, \quad (4.21)$$

$$T^{asym}(p^2) = g\Gamma_T^{sym}(p^2)D^2(p^2)D(0), \quad (4.22)$$

con

$$\tilde{\mathcal{W}}_{\mu\nu\rho}(0, p, -p) = \lambda_{\mu\nu\rho}^{tree}(0, p, -p).$$

Las simulaciones de [82] dan los resultados del lattice para las funciones  $T^{asym}(p^2)$ ,  $T^{sym}(p^2)$ ,  $g\Gamma_T^{asym}(p^2)$  y  $g\Gamma_T^{sym}(p^2)$ .

La función escalar utilizada en las simulaciones de [83] es más sencilla, y consiste en la contracción de las patas externas del vértice con proyectores transversales y la estructura tensorial del vértice a nivel árbol, normalizada por la misma expresión a nivel árbol. Llamándola  $G_1$  para ser consistentes con la notación de [83] tenemos:

$$G_1(p, k, r) = \frac{[(r-k)_\gamma\delta_{\alpha\beta} + \text{permutaciones cíclicas}]P_{\alpha\mu}^\perp(p)P_{\beta\nu}^\perp(k)P_{\gamma\rho}^\perp(r)\Gamma_{\mu\nu\rho}(p, k, r)}{[(r-k)_\gamma\delta_{\alpha\beta} + \text{p.c.}]P_{\alpha\mu}^\perp(p)P_{\beta\nu}^\perp(k)P_{\gamma\rho}^\perp(r)[(r-k)_\rho\delta_{\mu\nu} + \text{p.c.}]} \quad (4.23)$$

Para cada una de las funciones escalares  $G_1(p^2)$ ,  $T^{asym}(p^2)$ ,  $T^{sym}(p^2)$ ,  $g\Gamma_T^{asym}(p^2)$  y  $g\Gamma_T^{sym}(p^2)$  podemos proceder como en la ecuación (2.16) y calcular los factores  $z$  que relacionan a las funciones renormalizadas a diferentes escalas. De esta forma podemos mejorar nuestro cálculo a 1-loop teniendo en cuenta los efectos del grupo de renormalización.

## 4.4. Resultados en la aproximación quenched

En esta sección presentamos los resultados obtenidos para las funciones  $T^{asym}(p^2)$  y  $g\Gamma_T^{asym}(p^2)$  en la configuración asimétrica y  $T^{sym}(p^2)$  y  $g\Gamma_T^{sym}(p^2)$  en la configuración simétrica en la teoría sin quarks. Los cálculos están hechos teniendo en cuenta el flujo de renormalización de la constante de acoplamiento y la masa del gluón y los factores de escala que surgen de la ecuación del grupo de renormalización, y las condiciones iniciales del flujo se dan a la escala de renormalización  $\mu_0 = 1\text{GeV}$ . Sus valores pueden verse en el cuadro (4.1). Los datos del lattice con los que comparamos nuestros resultados para el vértice de tres gluones están publicados en [82].

En la figura 4.5 mostramos los resultados para las funciones  $g\Gamma_T^{asym}$  y  $T^{asym}$  en la configuración asimétrica (con un impulso nulo, y en la figura 4.6 los resultados para  $g\Gamma_T^{sym}$  y  $T^{sym}$  en la configuración simétrica (los tres impulsos de la misma magnitud).

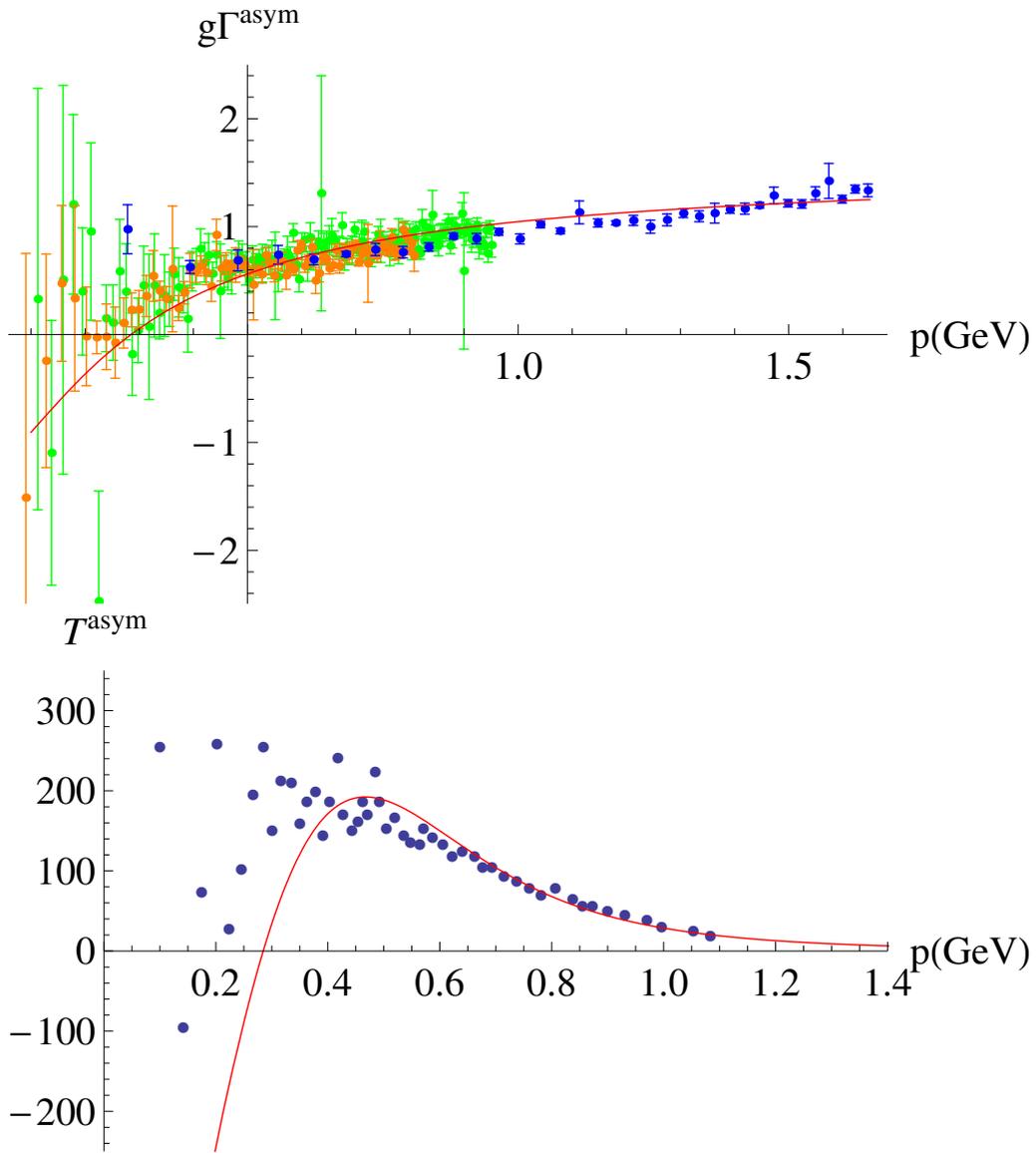


Figura 4.5: Funciones escalares  $g\Gamma_T^{\text{asym}}$  (arriba) y  $T^{\text{asym}}$  (abajo) en función del momento en la configuración asimétrica (un impulso nulo) en la aproximación quenched. Los puntos son datos del lattice de [82]. La línea roja corresponde a nuestro cálculo a 1-loop.

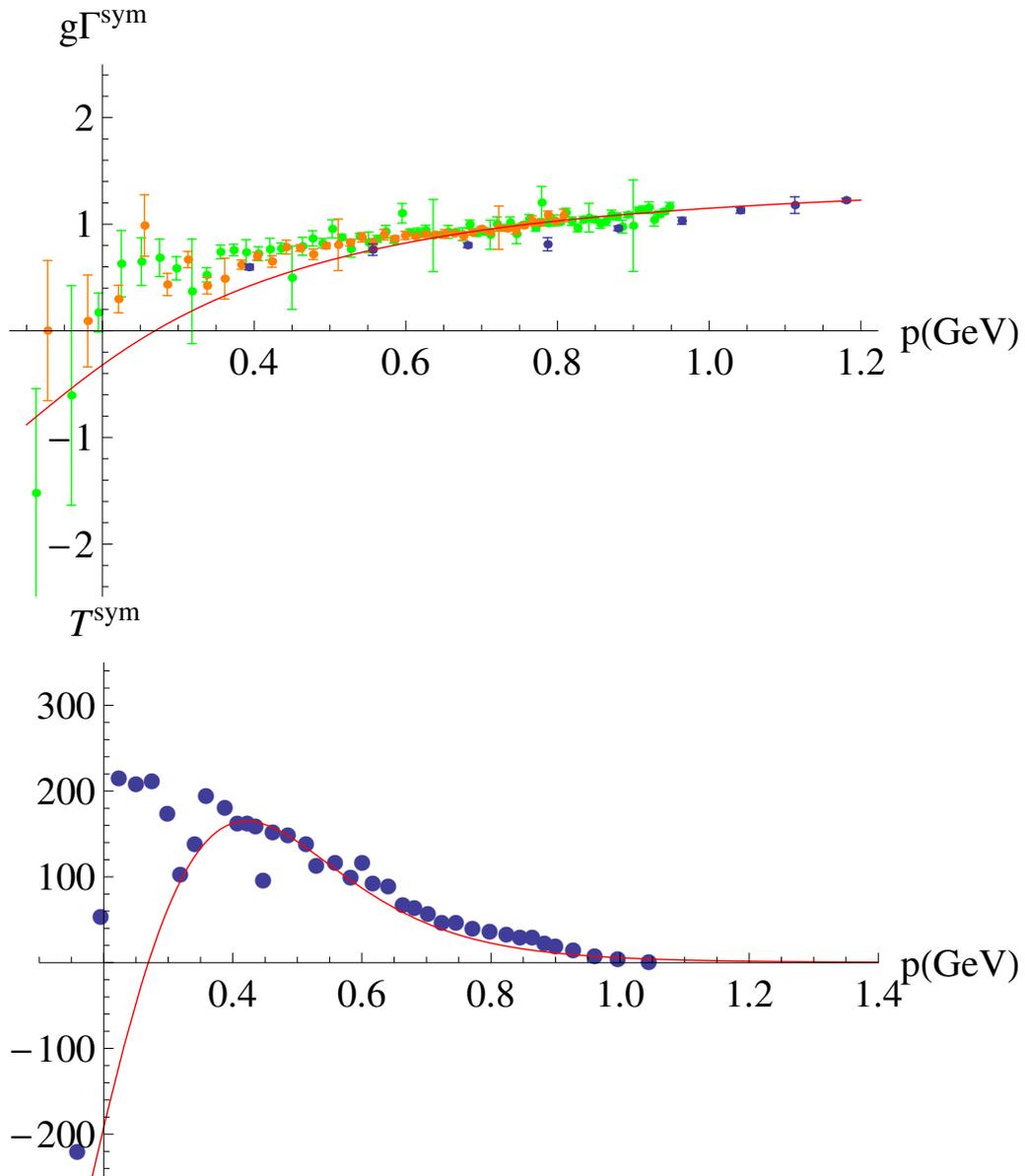


Figura 4.6: Funciones escalares  $g\Gamma_T^{\text{sym}}$  (arriba) y  $T^{\text{sym}}$  (abajo) en función del momento en la configuración simétrica (todos los impulsos iguales) en la aproximación quenched. Los puntos son datos del lattice de [82]. La línea roja corresponde a nuestro cálculo a 1-loop.

En todos los casos la concordancia entre el cálculo teórico y las simulaciones del lattice es impactante, aún más si consideramos que los parámetros del modelo no fueron ajustados para el vértice de tres gluones si no para los propagadores del ghost y del gluón. El ajuste no es sólo cualitativo, si no que los resultados obtenidos con el modelo de Curci-Ferrari se mantienen siempre dentro de las barras de error de los datos del lattice. En la zona en la que las barras de error de los datos del lattice es pequeña la coincidencia es impecable, sólo desviándose un poco en el infrarrojo profundo donde las barras de error del lattice son grandes, ya que ahí comienzan a pesar los efectos provocados por el volumen finito de la red. Vale la pena mencionar que los datos del lattice para las funciones  $T^{asym}$  y  $T^{sym}$  no cuentan con barras de error, y por eso éstas no están en las figuras.

Una característica destacable de nuestros cálculos es que en todos los casos las funciones escalares se vuelven negativas en el infrarrojo. Ésta es una característica del vértice de tres gluones que ha sido reportada en numerosas simulaciones del lattice [82], [85] y en estudios realizados con las ecuaciones de Schwinger-Dyson [62],[84]. Utilizando el modelo de Curci-Ferrari es muy sencillo interpretar el cambio de signo del vértice de tres gluones: la adición de una masa para los gluones implica que para momentos menores a la masa del gluón las correcciones al vértice que contengan gluones virtuales estarán suprimidas por potencias de  $\frac{1}{m^2}$ . En este régimen la contribución dominante al vértice es la del loop de ghosts, ya que éstos no tienen masa y por lo tanto su contribución presenta una singularidad cuando el momento va a 0. Dado que por cada loop de fermiones debemos agregar un factor (-1) al diagrama, la contribución del loop de ghosts es negativa, y al ser la dominante explica el cambio de signo del vértice a impulsos bajos.

## 4.5. Resultados con quarks dinámicos

Ahora presentamos nuestros resultados para la función escalar  $G_1(p^2)$  en la configuración ortogonal, (con dos impulsos ortogonales entre sí) incluyendo los efectos de la dinámica de los quarks. Si bien nuestros cálculos fueron hechos para un número cualquiera de sabores de quarks con masas arbitrarias, utilizamos dos sabores de quarks con igual masa para comparar con las simulaciones del lattice publicadas en [83].

Los resultados para la función  $G_1(p^2)$  se muestran en la figura 4.7. Vemos que en este caso la coincidencia entre los cálculos realizados con el modelo de Curci-Ferrari y las simulaciones del lattice sigue siendo muy buena en el infrarrojo, pero empeora significativamente en el ultravioleta.

Este hecho es llamativo: el modelo de Curci-Ferrari debería dar los mismos resultados que la QCD estándar para impulsos mucho mayores que la masa del gluón, por lo que no esperaríamos sorpresas en el límite ultravioleta de la teoría. Sin embargo, observamos que la escala a la que nuestros cálculos comienzan a separarse del resultado de las simulaciones es de aproximadamente 2.5 GeV. Esta escala es del orden del inverso del paso de la red utilizado en la mayoría de las simulaciones numéricas, y por lo tanto los resultados del lattice a partir de esta escala suelen padecer de defectos generados por la naturaleza discreta de la red hipercúbica. En particular, a estas escalas los resultados son sensibles al hecho de que la red rompe la invariancia

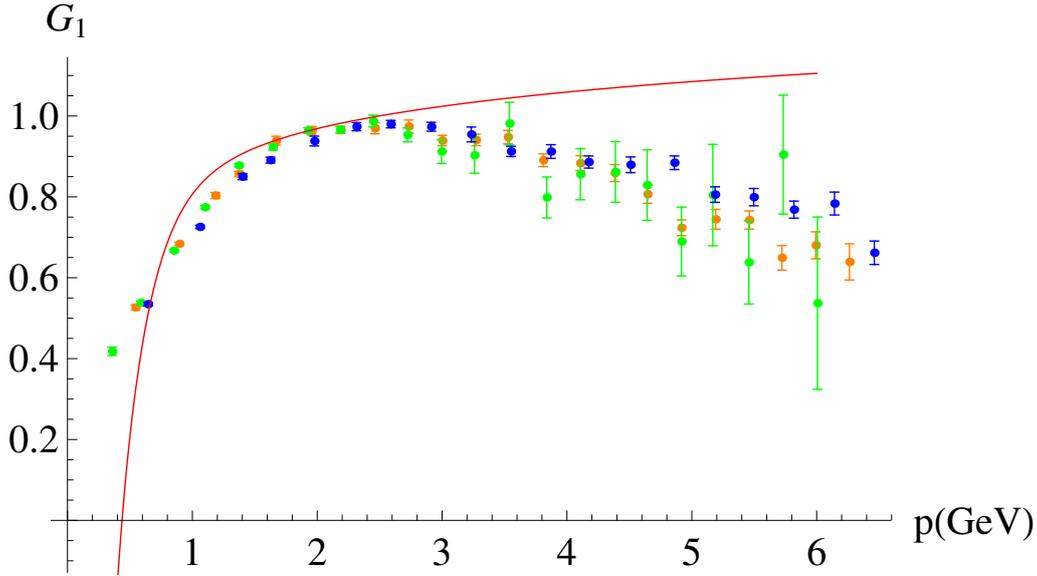


Figura 4.7: Función escalar  $G_1$  en función del momento para dos impulsos externos ortogonales (configuración ortogonal) y dos sabores de quarks degenerados en masa ( $N_f = 2$ ). Los puntos corresponden a datos del lattice de [83]. La línea roja corresponde a nuestro cálculo a 1-loop.

de Lorentz de la teoría, y estos efectos son difíciles de mantener bajo control. Vale la pena observar que en las figuras 4.5 y 4.6 los datos del lattice terminan a escalas de energía mucho menores que 2.5 GeV.

Sospechando que esta era la razón por la que nuestros resultados no coincidían con el lattice a altas energías nos comunicamos con los autores de [83], los cuales confirmaron que los resultados eran preliminares y que si bien eran confiables en el infrarrojo, existía la posibilidad de que sufrieran de errores de discretización en el ultravioleta.

Para confirmar este hecho estudiamos el límite ultravioleta de la función  $G_1(p^2)$ . Para esto notemos que utilizando la ecuación del grupo de renormalización, la función  $G_1$  renormalizada a una escala  $\mu_0$  se vincula con la función  $G_1$  renormalizada a escala  $\mu$  a través de

$$g(\mu_0)G_1(p, \mu_0) = g(\mu)z_A^{-\frac{3}{2}}(\mu, \mu_0)G_1(p, \mu).$$

Utilizando la solución para  $z_A$  en el esquema IS y fijando  $\mu = p$  tenemos

$$G_1(p, \mu_0) = \frac{g^4(p)m^6(\mu_0)}{g^4(\mu_0)m^6(p)}G_1(p, p). \quad (4.24)$$

Dado que  $G_1$  se define normalizando el vértice  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  con su expresión a nivel árbol, ésta es de la forma

$$G_1(p, p) = 1 + O(g^2).$$

La constante de acoplamiento tiende a 0 en el ultravioleta, y por lo tanto en ese

límite  $G_1(p, p) \sim 1$  y el comportamiento de  $G_1(p, \mu_0)$  está dominado por el factor

$$\frac{g(p)}{g(\mu_0)} \stackrel{z^A}{\sim} \frac{g^4(p)m^6(\mu_0)}{g^4(\mu_0)m^6(p)}.$$

Para estudiar su límite ultravioleta podemos integrar las funciones  $\beta_g$  y  $\beta_{m^2}$  en ese límite y obtener expresiones analíticas para  $g(p)$  y  $m(p)$  cuando  $p \gg m$ . El límite ultravioleta de las funciones  $\beta$  del modelo de Curci-Ferrari en presencia de quarks es

$$\begin{aligned} \beta_g &= -\frac{(11N - 4N_f T_f)}{48\pi^2} g^3, \\ \beta_{m^2} &= -\frac{(35N - 16N_f T_f)}{96\pi^2} g^2 m^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde las hemos dejado expresadas en el caso más general de un número arbitrario de sabores  $N_f$  y el grupo  $SU(N)$ .

Integrando la ecuación para  $\beta_g$  entre  $\mu_0$  and  $\mu$  tenemos:

$$g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{2Cg^2(\mu_0)\log(\frac{\mu}{\mu_0}) + 1},$$

donde

$$C = \frac{(11N - 4N_f T_f)}{48\pi^2}.$$

Si sustituímos este resultado en la ecuación para  $\beta_{m^2}$  podemos integrarla para obtener:

$$m^2(\mu) = \frac{m^2(\mu_0)}{(2Cg^2(\mu_0)\log(\frac{\mu}{\mu_0}) + 1)^{\frac{K}{4C}}},$$

con

$$K = \frac{(35N - 16N_f T_f)}{96\pi^2}.$$

En el límite ultravioleta (i.e.  $\mu \gg \mu_0$ ),  $\log(\frac{\mu}{\mu_0}) + 1 \sim \log(\frac{\mu}{\mu_0})$ , y tenemos:

$$\frac{g^4(\mu)}{m^6(\mu)} \sim \frac{g^4(\mu_0)}{m^6(\mu_0)} (2Cg^2(\mu_0)\log(\frac{\mu}{\mu_0}))^{\frac{3K}{2C}-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (4.24), usando las definiciones para  $K$  y  $C$  fijando  $\mu = p$  obtenemos el resultado buscado:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G_1(p, \mu_0) \propto \log \left( \frac{p}{\mu_0} \right)^{\frac{17N - 16N_f T_f}{44N - 16N_f T_f}}. \quad (4.26)$$

En el caso que estamos estudiando tenemos  $N = 3$ ,  $N_f = 2$  y  $T_f = \frac{1}{2}$ . El comportamiento ultravioleta de  $G_1$  es entonces  $\log \left( \frac{p}{\mu_0} \right)^{\frac{35}{116}}$ , el cual es compatible con nuestros resultados.

En conclusión, el cálculo a 1-loop para el vértice de tres gluones incluyendo quarks dinámicos coincide con el lattice en su región de validez, y coincide con la predicción del grupo de renormalización a altas energías.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis hemos utilizado el modelo de Curci-Ferrari en el gauge de Landau [31] para realizar el cálculo a 1-loop del vértice de tres gluones. El modelo de Curci-Ferrari en el gauge de Landau consiste en la adición de un término de masa para el gluón al lagrangiano fijado gauge de Faddeev-Popov.

A nivel fenomenológico, el modelo está motivado por el comportamiento de la constante de acoplamiento y del propagador del gluón a bajas energías observado en simulaciones hechas en el lattice. En las mismas se observa que a diferencia de la predicción que surge de hacer cálculos perturbativos con el lagrangiano de Faddeev-Popov, la constante de acoplamiento no diverge en el infrarrojo si no que se mantiene en valores moderados [36]. Los resultados del lattice también muestran que el propagador del gluón no diverge cuando el momento va a cero, como cabría esperar de una partícula sin masa. En cambio, el mismo satura en el infrarrojo en un valor finito, mostrando el comportamiento típico de una partícula masiva [37–40].

Por otro lado, es sabido que el procedimiento de Faddeev-Popov no está justificado en el infrarrojo [26, 27]. Ésto se debe a que un paso clave del mismo es asumir que la condición de gauge es satisfecha únicamente por una configuración de los campos. Sin embargo, en el infrarrojo esto no es cierto, y existen muchas configuraciones llamadas copias de Gribov que satisfacen la condición de gauge. Por este motivo no existen garantías de que el lagrangiano de Faddeev-Popov sea el lagrangiano fijado gauge correcto para describir el régimen infrarrojo de la Cromodinámica Cuántica.

Estas razones llevaron a proponer al modelo de Curci-Ferrari [30] como alternativa para el estudio de la QCD a bajas energías, ya que el término de masa del gluón permite reproducir los resultados del lattice para el propagador y además regulariza la teoría en el infrarrojo, volviendo posible definir esquemas de renormalización en los que la constante de acoplamiento permanece finita para todo rango de energía [32]. Ésto permite utilizar la teoría de perturbaciones en el régimen infrarrojo, que hasta el momento era considerado no perturbativo. Si bien aún no se puede explicar desde primeros principios el origen del término de masa para el gluón, se ha propuesto que el mismo es una forma de tomar en cuenta los efectos de las copias de Gribov, y que de utilizarse un procedimiento de fijación de gauge bien definido se obtendría un término de estas características en el lagrangiano [41, 42].

El modelo ha sido utilizado para el cálculo de los propagadores del quark, gluón y ghost a 1-loop en [55]. Este resultado fue extendido a 2-loops para los propagadores

del ghost y gluón en [56]. También se han calculado las correcciones a 1-loop el vértice quark-antiquark-gluón [57] y de los vértices ghost-antighost-gluón y tres gluones sin considerar la dinámica de los quarks [58]. En todos los casos la concordancia entre los cálculos realizados con el modelo y las simulaciones del lattice ha sido muy buena.

El objetivo de esta tesis fue continuar con la validación del modelo extendiendo el cálculo realizado en [58] para el vértice de tres gluones en la teoría de Yang-Mills a la teoría incluyendo quarks dinámicos. También estudiamos nuevamente la teoría sin quarks ya que las simulaciones del lattice para el vértice de tres gluones han mejorado mucho en los últimos años, y las barras de error de hoy en día permiten apreciar su comportamiento infrarrojo, mientras que ésto no era el caso al momento de la publicación de [58]. Esta cantidad es de particular interés debido a que su estructura tensorial es más diversa que la de los propagadores y depende de dos momentos independientes, pudiendo así ser comparada en varias configuraciones cinemáticas.

Efectuamos nuestros cálculos en dimensión  $d$  para el caso más general del grupo  $SU(N)$  y un número cualquiera de sabores de quarks  $N_f$  para una configuración arbitraria de impulsos. Parametrizamos el vértice utilizando la descomposición tensorial de Ball-Chiu [69] y obtuvimos expresiones analíticas para cada una de las funciones escalares asociadas a las diferentes estructuras tensoriales del mismo. Realizamos el cálculo de las integrales de Feynman reduciéndolas a Integrales Maestras [72, 73] por medio de la implementación FIRE5 del algoritmo de reducción de Laporta en Mathematica [74, 75]. Renormalizamos el vértice por medio de factores de renormalización para los campos, masas y constante de acoplamiento utilizando el esquema de renormalización Infrared Safe propuesto en [32].

Los únicos parámetros libres que es necesario ajustar para comparar los cálculos realizados con el modelo de Curci-Ferrari con simulaciones del lattice son las condiciones iniciales del flujo de renormalización para la constante de acoplamiento, la masa del gluon y la masa del quark. Los valores elegidos son aquellos que mejor ajustan simultáneamente los cálculos para los propagadores del ghost y del gluón con los resultados del lattice para los mismos. Ésto significa que (a menos de una constante multiplicativa) no es necesario ajustar ningún parámetro extra para el vértice de tres gluones, y el cálculo realizado es una predicción pura del modelo de Curci-Ferrari.

Comparamos nuestros resultados con datos del lattice para  $d = 4$  y el grupo  $SU(3)$  provenientes de [82] para la teoría de Yang-Mills y de [83] para la teoría unquenched con  $N_f = 2$ . Utilizamos tres configuraciones de impulsos particulares: una con los tres impulsos externos de igual módulo, una con un impulso externo nulo y una con dos impulsos ortogonales entre sí. A la hora de realizar la comparación tuvimos en cuenta los efectos del Grupo de Renormalización sobre la constante de acoplamiento, la masa del gluón y el vértice renormalizado.

En todos los casos obtuvimos una coincidencia muy buena entre nuestros resultados a 1-loop y el lattice en el régimen infrarrojo, respaldando nuevamente a la idea de que el modelo de Curci-Ferrari permite una descripción perturbativa de la QCD en este régimen. La única desviación significativa encontrada entre nuestros cálculos y el lattice fue para los datos de [83] a energías mayores a 2,5 GeV. Utilizando la ecuación del Grupo de Renormalización argumentamos que el límite UV del vértice

coincide con nuestros resultados, y la explicación más probable a esta diferencia con el lattice se debe a errores de discretización en los resultados de [83].

Nuestros resultados también reproducen el cambio de signo en el vértice de tres gluones en el infrarrojo profundo reportado en numerosos estudios del lattice [82], [84, 85]. El modelo de Curci-Ferrari ofrece una explicación sencilla a este fenómeno, estando causado por la divergencia del diagrama con un loop de ghosts cuando  $q \rightarrow 0$

Los resultados de esta tesis son una nueva contribución a la validación del modelo de Curci-Ferrari como un método para acceder al régimen infrarrojo de la Cromodinámica Cuántica de forma perturbativa y sin agregar campos extra ni modificar las reglas de Feynman del lagrangiano de Faddeev-Popov a menos de la masa en el propagador del gluón. Ésto permite realizar de manera relativamente sencilla cálculos que resultan intratables por otros métodos. Concluimos que el modelo de Curci-Ferrari tiene mucho potencial para estudiar la Cromodinámica Cuántica a bajas energías, y confiamos que en el futuro será utilizado para el cálculo de cantidades más complejas. Por otro lado, explicar el origen de la masa del gluón desde primeros principios y la definición del espacio físico correcto para el modelo continúan siendo preguntas abiertas. Encontrar sus respuestas podría arrojar luz sobre la naturaleza de la QCD en el régimen infrarrojo.

# Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Lett.* **8** (1964), 214-215 doi:10.1016/S0031-9163(64)92001-3
- [2] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1,” CERN-TH-401.
- [3] J. D. Bjorken, E. A. Paschos, “Inelastic Electron-Proton and  $\gamma$ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon,” *Phys. Rev.* **185** (1969), 1975-198, doi = 10.1103/PhysRev.185.1975
- [4] R. P. Feynman, “Very high-energy collisions of hadrons,” *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 1415-1417 doi:10.1103/PhysRevLett.23.1415
- [5] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,” *Phys. Rev.* **96** (1954), 191-195 doi:10.1103/PhysRev.96.191
- [6] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field,” *Phys. Lett. B* **25** (1967), 29-30 doi:10.1016/0370-2693(67)90067-6
- [7] G. 't Hooft, “Renormalization of Massless Yang-Mills Fields,” *Nucl. Phys. B* **33** (1971), 173-199 doi:10.1016/0550-3213(71)90395-6
- [8] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1346-1349 doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [9] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1343-1346 doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343
- [10] S. R. Coleman and D. J. Gross, “Price of asymptotic freedom,” *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973), 851-854 doi:10.1103/PhysRevLett.31.851
- [11] W. A. Bardeen, H. Fritzsch and M. Gell-Mann, “Light cone current algebra,  $\pi^0$  decay, and  $e^+e^-$  annihilation,” [arXiv:hep-ph/0211388 [hep-ph]].
- [12] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, “Advantages of the Color Octet Gluon Picture,” *Phys. Lett. B* **47** (1973), 365-368 doi:10.1016/0370-2693(73)90625-4
- [13] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,”
- [14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,”

- [15] S. Weinberg, “The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications,”
- [16] H. Georgi, “Lie algebras in particle physics,” *Front. Phys.* **54** (1999), 1-320
- [17] R. P. Feynman, “Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367-387 doi:10.1103/RevModPhys.20.367
- [18] T. Muta, “Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, (3rd ed.),”
- [19] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 1.,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951), 452-455 doi:10.1073/pnas.37.7.452
- [20] M. Fernández Lakatos, “Rol de los diversos acoplamientos en la cromodinámica cuántica infrarroja” (Tesis de Maestría), (2018), Universidad de la República
- [21] S. Bethke, “Experimental tests of asymptotic freedom,” *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **54A** (1997), 314-326 doi:10.1016/S0920-5632(97)00061-3 [arXiv:hep-ex/9609014 [hep-ex]].
- [22] L. von Smekal, R. Alkofer and A. Hauck, “The Infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 3591-3594 doi:10.1103/PhysRevLett.79.3591 [arXiv:hep-ph/9705242 [hep-ph]].
- [23] M. Q. Huber, “Correlation functions of Landau gauge Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D* **101** (2020) no.11, 11 doi:10.1103/PhysRevD.101.114009 [arXiv:2003.13703 [hep-ph]].
- [24] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, “Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” *Phys. Rept.* **363** (2002), 223-386 doi:10.1016/S0370-1573(01)00098-9 [arXiv:hep-ph/0005122 [hep-ph]].  
[25]
- [25] I. Montvay and G. Munster, “Quantum fields on a lattice,” doi:10.1017/CBO9780511470783
- [26] V. N. Gribov, “Quantization of Nonabelian Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **139** (1978), 1 doi:10.1016/0550-3213(78)90175-X
- [27] N. Vandersickel and D. Zwanziger, “The Gribov problem and QCD dynamics,” *Phys. Rept.* **520** (2012), 175-251 doi:10.1016/j.physrep.2012.07.003 [arXiv:1202.1491 [hep-th]].
- [28] D. Dudal, J. A. Gracey, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, “A Refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results,” *Phys. Rev. D* **78** (2008), 065047 doi:10.1103/PhysRevD.78.065047 [arXiv:0806.4348 [hep-th]].
- [29] P. van Baal, “More (thoughts on) Gribov copies,” *Nucl. Phys. B* **369** (1992), 259-275 doi:10.1016/0550-3213(92)90386-P

- [30] M. Tissier and N. Wschebor, “Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory,” *Phys. Rev. D* **82** (2010), 101701 doi:10.1103/PhysRevD.82.101701 [arXiv:1004.1607 [hep-ph]].
- [31] G. Curci and R. Ferrari, “On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields,” *Nuovo Cim. A* **32** (1976), 151-168 doi:10.1007/BF02729999
- [32] M. Tissier and N. Wschebor, “An Infrared Safe perturbative approach to Yang-Mills correlators,” *Phys. Rev. D* **84** (2011), 045018 doi:10.1103/PhysRevD.84.045018 [arXiv:1105.2475 [hep-th]].
- [33] J. A. Gracey, M. Peláez, U. Reinosa and M. Tissier, “Two loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model,” *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.3, 034023 doi:10.1103/PhysRevD.100.034023 [arXiv:1905.07262 [hep-th]].
- [34] M. Pelaez, M. Tissier and N. Wschebor, “Three-point correlation functions in Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D* **88** (2013), 125003 doi:10.1103/PhysRevD.88.125003 [arXiv:1310.2594 [hep-th]].
- [35] B. Blossier, P. Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, X. Du, M. Gravina, V. Morenas, O. Pene, K. Petrov and J. Rodríguez-Quintero, “Ghost-gluon coupling, power corrections and  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$  from lattice QCD with a dynamical charm,” *Phys. Rev. D* **85** (2012), 034503 doi:10.1103/PhysRevD.85.034503 [arXiv:1110.5829 [hep-lat]].
- [36] P. Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, V. Morenas, O. Pène, K. Petrov and J. Rodríguez-Quintero, “Three-gluon running coupling from lattice QCD at  $N_f = 2 + 1 + 1$ : a consistency check of the OPE approach,” *JHEP* **04** (2014), 086 doi:10.1007/JHEP04(2014)086 [arXiv:1310.4087 [hep-ph]].
- [37] O. Oliveira and P. J. Silva, “Infrared Gluon and Ghost Propagators Exponents From Lattice QCD,” *Eur. Phys. J. C* **62** (2009), 525-534 doi:10.1140/epjc/s10052-009-1064-5 [arXiv:0705.0964 [hep-lat]].
- [38] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker and A. Sternbeck, “The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes,” *PoS LATTICE2007* (2007), 290 doi:10.22323/1.042.0290 [arXiv:0710.1968 [hep-lat]].
- [39] A. Cucchieri and T. Mendes, “What’s up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices,” *PoS LATTICE2007* (2007), 297 doi:10.22323/1.042.0297 [arXiv:0710.0412 [hep-lat]].
- [40] D. Dudal, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, “New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach,” *Phys. Rev. D* **77** (2008), 071501 doi:10.1103/PhysRevD.77.071501 [arXiv:0711.4496 [hep-th]].

- [41] J. Serreau, M. Tissier and A. Tresmontant, “Influence of Gribov ambiguities in a class of nonlinear covariant gauges,” *Phys. Rev. D* **92** (2015), 105003 doi:10.1103/PhysRevD.92.105003 [arXiv:1505.07270 [hep-th]].
- [42] J. Serreau, “Lifting the Gribov ambiguity in Yang-Mills theories,” *PoS ConfinementX* (2012), 072 doi:10.22323/1.171.0072 [arXiv:1301.3359 [hep-th]].
- [43] M. Peláez, “Infrared correlation functions in Quantum Chromodynamics,” (Tesis de Doctorado), Universidad de la República - Universidad Pierre et Marie Curie Paris VI
- [44] I. Ojima, “Comments on Massive and Massless Yang-Mills Lagrangians With a Quartic Coupling of Faddeev-popov Ghosts,” *Z. Phys. C* **13** (1982), 173 doi:10.1007/BF01547683
- [45] J. de Boer, K. Skenderis, P. van Nieuwenhuizen and A. Waldron, “On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons,” *Phys. Lett. B* **367** (1996), 175-182 doi:10.1016/0370-2693(95)01455-1 [arXiv:hep-th/9510167 [hep-th]].
- [46] C. W. Bernard, C. Parrinello and A. Soni, “A Lattice study of the gluon propagator in momentum space,” *Phys. Rev. D* **49** (1994), 1585-1593 doi:10.1103/PhysRevD.49.1585 [arXiv:hep-lat/9307001 [hep-lat]].
- [47] D. B. Leinweber *et al.* [UKQCD], “Gluon propagator in the infrared region,” *Phys. Rev. D* **58** (1998), 031501 doi:10.1103/PhysRevD.58.031501 [arXiv:hep-lat/9803015 [hep-lat]].
- [48] S. Furui and H. Nakajima, “What the Gribov copy tells about confinement and the theory of dynamical chiral symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **70** (2004), 094504 doi:10.1103/PhysRevD.70.094504 [arXiv:hep-lat/0403021 [hep-lat]].
- [49] A. Cucchieri, T. Mendes and A. R. Taurines, “Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator,” *Phys. Rev. D* **71** (2005), 051902 doi:10.1103/PhysRevD.71.051902 [arXiv:hep-lat/0406020 [hep-lat]].
- [50] A. Sternbeck, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, A. Schiller and I. L. Bogolubsky, “Lattice study of the infrared behavior of QCD Green’s functions in Landau gauge,” *PoS LAT2006* (2006), 076 doi:10.22323/1.032.0076 [arXiv:hep-lat/0610053 [hep-lat]].
- [51] P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, M. B. Parappilly, A. Sternbeck, L. von Smekal, A. G. Williams and J. b. Zhang, “Scaling behavior and positivity violation of the gluon propagator in full QCD,” *Phys. Rev. D* **76** (2007), 094505 doi:10.1103/PhysRevD.76.094505 [arXiv:hep-lat/0703022 [hep-lat]].
- [52] J. M. Cornwall, “Positivity violations in QCD,” *Mod. Phys. Lett. A* **28** (2013), 1330035 doi:10.1142/S0217732313300358 [arXiv:1310.7897 [hep-ph]].
- [53] M. Gell-Mann and F. E. Low, “Quantum electrodynamics at small distances,” *Phys. Rev.* **95** (1954), 1300-1312 doi:10.1103/PhysRev.95.1300

- [54] S. Weinberg, “WHY THE RENORMALIZATION GROUP IS A GOOD THING,” Cambridge 1981, Proceedings, Asymptotic Realms Of Physics
- [55] M. Peláez, M. Tissier and N. Wschebor, “Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge,” *Phys. Rev. D* **90** (2014), 065031 doi:10.1103/PhysRevD.90.065031 [arXiv:1407.2005 [hep-th]].
- [56] J. A. Gracey, M. Peláez, U. Reinosa and M. Tissier, “Two loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model,” *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.3, 034023 doi:10.1103/PhysRevD.100.034023 [arXiv:1905.07262 [hep-th]].
- [57] M. Peláez, M. Tissier and N. Wschebor, “Quark-gluon vertex from the Landau gauge Curci-Ferrari model,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) no.4, 045012 doi:10.1103/PhysRevD.92.045012 [arXiv:1504.05157 [hep-th]].
- [58] M. Peláez, M. Tissier and N. Wschebor, “Three-point correlation functions in Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D* **88** (2013), 125003 doi:10.1103/PhysRevD.88.125003 [arXiv:1310.2594 [hep-th]].
- [59] M. Fernández and M. Peláez, “On the contribution of different coupling constants in the infrared regime of Yang–Mills theory: A Curci–Ferrari approach,” *Int. J. Mod. Phys. A* **34** (2019) no.32, 1950214 doi:10.1142/S0217751X19502142 [arXiv:1906.01590 [hep-th]].
- [60] A. G. Duarte, O. Oliveira and P. J. Silva, “Reply to Lattice gluon and ghost propagators and the strong coupling in pure  $SU(3)$  Yang-Mills theory: Finite lattice spacing and volume effects,” *Phys. Rev. D* **96** (2017) no.9, 098502 doi:10.1103/PhysRevD.96.098502 [arXiv:1704.02864 [hep-lat]].
- [61] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier and N. Wschebor, “How nonperturbative is the infrared regime of Landau gauge Yang-Mills correlators?,” *Phys. Rev. D* **96** (2017) no.1, 014005 doi:10.1103/PhysRevD.96.014005 [arXiv:1703.04041 [hep-th]].
- [62] A. C. Aguilar, F. De Soto, M. N. Ferreira, J. Papavassiliou, J. Rodríguez-Quintero and S. Zafeiropoulos, “Gluon propagator and three-gluon vertex with dynamical quarks,” *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) no.2, 154 doi:10.1140/epjc/s10052-020-7741-0 [arXiv:1912.12086 [hep-ph]].
- [63] G. Eichmann, R. Williams, R. Alkofer and M. Vujanovic, “Three-gluon vertex in Landau gauge,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.10, 105014 doi:10.1103/PhysRevD.89.105014 [arXiv:1402.1365 [hep-ph]].
- [64] S. Weinberg, “Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973), 494-497 doi:10.1103/PhysRevLett.31.494
- [65] R. Brock *et al.* [CTEQ], “Handbook of perturbative QCD: Version 1.0,” *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995), 157-248 doi:10.1103/RevModPhys.67.157

- [66] A. I. Davydychev and P. Osland, “On-shell two loop three gluon vertex,” *Phys. Rev. D* **59** (1999), 014006 doi:10.1103/PhysRevD.59.014006 [arXiv:hep-ph/9806522 [hep-ph]].
- [67] A. I. Davydychev, P. Osland and O. V. Tarasov, “Two loop three gluon vertex in zero momentum limit,” *Phys. Rev. D* **58** (1998), 036007 doi:10.1103/PhysRevD.58.036007 [arXiv:hep-ph/9801380 [hep-ph]].
- [68] J. A. Gracey, “Off-shell two-loop QCD vertices,” *Phys. Rev. D* **90** (2014) no.2, 025014 doi:10.1103/PhysRevD.90.025014 [arXiv:1406.0649 [hep-ph]].
- [69] J. S. Ball and T. W. Chiu, “Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 2.,” *Phys. Rev. D* **22** (1980), 2550 doi:10.1103/PhysRevD.22.2550
- [70] N. V. Smolyakov, “Furry theorem for non-abelian gauge Lagrangians,” *Theor. Math. Phys* **50** (1982) 225-228 <https://doi.org/10.1007/BF01016449>
- [71] A. I. Davydychev, P. Osland and L. Saks, “Quark mass dependence of the one loop three gluon vertex in arbitrary dimension,” *JHEP* **08** (2001), 050 doi:10.1088/1126-6708/2001/08/050 [arXiv:hep-ph/0105072 [hep-ph]].
- [72] G. Passarino and M. J. G. Veltman, “One Loop Corrections for  $e^+ e^-$  Annihilation Into  $\mu^+ \mu^-$  in the Weinberg Model,” *Nucl. Phys. B* **160** (1979), 151-207 doi:10.1016/0550-3213(79)90234-7
- [73] S. P. Martin, “Evaluation of two loop selfenergy basis integrals using differential equations,” *Phys. Rev. D* **68** (2003), 075002 doi:10.1103/PhysRevD.68.075002 [arXiv:hep-ph/0307101 [hep-ph]].
- [74] A. V. Smirnov, “FIRE5: a C++ implementation of Feynman Integral REduction,” *Comput. Phys. Commun.* **189** (2015), 182-191 doi:10.1016/j.cpc.2014.11.024 [arXiv:1408.2372 [hep-ph]].
- [75] S. Laporta, “High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000), 5087-5159 doi:10.1016/S0217-751X(00)00215-7 [arXiv:hep-ph/0102033 [hep-ph]].
- [76] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, “Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops,” *Nucl. Phys. B* **192** (1981), 159-204 doi:10.1016/0550-3213(81)90199-1
- [77] R. Doria, F. Rabelo de Carvalho and S. P. Sorella, “Landau gauge and anti-BRS symmetry,” *Mod. Phys. Lett.* **6** (1991), 3705-3710 doi:10.1142/S0217732391004292
- [78] J. A. Gracey, “Three loop  $\overline{\text{MS}}$  renormalization of the Curci-Ferrari model and the dimension two BRST invariant composite operator in QCD,” *Phys. Lett. B* **552** (2003), 101-110 doi:10.1016/S0370-2693(02)03077-0 [arXiv:hep-th/0211144 [hep-th]].

- [79] D. Dudal, J. A. Gracey, V. E. R. Lemes, R. F. Sobreiro, S. P. Sorella and H. Verschelde, “Renormalization properties of the mass operator  $A(a)(\mu) A(a)(\mu)$  in three dimensional Yang-Mills theories in the Landau gauge,” *Annals Phys.* **317** (2005), 203-219 doi:10.1016/j.aop.2004.11.012 [arXiv:hep-th/0409254 [hep-th]].
- [80] N. Wschebor, “Some non-renormalization theorems in Curci-Ferrari model,” *Int. J. Mod. Phys. A* **23** (2008), 2961-2973 doi:10.1142/S0217751X08040469 [arXiv:hep-th/0701127 [hep-th]].
- [81] J. C. Taylor, “Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field,” *Nucl. Phys. B* **33** (1971), 436-444 doi:10.1016/0550-3213(71)90297-5
- [82] Ph. Boucaud, F. De Soto, J. Rodríguez-Quintero, and S. Zafeiropoulos, *Phys. Rev. D* **95** (2017), 114503. *Phys. Rev. D* **95**, 114503 Refining the detection of the zero crossing for the three-gluon vertex in symmetric and asymmetric momentum subtraction schemes
- [83] A. Sternbeck, P-H. Balduf, A. Kizilersu, O. Oliveira, P.J. Silva, J. Skullerud and A.G. Williams “Triple-gluon and quark-gluon vertex from lattice QCD in Landau gauge,” *PoS(LATTICE2016)349*, (2017) [arXiv:1702.00612 [hep-lat]]  
**P.-H Balduf, A. Sternbeck in preparation.**
- [84] A. Athenodorou, D. Binosi, P. Boucaud, F. De Soto, J. Papavassiliou, J. Rodriguez-Quintero and S. Zafeiropoulos, “On the zero crossing of the three-gluon vertex,” *Phys. Lett. B* **761** (2016), 444-449 doi:10.1016/j.physletb.2016.08.065 [arXiv:1607.01278 [hep-ph]].
- [85] A. G. Duarte, O. Oliveira and P. J. Silva, “Further Evidence For Zero Crossing On The Three Gluon Vertex,” *Phys. Rev. D* **94** (2016) no.7, 074502 doi:10.1103/PhysRevD.94.074502 [arXiv:1607.03831 [hep-lat]].