

FACULTAD DE INGENIERIA Y AGRIMENSURA

MONTEVIDEO

---

INSTITUTO DE MAQUINAS

Publicación Nº 27

Mecánica del transporte de fondo  
y en suspensión en los  
cursos de agua

Por

Prof. Ing. O. J. MAGGIOLO

*Apartado del Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura — Vol. IX,  
Nº 1 — Marzo de 1965*

MONTEVIDEO — URUGUAY

1 9 6 5

# Mecánica del transporte de fondo y en suspensión en cursos de agua

O. J. MAGGIOLO

Departamento de Mecánica de los Fluidos  
Facultad de Ingeniería y Agrimensura  
(MONTEVIDEO, URUGUAY)

## INTRODUCCION

El presente trabajo corresponde, con leves modificaciones, al cursillo que sobre la Mecánica del Transporte de Fondo y el Transporte en Suspensión, dictó el autor en junio de 1964, en el Instituto de Cálculo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Su objeto fue el de iniciar un grupo de trabajo destinado a comenzar estudios conducentes a la formulación de un modelo matemático para analizar el problema de la erosión de los fondos móviles.

El trabajo se divide en tres capítulos. El primero toca los puntos fundamentales de la Teoría de la Turbulencia, analizándose resultados recientes de la teoría de la longitud de mezcla. En base a ella y a las medidas de Laufer sobre la distribución de las componentes turbulentas  $|v'_x|$ ,  $|v'_y|$ ,  $|v'_z|$ , se da una explicación del hecho, sorprendente, de que el coeficiente de Boussinesq,  $\epsilon$ , se anule en el eje de un conducto o en la superficie de un escurrimiento libre. Se muestra aquí que la hipótesis inconsistente es la de igualar las dos dimensiones lineales  $l$  y  $l'$  de la teoría original de Prandtl.

El segundo capítulo se refiere al Transporte de Fondo, pasándose en revista las distintas aproximaciones que se hace al fenómeno. Se presenta un ábaco experimental que divide al diagrama  $\tau^\circ$  función de  $R^\circ$  en zonas de reposo o movimiento de fondo, con formación de rizos, dunas, fondos planos y antidunas,

de acuerdo a la concepción original de Shields, agregando los resultados experimentales de autores recientes.

El tercer capítulo se dedica al fenómeno del transporte en suspensión, con el objetivo fundamental de determinar una expresión de la distribución de concentración en altura y una condición de comienzo de suspensión, que se aplica para trazar en el diagrama de Shields una curva de separación entre las zonas con y sin transporte en suspensión, la que se obtiene de la aplicación directa de la teoría de la turbulencia.

El autor agradece al Prof. Sadovsky; Director del Instituto de Cálculo y al Prof. M. Gradowczyk, del mismo Instituto la invitación a rendir la exposición que ha dado lugar a la presente publicación.

## C A P I T U L O I

### *Elementos de Teoría de la Turbulencia necesarios para el estudio de la suspensión*

#### T-I) *Introducción*

La teoría de la turbulencia supone que las velocidades del fluido pueden dividirse en un valor medio  $\bar{v}$  y un elemento fluctuante  $v'$ , de modo que

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

$$v_y = \bar{v}_y + v'_y$$

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

$$\text{siendo } \bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} v_x d\tau ; \bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} v_y d\tau ; \bar{v}_z = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} v_z d\tau$$

$\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  son los valores medios de  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , en el punto  $x$  y  $z$ , en el intervalo de tiempo  $t - \frac{1}{2} T$  hasta  $t + \frac{1}{2} T$ .

Los valores medios pueden ser considerados en el instante  $t$  fijo, pero como integral tomar un área

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v_x d\Omega ; \bar{v}_y = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v_y d\Omega ; \bar{v}_z = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v_z d\Omega$$

Sea cual sea la forma de definir el valor medio, en todos los casos indicaremos a éste con la barra encima de la letra.

De acuerdo a esta convención

$$\bar{v}'_x = 0 \quad \bar{v}'_y = 0 \quad \bar{v}'_z = 0$$

Reynolds ha mostrado que las ecuaciones de Navier-Stokes, en el caso de los movimientos turbulentos, se pueden escribir en función de los valores medios, pero agregando términos correctivos al tensor de tensiones.

Recordando que el proceso de promediar está sujeto a las reglas:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} ; \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} ; \overline{fg} = \bar{f} \bar{g} ; \int \bar{f} ds = \int \overline{f} ds$$

Las ecuaciones quedan escritas así:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_x \bar{v}_z)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \bar{v}'_x \bar{v}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_x \bar{v}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'_x \bar{v}'_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_y^2}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_y \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_y \bar{v}_z)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \bar{v}'_y \bar{v}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'_y \bar{v}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'_y \bar{v}'_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_z^2}{\partial z} + \frac{\partial (\bar{v}_z \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_z \bar{v}_y)}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 u -$$

$$- \left( \frac{\partial \overline{v'_z v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_z}}{\partial z} \right)$$

Es decir que se introducen seis incógnitas nuevas que son  $\overline{v'_x v'_x}$ ,  $\overline{v'_x v'_y}$ ,  $\overline{v'_x v'_z}$ ,  $\overline{v'_y v'_y}$ ,  $\overline{v'_y v'_z}$ ,  $\overline{v'_z v'_z}$ .

Las ecuaciones de Navier-Stokes, escritas en la forma de Reynolds quedan entonces indeterminadas, pues resultan seis incógnitas más que ecuaciones.

Las componentes de las tensiones son ahora del tipo:

Tensiones normales:

$$N_x = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho \overline{v'_x{}^2}$$

$$N_y = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho \overline{v'_y{}^2}$$

$$N_z = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \rho \overline{v'_z{}^2}$$

Tensiones rasantes:

$$\tau_{xy} = \mu \left[ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right] - \rho \overline{v'_x v'_y}$$

$$\tau_{yz} = \mu \left[ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right] - \rho \overline{v'_y v'_z}$$

$$\tau_{zx} = \mu \left[ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right] - \rho \overline{v'_z v'_x}$$

Se ve que a la tensión viscosa se agrega una tensión turbulenta que en el caso de las tensiones rasantes tienen expresiones del tipo

$$\tau'_{ij} = - \rho \overline{v'_i v'_j}$$

Las condiciones de borde que deben satisfacerse son las mismas que en el caso del movimiento laminar, es decir, componente de la velocidad normal y tangencial nulas en paredes sólidas.

Las componentes  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  deben ser nulas en contacto con la pared, y ser muy pequeñas en zonas adyacentes a la misma. Por eso en esa zona, las tensiones de origen viscoso son las más importantes, mientras que en zonas lejanas de la pared, las componentes turbulentas de las tensiones son preponderantes. Este es el origen de la existencia de una subcapa laminar junto a las paredes de todo cuerpo sumergido. La otra zona, es la de la capa límite turbulenta.

## T-II) *Teorías de la longitud de mezcla*

Con objeto de determinar las componentes turbulentas de la velocidad,  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$ , se han desarrollado numerosas teorías, que en el fondo tratan de correlacionar estas componentes turbulentas con los valores medios  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  o sus derivadas.

Dos grupos de teorías se han esbozado. Las de la longitud de mezcla de Prandtl, tomada de la concepción de Maxwell de la Teoría Cinética de los Gases, y las teorías estadísticas, que de acuerdo a Schlichting (1) "no han alcanzado aún ninguna significación práctica para los ingenieros".

Por esta circunstancia, aún cuando la teoría de la longitud de mezcla está llena de inconsistencias, es por el momento la única que permite llegar a ciertas condiciones de carácter práctico. Las teorías de la longitud de mezcla son las únicas, en sus diferentes variantes, que han permitido obtener por ejemplo, leyes de distribución de la velocidad en las capas límites, y expresiones glo-

(1) Schlichting "Boundary Layer Theory" — Preface to the first German Edition — 1950.

bales de las pérdidas de carga en conductores y canales, o tensiones rasantes en placas planas.

Serán por consiguiente las que en principio dan más esperanza de llegar a resultados prácticos, para interpretar fenómenos que dependen de la turbulencia.

Comenzaremos por definir que existen algunas propiedades de los fluidos que son transferibles de una capa a otra por el proceso de agitación turbulenta en la mismo forma que calor y momento se transfieren en un fluido no turbulento, como consecuencia de la agitación molecular.

Una de las magnitudes transferibles por turbulencia es el momento o cantidad de movimiento asociado a una masa de fluido, otra la concentración  $C$ , expresada por ejemplo en gr/l de una sustancia suspendida en la masa de un fluido.

Sea un fluido que escurre con  $\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$

$$\bar{u} = \bar{v}_x \neq 0 \quad (u = u(y))$$

y sean  $v'_x$ ,  $v'_y$  y  $v'_z$  las tres componentes turbulentas de  $u$ , que son naturalmente distintas de cero.

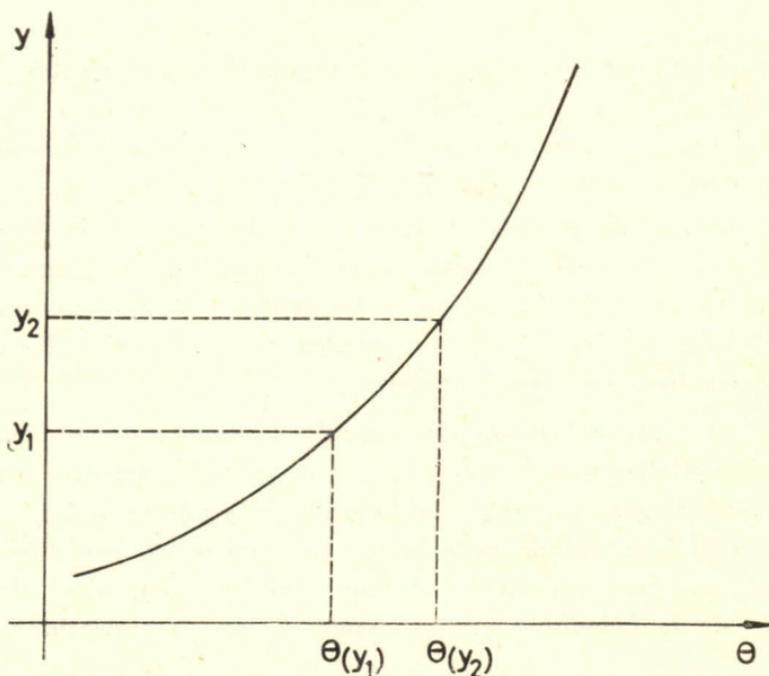


Fig. N° 1

Sea  $\theta$  una propiedad cualquiera, transferible de capa a capa de fluido por turbulencia (Fig. 1).

Supongamos  $\theta = \theta(y)$  y supongamos también que una partícula que sale de la capa  $y = y_1$ , perpendicularmente como consecuencia de la componente  $v'_y$ , lleva con ella el valor  $\theta(y_1)$  valor medio de  $\theta$  en  $y = y_1$ . Cuando llegamos hasta la capa  $y_2$ , donde el valor medio de  $\theta$  es  $\theta(y_2)$ , la diferencia de ambos valores es

$$\Delta\theta = \theta(y_2) - \theta(y_1)$$

de modo que el gasto medio de transferencia, a través de una superficie unitaria perpendicular a  $y$  es

$$Q = \overline{v'_y [\theta(y_1) - \theta(y_2)]}$$

la barra indica valor medio en  $y = y_2$ .

Desarrollando  $\theta(y)$  en serie de Taylor y suponiendo que los términos de orden superior al primero son despreciables, resulta

$$\theta(y_1) - \theta(y_2) = - (y_1 - y_2) \frac{d\theta}{dy}$$

y por consiguiente

$$Q = - \overline{v'_y (y_2 - y_1)} \frac{d\theta}{dy}$$

Si designamos con  $|\overline{v'_y}| = \sqrt{\overline{v'^2}}$ , el valor medio cuadrático de la velocidad turbulenta, suponemos que

$$v'_y (y_2 - y_1) = |\overline{v'_y}| l'$$

siendo  $l'$  la llamada longitud de mezcla.

Por consiguiente

$$Q = - |\overline{v'_y}| l' \frac{d\theta}{dy}$$

T-II-1) *Teoría de la transferencia de la cantidad de movimiento.*

Prandtl supone que la cantidad de movimiento es una magnitud transferible.

En este caso la magnitud genérica  $\theta$  es  $\bar{\rho u}$ .  $Q$  será en consecuencia la transferencia de cantidad de movimiento en la dirección  $y$ , y coincidirá con la tensión de Reynolds  $\tau' = -\rho \overline{v'_x v'_y}$

$$\tau' = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho l' \left| \overline{v'_y} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

pudiéndose ver que  $\rho l' |\overline{v'_y}|$  tiene la dimensión de una viscosidad; el producto  $l' |\overline{v'_y}|$  se le designa con el nombre de coeficiente de Boussinesq  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = |\overline{v'_y}| l'$$

A su vez Prandtl supone

$$|\overline{v'_y}| l' = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

con lo cual resulta, que la tensión rasante de origen turbulento tiene por expresión:

$$\tau' = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Evidentemente no hay razón para suponer que  $l$  y  $l'$  sean iguales. De acuerdo a Goldstein <sup>(1)</sup>  $l$  se puede determinar siempre que se conozca  $\tau$ , pero  $l'$  necesita el conocimiento de  $\tau$  y  $|\overline{v'_y}|$ . No hay, hasta el momento, un procedimiento para verificar experimentalmente la teoría de la longitud de mezcla. Su verificación se realiza a partir de las consecuencias de las hipótesis realizadas.

(1) Goldstein "Modern Developments in Fluid Dynamics" — Chapter V, pág. 208 — Oxford — 1950.

Dentro de esta serie de hipótesis más o menos arbitrarias, destinadas a simplificar el tratamiento matemático del problema, supondremos

$$l' = l$$

con lo cual queda

$$|\bar{v}'_y| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

### T-II-2) *Hipótesis sobre la longitud de mezcla.*

Nos concretamos a citar las teorías que más interés tienen, por los resultados positivos que se han obtenido en la determinación de la distribución de velocidad en conductos y canales:

#### T-II-2,1) 1º) *Hipótesis de Prandtl*

Desarrollada para contemplar sólo una zona adyacente a la pared, establece que

$$l = k y$$

con  $k$  una constante de carácter universal, llamada la constante de turbulencia o constante de von Karman.

De aquí, sustituyendo en la expresión de la tensión rasante tendremos:

$$\tau' = \rho k^2 y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

De esta ecuación se deduce que  $\tau' = \tau'(y)$  y una nueva hipótesis consiste en suponer que en una zona adyacente a la pared, del mismo espesor que aquella en que  $l = k y$ , se cumple que la tensión es constante:

$$\tau' = \tau_0 = \rho u_*^2$$

siendo por definición  $u_*$  la llamada velocidad de fricción.

Sustituyendo nuevamente en la expresión anterior

$$u_* = k y \frac{d\bar{u}}{dy}$$

se deduce

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} L y/y_0$$

### T-II-2,2) Hipótesis de von Karman

Es la hipótesis de la similitud, estableciendo que la forma de la curva de defecto de velocidad,  $u_{max} - \bar{u}$ , es una función exclusiva de la abscisa, siempre que no cambie la tensión rasante en ese punto.

Se formula así:

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = f(y/h)$$

siendo  $h$  la profundidad total del agua.

A partir de aquí una serie de razonamientos intuitivos son necesarios para llegar a formular la hipótesis final de von Karman.

1º) Supone que la tensión turbulenta  $\tau' = -\rho \overline{v'_x v'_y}$ , en un punto dado de coordenada  $y/h$ , depende solamente de la forma de la curva  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ , pero no del valor  $\bar{u}$ , de la tensión rasante en el borde  $\tau_0 = \rho u_*^2$ , de una magnitud geométrica  $l$ , característica de la turbulencia en cada punto, y obviamente de  $y/h$ .

La forma de la curva  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  en el entorno de  $y$  se determina, de acuerdo al desarrollo en serie de Taylor, por el conjunto de sus derivadas, siendo suficientes para el caso presente las dos primeras:

$$\bar{u}(y + dy) - \bar{u}(y) = \bar{u}' dy + \frac{\bar{u}''}{2} dy^2$$

Entonces tendremos:

$$\tau' = \tau'(y, h, l, u_*, \bar{u}', \bar{u}'')$$

Por análisis dimensional

$$\frac{\tau'}{\tau_0} = \Psi' \left( \frac{\bar{u}' l}{u_*}, \frac{\bar{u}'' l^2}{u_*}, \frac{y}{h} \right)$$

2º) Supone además que  $\frac{\tau'}{\tau_0}$  define totalmente la función  $\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*}$  es decir que hay una relación del tipo

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = F \left( \frac{\tau'}{\tau_0} \right)$$

con lo cual se deduce

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = \varphi \left( \frac{\bar{u}' l}{u_*}, \frac{\bar{u}'' l^2}{u_*}, \frac{y}{h} \right)$$

y en consecuencia

$$\varphi \left( \frac{\bar{u}' l}{u_*}, \frac{\bar{u}'' l^2}{u_*}, \frac{y}{h} \right) = f \left( \frac{y}{h} \right)$$

3º) Esta tercera suposición es la hipótesis de similitud de von Karman y consiste en que una forma particular de esta función se obtiene, suponiendo que los dos primeros números que allí aparecen son constantes independientes de  $y/h$

$$\frac{\bar{u}' l}{u_*} = k_1$$

$$\frac{\bar{u}'' l^2}{u_*} = k_2$$

Por cociente tendremos:

$$\frac{\bar{u}'}{\bar{u}''} = \frac{k_1}{k_2} \cdot l = \frac{l}{k}$$

siendo  $k = \frac{k_2}{k_1}$  una constante universal y  $l$  una función exclusiva de  $y/h$ .

Una hipótesis más general sería la de suponer que  $k_1, k_2 \dots$  son funciones de  $y/h$ . El inconveniente estriba en que sin nuevos elementos físicos, es prácticamente imposible fijar una forma a las funciones del tipo  $k_1(y/h) \dots$ .

De esta expresión se deduce  $l$  y sustituida en la expresión de  $\tau$  queda (1):

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho k^2 \frac{\left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2}$$

En esta etapa, von Karman en lugar de suponer una expresión para  $l$ , postula una distribución de tensiones rasantes en la zona turbulenta.

$$\tau = \tau_0 \left( 1 - \frac{y}{h} \right)$$

siendo  $\tau_0$  la tensión en el fondo.

La distribución lineal de tensiones, rigurosamente cierta en el caso de escurrimientos laminares, es cierta para movimientos turbulentos en régimen permanente y uniforme siempre que las tensiones viscosas  $\mu \nabla^2 \bar{v}_x, \mu \nabla^2 \bar{v}_y, \mu \nabla^2 \bar{v}_z$  sean despreciables frente a las tensiones de origen turbulento del tipo  $\rho \overline{v'_x v'_y}, \rho \overline{v'_y v'_z}$  y  $\rho \overline{v'_z v'_x}$  (2).

(1) De ahora en adelante se suprimirá el tilde para designar con  $\tau$  las tensiones de origen turbulento.

(2) H. Rouse "Fluid Mechanics for hydraulic Engineers" — New York — pág. 238.

Sustituyendo en la expresión de la tensión e integrando

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = \frac{-k}{u_*} \frac{1}{\sqrt{1-y/h}}$$

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \frac{2k}{u_*} \sqrt{1-y/h}$$

y resulta finalmente

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = -\frac{1}{k} [L(1-\sqrt{1-y/h}) + \sqrt{1-y/h}]$$

Como  $l = \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\frac{d\bar{u}}{dy}}$  y de acuerdo a la hipótesis de von Karman

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{2kh} \frac{1}{1-\sqrt{1-y/h}}$$

sustituyendo queda

$$l = 2kh (\sqrt{1-y/h} - 1 + y/h)$$

que para valores pequeños de  $y/h$  se puede escribir  $l = ky$ .

### T-II-2.3) Comparación de las fórmulas de Prandtl y von Karman

Según se aplique la teoría de Prandtl o la de von Karman se llega a estas dos expresiones de  $\frac{d\bar{u}}{dy}$ .

Prandtl: 
$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{ky}$$

von Karman: 
$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{2kh} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - y/h}}$$

Si desarrollamos en serie el radical que aparece en el 2º miembro de la fórmula de von Karman, quedamos sólo con el primer término, lo que es lícito para valores pequeños de  $y/h$  tendremos

$$\sqrt{1 - y/h} = 1 - \frac{y}{2h}$$

y sustituyendo se ve que ambas expresiones coinciden, pero sólo para valores pequeños de  $y/h$ .

T-II-2,4) *Comparación de ambas fórmulas con la experiencia*

Comparando ambas fórmulas con las experiencias de Nikuradse se obtienen dos expresiones que se apartan ligeramente de los resultados experimentales, una por defecto y la otra por exceso. Se ve entonces (Fig. 2) que del punto de vista práctico no existe una ventaja neta en adoptar un esquema u otro para calcular la curva de distribución de velocidades.

T-II-2,5) *Hipótesis de Prandtl modificada*

Visto que la experiencia muestra que no existe una ventaja en adoptar la teoría de von Karman, que da una expresión más complicada para la fórmula de la distribución de velocidad, se admite que la fórmula de Prandtl vale en toda la masa de fluido y no solamente en una zona adyacente a la pared y que la tensión rasante, en cualquier punto de profundidad  $y$ , se calcula por la expresión de von Karman,

$$\tau = \tau_0 (1 - y/h)$$

Este nuevo planteamiento, que lleva a abandonar las hipótesis básicas de la deducción de la fórmula de Prandtl, conservando no

DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

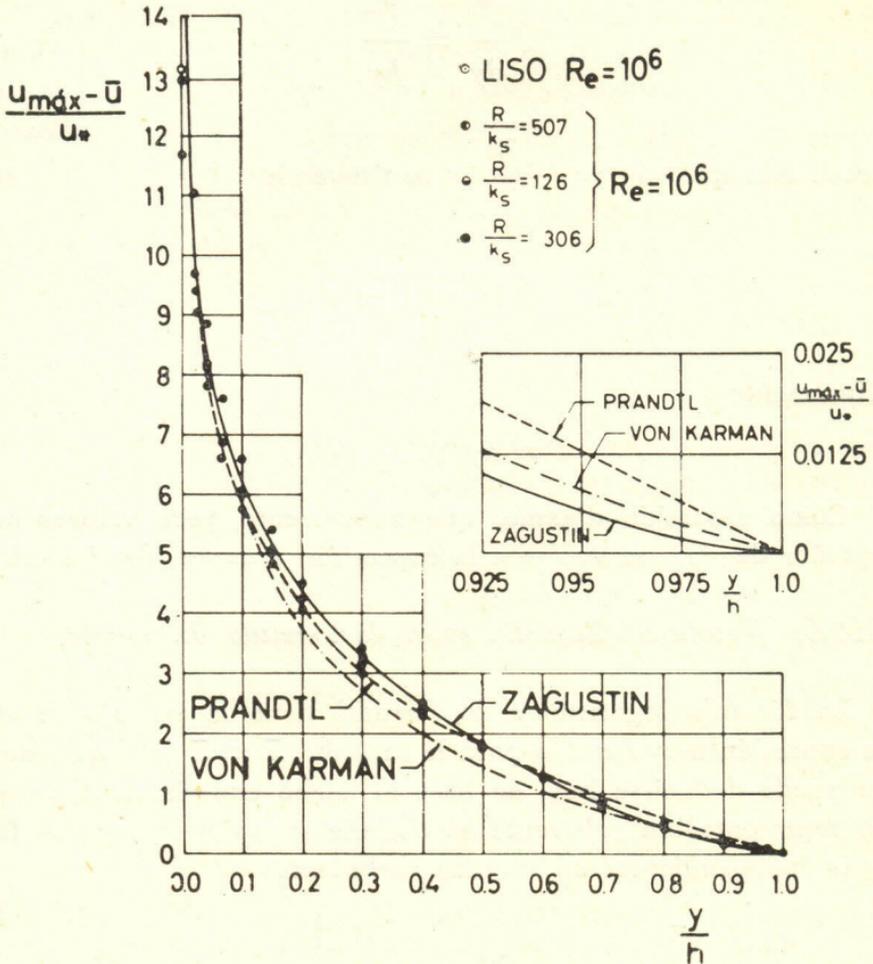


Fig. N° 2

obstante la fórmula final, lleva a una diferente expresión de  $l$ , que pasamos a calcular.

En efecto

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

y como

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} L y / y_0$$

tenemos

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{ky}$$

Recordando que  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  y sustituyendo

$$u_* \sqrt{1 - y/h} = l \frac{u_*}{ky}$$

y finalmente

$$l = ky \sqrt{1 - y/h}$$

Como acotación digamos que nuevamente, para valores muy pequeños de  $y/h$  se vuelve a la expresión  $l = ky$  de Prandtl.

### T-II-2,6) Teoría de Zagustin sobre la longitud de mezcla.

La fórmula logarítmica de Prandtl tiene la ventaja de dar una expresión muy sencilla para la función  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  que inclusive puede deducirse hoy, en base al hecho experimental de que una representación coherente se obtiene suponiendo las dos funciones independientes en la zona turbulenta:

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\bar{u}}{u_*} = \varphi\left(\frac{y u_*}{\nu}\right)$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite. <sup>(1)</sup> Sin embargo ambas dan una representación no coincidente con las observaciones experimentales en la zona central de las cañerías. De acuerdo a la ley logarítmica la curva  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  tendría una discontinuidad en la derivada para  $y = r_0$ , en el caso de los conductos cerrados. En esa zona, como lo veremos en un § próximo, tampoco coinciden con los hechos los valores deducidos de la expresión de la lon-

(1) F. Clauser "The turbulent Boundary Layer" Adv. in App. Mech. Vol. IV, 1956 — pág. 1.

gitud de mezcla. En bases a un trabajo de A. Zagustin (1938), K. Zagustin <sup>(2)</sup> presenta una nueva solución del problema, que si bien no tiene una gran importancia en cuanto a la forma de la función  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ , pues la ley logarítmica representa muy satisfactoriamente el andamiento, salvo para  $y = r_0$ , en cambio da una expresión de la longitud de mezcla que coincide en toda la extensión de la cañería con los resultados experimentales. Simultáneamente da una expresión para la curva de velocidad sin puntos angulosos en  $y = h$ .

1º) La idea básica de Zagustin es la de que la energía turbulenta que mantiene la agitación de las partículas en un recinto, se disipa por efecto viscoso y que la reposición de la energía debe hacerse a través de la frontera del recinto. Esto es cierto en zonas suficientemente alejadas de los confines materiales, cerca del centro de una cañería por ejemplo, o cerca de la superficie del agua en un canal.

2º) Si llamamos  $E'$  al balance entre la energía disipada y generada, por unidad de volumen dentro del recinto considerado, la cantidad de energía  $\dot{Q}$  perdida en el recinto en la unidad de tiempo, vale

$$\dot{Q} = \int_A E' dA$$

Esta energía debe ser repuesta, para mantener la turbulencia dentro del recinto a través de la frontera.

3º) La energía de turbulencia se propaga a través de la superficie  $\Omega$  por intermedio del vector  $\bar{e}$ , en el sentido de las longitudes de mezcla crecientes

$$\bar{e} = \lambda \nabla l$$

Entonces, en estado de régimen se deberá cumplir:

$$\int_{\Omega} \bar{e} x \bar{n} d\Omega = - C \int_A E' dA$$

(2) K. Zagustin "Solución Analítica para flujo turbulento en cañerías". Primer Congreso Regional Latino-americano I.A.H.R. — Porto Alegre — 1964.

Transformando la integral de superficie en integral de volumen y suponiendo que  $\lambda$  no depende del punto, se llega a la condición:

$$\nabla^2 l + b E' = 0$$

4º) En el caso de los movimientos unidimensionales, que son los que han sido considerados en la teoría de Prandtl y von Karman, si se admite que

$$E' = b' \tau$$

siendo  $\tau$  la tensión rasante turbulenta en el punto, la expresión anterior se escribe:

$$\frac{d^2 l}{dy^2} = - a \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2$$

$a$  es una constante de dimensión m/kg, que queda determinada por las condiciones de borde que se impongan.

Despreciando la viscosidad  $\mu$  frente a la viscosidad  $\varepsilon$ , tiene que cumplirse, como hemos visto, que la repartición de tensiones es lineal

$$\tau = \tau_0 (1 - y/h)$$

Pero la última ecuación escrita indica que

$$\frac{d^2 l}{dy^2} = - a \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2 = - a \tau = - a \tau_0 (1 - y/h)$$

Esta ecuación es susceptible de ser integrada, con las siguientes tres condiciones de borde, puesto que es de 2º grado y hay una constante indeterminada en la ecuación diferencial

$$\frac{dl}{dy} = k \quad \text{para } y = 0 \quad (\text{hipótesis de Prandtl})$$

$l = 0$  para  $y = 0$  (turbulencia nula en la zona adyacente a la subcapa laminar)

$\frac{dl}{dy} = 0$  para  $y = h$  (De las experiencias de Nikuradse)

Con estas hipótesis,  $C_1$ , primera constante de integración, resulta nula,  $C_2$ , la segunda constante de integración vale

$$C_2 = a \tau_o \frac{h_2}{6}$$

y la constante indeterminada  $a$ , vale:

$$a = - \frac{2k}{\tau_o h_o}$$

En consecuencia queda:

$$l = \frac{k}{3} h \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^3 \right]$$

Con esta expresión de  $l$  se integra la ecuación que resulta de sustituir  $a$  por su valor en la expresión de  $\frac{d^2 l}{dy^2}$

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{l} \sqrt{\frac{d^2 l}{dy^2} \left( \frac{h}{2k} \right)^{1/2}}$$

Integrando resulta

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{2}{k} \operatorname{arcth} (1 - y/h)^{3/2} + C_2$$

y como para  $y = h$ , resulta  $\operatorname{arcth} 0 = 0$  y  $\bar{u}_{y=h} = u_{max}$  nos queda definitivamente

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u_*} = \frac{2}{k} \operatorname{arcth} (1 - y/h)^{3/2}$$

T-II-2,7) *Comparación de la fórmula de Prandtl y de la Zugustin para la distribución de velocidad.*

En lo que respecta a la curva de distribución de velocidad la fórmula en *arcth* de Zugustin tiene la ventaja de que en  $y = h$  resulta  $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$ , tal como indica la experiencia.

Teniendo en cuenta que  $\text{arcth } x^{3/2} = \frac{1}{2} L \frac{1 + x^{3/2}}{1 - x^{3/2}}$  siendo  $x = 1 - y/h$  se ve que para valores pequeños de  $y/h$  queda

$$\text{arcth } x^{3/2} = \frac{1}{2} L x$$

y se vuelve a la fórmula de Prandtl.

En la Fig 2, se comparan los valores de las tres fórmulas con los resultados experimentales, observándose que salvo en la zona central, donde la de Zugustin incuestionablemente representa mejor los resultados, las tres pueden considerarse como equivalentes.

No se obtendrán entonces resultados muy diferentes empleando una u otra en lo que respecta a los valores de la tensión rasante media o de los coeficientes de fricción de Weisbach  $f$ , o de Chezy  $C$ .

T-II-2,8) *Comparación de las expresiones de la longitud de mezcla en las teorías de Prandtl, von Karman y Zugustin.*

Las expresiones de la longitud de mezcla que resultan de cada una de las tres teorías mencionadas son diferentes. Mientras que las de Prandtl y von Karman presentan un máximo para  $\frac{y}{h} = \frac{2}{3}$

la primera y para  $\frac{y}{h} = \frac{3}{4}$  la segunda, la expresión de Zugustin tiene máximo para  $y = h$ . Los correspondientes valores de  $\frac{l_{max}}{kh}$  son:

Prandtl	$\frac{l_{max}}{kh} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$
von Karman	$\frac{l_{max}}{kh} = \frac{1}{2}$
Zagustin	$\frac{l_{max}}{kh} = \frac{1}{3}$

En la Fig. 3 se representan las tres funciones, incluyendo los resultados experimentales de Nikuradse.

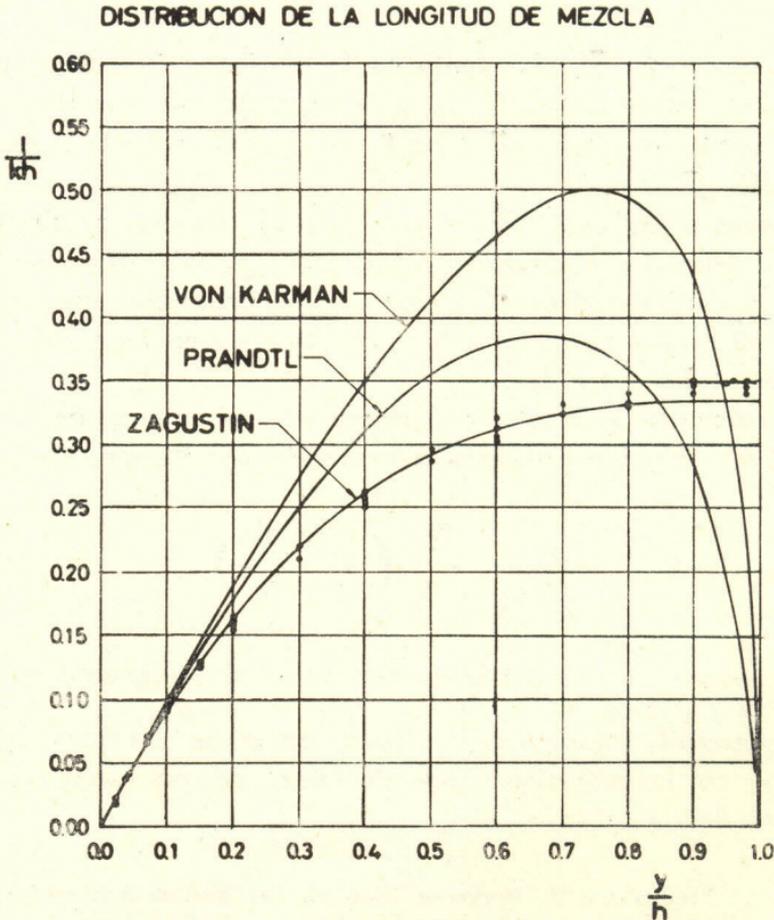


Fig. Nº 3

En la zona  $y \approx 0$ , las tres dan el resultado asumido inicialmente por Prandtl  $l = ky$ .

Si se acepta la teoría de Zagustin, no es posible pensar en valores decrecientes de  $l$  cuando  $y$  crece, por cuanto un descenso de  $l$  en la zona central implica una inversión del gradiente  $\frac{dl}{dy}$  y por consiguiente también se invierte el vector  $\bar{e}$ , por el cual la turbulencia no puede propagarse hacia el centro del conducto. A partir del punto en que  $l$  alcanza un máximo hacia arriba se tendría un movimiento laminar.

T-II-2,9) *Comparación de las expresiones del coeficiente de Bousinesq de acuerdo a las teorías de Prandtl y Zagustin.*

Como  $\varepsilon = |\bar{v}'_y| l$ , tanto en la teoría de Prandtl, como en la de Zagustin resultan  $\varepsilon_{y=h} = 0$ , puesto que por la primera, en ese punto, resultan  $|\bar{v}'_y| = 0$  y  $l = 0$  y en la segunda se tiene allí  $|\bar{v}'_y| = 0$ .

Como lo indica la Fig. 4 esto coincide con los resultados de las experiencias de Nikuradse. Sin embargo los valores de Nikuradse no corresponden <sup>(1)</sup> a datos experimentales directos, sino se han deducido de una curva media trazada en base a los datos experimentales obtenidos.

De acuerdo a Brooks y Berggren el andamio de la curva  $\varepsilon = \varepsilon(y)$  coincide bien con la expresión analítica de Prandtl:

$$\frac{\varepsilon}{kh u_*} = \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right)$$

hasta  $\frac{y}{h} = \frac{2}{3}$  y a partir de este valor el coeficiente de Bousinesq descendería suavemente hasta tomar en el centro del conducto o en la superficie libre del agua en un canal, el valor  $\varepsilon_{y=h} = 0.93 \varepsilon_{max}$ .

(1) F. Brooks and W. Berggren "Remarks on Turbulent Transfer Across Planes of Zero Momentum - Exchange". Tran. Am. Geop. Union — 1944 — pág. 889.

COEFICIENTE DE BOUSSINESQ

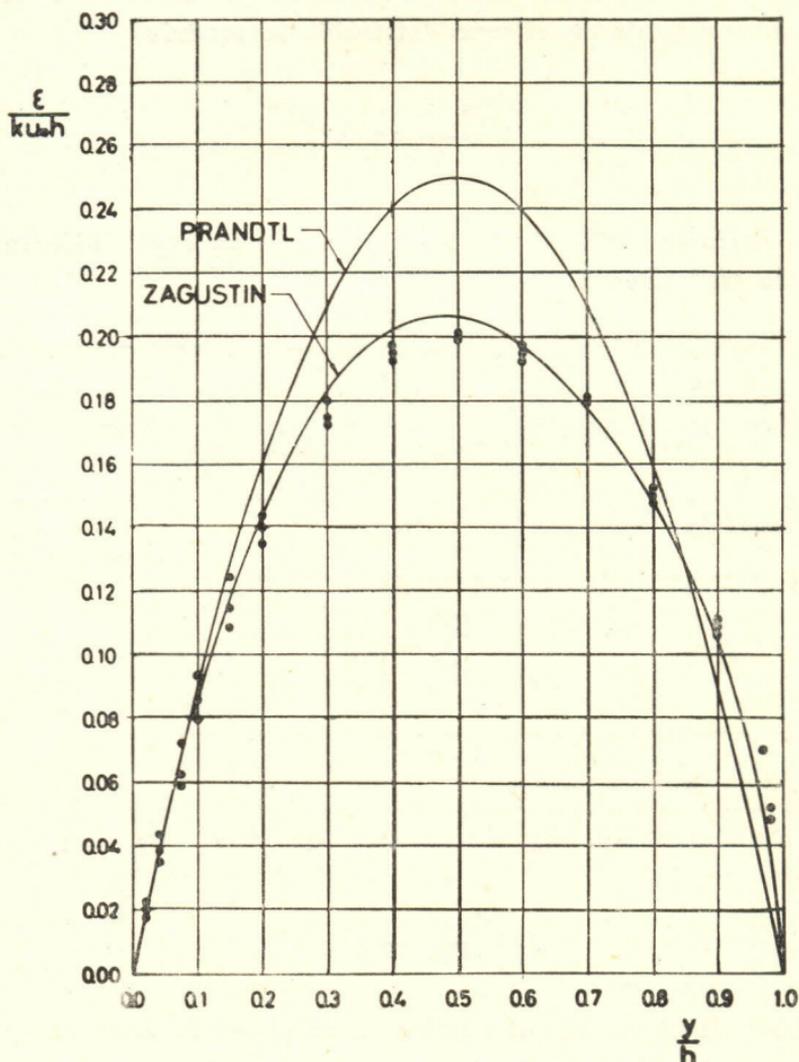


Fig. No 4

La Fig. 4 muestra, por el contrario, que la fórmula de Prandtl da valores 14 % más altos que los resultantes de la experiencia en el intervalo  $0 < \frac{y}{h} < 0.5$ , mientras que al expresión de Zagustin da valores coincidentes con los resultados experimentales en esa zona.

Ismail <sup>(1)</sup> por medio de la medida del coeficiente de Boussinesq para la transferencia de masa, ha sugerido que en la zona en que la tensión se anula en el seno del fluido se tendría

$$\frac{\varepsilon}{k u_* h} = 0.22$$

lo que daría un andamio de la curva  $\varepsilon = \varepsilon(y)$  diferente al indicado en la Fig. 5.

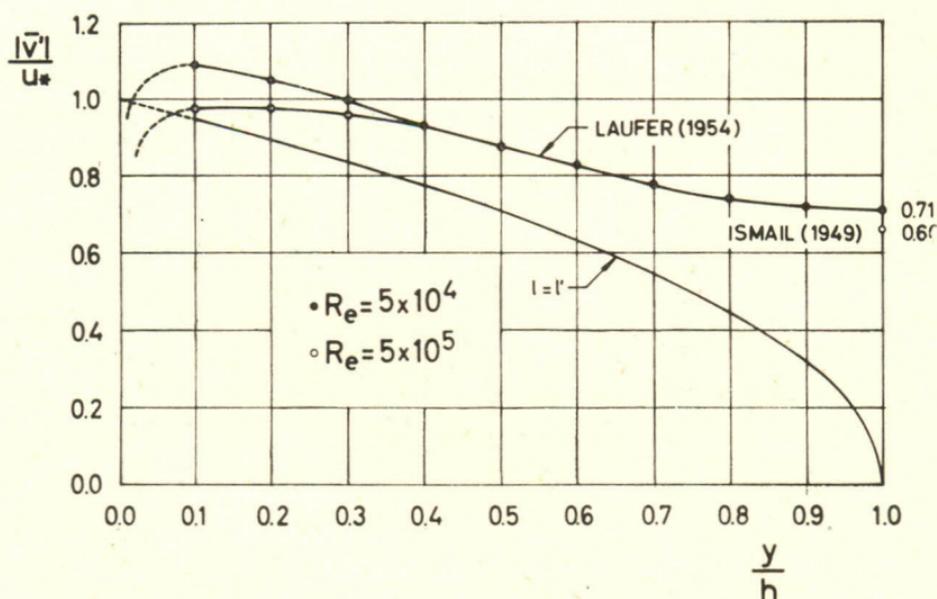


Fig. N<sup>o</sup> 5

T-II-2,10) *Justificación del valor  $\varepsilon = 0$  en la zona en que la tensión rasante es nula.*

La teoría de Zagustin tiene la principal virtud de proponer una fórmula para la longitud de mezcla que coincide satisfactoriamente con los resultados experimentales. Tal como se vio en Fig. 3, la teoría de Prandtl y von Karman dan valores de  $l$  que se anulan en  $y = h$ , lo que contradice todos los resultados experimen-

(1) H. Ismail "Turbulent Transfer Mechanism and suspended sediment in closed channels" Trans. A.S.C.E. 1952, pág. 409.

tales conocidos. En cambio la teoría de Zagustin da una expresión que no se anula en  $y = h$ , siendo la primera teoría que llega a este resultado, coincidiendo con los valores experimentales. La teoría de Gebelin proporcionaba un andamio similar, pero muy distante de los valores experimentales (1).

La expresión del coeficiente de Boussinesq que proporciona la teoría de Zagustin, es también coincidente con los resultados experimentales, representando una mejora notable respecto a los resultados de las teorías de Prandtl y von Karman.

No obstante, autores recientes como Brooks y Berggren (1944), Ismail (1949) y Hinze (1959), basados en el hecho de que no es posible admitir que en un conducto la turbulencia se anula en el eje de la cañería, han llegado a la conclusión de que las fórmulas de Prandtl o von Karman y ahora la de Zagustin, valen sólo en

una zona adyacente a la pared  $\frac{y}{h} < 0,005$ . En  $\frac{y}{h} \approx 0.4$ ,  $\epsilon$  pasaría por un máximo y tomaría luego, para  $\frac{y}{h} < 0.5$  un valor prácticamente constante.

La observación de Brooks y Berggren de que los resultados de Nikuradse que dan  $\epsilon = 0$  en  $y = h$  se obtuvieron por medio del ajuste de una curva "lisa" a los valores experimentales y no calculando  $d\bar{u}/dy$  directamente de éstos, tampoco ha tenido mucho éxito como se ve en el propio trabajo de estos autores, pues calculando  $\epsilon/u_* h$  directamente, se obtiene un valor poco superior a cero. Para coincidir con los resultados experimentales,  $\epsilon/u_* h$  debería valer aproximadamente 0.17 o 0.22, obteniéndose

por el método indicado  $\frac{\epsilon}{u_* h} = 0.0325$ .

Ismail (1949), suponiendo  $\epsilon = cte$  en la zona central del canal donde  $\tau = 0$ , llega a  $\frac{\epsilon}{u_* h} = 0.22$  y Hinze (1959), a

(1) B. BAKHMETEFF. "The Mechanics of Turbulent Flow" — Princeton University Press — 1941.

partir de los resultados experimentales de Laufer (1959) llegaría

$$a: \frac{\varepsilon}{u_* h} = 0.175.$$

Mostraremos, sobre la base de los mismos resultados experimentales de Laufer, las más exactas y completas medidas sobre turbulencia realizadas hasta hoy, que la aparente contradicción surge de una hipótesis anterior, la de suponer en T-II,1),  $l = l'$ .

En efecto, la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl comprende dos etapas:

Primero en la expresión de la tensión rasante, resultante de considerar la cantidad de movimiento como una magnitud transferible, se llega a:

$$\tau = \rho l' |\bar{v}'_y| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (1)$$

con lo cual resulta que el coeficiente de Boussinesq vale:

$$\varepsilon = |\bar{v}'_y| l' \quad (2)$$

luego Prandtl supone

$$|\bar{v}'_y| l' = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

y entonces resulta

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (3)$$

Sin otra razón que la de “ahorrar” una incógnita se supuso tradicionalmente

$$l = l'$$

Las experiencias mencionadas de Laufer, permiten analizar esta hipótesis.

La variación lineal de  $\tau$

$$\tau = \tau_0 (1 - y/h) \quad (4)$$

es no sólo una condición que resulta de la integración de la ecuación de la cantidad de movimiento en movimiento uniforme, cuando se supone que la tensión rasante viscosa es nula sino que ha sido confirmada por Laufer experimentalmente, haciendo uso de la técnica del anemómetro de hilo caliente, por lo cual puede aceptarse como cierta.

Sustituyendo (4) en (1) y (3) sucesivamente llegamos a las expresiones:

$$l' = \frac{1 - y/h}{\frac{|\bar{v}'_y|}{u_*} \frac{d\bar{u}/u_*}{dy}} \quad (5)$$

$$l = \frac{\sqrt{1 - y/h}}{\frac{d\bar{u}/u_*}{dy}} \quad (6)$$

Por lo que, por cociente, se tiene:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\sqrt{1 - y/h}}{|\bar{v}'_y|/u_*} \quad (7)$$

Si se supone  $\frac{l'}{l} = 1$ , entonces se deduce

$$\frac{|\bar{v}'_y|}{u_*} = \sqrt{1 - y/h}$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1) se llega a:

$$\frac{\varepsilon}{u_*} = \frac{1 - y/h}{\frac{d\bar{u}/u_*}{dy}} \quad (8)$$

Las experiencias de Laufer han proporcionado valores de  $|\bar{v}'_y|/u_*$  medidos directamente, valores que hemos representado junto con la función  $\sqrt{1 - y/h}$  en la Fig. 6. Se ve que la hipótesis  $l = l'$  no es admisible. Hemos representado también en esa Figura el valor de  $|\bar{v}'_y|/u_*$  para  $y = h$  que resulta del valor de  $\left(\frac{\varepsilon}{u_*}\right)_{y=h}$  dado por Ismail y el  $l$  que resulta de la fórmula de Zagustin.

En la Fig. 6 hemos representado la función  $\frac{l'}{l} = f(y/h)$  que resulta de (7).

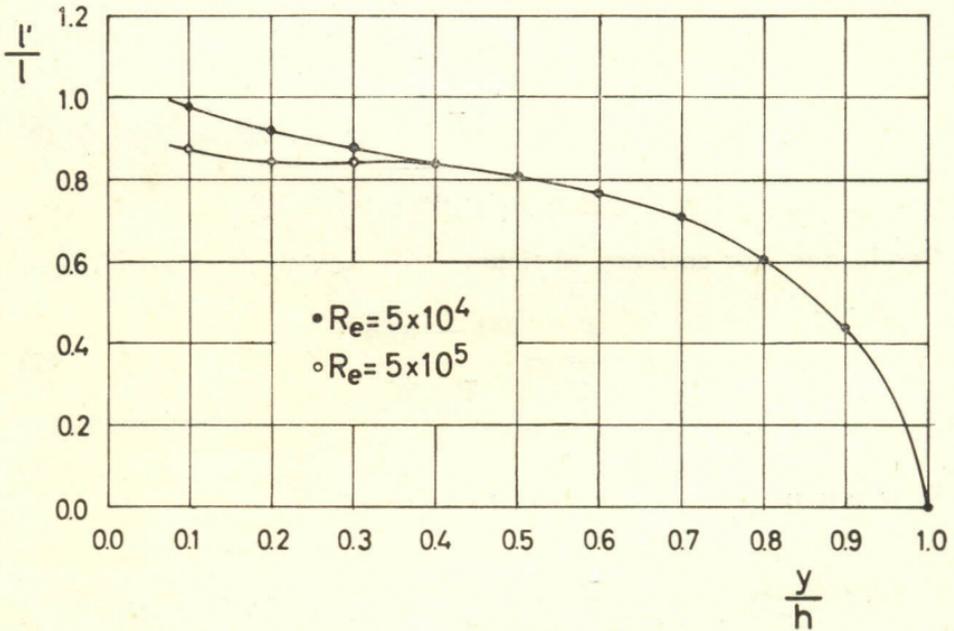


Fig. Nº 6

De esta manera se levanta la objeción de tener  $\varepsilon = 0$  para  $y = h$ , pues en

$$|\bar{v}'_y|_{y=h} = \left(\frac{\varepsilon}{l'}\right)_{y=h}$$

numerador y denominador son nulos, por lo cual es posible tener

$$|\bar{v}'_y|_{y=h} \neq 0$$

De acuerdo con Laufer se tendría

$$\left( \frac{|\bar{v}'_y|}{u_*} \right)_{y=h} = 0.71$$

Con las experiencias de Ismail y el valor de  $l$  tomado de la fórmula de Zagustin se llega a

$$\left( \frac{|\bar{v}'_y|}{u_*} \right)_{y=h} = 0.66$$

Observemos, en Fig. 6, que la condición  $l = l'$  es sólo aproximadamente cierta en la zona

$$0.05 < \frac{y}{h} < 0.2$$

### T-III) *Sobre la constancia de $k$*

En todos los desarrollos hasta aquí realizados, la constante  $k$  de turbulencia se ha considerado como invariable, y característica de los movimientos turbulentos. Esto es cierto, hasta lo que por el momento sabemos, para escurrimientos de flúidos sin materiales en suspensión y para rugosidades uniformemente distribuídas, como la granular de Nikuradse. En cambio no parece ser cierto en el caso de suspensiones y de rugosidades discretas, como las estudiadas por Sayre y Albertson y la proveniente de rizos, dunas y antidunas en los fondos movibles.

En efecto Rand <sup>(1)</sup> establece que  $k$  puede depender de la rugosidad, y Vanoni <sup>(2)</sup> a su vez muestra que puede depender de la concentración de partículas sólidas. Las experiencias de Nikuradse, realizadas con rugosidades uniformemente repartidas tal que

(1) Rand. "Proceedings of the Fifth Hydraulics Conference". Iowa 1952, pág. 132.

(2) Vanoni. "A summary of Sediment Transportation Mechanics". The Third Mid. Conf. Fluid. Mech. — 1953 — pág. 129.

se produce una cerrada interacción entre las estelas producidas entre cada una de las protuberancias del fondo. En estas condiciones los valores de  $k$  obtenidos han variado entre 0.32 y 0.42, estableciendo Vanoni que un valor medio de 0.37 puede considerarse correcto. No obstante ello, es más corriente en la literatura técnica que se utilice el valor usado por von Karman de 0.40. También se ha constatado variación de  $k$  como consecuencia del movimiento secundario en curvas.

El análisis de Sayre y Albertson muestra que cuando la rugosidad es uniforme como la que producen los granos de los fondos de los ríos a lecho móvil,  $k$  es constante. Pero en cambio cuando se obtienen rugosidades espaciadas, como la que provocan los rizos, dunas y antidunas en los mismos fondos móviles, el coeficiente  $k$  puede variar.

A su vez Vanoni ha realizado experiencias en canales manteniendo  $h$  y  $J$  (y por consiguiente  $u_* = \sqrt{ghJ}$ ) aumentando la concentración de la suspensión.

Se ve que al aumentar  $C$ , disminuye  $k$ . En algunos casos Vanoni ha determinado valores de  $k = 0.2$  con arena de  $d_m = 0.1$  mm.

Sin embargo en el momento actual no existen resultados concluyentes a este respecto. Resultados similares ha obtenido Ismail trabajando con el mismo equipo experimental de Vanoni.

## C A P I T U L O   I I

### *Transporte de Fondo*

#### F-1) *Transporte de fondo y teoría de la tracción límite*

La teoría de la tracción límite desarrollada para explicar el fenómeno de transporte de fondo, se basa en el análisis mecánico de las fuerzas que, actuando sobre una partícula por efecto del escurrimiento del agua, tienden a mover a éste y eventualmente provocar su desplazamiento vertical hasta incorporarlas a la corriente como una suspensión.

F-2) Teoría de Du Boys

El origen de la misma se encuentra en la teoría de Du Boys (1879), que se basa en las siguientes consideraciones:

1º) El fondo móvil se mueve en capas sucesivas de espesor  $b \approx d$  (Fig. 7).

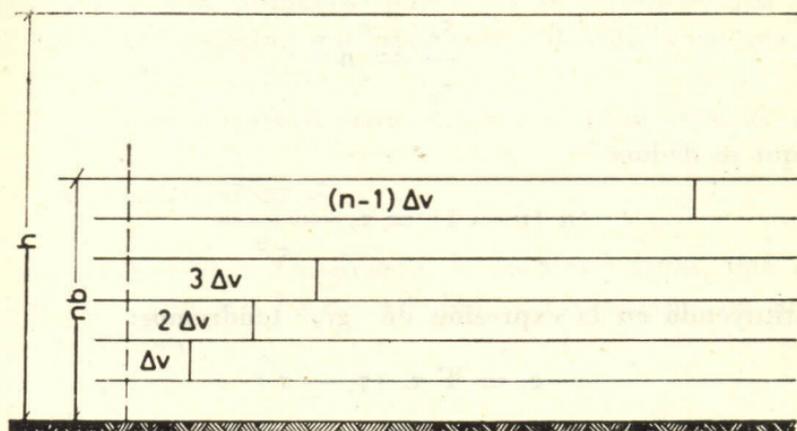


Fig. Nº 7

La velocidad crece de capa a capa por cantidades discontinuas  $\Delta v$ .

$\Delta v = 0$  en la capa más cercana al fondo fijo, e irá aumentando, hasta llegar al valor  $(n-1) \Delta v$ . Por consiguiente el gasto

sólido  $G_s$  será igual al gasto volumétrico  $\frac{1}{2} (n-1) \cdot \Delta v \cdot n b \cdot B$ ,

multiplicado por el peso específico  $\gamma_s$  del material.

$$G_s = \gamma_s \cdot n \cdot b \cdot B \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \Delta v \quad \text{kg/s}$$

y el gasto sólido "seco" por unidad de ancho es  $q_s = \frac{G_s \cdot \text{kg}}{B \text{ m.s.}}$

2º) La fricción en el fondo  $\tau_o = \zeta (\gamma_s - \gamma) \cdot n \cdot b$  que se opone al movimiento es igual a la componente del peso del fluido que escurre:  $\gamma h J$ , es decir

$$\gamma h J = \zeta (\gamma_s - \gamma) n b$$

3º) Se llama, de acuerdo a Du Boys, tensión crítica la que justo aguanta la capa que escurre superiormente, sin moverse. Es decir  $\tau_c$  se obtiene para  $n = 1$ .

$$\tau_c = \zeta (\gamma_s - \gamma) b$$

y por consiguiente

$$\frac{\tau_o}{\tau_c} = n$$

De aquí se deduce

$$n (n - 1) = \tau_o \frac{\tau_o - \tau_c}{\tau_c^2}$$

y sustituyendo en la expresión de  $g_s$ , tendremos:

$$g_s = \Psi' \tau_o (\tau_o - \tau_c)$$

donde  $\Psi' = \frac{\gamma_s \cdot \Delta v \cdot b}{2 \tau_c^2}$  es una función que se supone depende sólo

de las características del sedimento y de la configuración del lecho.

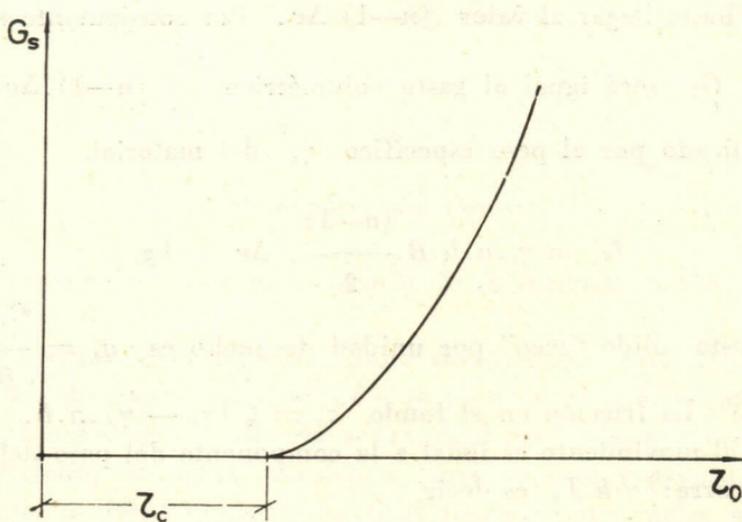


Fig. N° 8

La extrema simplicidad de la fórmula de Du Boys ha provocado excepticismo sobre la misma, pero la experiencia ha mostrado, incuestionablemente el hecho fundamental de que por debajo de una cierta tensión  $\tau_c$  no existe arrastre.

Representada gráficamente la función experimental,  $g_s = g_s(\tau_o)$  se obtiene una curva como la indicada en Fig. 8. Respetando este andamio, se han propuesto una serie de fórmulas, que llamaremos fórmulas empíricas, que pasaremos a detallar a continuación:

F-3) *Fórmulas empíricas para calcular el transporte de fondo.*

F-3,1) *Meyer-Peter 1947*

Corresponde citar inicialmente la de Meyer-Peter, uno de los investigadores que más ha contribuido en este campo, en su laboratorio de Zurich.

Es del tipo

$$g_s = \Psi' (\tau_o - \tau_c)^m, \quad \text{con } m = \frac{3}{2}$$

y se la conoce como fórmula de Meyer-Peter 1947, o fórmula de Zurich (1). Es la fórmula que sustituye a la también propuesta por Meyer-Peter en 1935.

Expresando  $g_s$  en  $\text{Ton/m} \times s$ , la fórmula toma la siguiente expresión:

$$g_s = 24 (\tau_o - \tau_c)^{3/2} \frac{\text{Ton.}}{m.s.}$$

siendo

$$\tau_o = \gamma h J \quad \text{Ton/m}^2$$

$$\gamma = \text{peso específico del agua} = 1 \text{ Ton/m}^3$$

$$\tau_c = (\gamma_s - \gamma) \times d_m \times 0.047 \times 10^{-3} \text{ Ton/m}^2$$

$$\gamma_s = \text{peso específico de la arena} = 2.67 \text{ Ton/m}^3$$

$$d_m = \text{diámetro característico de la arena en milímetros}$$

(1) E. Meyer-Peter. "Quelques problèmes concernant le charriage de matières solides dans les rivières Alpines et Sub-alpines". La Houille Blanche — N° Special B/1949 — pág. 688.

$\tau_c$  tiene el carácter de tensión crítica de arrastre y Meyer-Peter da para la misma una expresión correcta. Más adelante analizaremos este punto.

De acuerdo a Meyer-Peter  $d_m$  es el diámetro medio. La fórmula de Meyer-Peter para un material cualquiera se escribe en la forma:

$$g_s = \left( \frac{g}{\gamma_s - \gamma} \right)^2 \cdot \frac{h_s}{h_r} \cdot 0,8 \cdot (\tau_o - \tau)^{3/2}$$

siendo  $h_s$  el coeficiente de Strickler y  $h_r$  el mismo suponiendo el lecho liso.

Para  $\gamma_s - \gamma = 1.63$ , resulta  $\left( \frac{g}{\gamma_s - \gamma} \right)^2 \times 0.8 = 2,92$

y con  $\frac{h_s}{h_r} = 0.02$  tenemos  $\Psi' = 24$ .

### F-3,2) *Fórmula del Waterways Experiment Station*

Esta fórmula es de 1935 <sup>(1)</sup> y tiene una forma similar a la anterior, siendo del tipo:

$$g_s = \frac{1}{n} \left( \frac{\tau_o - \tau_c}{K} \right)^r$$

$n$  es el coeficiente de Manning del lecho, incluyendo la rugosidad granular y la provocada por los rizos o dunas que puedan existir en el fondo.  $K$  es una constante;  $K$  y  $\rho$  están tabulados en la publicación referida, en función de las características de la arena y del valor del coeficiente  $n$  del caso particular. Se da allí también una expresión para  $\tau_c$ .

(1) U.S. Wat. Exp. St. "Studies of River Bed Materials and their movement, with special reference to the lower Mississippi River". Paper 17 — Vicksburg — January 1935.

F-3,3) *Fórmulas del tipo de Mc Dougall*

La forma de estas ecuaciones son un tanto diferentes de la que venimos de ver. Su expresión es

$$q_s = CJ^m (q - q_c)$$

donde  $C$  es una constante,  $J$  la pendiente de la línea de energía,  $q$  el gasto específico en  $m^2/s$ , y  $q_c$  el gasto crítico. De acuerdo a Kresser y Leszlóffy (1), tomando  $m = 2$  y  $CJ^2 = 128 \times 10^{-7}$  con  $Q_c = 750 m^3/s$  se obtiene una fórmula aplicable al Danubio frente a Viena.

F-4,4) *Fórmula de Schoklitsch*

Es una fórmula del tipo

$$G = CJ^m \left( V - 0.6 B \frac{d^{3/2}}{J^{7/6}} \right)$$

De acuerdo a la misma referencia, esta fórmula se aplica bien al Danubio, poniendo  $C = 25$ ,  $m = 3/2$ ,  $V$  en  $m^3/s$  y  $d = d_{40}$ , obteniéndose  $G$  en Ton/s.

F-4,5) *Fórmula de Einstein*

No corresponde, en realidad, a una fórmula deducida dentro de la teoría de la tracción límite, sino que ha sido deducida basándose en análisis dimensional. Se llega así a una expresión del tipo

$$\phi = f(\Psi).$$

siendo:

$$\phi = \frac{g_s s_s}{\sqrt{(s_s - 1)g}} \cdot \frac{1}{F \cdot d^{3/2}}$$

(1) W. Kresser et W. Leszlóffy. "Hydrologie du Danube" — La Houille Blanche N° 2/1964 — pág. 133.

$$F = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36 \nu^2}{gd^3 (s_s - 1)}} - \sqrt{\frac{36 \nu^2}{gd^3 (s_c - 1)}}$$

$$s_s = \frac{\gamma_s}{\gamma}$$

$$\Psi = \frac{\gamma (s_s - 1)}{\tau_o} d$$

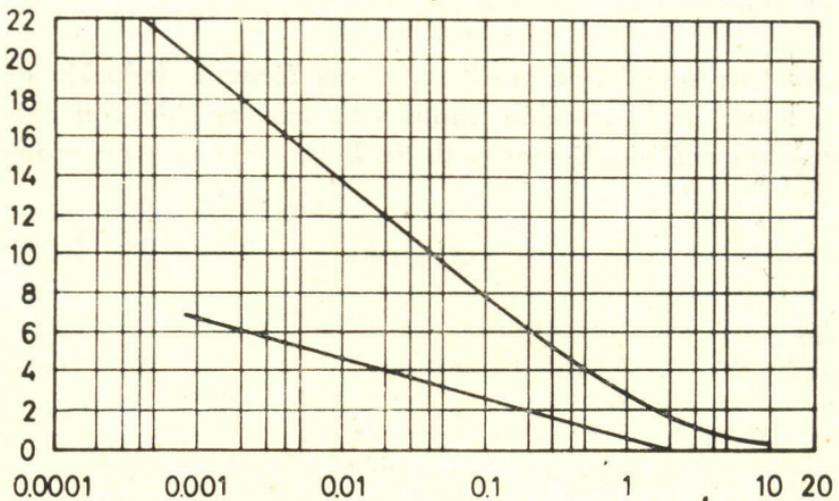
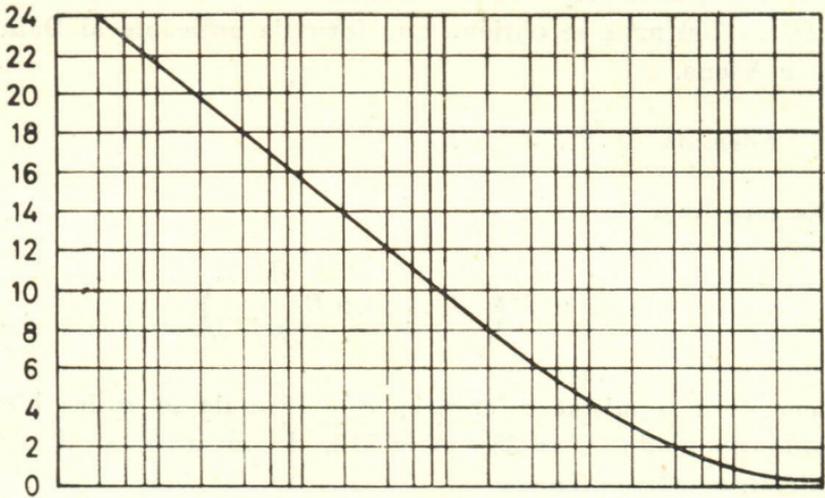


Fig. No 9

La fórmula de Einstein pone en evidencia que la viscosidad del agua  $\nu$  tiene su importancia y que por consiguiente la temperatura del agua es un factor a tener en cuenta. La fórmula da resultados muy correctos para granulometría única y una dispersión bastante importante para granulometría no uniforme (Fig. 9).

La viscosidad cinemática del agua a 15 °C vale

$$\nu = 125 \times 10^{-7} \frac{ft^3}{s} = 1.16 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

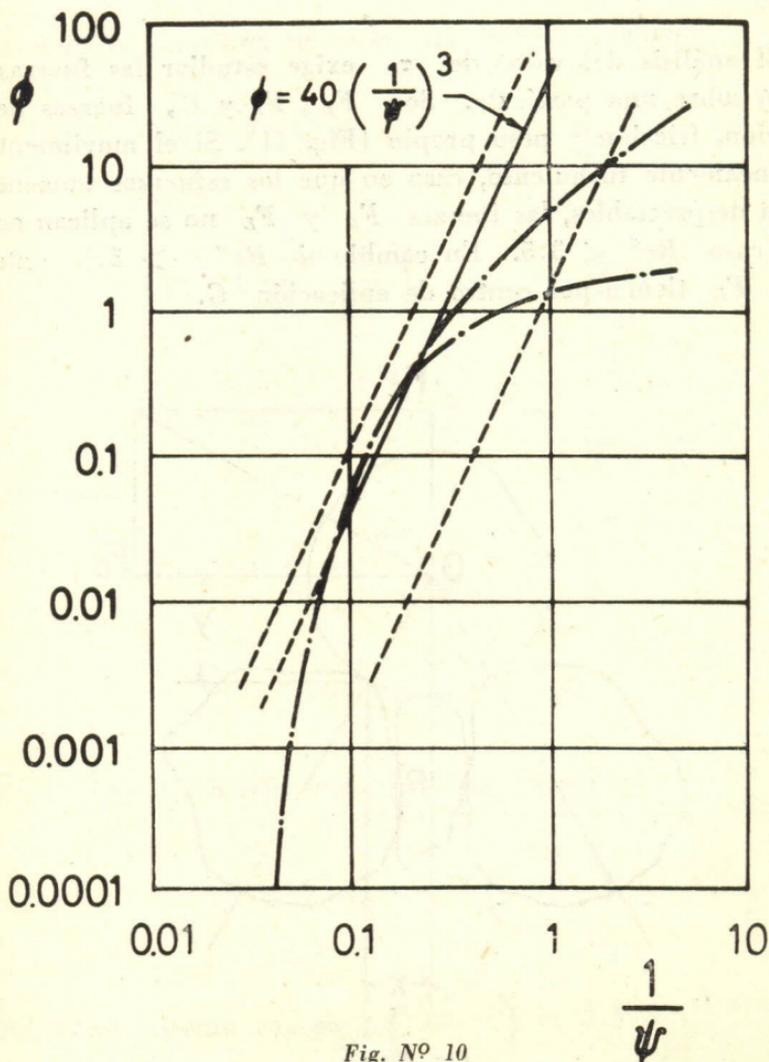


Fig. Nº 10

Rouse representa  $\phi$  en función de  $1/\Psi^*$  y obtiene una curva que salvo en su parte inferior concuerda muy bien con la fórmula

$$\phi = 40 \left( \frac{1}{\Psi^*} \right)^3$$

como se ve en la Fig. 10.

### F-5) Análisis de $\tau_c$

El análisis del valor de  $\tau_c$  exige estudiar las fuerzas que actúan sobre una partícula. Son  $F_L$ ,  $F_D$  y  $P$ , fuerzas de sustentación, fricción y peso propio (Fig. 11). Si el movimiento no es francamente turbulento, caso en que los esfuerzos tangenciales no son despreciables, las fuerzas  $F_D$  y  $F_L$  no se aplican en  $G$ . Es el caso  $Re^* < 3.5$ . En cambio si  $Re^* \gg 3.5$  entonces  $F_D$  y  $F_L$  tienen por centro de aplicación  $G$ .

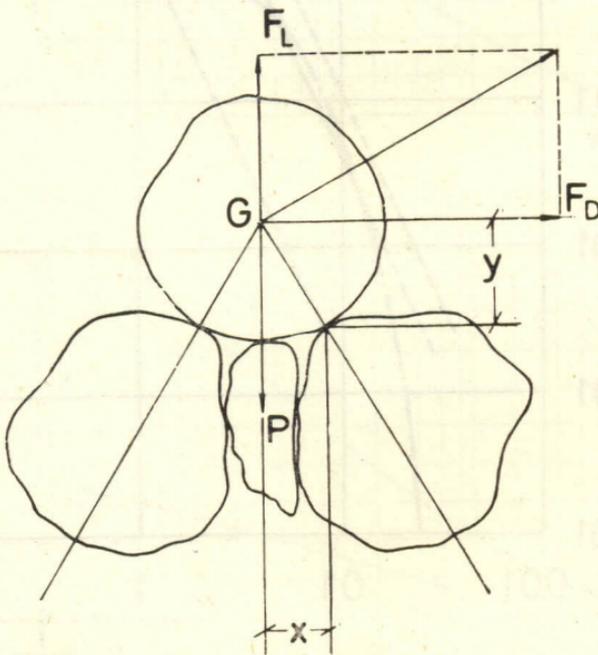


Fig. Nº 11

F-5,1) Caso  $Re^* > 3.5$

La condición de equilibrio de la partícula es:

$$F_L x + F_D y = P_x$$

$$F_L + F_D \frac{y}{x} = P$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \text{es el ángulo de talud natural.}$$

Veremos la expresión de cada una de estas fuerzas:

$$F_D = C_D \Omega \rho \frac{u_c^2}{2}$$

siendo

$$C_D = C_D \left( \frac{u_c \cdot d}{2} \right), \quad \Omega = \alpha \cdot d^2$$

$$F_D = \phi_1 \left( \alpha, \frac{u_c d}{\nu} \right) \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \frac{u_c^2}{2}$$

Idénticamente

$$F_L = \phi_2 \left( \alpha_2, \frac{u_c d}{\nu} \right) d^2 \cdot \rho \cdot \frac{u_c^2}{2}$$

$$P = (\gamma_s - \gamma) \frac{\pi}{6} \cdot \alpha_3 \cdot d$$

En el caso del movimiento turbulento tenemos:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75 \log \frac{y}{d} + f \left( \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

En escurrimiento rugoso  $f \left( \frac{u_* d}{\nu} \right) = 8.5$

En escurrimiento liso  $f\left(\frac{u_* d}{\nu}\right) = 5.5$

Podemos poner entonces:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8.5 - 5.75 \log \left[ \frac{y}{d} + \frac{B}{u_*} \right]$$

En el caso  $y \frac{u_*}{\nu} \rightarrow \infty$ , que corresponde al escurrimiento rugoso, tenemos

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8.5 - 5.75 \log \frac{y}{d}$$

En el caso liso  $\frac{d}{y} \rightarrow 0$ , entonces tenemos:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8.5 - 5.75 \log B + 5.75 \log y \frac{u_*}{\nu}$$

y como

$$8.5 - 5.75 \log B = 5.50$$

resulta

$$B = 1.3325$$

es decir la fórmula general; válida para el régimen de transición del tipo de la de Coolebrook - White

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8.5 - 5.75 \log \left[ \frac{d}{y} + \frac{1.3325}{u_*} \right]$$

Finalmente se supone que existe un coeficiente  $\varepsilon$  característico del grano, tal que en

$$y_c = \varepsilon d$$

se produce la velocidad  $u_c$  que caracteriza a las fuerzas que actúan sobre la partícula

$$\frac{\bar{u}_c}{u_*} = 8.5 - 5.75 \log \left[ \varepsilon + \frac{1.3325}{\varepsilon d u_*} \right]$$

es decir

$$\frac{\bar{u}_c}{u_*} = \phi \left( \varepsilon, \frac{d u_*}{\nu} \right)$$

Por consiguiente tendremos

$$u_c^2 = \phi^2 \cdot u_*^2 = \phi^2 \cdot \frac{\tau_0}{\rho}$$

y sustituyendo

$$F_D = \phi_1 \phi^2 \frac{d^2}{2} \cdot \tau = \phi_D d^2 \cdot \tau$$

donde

$$\phi_D = \phi_1 \phi^2 = \phi_D \left( \alpha_2, \varepsilon, \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

Idénticamente

$$\phi_L = \phi_2 \cdot \phi^2 = \phi_L \left( \alpha_2, \varepsilon, \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

donde

$$F_L = \phi_L \cdot d^2 \cdot \tau$$

Si sustituimos en la expresión de equilibrio de los momentos que actúan sobre la partícula

$$\left[ \phi_L + \phi_D \frac{y}{x} \right] d^2 \tau_c = \alpha_3 d^3 (\gamma_s - \gamma).$$

y por consiguiente:

$$\frac{\tau_c}{d(\gamma_s - \gamma)} = \frac{\alpha_3}{\phi_L + \phi_D \frac{y}{x}} = \varphi \left( \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon, \varphi, \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

Para un tipo dado de partícula  $\alpha_2, \alpha_3, \varepsilon$  y  $\varphi$  son constantes y entonces:

$$\frac{\tau_c}{d(\gamma_s - \gamma)} = \varphi \left( \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

De acuerdo a Tison <sup>(1)</sup>, si  $Re^* < 3.5$

$$0.03 < \varphi = \frac{0.18}{Re^*} < 0.09$$

y si

$$70 > Re^* > 3.5$$

(1) L. J. Tison. "Studies of the Critical Tractive Force for the Entrainment of Bed Materials". Proc. 5th Meeting I.A.H.R. Minnesota — 1953.

es una función de  $Re^*$  comprendida entre 0.04 y 0.028.

Si  $Re^* > 150$

$$\varphi = 0.055$$

Este valor, a veces, se toma  $0.06 \div 0.04$ .

### F-5,2) Introducción de la velocidad de caída $W$

Liu introduce la relación  $\frac{u_*}{W}$  en vez de  $\frac{\tau_c}{(\gamma_s - \gamma) d}$ , lo que se puede hacer de acuerdo a las siguientes consideraciones:

Cuando la partícula adquiere la velocidad límite

$$\frac{1}{6} \pi \alpha_3 d^3 (\gamma_s - \gamma) = \frac{\pi}{4} \cdot C_D \cdot \alpha_2 \cdot d^2 \cdot \rho \frac{W^2}{2}$$

o sea

$$\frac{4}{3} \alpha_3 d (\gamma_s - \gamma) = \alpha_2 C_D \left( \frac{W}{u_*} \right)^2 \rho u_*^2 = \alpha_2 C_D \left( \frac{W}{u_*} \right)^2 \tau_c$$

Reagrupando términos tendremos:

$$\frac{\tau_c}{(\gamma_s - \gamma) d} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{1}{C_D} \cdot \left( \frac{u_*}{W} \right)^2$$

Los valores de  $C_D$ , que son función de  $\frac{u_* d}{\nu}$  y de la forma de la partícula se encuentran tabulados, por ejemplo en "Some Fundamentals of Particle Size Analysis" Report 12 del Corps of Engineers, U.S.A. Los valores de  $C_D$  están en dicho Report, representados en función de  $Re^W = \frac{W d}{\nu}$ , mientras que  $\frac{\tau_c}{\Delta\gamma \cdot d}$  se

representan en función de  $Re^* = \frac{u_* d}{\nu}$ . En consecuencia hay que proceder por tanteo para calcular

$$\frac{u_*}{W} = f(Re^*)$$

En efecto, se fija  $Re^*$  y se lee  $\tau^* = \frac{\tau_c}{\Delta\gamma \cdot d}$ . Para calcular

$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} C_D$  se recurre a la relación

$$Re^W \times \frac{u_*}{W} = Re^*$$

Se elige  $\frac{W}{u_*}$ , se calcula  $Re^W$  y se lee  $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} C_D$ . Entonces

se calcula

$$\frac{u_*}{W} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} C_D} \cdot \tau^{1/2}$$

y se retoca el nuevo valor de  $Re^W$  y el correspondiente  $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} C_D$ , etc.

### F-6) Diagramas experimentales

Existen varios diagramas experimentales que representan las zonas de reposo y de comienzo de arrastre.

La primera debida a Shields, ha sido hoy completada por Chauvin y Chabert (1) incluyendo las zonas de rizos, fondo plano y dunas. En ellas se representa

(1) J. Chabert, J. L. Chauvin. — "Formation de dunes et de rides dans les modèles fluviaux". Bull. Cent. Rech. Essais Chatou — Vol. 4 — 1963. pág. 31.

$$\frac{\tau_o}{(\gamma_s - \gamma) d} = f \left( \frac{u_* d}{\nu} \right)$$

y es fácil ver que en este diagrama las líneas a  $d = cte$  son rectas a  $45^\circ$ , puesto que  $\frac{\tau_o}{\rho} = u_*^2$

Aumentando, sobre un fondo fijo, paulatinamente  $Re^*$ , encontramos primero el comienzo de movimiento, fondo plano, dunas, etc. y para valores suficientemente grandes de  $\frac{\tau_o}{(\gamma_s - \gamma) d}$  se llega al régimen de suspensión, como se verá más adelante.

Hemos visto al comienzo que Gardé y Albertson han presentado un diagrama en que se clasifican los distintos regímenes de acuerdo con zonas

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d} = f (Fe)$$

donde  $Fe$  es el número de Froude correspondiente a la velocidad media

$$Fe = \frac{u_m}{\sqrt{gh}}$$

Simmones y Richardson <sup>(1)</sup> presentan también un gráfico en que se representa, en el diagrama  $\frac{u_*}{W} = f (Re^*)$  las zonas de reposo, rizos, fondo plano, dunas, transición y antidunas. Dicho diagrama, como se ha visto en F-5,2) es equivalente al diagrama Shields  $\tau^* = f (Re^*)$  pudiéndose pasar de uno a otro, simplemente por cálculo.

(1) D. Simmones; E. Richardson. — "Forms of bed roughness in alluvial channels". — Proc. A.S.C.E. — Vol. 87 — HY3 — 1961.

F-6,2) *Comparación de los diagramas*

Los diagramas de Shields, de Simmones y Richardson, o el de Chabert y Chauvin, son en el fondo la misma cosa, con las inevitables diferencias que provienen, en técnica tan imprecisa, de los diferentes criterios de los experimentadores y de los errores de medida, en general muy grandes en este campo.

En cambio el diagrama de Gardé y Albertson es completamente diferente a los otros, en cuanto pretende relacionar entre sí  $\tau^*$  y  $F_e$ , variables distintas a  $\tau^*$  y  $Re^*$ .

En efecto, es fácil ver que se cumplen las relaciones

$$\tau^* = \frac{v^2}{d^3} \left( \frac{\gamma}{g\Delta\gamma} \right) Re^{*2}$$

y

$$\tau^* = \frac{\gamma}{\Delta\gamma} \cdot \frac{g}{C^2} \cdot \left( \frac{h}{D} \right) \cdot Fe^2$$

La primera relación establece una función bien definida de  $\tau^*$  respecto de  $Re^*$ , con tal que el diámetro

$$d^* = d \left( \frac{\Delta\gamma}{\rho v^2} \right)^{1/3}$$

que depende sólo de las características de la partícula y la viscosidad del agua no varíe.

En cambio la segunda relación muestra que  $\tau^*$  es una función de  $F_e$ , sólo si  $\frac{\sqrt{g}}{c}$  y  $\frac{h}{d}$  son invariables, lo cual exige rugosidad relativa constante y  $Re^*$  constante. Es en consecuencia una representación que debe ser abandonada.

F-6,3) *Diagrama general en coordenadas de Shields*

Sobre la base de los trabajos de Shields, Simmones y Albertson, Chauvin y Chabert, White y Tison, se ha trazado el diagrama

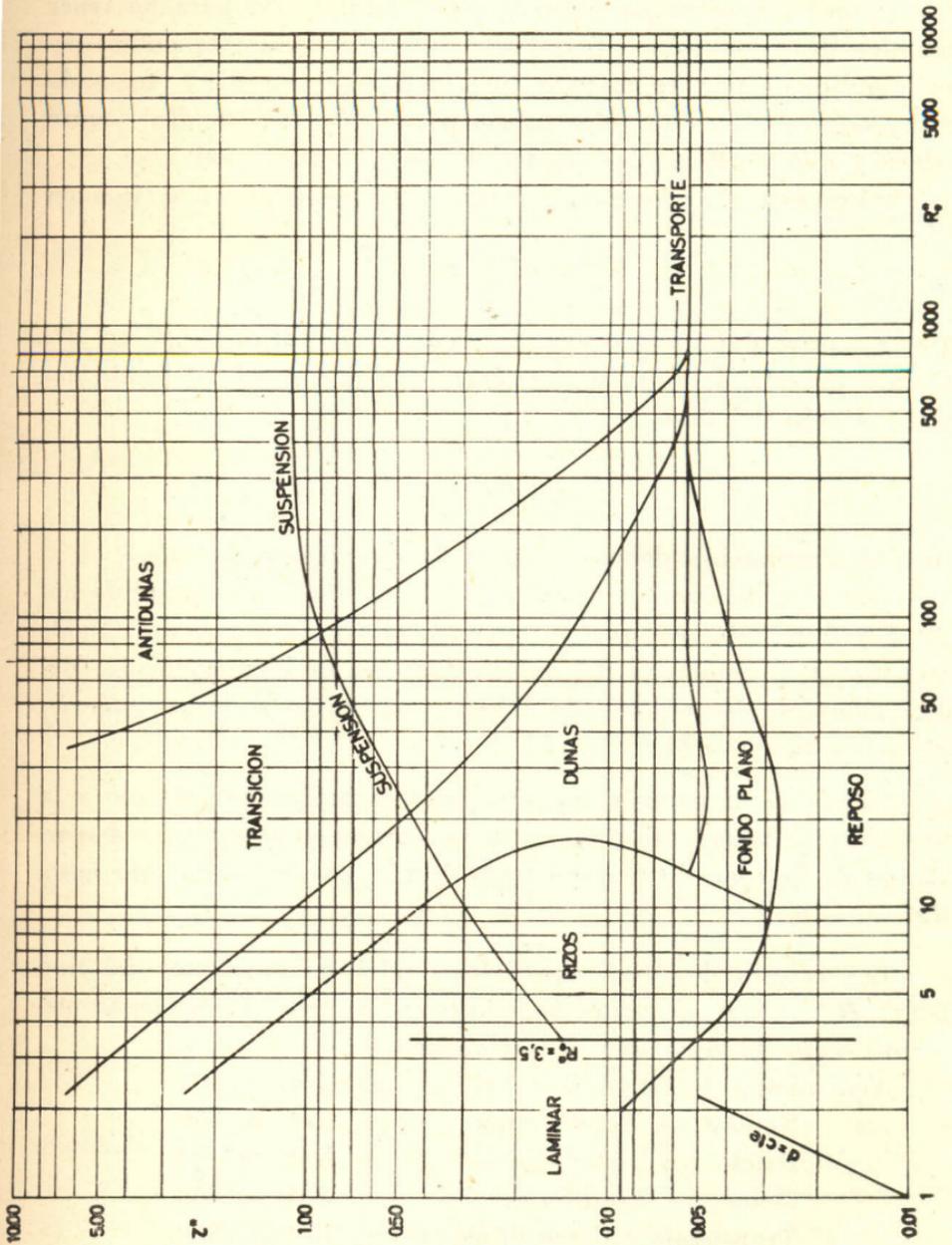


Fig. N° 12

de la Fig. 12, que representa en coordenadas  $\tau^*$ ,  $Re^*$  los distintos campos de movimientos de fondos movibles posibles.

Hemos representado también allí la condición para no tener régimen de suspensión ( $W > |\bar{v}'_y|$ ) calculando los puntos correspondientes por el método que indicamos en SII-2, tomando como valores  $C_D$ , un valor medio para cada  $Re^W = Re^*$  entre esfera y una partícula con factor de forma (SF) igual a 0.7.

Sobre este diagrama en coordenadas logarítmicas la función

$$\tau^* = d^{*-3} \cdot Re^{*2}$$

queda representada por rectas de pendiente 2, paramétricas en  $d^*$ . Cada zona está delimitada por una curva que queda definida por una relación del tipo

$$\varphi(\tau^*, Re^*) = 0$$

cuya determinación debe ser realizada experimentalmente.

Régimen laminar se produce para un  $Re^*$  comprendido entre 2 y 3.5. Sabemos que en dicho régimen la curva de Shields que marca el comienzo del movimiento no es bien conocida. Hemos adoptado los valores de White <sup>(1)</sup>, que parecerían, todavía, los más cercanos a la realidad.

Siendo la suspensión un fenómeno esencialmente debido a la turbulencia, hemos trazado la curva correspondiente a la demarcación de la zona de transporte de fondo y suspensión, sólo hasta  $Re^* = 3.5$ .

Los valores de  $Re^*$  para los cuales las funciones del tipo  $\varphi(\tau^*, Re^*) = 0$  se transforman en  $\tau^* = cte$  varían aparentemente según la zona que se demarque.

Tendríamos los siguientes valores aproximados:

Reposo — Fondo Plano	:	$Re^* \cong 350$
Fondo plano — Dunas	:	$Re^* \cong 80$
Dunas — Transición	:	$Re^* \cong 550$
Transición — Antidunas	:	$Re^* \cong 800$
Transporte — Suspensión	:	$Re^* \cong 500$

(1) L. J. Tison ob. cit.

Excepto la curva de transición Transporte de fondo, existe un único valor  $\tau^* = cte$ , habiendo adoptado 0.055. Según los diferentes autores, éste oscila entre un mínimo de 0.045, adoptado por Meyer-Peter y 0.06 dado por Shields.

F-6,4) *Valores de  $Re^*$  para los que  $\tau^*$  se independiza de  $Re^*$  y escurrimiento rugoso*

De acuerdo a Sayre y Albertson, el criterio de turbulencia plenamente desarrollada o escurrimiento rugoso es

$$\frac{R_e \sqrt{f}}{\left(\frac{h}{z}\right)} > 33$$

El parámetro  $z$  define completamente la rugosidad del canal, y de acuerdo a dichos autores

$$\frac{h}{z} = 10.72 \left(\frac{h}{k_s}\right)^{0.95}$$

con lo cual la relación anterior puede ponerse:

$$\frac{R_e \sqrt{f}}{\left(\frac{h}{k_s}\right)} \left(\frac{h}{k_s}\right)^{0.05} > 354$$

La no linealidad de la relación que liga a  $z$  con  $k_s$  hace aparecer el término  $\left(\frac{h}{k_s}\right)^{0.05}$ , y proviene de suponer que la constante de von Karman depende de la forma de la rugosidad. No estando esto plenamente probado <sup>(1)</sup>, nos inclinamos por adoptar como criterio de escurrimiento rugoso:

(1) O. J. Maggiolo; C. Farrell. — "Rough Flow criterion in Open Channels and scale selection for fixed - bed river models" — "Hydraulic Research" (En publicación).

$$\frac{R_e \sqrt{f}}{\left(\frac{h}{k_s}\right)} > 339$$

que se transforma, recordando que  $\frac{u_*}{u_m} = \sqrt{\frac{f}{8}}$ , en

$$Re^* > 120$$

Se ve entonces que para llegar a un régimen en que  $\tau^*$  sea independiente de  $Re^*$ , se necesita alcanzar valores más elevados de  $Re^*$ , que para llegar al régimen de escurrimiento rugoso, ( $\tau^*$  independiente de  $Re^*$ ).

#### F-7) *La rugosidad del fondo*

Tanto para el cálculo de curvas de remanso, como para la aplicación de las fórmulas de transporte de fondo, es fundamental el conocimiento de los coeficientes de Chezy o Manning. Pero en el caso de fondos móviles el grano del material no es suficiente para determinar el valor de estos coeficientes sino que es necesario conocer también la configuración del fondo.

La rugosidad del fondo, sea provocada por elementos uniformemente distribuidos o por elementos de distribución discreta, como es el caso de las dunas, rizos, etc., queda completamente determinada a través del coeficiente  $\alpha$  de Sayre y Albertson.

El coeficiente  $\alpha$ , es una función del tipo (Fig. 13).

$$\frac{\alpha}{a} = \phi_1 \left( \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{e}{a}, \sigma \right)$$

siendo  $\sigma$  un coeficiente dependiente de la forma del elemento.

El coeficiente  $\alpha$  es tal que se cumple la relación (1)

(1) El uso del coeficiente 6.06, en vez del valor clásico 5.75 proviene de tomar  $K = 0.4$  en vez de  $K = 0.38$  como se hace para considerar la rugosidad de Nikuradse.

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 6.06 \log \frac{h}{\alpha}$$

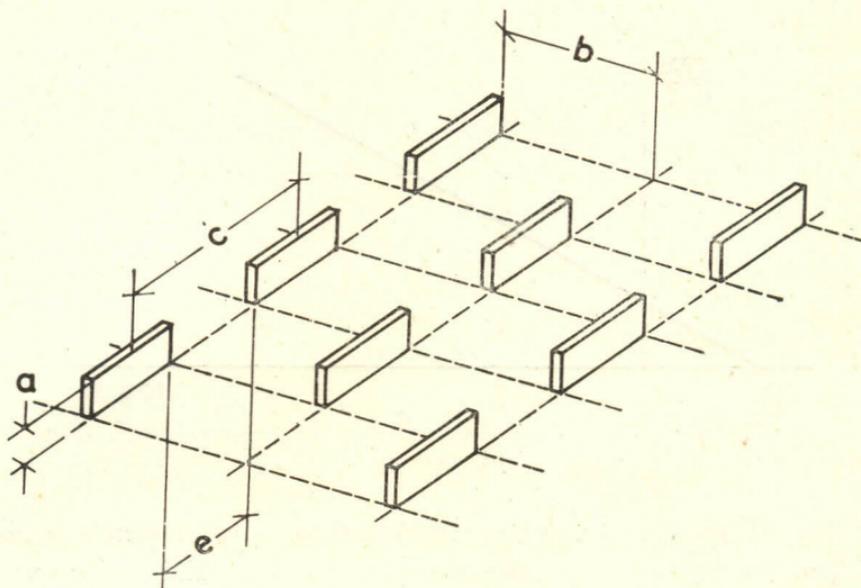


Fig. N<sup>o</sup> 13

Su determinación experimental se hace en la siguiente forma: En un canal, con la rugosidad de la forma que se desea estudiar se mide  $u_m$ ,  $h$  y  $J$ , obteniéndose  $C$  por la expresión  $C = \frac{u_m}{\sqrt{hJ}}$  siempre que se tenga la seguridad de tener turbulencia desarrollada.

El valor  $C/\sqrt{g}$  así obtenido se representa contra  $\log h$ .

El punto en que  $\frac{C}{\sqrt{g}} = 0$  permite calcular  $\log \alpha$ , como se indica en la Fig. 14.

La rugosidad de Nikuradse queda vinculada con  $\alpha$  a través de la relación que ha sido citada en F-5,4).

En el caso de los lechos a fondo móvil evidentemente la configuración del fondo (rizo, duna, antiduna, etc.) quedará definida por la forma de las irregularidades del fondo y por elementos

geométricos que caractericen su altura, distancias en los sentidos transversal y longitudinal, etc. Su conocimiento permitirá en cada caso definir un coeficiente  $\alpha$  característico del fondo.

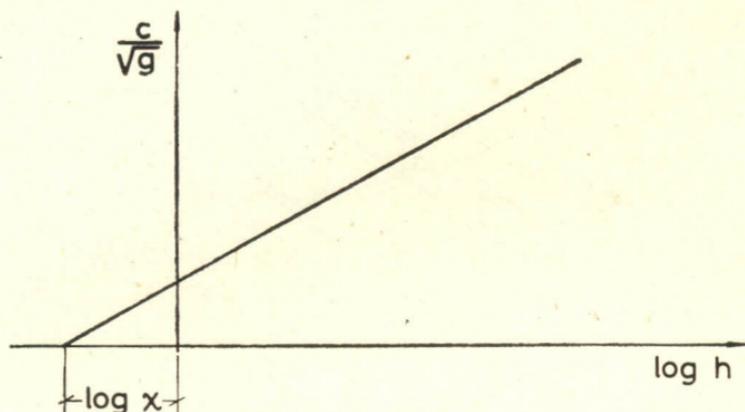


Fig. N° 14

Por el momento no hay información para determinar esta función, recurriéndose a métodos que en lo posible, subsanan el desconocimiento existente en el tema.

### Fórmula de Strickler

La fórmula más corrientemente empleada en el cálculo de canales es la de Manning.

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}$$

que en el caso de cursos muy anchos se escribe

$$R = h$$

$$v = \frac{1}{n} h^{2/3} J^{1/2}$$

$J$  es la pendiente de la línea de energía.

En el caso de movimientos turbulentos plenamente desarro-

llados el coeficiente característico del lecho  $n$  se calcula por la fórmula de Strickler

$$n = \frac{k_s^{1/6}}{K}$$

siendo  $k_s$  el “diámetro de la rugosidad granular”, coincidente con la rugosidad absoluta de Nikuradse y  $K$  es una constante.

En estas condiciones, la fórmula de Manning se escribe:

$$v = K \left( \frac{h}{k_s} \right)^{1/6} (hJ)^{1/2}$$

con lo cual vemos que el coeficiente  $C$  de Chezy vale:

$$C = K \left( \frac{h}{k_s} \right)^{1/6}$$

Se plantea ahora el problema de determinar los valores de  $K$  y  $k_s$ .

La fórmula original de Strickler en unidades métricas  $\left( \frac{s}{m^{1/3}} \right)$

era:

$$n = 0.015 d_m = \frac{d_m}{66.6}$$

midiendo  $d_m$  en milímetros. Si  $d$  se mide en metros se tiene

$$n = \frac{d_m^{1/3}}{21}$$

El diámetro usado por Strickler es el diámetro medio  $d_m$  (Fig. 15).

$$d_m = \frac{\int_0^{x_1} x (y dx)}{\int_0^{x_1} y dx}$$

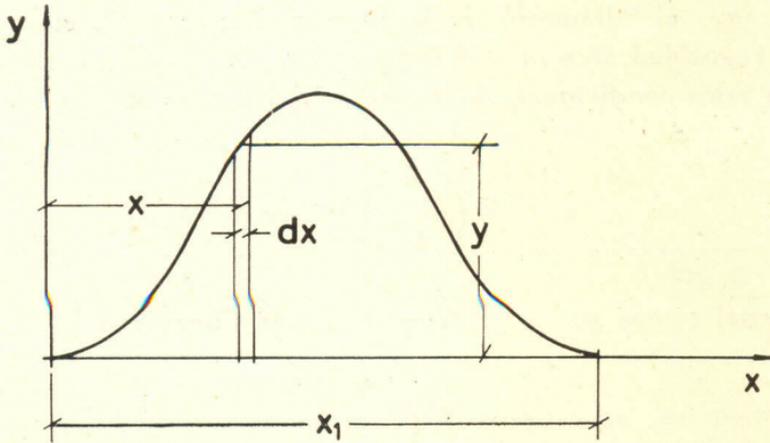


Fig. N° 15

De acuerdo a Einstein <sup>(1)</sup> la fórmula de Strickler se ajusta mejor a los hechos escribiéndola

$$n = \frac{d_{65}^{1/6}}{24}$$

siendo  $d_{65}$  el diámetro en metros para el cual 65 % en peso del material es de menor tamaño.

En unidades inglesas resulta

$$n = \frac{d_{65}^{1/6}}{29.3} \text{ con } d_{65} \text{ en ft.}$$

(En este caso la fórmula de Manning se escribe  $v = \frac{1.49}{n} h^{2/3} J^{1/2}$ ).

(1) U.N. "The Sediment Problem" pág. 26; Bangkok 1953.

Meyer Peter <sup>(1)</sup> aconseja la fórmula

$$n = \frac{d^{1/6}}{26} \quad (d \text{ en metros})$$

En realidad hemos mostrado <sup>(2)</sup> que se tiene  $K = K \left( R_e^*, \frac{h}{\lambda} \right)$  pudiéndose obtener desviaciones importantes de  $K$  respecto a los valores indicados.

### *Efecto del transporte de fondo en la rugosidad*

Einstein ha verificado que el movimiento de fondo modifica el coeficiente de rugosidad.

Si llamamos  $n_t$  al coeficiente de Manning en el caso de transporte, y  $n$  el obtenido por las fórmulas de Strickler que recién mencionamos, Einstein establece que  $n_t$  se puede calcular por la fórmula

$$\frac{n_t}{n} = f(\phi)$$

siendo  $\phi$  la misma función definida en F-4,5) para la fórmula del Einstein, Fig. 16.

$$\phi = \frac{g_s S_s}{g (s_s - 1)} \cdot \frac{1}{F \cdot d^{3/2}}$$

(1) Quelques prob. concernant la charriage des matières solides dans les rivières alpines et sub-alpines — La Houille Blanche No Special B 1949, pág. 688.

(2) O. J. Maggiolo - Borghi. Dependencia del coeficiente de Strickler de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Instituto de Máquinas. Publicación N° 25.

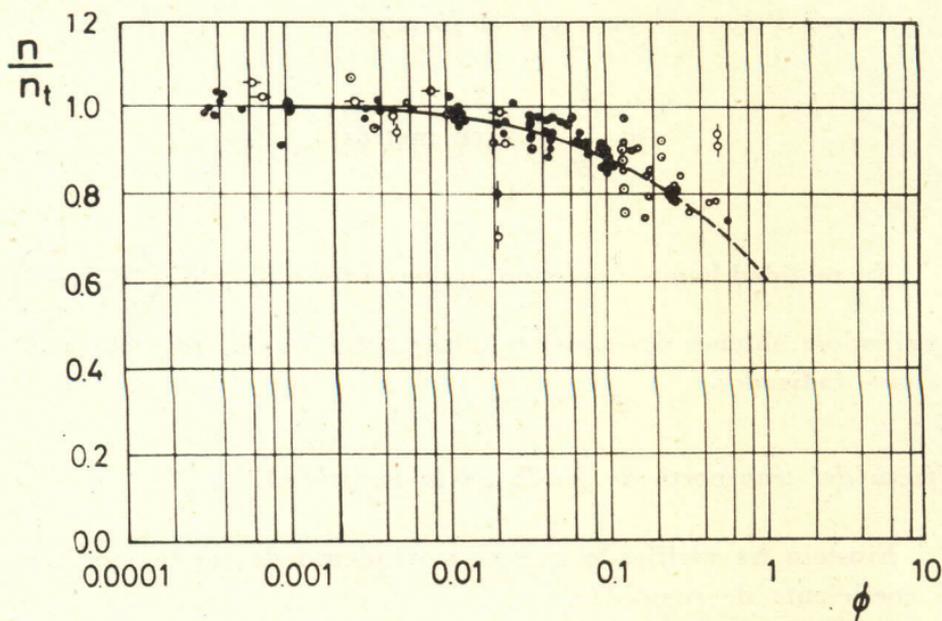


Fig. Nº 16

El problema, de acuerdo a Nedeco <sup>(1)</sup>, para los ríos Niger y Benue, puede resolverse en la siguiente forma:

El coeficiente  $C$  de la fórmula de Chezy depende de:

- a) forma de la sección recta del río
- b) tamaño de las partículas
- c) tamaño y forma de las dunas

Desde el punto de vista del tamaño de las partículas, la fórmula logarítmica establece que:

$$C = 5.75 \cdot \sqrt{g} \cdot \log 12 \frac{R}{k}$$

siendo  $k$  la rugosidad del lecho.

De acuerdo a Strickler

$$\frac{1}{n} = \frac{K}{k_s^{1/6}}$$

<sup>(1)</sup> Nedeco: "River Studies". Amsterdam — 1959.

y supone  $K = K \left( \frac{h}{k_s} \right) . 20 < K < 22$ .

De acuerdo a Nedeco, la fórmula de Strickler para un río a fondo móvil es

$$v = \frac{K}{k_r^{1/6}} R^{2/3} J^{1/2}$$

Modificando  $R$ , (poniendo  $R'$ ), se puede aplicar la misma fórmula pero con  $k_s$

$$v = \frac{K}{(k_s)^{1/6}} . R'^{2/3} . J^{1/2}$$

El factor de dunas es

$$\mu = \frac{R'}{R} = \left( \frac{h_s}{k_r} \right)^{1/4}$$

que se dedujo suponiendo  $v$  el mismo con el radio hidráulico  $R$  y con el  $R'$ .

Nedeco usa preferiblemente la modificación del coeficiente  $C$  de Chezy,

$$v = C \sqrt{RJ}$$

El coeficiente  $\mu'$  de efecto de duna será

$$v = C' \mu' \sqrt{RJ}$$

siendo

$$\frac{C'}{\sqrt{g}} = 5.75 \cdot \log 12 \frac{R}{k_s}$$

y  $\mu$  se calcula experimentalmente, de acuerdo a experiencias realizadas en Zurich por la fórmula

$$\mu' = \left[ \frac{C}{5.75 \log 12 \frac{R}{k_s}} \right]^{3/2}$$

El valor de  $k_s$  que aconseja Frijlink es  $k_s = d_{90}$ .  $C$  es el coeficiente de Chezy calculado con el radio hidráulico  $R$  real y la pendiente real  $J$  de la línea de energía.

Se ve que por este procedimiento para calcular  $\mu$  hay que conocer  $J$  y  $v$  por medidas directas, lo cual no permite realizar previsiones por cálculo.

De acuerdo a esto, Fijlink propone una relación

$$\mu = f \left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \frac{d}{RJ} \right)$$

Ahora bien  $\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \frac{d}{RJ} = \Psi$  y entonces vemos que

$$\mu = f(\tau^*)$$

De acuerdo a este autor una función que representa mejor esta relación es:

$$\mu \frac{J_d}{J} = f(\tau^*)$$

en donde  $J_d$  es la pendiente que se produce en el río, cuando escurre el gasto dominante (Definición en Nedeco 6.1.1).

Parece altamente improbable que pueda existir una ley como la indicada, pues es evidente que  $Re$  tiene que intervenir también, dado que en función de  $Re$ , para un mismo  $\Psi$ , se obtienen configuraciones muy distintas del fondo, tales como rizados, fondo plano o dunas. En consecuencia tendrá que tomarse

$$\mu = f(\tau^*, Re^*)$$

una relación de este tipo no se conoce por el momento.

## CAPITULO III

### TRANSPORTE EN SUSPENSION

#### I) Generalidades

La experiencia muestra que si en una corriente de agua, sobre un fondo de partículas de diámetro característico  $d$ , se aumenta paulatinamente el número de Reynolds  $R_e^* = \frac{u_* d}{\nu} = \frac{u_m d}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}}$ ,

el valor del coeficiente de Shields  $\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d}$  va aumentando. Si los diámetros son suficientemente grandes, inicialmente el lecho está en reposo; cuando  $\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d}$  alcanza el valor 0.04, comienza el movimiento; entre 0.04 y 0.055 (aproximadamente) se tiene un fondo plano con movimiento de transporte de fondo; luego dunas y cuando  $\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d}$  alcanza el valor 0.4 aproximadamente, de acuerdo a Shields, comienza el transporte en suspensión.

La suspensión de materiales granulométricos por una corriente de agua es un proceso íntimamente ligado con la turbulencia.

Dentro de la teoría clásica de Rouse-Schmidt, la concentración  $C$ , que se expresa en g/l, es una magnitud transportable en el sentido que, a este concepto, se le da en la teoría de la turbulencia.

En consecuencia, suponiendo que  $C$  es una función exclusiva de  $y$

$$C = C(y)$$

estudiaremos un movimiento uniforme. Si  $C(y_1)$  y  $C(y_2)$  representan la concentración en los niveles  $y_1$  y  $y_2$ , si  $|\bar{v}'|$  es el valor medio del valor absoluto de la componente turbulenta perpendicular a la dirección  $Oy$ , el gasto medio de transferencia de concentración en la dirección transversal a la dirección del escurrimiento vale:

$$\dot{C} = - |\bar{v}'_y| l \frac{dC}{d\tau} = \varepsilon \frac{dC}{d\tau}$$

en donde suponemos que la longitud de mezcla es la misma que en la teoría de la transferencia de la cantidad de movimiento. Es ésta una hipótesis fundamental, que ha sido a veces cuestionada, pero es la única que podemos hacer por el momento.  $\varepsilon$  será entonces el coeficiente de Boussinesq.

Si llamamos con la letra  $W$  la velocidad de caída de las partículas, de acuerdo a Rouse - Schmidt, existirá equilibrio en la suspensión, a través de una superficie horizontal a la cota  $y$ , cuando el gasto descendente de partículas  $WC$ , sea igual al ascendente  $-\varepsilon \frac{dC}{d\tau}$ . Entonces se deduce la ecuación diferencial básica

$$WC + \varepsilon \frac{dC}{d\tau} = 0$$

## II) Teoría de Bouvard

Esta ecuación puede obtenerse hoy como un caso particular de una teoría más completa, debido a Bouvard (1), por lo cual expondremos primero a ésta.

### II-1) Hipótesis

Se suponen las siguientes hipótesis:

- 1º) Movimiento turbulento, uniforme y plano.
- 2º) La velocidad relativa de las partículas, respecto al fluido es  $W$ , supuesta única para todas las partículas y coincidente con la que se obtiene en agua calma.
- 3º) La componente turbulenta de la velocidad según un eje vertical tiene siempre un mismo valor absoluto, sin pasar por los valores intermedios y vale  $|\bar{v}'_y|$ .

(1) Le détermination du mouvement des matériaux en écoulement turbulent (Suspension et Decantation) sur machines électroniques, par R. Bouvard et J. Loui. Assamblace Generale I.A.H.G. — Dubrowaik — 1961.

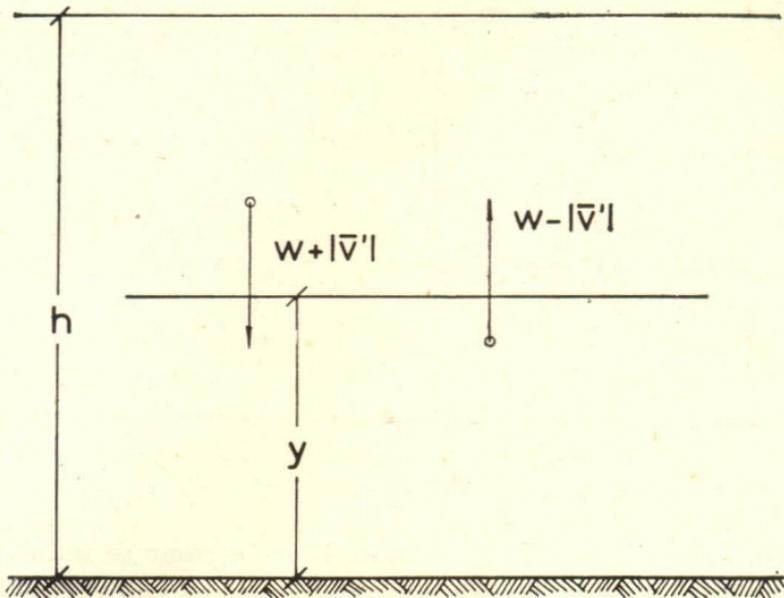


Fig. N<sup>o</sup> 17

En consecuencia, si consideramos un plano horizontal al nivel  $y$ , tendremos que la velocidad con que pasan a través de él las partículas en suspensión será  $W + |\bar{v}'_y|$  cuando  $|\bar{v}'_y|$  está dirigida hacia abajo y  $W - |\bar{v}'_y|$  cuando  $|\bar{v}'_y|$  está dirigida hacia arriba. (Fig. 17).

Se pueden presentar ahora varios casos que analizaremos sucesivamente:

1<sup>o</sup>)  $W = 0$

De acuerdo a la ley de Rouse - Schmidt si  $W = 0 \therefore \frac{dC}{d\tau} = 0$  y en consecuencia la concentración  $C$  es constante e independiente de la abcisa; tal como se ve en la Fig. 18. Por lo demás es un resultado lógico. No hay decantación.

2<sup>o</sup>) Si  $W \neq 0$ , pueden darse varios casos. Sabemos de acuerdo con la teoría de la turbulencia que

$$|\bar{v}'_y| = u_* \sqrt{1 - y/h}$$

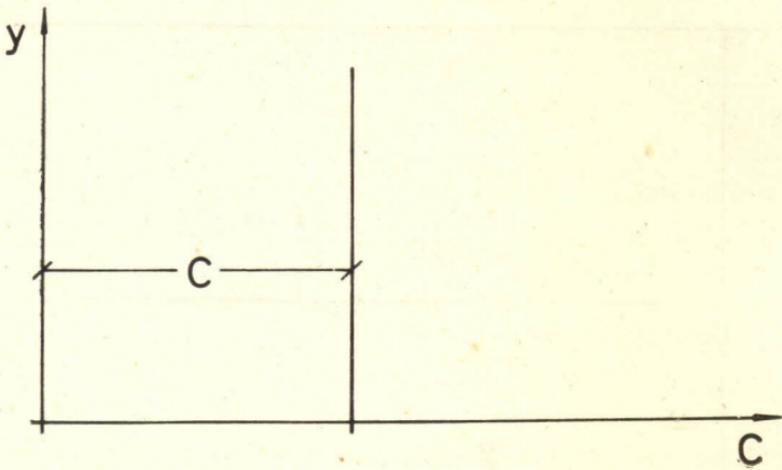


Fig. N° 18

de modo que  $|\bar{v}'_y| = \bar{v}'(y)$  es una función como se indica en la Fig. 19. Se ve en consecuencia que tendremos dos casos  $|\bar{v}'_y| < W$  y  $|\bar{v}'_y| > W$ .

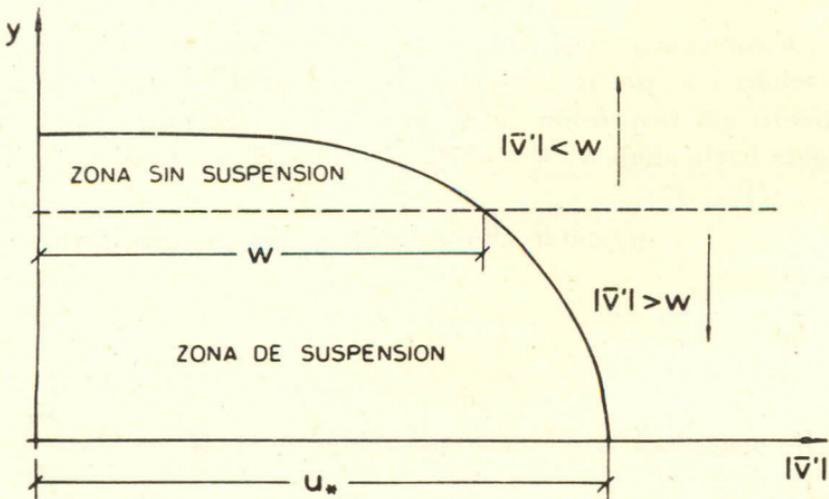


Fig. N° 19

2-a) Caso  $|\bar{v}'_y| < W$

El único efecto de la turbulencia es disminuir la velocidad de decantación, pero siempre se tendrá una caída de partículas. Al cabo de un tiempo el líquido se aclara, en consecuencia no hay régimen de suspensión.

Se ve entonces que el régimen de decantación o de suspensión es total, siempre que se cumpla

$$W > |\bar{v}'_y|_{max}$$

Pero el  $|\bar{v}'_y|_{max}$  se produce en el fondo y vale  $u_*$ , de modo que la condición para que no haya suspensión debe ser

$$W > u_*$$

2-b) Caso  $|\bar{v}'_y| > W$

En este caso, como  $|\bar{v}'_y|$  disminuye hacia las abscisas mayores, la concentración irá disminuyendo a medida que aumenta  $y$ , obteniéndose efectivamente  $C = C(y)$ , de acuerdo con Fig. 20.

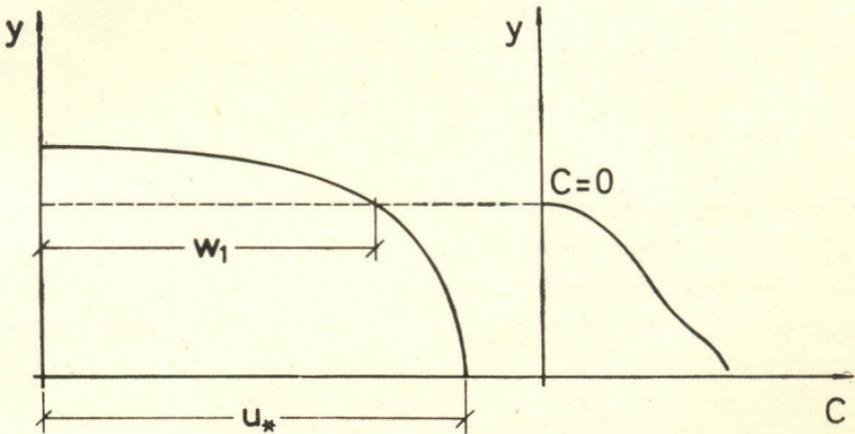


Fig. N° 20

## II-2) Análisis de la condición para tener régimen de suspensión

La condición

$$|\bar{v}'_y|_{max} = W$$

es la condición de régimen de suspensión, que hemos visto se escribe también en la forma:

$$u_*^2 = W^2$$

Pero hemos visto en F5-2)

$$W^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g}{C_D} d_n$$

siendo

$d_n$  — diámetro nominal de la partícula, igual al diámetro de la esfera que tiene el mismo volumen.

$\alpha_2$   
—  $C_D$  — Coeficiente de fricción (1)

$\alpha_3$

Recordando que  $u_*^2 = \frac{\tau_o}{\rho}$  y substituyendo, nos queda:

$$\frac{\tau_o}{(\gamma_s - \gamma) d_n} = \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{C_D} \frac{1}{\alpha_3}$$

siendo el primer miembro el número de Shields y el segundo una función de  $C_D$  que a su vez es una función del número de Reynolds y de la forma de la partícula que suponemos definida por el factor de forma  $SF$  que de acuerdo a lo visto en F5-2, puede ponerse:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} C_D = C_D (R_e^W, SF)$$

En el momento en que comienza la suspensión,  $W = u_*$ , de modo que

$$R_e^W = R_e^*$$

y por consiguiente nos queda

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d_n} = \varphi (R_e^*, SF)$$

(1) Corps of Engineers. "Some Fundamentals of Particle Size Analysis". Report N° 12 — Minneapolis — 1957.

Digamos también que la velocidad  $W$  que debe intervenir en el criterio del régimen de suspensión debe ser la velocidad de caída real de la partícula en las condiciones de concentración en que se encuentra en la suspensión. La experiencia ha mostrado que  $W$  es una función de la concentración de partículas, por lo cual la expresión más general del número de Shields límite será

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma) d_n} = \varphi (R_e^*, SF, c/c_a)$$

La Fig. 21 muestra los valores de la velocidad  $W$  en función del número de Reynolds y del factor de forma  $SF$ , para partículas aisladas.

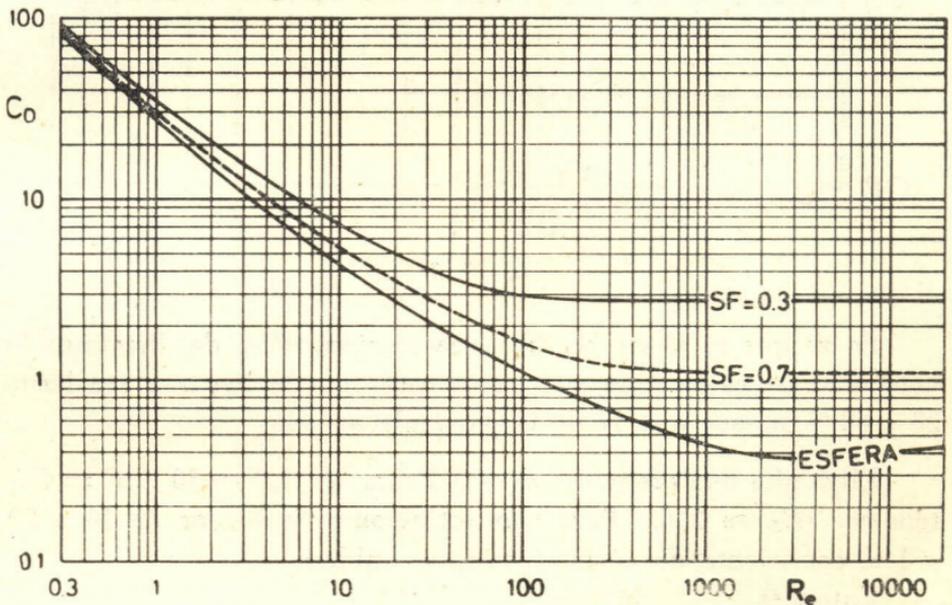


Fig. Nº 21

La Fig. 22 muestra, para diferentes Reynolds tomados como parámetros, la variación  $\frac{W_a}{W}$  como una función de la concentración en g/l ( $W$  = velocidad de caída actual,  $W_a$  = velocidad de caída de la partícula aislada).

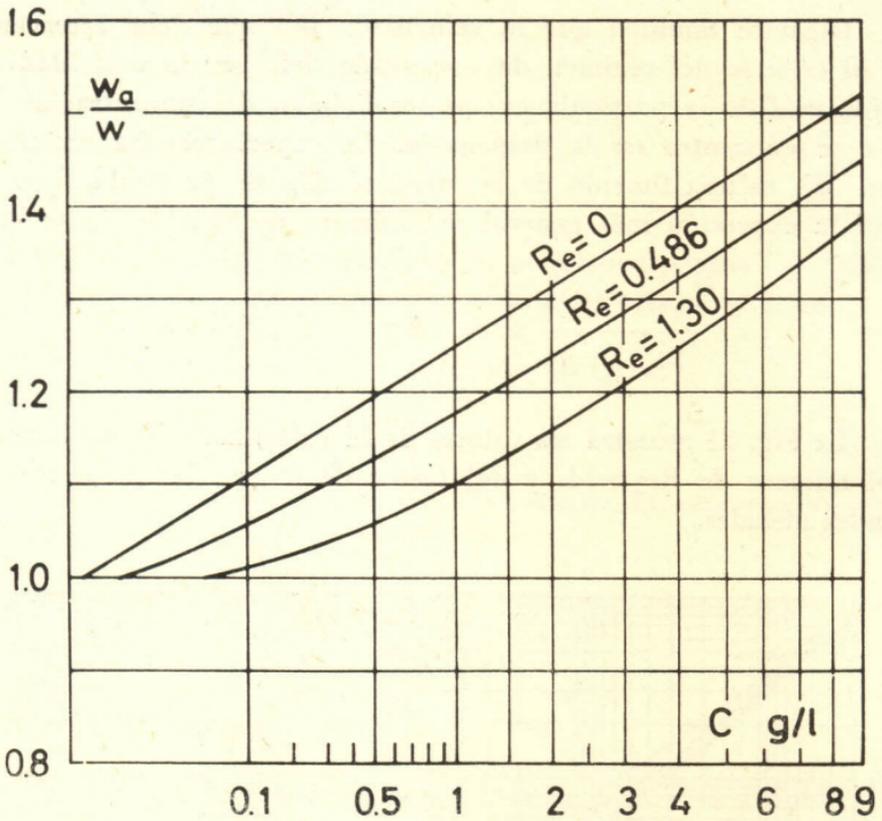


Fig. N° 22

Se ve que el efecto de la concentración, es el de disminuir la velocidad de caída, que en ciertos casos puede llegar a ser hasta 20 y 40 % menor que la de la partícula aislada.

Eligiendo una arena de  $d \approx 0.7$  mm y  $Re^* \approx 30$ ,  $SF = 0.7$  tenemos  $C_D \approx 2.6$ . Para concentraciones de menos de 10 a 20 g/l el coeficiente de corrección es la unidad.

Entonces

$$\frac{4}{3} \frac{1}{C_D} = \frac{4}{3 \times 2.6} = 0.475$$

La condición elegida representa bien una condición promedio en un río a fondo móvil, y vemos que da un valor numérico del número de Shields límite bien de acuerdo a los valores experi-

mentales citados por este autor 0.40). En la Fig. 12, se observa la curva resultante de la aplicación de este método.

### II-3) Ecuación de Bouvard

Dentro de las hipótesis que se han indicado en II-1) Bouvard supone que en cada nivel  $y$  (Fig. 23) es posible definir una longitud  $a$  por encima y  $a'$  por debajo tal que la concentración media encima de  $y$  es

$$\dot{C}_{+a} = \frac{1}{a} \int_y^{y+a} C dy$$

y la concentración media por debajo de  $y$  es

$$\dot{C}_{-a'} = \frac{1}{a'} \int_{y-a'}^y C dy$$

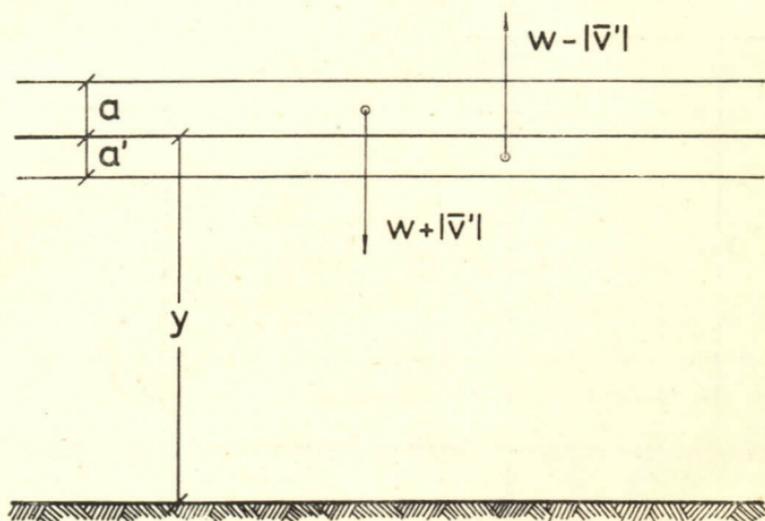


Fig. N<sup>o</sup> 23

Por consiguiente la condición de equilibrio en esa sección será:

$$\frac{W + |\bar{v}'_y|}{a} \int_y^{y+a} C dy + \frac{W - |\bar{v}'_y|}{a'} \int_{y-a'}^y C dy = 0$$

Esta ecuación integral permite conocer  $C(y)$  siempre que se conozca  $a = a(y)$  y las condiciones de borde.

En un planteamiento muy general, Bouvard supone que  $C$  sea también una función de la abscisa  $x$ .

Tenemos que considerar un elemento de volumen, de dimensiones  $dx, dy$ .

El balance de partículas sólidas por las caras verticales, será la siguiente (Fig. 24).

$$d^2 \varphi_v = \bar{u} \left[ C - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{2} - C - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy = - \bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} dx \cdot dy$$

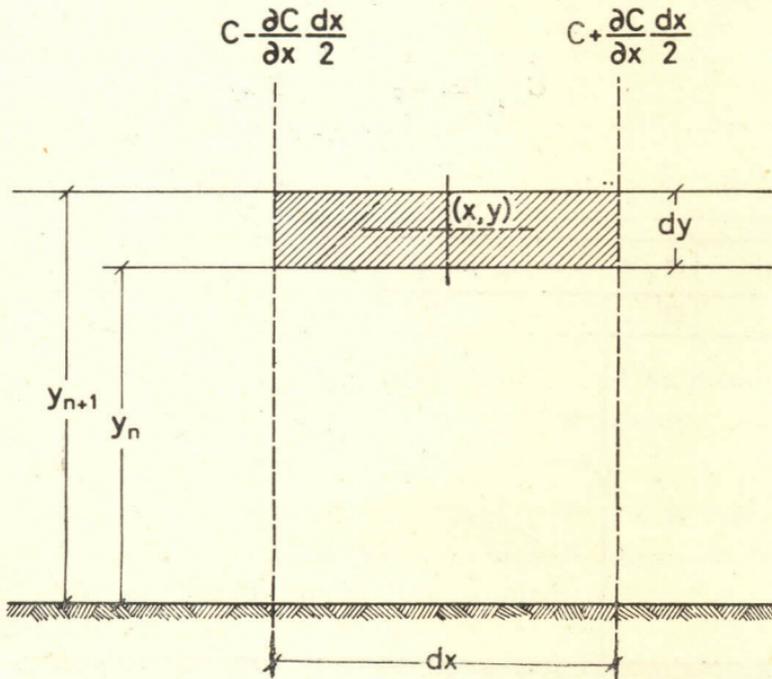


Fig. Nº 24

El intercambio por las caras horizontales, lo calcularemos, llamando  $y_n$  a la cota  $y - \frac{dy}{2}$ , e  $y_{n+1}$  a la cota  $y + \frac{dy}{2}$

Tendremos entonces:

$$d \varphi_i = \frac{|\bar{v}'_y| + W}{a_n} dx \int_{y_n}^{y_n+a_n} C dy + \frac{W - |\bar{v}'_y|}{a'_n} dx \int_{y_n-a'_n}^{y_n} C dy$$

$$d \varphi_s = \frac{W + |\bar{v}'_y|}{a_{n+1}} dx \int_{y_{n+1}}^{y_{n+1}+a_{n+1}} C dy + \frac{W - |\bar{v}'_y|}{a'_{n+1}} dx \int_{y_{n+1}-a'_{n+1}}^{y_{n+1}} C dy$$

El balance de partículas a través de las dos caras horizontales será:

$$d \varphi_h = d \varphi_s - d \varphi_i$$

El balance total se escribirá:

$$d^2 \varphi_v = d \varphi_h$$

sustituyendo tenemos:

$$-\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}$$

y en consecuencia:

$$\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = 0$$

Esta ecuación diferencial está escrita en forma de diferencias finitas, y por consiguiente puede ser fácilmente integrada en una máquina de calcular por la fórmula de los trapecios, por ejemplo. Tal como establece Bouvard es suficiente con dividir la altura  $h$  del agua, en un número suficiente de intervalos que debe elegirse en cada caso particular.

Además es necesario fijar las funciones  $a = a(y)$ , y  $|\bar{v}'_y| = |\bar{v}'|(y)$ , y las condiciones en los límites.

Se admiten ahora las siguientes hipótesis:

a) La función  $a = a(y)$  coincide con la de la longitud de mezcla de la teoría de la turbulencia,

$$a = l = K y \sqrt{1 - v/h}$$

Los trabajos de Ismail, anteriormente citados, ponen en duda esta hipótesis habiendo llegado a mostrar que según el diámetro de los sedimentos en suspensión (0.1 mm y 0.16 mm) el  $a$  puede ser 1.3 a 1.5 veces  $l$ .

b) La función que da  $|\bar{v}'_y|$  en función de  $y$  es también la de la teoría de la turbulencia, de acuerdo con la hipótesis de Prandtl modificada manteniendo la condición  $l = l'$ .

$$|\bar{v}'_y| = u_* \sqrt{1 - y/h}$$

### III) *Condiciones de borde*

Las condiciones límites de la teoría de la suspensión son las siguientes:

#### III-1) *Superficie libre*

A través de esta superficie no hay intercambio de partículas, de modo que

$$\left( \frac{dC}{dy} \right)_{y=h} = 0$$

#### III-2) *Sección de entrada*

Deberá asumirse alguna ley de distribución conocida, sea por medida directa en el curso de agua considerado, sea por analogía con otros casos parecidos y adaptándolo al caso particular (Fig. 25).

#### III-3) *Fondo del curso de agua*

Es un problema sumamente difícil, pues no es soluble, al menos por el momento por medio de medidas directas de fácil realización.

En el caso de desarenadores, Bouvard, en su artículo citado da dos casos posibles.

En el caso de un curso de agua natural, río o canal, hay que relacionar el transporte de fondo con la concentración en algún punto próximo a éste.

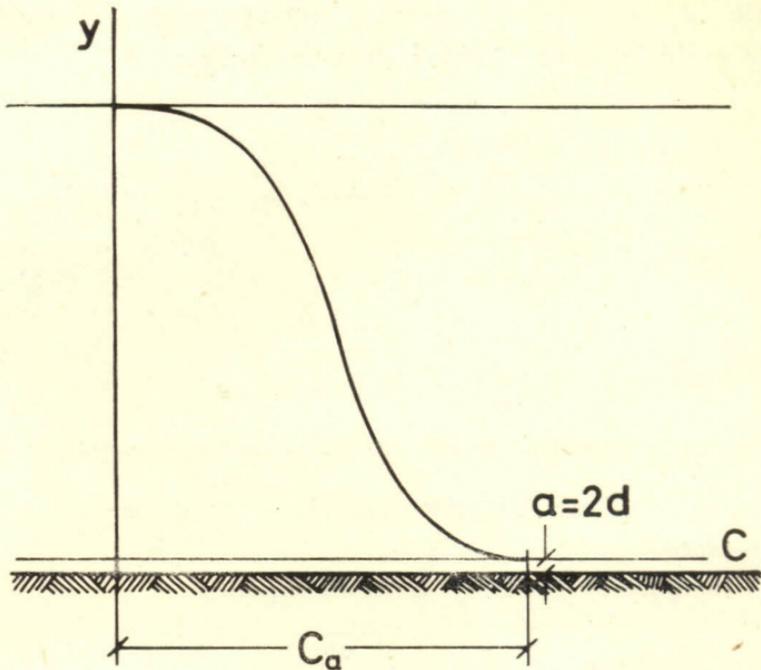


Fig. N<sup>o</sup> 25

Este problema ha sido analizado por Einstein. En el fondo existe un movimiento de transporte, cuya determinación se realiza por alguna de las fórmulas conocidas, Meyer Peter, Einstein o U.S. W. Exp. St.

Einstein correlaciona la concentración en la distancia  $a$  del fondo, que llama espesor de la capa adyacente al fondo,  $C_a$ , con el transporte de fondo.

Empieza por suponer Einstein, de acuerdo a resultados experimentales, que la turbulencia del agua no provoca desplazamientos transversales de las partículas de más de dos diámetros de las partículas del fondo. En consecuencia:

$$a = 2 d$$

Luego supone que todas las partículas se mueven con la misma velocidad  $V_b$ .

Supongamos que  $q_s$  es el total de material arrastrado en el fondo, y sea  $p_{di}$  el % de partículas que hay dentro de un cierto

intervalo  $d_i, d_{i+1}$  de diámetros. Entonces la concentración en peso de sedimentos por unidad de volumen es:

$$\frac{p_{di} q_s}{U_b 2 d}$$

Se supone que

$$C_{a_{d_i}} = A \frac{p_{di} q_s}{U_b 2 d}$$

donde  $C_{a_{d_i}}$  es la concentración en el borde de la capa adyacente al fondo, en el mismo intervalo  $d_i, d_{i+1}$  de diámetro y  $A$  es una constante

$U_b$  tampoco se conoce y Einstein supone

$$U_b = u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{ghJ}$$

Con estas suposiciones, Einstein determina, experimentalmente, el valor de la constante  $A$ , constante sin dimensiones

$$A = \frac{1}{11.6}$$

y entonces:

$$C_a = \frac{1}{11.6} \frac{p_{di} q_s}{2d\sqrt{ghJ}}$$

#### IV) *Deducción de la ecuación de Rouse - Schmidt*

La ecuación diferencial de Bouvard, fácilmente permite deducir la ecuación de Rouse - Schmidt, si se supone movimiento uniforme con lo cual  $C$  es una función exclusiva de la cota  $y$ , y si se admite una distribución de concentración, en cada punto, lineal coincidente con la tangente a la curva.

Tendremos entonces:

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

$$C(y) = C(y') - (y' - y) \frac{dC(y)}{dy} \quad (\text{Fig. 26})$$

$$a = a' = l$$

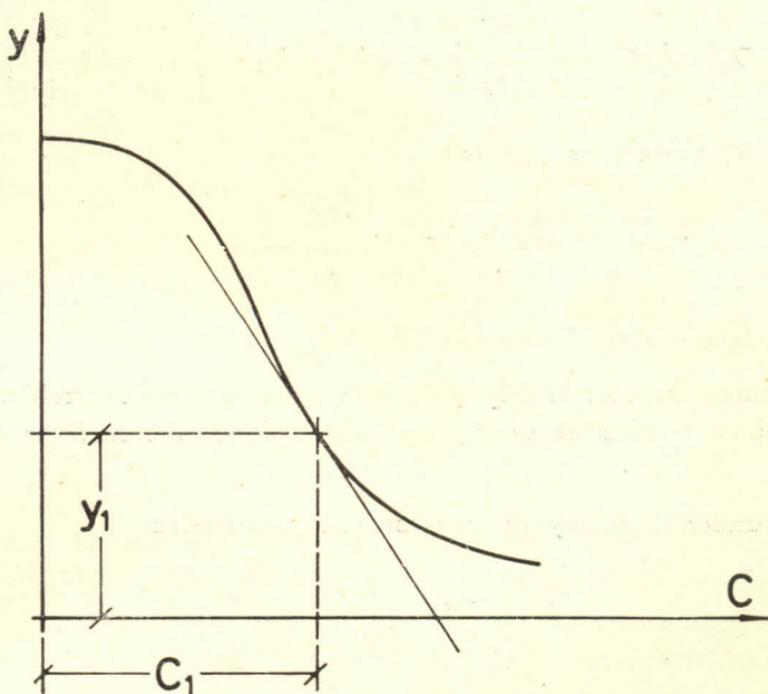


Fig. N° 26

Al tomar  $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ , la ecuación de equilibrio es la de una cota solamente:

$$\frac{W + |\bar{v}'_y|}{l} \int_y^{y+l} C dy + \frac{W - |\bar{v}'_y|}{l} \int_{y-l}^y C dy = 0$$

Si a  $C(y')$  lo llamamos  $C_1$ , nos queda:

$$\int_y^{y-l} C dy = C_1 l + l^2 \frac{dC}{dy}$$

$$\int_{y-l}^y C dy = C_1 l - l^2 \frac{dC}{dy}$$

Sustituyendo:

$$[W - |\bar{v}'_y|] \left[ C_1 - l \frac{dC}{dy} \right] + [W + |\bar{v}'_y|] \left[ C_1 + l \frac{dC}{dy} \right] = 0$$

Haciendo operaciones queda:

$$WC + |\bar{v}'_y| l \frac{dC}{dy} = 0$$

que es la ecuación de Rouse - Schmidt.

Dentro de ciertas hipótesis esta ecuación es integrable, con lo cual se pueden sacar algunas conclusiones de carácter cualitativo.

Asumiendo la ley de distribución logarítmica

$$\frac{u - u_{max}}{u_*} = \frac{2.3}{k} \log \frac{y}{h}$$

Separando variables, tendremos:

$$\int_a^y \frac{dC}{C} = -W \int_a^y \frac{dy}{l |\bar{v}'_y|} = -W \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon}$$

Pero

$$\frac{dy}{\varepsilon} = \frac{\varphi}{\tau_0} \frac{dv/dy}{1-y/h} dy = \frac{1}{u_*^2} \frac{dv/dy}{1-y/h} dy$$

sustituyendo

$$L \frac{C}{C_a} = - \frac{Wh}{u_*^2} \int_a^y \frac{dv/dy}{h-y} dy$$

Pero

$$\frac{dv}{dy} = \frac{u_*}{k} \frac{1}{y}$$

de modo que

$$\frac{C}{C_a} = - \frac{Wh}{k u_*} \int_a^y \frac{dy}{y(h-y)} = \left( \frac{h-y}{y} \frac{a}{h-a} \right)^z$$

siendo  $z = \frac{W}{k u_*}$ , un número adimensionado que mide la importancia de la velocidad de sedimentación frente a la velocidad de fricción que es una característica de la velocidad media del movimiento

$$\frac{u_*}{u_m} = \sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{\sqrt{g}}{C}$$

Si  $z$  es muy chico,  $W$  es pequeño y resulta la relación de concentración elevada aún para valores elevados de  $y/h$ . En cambio si  $z$  es grande, indicio de velocidad de sedimentación relativamente importante, se obtiene una concentración relativa  $C/C_a$

sólo importante para valores pequeños de  $\frac{y-a}{h-a}$

#### IV-1) Limitaciones de la teoría de Schmidt-Rouse

La teoría de Schmidt-Rouse tiene importantes limitaciones. En efecto, la transición de régimen de sedimentación a régimen de suspensión se obtiene para  $W = u_*$  y entonces  $z_l = \frac{1}{k} = 2.5 \div 5.0$

para la variación extrema constatada del coeficiente  $k$  entre 0.4 y 0.2.

La altura, para cada  $z$  a partir de la cual la concentración debe ser nula, se calcula por esta forma:

$$|\bar{v}'_y| = u_* \sqrt{1 - y/h}$$

y el punto límite se produce para  $|\bar{v}'_y| = W$ , luego

$$z_l = \frac{u_* \sqrt{1 - \frac{y_l}{h}}}{k u_*} = \frac{\sqrt{1 - \frac{y_l}{h}}}{k}$$

o sea:

$$\frac{y_l}{h} = 1 - (z_l k)^2$$

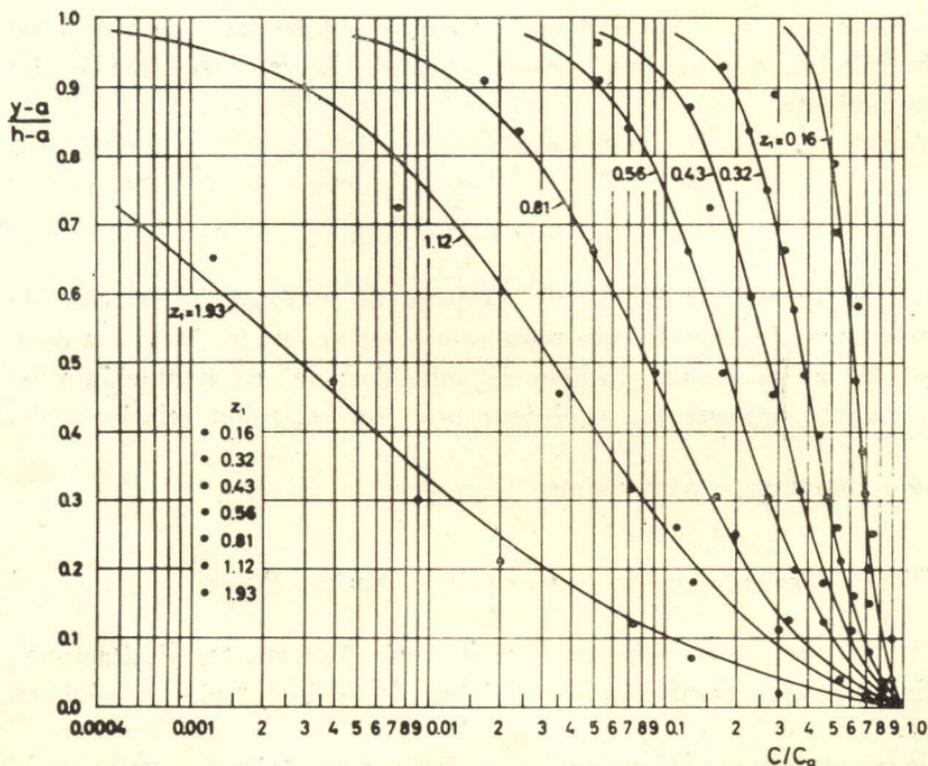


Fig. N° 27

cosa que no se verifica en la integración de Rouse - Schmidt pues  $C = 0$  para  $y = h$  en todos los casos, de acuerdo con lo que se ve en Fig. 27, independientemente de valor de  $z$  obtenido.

Pero esta imposibilidad de la teoría simplificada para interpretar el hecho de que existen condiciones de escurrimiento para las cuales no hay régimen de suspensión posible, es de carácter más profundo, como puede verse desarrollando  $C(y)$  en serie de Taylor, limitándolo al primer término:

$$C(y + l) = C(y) + \frac{dC}{dy} l.$$

Este desarrollo se limita a este valor, pues en la base de todo el razonamiento de la teoría de la turbulencia,  $l$  es una cantidad muy pequeña. Aunque esto no es cierto.

De acuerdo con la fórmula de Rouse - Schmidt

$$\frac{dc}{dy} = - C \frac{W}{\varepsilon} = - \frac{CW}{l |\bar{v}'_y|^2}$$

por lo que sustituyendo nos queda:

$$C(y + l) = C(y) \left[ 1 - \frac{W}{|\bar{v}'_y|^2} \right]$$

y como en todos los casos tiene que ser  $C(y + l) > 0$ , resulta que tiene que ser

$$|\bar{v}'_y| > W$$

Si  $|\bar{v}'_y| < W$  la fórmula deducida no tiene sentido físico. No es, en consecuencia, una fórmula de valor práctico para el estudio de decantaderos, por ejemplo.

#### V) *Transporte total de suspensión*

Una vez conocidas las dos curvas

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(y) \\ C &= C(y) \end{aligned}$$

la carga total se calcula por la expresión

$$G_S = b \int_a^h \bar{u} C dy \quad \text{kg/s}$$

siendo  $b$  el ancho del trozo de canal considerado.

### VI) *Transporte total*

El transporte total será la suma del transporte de fondo más el transporte en suspensión

$$G_T = G_F + G_S \quad \text{kg/s}$$

De acuerdo a lo visto hasta el momento, la relación entre el transporte de material  $G_T$  y el gasto líquido  $\gamma V = G$  kg/s,

será una función de  $\frac{u_* d}{\nu}$  número de Reynolds "granular" en el fondo, de la relación  $\frac{W}{u_*}$ ,

entre la velocidad de caída y la velocidad de fricción, y de la distribución granulométrica que mediremos por el coeficiente de apartamiento medio  $\sigma$ .

$$\frac{G_T}{G} = f\left(\frac{u_* d}{\nu}, \frac{W}{u_*}, \sigma\right)$$

relación que será de importancia fundamental para el estudio de las condiciones de similitud en los modelos físicos.