Funciones de Igusa-Todorov Generalizadas. Aplicaciones a la Conjetura Finitista

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Tesis de Doctorado

José Armando Vivero González

Orientadores:
Dr. Marcelo Lanzilotta (Universidad de la República)
Dra. Andrea Solotar (Universidad de Buenos Aires)

Abril, 2022

Funciones de Igusa-Todorov Generalizadas. Aplicaciones a la Conjetura Finitista

Tesis para la obtención del grado de
Doctor en Matemática

José Armando Vivero González

Orientadores:
Dr. Marcelo Lanzilotta (Universidad de la República)
Dra. Andrea Solotar (Universidad de Buenos Aires)

Abril, 2022

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento en primer lugar a toda mi familia, en especial a mis padres, por estar siempre apoyándome, aún en la decisión difícil de dejar mi país para buscar un mejor futuro y desarrollar mi carrera.

A Linus, porque estos años en Uruguay, este recorrido como matemático y como persona no hubiese culminado de igual forma de no ser por él. Hoy no temo a nada y siento el sosiego y la bendición de tener el compañero ideal en la aventura de la vida.

A mis orientadores Marcelo Lanzilotta y Andrea Solotar mi más profundo agradecimiento por la confianza que depositaron en mi, por estar siempre dispuestos a apoyarme y por brindarme un ejemplo magnífico como profesionales y como seres humanos. A Marcelo en particular le agradezco que me haya recibido en Uruguay como si fuéramos familia y que en medio de sus muchas responsabilidades, siempre pudo encontrar tiempo para hablar de matemática, disipar dudas y brindarme consejos y apoyo. Independientemente de lo que me depare el futuro, espero que podamos seguir colaborando juntos y hacer la matemática que tanto nos gusta.

A Diego Bravo y Octavio Mendoza, por su amistad, su confianza y su valiosa ayuda a la hora de impulsar el desarrollo de las ideas matemáticas que están en el origen de esta tesis.

Al profe José Fidel H. Advíncula, con quien empecé a estudiar teoría de representaciones y también a todos mis profesores y compañeros en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana. Fueron años hermosos de formación y aprendizaje que llevaré conmigo siempre.

Un agradecimiento especial a PEDECIBA y a toda la gente del IMERL que me ha recibido con mucho cariño como uno más. En especial a Maryori, Matilde, las secretarias, los miembros del grupo de álgebra y al resto de colegas con los que he compartido en estos años.

No quiero dejar de agradecer también a mis amigos, dentro y fuera de Cuba, quienes a pesar de la distancia han estado siempre ahí.

Introducción

La teoría de representaciones de álgebras asociativas tuvo un impulso importante en los años 40 del pasado siglo motivado por las conjeturas de Brauer-Thrall. Desde entonces ha tenido un desarrollo vertiginoso y hoy es una de las ramas del álgebra con mayor actividad de investigación. Este trabajo se sitúa en la intersección entre la teoría de representaciones y el álgebra homológica, la cual se remonta en su origen a los trabajos de D. Hilbert sobre la dimensión global de álgebras de polinomios. En particular en 1890 se da a conocer el famoso teorema que nos dice que la dimensión global del álgebra $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ es precisamente igual a n. Más adelante estas teorías se enriquecen en su interacción con la teoría de categorías, que surge por el año 1945 con los trabajos de S. Eilenberg y S. Mac Lane.

Es conocido que en general hay álgebras que podemos considerar sencillas en cuanto a sus representaciones, pero que tienen dimensión global infinita. Una medida homológica que intenta capturar este fenómeno es la llamada dimensión finitista. Sea R un anillo cualquiera, definimos las dimensiones finitistas (pequeña y grande) de la siguiente manera

$$\mathrm{fin.dim}(R) := \sup\{\mathrm{dp}(M) : M \in \mathrm{mod}\, R, \mathrm{dp}(M) < \infty\}$$

$$\mathrm{Fin.Dim}(R) := \sup\{\mathrm{dp}(M) : M \in \mathrm{Mod}\, R, \mathrm{dp}(M) < \infty\}.$$

Auslander y Buchweitz probaron en [8] que para anillos conmutativos, noetherianos y locales, se tiene que $\mathrm{fin.dim}(R) = \mathrm{depth}(R)$, la cual es siempre finita (ver [16]). Para R conmutativo y noetheriano, combinando resultados de [14] y [28], se obtiene que $\mathrm{Fin.Dim}(R) = \mathrm{Kdim}(R)$, que puede ser infinita.

Para el caso no conmutativo, ha resultado mucho más difícil estudiar estas dimensiones. En 1960 H. Bass propone dos conjeturas que involucran estas dimensiones y que a la luz de los resultados que se han obtenido, se enuncian generalmente en el contexto de álgebras de Artin (o para álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo). Sea Λ un álgebra de Artin:

Conjetura 0.0.1. $\text{fin.dim}(\Lambda) = \text{Fin.Dim}(\Lambda)$.

Conjetura 0.0.2. $\text{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

En [13] H. Bass logra dar una prueba parcial de la Conjetura 0.0.1, pero para el caso general B. Zimmermann-Huisgen en [61] dio ejemplos de álgebras monomiales que no la satisfacen. Por otro lado, la Conjetura 0.0.2 (a la cual se llama simplemente conjetura finitista) tiene una larga historia y solo ha sido probada para ciertas familias de álgebras. Hasta el momento no se ha encontrado una prueba general y tampoco un contraejemplo, por lo que permanece como uno de los problemas abiertos más antiguos en teoría de representaciones.

Tomamos unas líneas para recordar algunos de los resultados más importantes que han impulsado el estudio de la conjetura finitista. En [46] H. Mochizuki demuestra que para un álgebra de Artin Λ tal que el radical de Jacobson cumple que $\text{rad}^2\Lambda = 0$, la conjetura es cierta. Más adelante, en [27] E. L. Green y B. Zimmermann-Huisgen prueban la conjetura con la hipótesis más general $\text{dp}(\text{rad}^3\Lambda) < \infty$. Otro resultado relevante viene dado por Auslander y Reiten en [9] donde muestran que la conjetura es cierta si la subcategoría de los módulos con dimensión proyectiva finita es contravariantemente finita; sin embargo por un lado es difícil determinar si esta condición se satisface y por otro hay ejemplos donde no se cumple (ver [36]). Existen además las llamadas técnicas de reducción (ver por ejemplo [25] y [26]) que lo que buscan es justamente reducir el problema de determinar la dimensión finitista de álgebras en cierta familia a una subfamilia donde sea más fácil de estudiar. Como puede verse para el análisis de la conjetura se han desarrollado disímiles herramientas que vinculan diferentes temáticas y no dejan de surgir nuevos métodos como es el caso de la teoría que desarrolló J. Rickard en [47], donde da una condición suficiente para que se satisfaga la conjetura finitista (grande) en términos de subcategorías de localización en la categoría derivada no acotada. Para más información sobre otras técnicas y resultados remitimos al lector a [61].

Por la relevancia que tiene en esta tesis vamos a mencionar especialmente una herramienta que ha sido muy utilizada para el estudio de la conjetura y son las funciones de Igusa-Todorov (funciones IT). Dichas funciones se introducen en [37] y los autores prueban, entre otras cosas, que si $\text{rep.dim}(\Lambda) \leq 3$ entonces la conjetura se satisface. A partir de esto se han desarrollado un gran número de resultados que usan las funciones de Igusa-Todorov, dando condiciones para que ciertas álgebras satisfagan la conjetura. En 2009 J. Wei da la definición de álgebra n-Igusa-Todorov (álgebra IT) [54, Definition 2.2], demostrando que dichas álgebras satisfacen la conjetura y dando numerosos ejemplos y aplicaciones. En 2015 T. Conde, usando una familia de ejemplos dados por R. Rouquier, muestra que existen álgebras que no son de tipo Igusa-Todorov.

En esta tesis profundizamos en el estudio de las funciones IT, logrando generalizarlas de una manera significativa, dando paso a implicaciones muy interesantes para la conjetura finitista y también para la teoría de representaciones en general. Un aporte importante es la definición de álgebra Lat-Igusa-Todorov (álgebra LIT), la cual generaliza el concepto de álgebra de Igusa-Todorov e incluye los ejemplos de Conde-Rouquier, entre otros. La teoría de funciones IT generalizadas nos permite probar que las álgebras LIT satisfacen la conjetura finitista. A lo largo del trabajo damos varios ejemplos y aplicaciones de la teoría desarrollada. A continuación detallamos los contenidos de este trabajo.

La tesis se divide en cinco capítulos. En el Capítulo 1 exponemos los conceptos y resultados previos sobre las álgebras de Artin y sus categorías de módulos, que resultan necesarios para comprender el desarrollo posterior de la tesis. El Capítulo 2 está dedicado a las funciones de Igusa-Todorov y sus propiedades, preparando el terreno para los próximos dos capítulos en los que se desarrollan conceptos nuevos. En el Capítulo 3 se definen las funciones de Igusa-Todorov generalizadas y se estudian sus propiedades, así como su relación con las funciones originales. En el Capítulo 4 definimos la noción de álgebra LIT, la cual generaliza el concepto de álgebra de Igusa-Todorov. En dicho capítulo probamos que las álgebras LIT satisfacen la conjetura finitista y damos aplicaciones al caso de las álgebras de matrices triangulares y los productos tensoriales. El Capítulo 5 es una combinación de conclusiones y recomendaciones de líneas de investigación a desarrollarse en esta área.

Índice

Agradecimientos V

Introducción VII

1. Preliminares **1**
1.1. Categorías aditivas 1
1.2. Álgebras de Artin 3
1.2.1. El operador sizigia 7
1.2.2. Módulos Gorenstein proyectivos 8
1.3. Álgebras de matrices triangulares 10
1.4. Álgebras de caminos 14
1.4.1. Ideales admisibles y cocientes de álgebras de caminos . 17
1.4.2. Representaciones y módulos 18

2. Funciones y álgebras de Igusa-Todorov **21**
2.1. Las funciones Φ y Ψ 21
2.2. Las funciones IT y la conjetura finitista 24
2.3. Φ-dimensión y Ψ-dimensión 27

3. Funciones de Igusa-Todorov generalizadas **35**
3.1. Subcategorías de Igusa-Todorov 35
3.2. Propiedades de las funciones IT generalizadas 41
3.2.1. Relación entre las funciones IT y las generalizadas . . . 46

4. Aplicaciones **51**
4.1. Álgebras Lat-Igusa-Todorov 51
4.2. Álgebras Triangulares 56
4.3. Aplicaciones del Teorema 4.2.1 62
4.3.1. Productos Tensoriales 65

5. Consideraciones Finales **73**
5.1. Teoría relativa de Hochschild 73
5.1.1. Cubiertas proyectivas relativas 74
5.2. Productos tensoriales 75
5.3. Álgebras LIT generalizadas 75
5.4. Subcategorías de localización 76

Bibliografía **79**

Capítulo 1

Preliminares

Resumen: En este capítulo se hace un resumen de las principales propiedades y herramientas que se usarán en el desarrollo de los capítulos posteriores y que conciernen a las álgebras de Artin y en particular las álgebras de caminos. En general se omiten las pruebas y se dan las referencias, excepto si se trata de algún resultado que no se encuentra fácilmente en alguno de los libros o materiales de más amplia disponibilidad, como son [10], [3] o [49].

1.1. Categorías aditivas

En esta sección damos una breve pero interesante mirada a la estructura aditiva de una categoría con ciertas condiciones que la hacen parecerse a una categoría de módulos en algún sentido. Las ideas que discutimos están ya presentes en la obra de M. Auslander [6, Chapter 2]. Más adelante usaremos estas observaciones para resaltar cómo encaja en un contexto categórico más general la definición de las funciones de Igusa-Todorov, dadas originalmente para módulos finitamente generados sobre álgebras de Artin.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Denotamos por $Rep(\mathcal{A})$ a la colección de clases de isomorfismo de objetos en $\mathcal{A}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ denotamos su clase de isomorfismo por $[A]$. Decimos que $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña si $Rep(\mathcal{A})$ es un conjunto. En lo que sigue solo vamos a considerar categorías esqueléticamente pequeñas.

Podemos definir una operación binaria $+ : Rep(\mathcal{A}) \times Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A})$ dada por $[A] + [A'] = [A \oplus A']$, donde $A \oplus A'$ representa la suma directa (recordamos que en una categoría aditiva el producto y coproducto de un número finito de objetos coinciden y suele llamársele suma directa). Esta operación es conmutativa, asociativa y existe el elemento neutro $[0]$. Esto significa que $(Rep(\mathcal{A}), +)$ es un monoide conmutativo. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor aditivo, entonces podemos definir un mapa $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{B})$ dado por $Rep(F)([A]) := [F(A)]$. La siguiente proposición se sigue inmediatamente de las definiciones.

Proposición 1.1.1. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo, entonces:*

(i) $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{B})$ *es un homomorfismo de monoides.*

(ii) Si $F = 1_{\mathcal{A}}$*, entonces* $Rep(F) = 1_{Rep(\mathcal{A})}$*.*

(ii) Sea $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$*, se tiene* $Rep(GF) = Rep(G)Rep(F)$*.*

Decimos que $[A] \in Rep(\mathcal{A})$ es indescomponible si $[A] = [B] + [C]$ implica que o bien $[B] = [0]$ o $[C] = [0]$. De esta manera $A \in \mathcal{A}$ es indescomponible si y solo si $[A]$ es indescomponible. Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ se dice que es Krull-Schmidt si cada objeto se escribe de manera única como suma directa finita de objetos indescomponibles, salvo el orden de los sumandos. Es interesante observar que $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt si y solo si $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide abeliano libre cuya base está formada por las clases de isomorfismo de objetos indescomponibles.

Consideremos una categoría Krull-Schmidt aditiva $\mathcal{A}$ y denotemos por $Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$ el grupo abeliano libre cuya base está formada por las clases de isomorfismo de los objetos indescomponibles. Este grupo es el menor grupo abeliano libre que contiene a $Rep(\mathcal{A})$ como submonoide. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo, entonces por linealidad el mapa $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{B})$ se extiende de manera única a un homomorfismo de grupos $Rep_{\mathbb{Z}}(F) : Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}) \to Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{B})$ tal que $Rep_{\mathbb{Z}}(F)|_{Rep(\mathcal{A})} = Rep(F)$. Un caso particular de gran interés es cuando $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y por tanto $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A})$ es un endomorfismo.

Es preciso señalar que, más generalmente, todo lo anterior puede hacerse si F en vez de ser un funtor es solamente un operador aditivo, o sea una función entre las clases de objetos de ambas categorías que es compatible con la suma directa. Más aún, no todo endomorfismo $L : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A})$ necesariamente proviene de un funtor aditivo, pero sí podemos afirmar que proviene de un cierto operador entre las clases de objetos de $\mathcal{A}$. Sea $L : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A})$ un endomorfismo de monoides. Definimos una función $F_L : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ de la siguiente manera: para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ consideramos $L([A]) \in Rep(\mathcal{A})$. Como $Rep(\mathcal{A})$ es el monoide libre generado por las clases de los objetos indescomponibles tenemos que $L([A]) = \sum n_i[X_i]$. De esta forma definimos $F_L(A) := \oplus n_i X_i$, el cual está unívocamente determinado pues estamos trabajando en una categoría Krull-Schmidt. Es claro que F_L respeta la estructura aditiva y que $Rep(F_L) = L$. El ejemplo más importante de esto es el operador sizigia, el cual veremos con detalle en la sección 1.2.1. Este ejemplo es de interés particularmente porque de él se deriva la definición de las funciones de Igusa-Todorov, las cuales se estudian extensamente en este trabajo.

1.2. Álgebras de Artin

Las álgebras de Artin son objetos matemáticos que proporcionan un contexto favorable y general en el cual se puede desarrollar el estudio de la teoría de representaciones. Para nosotros todo anillo es un anillo con unidad. Sea R un anillo conmutativo y artiniano, decimos que el anillo Λ es una **R-álgebra de Artin** si Λ tiene una estructura de R-módulo compatible con el producto en Λ y además es finitamente generado. Esto es equivalente a que exista un homomorfismo de anillos $\varphi : R \to \Lambda$ tal que $Im\,\varphi \subseteq \mathcal{Z}(\Lambda)$ y Λ es finitamente generado como R-módulo. El objetivo de la teoría de representaciones es el estudio de las categorías $\operatorname{Mod}\Lambda$ y $\operatorname{mod}\Lambda$. La primera formada por todos los Λ-módulos y la segunda es la subcategoría plena formada por aquellos Λ-módulos finitamente generados (f.g.). En este trabajo nos concentramos en la categoría $\operatorname{mod}\Lambda$.

Proposición 1.2.1. *Sea Λ una R-álgebra de Artin, entonces* $\operatorname{mod}\Lambda$ *es una R-categoría abeliana de tipo Krull-Schmidt.*

La prueba de que es una R-categoría abeliana es más o menos directa de las definiciones. Para ver que es Krull-Schmidt remitimos al lector a [10, Theorem 2.2 p. 33]. De manera alternativa se puede probar que $\operatorname{mod}\Lambda$ posee idempotentes que escinden y que el anillo de endomorfismos de cada objeto es semi-perfecto [43, Corollary 4.4].

Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$. Usamos la notación $X|M$ para significar que X es sumando directo de M. El hecho de que cada módulo se descompone de manera única como suma directa finita de indescomponibles, pone el foco en esta clase de módulos y permite estudiar de manera más sencilla algunos problemas reduciéndolos al caso indescomponible.

Decimos que una subcategoría $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ es **saturada a izquierda** si contiene a los proyectivos y es cerrada por extensiones, por núcleos de epimorfismos y por sumandos directos.

Sea $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ una subcategoría cualquiera y $X \in \operatorname{mod}\Lambda$. La **dimensión de $\mathcal{D}$-resolución** de X, denotada $\text{res.dim}_{\mathcal{D}}(X)$, es el menor entero no negativo n tal que existe una sucesión exacta $0 \to D_n \to \cdots \to D_1 \to D_0 \to X \to 0$, donde $D_i \in \mathcal{D}$ para todo i. Si un tal n no existe, definimos $\text{res.dim}_{\mathcal{D}}(X) := \infty$.

Sea Λ un álgebra de Artin y $M \in \operatorname{mod}\Lambda$. Podemos definir la **serie radical** de M como $0 \subset \cdots \subset \operatorname{rad}^2 M \subset \operatorname{rad} M \subset M$. La longitud de la serie radical es el menor entero positivo i tal que $\operatorname{rad}^i M = 0$. A esta longitud también se le llama **longitud de Loewy** y se denota $LL(M)$. En particular la longitud de Loewy del álgebra $LL(\Lambda)$ no es más que la longitud de su serie radical.

Dada un álgebra de Artin Λ definimos su **dimensión de representación**, denotada por $\text{rep.dim}(\Lambda)$, como sigue

$$\text{rep.dim}(\Lambda) = \text{mín}\{\text{gl.dim}\,(\text{End}_{\Lambda}(M)) \mid M \text{ es generador-cogenerador}\}.$$

Un módulo M es generador-cogenerador si todos los proyectivos e inyectivos indescomponibles son sumandos directos de M.

Denotamos por $\operatorname{proj}\Lambda$ la subcategoría plena de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados y por $\operatorname{inj}\Lambda$ la de los inyectivos finitamente generados. Un hecho conocido y de vital importancia es que $\operatorname{mod}\Lambda$ tiene cubiertas proyectivas y envolventes inyectivas minimales, únicas salvo isomorfismo. Sea $X \in \operatorname{mod}\Lambda$, llamamos **sizigia** de X y lo denotamos por ΩX al núcleo de $P_X \twoheadrightarrow X$, siendo P_X la cubierta proyectiva minimal de X. Esto nos permite dar la siguiente definición de dimensión proyectiva, equivalente a otras definiciones más clásicas como son [3, A.4, Definition 4.3] y [39, p. 48].

$$\text{dp}(X) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid \Omega^k(X) \in \operatorname{proj}\Lambda\}. \tag{1.1}$$

Denotamos por $\mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda)$ a la subcategoría plena de $\operatorname{mod}\Lambda$ formada por los módulos con dimensión proyectiva finita. Dada una subcategoría cualquiera $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$, definimos

$$\text{fin.dim}(\mathcal{D}) := \sup\{\text{dp}(M) \mid M \in \mathcal{D},\ \text{dp}(M) < \infty\}. \tag{1.2}$$

Existen relaciones interesantes entre la sizigia y las sucesiones exactas cortas (s.e.c). La siguiente proposición es una consecuencia de la demostración del conocido Lema de la Herradura [55, Horseshoe Lemma 2.2.8].

Proposición 1.2.2. *Sea* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *una s.e.c en* $\operatorname{mod}\Lambda$. *Entonces existe* $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ *tal que la siguiente es una s.e.c*

$$0 \to \Omega A \to \Omega B \oplus P \to \Omega C \to 0.$$

Las siguientes transformaciones llamadas a veces "rotaciones" de una sucesión exacta corta son muy útiles en la práctica.

Proposición 1.2.3. *Sea* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *una s.e.c en* $\operatorname{mod}\Lambda$. *Entonces*

(i) $\exists P \in \operatorname{proj}\Lambda$ *tal que* $0 \to \Omega Y \to \Omega Z \oplus P \to X \to 0$ *es una s.e.c.*

(ii) $\exists P' \in \operatorname{proj}\Lambda$ *tal que* $0 \to \Omega^2 Z \to \Omega X \oplus P' \to \Omega Y \to 0$ *es una s.e.c.*

(iii) $\exists P'' \in \operatorname{proj}\Lambda$ *tal que* $0 \to \Omega Z \to X \oplus P'' \to Y \to 0$ *es una s.e.c.*

Demostración. (i) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_Y \arrow[r, equal] \arrow[d, "\epsilon"'] & P_Y \arrow[r] \arrow[d, "h\epsilon"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "h"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\operatorname{Ker}\epsilon = \Omega Y$ y que existe $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ tal que $\operatorname{Ker} h\epsilon = \Omega Z \oplus P$. Aplicando a continuación el Lema de la Serpiente [55, Snake Lemma 1.3.2] obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to \Omega Y \to \Omega Z \oplus P \to X \to 0.$$

(ii) Sale directamente de iterar la parte (i) dos veces.
(iii) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P_Z \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[d, "\epsilon"'] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

El mapa μ que cierra el diagrama sale del hecho de que P_Z es proyectivo. Sea $y \in Y$, entonces por la sobreyectividad de ϵ existe $p \in P_Z$ tal que $h(y) =$

$\epsilon(p) = h\mu(p)$, luego $y - \mu(p) \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} j$, por lo tanto $y - \mu(p) = j(x)$, para algún $x \in X$, de aquí que $y = j(x) + \mu(p)$.
Siendo así, definamos $g : X \oplus P_Z \to Y$ dado por $g(x + p) := j(x) + \mu(p)$. Del párrafo anterior tenemos que g es un epimorfismo y si $p \in \operatorname{Ker} \epsilon = \Omega Z$, entonces existe un único $x \in X$ tal que $\mu(p) = j(x)$, luego $x - p \in \operatorname{Ker} g$, de esta manera $\operatorname{Ker} g \cong \Omega Z$ y tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega Z \longrightarrow X \oplus P_Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0\,.$$

□

A continuación veremos algunas propiedades que relacionan las sizigias, las sucesiones exactas cortas y la dimensión proyectiva.

Proposición 1.2.4. *Sea* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *una s.e.c en* $\operatorname{mod} \Lambda$. *Entonces se cumple*

$$\operatorname{dp}(C) \leq \operatorname{dp}(A \oplus B) + 1.$$

Demostración. Primero recordar que, debido a la aditividad de la cubierta proyectiva, se tiene que $\operatorname{dp}(A \oplus B) = \max\{\operatorname{dp}(A), \operatorname{dp}(B)\}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que A y B ambos son de dimensión proyectiva finita, pues de lo contrario el miembro derecho de la desigualdad sería infinito y no habría nada que probar. Denotemos por $k := \operatorname{dp}(A \oplus B)$, usando la Proposición 1.2.2 tenemos que $\Omega^{k+1} C \in \operatorname{proj} \Lambda$ y por la ecuación 1.1 concluimos que $\operatorname{dp}(C) \leq k + 1$. □

La siguiente proposición relaciona la dimensión proyectiva de un módulo y su sizigia.

Proposición 1.2.5. *Sea* $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, *entonces*

$$\operatorname{dp}(X) \leq \operatorname{dp}(\Omega X) + 1.$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 1.2.4 a la sucesión exacta corta $0 \to \Omega X \to P_X \to X \to 0$ para obtener $\operatorname{dp}(X) \leq \operatorname{dp}(\Omega X \oplus P_X) + 1 = \operatorname{dp}(\Omega X) + 1$. □

Es oportuno señalar que en general la desigualdad anterior es una igualdad, salvo si X es proyectivo.

Las propiedades que acabamos de estudiar, entre otras, se generalizan a las funciones de Igusa-Todorov y a sus versiones generalizadas, que definiremos en los capítulos 2 y 3 respectivamente.

1.2.1. El operador sizigia

Recordamos que dada un álgebra de Artin, es posible definir la sizigia de cada $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ y la denotamos ΩX. Tenemos así un mapa $\Omega : \operatorname{Ob}(\operatorname{mod}\Lambda) \to \operatorname{Ob}(\operatorname{mod}\Lambda)$ y es natural investigar si este operador es un funtor. Dado un morfismo $f : X \to Y$, podemos obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Omega X \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \Omega Y \arrow[d] \\
P_X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\epsilon_X"] & P_Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

El mapa g se obtiene del hecho de que P_X es proyectivo y ϵ_Y un epimorfismo. Para obtener t pasamos a los núcleos. Acá vemos que t depende de g y como g no es en general único, entonces no queda bien definida la correspondencia $f \mapsto t$. Sin embargo, si g' es otro mapa con la misma propiedad que g, es decir $f\epsilon_X = \epsilon_Y g'$, se cumple que $\operatorname{Im}(g-g') \subseteq \operatorname{Ker}\epsilon_Y$ y de aquí se obtiene que $t - t'$ se factoriza por P_X que es proyectivo. Esta es una de las motivaciones para definir la categoría de módulos estable, dicha categoría que se denota por $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ tiene los mismos objetos que $\operatorname{mod}\Lambda$, pero el espacio $\underline{\operatorname{Hom}}(X,Y)$ se define como el cociente $\operatorname{Hom}_\Lambda(X,Y)/\mathcal{P}(X,Y)$, donde $\mathcal{P}(X,Y)$ está dado por aquellos morfismos que se factorizan por un proyectivo. De esta manera $\Omega : \underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda \to \underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ es un funtor aditivo.

El hecho de poder convertir el operador sizigia en un funtor es muy útil, sin embargo para la construcción que hicimos en la Sección 1.1 basta con que $\Omega : \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$ sea una función entre las clases de objetos que preserva la suma directa y en este caso lo es. Denotemos por $K := \mathit{Rep}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{mod}\Lambda)$, entonces tenemos que $\Omega : K \to K$ es un endomorfismo de grupos como consecuencia de la Proposición 1.1.1. Este endomorfismo es la base de la definición de las funciones IT que introduciremos en el Capítulo 2.

1.2.2. Módulos Gorenstein proyectivos

Los módulos Gorenstein proyectivos fueron introducidos por Enoch y Jenda en [22], inspirados por la noción de módulo con G-dimensión cero dada por M. Auslander en [7]. Desde entonces se han estudiado intensamente generando interesantes y profundas conexiones entre teoría de representaciones y álgebra homológica. En este trabajo solo necesitaremos nociones básicas sobre esta clase de módulos.
La noción de Gorenstein proyectivo se puede definir para módulos cualesquiera sobre un anillo e incluso en otras categorías más generales, sin embargo acá solo nos ocuparemos del caso de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin Λ. Decimos que $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ es Gorenstein proyectivo si existe una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \longrightarrow \cdots$$

tal que $M \simeq \operatorname{Ker} d^0$, todos los P^i son proyectivos finitamente generados y al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$ se obtiene que

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(P^1,\Lambda) \xrightarrow{(d^0)^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P^0,\Lambda) \xrightarrow{(d^{-1})^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P^{-1},\Lambda) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta, donde $(d^i)^*(g) := g \circ d^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Observamos que, si $M \simeq \operatorname{Ker} d^0$ es Gorenstein proyectivo, entonces automáticamente $\operatorname{Ker} d^i$ es también Gorenstein proyectivo para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Denotamos por $\operatorname{Gproj}\Lambda$ a la subcategoría plena de $\operatorname{mod}\Lambda$ formada por los módulos Gorenstein proyectivos. Una propiedad muy importante de la clase $\operatorname{Gproj}\Lambda$ es la siguiente.

Proposición 1.2.6. *La clase* $\operatorname{Gproj}\Lambda$ *es cerrada por extensiones, sumas directas, núcleos de epimorfismos y sumandos directos.*

Demostración. En [33, Theorem 2.5] se demuestra esta proposición pero para la clase $\operatorname{GProj}\Lambda$ de todos los Λ-módulos Gorenstein proyectivos y se usan técnicas que no se pueden reutilizar directamente para el caso de módulos finitamente generados. Sin embargo, [60, Proposition 1.4] nos dice que $\operatorname{Gproj}\Lambda = \operatorname{GProj}\Lambda \cap \operatorname{mod}\Lambda$ y de esta manera se pueden combinar ambos resultados para demostrar esta proposición. □

La siguiente proposición será de utilidad más adelante.

Proposición 1.2.7. *Sea Λ un álgebra de Artin. Si $\Omega(X) \in \operatorname{Gproj}\Lambda$, existen $Y \in \operatorname{Gproj}\Lambda$ y $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ tales que $\Omega(X) \simeq \Omega(Y) \oplus P$.*

Demostración. Si $\Omega(X) \in \operatorname{Gproj}\Lambda$, entonces existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} P^2 \longrightarrow \cdots$$

tal que $\Omega(X) \simeq \operatorname{Ker} d^0$. Consideremos entonces la sucesión exacta corta $0 \to \Omega(X) \to P^0 \to \operatorname{Ker} d^1 \to 0$, donde por definición $Ker\, d^1 \in \operatorname{Gproj}\Lambda$. Denotemos por $Y := Ker\, d^1$, usando el Lema de Schanuel [40, Theorem 1 p. 167] y la minimalidad de la cubierta proyectiva tenemos que existe $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ tal que $\Omega(X) \simeq \Omega(Y) \oplus P$. □

La siguiente propiedad resulta interesante y veremos, en el Capítulo 3 Corolario 3.2.9, una generalización de la misma a través de las funciones de Igusa-Todorov. De manera alternativa, puede verse que este resultado se desprende de [33, Proposition 2.27].

Proposición 1.2.8. *Sea* $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ *con* $\operatorname{dp}(M) < \infty$ *tal que existe una s.e.c* $0 \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$ *con* $G_1, G_0 \in \operatorname{Gproj}\Lambda$. *Entonces* $\operatorname{dp}(M) \leq 1$.

Demostración. De la definición de Gorenstein proyectivo sabemos que existe una s.e.c $0 \to G_1 \to P \to \tilde{G} \to 0$ con $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ y $\tilde{G} \in \operatorname{Gproj}\Lambda$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & \tilde{G} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tilde{G} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde E es el pushout de $G_1 \to G_0$ y $G_1 \to P$. Como M y P tienen dimensión proyectiva finita, entonces E también tiene dimensión proyectiva finita. Además $E \in \operatorname{Gproj}\Lambda$, pues esta clase es cerrada por extensiones. Luego, del hecho de que $\operatorname{proj}\Lambda = \operatorname{Gproj}\Lambda \cap \mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda)$ [60, Facts 1.2 (vii)] se desprende que E es proyectivo y por tanto $\operatorname{dp}(M) \leq 1$. □

1.3. Álgebras de matrices triangulares

En esta sección vamos a recordar la definición y propiedades de las álgebras de matrices triangulares, las cuales constituyen una vía interesante y útil para construir nuevas álgebras a partir de otras y relacionar propiedades del álgebra obtenida con aquellas que la componen.
Sean T, U anillos y sea ${}_U M_T$ un U-T-bimódulo. Definimos el anillo Λ de matrices triangulares como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix},$$

donde la suma y el producto vienen dados por las operaciones usuales entre matrices. La siguiente proposición [10, Proposition 2.1, p. 72] nos da una condición necesaria y suficiente para que Λ sea un álgebra de Artin.

Proposición 1.3.1. *Λ es una R-álgebra de Artin si y solo si T, U son R-álgebras de Artin y además M es f.g. como R-módulo, con R actuando centralmente en M.*

Hay muchos ejemplos de álgebras triangulares que motivan el estudio de este tipo de construcción. Particularmente interesante para nosotros es el caso del producto tensorial. Dadas dos $\mathbb{K}$-álgebras T, U sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ el espacio vectorial $T \otimes_{\mathbb{K}} U$ puede dotarse de una estructura de anillo definiendo $(t \otimes u) \cdot (t' \otimes u') := (tt' \otimes uu')$ y extendiendo por linealidad. En ciertos casos el producto tensorial puede verse como un álgebra de matrices triangulares, por ejemplo $\begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ \mathbb{K} & \mathbb{K} \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}} T \simeq \begin{pmatrix} T & 0 \\ T & T \end{pmatrix}$ mediante el mapa $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \otimes t := \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ \beta t & \gamma t \end{pmatrix}$. Este ejemplo puede generalizarse de la siguiente manera.

Proposición 1.3.2. *Sea T una $\mathbb{K}$-álgebra y $S \subseteq M_n(\mathbb{K})$ una subálgebra del álgebra de matrices de la forma $S = (K_{ij})$, donde $K_{ij} = 0$ o $K_{ij} = \mathbb{K}$. Entonces el mapa*

$$(s_{ij}) \otimes t \mapsto (s_{ij} t)$$

es un isomorfismo de álgebras de $S \otimes_{\mathbb{K}} T$ en la subálgebra de $M_n(T)$ de la forma (T_{ij}), donde $T_{ij} = 0 \Leftrightarrow K_{ij} = 0$ y $T_{ij} = T \Leftrightarrow K_{ij} = \mathbb{K}$.

Demostración. Primero notemos que cada elemento en $S \otimes_{\mathbb{K}} T$ se escribe como suma finita de tensores elementales, por tanto el mapa $(s_{ij}) \otimes t \mapsto (s_{ij} t)$ se extiende por linealidad a un mapa $f : S \otimes_{\mathbb{K}} T \to M_n(T)$. Veamos que es un morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Es sencillo ver que es $\mathbb{K}$-lineal por lo que solo resta probar que preserva el producto:

$$f\left[(s_{ij})\otimes t\cdot(s'_{ij})\otimes t'\right]=f\left[(c_{ij})\otimes tt'\right]=(c_{ij}tt'),$$

donde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}s_{ik}s'_{kj}$. Por otro lado

$$f\left[(s_{ij})\otimes t\right]f\left[(s'_{ij}\otimes t')\right]=(s_{ij}t)\cdot(s'_{ij}t')=(d_{ij}),$$

donde $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}s_{ik}ts'_{kj}t'=\sum_{k=1}^{n}s_{ik}s'_{kj}tt'$. Por tanto para cada i,j se tiene $d_{ij}=c_{ij}tt'$.
También podemos definir un mapa $g:M_n(T)\to S\otimes_{\mathbb{K}}T$ dado por $g\left[(a_{ij})\right]=\sum_{i,j}E_{ij}\otimes a_{ij}$, donde las E_{ij} son las matrices de la base canónica de $M_n(\mathbb{K})$ como espacio vectorial. Más aún, este mapa cumple que $gf=1_{S\otimes_{\mathbb{K}}T}$, por tanto f es un monomorfismo y en consecuencia $S\otimes_{\mathbb{K}}T\simeq \operatorname{Im} f$, pero es sencillo ver que $\operatorname{Im} f$ coincide con la subálgebra de $M_n(T)$ de la forma (T_{ij}), donde $T_{ij}=0\Leftrightarrow K_{ij}=0$ y $T_{ij}=T\Leftrightarrow K_{ij}=\mathbb{K}$. □

A continuación recordamos algunas propiedades importantes de la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra triangular. Para ver los detalles de las pruebas remitimos al lector a [10, Chapter III, Section 2].
Sea $\Lambda=\begin{pmatrix}T&0\\M&U\end{pmatrix}$ una R-álgebra triangular, lo primero que haremos es presentar una forma útil y sencilla para expresar los módulos sobre Λ. Vamos a definir una categoría que denotamos $\mathcal{C}_\Lambda$ cuyos objetos están formados por tríos de la forma (A,B,f), donde $A\in\operatorname{mod}T$, $B\in\operatorname{mod}U$ y $f:M\otimes_T A\to B$ es un homomorfismo de U-módulos. Un morfismo entre dos objetos (A,B,f) y (A',B',f') es un par (α,β), donde $\alpha:A\to A'$ es un T-morfismo y $\beta:B\to B'$ es un U-morfismo, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_T A \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "f"] & M\otimes_T A' \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "\beta"] & B'
\end{tikzcd}$$

Si (α_1,β_1) y (α_2,β_2) son morfismos en $\mathcal{C}_\Lambda$, podemos definir su suma como sigue $(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2):=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$. De esta manera puede verse que $\mathcal{C}_\Lambda$ es una R-categoría.
Hay una relación muy estrecha entre $\mathcal{C}_\Lambda$ y $\operatorname{mod}\Lambda$, la cual viene dada a través de un funtor $F:\mathcal{C}_\Lambda\to\operatorname{mod}\Lambda$ definido de la siguiente manera. Para cada (A,B,f) definimos el grupo abeliano $A\oplus B$ cuya estructura de Λ-módulo viene dada por $\begin{pmatrix}t&0\\m&u\end{pmatrix}(a,b):=(ta,f(m\otimes_T a)+ub)$, donde

$t \in T, m \in M, u \in U, a \in A, b \in B$. Si (α, β) es un morfismo entre (A, B, f) y (A', B', f'), definimos $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : A \oplus B \to A' \oplus B'$, el cual puede verse que es un homomorfismo de Λ-módulos. De esta forma queda bien definido un funtor $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \operatorname{mod} \Lambda$ que establece una conexión muy importante entre estas categorías.

Proposición 1.3.3. *Sea* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *un álgebra de matrices triangulares. Entonces el funtor* $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \operatorname{mod} \Lambda$ *definido anteriormente es una equivalencia de categorías.*

La prueba de esta proposición puede verse en [10, Proposition 2.2, p. 74]. De ahora en adelante podemos identificar $\operatorname{mod} \Lambda$ con $\mathcal{C}_\Lambda$, lo cual resulta particularmente útil para estudiar propiedades homológicas.

La siguiente es una caracterización muy sencilla y útil de sucesión exacta en la categoría $\mathcal{C}_\Lambda$. Una sucesión $(A, B, f) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (A', B', f') \xrightarrow{(\alpha',\beta')} (A'', B'', f'')$ es exacta en $\mathcal{C}_\Lambda$ si y solo si las sucesiones $A \to A' \to A''$ y $B \to B' \to B''$ son exactas en $\operatorname{mod} T$ y $\operatorname{mod} U$ respectivamente.
En el caso particular en que M es plano como T-módulo, si tenemos una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow (A, B, f) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (A', B', f') \xrightarrow{(\alpha',\beta')} (A'', B'', f'') \longrightarrow 0$, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \otimes_T A \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "f"] & M \otimes_T A' \arrow[r, "1\otimes\alpha'"] \arrow[d, "f'"] & M \otimes_T A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & B'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Un objeto (A', B', f') se dice que es un subobjeto de (A, B, f) si $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ y $f' = f|_{M \otimes_T A'}$. Decimos que (A, B, f) es simple si no tiene subobjetos no triviales.

La siguiente proposición puede verse en [10, Proposition 2.3, p. 75].

Proposición 1.3.4. *Sea* Λ *un álgebra triangular de la forma* $\begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *y sea* $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \operatorname{mod} \Lambda$ *la equivalencia de categorías descrita anteriormente. Entonces*

(i) $X \in \mathcal{C}_\Lambda$ *es proyectivo si y solo si* $F(X)$ *es proyectivo en* $\operatorname{mod} \Lambda$.

(ii) $X \in \mathcal{C}_\Lambda$ *es inyectivo si y solo si* $F(X)$ *es inyectivo en* $\operatorname{mod} \Lambda$.

(iii) $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *es una s.e.c. en* $\mathcal{C}_\Lambda$ *si y solo si* $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *es una s.e.c. en* $\operatorname{mod}\Lambda$.

(iv) $X \in \mathcal{C}_\Lambda$ *es simple si y solo si* $F(X)$ *es simple en* $\operatorname{mod}\Lambda$.

La siguiente proposición [10, Proposition 2.5, p. 76] es de vital importancia pues nos da la estructura de los módulos simples, proyectivos e inyectivos indescomponibles sobre un álgebra triangular.

Proposición 1.3.5. *Sea* Λ *un álgebra triangular de la forma* $\begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$. *Entonces se cumple*

(i) $\operatorname{rad}\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{rad}T & 0 \\ M & \operatorname{rad}U \end{pmatrix}$.

(ii) Los módulos simples en $\operatorname{mod}\Lambda$ *se identifican o bien con tríos de la forma* $(S,0,0)$ *con* S *un* T*-módulo simple o de la forma* $(0,S',0)$*, donde* S' *es un* U*-módulo simple.*

(iii) Los módulos proyectivos indescomponibles en $\operatorname{mod}\Lambda$ *se identifican o bien con tríos de la forma* $(P, M\otimes_T P, 1_{M\otimes_T P})$ *con* $P \in \operatorname{mod}T$ *proyectivo indescomponible o de la forma* $(0,Q,0)$ *con* $Q \in \operatorname{mod}U$ *proyectivo indescomponible.*

(iv) Los módulos inyectivos indescomponibles en $\operatorname{mod}\Lambda$ *se identifican o bien con tríos de la forma* $(I,0,0)$ *con* $I \in \operatorname{mod}T$ *inyectivo indescomponible o de la forma* $(\operatorname{Hom}_U(M,J), J, \rho)$ *con* $J \in \operatorname{mod}U$ *inyectivo indescomponible y* $\rho : M \otimes \operatorname{Hom}_U(M,J) \to J$ *dada por* $\rho(m\otimes f) := f(m)$*, para* $m \in M$ *y* $f \in \operatorname{Hom}_U(M,J)$.

Un caso de interés especial es cuando tenemos un álgebra de matrices triangulares $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ en la que M es proyectivo como T-módulo a derecha y como U-módulo a izquierda. El siguiente lema [15, Lemma 4.2] nos brinda una fórmula para hallar la sizigia de un Λ-módulo f.g. cualquiera. Haciendo un abuso de notación escribimos $\Omega(A,B,f)$ cuando rigurosamente deberíamos escribir $\Omega F(A,B,f)$, donde $F : \mathcal{C}_\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$ es la equivalencia de categorías con la que venimos trabajando. Es preciso señalar para claridad del lector que en la fórmula que sigue se usa el mismo símbolo Ω para referirse a sizigias en tres categorías diferentes, a saber $\operatorname{mod}\Lambda$, $\operatorname{mod}T$ y $\operatorname{mod}U$.

Lema 1.3.6. *Sea* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *una* R*-álgebra de Artin en la que* M *es proyectivo como* T*-módulo a derecha y como* U*-módulo a izquierda. Entonces para cada* $(A, B, f) \in \mathcal{C}_\Lambda$ *y para cada* $n \geq 1$ *se tiene*

$$\Omega^n(A, B, f) = (\Omega^n A, M \otimes P^A_{n-1}, 1 \otimes i_n) \oplus (0, \Omega^n B, 0),$$

donde P^A_{n-1} *es la cubierta proyectiva de* $\Omega^{n-1}A$ *y el mapa* $i_n : \Omega^n A \to P^A_{n-1}$ *es la inclusión.*

Observación 1.3.7. *Una consecuencia del lema anterior es que si* (A, P, f) *es tal que* $P \in \operatorname{proj} U$*, entonces* $\Omega^n(A, P, f) = \Omega^n(A, 0, 0), \forall n \geq 1$*. Esto nos permite, si el interés está en la sizigia, trabajar con una terna más sencilla.*

1.4. Álgebras de caminos

En esta sección vamos recordar algunas propiedades de las álgebras de caminos o álgebras de carcaj. Las nociones de carcaj y representaciones tienen su origen en [24] y marcaron el inicio de la teoría moderna de representaciones de álgebras asociativas. Un teorema que debemos a P. Gabriel y que estableció la importancia de este tipo de álgebras es el siguiente:

Teorema 1.4.1. *Toda álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es Morita equivalente al cociente de un álgebra de caminos por cierto ideal admisible.*

Los detalles de la prueba pueden verse en [3, II.3]. A continuación vamos a recordar algunas definiciones y resultados básicos.

Definición 1.4.2. *Un* ***carcaj*** *es una cuaterna* (Q_0, Q_1, s, t)*, donde* Q_0, Q_1 *son conjuntos y* $s, t : Q_1 \to Q_0$ *son funciones.*

Una manera útil y natural de representar estos datos es mediante un grafo orientado, en el que Q_0 es el conjunto de vértices, Q_1 es el conjunto de flechas y s, t nos dicen cuál es el comienzo y final de cada flecha. En lo que sigue usaremos el término carcaj en vez de grafo, puesto que es la terminología propia del área y además evita confusiones con los disímiles tipos de grafos que existen y su significado en otros contextos.

Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ se dice **finito** si los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos. El **grafo subyacente** $\overline{Q}$ asociado a Q se obtiene olvidando la orientación de las flechas. Un carcaj Q se dice **conexo** si el grafo $\overline{Q}$ es conexo.

Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Un **camino dirigido** de longitud $l \geq 1$ que comienza en a y termina en b es una secuencia de la forma

$$(a|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l|b),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq l$ y se cumple $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1}), 1 \leq k < l$ y $t(\alpha_l) = b$. Una tal secuencia se visualiza de la siguiente manera:

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Además se asocia a cada vértice $a \in Q_0$ un **camino estacionario o trivial** de longitud $l = 0$ que denotamos

$$\epsilon_a = (a||a).$$

De esta forma los caminos de longitud $l = 0$ y $l = 1$ están en biyección con los elementos de Q_0 y Q_1 respectivamente. Un camino de longitud $l \geq 1$ se llama **ciclo** si comienza y termina en el mismo vértice. Un ciclo de longitud $l = 1$ se denomina **lazo**. Un carcaj se llama **acíclico** si no posee ciclos.

A continuación veremos que hay una manera natural de definir una $\mathbb{K}$-álgebra a partir de un carcaj y un cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1.4.3. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Q un carcaj. El **álgebra de caminos** $\mathbb{K}Q$ de Q es la $\mathbb{K}$-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de los caminos dirigidos $(a|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l|b)$ de longitud $l \geq 0$ y el producto de dos elementos de la base viene dado por*

$$(a|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l|b) \cdot (c|\beta_1\beta_2 \cdots \beta_m|d) := \delta_{bc}(a|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\beta_1\beta_2 \cdots \beta_m|d),$$

donde δ_{bc} es el delta de Kronecker. En otras palabras el producto está dado por la concatenación de caminos. Este producto se puede extender por linealidad a todo el espacio $\mathbb{K}Q$ dándole estructura de $\mathbb{K}$-álgebra.

El siguiente lema [3, Lemma 1.4, p. 45] nos da más detalles de la estructura de un álgebra de caminos.

Lema 1.4.4. *Sea Q un carcaj y $\mathbb{K}Q$ el álgebra de caminos asociada.*

(i) $\mathbb{K}Q$ tiene una identidad si y solo si Q_0 es finito.

(ii) $\mathbb{K}Q$ es de dimensión finita si y solo si Q es finito y acíclico.

El siguiente corolario [3, Corollary 1.5, p. 46] nos brinda más detalles sobre las álgebras de caminos con identidad.

Corolario 1.4.5. *Sea Q un carcaj finito. El elemento $1_{\mathbb{K}Q} := \sum_{a\in Q_0} \epsilon_a$ es la identidad de $\mathbb{K}Q$ y el conjunto $\{\epsilon_a : a \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos.*

A continuación veremos un teorema [3, Theorem 1.8, p. 48] que nos será de utilidad a la hora de construir homomorfismos cuyo dominio es un álgebra de caminos.

Teorema 1.4.6. *Sea Q un carcaj finito y conexo y Λ una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con unidad. Para cualquier par de mapas $\varphi_0 : Q_0 \to \Lambda$ y $\varphi_1 : Q_1 \to \Lambda$ que satisfacen:*

(i) $1_\Lambda = \sum_{a\in Q_0} \varphi_0(a)$, $\varphi_0(a)^2 = \varphi_0(a)$, $\varphi_0(a) \cdot \varphi_0(b) = 0$ *para todo* $a \neq b$,

(ii) si $\alpha : a \to b$, *entonces* $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(a) \cdot \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_0(b)$,

existe un único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi : \mathbb{K}Q \to \Lambda$ tal que $\varphi(\epsilon_a) = \varphi_0(a)$, $\forall a \in Q_0$ y $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha), \forall \alpha \in Q_1$.

La siguiente proposición nos será de utilidad en el Capítulo 4.

Proposición 1.4.7. *Sea Q un carcaj finito, conexo y tal que $\overline{Q}$ es un árbol. Entonces $\mathbb{K}Q \simeq S \subseteq \mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$, donde S es la subálgebra de $\mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$ de la forma (K_{ab}), donde $K_{ab} = \mathbb{K}$ si hay un camino dirigido de a a b y $K_{ab} = 0$ en otro caso.*

Demostración. Como el carcaj es finito podemos denotar $Q_0 = \{1, \cdots, |Q_0|\}$.
Definimos las funciones $\varphi_0 : Q_0 \to \mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$ y $\varphi_1 : Q_1 \to \mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$ dadas por $\varphi_0(a) = E_{a,a}$ y $\varphi_1(\alpha) = E_{s(\alpha),t(\alpha)}$, donde $E_{i,j}$ es la matriz cuyos coeficientes son nulos excepto el de la posición (i, j) que vale 1. Veamos que estas funciones satisfacen las condiciones del Teorema 1.4.6.
Por un lado tenemos que $\sum_{a\in Q_0} \varphi_0(a) = \sum_{a\in Q_0} E_{a,a} = I_{|Q_0|}$, que es la identidad del álgebra de matrices. Además efectuando el producto de matrices vemos que $E_{a,a} \cdot E_{a,a} = E_{a,a}$ y que si $a \neq b$, $E_{a,a} \cdot E_{b,b} = 0$.
Por otro lado, para cada flecha $\alpha : a \to b$ se tiene que

$$\varphi_1(\alpha) = E_{a,b} = E_{a,a} \cdot E_{a,b} \cdot E_{b,b} = \varphi_0(a) \cdot \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_0(b).$$

Del Teorema 1.4.6 tenemos que existe un único morfismo $\varphi : \mathbb{K}Q \to \mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$ tal que $\varphi(\epsilon_a) = \varphi_0(a)$, $\forall a \in Q_0$ y $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha), \forall \alpha \in Q_1$. Afirmamos que este homomorfismo es inyectivo. Sea $c = \sum \lambda_w w \in \mathbb{K}Q$, donde los w son caminos dirigidos, tal que $\varphi(c) = 0$. Entonces

$$0 = \varphi(c) = \varphi(\sum \lambda_w w) = \sum \lambda_w E_{s(w),t(w)} = (\lambda_{i,j}),$$

donde $\lambda_{i,j} = \lambda_w$ si $i = s(w)$ y $j = t(w)$ y es cero en otro caso, pues hay un único camino dirigido que empieza en $s(w)$ y termina en $t(w)$ (pues $\overline{Q}$ es un árbol). Esto implica que $\lambda_w = 0$, para todo w en la descomposición de c y por tanto $c = 0$. De esta forma tenemos que $\mathbb{K}Q \simeq \operatorname{Im}\varphi$ y es sencillo ver que dicha imagen coincide con la subálgebra de $\mathcal{M}_{|Q_0|}(\mathbb{K})$ de la forma (K_{ab}), donde $K_{ab} = \mathbb{K}$ si hay un camino dirigido de a a b y $K_{ab} = 0$ en otro caso. $\square$

1.4.1. Ideales admisibles y cocientes de álgebras de caminos

Sea Q un carcaj finito y conexo, denotamos por F_Q o simplemente F al ideal generado por las flechas de Q. Como espacio vectorial tenemos la siguiente descomposición

$$F_Q = \mathbb{K}Q_1 \oplus \mathbb{K}Q_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}Q_l \oplus \cdots$$

en la que $\mathbb{K}Q_l$ es el subespacio vectorial generado por los caminos de longitud l. En particular F_Q como $\mathbb{K}$-espacio vectorial está generado por los caminos de longitud $l \geq 1$. Esto implica que para todo $l \geq 1$ se cumple

$$F_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} \mathbb{K}Q_m$$

y por tanto F_Q^l como espacio vectorial está generado por los caminos de longitud mayor o igual que l.

Definición 1.4.8. *Sean Q un carcaj finito y F_Q el ideal de $\mathbb{K}Q$ generado por las flechas. Un ideal bilátero I de $\mathbb{K}Q$ se dice **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que*

$$F_Q^m \subseteq I \subseteq F_Q^2.$$

*Si I es un ideal admisible, al par (Q, I) se le llama carcaj acotado. El álgebra cociente $\frac{\mathbb{K}Q}{I}$ se llama **álgebra del carcaj acotado**.*

Definición 1.4.9. *Sea Q un carcaj. Una **relación** en Q con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una combinación $\mathbb{K}$-lineal de caminos de longitud $l \geq 2$ que tienen todos el mismo vértice inicial y el mismo final.*

Una relación por tanto no es otra cosa que un elemento $\rho \in \mathbb{K}Q$ de la forma $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ donde, para todos i, j, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y w_i y w_j son caminos de longitud $l \geq 2$ que empiezan ambos en el mismo vértice a y terminan en el mismo vértice b. Si $m = 1$ la relación se llama **monomial** y si es de la forma $w_1 - w_2$ recibe el nombre de **relación de conmutatividad**.

Los siguientes resultados nos dan propiedades interesantes que relacionan las álgebras de carcaj y los ideales admisibles.

Proposición 1.4.10. *[3, Proposition 2.6, p. 56] Sea Q un carcaj finito e I un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$. Entonces el álgebra del carcaj acotado $\frac{\mathbb{K}Q}{I}$ es de dimensión finita.*

Corolario 1.4.11. *[3, Corollary 2.9, p. 57] Sea Q un carcaj finito e I un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$. Existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \ldots \rho_m\}$ tal que $I = \langle \rho_1, \ldots \rho_m \rangle$.*

1.4.2. Representaciones y módulos

Usando un carcaj acotado (Q, I) asociado a una $\mathbb{K}$-álgebra Λ, podemos establecer una correspondencia entre los Λ-módulos y las llamadas representaciones $\mathbb{K}$-lineales que definimos a continuación de este párrafo. Esta manera de representar los módulos es sumamente útil y ha probado ser una herramienta muy poderosa en el estudio moderno de la teoría de representaciones.

Definición 1.4.12. *Sea Q un carcaj finito. Una **representación $\mathbb{K}$-lineal** o simplemente representación M de Q viene dada por los siguientes datos:*

(1) A cada vértice $a \in Q_0$ se le asocia un $\mathbb{K}$-espacio vectorial M_a.

(2) A cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 se le asocia una transformación lineal $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Una tal representación se denota por $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Se dice que M es una **representación de dimensión finita** si M_a es de dimensión finita, para todo $a \in Q_0$.
Dadas dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$, un morfismo de representaciones $f : M \to M'$ es una familia $(f_a)_{a \in Q_0}$ de mapas $\mathbb{K}$-lineales $f_a : M_a \to M'_a$ tales que para toda flecha $\alpha : a \to b$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Dados dos morfismos $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ definimos la composición gf como $(gf)_a := g_a f_a$, para cada $a \in Q_0$.

De esta manera queda definida una categoría $Rep(Q)$, compuesta por las representaciones $\mathbb{K}$-lineales. Denotamos por $rep(Q)$ a la subcategoría plena formada por las representaciones de dimensión finita.

Definición 1.4.13. *Sea Q un carcaj finito y $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación. Para cualquier camino no trivial $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$ de a hasta b, definimos la* ***evaluación*** *de M en w como el mapa lineal $\varphi_w : M_a \to M_b$ definido por la composición*

$$\varphi_w := \varphi_{\alpha_n} \cdots \varphi_{\alpha_1}.$$

Esta definición se puede extender al caso en que tenemos una relación, o sea una combinación lineal de caminos que empiezan y terminan en los mismos vértices. Sea

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

una relación, entonces

$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}.$$

De esta forma podemos definir las representaciones de un carcaj acotado.

Definición 1.4.14. *Sea (Q, I) un carcaj acotado. Una representación M se dice que* ***satisface las relaciones de*** *I o que está* ***acotada*** *por I si*

$$\varphi_\rho = 0 \quad \textit{para toda relación } \rho \in I.$$

Notemos que si $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$, entonces M satisface las relaciones de I si y solo si $\varphi_{\rho_i} = 0, \forall i = 1, \dots, m$.
Denotamos por $Rep(Q, I)$ a la subcategoría plena de $Rep(Q)$ formada por las representaciones acotadas por I. A su vez denotamos por $rep(Q, I)$ a la subcategoría plena de $rep(Q)$ formada por aquellas representaciones de dimensión finita acotadas por I.

El siguiente teorema [3, Theorem 1.6, p. 72] establece la relación entre la categoría de representaciones de un carcaj acotado y la categoría de módulos sobre el álgebra del carcaj acotado.

Teorema 1.4.15. *Sea $\Lambda = \frac{\mathbb{K}Q}{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo e I es un ideal admisible. Entonces existe una equivalencia de categorías*

$$F : \operatorname{Mod} \Lambda \to Rep(Q, I)$$

que se restringe a una equivalencia $F : \operatorname{mod} \Lambda \to rep(Q, I)$.

Para finalizar esta sección y con ella el capítulo vamos a recordar cómo pueden describirse los módulos simples y los proyectivos e inyectivos indescomponibles en términos de representaciones de un carcaj acotado. En lo que sigue (Q, I) denota un carcaj acotado finito y conexo con $|Q_0| = n$ vértices.

Sea $a \in Q_0$, denotamos por $S(a)$ la representación $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ definida como sigue:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ \mathbb{K} & \text{si } a = b \end{cases}$$
$$\varphi_\alpha = 0, \forall \alpha \in Q_1.$$

Es sencillo ver que $S(a)$ es una representación acotada de (Q, I) (independientemente de I). Tenemos entonces el siguiente lema [3, Lemma 2.1, p. 76].

Lema 1.4.16. *Sea $\Lambda = \frac{\mathbb{K}Q}{I}$ el álgebra del carcaj acotado (Q, I).*

(i) Para cada $a \in Q_0$, $S(a)$ visto como Λ-módulo es isomorfo al top del proyectivo indescomponible Λe_a, donde $e_a := \epsilon_a + I$.

(ii) $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de Λ-módulos simples.

En el próximo lema [3, Lemma 2.4, p. 79] se muestra cómo se pueden visualizar los Λ-módulos proyectivos indescomponibles a través de representaciones del carcaj acotado.

Lema 1.4.17. *Sea (Q, I) un carcaj acotado, $\Lambda = \frac{\mathbb{K}Q}{I}$ y $P(a) = \Lambda e_a$, $a \in Q_0$.*

(i) Si $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$, entonces $P(a)_b$ es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial que tiene como base $\{w + I \mid w : a \to b\}$. Además para cada $\beta : b \to c$ el mapa $\mathbb{K}$-lineal $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ viene dado por la multiplicación a derecha por $\beta + I$.

(ii) Si $\operatorname{rad} P(a) = (P'(a)_b, \varphi'_\beta)$, entonces $P'(a)_b = P(a)_b$ si $a \neq b$ y $P'(a)_a$ es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial con base $\{w + I \mid w : a \to a,\ w \neq \epsilon_a\}$. Además $\varphi'_\beta = \varphi_\beta$ para toda flecha β que comience en $b \neq a$ y $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha|_{P'(a)_a}$ para toda flecha α que comience en a.

Para ver el resultado para los inyectivos indescomponibles que es dual al lema anterior, remitimos al lector a [3, Lemma 2.6, p. 81].

Capítulo 2

Funciones y álgebras de Igusa-Todorov

Resumen: En este capítulo estudiaremos la definición de las funciones de Igusa-Todorov y sus propiedades fundamentales. Explicaremos la utilidad de estas funciones, dando ejemplos variados de sus aplicaciones, en particular exploramos el concepto de álgebra de Igusa-Todorov.

2.1. Las funciones Φ y Ψ

Las funciones de Igusa-Todorov (funciones IT), denotadas por Φ y Ψ, surgieron en el año 2005 en el artículo [37] (aunque existía una prepublicación desde mucho antes) y han sido ampliamente estudiadas, en principio por su aplicación directa al problema de la conjetura finitista. Sin embargo, estas funciones constituyen una medida homológica interesante de por sí y tienen un alcance que va más allá de la conjetura finitista. Por ejemplo se han caracterizado ciertos tipos de álgebras a través de las funciones IT y se han generalizado de disímiles maneras y en contextos variados, donde se han podido aplicar, generando nuevo conocimiento (ver por ejemplo [34] y [45]). También dieron paso a nuevas clases de álgebras como las álgebras de Igusa-Todorov que introduciremos más adelante y las álgebras Lat-Igusa-Todorov que definiremos en el capítulo siguiente y que constituyen una generalización de las primeras. A lo largo del capítulo vamos a ir desarrollando estos aspectos y veremos cómo las funciones IT se han hecho de un lugar propio dentro de la teoría de representaciones de álgebras y su desarrollo, que ha crecido mucho en los últimos años, continúa en la actualidad.

Comenzamos con un resultado importante que permite definir las funciones IT y cuya prueba puede verse en [1, 11.6 y 11.7, p. 138].

Lema 2.1.1. *(Lema de Fitting) Sea R un anillo noetheriano. Consideremos un R-módulo a izquierda M y $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Entonces, para todo R-submódulo f.g. X de M, existe un entero no negativo*

$$\eta_f(X) := \min\{k \in \mathbb{N} \,:\, f|_{f^m(X)} : f^m(X) \xrightarrow{\sim} f^{m+1}(X),\ \forall m \geq k\}.$$

Más aún, para cada R-submódulo Y de X, se tiene que $\eta_f(Y) \leq \eta_f(X)$.

Ambas funciones Φ y Ψ son mapas de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, que generalizan la dimensión proyectiva, con la ventaja de que el valor de las funciones IT en cada módulo es finito. A pesar de que dichas funciones originalmente se definieron en la categoría de módulos f.g. sobre un álgebra de Artin, es posible dar una definición más general usando los llamados contextos IT (ver [45]). Sin embargo, en adelante trabajaremos solamente en categorías de módulos.

Denotemos $\mathcal{C} = \mathrm{mod}\,\Lambda$. Recordamos del Capítulo 1 que el operador $\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una función entre objetos que preserva la estructura aditiva, o sea $\Omega(X \oplus Y) \simeq \Omega(X) \oplus \Omega(Y)$. De esta manera $\overline{\Omega} : Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}) \to Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})$ es un homomorfismo entre grupos abelianos libres. Sea $X \in \mathcal{C}$, denotamos por $\langle X \rangle$ al grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de los objetos indescomponibles que aparecen en la descomposición de X según el Teorema de Krull-Schmidt. Notemos que $\langle X \rangle$ es un subgrupo de $Rep_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})$ finitamente generado. Aplicando el Lema de Fitting obtenemos que existe un entero $\eta_{\overline{\Omega}}(X)$ que es mínimo con la propiedad de que el mapa

$$\overline{\Omega} : \overline{\Omega}^m(\langle X \rangle) \to \overline{\Omega}^{m+1}(\langle X \rangle)$$

es un isomorfismo para todo $m \geq \eta_{\overline{\Omega}}(X)$.

Definición 2.1.2. *Sea Λ una R-álgebra de Artin. Definimos una función $\Phi : \mathrm{Ob}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dada por*

$$\Phi(X) := \eta_{\overline{\Omega}}(X).$$

Para definir la función Ψ usamos la definición anterior y la fórmula 1.2.

Definición 2.1.3. *Sea Λ una R-álgebra de Artin. Definimos una función $\Psi : \mathrm{Ob}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dada por*

$$\Psi(X) := \Phi(X) + \mathrm{fin.dim}\left(\mathrm{add}\,\Omega^{\Phi(X)}(X)\right).$$

Observación 2.1.4. *Dado $X \in \operatorname{mod} \Lambda$ se cumple que ambos valores $\Phi(X)$ y $\Psi(X)$ son finitos. En el caso de $\Phi(X)$ es claro por el Lema de Fitting. Para ver que $\Psi(X)$ es finito basta observar que* $\operatorname{fin.dim}\left(\operatorname{add}\Omega^{\Phi(X)}(X)\right)$ *es finito, lo cual es cierto porque $\Omega^{\Phi(X)}(X)$ tiene un número finito de sumandos directos indescomponibles con dimensión proyectiva finita.*

Como para cualquier dimensión homológica se puede definir la Φ-dimensión de una clase $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ cualquiera de la siguiente forma

$$\Phi \dim(\mathcal{D}) := \sup\{\Phi(X) : \ X \in \mathcal{D}\}.$$

La Ψ-dimensión se define de manera análoga.

A continuación resumimos las propiedades más básicas de las funciones IT, que son de uso constante en lo que sigue. Ambas proposiciones (2.1.5 y 2.1.6) se generalizan en el Capítulo 3 para el caso de las funciones IT generalizadas, por lo que para ver las pruebas remitimos al lector a las proposiciones 3.2.1 y 3.2.2.

Proposición 2.1.5. *[37] Sea Λ un álgebra de Artin. Para $X, Y, M \in \operatorname{mod} \Lambda$ se cumplen:*

(a) *Si $M \in \operatorname{proj}\Lambda$, entonces $\Phi(X \oplus M) = \Phi(X)$. En particular, tomando $X = 0$ tenemos que $\Phi(M) = 0$.*

(b) $\Phi(X) \leq \Phi(X \oplus Y)$.

(c) $\Phi\dim(\operatorname{add} X) = \Phi(X)$.

(d) *Si $\operatorname{dp}(X) < \infty$, entonces $\Psi(X) = \Phi(X) = \operatorname{dp}(X)$.*

(e) *Sea $Z|\Omega^t(X)$ tal que $0 \leq t \leq \Phi(X)$ y $\operatorname{dp}(Z) < \infty$. Entonces* $\operatorname{dp}(Z) + t \leq \Psi(X)$.

(f) $\Psi(X) \leq \Psi(X \oplus Y)$.

(g) $\Psi\dim(\operatorname{add} X) = \Psi(X)$.

La siguiente proposición (ver [35]) incluye dos desigualdades que podemos considerar entre las propiedades fundamentales de las funciones IT.

Proposición 2.1.6. *Sea Λ un álgebra de Artin. Entonces, para todo $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, se cumple:*

(a) $\Phi(X) \leq \Phi\left(\Omega(X)\right) + 1$;

(b) $\Psi(X) \leq \Psi(\Omega(X)) + 1$.

El siguiente teorema [37, Theorem 4] constituye el resultado central de dicho artículo. Más adelante (Teorema 3.2.4) logramos obtener una generalización de este resultado para las funciones IT generalizadas.

Teorema 2.1.7. *Supongamos que* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *es una una s.e.c. de* Λ*-módulos f.g. tal que* C *tiene dimensión proyectiva finita. Entonces*

$$\mathrm{dp}(C) \leq \Psi(A \oplus B) + 1.$$

Este teorema tiene consecuencias muy interesantes. Por un lado, supongamos que M tiene longitud de Loewy menor o igual a 2 y sea $f : P_M \to M$ la cubierta proyectiva. Como $f(\mathrm{rad}^2 P_M) = \mathrm{rad}^2 M = 0$, tenemos que existe una s.e.c. $0 \to A \to \frac{P_M}{\mathrm{rad}^2 P_M} \to M \to 0$, donde A es semisimple. Si además M tiene dimensión proyectiva finita, podemos aplicar el Teorema 2.1.7 y la parte (c) de la Proposición 2.1.5 para obtener

$$\mathrm{dp}(M) \leq \Psi(A \oplus \frac{P_M}{\mathrm{rad}^2 P_M}) + 1 \leq \Psi(\frac{\Lambda}{\mathrm{rad}\,\Lambda} \oplus \frac{\Lambda}{\mathrm{rad}^2 \Lambda}) + 1. \tag{2.1}$$

Por otro lado, para un álgebra Λ tal que $\mathrm{rad}^3\Lambda = 0$, la sizigia de cualquier módulo tiene longitud de Loewy menor o igual a 2. Uniendo este hecho con la desigualdad 2.1 obtenemos el siguiente corolario [37, Corollary 7].

Corolario 2.1.8. *Sea* Λ *un álgebra tal que* $\mathrm{rad}^3\Lambda = 0$*, entonces*

$$\mathrm{fin.dim}(\Lambda) \leq \Psi(\frac{\Lambda}{\mathrm{rad}\,\Lambda} \oplus \frac{\Lambda}{\mathrm{rad}^2 \Lambda}) + 2.$$

Otro corolario de mucho interés es el que relaciona la rep.dim con la fin.dim [37, Corollary 9]

Corolario 2.1.9. *Si* $\mathrm{rep.dim}(\Lambda) \leq 3$*, entonces* $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

2.2. Las funciones IT y la conjetura finitista

En esta sección discutimos algunos de los avances más relevantes en el estudio de las funciones IT en su interacción con la conjetura finitista.

Uno de los primeros resultados que se desprenden del artículo original de Igusa y Todorov es el siguiente debido a Y. Wang.

Teorema 2.2.1. *[53, Theorem 3] Sea Λ un anillo artiniano a izquierda tal que* $\operatorname{rad}^{2l+1}\Lambda = 0$ *y* $\frac{\Lambda}{\operatorname{rad}^l \Lambda}$ *es de tipo de representación finito. Entonces* $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

La demostración de este resultado usa el Teorema 2.1.7 y las rotaciones de sucesiones exactas cortas descritas en la Proposición 1.2.3. El teorema anterior también puede obtenerse como un caso particular de resultados más generales, por ejemplo ver [29, Theorem 1.2, Corollary 4.3]; así como el Corolario 2.2.5.

Uno de los trabajos que marcó un hito en cuanto al estudio de la conjetura finitista usando las funciones IT fue el artículo [54], en el cual J. Wei define las álgebras de Igusa-Todorov (álgebras IT) y prueba que satisfacen la conjetura finitista. A su vez exhibe un amplio número de clases de álgebras que resultan ser IT y generaliza varios resultados conocidos. También deja abiertas varias preguntas, entre ellas si todas las álgebras de Artin son IT. A continuación hacemos un resumen de los principales resultados y técnicas usadas en dicho artículo y recordamos los primeros ejemplos que surgieron de álgebras de Artin que no son IT.

Definición 2.2.2. *Sea Λ un álgebra de Artin. Decimos que Λ es n-Igusa-Todorov para un entero no negativo n, si existe $V \in \operatorname{mod}\Lambda$ tal que para todo $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ existe una s.e.c. de la forma*

$$0 \to V_1 \to V_0 \to \Omega^n(M) \to 0,$$

donde $V_0, V_1 \in \operatorname{add} V$. Si necesitamos explicitar cuál es el entero n y el módulo V, decimos que Λ es (n, V)-IT.

El primer resultado que queremos mostrar es el siguiente.

Proposición 2.2.3. *Toda álgebra Λ con* $\operatorname{rep.dim}(\Lambda) \leq 3$ *es* 0*-IT.*

La prueba sale del hecho de la existencia del llamado generador de Auslander, el cual cumple la función del módulo V en la definición de álgebra IT. El concepto de rep.dim, introducido por M. Auslander en [6], ha sido ampliamente estudiado y hay un sinnúmero de álgebras que tienen rep.dim ≤ 3 (ver [56], [23], [19], [2]), las cuales quedarían englobadas en la clase de álgebras IT.

El siguiente teorema [54, Theorem 3.4] nos da condiciones sobre ideales y cocientes para que un álgebra sea 1-IT.

Teorema 2.2.4. *Sea Λ un álgebra de Artin e I un ideal tal que $I \cdot \operatorname{rad}\Lambda = 0$. Si Λ/I es* 0*-IT, entonces Λ es* 1*-IT.*

Este teorema tiene una consecuencia notable que enunciamos a continuación y de la cual se desprende como caso particular el Teorema 2.2.1.

Corolario 2.2.5. *[54, Corollary 3.5] Sea Λ un álgebra de Artin. Si* $\operatorname{rad}^{2l+1}\Lambda = 0$ *y* $\frac{\Lambda}{\operatorname{rad}^l \Lambda}$ *es de tipo de representación finito. Entonces Λ es 1-IT.*

Vale la pena también mencionar otro resultado que permite obtener álgebras 2-IT a partir de otras que también sean 2-IT.

Teorema 2.2.6. *[54, Theorem 3.10] Sea Λ un álgebra de Artin, $P \in \operatorname{proj}\Lambda$ y $E := End_\Lambda(P)$. Si Λ es 2-IT, entonces E también es 2-IT.*

En particular todos los resultados obtenidos en [59] resultan ser casos particulares de este teorema.

No podemos finalizar este resumen del artículo de J. Wei sin mencionar que el autor deja abierta la pregunta de si toda álgebra de Artin es de tipo n-IT para algún n, lo cual de ser cierto resolvería la conjetura finitista. Resulta que en 2006 R. Rouquier en [48] estudió la dimensión de representación de las álgebras exteriores, en particular concluyó que si $\Lambda(V)$ es el álgebra exterior de un espacio vectorial V de dimensión $n \geq 3$, entonces $\text{rep.dim}(\Lambda(V)) = n + 1$, dando así los primeros ejemplos de álgebras con rep.dim tan grande como se quiera, aunque siempre finita como había demostrado O. Iyama en [38] y más recientemente T. Conde en [21], donde elabora una demostración alternativa usando la medida de Gabriel-Roiter.

Volviendo al artículo de Rouquier ([48]), damos a continuación una familia de álgebras que constituyen ejemplos de álgebras de Artin (de hecho son álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo) que no son de tipo Igusa-Todorov.

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 3$ sobre un cuerpo no numerable $\mathbb{K}$ (podemos pensar que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Denotamos por $\Lambda(V)$ al álgebra exterior de V. El siguiente corolario puede verse en [48, Corollary 4.4].

Corolario 2.2.7. *Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda(V)$. Entonces existe $X \in \operatorname{mod}\Lambda(V)$ tal que no existe una s.e.c. de la forma $0 \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$, con $M_1, M_0 \in \operatorname{add} M$.*

Una primera observación que se desprende directamente del corolario es que $\text{rep.dim}(\Lambda(V)) \geq 4$. El lector interesado puede remitirse a [48] donde Rouquier termina probando que $\text{rep.dim}(\Lambda(V)) = n + 1$.

En el momento en que el artículo de Rouquier vio la luz aún no existía la noción de álgebra de Igusa-Todorov y no fue hasta el año 2015 que T. Conde en su tesis de doctorado ([20]), observó que del Corolario 2.2.7 y del hecho de que las álgebras exteriores son autoinyectivas, se desprende que $\Lambda(V)$ no es n-IT para ningún n, dando una respuesta negativa a la pregunta de si toda álgebra de Artin es de tipo Igusa-Todorov.

2.3. Φ-dimensión y Ψ-dimensión

Las funciones de Igusa-Todorov pueden pensarse como una generalización de la dimensión proyectiva, pero a diferencia de esta última el valor de Φ o Ψ en cualquier módulo es siempre una cantidad finita. Además se tiene la siguiente cadena de desigualdades para un álgebra de Artin Λ:

$$\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \Phi\dim(\Lambda) \leq \Psi\dim(\Lambda) \leq \text{gl.dim}(\Lambda).$$

Observemos que $\Phi\dim(\Lambda) < \infty \Leftrightarrow \Psi\dim(\Lambda) < \infty$. Es clara la implicación $\Psi\dim(\Lambda) < \infty \Rightarrow \Phi\dim(\Lambda) < \infty$ porque para cada $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ se tiene que $\Phi(X) \leq \Psi(X)$.
Veamos la otra implicación. Supongamos que $\Phi\dim(\Lambda) < \infty$. Sea $X \in \operatorname{mod}\Lambda$, tenemos por definición que

$$\Psi(X) = \Phi(X) + \text{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi(X)}X).$$

Por un lado $\Phi(X) \leq \Phi\dim(\Lambda)$ y por el otro existe $Z|\Omega^{\Phi(X)}X$ tal que se cumple $\text{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi(X)}X) = \text{dp}(Z) = \Phi(Z)$. Luego, para cada X se tiene

$$\Psi(X) = \Phi(X) + \Phi(Z) \leq 2\Phi\dim(\Lambda)$$

y por tanto

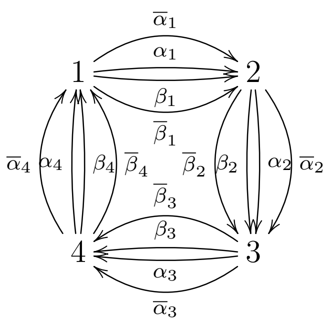
$$\Psi\dim(\Lambda) \leq 2\Phi\dim(\Lambda) < \infty.$$

Esto motiva de inmediato la pregunta de si siempre la Φ-dimensión (o equivalentemente la Ψ-dimensión) es finita, puesto que si fuera el caso ese número sería una cota para la fin.dim. Por otro lado, el interés en la Φ-dimensión también viene motivado por un resultado muy sorprendente demostrado por M. Lanzilotta y F. Huard en [34], el cual permite caracterizar las álgebras autoinyectivas mediante la Φ-dimensión. Concretamente, un anillo artiniano a izquierda R es autoinyectivo si y solo si $\Phi\dim(R) = 0$. En particular el resultado vale para álgebras de Artin.

A lo largo de los últimos años se desarrollaron técnicas y se obtuvieron cotas para la Φ-dimensión en ciertas familias de álgebras, por ejemplo para las álgebras con radical cuadrado cero ([44]), más generalmente para las álgebras truncadas ([12]), así como para las álgebras de Nakayama cíclicas ([51]), por solo citar algunas. Sin embargo a fines de 2019, de manera independiente, salieron a la luz en [11] y [30] los primeros ejemplos de $\mathbb{K}$-álgebras cuya Φ-dimensión es infinita. Por el interés que representan incluimos ambos ejemplos en esta tesis. A continuación presentamos el ejemplo dado en [11], mientras que el dado en [30] lo incluimos en el Capítulo 4 sección 4.3.1.

En lo que sigue desarrollaremos el ejemplo dado por G. Mata y M. Barrios en [11]. Como puede verse es un ejemplo complejo y en el artículo donde fue publicado se hacen varias afirmaciones cuya prueba se deja al lector. La idea de retomar el ejemplo no es solo para ilustrarlo, sino que vamos a incluir las justificaciones y los cálculos que se omiten en el artículo.

Ejemplo 2.3.1. *[11, Example 54] Consideremos el siguiente carcaj Q :*



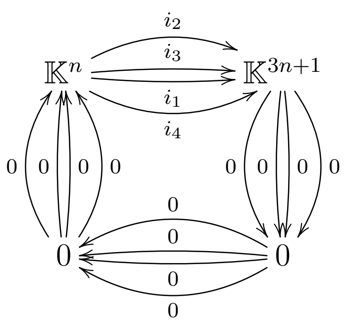
Sea I el ideal de $\mathbb{K}Q$ generado por

$$\{\alpha_i\alpha_{i+1} - \overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_{i+1}, \beta_i\beta_{i+1} - \overline{\beta}_i\overline{\beta}_{i+1}, \alpha_i\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\alpha}_i\alpha_{i+1}, \beta_i\overline{\beta}_{i+1}, \overline{\beta}_i\beta_{i+1}, F_Q^3\},$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ (mod 4). A continuación mostraremos que el álgebra $\Lambda = \frac{\mathbb{K}Q}{I}$ tiene Φ-dimensión infinita. Para ello vamos a encontrar una familia de pares de módulos indescomponibles $\{(X_n, Y_n)\}_{n\geq 2}$ tales que $\Phi(X_n \oplus Y_n) = n - 1$.

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada α_i, β_i módulos que denotamos por $M_n^{\alpha_i}$ y $M_n^{\beta_i}$. Damos a continuación las representaciones de $M_n^{\alpha_1}$ y $M_n^{\beta_1}$, pues las asociadas a las otras flechas se definen análogamente.

$M_n^{\alpha_1} =$



$$M_n^{\beta_1} = \quad \begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge] \mathbb{K}^n \arrow[r, bend left, "i_4"] \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_3"'] \arrow[r, bend right, "i_2"'] & \mathbb{K}^{3n+1} \arrow[d, bend right, "0"'] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[d, bend left, "0"] \\ 0 \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[u, shift left, "0"] \arrow[u, shift right, "0"'] \arrow[u, bend right, "0"'] & 0 \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, shift right, "0"'] \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[l, bend left, "0"] \end{tikzcd}$$

Denotemos por $\{e_1, \dots, e_n\}$ *y* $\{f_1, \dots, f_{3n+1}\}$ *las bases canónicas de* $\mathbb{K}^n$ *y* $\mathbb{K}^{3n+1}$ *respectivamente. Para cada* $m = 1, 2, 3, 4$ *las transformaciones lineales* $i_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{3n+1}$ *vienen dadas por:*

$i_1(e_j) = f_j,\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$

$i_2(e_j) = f_{n+j},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$

$i_3(e_j) = f_{n+j+1},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$

$i_4(e_j) = f_{2n+j+1},\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Afirmación 1: *Todos los* $M_n^{\alpha_i}$ *y* $M_n^{\beta_i}$ *son indescomponibles.*

Notemos que basta probarlo para $M_n^{\alpha_1}$*, con* $n \in \mathbb{N}$*. Para ello vamos a calcular* $\mathrm{End}_\Lambda(M_n^{\alpha_1})$ *y probaremos que es un anillo local. Sea* $(A, B) \in \mathrm{End}_\Lambda(M_n^{\alpha_1})$*, o sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *y* $B \in \mathcal{M}_{3n+1}(\mathbb{K})$ *son tales que* $B \cdot i_s = i_s \cdot A$*, para todo* $s = 1, 2, 3, 4$*. Aquí hemos abusado de la notación escribiendo* i_s *para referirnos a la matriz asociada a esa transformación en la base canónica de* $\mathbb{K}^n$*. Examinemos con más detalle las relaciones entre* A *y* B*:*

$$B \cdot i_s = i_s \cdot A \Leftrightarrow (B \cdot i_s)_{i,j} = (i_s \cdot A)_{i,j}, \forall i = 1, \dots, 3n+1; \forall j = 1, \dots, n.$$

Por un lado tenemos que

$$(B \cdot i_s)_{i,j} = \sum_{k=1}^{3n+1} b_{i,k} \cdot (i_s)_{k,j} = \begin{cases} b_{i,j}, & s = 1 \\ b_{i,n+j}, & s = 2 \\ b_{i,n+1+j}, & s = 3 \\ b_{i,2n+j+1}, & s = 4 \end{cases}$$

Por otro lado

$$(i_s{\cdot}A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(i_s)_{i,k}{\cdot}a_{k,j} = \begin{cases} \begin{cases} a_{i,j}, & i = 1,\dots,n \\ 0, & \textit{otro caso} \end{cases}, & s = 1 \\ \begin{cases} a_{i-n,j}, & i = n+1,\dots,2n \\ 0, & \textit{otro caso} \end{cases}, & s = 2 \\ \begin{cases} a_{i-n-1,j}, & i = n+2,\dots,2n+1 \\ 0, & \textit{otro caso} \end{cases}, & s = 3 \\ \begin{cases} a_{i-2n-1,j}, & i = 2n+2,\dots,3n+1 \\ 0, & \textit{otro caso} \end{cases}, & s = 4 \end{cases}$$

Igualando cada una de las expresiones anteriores para cada $s = 1, 2, 3, 4$ *obtenemos que la matriz* B *queda unívocamente determinada por* A *y que además* A *es una matriz triangular inferior de una forma bien particular. Veamos esto.*

Para $s = 1$ *obtenemos que*

$$B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Para $s = 2$ *obtenemos que*

$$B = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & A & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Para $s = 4$ *obtenemos que*

$$B = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$$

Notemos que las entradas marcadas con $*$ *representan submatrices de* B *del tamaño adecuado. Esta representación ayuda a visualizar la forma de* B *pero es engañosa, pues para* $s = 3$ *tendríamos*

$$B = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & A & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix},$$

pero las entradas con $*$ *tienen tamaños distintos a las del caso* $s = 2$*. Vemos que de hecho hay una superposición de la matriz* A *dentro de* B *y esto nos lleva a ciertas relaciones que nos servirán para caracterizar estas matrices.*

Uniendo toda esta información tenemos que, por un lado (para $s = 1, 2, 4$) la matriz B tiene la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Las filas y columnas que hemos escrito explícitamente son $1, n, n+1, n+2, 2n, 2n+2, 3n+1$.

Por otro lado (para $s = 1, 3, 4$) la matriz B tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Las filas y columnas que hemos escrito explícitamente son $1, n, n+2, 2n, 2n+1, 2n+2, 3n+1$.

Igualando estas dos matrices llegamos a la conclusión de que A es una matriz triangular inferior de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Luego, si (A, B) es idempotente, A es idempotente, pero las matrices de la forma que tiene A solo pueden ser idempotentes si $A = 0$ o $A = I_n$ y si esto ocurre entonces $B = 0$ o $B = I_{3n+1}$. En conclusión, el álgebra $\mathrm{End}_\Lambda(M_n^{\alpha_1})$ no tiene idempotentes no triviales, por tanto $M_n^{\alpha_1}$ es indescomponible.

Afirmación 2: *$M_1^{\alpha_i} \simeq M_1^{\beta_i}$, pero $M_n^{\alpha_i} \not\simeq M_n^{\beta_i}$ para $n \geq 2$.*

Al igual que en el caso anterior basta probarlo para α_1 y β_1. El isomorfismo entre $M_1^{\alpha_1}$ y $M_1^{\beta_1}$ viene dado por la representación (A, B) donde $A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es la identidad y $B : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ es una permutación de los elementos de la base que viene dada por $B(f_1) = f_3$, $B(f_2) = f_4$, $B(f_3) = f_1$ y $B(f_4) = f_2$.

La razón por la que $M_n^{\alpha_1} \not\simeq M_n^{\beta_1}$ para $n \geq 2$ es el solapamiento entre las imágenes de i_2 e i_3. Cualquier morfismo (A, B) entre esas representaciones tiene que cumplir que $B \circ i_2 = i_4 \circ A$ y también $B \circ i_3 = i_1 \circ A$. Esto significa que el vector $B(f_{n+2})$ tiene que ser combinación lineal de los primeros n vectores y de los últimos n, lo cual solo puede pasar si $B(f_{n+2}) = 0$. Luego, para $n \geq 2$ cualquier morfismo de representaciones es no inyectivo y por tanto no podrá ser un isomorfismo.

Afirmación 3: *$\Omega(M_n^{\alpha_i}) = M_{n-1}^{\alpha_{i+1}} \oplus S(i+2)^{7n+2}$ y $\Omega(M_n^{\beta_i}) = M_{n-1}^{\beta_{i+1}} \oplus S(i+2)^{7n+2}$, para todo $n \geq 2$. Para $n = 1$, se tiene que $\Omega(M_1^{\alpha_i}) = \Omega(M_1^{\beta_i}) = S(i+2)^{10}$.*

Una vez más es suficiente calcular $\Omega(M_n^{\alpha_1})$, con $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $P_{M_n^{\alpha_1}}$ la cubierta proyectiva, que viene dada por n copias de $P(1)$ y cuya representación es la siguiente

$$P_{M_n^{\alpha_1}} = \quad \begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathbb{K}^n \arrow[r, bend left=40, "\overline{\alpha}_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_1"'] \arrow[r, bend right=40, "\overline{\beta}_1"'] & \mathbb{K}^{4n} \arrow[d, bend right=40, "\overline{\beta}_2"'] \arrow[d, shift right, "\beta_2"'] \arrow[d, shift left, "\alpha_2"] \arrow[d, bend left=40, "\overline{\alpha}_2"] \\
0 \arrow[u, bend left=40, "0"] \arrow[u, shift left, "0"] \arrow[u, shift right, "0"'] \arrow[u, bend right=40, "0"'] & \mathbb{K}^{10n} \arrow[l, bend right=40, "0"'] \arrow[l, shift right, "0"'] \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[l, bend left=40, "0"]
\end{tikzcd}$$

El mapa de representaciones que define la cobertura proyectiva viene dado por (A, B), donde $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es la identidad y $B : \mathbb{K}^{4n} \to \mathbb{K}^{3n+1}$ viene dado de la siguiente manera. Sea $\{g_1, \ldots, g_{4n}\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^{4n}$, entonces

$B(g_{1+4k}) = f_{n+k+1}, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
$B(g_{2+4k}) = f_{n+k+2}, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
$B(g_{3+4k}) = f_{k+1}, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

$B(g_{4+4k}) = f_{2n+k+2}, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}.$

Acá podemos ver que $\operatorname{Ker} B = \langle g_5 - g_2, g_9 - g_6, \ldots, g_{4n-3} - g_{4n-6}\rangle \simeq \mathbb{K}^{n-1}$. *Además restringir los mapas* $\overline{\alpha}_2, \alpha_2, \beta_2, \overline{\beta_2}$ *a* $\operatorname{Ker} B$ *nos da mapas iguales a* i_2, i_3, i_1, i_4 *respectivamente. Luego, tenemos que por definición del núcleo de un morfismo de representaciones se cumple*

$$\Omega(M_n^{\alpha_1}) = \begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
0 \arrow[r, bend left=30, "0"] \arrow[r, shift left=1, "0"] \arrow[r, shift right=1, "0"'] \arrow[r, bend right=30, "0"'] & \mathbb{K}^{n-1} \arrow[d, bend right=30, "i_4"'] \arrow[d, shift right=1, "i_1"'] \arrow[d, shift left=1, "i_3"] \arrow[d, bend left=30, "i_2"] \\
0 \arrow[u, bend left=30, "0"] \arrow[u, shift left=1, "0"] \arrow[u, shift right=1, "0"'] \arrow[u, bend right=30, "0"'] & \mathbb{K}^{10n} \arrow[l, bend right=30, "0"'] \arrow[l, shift right=1, "0"'] \arrow[l, shift left=1, "0"] \arrow[l, bend left=30, "0"]
\end{tikzcd}$$

Como los mapas i_2, i_3, i_1, i_4 *vistos en su conjunto tienen una imagen de dimensión* $2(n-1) + n = 3n - 2$*, vemos que en realidad esta representación puede escribirse como suma directa de* $M_{n-1}^{\alpha_2} \oplus S(3)^{7n+2}$. *El mismo razonamiento vale para los módulos asociados al resto de las flechas* α_i *y* β_i.

El caso $m = 1$ *sale directo de que la cubierta proyectiva de* $M_1^{\alpha_1}$ *es* $P(1)$ *y por tanto el núcleo es necesariamente semisimple.*

Afirmación 4: $\Phi \dim(\Lambda) = \infty$.

Consideremos para cada $n \geq 2$ *el par* $(M_n^{\alpha_1}, M_n^{\beta_1})$ *compuesto por módulos indescomponibles. Ya sabemos que dichos módulos no son isomorfos, por lo que comenzamos con rango 2. Además sus sucesivas sizigias tampoco son isomorfas, hasta el paso* $n-1$ *en el que sí lo son. Luego de este paso en el que tenemos rango 1 no puede volver a caer el rango porque todos los simples en esta álgebra tienen dimensión proyectiva infinita. Por tanto* $\Phi(M_n^{\alpha_1} \oplus M_n^{\beta_1}) = n - 1$ *y esto prueba que* $\Phi \dim(\Lambda) = \infty$.

Capítulo 3

Funciones de Igusa-Todorov generalizadas

Resumen: En este capítulo definimos las funciones de Igusa-Todorov generalizadas y mostramos sus propiedades, así como la relación existente entre éstas y las definidas originalmente por Igusa y Todorov en [37].

3.1. Subcategorías de Igusa-Todorov

El objetivo de esta sección es estudiar más profundamente el papel que juega la subcategoría plena $\operatorname{proj}\Lambda$ formada por lo módulos proyectivos f.g. en la definición original de las funciones IT. Esto nos permitirá definir las subcategorías de Igusa-Todorov (IT), que luego serán usadas para definir las funciones generalizadas.

Hay ciertas propiedades que cumple $\operatorname{proj}\Lambda$ de manera trivial, pero que en ellas se basa enteramente la definición de las funciones Φ y Ψ, a saber: $\operatorname{proj}\Lambda$ es cerrada por sumas directas, sumandos directos y sizigias. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Sea $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$. Decimos que $\mathcal{D}$ es una* ***subcategoría de Igusa-Todorov*** *(o simplemente una clase IT) si cumple las siguientes dos condiciones:*

$$(1)\ \operatorname{add}\mathcal{D} = \mathcal{D} \quad y \quad (2)\ \Omega(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Dadas dos subcategorías cualesquiera $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ definimos $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} := \{X \oplus Y \mid X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$.

Observación 3.1.2. (1) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son clases IT, la clase $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ es IT. Es claro que* $\operatorname{add}(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) = \mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$. *Además la sizigia conmuta con la suma directa, por lo que también es cerrada por sizigias y por tanto es una clase IT.*

(2) *Aunque una clase IT en principio no tiene que contener a los proyectivos, puede siempre ampliarse de manera minimal para que sí los contenga. Si $\mathcal{D}$ es una clase IT, entonces $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \oplus \operatorname{proj} \Lambda$ es la menor clase IT que contiene a $\mathcal{D} \cup \operatorname{proj} \Lambda$. En ocasiones es deseable trabajar con clases IT que contengan a los proyectivos y de esta forma cualquier resultado que tenga esta hipótesis puede adaptarse a una clase IT cualquiera.*

Los siguientes ejemplos muestran la versatilidad de la definición anterior, mostrando varias clases bien conocidas y de distinta índole que resultan ser de tipo IT. Recordamos que, dada un álgebra de Artin Λ, definimos la clase de los módulos ortogonales a izquierda como ${}^{\perp}\Lambda := \{M \in \operatorname{mod} \Lambda \mid \operatorname{Ext}^i_{\Lambda}(M, \Lambda) = 0, \forall i \geq 1\}$.

Ejemplo 3.1.3. *Sea Λ un álgebra de Artin.*

(1) Los ejemplos más evidentes de clases IT son $\operatorname{proj} \Lambda$ *y* $\operatorname{mod} \Lambda$, *los cuales podríamos considerar como casos extremales.*

(2) Otras dos clases IT que son de especial interés y que consideramos prototípicas son $\operatorname{Gproj} \Lambda$ *y* ${}^{\perp}\Lambda$ *formadas por los módulos Gorenstein proyectivos y los módulos ortogonales a izquierda respectivamente. En este caso [33, Proposition 2.3] implica que* $\operatorname{Gproj} \Lambda \subseteq {}^{\perp}\Lambda$. *La clase* ${}^{\perp}\Lambda$ *es bien conocido que es saturada a izquierda, en particular resulta ser una clase IT. Para ver que* $\operatorname{Gproj} \Lambda$ *es también saturada a izquierda remitimos al lector a [33, Theorem 2.5] y [45, Remark 7.4 (a)].*

(3) Sea $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ tal que $\operatorname{dp}(M) = n < \infty$, entonces las siguientes son clases IT

(3.1) $\mathcal{D}_1 = \operatorname{add}\left(\Lambda \oplus M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{n-1}(M)\right)$.

(3.2) $\mathcal{D}_2 = \operatorname{add}\left(M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{n}(M)\right)$.

(4) Sea $T \in \operatorname{mod} \Lambda^{op}$ un módulo inclinante con $\operatorname{dp}(T) \leq 1$ y sea $\Gamma := End(T)$. Definimos $\mathcal{Y}(T) := \{Y \in \operatorname{mod} \Gamma^{op} \mid \operatorname{Tor}_1^{\Gamma^{op}}(Y, T) = 0\}$, la cual es una clase libre de torsión y contiene a los proyectivos. Por ser libre de torsión es cerrada por submódulos y extensiones por lo que se

satisface la condición (1) *de la Definición 3.1.1. Como además contiene a los proyectivos, contiene también a todas las sizigias, en particular aquellas de módulos en $\mathcal{Y}(T)$, por tanto se cumple también la condición* (2) *y podemos concluir que $\mathcal{Y}(T)$ es una clase IT.*

(5) *Consideremos la subcategoría $\mathcal{P}^{<\infty}(\Lambda)$ formada por los módulos que tienen dimensión proyectiva finita. Es claro que esta clase es cerrada por sizigias y también por sumas y sumandos directos, luego es una clase IT. Del mismo modo dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la subcategoría $\mathcal{P}^{\leq n}(\Lambda)$ formada por aquellos módulos con dimensión proyectiva a lo más n, es una clase IT.*

(6) *Para un álgebra de Artin cualquiera la clase $\mathcal{D} = \Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \oplus \operatorname{proj}\Lambda$ es una clase IT. Es bastante claro que es cerrada por sizigias y también por sumas directas. Veamos que es cerrada por sumandos directos. Sea $X|\Omega(Y)$, con entonces tenemos una s.e.c.*

$$0 \to X \to P_0^Y \to \frac{P_0^Y}{X} \to 0,$$

donde P_0^Y es la cubierta proyectiva de Y. De aquí se obtiene que $X \simeq \Omega(\frac{P_0^Y}{X}) \oplus Q$, para algún $Q \in \operatorname{proj}\Lambda$ y esto implica directamente que $X \in \mathcal{D} = \Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \oplus \operatorname{proj}\Lambda$.

La siguiente proposición relaciona las clases IT con la función Φ de Igusa-Todorov.

Proposición 3.1.4. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D}$ una clase IT con la siguiente propiedad: si $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ es tal que $\Omega(X) \in \mathcal{D}$, entonces existen $Y \in \mathcal{D}, P \in \operatorname{proj}\Lambda$ tales que $\Omega(X) \simeq \Omega(Y) \oplus P$. Bajo estas hipótesis se tiene que si $\Phi\dim(\mathcal{D}) = n > 0$, entonces $\Phi\dim(\Omega(\mathcal{D})) = n - 1$.*

Demostración. Como $\mathcal{D}$ es una clase IT se cumple que $\Phi\dim(\Omega(\mathcal{D})) \leq \Phi\dim(\mathcal{D}) = n$. Supongamos que existe $X \in \mathcal{D}$ tal que $\Phi(\Omega(X)) = n$. Si descomponemos $\Omega(X)$ en sumandos directos indescomponibles obtenemos que $\Omega(X) = \bigoplus_{i=1}^{r} T_i$. Del Ejemplo 3.1.3 parte (6) y de las hipótesis podemos concluir que para cada i, $T_i \simeq \Omega(Y_i) \oplus P_i$, donde $Y_i \in \operatorname{ind}(\mathcal{D})$ y $P_i \in \operatorname{proj}\Lambda$. Como T_i es indescomponible y no es proyectivo, existe al menos un i tal que $Y_i \neq 0$ y $T_i \simeq \Omega(Y_i)$. Tomando $Y = \bigoplus_{i=1}^{r} Y_i$ y aplicando la definición de la función Φ, nos queda $\Phi(Y) = n + 1$ y esto es una contradicción, pues $\Phi\dim(\mathcal{D}) = n$.
Hemos demostrado que $\Phi\dim(\Omega(\mathcal{D})) \leq n - 1$. Supongamos que es estrictamente menor, o sea que para todo $X \in \mathcal{D}$, $\Phi(\Omega(X)) \leq n-2$. Aplicando la desigualdad de Huard-Lanzilotta [34] tenemos que $\Phi(X) \leq \Phi(\Omega(X))+1 \leq n-1$

y como $X \in \mathcal{D}$ es arbitrario, arribamos a una contradicción con el hecho de que $\Phi \dim(\mathcal{D}) = n$. □

Corolario 3.1.5. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D}$ una clase IT tal que $\mathcal{D} = \Omega(\mathcal{D}) \oplus \operatorname{proj} \Lambda$. Entonces si $\Phi \dim(\mathcal{D}) < \infty$ se tiene $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$.*

Demostración. Notemos primeramente que si $\mathcal{D} = \Omega(\mathcal{D}) \oplus \operatorname{proj} \Lambda$, entonces se satisface la hipótesis sobre $\mathcal{D}$ en la proposición anterior. Sea $n := \Phi \dim(\mathcal{D}) > 0$, entonces por la Proposición 3.1.4 tenemos que $\Phi \dim(\Omega(\mathcal{D})) = n - 1$ y esto es una contradicción pues $n = \Phi \dim(\mathcal{D}) = \Phi \dim(\Omega(\mathcal{D}) \oplus \operatorname{proj} \Lambda) = \Phi \dim(\Omega(\mathcal{D})) = n - 1$, lo cual es imposible. Concluimos entonces que $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$. □

Observamos que la clase de los Gorenstein proyectivos satisface las hipótesis del corolario anterior. Por tanto $\Phi \dim(\operatorname{Gproj} \Lambda) = 0$ o ∞. Es conocido que esta clase tiene Φ-dimensión cero, luego este es un ejemplo interesante de aplicación del corolario anterior y encaja en la teoría ya conocida.

A continuación vamos a discutir las ideas y conceptos necesarios para poder definir de manera exitosa las funciones IT generalizadas.

Denotemos por K el grupo abeliano generado por el conjunto de clases de isomorfismo $[M]$, donde $M \in \operatorname{mod} \Lambda$, con la relación $[M] - [X] - [Y]$ si $M \simeq X \oplus Y$. Notemos que K no es más que el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de los Λ-módulos indescomponibles. Este grupo no es el mismo que el K_0 definido por Igusa y Todorov en [37], ya que en este caso las clases de los proyectivos no se anulan. Es más, K_0 resulta ser el cociente de K por el subgrupo libre generado por los proyectivos indescomponibles, el cual es un sumando directo de K, pues la clase $\operatorname{proj} \Lambda$ es cerrada por sumas y sumandos en $\operatorname{mod} \Lambda$.

Sea $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ una subcategoría tal que $\mathcal{X} = \operatorname{add} \mathcal{X}$. Denotamos por $\langle \mathcal{X} \rangle$ al subgrupo abeliano libre de K generado por las clases de isomorfismo de los indescomponibles en $\mathcal{X} \cup \operatorname{proj} \Lambda$. Si $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, entonces $\langle X \rangle := \langle \operatorname{add} X \rangle$. La primera condición en la Definición 3.1.1 garantiza que $\langle \mathcal{X} \rangle$ es un sumando directo de K y por tanto el cociente $K_{\mathcal{X}} := K / \langle \mathcal{X} \rangle$ es un grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de módulos indescomponibles no proyectivos y que no están en la clase $\mathcal{X}$. En el caso $\mathcal{X} = \operatorname{proj} \Lambda$, el grupo $K_{\operatorname{proj} \Lambda}$ coincide con el grupo K_0 definido por Igusa y Todorov. Es justamente esta idea de sustraer las propiedades de $\operatorname{proj} \Lambda$ que hacen posible la definición de las funciones IT, la que ha motivado esta construcción. De esta manera vemos con más claridad la dependencia que existe entre las funciones de Igusa-Todorov y la clase de los módulos proyectivos. En lo que resta del capítulo vamos a generalizar estas funciones al caso donde tenemos una clase IT cualquiera y luego vamos a estudiar sus propiedades.

Tomemos ahora una clase $\mathcal{X} := \mathcal{D}$ que sea IT y consideremos el endomorfismo $L : K \to K$ definido por $L([X]) = [\Omega X]$. Como $\mathcal{D}$ es una clase IT, la condición (2) implica que el endomorfismo L pasa al cociente como $\overline{L} : K_{\mathcal{D}} \to K_{\mathcal{D}}, \overline{[X]} \mapsto \overline{[\Omega X]}$, donde $\overline{[M]} := [M] + \langle \mathcal{D} \rangle$, para todo $M \in \operatorname{mod} \Lambda$. Denotemos $\overline{\langle X \rangle} := (\langle X \rangle + \langle \mathcal{D} \rangle)/\langle \mathcal{D} \rangle$ y notemos que $\overline{\langle X \rangle}$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de Λ-módulos indescomponibles no proyectivos de $\operatorname{add} X$ que no están en la clase $\mathcal{D}$. El grupo $\overline{\langle X \rangle}$ es un subgrupo finitamente generado de $K_{\mathcal{D}}$, por tanto al aplicar el Lema de Fitting obtenemos un entero no negativo $\eta_{\overline{L}}(\overline{\langle X \rangle})$ minimal con la propiedad de que $\overline{L} : \overline{L}^m(\overline{\langle X \rangle}) \to \overline{L}^{m+1}(\overline{\langle X \rangle})$ es un isomorfismo para todo $m \geq \eta_{\overline{L}}(\overline{\langle X \rangle})$.

El análisis que se acaba de exponer en los párrafos anteriores da paso a la siguiente definición, que es central en este trabajo.

Definición 3.1.6. *Sean Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ una subcategoría IT. Para cada $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, definimos*

$$\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) := \eta_{\overline{L}}(\overline{\langle X \rangle}).$$

Es preciso señalar que si tomamos $\mathcal{D} = \operatorname{proj} \Lambda$ entonces $\Phi_{[\mathcal{D}]}$ es la función Φ de Igusa-Todorov. Es en este sentido que esta definición la generaliza. Para cada $\mathcal{D}$ la función $\Phi_{[\mathcal{D}]}$ recibe el nombre de función Φ de Igusa-Todorov asociada a $\mathcal{D}$ o simplemente función Φ generalizada si se sobreentiende cuál es la clase IT o si es irrelevante.

De manera análoga a como se define la función Ψ de Igusa-Todorov, se puede definir la función Ψ generalizada.

Definición 3.1.7. *Sean Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ una subcategoría IT. Para cada $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, definimos*

$$\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) := \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add} \Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)).$$

La siguiente definición es bien natural y nos dice qué se entiende por Φ-dimensión de una subcategoría cualquiera $\mathcal{X} \subset \operatorname{mod} \Lambda$

Definición 3.1.8. *Sea $\mathcal{X} \subset \operatorname{mod} \Lambda$ una subcategoría cualquiera, definimos la $\Phi_{[\mathcal{D}]}$-dimensión de $\mathcal{X}$ de la siguiente manera:*

$$\Phi_{[\mathcal{D}]} \dim(\mathcal{X}) := \sup\{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) : X \in \mathcal{X}\}.$$

De manera análoga se define la $\Psi_{[\mathcal{D}]}$-dimensión de una subcategoría $\mathcal{X}$.

Definición 3.1.9. *Sea $\mathcal{X} \subset \operatorname{mod}\Lambda$ una subcategoría cualquiera, definimos la $\Psi_{[\mathcal{D}]}$-dimensión de $\mathcal{X}$ de la siguiente manera:*

$$\Psi_{[\mathcal{D}]} \dim(\mathcal{X}) := \sup\{\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) : X \in \mathcal{X}\}.$$

Veamos cómo se calculan los valores de estas funciones en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.1.10. *Consideremos el álgebra de caminos $\Lambda = \mathbb{K}Q/F^2$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo, Q es el carcaj que damos a continuación y F es el ideal de $\mathbb{K}Q$ generado por las flechas.*

$$\begin{tikzcd} Q: & 1 \arrow[loop above] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3. \end{tikzcd}$$

Vamos a trabajar con los módulos $S_1, S_2, S_3 = P_3, P_1, P_2$ e I_2. Las resoluciones proyectivas minimales de S_1, S_2 e I_2 son las siguientes:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0 \\ & & S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \arrow[ur] & & S_1 \oplus S_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & 0 \\ & & S_3 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & 0 \\ & & S_1 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{D} = \operatorname{add}(\Lambda \oplus S_2 \oplus S_1)$, la cual puede verse sin dificultad que es una clase IT. De las resoluciones proyectivas minimales y de las Definiciones 3.1.6 y 3.1.7 tenemos que

$$\Phi(S_2) = 1, \Phi_{[\mathcal{D}]}(S_2) = 0$$
$$\Phi(I_2) = 0, \Phi_{[\mathcal{D}]}(I_2) = 1$$
$$\Psi(I_2) = 0, \Psi_{[\mathcal{D}]}(I_2) = 1$$
$$\Psi(S_1 \oplus S_2) = 2, \Psi_{[\mathcal{D}]}(S_1 \oplus S_2) = 1.$$

Una observación importante que nos brinda este ejemplo es que en general no hay una ninguna desigualdad del tipo $\Phi \geq (\leq)\ \Phi_{[\mathcal{D}]}$ o $\Psi \geq (\leq)\ \Psi_{[\mathcal{D}]}$. Sin embargo hay cierta relación entre estas funciones, la cual junto a otros temas se trata en la siguiente sección.

3.2. Propiedades de las funciones IT generalizadas

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de las funciones IT generalizadas, así como la relación existente entre éstas y las funciones definidas originalmente por Igusa y Todorov.

A continuación damos una lista de propiedades que generalizan las demostradas en [37].

Proposición 3.2.1. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D}$ una subcategoría IT. Para cualesquiera $X, Y, M \in \operatorname{mod} \Lambda$ se cumplen:*

(a) *Si* $M \in \mathcal{D} \cup \operatorname{proj} \Lambda$*, entonces* $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus M) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$*. En particular, tomando* $X = 0$ *tenemos que* $\Phi_{[\mathcal{D}]}(M) = 0$.

(b) $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus Y)$.

(c) $\Phi_{[\mathcal{D}]}\mathrm{dim}(\operatorname{add} X) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(d) *Si* $\mathrm{dp}(X) < \infty$*, entonces* $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = \Phi(X) = \Psi(X) = \mathrm{dp}(X)$.

(d′) *Si* $\mathrm{dp}(X) < \infty$ *y* $\mathrm{fin.dim}(\mathcal{D}) = 0$*, entonces* $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) = \Phi(X) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = \Psi(X) = \mathrm{dp}(X)$.

(e) *Sea* $Z|\Omega^t(X)$ *tal que* $0 \leq t \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ *y* $\mathrm{dp}(Z) < \infty$*. Entonces* $\mathrm{dp}(Z) + t \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(f) $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus Y)$.

(g) $\Psi_{[\mathcal{D}]}\mathrm{dim}(\operatorname{add} X) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(h) *Si* $\mathrm{fin.dim}\,(\operatorname{add} X) \geq k$*, entonces* $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) \geq k$.

Demostración. (a) Sale del hecho de que $\overline{\langle X \oplus M \rangle} = \overline{\langle X \rangle}$.

(b) Basta observar que $\overline{\langle X \rangle}$ es un subgrupo f.g. de $\overline{\langle X \oplus Y \rangle}$, luego la desigualdad sale directamente del Lema de Fitting.

(c) Sea $Z \in \operatorname{add} X$, entonces existen $Z' \in \operatorname{mod} \Lambda$ y $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $Z \oplus Z' = X^s$. Como $\overline{\langle X^s \rangle} = \overline{\langle X \rangle}$ tenemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X^s) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$. Aplicando la parte (b) obtenemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(Z) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ y al ser Z arbitrario, tenemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}\mathrm{dim}(\operatorname{add} X) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(d) Basta ver que $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = \mathrm{dp}(X)$ porque las otras igualdades están probadas en [37]. Por definición $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \mathrm{fin.dim}\,(\mathrm{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X))$. Como $\mathrm{dp}(X) < \infty$, se cumple que $\overline{[\Omega^{\mathrm{dp}(X)}(X)]} = 0$, luego $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \leq \mathrm{dp}(X)$. Bajo estas condiciones se tiene que $\mathrm{fin.dim}\,(\mathrm{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)) = \mathrm{dp}(X) - \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$, sustituyendo en la definición de $\Psi_{[\mathcal{D}]}$ obtenemos la igualdad deseada.

(d') Notemos que la condición $\mathrm{fin.dim}(\mathcal{D}) = 0$ es necesaria, pues en general no es cierto que $\Phi_{\mathcal{D}}(X) = \mathrm{dp}(X)$ si $\mathrm{dp}(X) < \infty$, como puede verse en el Ejemplo 3.1.10 tomando $X := S_2$ (en este caso $\mathrm{fin.dim}(\mathcal{D}) = 1$).
Sea $n := \mathrm{dp}(X)$, aquí al igual que en la parte anterior basta probar que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) = n$. La condición $\mathrm{fin.dim}(\mathcal{D}) = 0$ implica que en la clase $\mathcal{D}$ no hay módulos de dimensión proyectiva finita que no sean proyectivos. Esto a su vez implica que el grupo $\overline{L}^{n-1}(\overline{\langle X\rangle})$ no es nulo, mientras que $\overline{L}^{n}(\overline{\langle X\rangle})$ sí lo es, por tanto $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) = n$.

(e) Observemos primero que al tener la sizigia la propiedad de conmutar con la suma directa tenemos que $\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)-t}(Z)$ es un sumando directo de $\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)$. Además $\mathrm{dp}(\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)-t}(Z)) < \infty$ porque $\mathrm{dp}(Z) < \infty$. Por tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$\mathrm{dp}(Z) \leq \mathrm{dp}(\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)-t}(Z)) + \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) - t.$$

Por otro lado notemos que $\mathrm{dp}(\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)-t}(Z)) \leq \mathrm{fin.dim}\,(\mathrm{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X))$. Luego, al combinar ambas desigualdades obtenemos

$$\mathrm{dp}\,Z + t \leq \mathrm{fin.dim}\,(\mathrm{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)) + \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X).$$

(f) Sea $Z|\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)$ con $\mathrm{dp}(Z) < \infty$. De la parte (b) sabemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus Y)$. Luego podemos aplicar la parte (e) al módulo $X \oplus Y$, tomando $t := \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ y dado que Z es también un sumando directo de $\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X \oplus Y)$. De esta forma obtenemos que

$$\mathrm{dp}(Z) + \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus Y).$$

Finalmente, tomando supremo en el miembro izquierdo de la desigualdad anterior, se obtiene la desigualdad deseada.

(g) Sea $Z \in \mathrm{add}\,X$, entonces existen $Z' \in \mathrm{mod}\,(\Lambda)$ y $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $Z \oplus Z' = X^s$. Notemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X^s) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ como en la prueba de la parte (c). Obtenemos así las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\Psi_{[\mathcal{D}]}(X^s) &= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X^s) + \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X^s)}(X^s)) \\ &= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X^s)) \\ &= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)) \\ &= \Psi_{[\mathcal{D}]}(X).\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando (f), se sigue que $\Psi_{[\mathcal{D}]}(Z) \le \Psi_{[\mathcal{D}]}(X^s) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(h) Como $\text{fin.dim}\,(\text{add}\,X) \ge k$, existe $Z|X$ tal que $\text{dp}(Z) \ge k$, entonces por (d) tenemos que $\Psi_{[\mathcal{D}]}(Z) \ge k$ y combinando esto con (f) obtenemos que $k \le \Psi_{[\mathcal{D}]}(Z) \le \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$. □

La siguiente proposición está motivada por su análogo en [35].

Proposición 3.2.2. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \text{mod}\,\Lambda$ una clase IT. Entonces, para todo $X \in \text{mod}\,\Lambda$, se cumple:*

(a) $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \le \Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1$;

(b) $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) \le \Psi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1$.

Demostración. (a) El caso en que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) = 0$ es trivial, así que asumimos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) > 0$. Notemos que $\overline{L}(\overline{\langle X \rangle})$ es un subgrupo de $\overline{\langle \Omega(X) \rangle}$, y entonces por el lema de Fitting se cumple que

$$\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) - 1 = \eta_{\overline{L}}(\overline{L}(\overline{\langle X \rangle})) \le \eta_{\overline{L}}(\overline{\langle \Omega(X) \rangle}) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)).$$

(b) Sea $Z|\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)$ con $\text{dp}(Z) < \infty$. Tomemos un entero no negativo t de manera que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + t = \Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1$. Entonces se cumple que $\Omega^t(Z)|\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X))}(\Omega(X))$ y $\text{dp}\,\Omega^t Z < \infty$. Combinando todo lo anterior con el hecho de que $\text{dp}(Z) \le \text{dp}(\Omega^t(Z)) + t$, obtenemos

$$\text{dp}(Z) \le \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X))}(\Omega(X))) + \Phi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1 - \Phi_{[\mathcal{D}]}(X).$$

Por definición, el segundo término en la desigualdad anterior es igual a

$$\Psi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1 - \Phi_{[\mathcal{D}]}(X).$$

Luego,

$$\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)) + \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) \le \Psi_{[\mathcal{D}]}(\Omega(X)) + 1.$$

□

El siguiente lema será de utilidad en lo que sigue.

Lema 3.2.3. *Sean Λ un álgebra de Artin, $\mathcal{D}$ una subcategoría IT y $0 \to A \to B \to C \to 0$ una s.e.c. en* $\operatorname{mod}\Lambda$ *tal que* $\operatorname{dp}(C) < \infty$. *Llamemos $n := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \overline{[\Omega^k A]} = \overline{[\Omega^k B]}\}$, entonces se cumple*

(a) $n \leq \operatorname{dp}(C)$,

(b) $n \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B)$.

Demostración. Primeramente es oportuno señalar que como $\operatorname{dp}(C) < \infty$, existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\Omega^k A \simeq \Omega^k B$, luego $\overline{[\Omega^k A]} = \overline{[\Omega^k B]}$ y por tanto n queda bien definido como el mínimo k con esa propiedad.
Para demostrar (a) notemos que $\Omega^{\operatorname{dp}(C)} C$ es proyectivo y por tanto al aplicar el Lema de la Herradura para este nivel de sizigia obtenemos una sucesión exacta corta escindida que tiene la forma

$$0 \to \Omega^{\operatorname{dp}(C)}(A) \to \Omega^{\operatorname{dp}(C)}(B) \oplus P \to \Omega^{\operatorname{dp}(C)}(C) \to 0,$$

donde $P \in \operatorname{proj}\Lambda$. Al ser escindida tenemos que

$$\Omega^{\operatorname{dp}(C)}(B) \oplus P \simeq \Omega^{\operatorname{dp}(C)}(A) \oplus \Omega^{\operatorname{dp}(C)}(C),$$

luego $\overline{[\Omega^{\operatorname{dp}(C)}(A)]} = \overline{[\Omega^{\operatorname{dp}(C)}(B)]}$ y como n es el mínimo de los enteros no negativos con esta propiedad tenemos que $n \leq \operatorname{dp}(C)$.
Para demostrar (b) podemos asumir que $n > 0$, pues el caso $n = 0$ es trivial. Observemos primeramente que por la definición de n se cumple que $\overline{[\Omega^n A]} = \overline{[\Omega^n B]}$, pero $\overline{[\Omega^{n-1}(A)]} \neq \overline{[\Omega^{n-1}(B)]}$. Consideremos entonces el homomorfismo de grupos

$$\overline{L} : \overline{L}^{n-1}(\overline{\langle A \oplus B \rangle}) \to \overline{L}^{n}(\overline{\langle A \oplus B \rangle}),$$

como en la Definición 3.1.6. Como $\overline{L}$ no es inyectiva, entonces por el Lema de Fitting tendrá que ser $\Phi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B) \geq n$. □

El siguiente teorema es una generalización de [37, Theorem 0.4].

Teorema 3.2.4. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ una clase IT. Supongamos que tenemos una s.e.c. $0 \to A \to B \to C \to 0$ tal que*

(1) $\operatorname{dp}(C) < \infty$.

(2) Para $n := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \overline{[\Omega^k A]} = \overline{[\Omega^k B]}\}$, el módulo $\Omega^n(B)$ no tiene sumandos directos en $\mathcal{D}$ con dimensión proyectiva infinita.

Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\mathrm{dp}(C) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B) + 1.$$

Demostración. Antes de comenzar la demostración es preciso señalar que si $\mathcal{D} = \operatorname{proj}\Lambda$, la condición (2) desaparece y se recupera el Teorema 0.4. de [37] como un caso particular.
Del Lema 3.2.3 sabemos que $n \leq \mathrm{dp}(C)$ y $n \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B)$. Por otro lado, si aplicamos el Lema de la Herradura para el nivel n de sizigia obtenemos la siguiente s.e.c.

$$0 \to \Omega^n(A) \to \Omega^n(B) \oplus Q \to \Omega^n(C) \to 0,$$

con $Q \in \operatorname{proj}\Lambda$. Como $\overline{[\Omega^n A]} = \overline{[\Omega^n B]}$ tienen que existir, por el Teorema de Krull-Schmidt, Λ-módulos X, D_1, D_2 tales que $\Omega^n A \simeq X \oplus D_1$ y $\Omega^n B \simeq X \oplus D_2$, donde X es o bien nulo o no está en la clase $\mathcal{D}$ y $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Así la s.e.c. toma la siguiente forma

$$0 \to X \oplus D_1 \to X \oplus D_2 \oplus Q \to \Omega^n(C) \to 0.$$

Una consecuencia del Lema de Fitting es que la componente $f : X \to X$ en la s.e.c. se descompone en un mapa diagonal de la forma $\overline{f} : Y \oplus Z \to Y \oplus Z$, donde $\overline{f} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$, f_1 es un isomorfismo y f_2 es nilpotente. Como el mapa f_1 es un isomorfismo induce una s.e.c. de la forma

$$(*) \qquad 0 \to Z \oplus D_1 \to Z \oplus D_2 \oplus Q \to \Omega^n(C) \to 0,$$

donde la componente $Z \to Z$ es precisamente f_2. Como $\Omega^n(C)$ y D_2 tienen dimensión proyectiva finita, podemos afirmar que $Z \oplus D_1$ también. Veamos esto: sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), S) = 0$ y $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(D_2, S) = 0$, para todo S simple. Aplicando el funtor $\mathrm{Ext}_\Lambda(-, S)$ obtenemos una sucesión exacta larga:

$$\to \mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, S) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, S) \oplus \mathrm{Ext}_\Lambda^k(D_1, S) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), S) = 0 \to$$

La componente $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(f_2, S) : \mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, S) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, S)$ es nilpotente, por tanto no puede ser sobreyectiva, lo que implica que el mapa completo tampoco puede ser sobreyectivo a no ser que $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, S) = 0 = \mathrm{Ext}_\Lambda^k(D_1, S)$. Como S es un simple cualquiera, podemos concluir que $Z \oplus D_1$ tiene dimensión proyectiva finita. Además, $Z \oplus D_1 \oplus D_2$ es un sumando de $\Omega^n(A \oplus B)$ y $n \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B)$, luego aplicando la Proposición 3.2.1 parte (e) obtenemos que

$$\mathrm{dp}(Z \oplus D_1 \oplus D_2) + n \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B).$$

Por otro lado sabemos que $\mathrm{dp}(C) \leq \mathrm{dp}(\Omega^n(C)) + n$ y de la sucesión $(*)$ obtenemos que $\mathrm{dp}(\Omega^n(C)) \leq \mathrm{dp}(Z \oplus D_1 \oplus D_2) + 1$. Uniendo todas estas desigualdades obtenemos que

$$\mathrm{dp}(C) \leq \mathrm{dp}(\Omega^n(C)) + n \leq \mathrm{dp}(Z \oplus D_1 \oplus D_2) + 1 + n \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B) + 1.$$

□

3.2.1. Relación entre las funciones IT y las generalizadas

En esta sección nos dedicamos a estudiar la relación existente entre las funciones IT y las generalizadas. Comenzamos con el siguiente lema que es una consecuencia del Lema de Fitting.

Lema 3.2.5. *Sean G un grupo abeliano, D un subgrupo de G y $L \in End_{\mathbb{Z}}(G)$ tal que $L(D) \subseteq D$ y existe k entero no negativo tal que $L : L^k(D) \to D$ es un monomorfismo. Entonces para cada subgrupo $X \subseteq G$ f.g. tenemos que*

$$\eta_L(X) \leq \eta_{\overline{L}}(\overline{X}) + k,$$

donde $\overline{L} : G/D \to G/D$, $g + D \mapsto L(g) + D$, $\overline{X} := (X + D)/D$ y $\eta_L, \eta_{\overline{L}}$ se obtienen al aplicar el Lema de Fitting.

Demostración. Sea X un subgrupo finitamente generado de G. Por el Lema de Fitting existe un entero no negativo $\eta_L(X)$, mínimo con la propiedad de que $L : L^m(X) \to L^{m+1}(X)$ es un isomorfismo para todo $m \geq \eta_L(X)$. Lo mismo puede hacerse para el homomorfismo $\overline{L}$ y el subgrupo $\overline{X}$; al entero correspondiente lo denotamos $\eta_{\overline{L}}(\overline{X})$.

Sea $m \geq \eta_{\overline{L}}(\overline{X}) + k$. Afirmamos que $L : L^m(X) \to L^{m+1}(X)$ es un isomorfismo. Si suponemos lo contrario, debería entonces existir un elemento no nulo $y \in L^m(X)$ tal que $L(y) = 0$. Este elemento puede escribirse como $y = L^m(x)$ para algún $x \in X$ y como $m \geq k$ también puede escribirse $y = L^k(L^{m-k}(x))$. Como $L : L^k(D) \to D$ es un monomorfismo concluimos que $L^{m-k}(x) \notin D$, luego $L^{m-k}(x) + D = \overline{L}^{m-k}(x + D)$ es un elemento no nulo y por tanto $\overline{L}(\overline{L}^m(x + D)) = \overline{L}^{k+1}(\overline{L}^{m-k}(x + D))$ tampoco puede ser nulo porque $m - k \geq \eta_{\overline{L}}(\overline{X})$. Por otro lado sabemos que $\overline{L}(\overline{L}^m(x + D)) = \overline{L}(y + D) = L(y) + D = 0$ y aquí radica la contradicción.
En conclusión, si $m \geq \eta_{\overline{L}}(\overline{X}) + k$, entonces $L : L^m(X) \to L^{m+1}(X)$ es un isomorfismo y como $\eta_L(X)$ es el mínimo entero con esta propiedad tenemos la desigualdad deseada. □

El siguiente teorema es una consecuencia de la Definición 3.1.6 y el Lema 3.2.5.

Teorema 3.2.6. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ una subcategoría IT. Entonces, para cada $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ se cumple*

$$\Phi(X) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \Phi\dim(\mathcal{D}).$$

Demostración. Podemos asumir que $k := \Phi\dim(\mathcal{D}) < \infty$, pues de lo contrario la desigualdad es trivial. Para aplicar el Lema 3.2.5 tomamos $G := K$, $D := \langle\mathcal{D}\rangle$ y $L : K \to K$ como en la Definición 3.1.6. Para poder continuar hay una condición que tenemos que verificar y es que $L : L^k(D) \to D$ es un monomorfismo. Si suponemos lo contrario, entonces tendrán que existir módulos $X, Y \in \mathcal{D}$ tal que $[\Omega^k(X)] \neq [\Omega^k(Y)]$, pero $[\Omega^{k+1}(X)] = [\Omega^{k+1}(Y)]$ y esto implica que $\Phi(X \oplus Y) \geq k+1$, lo cual contradice que la $\Phi\dim(\mathcal{D}) = k$. En este punto están dadas todas las hipótesis para aplicar el Lema 3.2.5 y obtener así la desigualdad deseada. $\square$

La relación entre Ψ y $\Psi_{[\mathcal{D}]}$ es un poco más complicada y para obtener un resultado análogo al anterior es necesario imponer una condición adicional a la clase IT.

Proposición 3.2.7. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ una clase IT tal que $\Phi\dim(\mathcal{D}) = 0$. Entonces se cumple lo siguiente.*

(a) $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$, *para todo* $X \in \operatorname{mod}\Lambda$.

(b) $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus D) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$, *para todo* $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ *y* $D \in \mathcal{D}$.

(c) $\Psi_{[\mathcal{D}]}\dim(\mathcal{D}) = 0$.

Demostración. (a) Sea $X \in \operatorname{mod}\Lambda$. Tomemos $Z|\Omega^{\Phi(X)}(X)$ con $\operatorname{dp} Z < \infty$. Como $\Phi\dim(\mathcal{D}) = 0$, se cumple, por el Teorema 3.2.6, que $0 \leq \Phi(X) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$. Luego, por la Proposición 3.2.1 (e), se sigue que $\operatorname{dp} Z + \Phi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$. Por tanto $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(b) Sea $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ y $D \in \mathcal{D}$. Usando la Proposición 3.2.1 (d), el hecho de que $\Phi\dim(\mathcal{D}) = 0$ y $\Omega(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, tenemos que

$$\operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X \oplus D)) = \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)).$$

Por otro lado, la Proposición 3.2.1 (a) implica que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus D) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$. Luego

$$\begin{aligned}
\Psi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus D) &= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus D) + \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X \oplus D)}(X \oplus D)) \\
&= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X \oplus D)) \\
&= \Phi_{[\mathcal{D}]}(X) + \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(X)}(X)) \\
&= \Psi_{[\mathcal{D}]}(X),
\end{aligned}$$

lo cual demuestra (b).

(c) Sea $D \in \mathcal{D}$. De la Proposición 3.2.1 (a), tenemos que $\Phi_{[\mathcal{D}]}(D) = 0$. Por otro lado, $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$ implica que $\text{fin.dim}\,(\text{add}\, D) = 0$. Finalmente, obtenemos

$$\Psi_{[\mathcal{D}]}(D) = \Phi_{[\mathcal{D}]}(D) + \text{fin.dim}\,(\text{add}\,\Omega^{\Phi_{[\mathcal{D}]}(D)}(D)) = \text{fin.dim}\,(\text{add}\, D) = 0.$$

□

Observación 3.2.8. *Es preciso señalar que, en contraste con el Teorema 3.2.6, la condición adicional $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$ es necesaria en el sentido de que la desigualdad $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X) + \Psi \dim(\mathcal{D})$ no se cumple en general, como puede verse en el siguiente ejemplo. Consideremos el álgebra de caminos $\Lambda := \mathbb{K}Q/F^2$ dada por el siguiente carcaj Q*

$$Q: \qquad 6 \longleftarrow 5 \longleftarrow 4 \longleftarrow 1 \circlearrowleft \longrightarrow 2 \longrightarrow 3,$$

donde F es el ideal de $\mathbb{K}Q$ generado por las flechas de Q.

Sea $\mathcal{D} := \text{add}(\Lambda \oplus S_2)$ y $X := S_1 \oplus S_2 \in \text{mod}\,(\Lambda)$. Usando la definición obtenemos que $\Psi(X) = 3$, mientras que $\Psi_{[\mathcal{D}]}(X) = 1$ y $\Psi \dim(\mathcal{D}) = 1$. Entonces, la desigualdad $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X) + \Psi \dim(\mathcal{D})$ no se cumple. La razón de esto se esconde en la dificultad de poder controlar la dimensión proyectiva de los sumandos directos de sizigias de Λ-módulos con dimensión proyectiva infinita.

El siguiente corolario es una consecuencia de la Proposición 3.2.7.

Corolario 3.2.9. *Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathcal{D} \subseteq \text{mod}\,\Lambda$ una clase IT tal que $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$. Supongamos que existe una s.e.c. $0 \to A \to B \to C \to 0$, donde $A, B \in \mathcal{D}$ y $\text{dp}(C) < \infty$. Entonces $\text{dp}(C) \leq 1$.*

Demostración. Usando [37, Theorem 0.4] tenemos que $\text{dp}(C) \leq \Psi(A \oplus B) + 1$. Aplicando la Proposición 3.2.7 obtenemos que

$$\text{dp}(C) \leq \Psi(A \oplus B) + 1 \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(A \oplus B) + 1 = 1.$$

□

Notemos que los Λ-módulos A y B no solo no tienen por qué ser proyectivos, sino que pudieran incluso tener dimensión proyectiva infinita, pero el hecho de estar en una clase IT con Φ-dimensión cero les da el poder de controlar la dimensión proyectiva de C como si fueran proyectivos. En este momento cabe señalar que a pesar de que la condición sobre la clase IT de tener Φ-dimensión cero es restrictiva, hay clases muy importantes que mencionamos en el Ejemplo 3.1.3, que son $\operatorname{Gproj}\Lambda$ y ${}^{\perp}\Lambda$, que satisfacen esta condición. Una prueba de que $\Phi\dim({}^{\perp}\Lambda) = 0$ (y por tanto $\Phi\dim(\operatorname{Gproj}\Lambda) = 0$) puede verse en [45].

En la siguiente Proposición vemos que se puede decir algo más sobre la relación entre Ψ y $\Psi_{[\mathcal{D}]}$ sin necesidad de imponer condición alguna sobre $\mathcal{D}$.

Proposición 3.2.10. *Sea Λ un álgebra de Artin, $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ una clase IT y $X \in \operatorname{mod}\Lambda$.*

(a) Si X es indescomponible, entonces $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(b) $\Phi(X) \leq \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ si y solo si $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

Demostración. (a) Si $\operatorname{dp}(X) = \infty$, entonces $\Psi(X) = 0$ y la desigualdad es trivial. Si por el contrario $\operatorname{dp}(X) < \infty$, entonces aplicando la Proposición 3.2.1 parte (d) obtenemos que $\Psi(X) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.

(b) Notemos que en general, si $n \leq (<)\ m$, entonces se cumple que

$$(*) \quad \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^n(X)) - \operatorname{fin.dim}(\operatorname{add}\Omega^m(X)) \leq (<)\ m - n.$$

$(\Rightarrow)$ Tomando $n := \Phi(X)$ y $m := \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$, la desigualdad $(*)$ implica directamente que $\Psi(X) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$.
$(\Leftarrow)$ Supongamos lo contrario, o sea que $\Phi(X) > \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$. Si tomamos $n := \Phi_{[\mathcal{D}]}(X)$ y $m := \Phi(X)$ la desigualdad $(*)$ implica que $\Psi(X) > \Psi_{[\mathcal{D}]}(X)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones

Resumen: En este capítulo daremos aplicaciones de la teoría desarrollada en el capítulo anterior. Primeramente presentaremos la definición de álgebra Lat-Igusa-Todorov (LIT), la cual generaliza el concepto de álgebra de Igusa-Todorov dado por J. Wei en [54]. Luego estudiaremos esa clase de álgebras y sus propiedades, en particular en relación con la conjetura finitista. Finalizamos el capítulo dando condiciones para que un álgebra triangular sea de tipo LIT. Como caso particular obtenemos que el producto tensorial de una $\mathbb{K}$-álgebra LIT con el álgebra de caminos dada por un carcaj de tipo Dynkin sin relaciones, es siempre de tipo LIT.

4.1. Álgebras Lat-Igusa-Todorov

La noción de álgebra de Igusa-Todorov (IT) fue introducida por J. Wei en [54] (ver Definición 2.2.2) y ha sido estudiada en buena medida por la aplicación que tiene al problema de la conjetura finitista. Esta definición tiene una fuerte relación con la dimensión de representación, la cual fue definida por M. Auslander en [6] (Ver Capítulo 1, Sección 1.2). Para un álgebra de Artin Λ con dimensión de representación menor o igual a 3, es bien conocido que existe un módulo $V \in \operatorname{mod} \Lambda$ (llamado generador de Auslander) tal que para cada $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ existe una sucesión exacta corta de la forma $0 \to V_1 \to V_0 \to M \to 0$, donde $V_0, V_1 \in \operatorname{add} V$. En su artículo J. Wei da una extensa lista de álgebras que son de tipo IT, entre las cuales se encuentran

- Álgebras con radical cuadrado cero.

- Álgebras monomiales,
- Álgebras especiales biseriales,
- Álgebras inclinadas,
- Álgebras con radical al cubo cero.

A su vez, demuestra una serie de propiedades de las álgebras IT, las cuales hemos resumido en el Capítulo 2. Entre ellas se destaca que las álgebras IT satisfacen la conjetura finitista y en su artículo J. Wei deja abierta la pregunta de si toda álgebra de Artin es de tipo IT. No es hasta el año 2015 que T. Conde en su Tesis de Doctorado [20], basándose en el trabajo de R. Rouquier [48], exhibe una familia de álgebras que no son n-IT para ningún n. Esta familia, que presentamos en la sección 2.2, está compuesta por las álgebras exteriores de espacios vectoriales de dimensión mayor o igual a 3 y Rouquier ya las había usado como ejemplos de álgebras con dimensión de representación (rep.dim) tan grande como se desee. El problema de determinar la rep.dim de álgebras autoinyectivas ha sido muy estudiado, por ejemplo se sabe que las siguientes familias de álgebras autoinyectivas tienen rep.dim menor o igual a 3: las monomiales especiales biseriales, demostrado por S. Schroll en [50], las de tipo salvaje inclinadas y las de tipo euclideano, lo cual fue probado por I. Assem et al. en [5] y [4] respectivamente.

Las álgebras autoinyectivas, a pesar de presentar dificultad en cuanto al tipo de representación, desde el punto de vista de la dimensión finitista son triviales, o sea tienen fin.dim nula. Esto deja en evidencia que la definición de álgebra IT no permite capturar la esencia de la dimensión finitista, puesto que casos tan sencillos como las álgebras autoinyectivas terminan quedando excluidos. En un intento por generalizar la definición de álgebra IT y salvar estas contradicciones, presentamos el concepto de álgebra Lat-Igusa-Todorov (LIT), el cual veremos que no solo generaliza la definición dada por J. Wei, pues por ejemplo las álgebras autoinyectivas son LIT, sino que además probaremos que esta nueva clase de álgebras satisface la conjetura finitista. Más adelante, en el Ejemplo 4.2.5, daremos ejemplos nuevos de álgebras LIT, presentando una familia de álgebras de Artin que no son autoinyectivas, tampoco son de tipo IT, pero sí son de tipo LIT.

Definición 4.1.1. *Sea Λ un álgebra de Artin. Decimos que Λ es n-Lat-Igusa-Todorov (n-LIT), donde n es un entero no negativo, si satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) existe una clase $\mathcal{D}$ de tipo IT, tal que $\Phi \dim (\mathcal{D}) = 0$;

(b) existe $V \in \operatorname{mod}\Lambda$ *con la propiedad de que todo* $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ *admite una s.e.c.*

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Omega^n M \longrightarrow 0,$$

tal que $X_1 = V_1 \oplus D_1$*,* $X_0 = V_0 \oplus D_0$*, con* $V_1, V_0 \in \operatorname{add} V$ *y* $D_1, D_0 \in \mathcal{D}$*.*

En el caso en que queramos especificar cuál es la clase $\mathcal{D}$ *y el* Λ*-módulo* V*, decimos que* Λ *es un álgebra* $(n, V, \mathcal{D})$*-LIT.*

La siguiente observación será usada en la prueba del Teorema 4.2.1.

Observación 4.1.2. *Es posible obtener una clase* $\mathcal{D}$ *como en la parte (a) si partimos de otra clase* $\mathcal{D}'$ *que sea cerrada por sumas directas y sizigias y que* $\Phi\dim(\mathcal{D}') = 0$*. Si tomamos* $\mathcal{D} := \operatorname{add}(\mathcal{D}')$*, esta clase satisface todas las condiciones en (a):*

- *Es inmediato de la definición que* $\mathcal{D} = \operatorname{add}(\mathcal{D})$*.*
- *Sea* $X \in \mathcal{D}$*, entonces existe* $Y \in \mathcal{D}$ *tal que* $X \oplus Y \in \mathcal{D}'$*, luego* $\Omega(X) \oplus \Omega(Y) \in \mathcal{D}'$*, por tanto* $\Omega(X) \in \operatorname{add}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$*, y así obtenemos* $\Omega(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$*.*
- *Finalmente, sean* $X, Y \in \mathcal{D}$ *tales que* $X \oplus Y \in \mathcal{D}'$*. De las propiedades de la función* Φ*, tenemos que* $\Phi(X) \leq \Phi(X \oplus Y) = 0$*, luego* $\Phi\dim(\mathcal{D}) = 0$*.*

A continuación damos algunos ejemplos de álgebras LIT.

Ejemplo 4.1.3. *(1) Si* Λ *es* (n, V)*-IT, entonces es* $(n, V, \{0\})$*-LIT. Este ejemplo muestra que las álgebras IT son todas de tipo LIT.*

(2) Si Λ *es autoinyectiva, entonces se desprende de [34, Theorem 6] que* $\Phi\dim(\operatorname{mod}\Lambda) = 0$*. De esta manera* Λ *es* $(0, 0, \operatorname{mod}\Lambda)$*-LIT. Como las álgebras exteriores son autoinyectivas, la familia de ejemplos de álgebras que no son IT dada por T. Conde, sí son de tipo LIT y esto significa que la clase de las álgebras LIT contiene estrictamente a las álgebras IT.*

(3) Si $\Phi\dim(\operatorname{mod}\Lambda) = 1$*, entonces* Λ *es* $(0, 0, \Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \oplus \operatorname{proj}\Lambda)$*-LIT. En el Ejemplo 3.1.3 parte (6) vimos que* $\mathcal{D} := \Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \oplus \operatorname{proj}\Lambda$ *es una clase IT, por lo que solo nos queda mostrar que tiene* Φ*-dimensión cero. Por un lado es es sencillo ver que* $\Phi\dim(\Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \oplus \operatorname{proj}\Lambda) = \Phi\dim(\Omega(\operatorname{mod}\Lambda))$*. Si aplicamos la Proposición 3.1.4 a la clase* $\mathcal{C} = \operatorname{mod}\Lambda$ *tenemos que* $\Phi\dim(\Omega(\operatorname{mod}\Lambda)) = 0$*. Dado un módulo cualquiera* M*, tenemos la siguiente s.e.c. dada por su resolución proyectiva minimal:* $0 \to \Omega(M) \to P_0^M \to M \to 0$*, donde* $\Omega(M), P_0^M \in \mathcal{D}$*, por tanto quedan verificadas las condiciones de la Definición 4.1.1.*

El siguiente teorema nos dice que las álgebras LIT satisfacen la conjetura finitista, lo cual consolida dicho concepto y eleva el interés por estudiar esta clase de álgebras.

Teorema 4.1.4. *Sea Λ un álgebra $(n, V, \mathcal{D})$-LIT. Entonces*

$$\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(V) + n + 1 < \infty.$$

Demostración. Sea $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ con dimensión proyectiva finita, la idea será usar la Definición 4.1.1 para conseguir una cota uniforme para $\operatorname{dp}(M)$. De la definición de álgebra LIT dada anteriormente tenemos que existe una s.e.c.

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Omega^n M \longrightarrow 0,$$

tal que $X_1 = V_1 \oplus D_1$, $X_0 = V_0 \oplus D_0$, con $V_1, V_0 \in \operatorname{add} V$ y $D_1, D_0 \in \mathcal{D}$. Aplicando [37, Theorem 0.4] sabemos que

$$\operatorname{dp}(\Omega^n M) \leq \Psi(X_1 \oplus X_0) + 1.$$

Del estudio que hicimos de las funciones IT generalizadas en el capítulo pasado tenemos que, por la Proposición 3.2.7 partes (a) y (b), se cumple

$$\Psi(X_1 \oplus X_0) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(X_1 \oplus X_0) = \Psi_{[\mathcal{D}]}(V_1 \oplus V_0).$$

Más aún por la Proposición 3.2.1 parte (g) tenemos que

$$\Psi_{[\mathcal{D}]}(V_1 \oplus V_0) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(V).$$

Uniendo estas tres desigualdades llegamos a que

$$\operatorname{dp}(\Omega^n M) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(V) + 1.$$

Por otro lado es bien conocido que $\operatorname{dp}(M) \leq \operatorname{dp}(\Omega^n M) + n$. Para concluir basta combinar esta desigualdad con la que obtuvimos anteriormente:

$$\operatorname{dp}(M) \leq \operatorname{dp}(\Omega^n M) + n \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(V) + 1 + n.$$

Finalmente hemos conseguido una cota para $\operatorname{dp}(M)$ que es independiente de M, pues solo depende de los parámetros del álgebra LIT. Por tanto

$$\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \Psi_{[\mathcal{D}]}(V) + n + 1.$$

□

A continuación tomamos unas líneas para caracterizar las álgebras LIT para las cuales o bien $\mathcal{D} = \{0\}$ o bien $V = 0$, ya que estos dos son los casos más sencillos. De la primera parte del ejemplo anterior se desprende que un álgebra de Artin Λ es $(n, V, \{0\})$-LIT si y solo si es n-Igusa-Todorov. En otras palabras las álgebras IT se obtienen de las LIT tomando la clase $\mathcal{D}$ que contiene al módulo cero. Si por el contrario $V = 0$, tenemos la siguiente proposición y corolario.

Proposición 4.1.5. *Sea Λ un álgebra de Artin. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Λ *es* $(n, 0, \mathcal{D})$*-LIT.*

(ii) $\exists \mathcal{D}$ *clase IT con* $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$ *tal que* $\operatorname{res.dim}_{\mathcal{D}}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$.

Además, si alguna de las condiciones se satisface, $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) \leq n + 1$.

Demostración. Primeramente, suponiendo que hayamos probado que las condiciones son equivalentes y alguna de ellas se satisface, entonces por el Teorema 4.1.4 tenemos que $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) \leq n + 1$. Demostremos ahora que (i) y (ii) son equivalentes.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Basta probar que $\operatorname{res.dim}_{\mathcal{D}}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$, pero de la definición de álgebra LIT sabemos que para cada $\Omega^n X \in \Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)$ existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \Omega^n X \longrightarrow 0$, donde $D_1, D_0 \in \mathcal{D}$. Luego, se desprende directamente de la definición de res.dim (ver Sección 1.2) que $\operatorname{res.dim}_{\mathcal{D}}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Sea $M \in \operatorname{mod}\Lambda$. Como $\operatorname{res.dim}_{\mathcal{D}}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$, existe una sucesión exacta corta de la forma $0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \Omega^n M \longrightarrow 0$, donde $D_1, D_0 \in \mathcal{D}$. Luego, al ser $\mathcal{D}$ una clase IT con $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$, se desprende de la definición de álgebra LIT que Λ es $(n, 0, \mathcal{D})$-LIT. □

Esta caracterización es útil, en particular debido al siguiente corolario.

Corolario 4.1.6. *Sea Λ un álgebra de Artin tal que* $\operatorname{Gpd}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$, *entonces* Λ *es* $(n, 0, \operatorname{Gproj}\Lambda)$*-LIT. Además,* $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) \leq n + 1$.

Demostración. $\operatorname{Gproj}\Lambda$ es una clase IT con $\Phi \dim(\operatorname{Gproj}\Lambda) = 0$. Además, por definición $\operatorname{res.dim}_{\operatorname{Gproj}\Lambda}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) = \operatorname{Gpd}(\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)) \leq 1$. Para concluir basta observar que bajo estas hipótesis $\operatorname{Gproj}\Lambda$ satisface la condición (ii) de la proposición anterior. □

4.2. Álgebras Triangulares

En esta sección vamos a estudiar bajo qué condiciones un álgebra triangular es de tipo LIT. Concretamente, sean T, U álgebras de Artin y ${}_UM_T$ un U-T-bimódulo, consideramos el álgebra

$$\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix},$$

cuya multiplicación viene dada por el producto usual de matrices. Remitimos al lector al Capítulo 1, Sección 1.3 donde hacemos un recuento de las propiedades sobre las álgebras triangulares que usaremos a continuación. Nuestro objetivo es estudiar bajo qué condiciones sobre T, U y M el álgebra Λ es de tipo LIT. El siguiente teorema nos brinda una respuesta.

Teorema 4.2.1. *Sean T y U álgebras $(n, V_T, \mathcal{D}_T)$-LIT y $(n, V_U, \mathcal{D}_U)$-LIT respectivamente. Sea M proyectivo a izquierda como U-módulo y proyectivo a derecha como T-módulo, tal que $M \otimes_T P$ es indescomponible para todo $P \in \operatorname{proj} T$ indescomponible. Entonces*

(i) El álgebra

$$\Lambda := \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$$

es $(n+1, V_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$-LIT, donde $\mathcal{D}_\Lambda := \operatorname{add}(\Omega(\mathcal{D}_T, 0, 0) \oplus (0, \mathcal{D}_U, 0))$ y $V_\Lambda := \Omega(V_T, V_U, 0) \oplus \Lambda$.

(ii) $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

Demostración. Primeramente señalamos que no hay pérdida de generalidad en asumir que tanto T como U son n-LIT pues en el caso en que sean k-LIT y m-LIT, se pueden considerar como $n := \max\{k, m\}$-LIT. Además, la parte (ii) se sigue inmediatamente de (i) y del Teorema 4.1.4.
Para probar la parte (i), tenemos que mostrar que la clase $\mathcal{D}_\Lambda$ satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición 4.1.1. Primero verificaremos las condiciones en (a) y posteriormente las de (b).

Parte (a): Comenzamos haciendo la siguiente observación: la clase $\mathcal{D}_\Lambda$ está definida como $\operatorname{add}(\mathcal{D}'_\Lambda)$, donde $\mathcal{D}'_\Lambda = \Omega(\mathcal{D}_T, 0, 0) \oplus (0, \mathcal{D}_U, 0)$. Usando la Observación 4.1.2 bastaría probar que $\mathcal{D}'_\Lambda$ es cerrada por sumas directas y sizigias y que $\Phi \dim(\mathcal{D}'_\Lambda) = 0$.

Es claro que $\mathcal{D}'_\Lambda$ es cerrada por sumas directas. Veamos que también es cerrada por sizigias, sea $\Omega(A,0,0) \oplus (0,B,0) \in \Omega(\mathcal{D}_T,0,0) \oplus (0,\mathcal{D}_U,0)$. Usando el Lema 1.3.6 y la Observación 1.3.7 tenemos que

$$\begin{aligned}\Omega\left(\Omega(A,0,0) \oplus (0,B,0)\right) &= \Omega(\Omega(A), M \otimes P_0^A, 1 \otimes i_1) \oplus (0,\Omega(B),0)\\ &= \Omega(\Omega(A),0,0) \oplus (0,\Omega(B),0).\end{aligned}$$

Este último término pertenece a $\mathcal{D}_\Lambda$ porque tanto $\mathcal{D}_T$ como $\mathcal{D}_U$ son cerradas por sizigias.

Ahora probaremos que $\Phi \dim(\mathcal{D}'_\Lambda) = 0$, lo cual es un poco más complicado.
Sea $\mathcal{M} = \Omega(A,0,0) \oplus (0,B,0)$ un módulo cualquiera en $\mathcal{D}'_\Lambda$, lo que vamos a hacer es calcular directamente el valor de $\Phi(\mathcal{M})$. Primero necesitamos una descomposición para $\mathcal{M}$ en suma directa de módulos indescomponibles y para obtenerla vamos a descomponer cada uno de los dos sumandos de $\mathcal{M}$. Es fácil ver que una tal descomposición para $(0,B,0)$ se obtiene directamente de la descomposición en indescomponibles de B en $\operatorname{mod} U$, pues si dicha descomposición es $B = \oplus_{j=1}^m B_j$, entonces

$$(0,B,0) = \bigoplus_{j=1}^m (0,B_j,0),$$

donde para cada $j = 1, \cdots m$, $(0,B_j,0)$ es indescomponible en $\operatorname{mod}\Lambda$ porque B_j es indescomponible en $\operatorname{mod} U$.
Por otra parte, $\Omega(A,0,0) = (\Omega A, M \otimes_T P_0^A, 1 \otimes i_1)$ y además si $A = \oplus_{k=1}^n A_k$ como suma de T-módulos indescomponibles, se tiene que

$$(\Omega A, M \otimes_T P_0^A, 1 \otimes i_1) = \bigoplus_{k=1}^n (\Omega A_k, M \otimes_T P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1).$$

Podemos de hecho probar que cada sumando de los que aparece en la descomposición anterior es indescomponible. Supongamos lo contrario, podremos entonces encontrar un $k \in [1,n]$ tal que $(\Omega A_k, M \otimes_T P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) = (X,Q,j) \oplus (X',Q',j')$. Puesto que $M \otimes_T P$ es indescomponible para todo $P \in \operatorname{mod} T$ indescomponible y proyectivo, tenemos que Q y Q' son de la forma $M \otimes_T P_1$ y $M \otimes_T P_2$, donde $P_1 \oplus P_2 = P_0^{A_k}$.
Más aún, el mapa $j : M \otimes_T X \to M \otimes_T P_1$ tiene que ser la restricción de $1 \otimes i_1$, luego $j = 1 \otimes j_1$ y $j' = 1 \otimes j_2$, donde $j_1 : X \to P_1$ y $j_2 : X' \longrightarrow P_2$ son inclusiones. De esta manera el mapa $i_1 : \Omega A \to P_0^{A_k}$ puede descomponerse de forma diagonal como $\begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{pmatrix} : X \oplus X' \to P_1 \oplus P_2$. Por la unicidad del cokernel,

tenemos que $A_k \cong Coker\, j_1 \oplus Coker\, j_2$ y como A_k es indescomponible, uno de los sumandos tiene que ser nulo. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $Coker\, j_2 = 0$, luego $X' \cong P_2$, pero esto contradice la minimalidad de la cubierta proyectiva de A_k, salvo que $X' = P_2 = 0$. Esto nos permite concluir que en la descomposición $(\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) = (X, Q, j) \oplus (X', Q', j')$, uno de los sumandos tiene que ser nulo, por tanto $(\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1)$ es indescomponible.

Tenemos así una descomposición para $\mathcal{M}$ en sumandos directos indescomponibles:

$$\mathcal{M} = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} (0, B_j, 0) \right).$$

Ahora procedemos a calcular el rango del grupo $\langle \mathcal{M} \rangle$, el cual es el grupo abeliano libre que tiene por base el conjunto de clases de isomorfismo de módulos indescomponibles, no proyectivos que son sumandos directos de $\mathcal{M}$. Para poder hallar dicho rango primero observamos que si un sumando indescomponible de la forma $(\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1)$ es isomorfo a uno de la forma $(0, B_j, 0)$, esto significa que ambos son proyectivos en $\operatorname{mod} \Lambda$, por lo tanto

$$rk \left\langle \mathcal{M} \right\rangle = rk \left\langle \bigoplus_{k=1}^{n} (\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) \right\rangle + rk \left\langle B \right\rangle.$$

Otra observación relevante es que si $\Omega A_k \cong \Omega A_l$, entonces se tiene que $(\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) \cong (\Omega A_l, M \otimes P_0^{A_l}, 1 \otimes i_1)$. Veamos por qué esto se cumple. Como $A \in \mathcal{D}_T$, tenemos que si $\Omega A_k \cong \Omega A_l$, entonces $A_k \cong A_l$, porque si no fuese así tendríamos que $\Phi(A_k \oplus A_l) \geq 1$, lo cual es imposible. Luego, por la unicidad de la cubierta proyectiva obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega A_k \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & P_0^{A_k} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & A_k \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega A_l \arrow[r] & P_0^{A_l} \arrow[r] & A_l \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $M \otimes_T -$, el cual es exacto pues M es proyectivo, llegamos a este otro diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \otimes_T \Omega A_k \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\simeq"] & M \otimes_T P_0^{A_k} \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\simeq"] & M \otimes_T A_k \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes_T \Omega A_l \arrow[r] & M \otimes_T P_0^{A_l} \arrow[r] & M \otimes_T A_l \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Del cuadrado de la izquierda obtenemos que $(\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) \cong (\Omega A_l, M \otimes P_0^{A_l}, 1 \otimes i_1)$.
En conclusión:

$$\begin{aligned} rk\,\langle \mathcal{M} \rangle &= rk \left\langle \bigoplus_{k=1}^{n} (\Omega A_k, M \otimes P_0^{A_k}, 1 \otimes i_1) \right\rangle + rk\,\langle B \rangle \\ &= rk\,\langle \Omega A_1, \ldots, \Omega A_n \rangle + rk\,\langle B \rangle \\ &= rkL(\langle A \rangle) + rk\,\langle B \rangle \\ &= rk\,\langle A \rangle + rk\,\langle B \rangle \,. \end{aligned}$$

Es más, por la forma que tienen las sizigias en $\operatorname{mod} \Lambda$, inductivamente obtenemos las siguientes igualdades para cada $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} rk\,L^n(\langle \mathcal{M} \rangle) &= rk\,\left\langle \Omega^{n+1} A_1, \ldots, \Omega^{n+1} A_n \right\rangle + rk\,L^n(\langle B \rangle) \\ &= rkL^{n+1}(\langle A \rangle) + rkL^n(\langle B \rangle) \\ &= rk\,\langle A \rangle + rk\,\langle B \rangle \,. \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores implican que $\Phi(\mathcal{M}) = 0$ y con esto concluye la parte de la prueba dedicada a demostrar la parte (a) de la Definición 4.1.1.

Parte (b):
La idea para esta parte de la prueba es obtener sucesiones exactas cortas para cada sumando de $\Omega^n(A, B, f)$ de manera que, al combinarlas, podamos obtener la secuencia deseada para que se cumpla (b).

Como T y U son álgebras n-LIT, existen sucesiones exactas cortas como las que siguen:

$$0 \longrightarrow D_1 \oplus V_1 \xrightarrow{\alpha} D_0 \oplus V_0 \xrightarrow{\beta} \Omega^n(A) \longrightarrow 0\,,$$

donde $D_1, D_0 \in \mathcal{D}_T,\ V_1, V_0 \in \operatorname{add}(V_T)$.

$$0 \longrightarrow D_1' \oplus V_1' \xrightarrow{\alpha'} D_0' \oplus V_0' \xrightarrow{\beta'} \Omega^n(B) \longrightarrow 0\,,$$

donde $D_1', D_0' \in \mathcal{D}_U,\ V_1', V_0' \in \operatorname{add}(V_U)$.

Puesto que M_T es plano (es de hecho proyectivo), induce el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \otimes_T (D_1 \oplus V_1) \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "0"] & M \otimes_T (D_0 \oplus V_0) \arrow[r, "1\otimes\beta"] \arrow[d, "1\otimes i_n \circ \beta"] & M \otimes_T \Omega^n(A) \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes i_n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & M \otimes_T P_{n-1}^A \arrow[r, "id"] & M \otimes_T P_{n-1}^A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De este diagrama puede obtenerse la siguiente sucesión exacta corta en $\operatorname{mod}\Lambda$:

$$(D_1 \oplus V_1, 0, 0) \xhookrightarrow{(\alpha,0)} (D_0 \oplus V_0, M \otimes_T P^A_{n-1}, 1 \otimes i_n \circ \beta) \xrightarrow{(\beta,id)} (\Omega^n(A), M \otimes_T P^A_{n-1}, 1 \otimes i_n)$$

De una manera más directa, se puede obtener otra sucesión para el segundo sumando de $\Omega^n(A, B, f)$:

$$(0, D'_1 \oplus V'_1, 0) \xhookrightarrow{(0,\alpha')} (0, D'_0 \oplus V'_0, 0) \xrightarrow{(0,\beta')} (0, \Omega^n(B), 0)\ .$$

Podemos combinar las dos secuencias obtenidas mediante sumas directas y así obtener la siguiente sucesión:

$$\delta : \quad X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow \Omega^n(A, B, f)\ ,$$

donde $X = (D_1 \oplus V_1, D'_1 \oplus V'_1, 0)$, $Y = (D_0 \oplus V_0, M \otimes_T P^A_{n-1}, 1 \otimes i_n \circ \beta) \oplus (0, D'_0 \oplus V'_0, 0)$.

Ahora tomemos esta secuencia δ y apliquémosle el Lema de la Herradura:

$$\Omega(X) \hookrightarrow \Omega(Y) \oplus Q \twoheadrightarrow \Omega^{n+1}(A, B, f)\ , \tag{4.1}$$

donde $\Omega(X) = \Omega(D_1, D'_1, 0) \oplus \Omega(V_1, V'_1, 0)$, $\Omega(Y) = \Omega(D_0, D'_0, 0) \oplus \Omega(V_0, V'_0, 0)$ y $Q \in \operatorname{proj}\Lambda$.

Por definición hemos probado que el álgebra Λ es $(n+1, V_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$-LIT, donde $\mathcal{D}_\Lambda = \operatorname{add}(\Omega(\mathcal{D}_T, 0, 0) \oplus (0, \mathcal{D}_U, 0))$ y $V_\Lambda = \Omega(V_T, V_U, 0) \oplus \Lambda$. □

Observación 4.2.2. *(1) Más adelante usaremos la sucesión 4.1 en una proposición con hipótesis distintas a las del teorema que acabamos de probar. Es preciso aclarar entonces que para obtener dicha sucesión solo se necesita que T, U sean LIT y que M_T sea plano.*

(2) El teorema que acabamos de probar tiene una versión para álgebras triangulares superiores. Si $\Lambda = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & U \end{pmatrix}$ es sencillo ver que esta álgebra es isomorfa a $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ y podemos aplicarle el Teorema 4.2.1.

Ahora daremos algunos ejemplos que evidencian la importancia del teorema anterior. Luego probaremos una proposición semejante a dicho teorema, pero debilitando un poco las hipótesis.

Ejemplo 4.2.3. *(Extensión por un punto)*
Sea U una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y M un U-módulo indescomponible proyectivo. Entonces la extensión por un punto

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$$

es LIT. Las condiciones sobre M para poder aplicar el Teorema 4.2.1 se satisfacen en este caso, pues el único $\mathbb{K}$-módulo proyectivo indescomponible es $\mathbb{K}$ y $M \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \cong M$, el cual es indescomponible.

Ejemplo 4.2.4. *Sea T un álgebra LIT, entonces*

$$\Lambda := \begin{pmatrix} T & 0 \\ T & T \end{pmatrix}$$

es LIT. Aquí consideramos $M := T$ con la estructura natural de bimódulo. Para cualquier T-módulo P proyectivo indescomponible, tenemos $M \otimes_T P = T \otimes_T P \cong P$, por lo que podemos aplicar el Teorema 4.2.1. Es oportuno señalar que M no necesita ser indescomponible para que satisfaga las hipótesis del teorema.

Ejemplo 4.2.5. *Sea T un álgebra LIT que no sea de tipo Igusa-Todorov (por ejemplo si es el álgebra exterior de un espacio vectorial de dimensión ≥ 3). Entonces el álgebra*

$$\Lambda := \begin{pmatrix} T & 0 \\ T & T \end{pmatrix}$$

es LIT. Este es un caso particular del ejemplo anterior, sin embargo es importante destacarlo porque ofrece una familia de álgebras que no son autoinyectivas y tampoco son IT [15, Theorem 4.5], pero sí son de tipo LIT. Más aún, como consecuencia de [54, Proposition 3.1], tenemos que $\mathrm{rep.dim}(\Lambda) \geq 4$.

La proposición siguiente constituye una versión del Teorema 4.2.1 en la que hemos eliminado la hipótesis que pedía que $M \otimes_T P$ fuese indescomponible para todo $P \in \operatorname{proj} T$ indescomponible. Sin embargo, sólo lo hemos conseguido para el caso en que T es un álgebra (n, V_T)-Igusa-Todorov y no un álgebra LIT cualquiera. No obstante, esta restricción sobre T aún incluye, entre otros, el caso en que T es un cuerpo, el caso en que T tiene dimensión global finita, así como el caso en que T es sizigia finita.

Proposición 4.2.6. *Sea T un álgebra (n, V_T)-Igusa-Todorov y U un álgebra $(n, V_U, \mathcal{D}_U)$-LIT. Sea ${}_UM_T$ un U-módulo proyectivo a izquierda y un T-módulo proyectivo a derecha. Entonces* *(i) El álgebra*

$$\Lambda := \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$$

es $(n+1, V_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$*-LIT, donde* $\mathcal{D}_\Lambda = (0, \mathcal{D}_U, 0), V_\Lambda = \Omega(V_T, V_U, 0) \oplus \Lambda$.

(ii) $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

Demostración. Primeramente señalamos que si T es (n, V_T)-Igusa-Todorov, entonces T es $(n, \{0\}, V_T)$-LIT. Al igual que en la prueba del Teorema 4.2.1, no hay pérdida de generalidad en tomar el mismo entero n. Además, la parte (ii) se sigue inmediatamente de (i) y del Teorema 4.1.4.

En lo que sigue verificaremos las condiciones en la Definición 4.1.1. La parte (a) solamente involucra la clase $\mathcal{D}_\Lambda = (0, \mathcal{D}_U, 0)$, la cual es claramente una clase IT y además $\Phi\dim(\mathcal{D}_\Lambda) = \Phi\dim(\mathcal{D}_U) = 0$. Justamente porque no aparece nada en la primera componente de los módulos en $\mathcal{D}_\Lambda$ (pues $\mathcal{D}_T = \{0\}$) es que podemos prescindir de la condición adicional sobre M en este caso. Luego, lo que nos queda por probar es la parte (b) y para eso vamos a usar la sucesión exacta corta 4.1. Esto es posible porque las hipótesis necesarias para obtenerla aún se satisfacen (ver Observación 4.2.2). Dicha sucesión adquiere la forma

$$\Omega(X) \hookrightarrow \Omega(Y) \oplus Q \twoheadrightarrow \Omega^{n+1}(A, B, f)\ ,$$

donde $\Omega(X) = \Omega(0, D'_1, 0) \oplus \Omega(V_1, V'_1, 0)$, $\Omega(Y) = \Omega(0, D'_0, 0) \oplus \Omega(V_0, V'_0, 0)$ y $Q \in \operatorname{proj}\Lambda$.
Acá observamos que $D'_1, D'_0 \in \mathcal{D}_U$, $V_1, V_0 \in \operatorname{add} V_T$ y $V'_1, V'_0 \in \operatorname{add} V_U$, por tanto esta misma secuencia sirve para mostrar que la parte (b) se cumple. □

4.3. Aplicaciones del Teorema 4.2.1

Comenzamos esta sección viendo un par de corolarios que nos permiten construir nuevas álgebras LIT a partir de álgebras conocidas usando el Teorema 4.2.1.

Corolario 4.3.1. *Sean T y U álgebras LIT. Sea M' un T-módulo proyectivo a derecha y un U-módulo proyectivo a izquierda tal que $M' \otimes_T P$ es indescomponible para todo $P \in \operatorname{proj} T$ indescomponible. Entonces*

(i) El álgebra triangular $\Lambda_1 = \left(\begin{array}{cc|c} T & 0 & 0 \\ M' & U & 0 \\ \hline M' & U & U \end{array}\right)$ *es LIT.*

(ii) El álgebra triangular $\Lambda_2 = \left(\begin{array}{cc|c} T & 0 & 0 \\ M' & U & U \\ \hline 0 & 0 & U \end{array}\right)$ *es LIT.*

Demostración. Primeramente afirmamos que $\Gamma := \begin{pmatrix} T & 0 \\ M' & U \end{pmatrix}$ es LIT pues es un álgebra triangular que satisface las hipótesis del Teorema 4.2.1. Otra observación necesaria es que Λ_1 y Λ_2 están bien definidas porque $M_1 = (M'\, U)$ es un Γ-módulo a derecha y un U-módulo a izquierda y por su parte $M_2 = (0\ U)^t$ es un Γ-módulo a izquierda y un U-módulo a derecha. Más aún, debido a cómo están definidos, tanto M_1 como M_2 son proyectivos a derecha e izquierda con sus respectivas estructuras de módulo.
Veamos la prueba de (i). Para poder aplicar el Teorema 4.2.1 a Λ_1 necesitamos solamente probar la condición adicional sobre M_1, o sea que dado $Q \in \operatorname{proj}\Gamma$ indescomponible, $M_1 \otimes_\Gamma Q$ es indescomponible como U-módulo a izquierda. Primero observamos que se tiene el siguiente isomorfismo $M_1 \otimes_\Gamma Q \simeq e_2 \cdot Q$ como U-módulos a izquierda. Por otro lado Q es proyectivo indescomponible sobre Γ, la cual es un álgebra triangular, luego Q puede verse como un trío de la forma $(e_1 \cdot Q, e_2 \cdot Q, f)$. Además sabemos que los proyectivos indescomponibles son de la forma $(P_1, M' \otimes_T P_1, 1 \otimes 1)$ o $(0, P_2, 0)$, donde tanto P_1 como P_2 son proyectivos indescomponibles en $\operatorname{mod} T$ y $\operatorname{mod} U$ respectivamente. En cualquiera de los dos casos el término del medio, que coincide con $e_2 \cdot Q$, es indescomponible y con esto podemos aplicar el Teorema 4.2.1 y concluimos que Λ_1 es LIT.
Para probar (ii) vamos de igual manera a recurrir al Teorema 4.2.1. Para ello tenemos que demostrar que M_2 satisface las hipótesis. Sea entonces $L \in \operatorname{proj} U$ indescomponible, entonces $M_2 \otimes_U L$ visto como módulo sobre Γ no es más que la terna $(0, L, 0)$ la cual claramente corresponde a un módulo indescomponible. De esta forma se cumplen todas las hipótesis necesarias y podemos afirmar que Λ_2 es LIT. □

Corolario 4.3.2. *Sean T y U álgebras LIT. Sea M' un U-módulo proyectivo a derecha y un T-módulo proyectivo a izquierda tal que $M' \otimes_U P$ es indescomponible para todo $P \in \operatorname{proj} U$ indescomponible. Entonces*

(i) El álgebra triangular $\Lambda_1 = \left(\begin{array}{cc|c} T & M' & M' \\ 0 & U & U \\ \hline 0 & 0 & U \end{array}\right)$ *es LIT.*

(ii) El álgebra triangular $\Lambda_2 = \left(\begin{array}{cc|c} T & M' & 0 \\ 0 & U & 0 \\ \hline 0 & U & U \end{array}\right)$ *es LIT.*

Demostración. Primeramente afirmamos que $\Gamma := \begin{pmatrix} T & M' \\ 0 & U \end{pmatrix}$ es LIT pues es un álgebra triangular que satisface las hipótesis del Teorema 4.2.1. Otra observación necesaria es que Λ_1 y Λ_2 están bien definidas porque $M_1 := (M'\ U)^t$ es un Γ-módulo a izquierda y un U-módulo a derecha, mientras que $M_2 := (0\ U)$ es un Γ-módulo a derecha y un U-módulo a izquierda. Más aún, por construcción, son proyectivos de ambos lados con sus respectivas estructuras de módulo.
Veamos la prueba de (i). Para poder aplicar el Teorema 4.2.1 al álgebra Λ_1 necesitamos solamente probar la condición adicional sobre M_1, o sea que dado $Q \in \operatorname{proj} U$ indescomponible, $M_1 \otimes_U Q$ es indescomponible como Γ-módulo a izquierda. Primero observamos que $M_1 \otimes_U Q$ es un módulo sobre Γ, la cual es un álgebra triangular, luego ese módulo puede verse como un trío de la forma $(e_1 \cdot M_1 \otimes_U Q, e_2 \cdot M_1 \otimes_U Q, f)$. Haciendo las cuentas vemos que se tienen los siguientes isomorfismos en $\operatorname{mod} T$ y $\operatorname{mod} U$ respectivamente: $e_1 \cdot M_1 \otimes_U Q \simeq M' \otimes_U Q$ y $e_2 \cdot M_1 \otimes_U Q \simeq Q$. El mapa $f : M' \otimes_U Q \to M' \otimes_U Q$ es la identidad y con esto queda probado que el trío que corresponde a $M_1 \otimes_U Q$ es indescomponible y podemos aplicar el Teorema 4.2.1 para concluir que Λ_1 es LIT.
Para demostrar (ii) seguiremos la misma idea. Sea entonces $L \in \operatorname{proj} \Gamma$ indescomponible. Usando que $M_2 = e_2 \cdot \Gamma$, obtenemos que $M_2 \otimes_\Gamma L \simeq e_2 \cdot L$. Como L es proyectivo indescomponible y M' satisface que $M' \otimes_U P$ es indescomponible para todo $P \in \operatorname{proj} U$ indescomponible, se tiene que $e_2 \cdot L$ es indescomponible, pues aparece en la segunda componente de L vista como una terna y cada una de dichas componentes es indescomponible. De esta manera podemos aplicar el Teorema 4.2.1 para concluir que Λ_2 es LIT. □

En este momento vamos a usar los corolarios anteriores para generalizar el Ejemplo 4.2.4. Sea T un álgebra LIT, entonces podemos afirmar que, dado $n \geq 1$, el álgebra

$$B_n := \begin{pmatrix} T & 0 & \cdots & 0 \\ T & T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T & T & \cdots & T \end{pmatrix}$$

es de tipo LIT.

Notemos que para $n = 1$ es trivial y para $n = 2$ es el Ejemplo 4.2.4. Para $n > 2$ basta aplicar consecutivamente el Corolario 4.3.1 partiendo del álgebra B_2. Con esto obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.3. *Sea T un álgebra LIT, entonces el álgebra triangular B_n es LIT para todo $n \geq 1$.*

De manera similar si tenemos un álgebra triangular superior de la forma

$$B'_n := \begin{pmatrix} T & T & \cdots & T \\ 0 & T & \cdots & T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T \end{pmatrix},$$

usando el Corolario 4.3.2 tenemos un resultado análogo para estas álgebras.

Proposición 4.3.4. *Sea T un álgebra LIT, entonces el álgebra triangular B'_n es LIT para todo $n \geq 1$.*

4.3.1. Productos Tensoriales

En esta subsección nos vamos a dedicar a estudiar ciertos productos tensoriales entre álgebras LIT. Esta idea viene motivada fundamentalmente por el trabajo de E. Hanson y K. Igusa en [30], donde encuentran un álgebra que tiene Φ-dimensión infinita. El ejemplo es como sigue, sean los carcajes

$$Q: \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \\ & 1 \arrow[uu] & \end{tikzcd} \qquad C_3: \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 3 \arrow[rr] & & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

y definamos las álgebras $T := \frac{\mathbb{K}Q}{\mathrm{rad}^2 \mathbb{K}Q}$ y $U := \frac{\mathbb{K}C_3}{\mathrm{rad}^2 \mathbb{K}C_3}$.

Teorema 4.3.5. *[30] $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} U$ tiene Φ-dimensión infinita.*

Sin embargo, un aspecto que resulta interesante es que ambas álgebras T y U son de tipo LIT y el producto tensorial de ellas también puede verse que es LIT (es de hecho IT) porque cumple que $\mathrm{rad}^3 \Lambda = 0$ [54, Corollary 3.5]. Esto implica que, a pesar de tener Φ-dimensión infinita, la dimensión finitista es finita.

En lo que sigue vamos a trabajar con $\mathbb{K}$-álgebras, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Nuestro objetivo es estudiar el problema que consiste en determinar si el producto de dos $\mathbb{K}$-álgebras de tipo LIT es también LIT. A continuación brindamos una serie de resultados que dan una respuesta positiva, pero solo para el caso del producto tensorial de un álgebra LIT con un álgebra de caminos sin relaciones definida mediante un carcaj de tipo Dynkin.

Comenzamos con la siguiente proposición, pero antes observamos que si T es una $\mathbb{K}$-álgebra y Q es un carcaj de Dynkin. El álgebra $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ puede verse como un álgebra de matrices cuadradas de tamaño $|Q_0|$ de la siguiente forma: $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q \simeq (T_{i,j})$, donde $T_{i,j} = T$ si hay una flecha de j en i y $T_{i,j} = 0$ en otro caso.

Proposición 4.3.6. *Sean T una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$, donde Q es un carcaj de la forma $1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} \cdots \frac{\quad}{} n$. Entonces se cumple lo siguiente*

(i) El álgebra Λ es o bien de la forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} U' & M' \\ 0 & T \end{pmatrix}$, donde U, U', M y M' son como en las hipótesis del Teorema 4.2.1.

(ii) Λ es LIT.

Demostración. Vamos a hacer la prueba de (i), pues de aquí se deduce directamente la parte (ii) usando el Teorema 4.2.1. La idea para la prueba es usar inducción en el número de vértices n. Si $n = 2$ el resultado sale directamente de las Proposiciones 4.3.3 y 4.3.4. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, tenemos entonces dos posibilidades:

Caso 1: El carcaj truncado en el vértice $n - 1$ es de la forma

$$1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} \cdots \longrightarrow n-1 \, .$$

En este caso el álgebra que se obtiene tensorizando T con el álgebra de caminos de este carcaj puede verse como un álgebra de matrices de la forma $\begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ \tilde{M} & T \end{pmatrix}$. Por la hipótesis de inducción sabemos que esta álgebra triangular es LIT pues satisface las hipótesis del Teorema 4.2.1. Más aún por el Corolario 4.3.1 tenemos que las álgebras:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \tilde{U} & 0 & 0 \\ \tilde{M} & T & 0 \\ \hline \tilde{M} & T & T \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{U} & 0 & 0 \\ \tilde{M} & T & T \\ \hline 0 & 0 & T \end{array}\right)$$

son LIT. Para finalizar observamos que la primera de las álgebras anteriores es isomorfa al producto tensorial de T con el álgebra de caminos de un carcaj de la forma

$$1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n \, ,$$

mientras que la segunda corresponde a un carcaj de la forma

$$1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} \cdots \longrightarrow n-1 \longleftarrow n \, .$$

De esta manera hemos probado que si $Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[r, dash] & n \end{tikzcd}$, entonces $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es LIT.

Caso 2: Análogo al caso 1 pero aplicando esta vez el Corolario 4.3.2. □

Continuemos con el siguiente lema.

Lema 4.3.7. *Sean T una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es de la forma*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dash] & & \\ & 2 \arrow[r, dash] & 4. \\ 3 \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

Entonces se cumple lo siguiente

(i) El álgebra Λ es o bien de la forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} U' & M' \\ 0 & T \end{pmatrix}$, donde U, U', M y M' son como en las hipótesis del Teorema 4.2.1.

(ii) Λ es LIT.

Demostración. Caso 1: El carcaj es de la forma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dash] & & \\ & 2 \arrow[r] & 4 \\ 3 \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

y lo denotamos por $\mathbb{D}_4^r$.

Caso 2: El carcaj es de la forma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dash] & & \\ & 2 & 4 \arrow[l] \\ 3 \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

y lo denotamos por $\mathbb{D}_4^l$.

Vamos a probar solo el caso 1, pues el segundo se prueba de manera análoga. Primeramente observamos que el álgebra $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\mathbb{D}_4^r$ puede verse como un álgebra triangular de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} T & T_{12} & T_{13} & 0 \\ T_{21} & T & T_{23} & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T & 0 \\ \hline T_{21} & T & T_{23} & T \end{array}\right)$$

Acá vamos a dividir nuevamente en dos casos: $T_{32} = T$ o $T_{23} = T$, en otras palabras o bien hay una flecha del vértice 2 al 3 o en caso contrario habrá una de 3 a 2. Vamos a demostrar solo el caso $T_{32} = T$, pues el otro se prueba de manera similar.

<u>Caso $T_{32} = T$:</u> Lo que estamos diciendo es que hay una flecha del vértice 2 al 3, por tanto el álgebra toma la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} T & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T & 0 & 0 \\ T_{21} & T & T & 0 \\ \hline T_{21} & T & 0 & T \end{array}\right)$$

Denotemos por B al álgebra triangular en la esquina superior izquierda y por C al álgebra triangular en la esquina superior izquierda de B, o sea

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} T & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T & 0 \\ \hline T_{21} & T & T \end{array}\right) \quad y \quad C = \begin{pmatrix} T & T_{12} \\ T_{21} & T \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que $M := (T_{21}\ T\ 0) = e_2 B$, donde $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
De esta manera vemos que M es proyectivo como B-módulo a derecha. Como T-módulo a izquierda es libre por tanto también proyectivo. Sea $Q \in \operatorname{proj} B$ indescomponible. Por un lado $M \otimes_B Q \simeq e_2 Q$, por otro lado Q se representa por una terna de la forma $((e_1 + e_2)Q, e_3 Q, f)$, que al ser proyectivo indescomponible sabemos que se escribe o bien como $(0, P, 0)$ con $P \in \operatorname{proj} T$ indescomponible o como $(L, N \otimes_C L, g)$, donde $L \in \operatorname{proj} C$ es indescomponible. De aquí vemos que $(e_1 + e_2)Q$ es proyectivo indescomponible como C-módulo. Viendo C como un álgebra triangular concluimos mediante el mismo razonamiento anterior que $e_2 Q$ es indescomponible como T-módulo. Hemos obtenido así las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 4.2.1 y

concluir que el álgebra

$$\left(\begin{array}{ccc|c} T & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T & 0 & 0 \\ T_{21} & T & T & 0 \\ \hline T_{21} & T & 0 & T \end{array}\right)$$

es LIT.

$\square$

Proposición 4.3.8. *Sean T una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es de la forma*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dash] & & & \\ & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n, \; n \geq 4. \\ 3 \arrow[ur, dash] & & & \end{tikzcd}$$

Entonces se cumple lo siguiente

(i) El álgebra Λ es o bien de la forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} U' & M' \\ 0 & T \end{pmatrix}$, donde U, U', M y M' son como en las hipótesis del Teorema 4.2.1.

(ii) Λ es LIT.

Demostración. Al igual que en la Proposición 4.3.6, basta con probar (i), pues la parte (ii) sale directamente usando el Teorema 4.2.1. Vamos a hacer la prueba por inducción en n. El caso base es $n = 4$, pues si $n < 4$ el carcaj es de tipo $\mathbb{A}$ y ya lo estudiamos, luego usando el Lema 4.3.7 tenemos que el caso base se cumple. Supongamos que el resultado vale para $n - 1$ vértices y demostremos para n.

Usando una idea análoga a la usada en la prueba de la Proposición 4.3.6, vamos a considerar el carcaj truncado en el vértice $n - 1$ y dividamos el análisis en dos casos:

<u>Caso 1:</u> El carcaj es de la forma $\mathbb{D}^r_{n-1}$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, dash] & & & \\ & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & n - 1 \\ 3 \arrow[ur, dash] & & & \end{tikzcd}$$

<u>Caso 2:</u> El carcaj es de la forma $\mathbb{D}^l_{n-1}$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr, dash] & & & \\
& 2 \arrow[r, dash] & \cdots & n-1 \arrow[l] \\
3 \arrow[ur, dash] & & &
\end{tikzcd}$$

También acá basta con probar uno de los dos casos y para variar vamos a probar el caso 2. Como no hay flechas llegando al vértice $n-1$, tenemos que

$$T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\mathbb{D}^l_{n-1} \simeq \left(\begin{array}{cccc|c} T & \cdots & T_{1,n-2} & & T_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n-2,1} & \cdots & T & & T \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & T \end{array}\right).$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que las álgebras y el módulo que componen esta álgebra triangular satisfacen las hipótesis del Teorema 4.2.1, por tanto $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}\mathbb{D}^l_{n-1}$ es LIT. Más aún, aplicando el Corolario 4.3.2 tenemos que las álgebras siguientes son LIT:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} T & \cdots & T_{1,n-2} & T_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n-2,1} & \cdots & T & T & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & T & T \end{array}\right) \quad \text{y}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} T & \cdots & T_{1,n-2} & T_{1,n-1} & T_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n-2,1} & \cdots & T & T & T \\ 0 & \cdots & 0 & T & T \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & T \end{array}\right).$$

Para finalizar debemos notar que la primer álgebra se corresponde con el producto tensorial de T con el álgebra de caminos definida por el carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr, dash] & & & & \\
& 2 \arrow[r, dash] & \cdots & n-1 \arrow[l] \arrow[r] & n, \\
3 \arrow[ur, dash] & & & &
\end{tikzcd}$$

mientras que la segunda se corresponde con el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 & & & & \\
& 2 \arrow[ul, no head] \arrow[dl, no head] \arrow[r, no head] & \cdots & n-1 \arrow[l] & n. \arrow[l] \\
3 & & & &
\end{tikzcd}$$

En conclusión hemos probado que al hacer el producto tensorial de T con el álgebra de caminos de un carcaj de la forma

$$\begin{tikzcd}
1 & & & & \\
& 2 \arrow[ul, no head] \arrow[dl, no head] \arrow[r, no head] & \cdots & n-1 \arrow[l] \arrow[r, no head] & n, \\
3 & & & &
\end{tikzcd}$$

se obtiene un álgebra con las características buscadas. De manera análoga se prueba para el caso 1. $\square$

Hasta aquí hemos logrado probar que si T es una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y Q un carcaj de tipo $\mathbb{A}$ o $\mathbb{D}$, entonces $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es LIT. A continuación veremos que para el resto de los diagramas de Dynkin es también válido el resultado.

Proposición 4.3.9. *Sean T una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$, donde Q es un carcaj de tipo $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ o $\mathbb{E}_8$. Entonces se cumple lo siguiente*

(i) El álgebra Λ es o bien de la forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} U' & M' \\ 0 & T \end{pmatrix}$, donde U, U', M y M' son como en las hipótesis del Teorema 4.2.1.

(ii) Λ es LIT.

Demostración. Seguimos nuevamente la misma idea que las pruebas anteriores, salvo que esta vez no se precisa usar inducción. Partimos del siguiente carcaj:

$$Q: \quad \begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, no head] & \\
1 \arrow[r, no head] & 2 \arrow[r, no head] & 3 \arrow[r, no head] & 5
\end{tikzcd}$$

Por la Proposición 4.3.8 esta álgebra es de la forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} U' & M' \\ 0 & T \end{pmatrix}$, donde U, U', M y M' son como en las hipótesis del Teorema 4.2.1. Aplicando sucesivamente los Corolarios 4.3.1 y 4.3.2 según corresponda obtendremos álgebras que satisfacen la parte (i) y que corresponden con tensorizar T con el álgebra de caminos de un carcaj de tipo $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ o $\mathbb{E}_8$. $\square$

De todo lo anterior se desprende el siguiente teorema

Teorema 4.3.10. *Sea T una $\mathbb{K}$-álgebra LIT y Q un carcaj de tipo Dynkin. Entonces el álgebra $\Lambda := T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es LIT.*

Capítulo 5

Consideraciones Finales

Resumen: En este capítulo damos un compendio de temas y líneas de investigación futuras que se derivan de los resultados obtenidos en esta tesis.

5.1. Teoría relativa de Hochschild

A fines de los años 1950 G. Hochschild en [31] y [32] creó una teoría de homología relativa muy interesante, pero que hasta el día de hoy no ha tenido demasiada transcendencia. No obstante hay varios trabajos que hacen referencia a esta teoría y existen resultados importantes al respecto (ver por ejemplo [41], [17], [18], [42], [52]). A continuación expondremos las definiciones fundamentales de la teoría relativa de Hochschild, así como las conexiones con el trabajo desarrollado en esta tesis, dando lugar al planteo de varias interrogantes.

Sea $\varphi : B \to \Lambda$ un homomorfismo de álgebras de Artin tal que $\varphi(1_B) = 1_\Lambda$. Dicho mapa define un funtor covariante $F : \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}B$, pues si M es un Λ-módulo, podemos definir una estructura de B-módulo de la siguiente forma $b\,m := \varphi(b)\,m$. La definición de F en los morfismos viene dada por el hecho de que si $f : M \to N$ es un Λ-morfismo, entonces al considerar la estructura de B-módulo definida anteriormente en M y N, el mapa f es un morfismo de B-módulos, pues $f(b\,m) = f(\varphi(b)m) = \varphi(b)f(m) = bf(m)$. Es sencillo ver que F así definido es un funtor covariante y exacto. Una sucesión exacta de Λ-módulos $(t_i : M_i \to M_{i-1})$ se dice (Λ, B)-exacta si para cada $i \in \mathbb{Z}$ se cumple $Ker\, t_i \mid M_i$ en $\operatorname{mod}B$.

Definición 5.1.1. *Decimos que un Λ-módulo Q es (Λ, B)-proyectivo si para cada sucesión (Λ, B)-exacta* $0 \longrightarrow U \xrightarrow{p} V \xrightarrow{q} W \longrightarrow 0$ *y cualquier Λ-homomorfismo $h : Q \to W$, existe un Λ-homomorfismo $h' : Q \to V$ tal que $q \circ h' = h$.*

Los módulos (Λ, B)-proyectivos también se denominan proyectivos relativos. La clase de todos los Λ-módulos proyectivos relativos se denota $\mathcal{P}(\Lambda, B)$. En [31] pueden verse los siguientes resultados, debidos a G. Hochschild.

Proposición 5.1.2. *Para cada $X \in \operatorname{mod} B$, el Λ-módulo $\Lambda \otimes_B X$ es (Λ, B)-proyectivo.*

Proposición 5.1.3. *Un Λ-módulo Q es (Λ, B)-proyectivo si y solo si es sumando directo de $\Lambda \otimes_B Q$ como Λ-módulo.*

Es conocido que para cada módulo $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K_M \to \Lambda \otimes_B M \to M \to 0.$$

De aquí que resulte natural investigar bajo qué condiciones este tipo de sucesión nos puede servir para acotar la dimensión finitista del álgebra. Por ejemplo en [29] se prueba que si B es de tipo de representación finito y para cada módulo M con dimensión proyectiva finita se cumple que K_M es proyectivo relativo, entonces $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) < \infty$.

Por otro lado es sencillo ver que la clase $\mathcal{P}(\Lambda, B)$ es cerrada por sumas y sumandos directos; sin embargo no tiene por qué ser cerrada por sizigias. Puede verse en [57], Lemma 2.17 que si $\mathcal{P}(\Lambda, B)$ es cerrada por extensiones, entonces es cerrada por sizigias si y solo si es resolvente. Otra pregunta interesante viene por el lado de definir funciones $\Phi_{\mathcal{P}(\Lambda,B)}$ y $\Psi_{\mathcal{P}(\Lambda,B)}$, en el caso en que $\mathcal{P}(\Lambda, B)$ es cerrada por sizigias y tratar de ver si pueden ser usadas para obtener cotas para la $\operatorname{fin.dim}(\Lambda)$.

Otra interrogante que surge en este contexto es si dada una clase IT en $\operatorname{mod} \Lambda$ que denotamos por $\mathcal{D}$, la clase $F(\mathcal{D}) \subseteq \operatorname{mod} B$ es también IT. Esto nos permitiría dar condiciones para que una subálgebra de un álgebra LIT sea LIT.

5.1.1. Cubiertas proyectivas relativas

En [52] se estudia bajo qué condiciones, dada una familia de subálgebras de un álgebra Λ, se puede garantizar la existencia de una cubierta proyectiva relativa para cada $M \in \operatorname{mod} \Lambda$. Primeramente definiremos qué es una cubierta proyectiva relativa y en nuestro caso nos interesa especialmente el caso en que la familia de subálgebras consta de un solo elemento.

Definición 5.1.4. *Sea Λ un álgebra de Artin, $B \subseteq \Lambda$ una subálgebra y $M \in \operatorname{mod} \Lambda$. Decimos que $Q \to M$ es una* ***cubierta proyectiva relativa*** *si $Q \in \mathcal{P}(\Lambda, B)$, $Q \to M \to 0$ es una sucesión (Λ, B)-exacta y el mapa $Q \to M$ es minimal.*

De [52], Prop. 1.6 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.5. *Sea Λ un álgebra de Artin y $B \subseteq \Lambda$ una subálgebra tal que Λ es f.g. como B-módulo. Entonces para cada $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ existe una cubierta proyectiva relativa. Más aún, las cubiertas proyectivas relativas son aditivas y únicas salvo isomorfismo.*

Esto motiva la definición de sizigia relativa de un módulo M, la cual denotamos por $\Omega_{\Lambda,B}M$. Esta sizigia cumple que es aditiva y que se anula en los proyectivos relativos. De esta forma podemos definir funciones de Igusa-Todorov $\Phi_{\Lambda,B}$ y $\Psi_{\Lambda,B}$ de manera análoga a como se definen las funciones Φ y Ψ. Surge naturalmente la pregunta de qué propiedades tienen estas funciones y cuál es su relación con las funciones originales.

5.2. Productos tensoriales

En el Capítulo 4 Sección 4.3.1 planteamos el problema de si dadas dos $\mathbb{K}$-álgebras LIT, su producto tensorial es de nuevo LIT. En el Teorema 4.3.10 se da una respuesta parcial a dicha pregunta, demostrándose que si T es una $\mathbb{K}$-álgebra LIT, entonces $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es LIT donde Q es un carcaj de tipo Dynkin. Para demostrar dicho teorema se usa que el álgebra producto tensorial es un álgebra de matrices cuyas entradas son o bien T o bien 0. Resulta que no solo los carcajes de tipo Dynkin satisfacen esta condición, sino que si Q es un árbol, se tiene que $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es de vuelta un álgebra de matrices donde las entradas son o bien T o bien 0. Esto motiva el estudio de estos carcajes para obetener un teorema más general.
Más aún hay casos, como por ejemplo al hacer el producto tensorial de un álgebra LIT con el álgebra de Kronecker, en los que se obtiene un álgebra LIT. Una pregunta más general es si dado un carcaj Q finito sin ciclos orientados y T un álgebra LIT, el álgebra $T \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}Q$ es LIT.

5.3. Álgebras LIT generalizadas

En el Capítulo 2 al estudiar las funciones de Igusa-Todorov, vimos que para un álgebra de Artin Λ son equivalentes que $\Phi \dim(\Lambda) < \infty$ y que

$\Psi \dim(\Lambda) < \infty$. Esto en principio no ocurre con una subcategoría cualquiera, o sea dada una subcategoría arbitraria $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ no sabemos si $\Phi \dim(\mathcal{X}) < \infty$ implica que $\Psi \dim(\mathcal{X}) < \infty$. Por tanto explorar condiciones para que una subcategoría cumpla esa relación (por ejemplo si es IT la cumple), puede llevar a flexibilizar las condiciones que impusimos en la Definición 4.1.1, en particular que $\Phi \dim(\mathcal{D}) = 0$. Usando esto podría llegarse a un concepto nuevo que en principio generalice la definición de álgebra LIT. Esto motiva el estudio de dichas condiciones y su alcance, en particular su relación con la conjetura finitista.

5.4. Subcategorías de localización

Hay una cantidad significativa de resultados que hacen uso de la categoría derivada de un álgebra para estudiar sus representaciones. En particular es llamativo el resultado principal de [47], donde J. Rickard da una condición suficiente para que un álgebra de dimensión finita tenga dimensión finitista finita en términos de subcategorías de localización. Dada un álgebra Λ, la subcategoría de localización generada por una clase $\mathcal{S}$, denotada por $\langle \mathcal{S} \rangle_l$, es la menor subcategoría triangulada de $\mathcal{D}(\Lambda)$ que contiene a $\mathcal{S}$ y es cerrada por coproductos. El resultado principal en [47] es el siguiente

Teorema 5.4.1. *([47], Theorem 4.3) Sea Λ un álgebra de dimensión finita. Si la subcategoría de localización $\langle \operatorname{Inj} \Lambda \rangle_l = \mathcal{D}(\Lambda)$, entonces Λ satisface la conjetura finitista grande (i.e.* $\operatorname{Fin.Dim}(\Lambda) < \infty$*).*

El autor afirma que no conoce ejemplos de álgebras tales que $\langle \operatorname{Inj} \Lambda \rangle_l \neq \mathcal{D}(\Lambda)$. También brinda en su trabajo varias condiciones bajo las cuales es posible probar la igualdad y da una lista de álgebras que la satisfacen. Notemos que si todas las álgebras cumplen esa condición, la conjetura quedaría probada para las álgebras de dimensión finita y si se encuentra un contraejemplo y tenemos suerte podría ser también un contraejemplo para la conjetura finitista y de no serlo puede esperarse que ayude a reducir la búsqueda a ciertas familias de álgebras.

¿Pueden ayudar las funciones de Igusa-Todorov? Recordamos que en [58] el autor definió funciones IT para complejos en la categoría derivada acotada a derecha $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Con esto en mente, podríamos intentar definir funciones de Igusa-Todorov generalizadas para complejos, de manera similar a como hicimos para módulos. Dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ con ciertas propiedades de cerradura[1] podríamos definir funciones $\Phi_{\mathcal{X}}$ y $\Psi_{\mathcal{X}}$ y estudiar

[1] Sería el análogo a una clase IT, pero en la categoría derivada.

sus propiedades. Más aún, sería interesante interpretar los resultados que tenemos para módulos en la categoría derivada y ver si tienen relación con la condición dada por J. Rickard. Estas y muchas otras preguntas pueden llevarnos a entender mejor la relación que sabemos existe entre la conjetura finitista y la categoría derivada del álgebra.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[2] I. Assem, M. Platzeck, and S. Trepode. On the representation dimension of tilted and laura algebras. *J. Algebra*, 296, 2006.

[3] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory.* LMSST 65, Cambridge Univ. Press, New York, 2006.

[4] I. Assem, A. Skowroński, and S. Trepode. The representation dimension of a selfinjective algebra of euclidean type. *J. Algebra*, 459, 2016.

[5] I. Assem, A. Skowroński, and S. Trepode. The representation dimension of a selfinjective algebra of wild tilted type. *J. Algebra*, 477, 2017.

[6] M. Auslander. *Representation Dimension of Artin Algebras.* Queen Mary College Math. Notes, 1957.

[7] M. Auslander. *Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative, Secrétariat mathématique, Paris, Seminaire d'Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel.* École Normale Supérieure de Jeunes Filles. MR 0225844., 1967.

[8] M. Auslander and R. Buchweitz. Homological dimension in local rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85.

[9] M. Auslander and I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Advances in Mathematics*, 86, 1991.

[10] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalϕ. *Representation theory of Artin algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[11] M. Barrios and G. Mata. On algebras of Ω^n-finite and Ω^∞-infinite representation type. *arXiv: 1911.02325v1 [math.RT]*, 2019.

[12] M. Barrios, G. Mata, and G. Rama. Igusa-Todorov ϕ function for truncated path algebras. *Algebr. Represent. Theor.*, 23, 2020.

[13] H. Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, 1960.

[14] H. Bass. Injective dimension in noetherian rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102, 1962.

[15] D. Bravo, M. Lanzilotta, and O. Mendoza. Pullback diagrams, syzygy finite classes and Igusa-Todorov algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 223(10), 2019.

[16] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics (39), 1998.

[17] C. Cibils, M. Lanzilotta, E. Marcos, and A. Solotar. Jacobi-Zariski long nearly exact sequence for associative algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 5(4), 2009.

[18] C. Cibils, M. Lanzilotta, E. Marcos, and A. Solotar. Han's conjecture for bounded extensions. *arXiv:2101.02597*, 2021.

[19] F. Coelho and M. Platzeck. On the representation dimension of some classes of algebras. *J. Algebra*, 275, 2004.

[20] T. Conde. *On certain strongly quasihereditary algebras.* Ph.D. Thesis, University of Oxford, 2015.

[21] T. Conde. Gabriel-Roiter measure, representation dimension and rejective chains. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 71, 2020.

[22] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220, 1995.

[23] K. Erdmann, T. Holm, O. Iyama, and J. Schroer. Radical embedding and representation dimension. *Adv. Math.*, 185, 2004.

[24] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.*, 6, 1972.

[25] E. L. Green and E. N. Marcos. Convex subquivers and the finitistic dimension. *Illinois J. Math.*, 61, 2017.

[26] E. L. Green, G. Psaroudakis, and O. Solberg. Reduction techniques for the finitistic dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374, 2021.

[27] E. L. Green and B. Zimmermann-Huisgen. Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube. *Math. Z.*, 206, 1991.

[28] L. Gruson and L. Raynaud. Critr̀es de platitude et de projectivité. techniques de platification dún module. *Invent. Math.*, 13, 1971.

[29] S. Guo. Finitistic dimension conjecture and extensions of algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 221, 2017.

[30] E. Hanson and K. Igusa. A counterexample of the ϕ-dimension conjecture. *arXiv: 1911.00614v1 [math.RT]*, 2019.

[31] G. Hochschild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 1956.

[32] G. Hochschild. Note on relative homological algebra. *Nagoya Math. J.*, 15, 1958.

[33] H. Holm. Gorenstein homological dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 189, 2004.

[34] F. Huard and M. Lanzilotta. Self-injective right artinian rings and Igusa-Todorov functions. *Algebr. Represent. Theory*, 16, 2013.

[35] F. Huard, M. Lanzilotta, and O. Mendoza. An approach to the finitistic dimension conjecture. *J. Algebra*, 319, 2008.

[36] K. Igusa, S. Smalϕ, and G. Todorov. Finite projectivity and contravariant finiteness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109, 1990.

[37] K. Igusa and G. Todorov. On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Representations of algebras and related topics. Fields Inst. Commun., Amer. Math. Soc.*, 45, 2005.

[38] O. Iyama. Finiteness of representation dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, 2002.

[39] J. P. Jans. *Rings and Homology.* Athena Series, Selected Topics in Mathematics, 1964.

[40] I. Kaplansky. *Rings and Fields.* Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1972.

[41] A. Kaygun. Jacobi-Zariski exact sequence for Hochschild homology and cyclic (co)homology. *Homology, Homotopy and Applications*, 14, 2012.

[42] M. Kleiner and E. Pérez. Computation of almost split sequences with applications to relatively projective and prinjective modules. *Algebr. Represent. Theor.*, 6, 2003.

[43] H. Krause. Krull-Schmidt categories and projective covers. *Expositiones Mathematicae*, 33(4), 2014.

[44] M. Lanzilotta, E. Marcos, and G. Mata. Igusa-Todorov functions for radical square zero algebras. *Journal of Algebra*, 487, 2017.

[45] M. Lanzilotta and O. Mendoza. Relative Igusa-Todorov functions and relative homological dimensions. *Algebr. Represent. Theory*, 20(3), 2017.

[46] H. Mochizuki. Finitistic global dimension for rings. *Pacific J. Math.*, 15, 1965.

[47] J. Rickard. Unbounded derived categories and the finitistic dimension conjecture. *Advances in Mathematics*, 354, 2019.

[48] R. Rouquier. Representation dimension of exterior algebras. *Inventiones mathematicae*, 165, 2006.

[49] R. Schiffler. *Quiver representations.* CMS Books in Mathematics, 2014.

[50] S. Schroll. On the representation dimension and finitistic dimension of special multiserial algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147, 2019.

[51] E. Sen. The ϕ-dimension of cyclic Nakayama algebras. *Communications in Algebra*, 49(6), 2020.

[52] J. Thévenaz. Relative projective covers and almost split sequences. *Communications in Algebra*, 13, 1985.

[53] Y. Wang. A note on the finitistic dimension conjecture. *Communications in Algebra*, 22(7), 1994.

[54] J. Wei. Finitistic dimension and Igusa-Todorov algebras. *Adv. Math.*, 222, 2009.

[55] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1994.

[56] C. Xi. Representation dimension and quasi-hereditary algebras. *Adv. Math.*, 168, 2002.

[57] C. Xi and D. Xu. The finitistic dimension conjecture and relatively projective modules. *Communications in Contemporary Mathematics*, 15, 2013.

[58] D. Xu. Generalized Igusa-Todorov functions and finitistic dimension. *Archiv der Mathematik*, 100, 2013.

[59] A. Zhang and S. Zhang. On the finitistic dimension conjecture of Artin algebras. *J. Algebra*, 320, 2008.

[60] P. Zhang. *A brief introduction to Gorenstein modules*. University of Bielefeld, https://www.math.uni-bielefeld.de/ sek/sem/abs/zhangpu4.pdf, 2009.

[61] B. Zimmermann-Huisgen. Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture. *Invent. Math.*, 108, 1992.