APUNTES DE CALCULO TENSORIAL

1968

departamento de mecánica de los fluidos

INSTITUTO DE MAQUINAS - FACULTAD DE INGENIERIA Y AGRIMENSURA - URUGUAY

TENSORES

I - Algebra de tensores

Designaremos con E a un espacio vectorial euclidiano de dimensión tres, y con R al conjunto de los números reales.

(Los resultados establecidos más adelante, pueden ser, en la mayoría de los casos, facilmente generalizados a un espacio vectorial de dimensión n).

I - 1 Funcionales lineales

Definición.- Se llama funcional lineal (o brevemente funcional) a una función:

$$f : E \longrightarrow R \quad \text{tal que:}$$

$$1)\ f(\overline{u} + \overline{v}) = f(\overline{u}) + f(\overline{v}) \quad (\forall \overline{u}, \forall \overline{v})$$
$$2)\ f(a\overline{u}) = af(\overline{u}) \quad (\forall a \in R, \forall \overline{u})$$

1) y 2) son equivalentes a 3)

$$3)\ f(a\overline{u} + b\overline{v}) = af(\overline{u}) + bf(\overline{v}) \quad (\forall\ a, b, \overline{u}, \overline{v})$$

Ejemplos:

a) $f : \overline{v} \longrightarrow o$ es una funcional (funcional nula)
b) $g : v \longrightarrow /\overline{v}/$ no es una funcional pues no cumple 1)
c) $\overline{u}$ fijo, $h : \overline{v} \longrightarrow \overline{u} \times \overline{v}$ es una funcional

Una funcional queda determinada de modo único por sus valores en tres vectores independientes $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. En efecto, sean $f(\overline{u})$, $f(\overline{v})$, $f(\overline{w})$ dichos valores. Dado $\overline{t}$ existen a, b, c tales que $\overline{t} = a\overline{u} + b\overline{v} + c\overline{w}$. Si f es lineal, entonces: $f(\overline{t}) = f(a\overline{u} + b\overline{v} + c\overline{w}) = af(\overline{u}) + bf(\overline{v}) + cf(\overline{w})$ 4)
Luego f es única y 4) muestra que es lineal.

Teorema: Dada una funcional lineal f existe un vector $\overline{u}$ tal que

$$5)\ f(\overline{v}) = \overline{u} \times \overline{v} \quad (\forall\ \overline{v})$$

Demostración: Sea (e_1, e_2, e_3) una base ortonormal de E.
Entonces $\overline{v} = (\overline{v} \times e_1)e_1 + (\overline{v} \times e_2)e_2 + (\overline{v} \times e_3)e_3$ luego

$$f(\overline{v}) = f((\overline{v} \times e_1)e_1 + (\overline{v} \times e_2)e_2 + (\overline{v} \times e_3)e_3) =$$
$$= (\overline{v} \times e_1)\ f(e_1) + (\overline{v} \times e_2)\ f(e_2) + (\overline{v} \times e_3)\ f(e_3) =$$
$$= (f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + f(e_3)e_3) \times \overline{v} = \overline{u} \times \overline{v}$$

$$\text{con } \overline{u} = f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + f(e_3)e_3$$

I - 2 Tensores

Definición.- Se llama tensor (tensor de rango dos) a una transformación lineal de E en E, es decir una función:

$T : E \longrightarrow E$ tal que:

6) $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v}) \quad (\forall\, \overline{u}, \forall\, \overline{v})$

7) $T(a\,\overline{u}) = a\, T(\overline{u}) \quad (\forall\, a, \forall\, \overline{u})$

De modo análogo a I-1, las condiciones 6) y 7) son equivalentes a 8).

8) $T(a\,\overline{u} + b\,\overline{v}) = a\,T(\overline{u}) + b\,T(\overline{v}) \quad (\forall\, a, b, \overline{u}, \overline{v})$

Ejemplos:

a) $O : \overline{v} \longrightarrow \overline{o}$ (tensor nulo)

b) $I : \overline{v} \longrightarrow \overline{v}$ (tensor identidad)

c) $-I : \overline{v} \longrightarrow -\overline{v}$

d) $\overline{w}$ fijo, $A_w \; : \overline{v} \longrightarrow \overline{w} \wedge \overline{v}$ (es un tensor siempre que consideremos al espacio E, orientado, o si consideramos que $\overline{w}$ es un seudovector)

e) la proyección sobre una "recta" (subespacio de dimensión 1), sobre un"plano" (subespacio de dimensión 2), una simetría respecto de un "plano", una "rotación" alrededor de un vector fijo, etc.

De modo idéntico a los funcionales, un tensor queda determinado de manera única dando sus valores (vectoriales) en tres vectores indenpendientes.

Dados dos tensores T y S, y un número a, las transformaciones:

$T + S : \overline{v} \longrightarrow T(\overline{v}) + S(\overline{v}) \quad (\forall\, \overline{v})$

$aT : \overline{v} \longrightarrow a\,T(\overline{v}) \quad (\forall\, \overline{v})$

$T\,S : \overline{v} \longrightarrow T(S(\overline{v})) \quad (\forall\, \overline{v})$

Son lineales. Se denominan respectivamente, suma de T y S, producto de a y T, y producto de T y S.

Con las dos primeras operaciones el conjunto de los tensores verifica las propiedades de un espacio vectorial. Podemos pues considerar los tensores como vectores de un nuevo espacio (cuya dimensión según veremos más adelante es nueve).

El producto es asociativo y distributivo respecto a la suma pero no es conmutativo. El neutro es I.

Un tensor T se dice invertible, sii existe un tensor S tal que:

$T\,S = S\,T = I$. $\quad S = T^{-1}$ se llama inverso de T.

Notación: $T(\overline{v}) = T \times \overline{v}$

Dada una base ortonormal (e_j) un tensor T queda determinado según vimos por los valores $T \times e_j$, $j = 1, 2, 3$. Se tiene:

$$T \times e_j = t_{1j}\, e_1 + t_{2j}\, e_2 + t_{3j}\, e_3 \qquad j = 1,2,3.$$

El tensor T queda determinado <u>en la base</u> (e_j) por los nueve números $t_{ij}(y,\ j = 1,2,3)$ que llamaremos componentes de T en la base (e_j).

La matriz $[T] = (t_{ij})$ se llama matriz asociada a T en la base (e_j). Se tiene:

$$9)\quad t_{ij} = e_i \times (T \times e_j)$$

Es sencillo comprobar que la correspondencia entre tensores y matrices cuadradas (3 x 3) es biunívoca y lineal* (conserva la suma y el producto por un escalar). Conserva también el producto (al producto de tensores corresponde el producto de matrices en el mismo orden).

Sean $\overline{v} = \Sigma_j\, v_j\, e_j$ y $\overline{w} = T \times \overline{v} = \Sigma_i\, w_i\, e_i$

Entonces: $\overline{w} = \Sigma_j\, v_j\, (T \times e_j) = \Sigma_j\, v_j\, (\Sigma_i\, t_{ij}\, e_i) = \Sigma_i (\Sigma_j\, t_{ij} v_j) e_i$

Luego:

$$10)\quad w_i = \Sigma_j\, t_{ij}\, v_j \qquad i = 1,2,3.$$

Si designamos con $[\overline{v}]$ y $[\overline{w}]$ las matrices columnas de las componentes de $\overline{v}$ y $\overline{w}$, entonces 10) se escribe:

$$10')\quad [\overline{w}] = [T \times \overline{v}] = [T]\,[\overline{v}]$$

Sea dos bases ortonormales (e_j) y (e'_i). Entonces $e'_i = \Sigma_j\, k_{ij}\, e_j$, siendo $K = (k_{ij})$ una matriz ortogonal $(K^{-1} = K^T)$

Entonces: $v = \Sigma_i\, v'_i\, e'_i = \Sigma_j\, v_j\, e_j$

$$v'_i = \overline{v} \times e'_i = \Sigma_j\, v_j (e_j \times e'_i) = \Sigma_j\, k_{ij}\, v_j$$

Por tanto:

$$11)\quad [\overline{v}]' = K\,[\overline{v}]$$

Veamos ahora como cambia la matriz asociada a un tensor, al cambiar la base. Por 10') y 11)

$$[T]'\,[\overline{v}]' = [T \times \overline{v}]' = K[T \times \overline{v}] = K[T][\overline{v}] = (K\,[T]\,K^{-1})[\overline{v}]'$$

Es decir:

$$12)\quad [T]' = K\,[T]K^{-1} = K\,[T]\,K^T$$

---

* dicha correspondencia depende de la base de E.

Ejemplos:

a) Sea R el tensor determinado por: $R\times e_1 = e_1$ $R\times e_2 = - e_2$ $R\times e_3 = e_3$ (rotación de 90º alrededor de e_3)

la matriz correspondientes es $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sea P la proyección sobre el subespacio determinado por el versor e_1: (proyección ortogonal):

$P \times \bar{v} = (\bar{v} \times e_1)e_1$

c) Sea Q la proyección ortogonal sobre el subespacio determinado por los versores ortogonales e_1, e_2. Entonces:

$Q \times \bar{v} = (\bar{v} \times e_1)e_1 + (\bar{v} \times e_2)e_2$

Díada

Definición. Se llama díada o producto tensorial de dos vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ a la transformación lineal $\bar{a} \otimes \bar{b}$ definida así:

$\bar{a} \otimes \bar{b}$: $\bar{v} \longrightarrow (\bar{b} \times \bar{v})\bar{a}$ $(\bar{a} \otimes \bar{b}) \times \bar{v} = \bar{a}(\bar{b}\times\bar{v}) = (\bar{b} \times \bar{v})\bar{a}$

En particular: $P = e_1 \otimes e_1$, $Q = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$

y $I = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$

Por otra parte es fácil demostrar:

13) $T = \sum_{i,j} t_{ij}\, e_i \otimes e_j$

Además se puede ver sin dificultad que los nueve tensores $(e_i \otimes e_j)$ son independientes. Esto, unido a 13) muestra que constituyen una base del espacio de tensores. La dimensión de este espacio es, pues, - nueve.

I -3 Adjunto de un tensor. Tensores simétricos y antisimétricos

Sean T y $\bar{a}$ un tensor y un vector fijos; sea:

$f : E \longrightarrow R$ dada por

$f(\bar{v}) = \bar{a} \times (T \times \bar{v})$

f es lineal en $\bar{v}$ y es, por tanto, una funcional. Por el teorema de I - 1, existe un vector $\bar{w}(\bar{a})$ tal que:

14) $f(\bar{v}) = \bar{a} \times (T \times \bar{v}) = \bar{w}(\bar{a}) \times \bar{v}$

Es fácil ver ahora que la correspondencia:

$T^* : \bar{a} \longrightarrow \bar{w}(\bar{a})$

es lineal y es entonces un tensor.

Definición. T^* se llama tensor adjunto (o traspuesto) de T.

Se tiene: $\bar{w}(\bar{a}) = T^* \times \bar{a}$ y:

15) $\bar{a} \times (T \times \bar{v}) = \bar{v} \times (T^* \times \bar{a})$

Si dos tensores T y S cumplen:

$\bar{u} \times (T \times \bar{v}) = \bar{v} \times (S \times \bar{u})$ para $\forall \bar{u}$, $\forall \bar{v}$

entonces por 15), $S = T^*$

Se pueden comprobar las siguientes propiedades:

16)
a) $I^* = I$
b) $(T + S)^* = T^* + S^*$
c) $(a\,T)^* = a\,T^*$
d) $(T^*)^* = T$
e) $(S\,T)^* = T^* S^*$
f) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Demostremos por ejemplo (16,e). Sean $\bar{u}$. $\bar{v}$ dos vectores cualesquiera:

$\bar{v} \times ((ST)^* \times \bar{u}) = \bar{u} \times ((ST) \times \bar{v}) = \bar{u} \times (S \times (T \times \bar{v})) = (T \times \bar{v}) \; (S^* \times \bar{u})$

$= (S^* \times \bar{u}) \times (T \times \bar{v}) = \bar{v} \times (T^* \times (S^* \times \bar{u})) = \bar{v} \times ((T^* S^*) \times u)$

Luego $(ST)^* = T^* S^*$

Dada una base ortonormal(e_i), la matriz correspondiente a T^* es la traspuesta de la correspondiente a T. En efecto:

17) $t^*_{ij} = e_i \times (T^* \times e_j) = e_j \times (T \times e_i) = t_{ji}$ $\quad i, j = 1, 2, 3.$

Y el recíproco es inmediato. En resumen:

$S = T^*$ sii $[S] = [T]^T$ en una base ortonormal

El adjunto de un tensor permite definir el producto a la izquierda de un tensor por un vector: $\bar{u} \times T$

Definición: $\bar{u} \times T = T^* \times \bar{u}$

Con esta definición se puede escribir sin confusión: $\bar{u} \times T \times \bar{v}$. En efecto:

$$(\bar{u} \times T) \times \bar{v} = \bar{v} \times (\bar{u} \times T) = \bar{v} \times (T^* \times \bar{u}) = \bar{u} \times (T \times \bar{v})$$

Definiciones. a) Un tensor T se dice simétrico (o autoadjunto) sii:

$$T = T^*$$

b) Un tensor T se dice antisimétrico (o antiautoadjunto) sii:

$$T = -T^*$$

Si S es simétrico y A antisimétrico, se cumple:

18) $\bar{u} \times S \times \bar{v} = \bar{v} \times S \times \bar{u}$, $\quad \bar{u} \times A \times \bar{v} = -\bar{v} \times A \times \bar{u}$, $\bar{u} \times S = S \times \bar{u}$,

$\bar{u} \times A = -A \times \bar{u}$, $\quad \forall u, \forall v,$

Un tensor es simétrico o antisimétrico, sii su matriz asociada, en una base ortonotmal dada, es respectivamente simétrica o antisimétrica.

Teorema: Todo tensor T puede escribirse de modo único como suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico.

Demostración:

$T = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*)$

en que $S = \frac{1}{2}(T + T^*)$ es simétrico y $A = \frac{1}{2}(T - T^*)$ es antisimétrico.

Sea S' y A' otra pareja, luego: $S + A = S' + A'$, $S - S' = A' - A$.

$S_1 = S - S'$ es simétrico y $A_1 = A' - A$ es antisimétrico, luego:

$S_1 \times \overline{u} = \overline{u} \times S_1 = \overline{u} \times A_1 = -A_1 \times \overline{u} = -S_1 \times \overline{u} \Longrightarrow S_1 \times \overline{u} = 0 \quad \forall u.$

Luego $S_1 = 0$

Luego $S = S'$ y $A = A'$

Es importante para la representación de los tensores simétricos el siguiente teorema cuya demostración no haremos aquí.

Teorema espectral: Dado un tensor simétrico S, existe al menos una terna ortonormal (e_i) $i = 1, 2, 3$ tal que: $S \times e_i = a_i e_i$

Los versores e_i se llaman versores propios, versores principales o autoversores de S. Los escalares a_i se llaman valores propios o principales o autovalores de S. Una base formada de autoversores de S se llama base propia o principal de S.

La matriz de S en la base principal (e_i) es:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Debido a la propiedad expresada por el teorema espectral, es posible interpretar los tensores simétricos como composición de tres dilataciones según direciones ortonormales.

I - 4 Determinante de un tensor. Tensores ortogonales

Si en (12) tomamos determinantes en ambos miembros:

$$\det [T]' = (\det K)^2 \det [T]$$

puesto que K es ortogonal, $\det K = \pm 1$ y entonces:

$$\det [T]' = \det [T]$$

Luego $\det [T]$ no depende de la base ortonormal y lo llamaremos determinante del tensor T.

Notación: det T, det (T)

Propiedades:

(19)

a) $\det I = 1$ c) $\det (TS) = (\det T)\ (\det S)$

b) $\det (T^{*}) = \det T$ d) $\det (T^{-1}) = (\det T)^{-1}$

e) $(T \times \bar{u} \quad T \times \bar{v} \quad T \times \bar{w}) = (\det T)\ (\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w})$

Puesto que el producto mixto $(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w})$ expresa el volumen del paralelepípedo construído sobre las aristas $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, (19 e) indica que $(\det T)$ da la relación entre el volumen del paralelepípedo transformado y el del original.

Los tensores T tales que $\det T = \pm 1$, conservan los volúmenes (cambiando la orientación del espacio en el caso $\det T = -1$) y se llaman <u>tensores unimodulares</u>. Su conjunto constituye un grupo para la operación de producto en virtud de (19 a, c, d). Se denomina <u>grupo unimodular</u>.

Definición. Un tensor T se dice ortogonal sii es una transformación isométrica de vectores, esto es:

$$/T \times \bar{u}/ = /\bar{u}/ \qquad \forall \bar{u}$$

Ejemplos: I, -I, una "rotación" alrededor de una "recta", una "simetría" respecto de un "plano".

De la definición se deduce que el conjunto de los tensores ortogonales constituye un grupo para la operación de producto. Se denomina <u>grupo ortogonal</u>.

<u>Teorema</u>: T es ortogonal sii $T^{*} = T^{-1}$

<u>Demostración</u>: si $T^{*} = T^{-1}$ entonces $T^{*}\ T = I$ y $/T \times \bar{u}/^{2} = (T \times \bar{u}) \times (T \times \bar{u}) =$
$= \bar{u} \times (T^{*} \times (T \times \bar{u})) = u \times ((T^{*}\ T) \times \bar{u}) = \bar{u} \times \bar{u} = /\bar{u}/^{2}$

Luego $/T \times \bar{u}/ = /\bar{u}/$

Si T es ortogonal:

$$/T \times (\bar{u} + \bar{v})/^{2} = /\bar{u} + \bar{v}/^{2} = (\bar{u} + \bar{v}) \times (\bar{u} + \bar{v}) = /u/^{2} + /v/^{2} + 2\,\bar{u} \times \bar{v}$$

Además $/T \times (\bar{u} + \bar{v})/^{2} = (T \times (\bar{u} + \bar{v})) \times (T \times (\bar{u} + \bar{v})) =$

$$= (T \times \bar{u} + T \times \bar{v}) \times (T \times \bar{u} + T \times \bar{v}) = /T \times \bar{u}/^{2} + /T \times \bar{v}/^{2} + 2\,(T \times \bar{u}) \times (T \times \bar{v})$$

Puesto que $/T \times \bar{u}/^{2} = /\bar{u}/^{2}$ y $/T \times \bar{v}/^{2} = /\bar{v}/^{2}$ se tiene

$(T \times \bar{u}) \times (T \times \bar{v}) = \bar{u} \times \bar{v}$ y T además de conservar las distancias conserva los ángulos entre los vectores.

Entonces: $\bar{u} \times \bar{v} = (T \times \bar{u}) \times (T \times \bar{v}) = \bar{u} \times (T^{*}\ T) \times \bar{v}$ y como esto se cumple para todo $\bar{u}$ y $\bar{v}$, se tiene $T^{*}\ T = I$ lo que es suficiente para que $T^{*} = T^{-1}$.

De este teorema se deduce inmediatamente que para un tensor ortogonal $\det T = \det T^{*} = \det (T^{-1}) = (\det T)^{-1} \Rightarrow \det T = \pm 1$

Además es sencillo comprobar que un tensor es ortogonal sii su matriz asociada en una base ortonormal, es ortogonal.

I - 5 Invariantes escalares de un tensor

Sea $f(T)$ una función de tensor a valores escalares. Fijada una base (e_i) ortonormal, a la función f queda asociada una función f' de la matriz $[T]$ (función que depende en general de la base (e_i)), tal que:

$$(20)\quad f(T) = f'([T]\,;\, e_1, e_2, e_3) = f'((t_{ij});\, e_1, e_2, e_3)$$

Definición: Una función f de tensores a escalares se dice isótropa o invariante escalar sii su función asociada f' es independiente de la base ortonormal, es decir, si existe $g([T])$ tal que:

$$f(T) = f'([T]\,;\, e_1\, e_2\, e_3) = g([T])$$

Ejemplo: det T; puesto que $\det T = \det [T]$

Consideremos ahora: $\det(hI - T) = \det[hI - T] =$

$$= \det(h[I] - [T]) = h^3 - \operatorname{tr}[T]\, h^2 + I_2[T]\, h - \det[T]$$

(en que $\operatorname{tr}[T] = \sum_i t_{ii}$, $I_2[T] = t_{11}t_{22} + t_{11}t_{33} + t_{22}t_{33} - t_{12}t_{21} - t_{13}t_{31} - t_{23}t_{32}$.

Puesto que $\det(hI - T)$ no depende de la base, el polinomio tampoco y esto solo se cumple sii:

$\operatorname{tr}[T]$, $I_2[T]$ y $\det[T]$ son independientes de la base. Esto permite definir los invariantes principales de un tensor:

Definición:

a) $I_1(T) = \operatorname{tr} T = \operatorname{tr}[T]$ traza de T

b) $I_2(T) = I_2[T]$ segundo invariante

c) $I_3(T) = \det T = \det[T]$ determinante de T

La importancia de los invariantes principales radica en en siguiente teorema cuya demostración no haremos (ver ejercicio (14)).

Teorema: Todo invariante escalar de un tensor simétrico es una función de los invariantes principales del tensor.

I - 6 Ejercicios

(1) Mostrar que para todo tensor T se cumple:

$$T = (T \times e_1) \otimes e_1 + (T \times e_2) \otimes e_2 + (T \times e_3) \otimes e_3$$

(2) Demostrar la fórmula 13).

(3) Demostrar que los nueve tensores $e_i \otimes e_j$ son independientes.

(4) Hallar la matriz de $\bar{a} \otimes \bar{b}$ en una base ortonormal a partir de las componentes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

(5) Demostra las igualdades 16)

(6) Mostrar: $(\bar{a} \otimes \bar{b})^* = \bar{b} \otimes \bar{a}$; $\bar{u} \times (\bar{a} \otimes \bar{b}) = (\bar{u} \times \bar{a})\bar{b}$;

$(\bar{a} \otimes \bar{b})(\bar{c} \otimes \bar{d}) = (\bar{b} \times \bar{c})\bar{a} \otimes \bar{d}$ $\quad$ $tr(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{b}$

(7) Mostrar que el tensor A : $\bar{u} \longrightarrow \bar{w} \wedge \bar{u}$ ($\bar{w}$ fijo) es antisimétrico. Recíproco: dado un tensor antisimétrico A, existe un único vector $\bar{w}$ tal que para todo $\bar{u}$, $A \times \bar{u} = \bar{w} \wedge \bar{u}$. Hallar las componentes de A y $\bar{w}$ en una base ortonormal.

(8) Si (e_i) es una base principal del tensor simétrico S y a_i es el autovalor correspondiente a e_i entonces:

$$S = \sum_i a_i e_i \otimes e_i$$

(9) Mostrar:

a) $tr(T^*) = tr\, T$

b) $tr\,(TD) = tr(DT) = tr(D^*T^*) = tr(T^*D^*)$

c) Si S es simétrico y A antisimétrico: $tr\, A = 0$, $tr(SA) = 0$

(10) Definiciones:

1) $T \times D = tr(TD^*)$ producto escalar de T y D

2) $T \overset{\times}{\times} D = T : D = tr(TD)$ producto doble contractado de T y D

Mostrar: a) $T \times D = \sum_{ij} t_{ij} d_{ij}$

$T \times D = D \times T$; $(aT) \times D = T \times (aD) = a(T \times D)$

$T \times (D + F) = T \times D + T \times F$ $\quad$ $T^2 \geqslant 0$ y $T^2 = 0$ sii $T = 0$

$I^2 = I \times I = 3$ $\quad$ $T \times D = T^* \times D^*$

$(\bar{a} \otimes \bar{b}) \times (\bar{c} \otimes \bar{d}) = (\bar{a} \times \bar{c})(\bar{b} \times \bar{d})$

b) $T : D = \sum_{ij} t_{ij} d_{ji}$

$T : D = D : T$; $(aT) : D = T : (aD) = a(T : D)$

$T : (D + F) = T : D + T : F$; $T : D = T^* : D^*$

$(\bar{a} \otimes \bar{b}) : (\bar{c} \otimes \bar{d}) = (\bar{a} \times \bar{d})(\bar{b} \times \bar{c})$

(11) Demostrar las igualdades 19)

(12) Sea $f(T)$ una función de tensor a valores escalares. Mostrar que f es un invariante sii $f(QTQ^*) = f(T)$ para todo Q ortogonal.

(13) a) Mostrar que <u>a</u> es un autovalor de un tensor T sii $\det(aI - T)=0$

b) Mostrar que si $a_1\ a_2\ a_3$ son los autovalores de un tensor T, entonces: $I_1(T) = a_1 + a_2 + a_3$, $I_2(T) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$

$$I_3(T) = a_1\ a_2\ a_3$$

(14) Sea $f(S)$ una función de un tensor simétrico S a valores escalares. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $f(S)$ es un invariante escalar

b) existe una función de tres variables reales $g(x, y, z)$ simétrica en x, y, z tal que si $a_1\ a_2\ a_3$ son loa autovalores de S se cumple: $f(S) = g(a_1, a_2, a_3)$ para todo S.

c) existe una función de tres variables reales $F(X, Y, Z)$ tal que: $f(S) = F(I_1(S), I_2(S), I_3(S))$ para todo S.

(15) Un tensor de la forma aI se dice esférico. Un tensor T se dice <u>desviador</u> si $trT = 0$. Mostrar que todo tensor puede descomponerse de modo único en suma de un <u>tensor esférico</u>, un <u>tensor desviador simétrico</u> y un <u>tensor antisimétrico</u>.

II - Análisis tensorial

Designaremos con L un espacio afín euclideano de dimensión 3 cuyos elementos llamaremos puntos; con E al espacio vectorial asociado a L.

Una función de L a valores escalares, vectoriales o tensoriales se llamará también campo escalar, vectorial o tensorial respectivamente.

II - 1 Gradiente de un campo escalar

Sea un campo escalar: $f : L \longrightarrow R$

Sean P y P' dos puntos de L y sea $\overline{u} = P' - P$

Definición: La función f se dice diferenciable en P sii existe una funcional lineal $F : E \longrightarrow R$ tal que:

1) $f(P') - f(P) = F(\overline{u}) + o(\overline{u})$ y $\lim\limits_{\overline{u}\to 0} \dfrac{o(\overline{u})}{/\overline{u}/} = 0$

Es decir si una función es diferenciable en P su incremento $(f(P') - f(P))$ puede aproximarse en un entorno conveniente por una funcional lineal de $(P' - P)$

De la definición surge que, si f es diferenciable, la funcional F es única. En efecto, si F' es otra funcional, la diferencia $F'' = F - F'$ es una funcional tal que:

$$\lim_{\overline{u}\to 0} \frac{F''(\overline{u})}{/\overline{u}/} = 0$$

Sea $\overline{k}$ un versor fijo y $\overline{u} = a\overline{k}$ con a positivo.
Entonces por ser F" lineal:

$$\lim_{\overline{u}\to 0} \frac{F''(\overline{u})}{/\overline{u}/} = \lim_{a\to 0} \frac{a\,F''(\overline{k})}{a} = F''(\overline{k}) = 0$$

Puesto que $\overline{k}$ es arbitrario, resulta $F'' = 0$ y $F = F'$.

Del teorema de I - 1, resulta que si f es diferenciable en P existe un vector $\overline{w}(f)$ tal que:

2) $F(\overline{u}) = \overline{w}(f) \times \overline{u}$

Definición: $\overline{w}(f)$ se llama gradiente de f en P.

Notación: ∇f, grad f

Luego **1)** se escribe:

3) $f(P') - f(P) = (\nabla f) \times (P' - P) + o(P' - P)$

<u>Ejemplo</u>: Sea $(O\ e_1\ e_2\ e_3)$ un sistema ortonormal de coordenadas para L, sean $(x_1\ x_2\ x_3)$ las coordenadas de P y sea $g(x_1)$ una función <u>derivable en x_1</u>. Definamos un campo escalar f de modo que: $f(P) = g(x_1)$.

Entonces $f(P') - f(P) = g(x_1') - g(x_1) = g'(x_1).(x_1' - x_1) + o(x_1' - x_1)$

Puesto que $F : P' - P \longrightarrow g'(x_1)(x_1' - x_1)$ es lineal

y $\lim\limits_{P' \to P} \dfrac{o(x_1' - x_1)}{/P' - P/} = 0$ ya que $\lim\limits_{x_1' \to x_1} \dfrac{o(x_1' - x_1)}{x_1' - x_1} = 0$

resulta f(P) diferenciable. Además:

$$F(\overline{u}) = g'(x_1)(x_1' - x_1) = g'(x_1)\, e_1 \times (P' - P) = g'(x_1)\, e_1 \times \overline{u}$$

Luego: $\nabla f = g'(x_1)\, e_1$

<u>Componentes del gradiente</u>

Dado un sistema ortonormal $(O\ e_1\ e_2\ e_3)$ para L, a un campo escalar f(P) queda asociada una función de tres variables reales, que designaremos igualmente por f, tal que $f(P) = f(x_1\ x_2\ x_3)$.

Sea f diferenciable y sean (f_1, f_2, f_3) las componentes del gradiente.

Sea $\overline{u} = he_1$

Por (3): $f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) = hf_1 + o(h)$

Dividiendo por h y tomando límite en h = o, resulta:

$f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ Análogamente se procede para las restantes componentes.

En resumen: 4) $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $\qquad \nabla f = \sum\limits_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} e_i$

Recíprocamente, si $f(x_1\ x_2\ x_3)$ tiene derivadas parciales contínuas en $(x_1\ x_2\ x_3)$, no es difícil probar que f es diferenciable allí.

<u>Derivada direccional</u>

Sea $\overline{k}$ un versor y $P' = P + a\overline{k}$

Definición: Dado un campo escalar f, se llama derivada direccional de f en P según $\overline{k}$ al siguiente límite (si existe):

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{k}}(P) = \lim_{a \to 0} \frac{f(P + a\overline{k}) - f(P)}{a}$$

Si f es diferenciable en P resulta inmediatamente de 3) que f tiene derivada direccional para todo $\overline{k}$ y :

5) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{k}} = (\nabla f) \times \overline{k}$

II - 2 <u>Gradiente de un campo vectorial</u>

Definición: Un campo vectorial $\vec{v}(P)$ se dice <u>diferenciable en P</u> sii existe una transformación lineal $T : E \longrightarrow E$ tal que:

6) $\overline{v}(P') - \overline{v}(P) = T \times (P' - P) + \overline{o}(P' - P)$

y $\lim\limits_{\overline{u}\to 0} \dfrac{\overline{o}(\overline{u})}{/\overline{u}/} = 0$ $\qquad (\overline{u} = P' - P)$

De modo análogo a II-1, de la definición surge que si $\overline{v}(P)$ es diferenciable, el tensor T es único.

Definición: T se llama gradiente de $\overline{v}$ en P.

Notación: $T = \nabla\overline{v}$; $T = \text{grad}\ \overline{v}$

El vector $(\nabla\overline{v}) \times (P' - P)$ es pues la primera aproximación del incremento de la función diferenciable $\overline{v}(P)$.

Ejemplo: el campo de velocidades $\overline{v}(P)$, en un instante t, de un cuerpo rígido cumple:

$$\overline{v}(P') - \overline{v}(P) = \overline{W} \wedge (P' - P)$$

en que la velocidad angular instantánea $\overline{W}$ es independiente de P.

Luego $\overline{v}(P)$ es diferenciable puesto que para verificar 6) basta tomar $\overline{o}(P' - P) = 0$ y $T: \overline{u} \longrightarrow \overline{W} \wedge \overline{u}$

En este caso $T \times \overline{u}$ aproxima "exactamente" el incremento $(\overline{v}(P') - \overline{v}(P))$

<u>Componentes del gradiente</u>

Sea $\overline{v}(x_1\ x_2\ x_3) = \sum_i v_i(x_1\ x_2\ x_3)e_i$ en un sistema ortonormal de coordenadas $(Oe_1\ e_2\ e_3)$ de L.

Tomemos $\overline{u} = P' - P = he_1$ Por 6)

$\overline{v}(x_1 + h, x_2, x_3) - \overline{v}(x_1, x_2, x_3) = h(\nabla\overline{v}) \times e_1 + o(h)$

Dividiendo por h y tomando límite para h = o resulta:

$(\nabla\overline{v}) \times e_1 = \dfrac{\partial\overline{v}}{\partial x_1}$

Un resultado análogo se obtiene para las otras direcciones.

Luego:

$$7)\ (\nabla\overline{v}) \times e_j = \frac{\partial\overline{v}}{\partial x_j} \qquad \nabla\overline{v} = \sum_j \frac{\partial\overline{v}}{\partial x_j} \otimes e_j$$

Puesto que: $\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial x_j} = \sum_i \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} e_i$ se tiene:

$$8)\ \nabla\overline{v} = \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_i \otimes e_j$$

Luego la matriz asociada a $\nabla \overline{v}$ es $\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$

Recíprocamente, si $\overline{v}(x_1\ x_2\ x_3)$ tiene derivadas parciales contínuas en $(x_1\ x_2\ x_3)$, entonces es diferenciable en dicho punto.

Procediendo en forma análoga a II-1, se define la derivada direccional de $\overline{v}(P)$ según un versor $\overline{k}$:

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{k}}(P) = \lim_{a \to 0} \frac{\overline{v}(P + a\overline{k}) - \overline{v}(P)}{a}$$

Si $\overline{v}(P)$ es diferenciable, de 6) resulta inmediatamente:

9) $\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{k}} = (\nabla \overline{v}) \times \overline{k}$

II - 3 Divergencia y rotacional

Sea $\overline{v}(P)$ un campo vectorial diferenciable en P.

Definición: Se llama divergencia de $\overline{v}$ en P a la traza de $\nabla \overline{v}$ en el punto P.

Notación: $\nabla \times \overline{v}$, div $\overline{v}$, tr $(\nabla \overline{v})$

En un sistema de coordenadas: $\nabla \times \overline{v} = \sum_i \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$

Rotacional de un campo vectorial

Sea ahora A la parte antisimétrica del tensor $\nabla \overline{v}$. Entonces existe $\overline{w}$ (ver ejercicio de I-5) tal que: $A \times \overline{u} = \overline{w} \wedge \overline{u}$.

Definición: se llama rotacional de un campo de vectores $\overline{v}(P)$ a $2\overline{w}$.

Notación: $\nabla \wedge \overline{v}$, rot $\overline{v}$

Observación: es de notar que es cómodo considerar $\overline{w}$ y por tanto $\nabla \wedge \overline{v}$ como un seudo vector (vector dependiente de la orientación del espacio) a menos que consideremos establecida de antemano dicha orientación.

En un sistema de coordenadas:

$$\nabla \wedge \overline{v} = \left(-\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) e_1 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) e_2 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) e_3$$

Divergencia y rotacional de un campo tensorial

Sea T(P) un campo de tensores tal que para todo vector $\overline{u}$ fijo, el vector $\overline{u} \times T = T^{*} \times \overline{u}$ es diferenciable en P.

Sea f la correspondencia:

$$f : E \longrightarrow R$$

tal que $f(\overline{u}) = \nabla \times (\overline{u} \times T)$ en el punto P, $\overline{u}$ fijo.

Es inmediato que f es lineal; por tanto es una funcional y existe un vector $\overline{w}(T)$ tal que

$$f(\overline{u}) = \overline{w}(T) \times \overline{u}$$

Definición: $\overline{w}(T)$ se llama divergencia del tensor T en el punto P

Notación: $\nabla \times T$; div T

De lo anterior resulta:

$$10) \qquad \nabla \times (\overline{u} \times T(P)) = (\nabla \times T(P)) \times \overline{u} \quad \forall \overline{u} \text{ fijo}$$

Consideramos ahora la transformación:

$F : E \longrightarrow E$ con $F(\overline{u}) = \nabla \wedge (\overline{u} \times T)$ en P, $\overline{u}$ fijo

De inmediato se comprueba que F es lineal; es, pues, un tensor.

Definición: F^* se llama rotacional de T en P.

Notación: $\nabla \wedge T$, rot T

Se tiene, por tanto:

$$11) \quad \nabla \wedge (\overline{u} \times T) = (\nabla \wedge T)^* \times \overline{u} = \overline{u} \times (\nabla \wedge T)$$

Observación: en realidad $\nabla \wedge T$ es un seudo tensor.

<u>Fórmulas de Gauss y Stokes</u>

Para un campo vectorial continuamente diferenciable se cumplen las conocidas fórmulas de Gauss y de Stokes.

$$12) \quad \begin{aligned} &a) \int_S \overline{v} \times \overline{n}\, dA = \int_H \nabla \times \overline{v}\, dV \\ &b) \int_C \overline{v} \times dP = \int_S (\nabla \wedge \overline{v}) \times \overline{n}\, dA \end{aligned}$$

En a) H es un recinto cuya frontera es la superficie S. En b) S es una superficie cuya frontera es la curva C.

Sea ahora T(P) un campo tensorial tal que $\overline{u} \times T$ es continuamente diferenciable para todo $\overline{u}$ fijo. Luego $\nabla \times T$ y $\nabla \wedge T$ existen y son contínuos. Se tiene entonces; con las mismas notaciones de 12):

$$13) \quad \begin{aligned} &a) \int_S T \times \overline{n}\, dA = \int_H \nabla \times T\, dV \\ &b) \int_C T \times dP = \int_S (\nabla \wedge T) \times \overline{n}\, dA \end{aligned}$$

Demostraremos por ejemplo a); para ello alcanza con probar la igualidad de los productos escalares de ambos miembros de a) por un vector $\overline{u}$ arbitrario:

$$\overline{u} \times \int_H \nabla \times T \, dV = \int_H (\nabla \times T) \times \overline{u} \, dV = \int_H \nabla \times (\overline{u} \times T) \, dV =$$

$$= \int_S (\overline{u} \times T) \times \overline{n} \, dA = \int_S \overline{u} \times (T \times \overline{n}) \, dA = \overline{u} \times \int_S T \times \overline{n} \, dA$$

La segunda igualdad se debe a 10) y la tercera a 12 a)

II - 4 <u>Ejercicios</u>

(1) a) $\nabla(af + bg) = a\,\nabla f + b\nabla g$ a, b constantes

b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(2) $\nabla\bar{v} = \sum_i e_i \otimes \nabla v_i$

(3) a) $\nabla(a\bar{u} + b\bar{v}) = a\nabla\bar{u} + b\nabla\bar{v}$ a,b constantes

b) $\nabla(f\bar{u}) = f\nabla\bar{u} + \bar{u} \otimes \nabla f$

c) $\nabla(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{u} \times \nabla\bar{v} + \bar{v} \times \nabla\bar{u}$

(4) Demostrar las siguientes fórmulas para el gradiente de una función de función (regla de la cadena):

a) $\nabla f(g) = f'(g)\nabla g$

b) $\nabla f(\bar{u}) = (\nabla_u f) \times \nabla\bar{u}$

c) $\nabla\bar{v}(\bar{u}) = (\nabla_u \bar{v})(\nabla\bar{u})$

d) $\nabla\bar{v}(f) = \bar{v}'(f) \otimes \nabla f$

(5) Sean $f(P,t)$ y $\bar{u}(P, t)$ con $P = P(t)$

entonces:

a) $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(P(t),t) = \dfrac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f) \times \dot{P}$

b) $\dfrac{d\bar{u}}{dt} = \dfrac{d}{dt} \bar{u}(P(t),t) = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\nabla\bar{u}) \times \dot{P}$

(6) a) $\nabla \times (a\bar{u} + b\bar{v}) = a\nabla \times \bar{u} + b\nabla \times \bar{v}$ a,b constantes

b) $\nabla \times (f\bar{v}) = f\nabla \times \bar{v} + \nabla f \times \bar{v}$

c) $\nabla\wedge(a\bar{u} + b\bar{v}) = a\nabla\wedge\bar{u} + b\nabla\wedge\bar{v}$ a,b constantes

d) $\nabla\wedge(f\bar{v}) = f\nabla\wedge\bar{v} + \nabla f\wedge\bar{v}$

(7) a) $\nabla \times T = \sum_i (\nabla \times (T^* \times e_i))e_i$

b) $\nabla \times T = \sum_i \dfrac{\partial(T^* \times e_i)}{\partial x_i}$

(8) a) $\nabla \times (aS + bT) = a\nabla \times S + b\nabla \times T$ a,b constantes

b) $\nabla \times (fT) = f\nabla \times T + T \times \nabla f$

c) $\nabla \times (\bar{u} \otimes \bar{v}) = (\nabla \times \bar{v})\bar{u} + (\nabla\bar{u}) \times \bar{v}$

d) $\nabla \times (\bar{u} \times T) = \bar{u} \times (\nabla \times T) + (\nabla\bar{u}) \times T$

e) $\nabla \times (T \times \bar{u}) = (\nabla \times T^*) \times \bar{u} + T : (\nabla\bar{u})$

(9) a) $(\nabla \overline{v}) \times \overline{u} = \overline{u} \times (\nabla \overline{v}) + (\nabla \wedge \overline{v}) \wedge \overline{u}$

b) $(\nabla \overline{v}) \times \overline{v} = \nabla \dfrac{\overline{v}^2}{2} + (\nabla \wedge \overline{v}) \wedge \overline{v}$

(10) Sean $f(P)$ y $\overline{u}(P)$ dos campos dos veces diferenciables en P.

Definiciones: a) $\Delta f = \nabla \times (\nabla f)$ Laplaciano de f

b) $\Delta \overline{u} = \nabla \times (\nabla \overline{u})$ " de $\overline{u}$

Mostrar que 1) $\Delta f = \sum\limits_i \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

2) $\Delta \overline{u} = \sum\limits_i (\Delta u_i) e_i$

3) $\nabla(\nabla \times \overline{u}) = \nabla \times (\nabla \overline{u}^{*}) = \Delta \overline{u} + \nabla \wedge (\nabla \wedge \overline{u})$

(11) Mostrar que: $\nabla \wedge T = \sum\limits_i e_i \otimes \nabla \wedge (T^{*} \times e_i)$

(12) Demostrar la fórmula 13 b)

(13) Demostrar: a) $\int_S f \overline{n} \, dA = \int_H \nabla f \, dV$

b) $\int_S \overline{v} \otimes \overline{n} \, dA = \int_H \nabla \overline{v} \, dV$

(14) Mostrar que si $T(P)$ es un campo tensorial tal que $\overline{u} \times T$ es diferenciable en un recinto H para todo $\overline{u}$ fijo, entonces:

a) $\nabla \times T = 0 \quad (\forall P \in H) \Longleftrightarrow$ existe $S(P)$ tal que $T = \nabla \wedge S \; (\forall P \in H)$

b) $\nabla \wedge T = 0 \quad (\forall P \in H) \Longleftrightarrow$ existe $v(P)$ tal que $T = \nabla v \; (\forall P \in H)$