



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY

# Un lema de Morse para espacios simétricos de tipo no compacto

Joaquín Lejtregger Chebi

Orientador: Juan Alonso Simón

Maestría en Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República - PEDECIBA

Montevideo – Uruguay  
Noviembre de 2021

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo es entender cómo se puede estudiar la geometría de un espacio simétrico de tipo no compacto mediante su grupo de isometrías. Damos cuenta de algunos resultados de grupos y álgebras de Lie semisimples que nos permiten obtener conclusiones de estos espacios.

Presentamos un lema de Morse demostrado por Kapovich-Leeb-Porti en [17] siguiendo la demostración de Bochi-Potrie-Sambarino presentada en [5], que generaliza un resultado clásico de la geometría hiperbólica. Por medio del estudio de este resultado buscamos entender cómo el borde de Furstenberg nos ayuda a estudiar la geometría de estos espacios.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Geometría en curvatura negativa . . . . .	5
1.1.1 Variedades de curvatura no positiva . . . . .	8
1.1.2 Lema de Morse para variedades de curvatura estrictamente negativa. . . . .	10
1.2 Grupos y álgebras de Lie . . . . .	11
1.2.1 Grupos de Lie . . . . .	11
1.2.2 Álgebras de Lie . . . . .	13
1.2.3 La representación adjunta . . . . .	14
1.2.4 Álgebras de Lie semisimples . . . . .	16
<b>2 Generalidades de espacios simétricos</b>	<b>18</b>
<b>3 Dinámica de matrices</b>	<b>22</b>
3.1 Definiciones básicas y un primer ejemplo . . . . .	22
3.2 Valores singulares . . . . .	24
3.2.1 Valores singulares y el Grassmaniano . . . . .	27
3.2.2 El encaje de Plücker . . . . .	31
3.3 Cociclos lineales . . . . .	32
3.3.1 El teorema de Bochi-Gourmelon . . . . .	33
3.4 Dominación en secuencias de matrices . . . . .	34
<b>4 <math>SL_d(\mathbb{R})</math></b>	<b>38</b>
4.1 El espacio simétrico de $SL_d(\mathbb{R})$ . . . . .	38
4.2 $X_d$ como un espacio simétrico . . . . .	42
4.3 Planos geodésicos maximales en $X_d$ . . . . .	47

4.3.1	Caracterización de los planos maximales . . . . .	48
4.3.2	Raíces . . . . .	51
4.3.3	Raíces simples . . . . .	53
4.4	Banderas y subgrupos parabólicos . . . . .	55
4.4.1	Banderas . . . . .	56
4.4.2	Banderas y raíces . . . . .	57
4.5	El borde de Furstenberg . . . . .	59
4.5.1	Valores singulares . . . . .	59
4.5.2	Planos maximales parametrizados . . . . .	61
4.5.3	Banderas parciales y conjuntos paralelos . . . . .	64
4.6	El lema de Morse para $SL_d(\mathbb{R})$ . . . . .	66
4.6.1	Definiciones previas . . . . .	67
4.6.2	Distancias a los conjuntos paralelos . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Espacios simétricos de tipo no compacto</b> . . . . .	<b>78</b>
5.1	Grupo de isometrías de un espacio simétrico . . . . .	78
5.2	Relación entre la geometría de un espacio simétrico y su grupo de isometrías . . . . .	81
5.2.1	Geodésicas de $S$ . . . . .	81
5.2.2	El tensor de curvatura . . . . .	82
5.3	Sistema de raíces . . . . .	87
5.3.1	Geometría en las raíces . . . . .	90
5.4	Subgrupos parabólicos y el borde de Furstenberg . . . . .	93
5.4.1	Subgrupos parabólicos . . . . .	93
5.4.2	Caracterización de los subgrupos parabólicos . . . . .	95
5.4.3	El borde de Furstenberg y conjuntos paralelos . . . . .	97
5.5	Representaciones de grupos de Lie . . . . .	99
5.5.1	Encaje de $S$ en el espacio simétrico $X_d$ . . . . .	102
5.5.2	Representaciones de Tits y de Plücker . . . . .	104
5.5.3	Producto de Gromov . . . . .	109
5.6	Generalización del Lema de Morse . . . . .	112

# Introducción

## Contexto

La geometría Riemanniana surge como una extensión al desarrollo de la geometría diferencial en superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Dada una tal superficie tenemos una forma natural de medir largos de curvas diferenciables, considerar el largo mínimo entre todas las curvas que unen dos puntos y así metrizar dicha variedad. Así surge el concepto de geodésicas: curvas que localmente realizan la distancia entre dos puntos. Esto se puede generalizar a cualquier dimensión.

Alrededor de 1820, Gauss comenzó a interesarse en el estudio intrínseco de la geometría de superficies. La idea de la geometría Riemanniana es formalizar esto, pudiendo definir conceptos que no dependen del encaje en un espacio ambiente. Bajo este concepto, en una de sus primeras charlas públicas en 1854, Riemann introduce una generalización de la ya conocida curvatura Gaussiana: la curvatura seccional. Un resumen de la historia de este concepto se puede ver en [10].

En 1921 se prueba el teorema de Killing-Hopf que clasifica los espacios completos simplemente conexos de curvatura constante en tres modelos: a menos de reescalar la métrica, los espacios de curvatura constante negativa son isométricos a  $\mathbb{H}^n$ , los de curvatura 0 son isométricos a  $\mathbb{R}^n$  y los de curvatura constante positiva son isométricos a  $S^n$  (ver capítulo 6 de [28]).

En estos ejemplos de variedades el grupo de isometrías es abundante: actúa transitivamente en el espacio (es decir que el espacio es homogéneo) y además el estabilizador de un punto actúa transitivamente en los marcos ortonormales del plano tangente.

Un siguiente paso en el estudio de variedades con mucha simetría fue el estudio de espacios simétricos. Estos espacios no tienen una condición tan rígida para la acción en el tangente. Los espacios simétricos son variedades

para las cuales las simetrías centrales respecto a cada punto son isometrías. Esta condición ya implica que los espacios son homogéneos. El estudio de estas variedades fue originado por Élie Cartan en 1926, con una serie de artículos donde describe estos espacios (ver [8]).

En la actualidad esta teoría está estrechamente ligada a la de grupos de Lie semisimples, y como estos están clasificados, los espacios simétricos también. Podemos dividir estos espacios en tres categorías según la álgebra de Lie de su grupo de isometrías: por un lado están los Euclideos, cuya álgebra de Lie es abeliana, por otro lado están los de tipo no compacto, con álgebra de Lie semisimple y curvatura no positiva y por otro los de tipo compacto, con álgebra de Lie semisimple y curvatura no negativa. En este trabajo nos centramos en los de tipo no compacto, que generalizan al espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ .

Tradicionalmente una técnica de vital importancia para el estudio de variedades de curvatura negativa, que además se generaliza a espacios métricos en general con definiciones adecuadas (espacios  $\delta$ -hiperbólicos y  $CAT(-1)$ ) es el estudio del borde visual: clases de equivalencia de rayos geodésicos módulo distancia acotada (ver [12] y [6]). El concepto de cuasi isometría (mapas que preservan distancia a menos de una constante multiplicativa y una aditiva) y cuasigeodésicas permiten el estudio de la geometría de estos espacios a “gran escala”. Esta forma de estudiar geometría aparece estudiando la órbita de grupos finitamente generados en espacios hiperbólicos. El lema de Morse es un resultado de suma importancia que permite extender la acción de cuasi isometrías al borde visual. En el caso de los espacios simétricos de tipo no compacto, la posible presencia de subvariedades totalmente geodésicas isométricas a  $\mathbb{R}^n$  hace que no se puedan aplicar las técnicas clásicas para el estudio de espacios de curvatura negativa.

En 2004, en [19], Labourie define el concepto de representaciones de Anosov en grupos de Lie semisimples para estudiar una generalización del Teichmüller (representaciones fieles y discretas del  $\pi_1$  de superficies en  $PSL_d(\mathbb{R})$ ). Estas representaciones inducen una acción por isometrías de un grupo hiperbólico en un espacio simétrico. Hoy en día son ampliamente estudiadas y se las considera como la buena generalización del concepto de cuasi-isometría para espacios de curvatura no positiva con subvariedades totalmente geodésicas de dimensión mayor a 1. Bochi Potrie y Sambarino relacionan este concepto en [5] con las descomposiciones dominadas, usando algunas de las técnicas explicadas en este trabajo.

## Sobre este trabajo

El objetivo de este trabajo es entender cómo estudiar la geometría de un espacio simétrico de tipo no compacto mediante su grupo de isometrías. Damos cuenta de algunos resultados de grupos y álgebras de Lie semisimples y los relacionamos con la teoría de espacios simétricos.

Cada grupo de Lie semisimple tiene un espacio simétrico asociado, como se puede ver en [14] y en [25]. En este trabajo construimos un ejemplo explícito de esta correspondencia, describiendo el espacio simétrico asociado a  $SL_d(\mathbb{R})$ , y estudiamos algunas características que describen la complejidad de su geometría.

En [17], Kapovich-Leeb-Porti prueban una generalización del lema de Morse para espacios simétricos de tipo no compacto. Se explicará la prueba dada por Bochi-Potrie-Sambarino, publicada en [5], que se basa en descomposiciones dominadas para cociclos de matrices. En esta generalización del lema de Morse los planos maximales (subvariedades maximales totalmente geodésicas e isométricas a un espacio Euclideo) juegan el rol de las geodésicas para el teorema en curvatura estrictamente negativa. Sin embargo, se necesita agregar una hipótesis extra a las cuasi geodésicas, necesitamos una condición que limite cuánto pueden, en cierto sentido, “cambiar de dirección”.

En el trabajo probamos el lema de Morse para el espacio simétrico de  $SL_d(\mathbb{R})$  y después utilizamos el resultado para probarlo en espacios simétricos de tipo no compacto, usando teoría de representaciones. Se espera así explicar técnicas para generalizar resultados que también podría funcionar en otros contextos. En esta versión del lema de Morse se usa una noción de borde conocida como borde de Furstenberg, donde se asocian puntos límites a los planos maximales (en vez de a geodésicas como en el caso de curvatura estrictamente negativa). Uno de los objetivos del trabajo es ver cómo este borde nos ayuda a entender la geometría del espacio, al igual que el borde visual lo hace para espacios de curvatura negativa.

## Organización del trabajo

En el capítulo 1 exponemos los preliminares necesarios para entender el resto del trabajo. Allí definimos conceptos generales y enunciamos resultados básicos de geometría Riemanniana y teoría de grupos de Lie, sin detenernos en demostraciones.

En el capítulo 2 establecemos la definición de espacio simétrico, y enunciamos algunas propiedades básicas de estos espacios.

En el capítulo 3 estudiamos la acción del grupo  $GL_d(\mathbb{R})$  en el espacio proyectivo. Relacionamos la multiplicación de una sucesión de matrices con el concepto de descomposición dominada: una definición dinámica que generaliza la hiperbolicidad (para más detalles de descomposición dominada se puede consultar [26]). En el resto del trabajo utilizamos estas herramientas para el estudio del espacio simétrico  $X_d$ , cuyo grupo de isometrías es de matrices. Concluimos enunciando el Teorema 3.3.5: la herramienta fundamental con la que vamos a probar la generalización del lema de Morse para el caso de  $X_d$ .

En el capítulo 4 construimos un ejemplo de un espacio globalmente simétrico cuyo grupo de isometrías es  $SL_d(\mathbb{R})$ . En el Teorema 4.2.7 probamos que efectivamente es un espacio simétrico. Luego realizamos un análisis de la geometría de este espacio, centrándonos en las subvariedades planas y totalmente geodésicas que contiene, que se resume en el Teorema 4.3.5. Usando estas subvariedades definimos el borde de Furstenberg en 4.5 y lo usamos para probar el Teorema 4.6.13, la generalización del lema de Morse para el espacio  $X_d$ .

En el capítulo 5 probamos propiedades de espacios simétricos en general, como la forma de las geodésicas en la Proposición 5.2.1 y la fórmula del tensor de curvatura en el Teorema 5.2.3. Hacemos construcciones análogas a las del capítulo 4 y , asumiendo un teorema de representaciones probado por Tits cuya prueba se puede encontrar en [16], probamos la generalización del Lema de Morse para espacios simétricos de tipo no compacto en el Teorema 5.6.7.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo vamos a ver los preliminares necesarios para entender el resto del trabajo. Si bien no vamos a realizar pruebas, exponemos los resultados que vamos a utilizar y damos referencias sobre dónde encontrar más detalles.

### 1.1. Geometría en curvatura negativa

Vamos a ver algunos conceptos de geometría Riemanniana que nos serán de utilidad en el trabajo, sobre todo en el capítulo 5. Las demostraciones y explicaciones más detalladas de este tema se pueden encontrar en [7].

Dada una variedad diferenciable  $M$ , denotamos el conjunto de campos diferenciables por  $\mathfrak{X}(M)$ . La siguiente definición tiene sentido para variedades diferenciables, no se precisa una métrica.

**Definición 1.1.1.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Definimos el *corchete* entre  $X$  e  $Y$  como

$$[X, Y] = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

si pensamos a  $X$  e  $Y$  como derivaciones.

También podemos definir el corchete en función de los flujos asociados a campos.

**Proposición 1.1.2.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $p \in M$  y  $\phi_t$  el flujo asociado a  $X$ . Entonces se cumple que

$$[X, Y](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\phi_t(p)} \phi_{-t} Y_{\phi_t(p)}.$$

Intuitivamente esta proposición nos dice que el  $[X, Y]$  nos dice cómo varía el campo  $Y$  por el flujo del campo  $X$ . Este corchete da una estructura de álgebra de Lie al espacio vectorial de campos (ver sección 1.2.2).

Lo siguiente que nos gustaría definir son las longitudes de curvas diferenciables, pero para eso necesitamos una forma de medir vectores en el espacio tangente.

**Definición 1.1.3.** Una *variedad Riemanniana* es un par  $(M, \{(\cdot, \cdot)_o\})$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $(\cdot, \cdot) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es un producto interno. Además pedimos que los productos internos varíen diferenciablemente cuando movemos el punto.

**Definición 1.1.4.** Dada una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  definimos el *largo de  $\gamma$*  como

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{\gamma(t)} dt.$$

Observar que esta definición tiene sentido porque en cada plano tangente tenemos definida una norma. A partir de esto podemos definir la distancia entre dos puntos de  $M$  como el mínimo de las longitudes de las curvas que los unen. Definimos entonces el concepto de geodésica: una curva que realiza la distancia entre pares de puntos cercanos en su recorrido.

Si bien esta definición es intuitiva, no es claro que este tipo de curvas existan. Utilizando el concepto de conexión, podemos dar una definición más fácil de trabajar. Dada una variedad Riemanniana  $(M, (\cdot, \cdot))$  y  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , tenemos un mapa  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que intuitivamente representa la derivada de  $Y$  a lo largo de  $X$ , vista desde la variedad. Este mapa, que toma dos campos y devuelve otro se llama conexión de Levi-Civita y lo denotamos  $\nabla_X Y$ . Usando este concepto podemos formalizar el concepto de geodésica.

**Definición 1.1.5.** Una *geodésica* es una curva diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  tal que

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Con esta definición se puede probar que localmente minimizan distancias, y además su existencia (y unicidad local) se deduce de un teorema de ecuaciones diferenciales, viendo qué significa esta expresión en coordenadas locales. Intuitivamente podemos pensar las geodésicas como curvas de velocidad constante. También podemos pensar las geodésicas como curvas que se mueven “con la menor fuerza posible”.

Se puede probar que en cada punto  $p \in M$  existe un entorno  $U_p \subseteq T_p M$  de 0 tal que si  $v \in U_p$  entonces existe una única geodésica  $\gamma_v$  tal que  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ . Además se puede tomar de tal forma que sea simétrico y convexo.

**Definición 1.1.6.** Definimos el *mapa exponencial*  $\exp_p : U_p \rightarrow M$  como

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

En este contexto decimos que  $\exp U_p$  es un *entorno normal* de  $p$ .

**Definición 1.1.7.** Decimos que una variedad  $M$  es *completa* si las geodésicas están definidas para todo tiempo.

El teorema de Hopf-Rinow dice que en este contexto, dados dos puntos  $p, q \in M$  se cumple que existe una geodésica que conecta  $p$  y  $q$  y además minimiza distancias.

**Definición 1.1.8.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana, decimos que una subvariedad  $N$  es *totalmente geodésica* si toda geodésica de  $N$  con la métrica heredada también es una geodésica de  $M$ .

Con la conexión de Levi-Civita también definimos el concepto de tensor de curvatura, que es una generalización de la curvatura gaussiana de superficies.

**Definición 1.1.9.** Sea  $(M, (\cdot, \cdot))$  una variedad Riemanniana, definimos el *tensor de curvatura* como un mapa  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

**Definición 1.1.10.** Dada una variedad Riemanniana y un subespacio 2-dimensional de  $T_p M$  generado por los vectores  $v, w$ , definimos la *curvatura seccional* como

$$K_p(\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w) = \frac{(R(v, w)v, w)_p}{(v, w)_p(w, w)_p - (v, w)_p^2}$$

Se puede probar que esto no depende de los vectores, sino del subespacio que generan. Además, un resultado clásico de geometría Riemanniana (ver [7]) nos dice que la curvatura seccional en todo subespacio 2-dimensional determina el tensor de curvatura.

El tensor de curvatura (y por lo tanto las curvaturas seccionales) tienen gran importancia en el estudio de las variedades Riemannianas. Y para superficies encajadas en  $\mathbb{R}^3$  es la curvatura Gaussiana clásica.

**Definición 1.1.11.** Decimos que un espacio tiene *curvatura constante*  $c$  si para todo  $p \in M$  y para todo  $\sigma$  subespacio 2-dimensional de  $T_pM$  se cumple que  $K(\sigma) = c$ .

Si para todo  $p \in M$  y para todo  $\sigma$  subespacio 2-dimensional de  $T_pM$  se cumple que  $K(\sigma) \leq 0$  decimos que el espacio tiene *curvatura no positiva*, si existe  $c < 0$  tal que  $K(\sigma) \leq c$  decimos que el espacio tiene *curvatura estrictamente negativa*.

Tenemos entonces el siguiente resultado que se conoce como *teorema de uniformización* (o teorema de Killing-Hopf) y su demostración también se puede ver en [7].

**Teorema 1.1.12** (Teorema de uniformización). *Sea  $M$  una variedad Riemanniana geodésicamente completa, simplemente conexa, de curvatura constante y dimensión  $n$ . Entonces se cumple que*

1. Si  $K = 1$  entonces  $M$  es isométrica a  $S^n$
2. Si  $K = 0$  entonces  $M$  es isométrica a  $\mathbb{R}^n$
3. Si  $K = -1$  entonces  $M$  es isométrica a  $\mathbb{H}^n$

A menos de reescalar la métrica, este teorema clasifica todos los espacios simplemente conexos de curvatura constante.

### 1.1.1. Variedades de curvatura no positiva

Ahora nos centramos en definiciones y resultados que aplican sólo a variedades de curvatura no positiva. Si además pedimos que sean simplemente conexas las llamamos *variedades de Hadamard*, esto se debe al siguiente teorema cuya prueba también se encuentra en [7].

**Teorema 1.1.13** (Hadamard). *Sea  $M$  una variedad simplemente conexa, completa, de dimensión  $n$  y de curvatura no positiva. Entonces, dado  $p \in M$ , el mapa exponencial  $\exp_p$  se extiende a todo  $T_pM$  y además es un difeomorfismo. En particular se tiene que bajo estas condiciones  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

Usando este teorema, podemos compactificar una variedad de curvatura no positiva agregándole un borde homeomorfo a  $S^{n-1}$ , y parametrizar esta compactificación con los vectores de norma 1 en  $T_p M$  para un punto arbitrario  $p$  en  $M$ . El problema es que esta compactificación depende de la elección de un punto arbitrario.

**Definición 1.1.14.** Dados dos rayos geodésicos  $\gamma_1, \gamma_2$  con  $\gamma_i : [0, \infty) \rightarrow M$ . Decimos que dos rayos son *equivalentes* si la función  $t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  está acotada.

Es fácil ver que es una relación de equivalencia. Podemos definir el borde como el conjunto de clases de equivalencia de rayos geodésicos. Dado un rayo geodésico, denotamos por  $\gamma(+\infty)$  al elemento del borde que representa. La siguiente propiedad muestra que ambas formas de definir el borde coinciden.

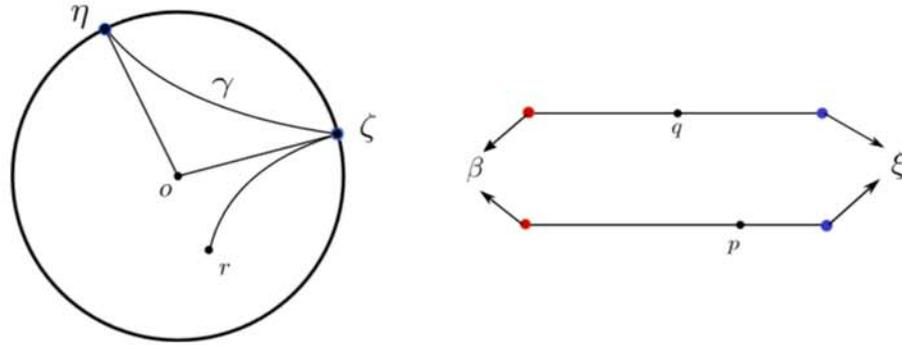
**Proposición 1.1.15.** Dado  $p \in M$  y un punto  $\eta \in \partial_\infty M$  se cumple que existe un único rayo geodésico  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(+\infty) = \eta$ .

Esta proposición establece una correspondencia entre  $\eta$  y  $\dot{\gamma}(0)$  en  $T_p^1(M)$ , y por lo tanto así podemos levantar la dependencia del punto arbitrario.

Si bien tiene sentido definir este borde en curvatura no positiva en general, es aún más importante en el contexto de una variedad de curvatura estrictamente negativa. Esto lo vemos, por ejemplo, en el siguiente resultado cuya prueba se puede encontrar en [12].

**Teorema 1.1.16.** Sea  $M$  un espacio de curvatura estrictamente negativa. Dados dos puntos  $\eta \neq \zeta \in \partial_\infty M$  existe una única geodésica completa  $\gamma$  tal que  $\gamma(-\infty) = \eta$  y  $\gamma(+\infty) = \zeta$ .

**Ejemplo 1.1.17.** Vamos a ver que el teorema 1.1.16 no se cumple en  $\mathbb{R}^2$ , donde las geodésicas son rectas. Dados dos puntos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{R}^2$ , dos rectas  $\gamma, \gamma'$  que pasan por  $p$  y  $q$  respectivamente se mantienen a distancia acotada solo si son paralelas, y en este caso también se mantienen a distancia acotada a pasado. Es decir que si  $\gamma(-\infty) = \beta$  y  $\gamma(+\infty) = \xi$  entonces toda recta  $\gamma'$  que cumpla que  $\gamma'(+\infty) = \xi$  necesariamente debe cumplir que  $\gamma'(-\infty) = \beta$ . Los únicos puntos del borde que están conectados son los de direcciones diametralmente opuestas.



**Figura 1.1:** En esta imagen se puede ver el borde visual de  $\mathbb{H}^2$  y el de  $\mathbb{R}^2$ . En  $\mathbb{H}^2$  se ven tres geodésicas que terminan en  $\zeta$ , todas tienen principios distintos. Además, la geodésica que pasa por  $o$  y termina en  $\zeta$  no tiene como principio a  $\eta$ . Sin embargo, ambos puntos están conectados por la geodésica  $\gamma$ . Esto no puede pasar en  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1.2. Lema de Morse para variedades de curvatura estrictamente negativa.

Vamos a enunciar el teorema que vamos a generalizar en este trabajo y dar un contraejemplo en el caso del plano.

**Definición 1.1.18.** Dadas constantes  $\mu, c > 0$ , y un intervalo  $I$  decimos que una función  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una  $(\mu, c)$  *cuasi geodésica* si para todos  $t, s \in I$  se cumple que

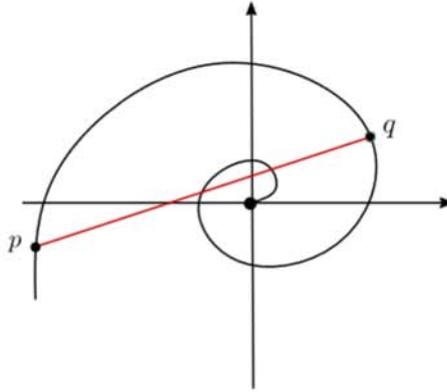
$$\mu^{-1} t - s - c \leq d(\alpha(t), \alpha(s)) \leq \mu t - s + c.$$

Una geodésica  $\gamma$  parametrizada por longitud de arco en una variedad de curvatura no positiva cumple que  $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ , por lo que las cuasi-geodésicas son curvas que estiman distancias a menos de una constante aditiva y una multiplicativa.

Este concepto es muy útil en el estudio, por ejemplo, de acciones de grupos de isometrías en el espacio hiperbólico. La idea de estudiar “geometría gruesa” aparece estudiando la órbita de grupos finitamente generados en espacios hiperbólicos.

Ahora enunciamos el lema de Morse para espacios de curvatura estrictamente negativa. Su prueba se puede encontrar en el capítulo 2 del libro [12], junto con una prueba de que una variedad de curvatura estrictamente negativa es  $\delta$ -hiperbólica.

**Teorema 1.1.19** (Lema de Morse). *Sea  $M$  una variedad de curvatura estrictamente negativa. Entonces para todos  $\mu, c > 0$  se cumple que existe  $C > 0$  tal que toda  $(\mu, c)$ -cuasi geodésica está en un  $C$ -entorno de una única geodésica*



**Figura 1.2:** Si bien la distancia entre  $p$  y  $q$  es menor que el largo del arco que los une en la espiral, el radio crece exponencialmente más rápido que la variación del ángulo, si bien la curva hace un arco para llegar a puntos diametralmente opuestos, la distancia entre puntos diametralmente opuestos crece rápido.

**Ejemplo 1.1.20.** Vamos a ver un ejemplo en  $\mathbb{C}$  (y por lo tanto  $\mathbb{R}^2$ ) con la métrica euclídea de una cuasigeodésica que no está cerca de ninguna geodésica. Consideremos entonces la curva  $\gamma : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(t) = te^{i\pi \log(t)}$ . Un esquema y una explicación intuitiva se puede ver en la figura 1.2. Observar que el radio crece exponencialmente más rápido que el ángulo. Esto nos dice que cuando estamos lejos del origen (en tiempos grandes) la curva se parece mucho a una recta (el ángulo varía poco en función de lo que crece la espiral). Con las constantes de cuasi isometría se puede despreciar lo que ocurre cerca del origen, y así probar que es una cuasigeodésica.

Este teorema tiene importantes consecuencias y nos permite estudiar mapas entre espacios de curvatura estrictamente negativa viendo su acción en el borde.

## 1.2. Grupos y álgebras de Lie

Para esta sección nos basamos fundamentalmente en [22], aunque también vamos a usar [18] y [2].

### 1.2.1. Grupos de Lie

Comenzamos entonces con la definición de grupo de Lie. El teorema 1.2.7 muestra por qué nos interesa este concepto.

**Definición 1.2.1.** Un *grupo de Lie*  $G$  es una variedad diferenciable con es-

estructura de grupo tal que las operaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son suaves.

**Ejemplo 1.2.2.**  $\mathbb{R}^n$  con la suma y la estructura usual de variedad es un grupo de Lie.

**Ejemplo 1.2.3.** El espacio de matrices invertibles  $d \times d$  denotado por  $GL_d(\mathbb{R})$  es un grupo de Lie. Podemos darle una estructura de variedad diferenciable considerando este espacio como una subvariedad de  $\mathbb{R}^{d^2}$ . No es difícil ver que el producto y la inversa son suaves, ya que podemos expresar ambas operaciones en función del determinante y sumas y productos de las entradas. Observar es un abierto de  $\mathbb{R}^{d^2}$  y por lo tanto tiene dimensión  $d^2$ .

Más en general, dado un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, definimos  $GL(V)$  como el espacio de automorfismos de  $V$ , es decir el grupo de transformaciones lineales biyectivas del espacio en si mismo. Podemos darle estructura diferenciable eligiendo una base  $\mathcal{B}$  e identificando cada transformación con la matriz asociada en esa base.

**Ejemplo 1.2.4.** El espacio de matrices con determinante 1, es decir  $SL_d(\mathbb{R})$ , es un grupo de Lie. Podemos darle estructura de variedad diferenciable considerándola encajada en  $GL_d(\mathbb{R})$ . Tiene dimensión  $d^2 - 1$ .

**Ejemplo 1.2.5.** El proyectivizado de  $SL_2(\mathbb{R})$ , es decir  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\pm Id$ , es un grupo de Lie, podemos darle estructura de variedad como el tangente unitario del plano hiperbólico  $T^1\mathbb{H}^2$ .

En general  $PSL_d(\mathbb{R})$ , el proyectivizado de  $SL_d(\mathbb{R})$ , hereda estructura de variedad de  $SL_d(\mathbb{R})$ .

**Ejemplo 1.2.6.** Otro ejemplo es  $SO(d)$ , el espacio de matrices de  $SL_d(\mathbb{R})$  cuyas columnas forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Este es el espacio como las matrices  $A \in SL_d(\mathbb{R})$  tales que  $A^t A = Id$ . Esta es una condición cerrada en  $SL_d(\mathbb{R})$  y por eso heredan la estructura de grupos de Lie.

Utilizando un razonamiento inductivo y el teorema de Gram-Schmidt se puede probar que este espacio tiene dimensión  $n(n - 1)/2$ .

Si bien los grupos de Lie son objetos con mucha estructura, aparecen en diversas áreas de la matemática. En el contexto de la geometría Riemanniana tenemos el siguiente teorema (ver [21]).

**Teorema 1.2.7** (Myers-Steenrod). *El grupo de isometrías de una variedad Riemanniana es un grupo de Lie.*

Este teorema es de vital importancia e ilumina el enfoque de este trabajo. Este grupo podría tener dimensión cero. A modo de ejemplo el bitoro con la métrica hiperbólica tiene una cantidad finita de isometrías (ver [1], teorema 3.3.3). Sin embargo, la gran cantidad de isometrías que tiene un espacio simétrico es lo que nos permite usar la teoría de grupos de Lie para estudiarlo, pudiendo sacar conclusiones acerca de espacios que no tienen curvatura estrictamente negativa.

## 1.2.2. Álgebras de Lie

Como los grupos de Lie son variedades con una estructura extra, el plano tangente también posee una estructura extra: es un álgebra de Lie.

**Definición 1.2.8.** Un álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial que además cuenta con una operación  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (llamada corchete de Lie) que cumple las siguientes propiedades para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

1. (Linealidad)  $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$
2. (Antisimetría)  $[X, Y] = -[Y, X]$
3. (Identidad de Jacobi)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Observar que la linealidad y la antisimetría implican en realidad que la transformación es bilineal, además se cumple que para todo  $X \in \mathfrak{g}$

$$[X, X] = 0.$$

En general denotamos los grupos de Lie con letras mayúscula ( $G, H, K$ ) y álgebras de Lie con la siguiente tipografía ( $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ ). Si dos elementos  $X, Y \in \mathfrak{g}$  cumplen que  $[X, Y] = 0$  decimos que *conmutan*.

Lo que vamos a hacer ahora es darle una estructura natural de álgebra de Lie a  $T_e G$ . Para ver esto, dado un grupo de Lie  $G$  identificamos el espacio tangente  $T_e G$  como el espacios de campos invariantes a izquierda:

**Definición 1.2.9.** Decimos que un campo  $X : G \rightarrow TG$  es *invariante a izquierda* si dados dos puntos  $g, h \in G$  se cumple que  $dL_g(X(h)) = X(gh)$ , donde  $L_g : G \rightarrow G$  es el mapa dado por  $L_g(h) = gh$ .

Si  $v \in T_e G$  podemos definir un campo invariante a izquierda empujándolo por el diferencial de  $L_g$  por toda la variedad. También se puede probar que si  $X, Y$  son campos invariantes a izquierda entonces  $[X, Y]$  definido en 1.1.1 también lo es. Esto dota a  $T_e G$  de una estructura de álgebra de Lie.

**Ejemplo 1.2.10.** El espacio vectorial de matrices reales  $d \times d$  denotado por  $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$  es un álgebra de Lie con el corchete definido por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

No es difícil ver que este espacio es el álgebra de Lie de  $GL_d(\mathbb{R})$ .

Más en general,  $\mathfrak{gl}(V)$ , el grupo de endomorfismos (transformaciones lineales del espacio en si mismo) de un espacio vectorial  $V$  es un álgebra de Lie con el corchete definido por

$$[T, U] = T \circ U - U \circ T$$

es el álgebra de Lie de  $GL(V)$ .

Un resultado clásico de teoría de Lie nos dice que si un grupo de Lie es de matrices (es decir un subgrupo cerrado de  $GL_d(\mathbb{R})$ ) entonces la exponencial Riemanniana coincide con la exponencial de matrices. Durante el texto se usará indistintamente la notación  $\exp X$  y  $e^X$  para la exponencial. En general en un grupo de Lie la exponencial está definida en todo  $T_e G$  (ver [18]).

**Definición 1.2.11.** Decimos que una subálgebra  $\mathfrak{a}$  es *abeliana* si para todos  $A, B \in \mathfrak{a}$  se cumple que  $[A, B] = 0$ .

### 1.2.3. La representación adjunta

Vamos a definir morfismos de grupos y álgebras de Lie, y presentar uno que vamos a usar repetidas veces en este trabajo: la representación adjunta.

**Definición 1.2.12.** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos de Lie. Un *morfismo de grupos de Lie* es un morfismo de grupos que además es suave.

**Definición 1.2.13.** Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  dos álgebras de Lie, decimos que una transformación lineal  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un *morfismo de álgebras de Lie* si para todos  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Cuando el codominio es  $GL(V)$  para grupos y  $\mathfrak{gl}(V)$  para álgebras, decimos que el morfismo es una *representación*. No es difícil ver que la derivada de un morfismo entre grupos es un morfismo entre álgebras. En ciertos contextos también podemos “integrar” un morfismo de álgebras a uno de grupos.

**Definición 1.2.14.** Dado un grupo de Lie  $G$ , definimos la *conjugación por  $g$*  como

$$\varphi_g(h) = ghg^{-1}.$$

Observamos que es un automorfismo, es suave y además fija la identidad. Luego podemos definir su diferencial como

$$Ad_g(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ge^{tX}g^{-1}.$$

Observar que  $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Además se cumple que  $Ad_g^{-1} = Ad_{g^{-1}}$ .

**Definición 1.2.15.** Definimos la *representación adjunta* como el mapa

$$Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto Ad_g.$$

Si derivamos el mapa una vez más entonces podemos desligarnos completamente del grupo  $G$  y trabajar solo con el álgebra. Es decir que, para cada  $X \in \mathfrak{g}$  se define el mapa

$$ad_X(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{e^{tX}}(Y).$$

**Definición 1.2.16.** Se define la *representación adjunta a nivel de álgebra* como el mapa

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$X \mapsto ad_X$$

Si bien este mapa es complicado de definir, en realidad el siguiente teorema nos da una expresión más simple.

**Teorema 1.2.17.** Sean  $X, Y$  elementos de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Se cumple que

$$ad_X(Y) = [X, Y].$$

### 1.2.4. Álgebras de Lie semisimples

Las pruebas de esta sección se pueden ver en [2]. Vamos a definir el tipo de álgebras con las que vamos a trabajar: las álgebras semisimples. Una razón por la que estas álgebras son importantes es por la forma de Killing.

**Definición 1.2.18.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Definimos la *forma de Killing* como la forma bilineal  $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\kappa(X, Y) = \text{tr}(ad_X \circ ad_Y).$$

Para ver que es bilineal basta hacer una cuenta con la identidad de Jacobi. Ahora procedemos a definir las álgebras semisimples y su vínculo con la forma de Killing.

**Definición 1.2.19.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $\mathfrak{i}$  una subálgebra. Decimos que  $\mathfrak{i}$  es un *ideal* si  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}$ .

Observar que si  $\mathfrak{i}$  es un ideal entonces  $\mathfrak{g}$  actúa en  $\mathfrak{i}$  mediante la acción adjunta. También es claro que  $\{0\}$  y  $\mathfrak{g}$  son ideales, a estos los denominamos *triviales*.

**Definición 1.2.20.** Decimos que un álgebra de Lie es *simple* si tiene dimensión mayor a 1 y no tiene ideales no triviales. Decimos que es *semisimple* si es suma directa de álgebras simples.

**Ejemplo 1.2.21.** Se puede probar que  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  es simple. Dados  $d_1, d_2 > 0$  se tiene que  $\mathfrak{sl}_{d_1}(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_{d_2}(\mathbb{R})$  es semisimple pero no simple.

**Teorema 1.2.22.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\mathfrak{g}$  es semisimple.
2. Todo ideal abeliano de  $\mathfrak{g}$  es nulo.

3. La forma de Killing es no degenerada.

Otra propiedad importante de la forma de Killing es la asociatividad respecto al corchete, o  $ad_{\mathfrak{g}}$ -asociatividad.

**Proposición 1.2.23.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Se cumple que*

$$\kappa(X, [Y, Z]) = \kappa([X, Y], Z).$$

Vamos a usar la forma de Killing para definir métricas en espacios simétricos, por eso es importante que el álgebra de Lie sea semisimple.

**Definición 1.2.24.** Decimos que un grupo de Lie es *semisimple* si su álgebra lo es.

## Capítulo 2

# Generalidades de espacios simétricos

En este capítulo damos algunas definiciones, ejemplos y resultados generales sobre espacios simétricos.

**Definición 2.0.1.** Dada una variedad Riemanniana  $S$ , un punto  $o$  y un entorno normal  $U$  de  $o$ , definimos la *simetría centrada en  $o$*  como el mapa

$$s_o : U \rightarrow U$$

tal que, si  $p = \exp v$  con  $v \in T_oM$  entonces  $s_o(p) = \exp(-v)$ .

Estas simetrías son difeomorfismos locales y además su diferencial en  $o$  es  $-id$ . Sin embargo podrían no ser isometrías, y podrían no extenderse a toda la variedad.

**Definición 2.0.2.** Decimos que una variedad Riemanniana  $S$  es un *espacio (globalmente) simétrico* si las simetrías centrales se extienden a isometrías globales.

Esta condición es fuerte, en particular implica que  $S$  es geodésicamente completo y además que el espacio es homogéneo (la acción del grupo de isometrías es transitiva), como vamos a demostrar.

**Proposición 2.0.3.** *Sea  $S$  un espacio simétrico. Entonces es geodésicamente completo.*

*Demostración.* Sea  $o \in M$  y  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = o$ . Supongamos por absurdo que  $\gamma$  no está definida para todo tiempo y consideremos un intervalo

maximal  $(a, b)$  para el cual está definida. Tomemos  $t_0 = b - \epsilon$  con  $\epsilon > 0$ . Como  $S$  es globalmente simétrico, la simetría central  $s_{\gamma(t_0)}$  se extiende a una isometría global. Además esta isometría debe preservar la geodésica  $\gamma$ . Como  $t_0$  está cerca de  $b$ , esto implica que la geodésica debe extenderse más allá de  $b$ , lo que es absurdo pues habíamos asumido que  $(a, b)$  era maximal.  $\square$

**Proposición 2.0.4.** *Sea  $S$  un espacio simétrico conexo. Entonces su grupo de isometrías es transitivo.*

*Demostración.* Sean  $p, q \in S$ . Si  $\gamma$  es una geodésica tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(t_0) = q$  entonces  $s_{\gamma(t_0/2)}$  es una isometría que lleva  $p$  en  $q$ .  $\square$

**Ejemplo 2.0.5.**  $\mathbb{R}^n$  es un espacio simétrico. Observar que la simetría centrada en 0 se extiende a una rotación de ángulo  $\pi$ , que es una isometría. El resto de las simetrías son conjugadas a ella por una traslación.

**Ejemplo 2.0.6.**  $S^n$  también es un espacio simétrico. En cada punto  $p$  la simetría respecto a ese punto se extiende a una rotación de ángulo  $\pi$  dejando fijo el eje que pasa por  $p$  y su punto antipodal, que también es una isometría

**Ejemplo 2.0.7.**  $\mathbb{H}^n$  también es un espacio simétrico. Para ejemplificar en  $\mathbb{H}^2$ , en el modelo de disco las rotaciones de ángulo  $\pi$  centradas en 0 son simetrías. Como la acción de  $PSL_2(\mathbb{R})$  es transitiva podemos trasladar la simetría a cualquier punto conjugando.

Estos tres ejemplos cumplen una condición más fuerte: son *isotrópicos*. Esto quiere decir que el estabilizador de un punto  $o \in S$  actúa transitivamente en  $T_o S$  por el diferencial.

**Ejemplo 2.0.8.** El toro plano  $\mathbb{T}^2$  es un espacio simétrico. La simetría central respecto a 0 es una isometría del plano que preserva el látice  $\mathbb{Z}^2$ , y por lo tanto baja al cociente. El resto de las simetrías se obtienen del hecho de que el toro es homogéneo.

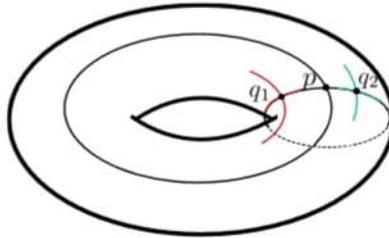
En el capítulo 4 vamos a ver un ejemplo de espacio simétrico simplemente conexo que no es isotrópico.

**Ejemplo 2.0.9.** Un toro con la métrica heredada de  $\mathbb{R}^3$  no es un espacio

simétrico. Si el toro está dado por las coordenadas

$$\begin{cases} x = (2 + \cos(v))\cos(u) \\ y = (2 + \cos(v))\sin(u) \\ z = \sin(v) \end{cases}$$

entonces el punto  $p = (2, 0, 1)$  tiene puntos a la izquierda con curvatura positiva y a la derecha con curvatura negativa, y por lo tanto no puede ser simétrico.



**Figura 2.1:** En el toro encajado en  $\mathbb{R}^3$ , los puntos a la izquierda de  $p$  (como  $q_1$ ) tienen curvatura negativa y los puntos a la derecha de  $p$  (como  $q_2$ ) tienen curvatura positiva. Una isometría debe preservar la curvatura y por lo tanto las simetrías no son isometrías locales.

Vamos a restringir nuestro estudio a espacios de curvatura no positiva. Nos será de utilidad también excluir los factores euclídeos que puedan tener. Esto hará que sus grupos de isometrías tengan propiedades útiles.

**Definición 2.0.10.** Decimos que una variedad Riemanniana  $M$  tiene factores euclídeos si existe  $n > 0$  tal que su cubrimiento universal  $\tilde{M}$  se descompone como un producto Riemanniano

$$\tilde{M} = N \times \mathbb{R}^n.$$

**Definición 2.0.11.** Decimos que un espacio simétrico es de tipo no compacto si es de curvatura no positiva y además no tiene factores euclídeos.

Solo vamos a estudiar este tipo de espacios. Si bien esta restricción puede parecer arbitraria, y podría limitar sustancialmente los ejemplos que podemos analizar, el teorema 2.0.12 nos dice que este no es el caso.

**Teorema 2.0.12.** *Sea  $S$  un espacio globalmente simétrico. Entonces  $S$  se descompone como un producto Riemanniano*

$$S = S_0 \times S_+ \times S_-,$$

*donde  $S_0$  tiene curvatura 0,  $S_+$  tiene curvatura no negativa y  $S_-$  tiene curvatura no positiva. Además podemos tomar  $S_+$  y  $S_-$  de tal forma que no tengan factores euclídeos.*

Observar que esto implica que  $S_-$  es de tipo no compacto. Una prueba de este teorema se puede encontrar en el capítulo 5 de [14]. También se puede probar (ver [20]) que los espacios simétricos de tipo no compacto son simplemente conexos y por el teorema 1.1.13 estos son difeomorfos a  $\mathbb{R}^d$  para algún  $d > 0$ .

A pesar de que vamos a estudiar espacios que no tienen factores euclideos, esto no quiere decir que no tengan subvariedades totalmente geodésicas isométricas a  $\mathbb{R}^d$ . Simplemente significa que no podemos descomponer la métrica Riemanniana como un producto donde uno de los factores es plano. De hecho una herramienta fundamental en nuestro análisis de espacios simétricos de tipo no compacto es estudiar los planos maximales que puedan contener.

**Definición 2.0.13.** Sea  $S$  una variedad Riemanniana. Decimos que una subvariedad  $\mathcal{A}$  es un *plano maximal* si es plana (es decir localmente isométrica a  $\mathbb{R}^d$ ), totalmente geodésica, y maximal respecto a estas propiedades.

En el caso de los espacios simétricos de tipo no compacto, los planos maximales son efectivamente copias de  $\mathbb{R}^d$  en la variedad.

# Capítulo 3

## Dinámica de matrices

La idea de este capítulo es encontrar comportamientos asintóticos en productos de matrices. Esto más adelante nos va a permitir deducir consecuencias geométricas sobre espacios simétricos, al estudiar la acción de su grupo de isometrías.

### 3.1. Definiciones básicas y un primer ejemplo

Vamos a estudiar cómo actúan matrices invertibles en espacios vectoriales. Como vamos a trabajar fundamentalmente con espacios proyectivos muchas veces necesitaremos excluir al 0 del espacio vectorial. Para fijar notación si  $V$  es un espacio vectorial denotamos  $V^\times = V \setminus \{0\}$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial real. *El espacio proyectivo de  $V$*  se define como el cociente  $\mathbb{P}(V) = V^\times / \sim$  donde  $x \sim y$  si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $x = \lambda y$ . Si  $V$  es un espacio vectorial topológico entonces consideramos en  $\mathbb{P}(V)$  la topología cociente.

Otra forma de pensar el proyectivo es como el espacio de rectas en  $V$  (o subespacios 1-dimensionales). Si lo pensamos así entonces podemos dotar a  $\mathbb{P}(V)$  con una métrica que además es compatible con la topología cociente. Entonces, dadas dos rectas  $v, w \in \mathbb{P}(V)$  definimos la distancia en el proyectivo

$$d(v, w) = \sin \angle(v, w)$$

tomando el ángulo más chico entre los que definen las rectas.

Una matriz  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  define un sistema dinámico en  $\mathbb{P}\mathbb{R}^d$ . Este sistema lineal está dado por la ecuación de evolución

$$v_n = Av_{n-1}.$$

Observar que esto está bien definido en el proyectivo. Otra forma de pensar esto es pensando en la acción  $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{P}\mathbb{R}^d$  donde para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$n \cdot v = A^n v.$$

Vamos a ver un ejemplo de cómo los valores propios nos permiten clasificar la dinámica de esta acción.

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $A$  una matriz diagonalizable, y sean*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_d$$

*sus valores propios. Sean  $\{u_1, \dots, u_d\}$  sus vectores propios tales que  $Au_i = \lambda_i u_i$ . Si  $S_{\lambda_1}$  es el subespacio propio de  $\lambda_1$  generado por los vectores  $\{u_1, \dots, u_p\}$  entonces*

$$\angle(A^n v, S_{\lambda_1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*si y solo si  $v$  no está en el hiperplano  $u_{p+1} \oplus \dots \oplus u_d$*

*Demostración.* Escribimos, a menos de sustituir  $v$  por un múltiplo  $v = u + \sum_{i=p+1}^d \alpha_i u_i$ , con  $\|u\| = 1$  y  $Au = \lambda_1 u$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \cos(\angle(u, A^n v)) &= \frac{\langle u, A^n v \rangle}{\|A^n v\|} = \frac{\lambda_1^n + \sum_{i=p+1}^d \lambda_i^n \alpha_i \langle u, u_i \rangle}{\|\lambda_1^n u + \sum_{i=p+1}^d \lambda_i^n \alpha_i u_i\|} \\ &= \frac{\lambda_1^n (1 + \sum_{i=p+1}^d (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^n \alpha_i \langle u, u_i \rangle)}{|\lambda_1^n| \|u + \sum_{i=p+1}^d (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^n \alpha_i u_i\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm 1 \end{aligned}$$

donde la convergencia se da porque  $\lambda_1/\lambda_i < 1$  y por lo tanto los coeficientes adentro de la sumatoria tienden a cero. Esto implica que el ángulo tiende a cero lo que concluye la prueba.  $\square$

Observar que en el contexto de la proposición anterior toda dirección que

esté contenida en el hiperplano  $u_1 \oplus \dots \oplus u_p$  será invariante: podemos pensar a los vectores propios como puntos fijos de esta transformación en el proyectivo. En caso de que  $p > 1$ , tenemos infinitas direcciones invariantes.

**Definición 3.1.3.** Decimos que una matriz  $A$  es *proximal* si existe un punto  $p \in \mathbb{P}\mathbb{R}^d$  y un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $Ap = p$  y  $A^n$  converge uniformemente a  $p$  en todo compacto contenido en  $U$ .

En realidad la proposición 3.1.2 se generaliza al caso no diagonalizable: si  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  entonces todo vector proyectivo con coordenadas en el subespacio real asociado a los bloques de Jordan de los valores propios de módulo más grande se acercará a él por la acción de  $A$ . También notamos que si el valor propio de módulo más grande es complejo entonces la acción no tiene puntos fijos en dicho subespacio. Formalizamos esta idea enunciando el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.4.** *Una matriz  $A$  es proximal si y solo si el valor propio de módulo más grande es real y su subespacio propio tiene dimensión 1.*

Un estudio detallado de este tema se puede ver en [9].

## 3.2. Valores singulares

¿Qué pasa si queremos ver la acción de más de una matriz en el proyectivo? En la sección 3.3 nos va a interesar actuar en el proyectivo multiplicando palabras largas de matrices que podrían ser diferentes (con algunas condiciones sobre las matrices y sus normas). Vamos a definir los valores singulares y probar una serie de lemas que justifican su importancia en este contexto.

**Definición 3.2.1.** Sea  $A \in GL_d(\mathbb{R})$ . Los *valores singulares* de  $A$  son las raíces cuadradas de los valores propios de  $A^*A$ . En general los denotamos por

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_d(A)$$

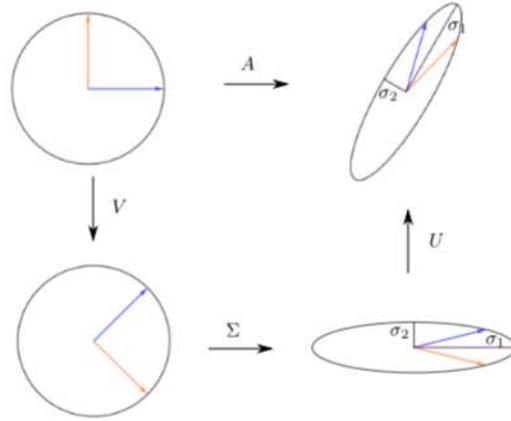
La importancia de estas definiciones la da el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.2** (Descomposición en valores singulares). *Sea  $A \in GL_d(\mathbb{R})$ . Entonces existen  $U, V \in SO(d)$  matrices unitarias tales que*

$$A = U\Sigma V$$

$$\text{con } \Sigma = \text{diag}(\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_d(A))$$

Esta descomposición es única si todos los valores singulares son distintos. Una esquema de ella se puede ver en la figura 3.1.



**Figura 3.1:** Acá se puede ver un esquema de cómo se ve la transformación de la esfera unidad (en este caso círculo) por medio de la descomposición SVD.

La descomposición también nos permite calcular los valores singulares de  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = V^t \Sigma^{-1} U^t$$

y por lo tanto  $\Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_1(A)^{-1}, \sigma_2(A)^{-1}, \dots, \sigma_d(A)^{-1})$ . Como los valores singulares los ordenamos de mayor a menor, tenemos que  $\sigma_p(A^{-1}) = \sigma_{d-p+1}(A)^{-1}$ .

La siguiente proposición, corolario del Teorema 3.2.2, nos da una forma geométrica de entender los valores singulares.

**Proposición 3.2.3.** *Los valores singulares son los largos de los ejes del elipsoide  $\mathcal{E} = \{Av : v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1/2\}$*

Esta proposición tiene implicancias profundas: se cumple que  $\sigma_1(A) = |A|$  (con la norma de operador). Es decir que

$$\sigma_1(A) = \sup_{v \in \mathbb{R}^d \setminus 0} \frac{|Av|}{|v|}. \quad (3.1)$$

Observar que los ejes del elipsoide  $\{Av : |v| = 1\}$  están dados por las columnas de  $U$ . En un abuso de notación, dados vectores  $\{w_1, \dots, w_i\}$  lineal-

mente independientes, denotamos por  $w_1 \oplus \dots \oplus w_i$  al subespacio generado por combinaciones lineales de dichos vectores.

Denotemos por  $\{v_1, \dots, v_d\}$  a la base ortonormal dada por las columnas de  $V$ . Si definimos  $V_p = v_1 \oplus v_2 \dots \oplus v_p$ , como  $V$  es ortogonal se cumple que  $V_p^\perp = V \setminus V_p$ . Luego tenemos la siguiente generalización de la ecuación (3.1):

$$\sigma_p(A) = \sup_{v \in V^\perp} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \|A|_{V^\perp}\|.$$

Una consecuencia directa de esto es que si definimos la *conorma* de una matriz  $A$  como

$$m(A) = \min_{v \in (\mathbb{R}^d)^\times} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \quad (3.2)$$

entonces  $\sigma_d(A) = m(A)$ . Esta caracterización de los valores singulares nos será de utilidad más adelante.

**Definición 3.2.4.** Decimos que una matriz  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  tiene un *salto de índice*  $p$  si

$$\sigma_p(A) > \sigma_{p+1}(A).$$

En este caso denotamos por  $U_p(A)$  al subespacio generado por los  $p$  ejes más grandes del elipsoide  $\mathcal{E} = \{Av : \|v\| = 1\}$ . Este es el subespacio generado por los  $p$  primeros vectores de la matriz  $U$  de la descomposición en valores singulares. Estas propiedades se pueden apreciar viendo la figura 3.1.

Si  $A$  tiene un salto de índice  $p$  entonces  $A^{-1}$  tiene un salto de índice  $d - p$ . Por lo tanto podemos definir  $S_{d-p}(A) = U_{d-p}(A^{-1})$ . Observar que  $S_{d-p}(A)$  son los últimos  $d - p$  vectores de  $V^t$ .

Intuitivamente podemos decir que pensamos a los espacios  $U_p(A)$  en el codominio de  $A$ , ya que estamos viendo imágenes de valores, y  $S_{d-p}(A)$  en su dominio (que es el codominio de  $A^{-1}$ ). Una cuenta rápida usando el párrafo anterior muestra que  $A(S_{d-p}(A)) = U_p(A)^\perp$ .

**Ejemplo 3.2.5.** Vamos a ver un ejemplo de por qué es de interés estudiar los valores singulares. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y un perturbado

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 10^{14} \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

con  $\varepsilon 10^{14}$  grande. Si bien la matriz  $A_\varepsilon$  tiene valores propios  $1 \pm \sqrt{\varepsilon 10^{14}}$ , la matriz  $A$  tiene valores propios 1. Ambas matrices tienen valores singulares del orden de  $10^{14}$ . Conocer los valores propios en el caso de la matriz  $A$  nos da poca información sobre hacia qué direcciones crecen más los vectores. Las proposiciones en las siguientes secciones van a ahondar más en este tema.

Ahora vamos a ver algunas estimativas de crecimiento de valores singulares. Esto nos permitirá ver comportamientos asintóticos de secuencias de matrices (puede verse como una generalización de lo visto en en la sección 3.1). Para eso vamos a considerar la estructura del espacio de subespacios  $k$ -dimensionales de un espacio vectorial.

### 3.2.1. Valores singulares y el Grassmaniano

**Definición 3.2.6.** Definimos el *Grassmaniano de dimensión  $k$*  de  $\mathbb{R}^d$  como el conjunto de subespacios de dimensión  $k$  de  $\mathbb{R}^d$ . A este espacio lo denotamos por  $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ .

Observar que este espacio es una generalización del proyectivo, en el sentido de que  $\mathbb{P}\mathbb{R}^d = \mathcal{G}_1(\mathbb{R}^d)$ . Al igual que con el proyectivo podemos dotarlo de una métrica definiendo una distancia:

$$d(P, Q) = \max\left\{ \max_{v \in Q^\times} \min_{w \in P^\times} \sin \angle(v, w), \max_{v \in P^\times} \min_{w \in Q^\times} \sin \angle(v, w) \right\}. \quad (3.3)$$

Si vemos a los elementos de  $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$  como subconjuntos de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^d$  entonces la distancia definida no es más que la distancia de Hausdorff. Por el teorema 3 del artículo [30] se tiene que dados dos elementos  $P, Q \in \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ , existe una isometría de  $\mathbb{R}^d$  que los intercambia. Esto nos dice que los dos valores dentro del máximo de la ecuación (3.3) son iguales y, junto con una comparación usual del seno y el coseno, nos da la siguiente proposición que nos permite calcular la distancia entre  $P$  y  $Q$  usando el ortogonal de  $P$ .

**Proposición 3.2.7.** *Ambos máximos en la definición de la distancia coinci-*

den, además se cumple que

$$d(P, Q) = \max_{w \in Q^\times} \min_{v \in P^\times} \frac{\|v - w\|}{\|w\|} = \max_{w \in Q^\times} \max_{u \in (P^\perp)^\times} \cos \angle(u, w)$$

Recordando las ecuaciones (3.1) y (3.2), podemos caracterizar los valores singulares en términos de normas y conormas de la matriz restringida a elementos de grassmanianos.

**Proposición 3.2.8.** *Si  $A \in GL_d(\mathbb{R}^d)$  entonces se cumple que*

$$\sigma_p(A) = \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(A|_P)$$

$$\sigma_{p+1}(A) = \min_{Q \in \mathcal{G}_{d-p}(\mathbb{R}^d)} \|A|_Q\|$$

*Demostración.* Vamos a demostrar la primera igualdad, la segunda usa ideas similares. Sea  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  de valores singulares  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ . Supongamos que  $v_p$  es el vector unitario tal que  $\|Av_p\| = \sigma_p$ , y  $V_p = v_1 \oplus \dots \oplus v_p$ . Recordar que  $v_i$  no es más que el la  $i$ -ésima columna de la matriz  $V$  en la descomposición en valores singulares de  $A$ . Entonces se tiene que

$$\sigma_p = m(A|_{V_p}) \leq \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(A|_P).$$

Por otro lado tenemos que si  $P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\sigma_p = \|A|_{V_{p-1}^\perp}\|$ . Como  $V_{p-1}^\perp$  tiene dimensión  $d - p + 1$  tenemos que existe un vector  $v$  no nulo en  $V_{p-1}^\perp \cap P$ . Esto implica que  $\sigma_p \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq m(A|_P)$ , y como  $P$  era genérico, concluimos que

$$\sigma_p \geq \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(A|_P)$$

lo que termina de probar la primera igualdad.  $\square$

Una consecuencia de este resultado es que nos permite estimar los valores singulares de un producto de matrices.

**Corolario 3.2.9.** *Si  $A, B \in GL_d(\mathbb{R})$  entonces*

$$\max\{m(A)\sigma_p(B), \sigma_p(A)m(B)\} \leq \sigma_p(AB) \leq \min\{\|A\|\sigma_p(B), \sigma_p(A)\|B\|\}.$$

*Demostración.* Probamos solo una de las cuatro desigualdades, el resto son

análogas. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_p(AB) &= \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(AB|_P) \geq \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(A|_{B(P)})m(B|_P) \geq \\ & m(A) \max_{P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)} m(B|_P) = m(A)\sigma_p(B).\end{aligned}$$

□

La caracterización de los valores singulares dada por el corolario 3.2.11 nos permitirá probar una serie de estimativas que usaremos para ver el comportamiento asintótico de una sucesión de matrices.

**Lema 3.2.10.** *Sea  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  con un salto de índice  $p$ . Entonces dado un vector  $v$  de norma uno se tiene que*

$$\|Av\| \geq \sigma_p(A) \sin \angle(v, S_{d-p}(A)). \quad (3.4)$$

Además, si  $Q \in \mathcal{G}_{d-p}(\mathbb{R}^d)$  entonces

$$\|A|_Q\| \geq \sigma_p(A) d(Q, S_{d-p}(A)). \quad (3.5)$$

Intuitivamente este lema dice que si un vector está lejos de la dirección menos expandida (es decir  $S_{d-p}(A)$ ) entonces podemos acotar el crecimiento del vector por el  $p$ -ésimo valor singular.

*Demostración.* Dado un vector  $v \in \mathbb{R}^d$  de norma 1, lo descomponemos como  $v = s + u$ , con  $s \in S_{d-p}(A)$  y  $u \in S_{d-p}(A)^\perp$ . Tenemos que

$$\sin \angle(v, S_{d-p}(A)) = \sin \angle(v, s) = \frac{\|v - s\|}{\|v\|} = \|u\|.$$

Por otro lado, como  $As$  y  $Au$  también son ortogonales y  $A(S_{d-p}(A)) = U_p(A)^\perp$  tenemos que

$$\|Av\| \geq \|Au\| \geq \sigma_p(A)\|u\|$$

lo que prueba la primera ecuación.

Para la segunda ecuación consideramos  $Q \in \mathcal{G}_{d-p}(\mathbb{R}^d)$  y aplicamos el ítem 1 para un  $v \in Q$  genérico de norma 1. Como

$$d(Q, S_{d-p}(A)) = \max_{v \in Q} \sin \angle(v, S_{d-p}(A))$$

la segunda ecuación se deduce como consecuencia directa de la primera.  $\square$

Como por definición tenemos que  $S_p(A^{-1}) = U_p(A)$  el siguiente corolario se deduce del lema aplicado a  $A^{-1}$  (que tiene un salto de índice  $d - p$ ) y de que  $\sigma_{p+1}(A)^{-1} = \sigma_{d-p}(A^{-1})$ .

**Corolario 3.2.11.** *Sea  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  con un salto de índice  $p$ . Entonces dado un vector  $v$  de norma uno se tiene que*

$$\|A^{-1}v\| \geq \sigma_{p+1}(A)^{-1} \sin \angle(v, U_p(A)) \quad (3.6)$$

Además  $P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)$  entonces

$$\|A^{-1}|_P\| \geq \sigma_{p+1}(A)^{-1} d(P, U_p(A)). \quad (3.7)$$

Aquí ya empezamos a ver la utilidad de los valores singulares: nos permiten relacionar el crecimiento de un vector al multiplicarlo por una matriz con el ángulo que forma respecto a ciertos subespacios. Llevamos esta idea un poco más lejos estimando cómo cambia  $U_p(A)$  al multiplicar a derecha o a izquierda por una matriz.

**Lema 3.2.12.** *Sean  $A, B \in GL_d(\mathbb{R})$  dos matrices tales que  $A$  y  $AB$  tienen saltos de índice  $p$ . Entonces*

$$d(U_p(A), U_p(AB)) \leq \|B\| \|B^{-1}\| \frac{\sigma_{p+1}(A)}{\sigma_p(A)}.$$

*Demostración.* La proposición se deduce de la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} d(U_p(AB), U_p(A)) &\leq \sigma_{p+1}(A) \|A^{-1}|_{U_p(AB)}\| \leq \sigma_{p+1}(A) \|B\| \|B^{-1}A^{-1}|_{U_p(AB)}\| \\ &= \sigma_{p+1}(A) \|B\| \sigma_p(AB)^{-1} \leq \sigma_{p+1}(A) \|B\| \|B^{-1}\| \sigma_p(A)^{-1} \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos el corolario 3.2.11 y en la última desigualdad el corolario 3.2.9.  $\square$

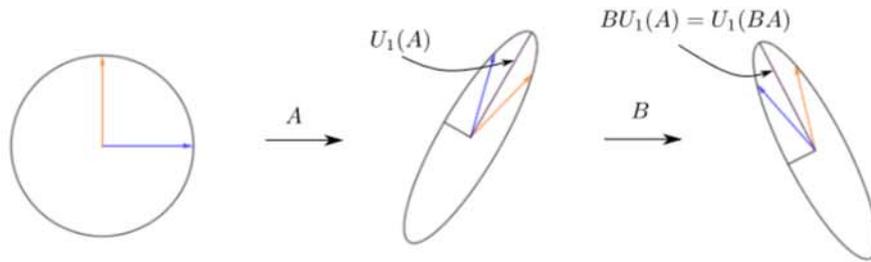
Una cuenta análoga nos permite probar un resultado similar cuando multiplicamos a  $A$  por una matriz por izquierda.

**Lema 3.2.13.** *Sean  $A, B \in GL_d(\mathbb{R})$ . Si  $A$  y  $BA$  tienen saltos de índice  $P$  entonces*

$$d(B(U_p(A)), U_p(BA)) \leq \|B\| \|B^{-1}\| \frac{\sigma_{p+1}(A)}{\sigma_p(A)}$$

Si bien la demostración de los dos lemas anteriores es similar, hay una diferencia cualitativa. El lema 3.2.12 nos dice que si  $|B|^{\pm 1}$  son pequeñas comparado con el tamaño del salto de índice  $p$  de  $A$  entonces multiplicar a derecha por  $B$  no cambia demasiado a  $U_p(A)$ . El caso extremo es que, cuando  $B$  ortogonal, entonces  $U_p(A) = U_p(AB)$  (ya que la matriz  $U$  en la descomposición en valores singulares no cambia).

Esa idea no es cierta cuando multiplicamos a izquierda ya que por ejemplo, si  $B$  es una rotación, la dirección  $U_p(BA)$  será el rotado por  $B$  de  $U_p(A)$ . El lema 3.2.13 formaliza esto. Para una idea gráfica se puede ver la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Ejemplo del lema 3.2.13 cuando  $B$  es una rotación. En este caso la dirección  $U_1(A)$  rota como  $B$ .

### 3.2.2. El encaje de Plücker

Ahora vamos a explicar una técnica que nos permite pensar el Grassmanniano  $p$ -dimensional como un espacio proyectivo, agrandando el espacio vectorial sobre el cuál consideramos dicho espacio. Esto nos permitirá pensar los  $p$ -valores singulares como 1-valores singulares y tendrá aplicaciones importantes en el capítulo 5.

**Definición 3.2.14.** Sea  $V$  un espacio vectorial. El *producto exterior  $p$ -ésimo* de  $V$  es el espacio vectorial de  $p$ -formas multilineales y alternadas de  $V$  y lo denotamos  $\wedge^p(V)$ .

Si  $\{u_1, \dots, u_d\}$  es una base de  $V$  entonces una base de  $\wedge^p(V)$  es

$$\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p} : i_j < i_{j+1}\}.$$

Observar que tiene dimensión  $\binom{d}{p}$  y además podemos dotarlo de una norma:  $|v_1 \wedge \dots \wedge v_p|$  se define como el volumen  $p$ -dimensional del paralelepípedo

con ejes  $v_1, \dots, v_p$ . Es fácil chequear también que esta norma proviene de un producto interno:

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle = \det((\langle v_i, w_j \rangle)_{i,j=1,\dots,p}).$$

Toda transformación lineal  $A : V \rightarrow V$  se extiende a una transformación  $\wedge^p A : \wedge^p V \rightarrow \wedge^p V$  mediante la fórmula:

$$\wedge^p A(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = A(v_1) \wedge \dots \wedge A(v_k)$$

Observar entonces que si  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  entonces

$$\frac{\|(\wedge^p A)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)\|}{\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|} = \det(A|_P),$$

donde  $P = \text{span}(v_1, \dots, v_p)$ . Esta estructura nos permite definir un encaje del grassmaniano de dimensión  $p$  en el proyectivo.

**Definición 3.2.15.** El *encaje de Plücker* es el mapa  $\iota : \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{R}^d)$  tal que, si  $P \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^d)$  está generado por los vectores  $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^d$  entonces  $\iota(P) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$

Un argumento simple muestra la siguiente proposición:

**Proposición 3.2.16.** *El encaje de Plücker es inyectivo.*

El siguiente lema es otra estimativa como la de 3.2.13. La diferencia es que esta estimativa no depende de la norma de  $B$ . Su demostración utiliza el encaje de Plücker y se puede ver en el Lema A.9 de [5].

**Lema 3.2.17.** *Sean  $A, B \in GL_d(\mathbb{R})$  tales que  $A, B$  y  $AB$  tienen un salto de índice  $p$ . Supongamos también que los espacio  $S_{d-p}(A)$  y  $U_p(B)$  son transversales. Entonces*

$$d(U_p(AB), U_p(A)) \leq \frac{\sigma_{p+1}(A)}{\sigma_p(A)} \left( \sin \angle(U_p(B), S_{d-p}(A)) \right)^{-\min\{p, d-p\}}$$

### 3.3. Cociclos lineales

Ahora que desarrollamos la teoría general de valores singulares vamos a usarla para estudiar la acción por multiplicación de varias matrices. Para formalizar esta idea vamos a definir el concepto de cociclo lineal y ver cómo

esto nos puede ayudar para entender la acción de un grupo allí. Consideremos entonces un espacio métrico compacto  $M$  y el fibrado vectorial trivial de dimensión  $d$  definido como  $E = M \times \mathbb{R}^d$ .

**Definición 3.3.1.** Una *métrica* en  $E$  es una elección de un producto interno en cada fibra  $\{x\} \times \mathbb{R}^d$  que varía continuamente con el punto.

**Definición 3.3.2.** Dado un mapa  $A : M \rightarrow GL_d(\mathbb{R})$  y un homeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  definimos un *cociclo lineal* como el mapa  $\psi : E \rightarrow E$  dado por

$$\psi(x, v) = (\phi(x), A(x)v)$$

Esta definición se puede extender a fibrados vectoriales no triviales pidiendo que sea un automorfismo del fibrado vectorial (es decir que preserve las fibras y sea lineal en cada una).

**Ejemplo 3.3.3.** Una transformación lineal invertible se puede pensar como un cociclo lineal cuando  $M$  es un punto.

Dado  $x \in M$  y  $v \in E_x$ , en un abuso de notación denotamos por  $\psi^n(v)$  como el elemento de  $E_{\phi^n(x)}$  que corresponde a la segunda coordenada de  $\psi^n(x, v)$ .

**Definición 3.3.4.** Supongamos que  $E$  se descompone como  $E^{cu} \oplus E^{cs}$ , donde ambos son subfibrados de dimensión constante y continuos. Decimos que esta descomposición es *invariante* por el cociclo lineal si se cumple que

$$\psi(E_x^{cs}) = E_{\phi(x)}^{cs}, \psi(E_x^{cu}) = E_{\phi(x)}^{cu}.$$

Si además existen constantes  $C, \lambda > 0$  tales que para todo  $x \in M$  y  $v, w$  vectores de norma 1 con  $v \in E_x^{cu}$ ,  $w \in E_x^{cs}$  se cumple que

$$\frac{\|\psi^n(v)\|}{\|\psi^n(w)\|} < Ce^{-\lambda n}$$

decimos que la descomposición es *dominada*.

### 3.3.1. El teorema de Bochi-Gourmelon

En un cociclo trivial  $M \times \mathbb{R}^d$  dado por  $\psi(x, v) = (\phi(x), A(x)v)$  podemos pensar  $\psi^n(x, v)$  como un producto de  $n$  matrices

$$\psi^n(x, v) = A(\phi^n(x))A(\phi^{n-1}(x)) \dots A(x)v.$$

Denotamos por  $A^n(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  a la transformación lineal tal que  $A^n(x)v = \psi^n(x, v)$ . El siguiente teorema nos da una relación entre cociclos lineales y valores singulares. Su prueba usa las estimativas de matrices de la sección 3.2 y se puede ver en [4].

**Teorema 3.3.5** (Bochi-Gourmelon). *Sea  $\psi : E \rightarrow E$  un cociclo lineal sobre un espacio métrico compacto  $M$ . Entonces  $\psi$  tiene una descomposición dominada  $E^{cu} \oplus E^{cs}$  de dimensiones  $p$  y  $d - p$  respectivamente si y solo si existen  $c > 0, \lambda > 0$  tales que para todo  $x \in M$  y  $n > 0$  se cumple que*

$$\frac{\sigma_{p+1}(A^n(x))}{\sigma_p(A^n(x))} < ce^{-\lambda n}$$

*Además se cumple que*

$$E_x^{cu} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_p(A^{-n}(x))$$

$$E_x^{cs} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{d-p}(A^n(x))$$

### 3.4. Dominación en secuencias de matrices

Vamos a ver una aplicación del teorema 3.3.5 para productos de matrices. Para poder aplicar el teorema queremos expresar productos de matrices como la acción de un cociclo lineal. A partir de ahora denotamos a  $\frac{\sigma_{p+1}(A)}{\sigma_p(A)}$  por  $\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}(A)$ . Dado  $K > 1$  definimos el conjunto compacto

$$\mathcal{D}(K) = \{A \in GL_d(\mathbb{R}), \|A\| \leq K, \|A^{-1}\| \leq K\}.$$

Si  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{Z}$  (que puede estar o no acotado) entonces  $\mathcal{D}^I$  es compacto con la topología producto, que es metrizable mediante la distancia

$$d((A_n), (B_n)) = \sum_{n \in I} 2^{-|n|} (\|A_n - B_n\| + \|A_n^{-1} - B_n^{-1}\|).$$

Dados  $p \in \{1, \dots, d-1\}$ ,  $\mu > 0$  y  $c > 0$  definimos el espacio  $\mathcal{D}(K, p, \mu, c, I)$  como el conjunto de sucesiones de matrices  $(A_n) \in \mathcal{D}^I$  tales que para todo

$m, n \in I$ ,  $m \geq n$  se cumple que

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}(A_m \dots A_{n+1} A_n) \leq ce^{-\mu(m-n+1)}. \quad (3.8)$$

Cuando una sucesión de matrices pertenece a uno de estos conjuntos decimos que está  $p$ -dominada. Como la condición es cerrada y las sucesiones están dentro de un compacto este conjunto es compacto.

**Ejemplo 3.4.1.** Dada una matriz autoadjunta  $A \in GL_d(\mathbb{R})$  con un salto de índice  $p$ . Sea  $K = \max\{\|A\|, \|A^{-1}\|\}$ . Como las matrices autoadjunta se diagonalizan en una base ortonormal tenemos que los valores singulares coinciden con los valores propios y  $\sigma_i(A^n) = \sigma_i(A)^n$ . Esto implica que

$$(A)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}(K, p, \log \sigma_{p+1}(A) - \log \sigma_p(A), 1, \mathbb{Z}).$$

Usando el lema 3.2.17 podemos probar que lo mismo se cumple para cualquier matriz  $A$ .

Observar que la condición 3.8 es muy similar a la condición de dominación del teorema 3.3.5. Sin embargo, nos falta encontrar el espacio compacto  $M$  y el cociclo para poder aplicarlo.

**Definición 3.4.2.** Definimos el *shift* como el mapa  $\vartheta : \mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z})$  dado por

$$\vartheta((A_n)) = (A_{n+1})$$

y el mapa  $A : \mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z}) \rightarrow GL_d(\mathbb{R})$  dado por

$$A((A_n)) = A_0.$$

Observamos que los mapas  $(\vartheta, A)$  forman un cociclo lineal sobre el fibrado  $\mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^d$  y la ecuación 3.8 es exactamente una de las equivalencias del Teorema 3.3.5. Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.3.** Dadas constantes  $K > 1$ ,  $p \in \{1, \dots, d-1\}$ ,  $\mu > 0$ ,  $c > 0$ , entonces, para cada sucesión  $x = (A_n) \in \mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z})$ , los límites

$$E^{cu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_p(A_{-1} A_{-2} \dots A_{-n})$$

$$E^{cs}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{d-p}(A_{n-1} A_{n-2} \dots A_0)$$

existen. Además,  $E^{cu} \oplus E^{cs}$  forman una descomposición dominada para el ciclo  $(\vartheta, A)$ .

Este resultado se debería comparar con lo analizado en la sección 3.1 donde utilizamos los valores propios para encontrar un “comportamiento asintótico” al considerar potencias grandes de matrices. Esto de alguna forma nos dice que las secuencias de matrices en  $\mathcal{D}(K, p, \mu, \mathbb{Z})$  tienen un comportamiento asintótico, pero vamos a ver que esto también nos da información de secuencias suficientemente largas pero no infinitas.

**Lema 3.4.4.** *Dados  $K > 1$ ,  $\mu > 0$  y  $c > 0$ , existe un  $\ell_1 \in \mathbb{N}$  y un  $\delta > 0$  que cumplen lo siguiente. Supongamos que  $I \subseteq \mathbb{Z}$  es un intervalo y  $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}(K, p, \mu, c, I)$ . Si  $n < k < m$  pertenecen a  $I$  y tanto  $k - n$  como  $m - k$  son mayores a  $\ell_1$  entonces*

$$\angle(U_p(A_{k-1} \dots A_{n+1} A_n), S_{d-p}(A_{m-1} \dots A_{k+1} A_k)) > \delta \quad (3.9)$$

*Demostración.* Supongamos por absurdo que esto no se cumple. Esto implica que existen  $K, \mu, c$  y sucesiones  $\ell_j \rightarrow \infty$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$  tales que para cada  $j$  hay un intervalo  $I_j \subseteq \mathbb{Z}$  y un elemento  $(A_i^{(j)})_{i \in I_j} \in \mathcal{D}(K, p, \mu, c, I_j)$  y enteros  $n_j < k_j < m_j$  con  $\min\{k_j - n_j, m_j - k_j\} > \ell_j$  que no cumplen la desigualdad (3.9). A menos de un cambio de índice podemos asumir que  $k_j = 0$ . Esto implica que  $m_j \rightarrow +\infty$ ,  $n_j \rightarrow -\infty$  y que

$$\angle(U_p(A_{-1}^{(j)} \dots A_{n_j+1}^{(j)} A_{n_j}^{(j)}), S_{d-p}(A_{m_j-1}^{(j)} \dots A_1^{(j)} A_0^{(j)})) \leq \delta_j.$$

Tomando subsucesiones podemos asumir que cada  $A_i^{(j)}$  converge a un  $A_i$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ . Como pertenecer a  $\mathcal{D}(K, p, \mu, c, \mathbb{Z})$  es una condición cerrada para la topología producto definida, podemos asumir que  $x = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  está en el conjunto, y la proposición 3.4.3 nos dice que

$$\begin{aligned} E^{cu}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_p(A_{-1} A_{-2} \dots A_{-n}) \\ E^{cs}(x) &= \lim_{n \rightarrow -\infty} S_{d-p}(A_{n-1} A_{n-2} \dots A_0) \end{aligned}$$

cumple las condiciones para ser una descomposición dominada, pero esto es absurdo pues  $\angle(E^{cu}(x), E^{cs}(x)) = 0$  y por lo tanto no puede serlo.  $\square$

De la proposición 3.4.3 sabemos que hay subespacios asintóticos en sucesiones de matrices dominadas. El lema siguiente nos habla de que en sucesiones

largas las matrices que se aplican primero cambian poco la dirección correspondiente a los valores singulares más grandes ( $U_p$ ).

**Lema 3.4.5.** *Dado  $K > 1$ ,  $\mu, c > 0$ , existe  $\ell \in \mathbb{N}$  y  $\tilde{c} > c$  tal que si  $I \subseteq \mathbb{Z}$  es un intervalo y  $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{D}(K, p, \mu, c, I)$  entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si  $n' < n < k$ , todos los índices están en  $I$  y  $k - n \geq \ell$  entonces*

$$d(U_p(A_{k-1} \dots A_{n+1} A_n), U_p(A_{k-1} \dots A_{n'+1} A_{n'})) < \tilde{c} e^{-\mu(k-n)}$$

2. *Si  $k < m < m'$ , todos los índices están en  $I$  y  $m - k \geq \ell$  entonces*

$$d(S_{d-p}(A_{m-1} \dots A_{k+1} A_k), S_{d-p}(A_{m'-1} \dots A_{k+1} A_k)) < \tilde{c} e^{-\mu(m-k)}.$$

*Demostración.* Vamos a probar el primer ítem, el segundo es análogo. Tomemos  $\ell \in \mathbb{N}$  tal que  $ce^{-\mu\ell} < 1$ . Tomemos una sucesión  $(A_n)_{n \in I}$  en  $\mathcal{D}(K, p, \mu, c, I)$  y un índice  $k \in I$ . Si tenemos un  $n$  tal que  $n - k \geq \ell$  entonces el espacio  $P_n = U_p(A_{k-1} \dots A_{n+1} A_n)$  está bien definido, ya que la elección de  $\ell$  y la condición de dominación nos asegura que el producto de estas matrices tiene un salto de índice  $p$ . Luego estamos en condiciones de aplicar el lema 3.2.13 para  $A = A_k \dots A_{n+1}$  y  $B = A_k$ . Esto nos dice que

$$d(P_{n-1}, P_n) \leq \|A_k\| \|A_k\|^{-1} \frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}(A) \leq K^2 c e^{-\mu(k-n)}.$$

Aplicando la desigualdad triangular, si  $n' \in I$  tenemos que

$$\begin{aligned} d(P_n, P_{n'}) &\leq d(P_n, P_{n-1}) + d(P_{n-1}, P_{n-2}) + \dots + d(P_{n'+1}, P_{n'}) \\ &\leq K^2 c e^{-\mu(k-n)} + K^2 c e^{-\mu(k-n-1)} + \dots + K^2 c e^{-\mu(k-n')} = \\ &K^2 c e^{-\mu(k-n)} \sum_{i=0}^{n-n'} e^{-\mu i} \leq \frac{K^2}{1 - e^{-\mu}} e^{-\mu(k-n)}. \end{aligned}$$

□

En el capítulo siguiente vamos a definir un espacio para el cual  $SL_d(\mathbb{R})$  actúe por isometrías, y usar los resultados sobre secuencias dominadas para poder sacar conclusiones de dicho espacio.

# Capítulo 4

## $SL_d(\mathbb{R})$

Vamos a construir un ejemplo explícito de variedad Riemanniana cuyo grupo de isometrías es un grupo de Lie de matrices:  $SL_d(\mathbb{R})$ . El trabajar con matrices nos permitirá utilizar las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior. A diferencia de  $GL_d(\mathbb{R})$ , el grupo  $SL_d(\mathbb{R})$  es semisimple y por eso empezamos con este ejemplo. Vamos a ver que este espacio, a pesar de ser simplemente conexo y altamente regular, tiene una geometría más complicada que los espacios de curvatura constante.

Si bien muchas de las construcciones que hacemos son específicas de  $SL_d(\mathbb{R})$ , como veremos en el capítulo 5, se generalizan para espacios simétricos de tipo no compacto.

### 4.1. El espacio simétrico de $SL_d(\mathbb{R})$

Para encontrar un espacio simétrico asociado a  $SL_d(\mathbb{R})$  podemos buscar un espacio invariante por  $SO(d)$ . Es natural entonces pensar en los productos internos de  $\mathbb{R}^d$ , pero tenemos que proyectivizar para hacer que el grupo que actúe sea  $SL_d(\mathbb{R})$  y no  $GL_d(\mathbb{R})$ .

**Definición 4.1.1.** Si denotamos por  $I_d$  el espacio de productos internos en  $\mathbb{R}^d$ , definimos *el espacio simétrico asociado a  $SL_d(\mathbb{R})$*  como

$$X_d = I_d / \sim$$

donde  $B \sim C$  si y sólo si existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $B(v, w) = \lambda C(v, w)$  para todo  $v, w \in \mathbb{R}^d$ .

En general nos referimos con letras mayúsculas  $(B, I)$  a productos internos y con letras minúsculas  $(o, p)$  a elementos de  $X_d$ , aunque más tarde haremos un abuso de notación y no distinguiremos entre ambos.

**Proposición 4.1.2.**  $X_d$  es contractible.

*Demostración.* Los productos internos son formas bilineales definidas positivas no degeneradas. Este espacio es un subconjunto convexo e invariante por homotecias positivas en el espacio vectorial de formas bilineales. Luego, su proyectivizado es contractible.  $\square$

A veces abusamos la notación y nos referimos a los elementos de  $X_d$  simplemente como productos internos. Vamos a identificar este espacio como el cociente de  $SL_d(\mathbb{R})$  por un grupo compacto. Para esto definimos una acción de  $SL_d(\mathbb{R})$  en  $X_d$  dada por

$$(g \cdot o)(v, w) = o(g^{-1}v, g^{-1}w)$$

**Proposición 4.1.3.** La acción es transitiva. Además el estabilizador de  $o_e$  (el proyectivizado producto interno usual en  $\mathbb{R}^d$ ) es  $SO(d)$ : un subgrupo compacto maximal de  $SL_d(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Por definición  $O(d)$  es el grupo de matrices que preserva distancias euclideas. A su vez,  $SO(d)$  es el subgrupo en  $O(d)$  de matrices que preserva orientación, por lo que son exactamente las matrices que preservan el producto interno usual. Además, es sabido que todos los productos internos en  $\mathbb{R}^d$  son de la forma  $B(v, w) = v^t g w$  con  $g \in GL_d(\mathbb{R})$  definida positiva y simétrica. El hecho de que la acción es transitiva se deduce entonces de que, por la descomposición de Cholesky, toda matriz no degenerada y definida positiva se puede escribir como  $g = h^t h$  (ver [29], capítulo 6) donde  $h$  tiene las entradas de la diagonal positivas. Como estamos trabajando con proyectivizados de productos internos, cambiando  $g$  por un múltiplo podemos asumir que  $\det(g) = 1$ . Esto implica que  $h$  está en  $SL_d(\mathbb{R})$  y luego  $B = h^{-1} \cdot o_e$ .  $\square$

Este resultado nos permite identificar  $X_d$  como el cociente  $SL_d(\mathbb{R})/SO(n)$ . Esto a su vez, por el teorema de la variedad cociente, nos dice que  $X_d$  tiene estructura de variedad diferenciable.

Observar que podíamos hacer una construcción similar cocientando  $PSL_d(\mathbb{R})/PSO(d)$ , sin embargo este es el mismo cociente que  $SL_d(\mathbb{R})/SO(d)$ .

Si consideramos  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  el álgebra de Lie de  $SL_d(\mathbb{R})$  y fijamos un producto interno  $o \in X_d$  tenemos definida una operación adjunta  $T \mapsto T^{*o}$ . Como esto depende del producto interno elegido algunas veces lo escribimos como subíndice para remarcar a qué elemento de  $X_d$  nos referimos. Vamos a ver que esta adjunta está bien definida en  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  (es decir que lleva elementos de traza cero en elementos de traza cero). Esto es un corolario de un lema que nos será de utilidad más adelante.

**Lema 4.1.4.** Sean  $o \in X_d$ ,  $T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  y  $g \in SL_d(\mathbb{R})$ . Entonces  $(gTg^{-1})^{*_{g \cdot o}} = gT^{*o}g^{-1}$ . En otras palabras,  $Ad_g \circ *_{g \cdot o} = *_{g \cdot o} \circ Ad_g$ . Además se cumple que  $tr(T^{*o}) = tr(T)$

*Demostración.* La demostración de la primera afirmación se deduce de la siguiente cadena de igualdades

$$g \cdot o(gTg^{-1}v, w) = o(Tg^{-1}v, g^{-1}w) = o(g^{-1}v, T^{*o}g^{-1}w) = g \cdot o(v, gT^{*o}g^{-1}w).$$

Para la segunda afirmación, si  $o_e$  es el producto interno usual, entonces  $T^{*o_e} = T^t$  por lo que la afirmación es trivial. Si  $o$  es cualquier otro producto interno entonces existe  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $o = g \cdot o_e$ . Por la primera parte de esta afirmación tenemos que

$$T^{*o} = (gg^{-1}Tgg^{-1})^{*o} = g(g^{-1}Tg)^t g^{-1}$$

y como la traza se preserva por trasponer y por conjugación tenemos lo buscado.  $\square$

**Corolario 4.1.5.** Si  $T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  entonces  $T^{*o} \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ .

**Definición 4.1.6.** Dado un producto interno  $o$  en  $\mathbb{R}^d$  definimos la *involución de Cartan* como  $\sigma : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  dada por  $\sigma(T) = -T^{*o}$ , donde la operación  $*_o$  es la operación adjunta respecto a ese producto interno.

Esta transformación induce una descomposición de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  en los subespacios

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^o &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : \sigma(T) = T\} \\ \mathfrak{p}^o &= \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : \sigma(T) = -T\}. \end{aligned}$$

Observar que  $\mathfrak{p}^o$  son exactamente las matrices autoadjuntas para  $o$ , mientras que  $\mathfrak{k}^o$  son las antisimétricas vistas en una base  $o$ -ortogonal. A veces, cuando se asume el punto  $o$ , omitimos el superíndice.

**Proposición 4.1.7.** *Sea  $\sigma$  la involución de Cartan para el producto interno  $o$ . Entonces*

1.  $\sigma$  es un morfismo involutivo de álgebras de Lie.
2.  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{k}^o \oplus \mathfrak{p}^o$
3.  $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{p}^o] \subseteq \mathfrak{p}^o$
4.  $[\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o] \subseteq \mathfrak{k}^o$
5.  $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{k}^o] \subseteq \mathfrak{k}^o$

*Demostración.*

1. Es claro que es involutivo, vamos a ver que es un morfismo. Si  $T, S \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  entonces

$$\begin{aligned} [\sigma(T), \sigma(S)] &= \sigma(T)\sigma(S) - \sigma(S)\sigma(T) = T^*S^* - S^*T^* \\ &= (ST)^* - (TS)^* = (ST - TS)^* = \sigma([T, S]) \end{aligned}$$

2. Podemos descomponer cualquier matriz  $T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  como

$$T = \frac{T + \sigma(T)}{2} + \frac{T - \sigma(T)}{2}$$

3. Demostramos el ítem 3, los restantes son análogos. Si  $X \in \mathfrak{k}^o, Y \in \mathfrak{p}^o$

$$\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [-X, Y] = -[X, Y]$$

□

A la descomposición inducida por estos subespacios se la llama *descomposición de Cartan*. Podemos pensar el ítem 3 de esta proposición como que  $\mathfrak{k}^o$  actúa en  $\mathfrak{p}^o$  a través de la acción adjunta. Además, en particular nos dice que  $\mathfrak{k}^o$  es una subálgebra de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ . Vamos a ver que su grupo de Lie corresponde a los elementos de  $SL_d(\mathbb{R})$  que fijan el producto interno  $o$ .

**Proposición 4.1.8.**  $\mathfrak{k}^o$  es el álgebra de Lie de  $K^o = \{g \in SL_d(\mathbb{R}) : g \cdot o = o\}$ .

*Demostración.* Si  $o_e$  es el producto interno usual entonces  $K^{o_e} = SO(d)$ , el grupo de matrices  $o$ -ortogonales. Su álgebra de Lie es el conjunto de matrices antisimétricas  $\mathfrak{so}(d)$ , que por definición coincide con  $\mathfrak{k}^{o_e}$ .

Si  $o = g \cdot o_e$  entonces  $K^o = gK^{o_e}g^{-1}$  y su álgebra de Lie es entonces  $Ad_g(\mathfrak{so}(d))$ , que esto coincide con  $\mathfrak{k}^o$  por el lema 4.1.4.

□

## 4.2. $X_d$ como un espacio simétrico

La idea de esta sección es encontrar una métrica en  $X_d$  para la cual  $SL_d(\mathbb{R})$  actúe por isometrías. A su vez, vamos a probar que la simetría central respecto a todo punto  $o \in X_d$  se puede extender a isometrías globales, lo que finalmente probará que  $X_d$  es globalmente simétrico.

Recordamos que la simetría central en  $o$  es el mapa que localmente invierte las geodésicas centradas en  $o$  (ver definición 2.0.1).

También daremos coordenadas que nos permitirán identificar  $T_oX$  con el subespacio  $\mathfrak{p}^o$  de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ .

**Definición 4.2.1.** Sea  $o \in X_d$

1. Definimos la *acción en  $o$*  como el mapa  $\pi_o : SL_d(\mathbb{R}) \rightarrow X_d$  dado por  $\pi_o(g) = g \cdot o$
2. Definimos la *traslación por  $g$*  como el mapa  $\varphi_g : X_d \rightarrow X_d$  dado por  $\varphi_g(p) = g \cdot p$
3. Definimos la *conjugación por  $g$*  como el mapa  $\phi_g : SL_d(\mathbb{R}) \rightarrow SL_d(\mathbb{R})$  dado por  $\phi_g(h) = ghg^{-1}$

A simple vista estas notaciones podrían parecer innecesarias, pero serán de utilidad a la hora de derivar los mapas. Observamos que

$$\pi_{g \cdot o} \circ \phi_g(h) = \pi_{g \cdot o}(ghg^{-1}) = gh \cdot o = \varphi_g \circ \pi_o(h).$$

Esta relación la resumimos en el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
SL_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi_g} & SL_d(\mathbb{R}) \\
\pi_o \downarrow & & \downarrow \pi_{g \cdot o} \\
X_d & \xrightarrow{\varphi_g} & X_d
\end{array} \tag{4.1}$$

Vamos a estudiar el diferencial del mapa  $\pi_o$ , esto nos permitirá identificar el tangente en  $o$  con el subconjunto  $\mathfrak{p}^o$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ .

**Proposición 4.2.2.** *El mapa  $\pi^o = d_{id}\pi_o : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \rightarrow T_oX_d$  es sobreyectivo, además,  $\ker \pi^o = \mathfrak{k}^o$  y por lo tanto  $\pi^o|_{\mathfrak{p}^o}$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Tomando diferenciales en el diagrama (4.1) y usando la regla la cadena tenemos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \\
\pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^{g \cdot o} \\
T_oX_d & \xrightarrow{d_o\varphi_g} & T_{g \cdot o}X_d
\end{array} \tag{4.2}$$

Como los mapas  $Ad_g$  y  $d_o\varphi_g$  para  $g \in G$  son isomorfismos, tenemos que los mapas  $\pi^p$  tienen rango constante y por el teorema de Saard (ver por ejemplo [15]) son todos sobreyectivos. La segunda parte de la proposición viene del hecho de que  $\mathfrak{k}^o$  es el espacio tangente en  $o$  del estabilizador del punto.  $\square$

**Definición 4.2.3.** A la inversa de la restricción de  $\pi^o$  a  $\mathfrak{p}^o$  la denotamos por  $\theta^o : T_oX_d \rightarrow \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  y la llamamos *forma de Maurer-Cartan*.

Ahora vamos a usar la forma de Maurer-Cartan para definir una métrica en  $X_d$  a partir de la forma de Killing de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ .

**Definición 4.2.4.** Definimos la *forma de Killing de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$*  como la forma bilineal simétrica

$$\begin{aligned}
\kappa : \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(S, T) &\mapsto 2d\text{tr}(ST)
\end{aligned}$$

Una cuenta (complicada) muestra que esta es la expresión explícita de la forma definida en general en 1.2.18. Esta forma bilineal simétrica tiene propiedades interesantes que listamos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.5.** *Sea  $\kappa$  la forma de Killing de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ . Entonces*

1.  $\kappa$  es definida positiva en  $\mathfrak{p}^o$  y definida negativa en  $\mathfrak{k}^o$
2.  $\kappa(\mathfrak{p}^o, \mathfrak{k}^o) = 0$
3.  $\kappa$  es no degenerada.

*Demostración.*

1. Sea  $X \in \mathfrak{p}^o$ . Esto quiere decir que  $X$  es  $*_o$ -autoadjunta y por lo tanto simétrica vista en una base ortogonal del producto interno  $o$ . En particular tenemos que existe  $P$  tal que  $X = PYP^{-1}$  con  $Y$  simétrica. Esto implica que  $\kappa(X, X) = \text{tr}(X^2) = \text{tr}(Y^2)$ . Ahora calculamos la traza de  $Y^2$  escribiendo  $Y = (y_{ij})$ .

$$\text{tr}(Y^2) = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d y_{ki}y_{ik} = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d y_{ki}^2 \geq 0$$

Un argumento similar muestra que la forma de Killing es definida negativa en  $\mathfrak{k}^o$ .

2. Sean  $X \in \mathfrak{p}^o, Y \in \mathfrak{k}^o$ . Por el lema 4.1.4 se tiene que

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}((XY)^*) = \text{tr}(-YX) = -\text{tr}(XY),$$

luego  $\text{tr}(XY) = 0$

3. Sea  $T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  una matriz no nula. Consideramos  $T = X + Y$  con  $X \in \mathfrak{p}^o$  e  $Y \in \mathfrak{k}^o$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad por el punto 1, que  $X \neq 0$ . Por los puntos anteriores se tiene que  $\kappa(T, X) = \kappa(X, X) \neq 0$ .

□

Notar que  $\kappa|_{\mathfrak{p}^o}$  al ser definida positiva es un producto interno. Con él podemos definir una métrica Riemanniana en  $X_d$ . Dado  $o \in X_d$ , definimos el producto interno en  $T_o X_d$  mediante la fórmula

$$\langle v, w \rangle_o = \kappa(\theta^o(v), \theta^o(w)).$$

Aquí es importante notar que el diagrama (4.1) junto a la definición de la forma de Maurer-Cartan nos asegura que el producto interno varía diferenciablemente con el punto base  $o$ .

**Proposición 4.2.6.** *La acción  $\varphi_g : X_d \rightarrow X_d$  es una isometría.*

*Demostración.* El objetivo es probar que  $\langle v, w \rangle_o = \langle d_o\varphi_g(v), d_o\varphi_g(w) \rangle_{g \cdot o}$ . Para eso recordamos el diagrama (4.2) que, reemplazando  $\pi^o$  por su inversa, nos queda

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) \\ \theta^o \uparrow & & \uparrow \theta^{g \cdot o} \\ T_o X_d & \xrightarrow{d_o\varphi_g} & T_{g \cdot o} X_d \end{array} \quad (4.3)$$

lo que implica la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_o &= \kappa(\theta^o(v), \theta^o(w)) = \kappa(Ad_g(\theta^o(v)), Ad_g(\theta^o(w))) \\ &= \kappa(\theta^{g \cdot o} d_o\varphi_g(v), \theta^{g \cdot o} d_o\varphi_g(w)) = \langle d_o\varphi_g(v), d_o\varphi_g(w) \rangle_{g \cdot o} \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple porque la acción adjunta preserva la traza de las matrices y la tercera igualdad es por la conmutatividad del diagrama.  $\square$

**Teorema 4.2.7.**  *$X_d$  equipado con la métrica Riemanniana definida anteriormente es un espacio globalmente simétrico.*

*Demostración.* Nuestro objetivo es encontrar, para cada  $o \in X_d$ , una isometría global  $s_o$  con  $s_o o = o$  y  $d_o s_o = -id$ . Recordamos que la acción de  $SL_d(\mathbb{R})$  es transitiva y podemos identificar  $X_d \simeq SL_d(\mathbb{R})/K^o$ , donde  $K^o = \{g \in SL_d(\mathbb{R}) : g \cdot o = o\}$ . La idea entonces es encontrar una involución en  $SL_d(\mathbb{R})$  que nos permita definir una simetría en  $X_d$ .

Dado  $o \in X_d$ , definimos el mapa  $\tau_o : SL_d(\mathbb{R}) \rightarrow SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $\tau_o(g) = (g^{*o})^{-1}$ . Observar que

$$\tau_o(gh) = (gh)^{*o^{-1}} = (h^{*o} g^{*o})^{-1} = g^{*o^{-1}} h^{*o^{-1}} = \tau_o(g)\tau_o(h)$$

por lo que es un morfismo de grupos. A su vez observamos que  $Fix(\tau_o) = K^o$ , y que  $d_{id}\tau_o(T) = -T^{*o}$ . Ahora definimos la simetría basada en  $o$  como el mapa  $s_o : X_d \rightarrow X_d$  definido de la siguiente manera: sea  $p \in X_d$  y  $h \in SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $p = h \cdot o$ . Entonces  $s_o(p) = s_o(h \cdot o) = \tau_o(h) \cdot o$ . Observamos que  $s_o$  y  $\tau_o$  hacen que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc}
SL_d(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tau_o} & SL_d(\mathbb{R}) \\
\pi_o \downarrow & & \downarrow \pi_o \\
X_d & \xrightarrow{s_o} & X_d
\end{array} \tag{4.4}$$

**Afirmación 1:**  $s_o$  está bien definido.

Efectivamente, si  $p = h \cdot o = h' \cdot o$  entonces  $h^{-1}h' \in K_o$ . Luego

$$\tau_o(h) \cdot o = \tau_o(h)h^{-1}h' \cdot o = \tau_o(hh^{-1}h') \cdot o = \tau_o(h') \cdot o$$

**Afirmación 2:**  $s_o$  es una simetría centrada en  $o$

Sea  $v \in T_oX$ . Por la forma de Maurer-Cartan podemos identificar  $v = \pi_o(X)$  con  $X \in \mathfrak{p}^o$ . Luego computamos el diferencial de  $s_o$  en la dirección de  $v$ :

$$d_o s_o(v) = d_o s_o(\pi_o(X)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_o \circ \pi_o(e^{tX}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_o(e^{-tX}) = \pi_o(-X) = -v$$

donde en la segunda igualdad usamos la regla de la cadena y en la tercera usamos el diagrama (4.4), que  $\tau^o$  conmuta con la exponencial y que  $X^{*o} = -X$ . Esto implica que  $d_o s_o = -id$  lo que a su vez implica que  $s_o$  es una simetría global.  $\square$

**Afirmación 3:**  $s_o$  es una isometría.

Primero observamos que si  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  entonces  $s_o \varphi_g = \varphi_{\tau_o(g)} s_o$ . Efectivamente, si  $p = h \cdot o$  tenemos que

$$s_o \varphi_g(p) = s_o(\varphi_g(h \cdot o)) = s_o(gh \cdot o) = \tau_o(g)\tau_o(h) \cdot o = \tau_o(g)s_o(p) = \varphi_{\tau_o(g)} s_o(p).$$

Consideremos entonces  $v \in T_oX_d$ . Vamos a usar que el diferencial de  $s_o$  en  $o$  es  $-id$  para probar que  $s_o$  es una isometría. Para eso computamos

$$d_{\varphi_g(o)} s_o(d_o \varphi_g(v)) = d_o s_o \varphi_g(v) = d_o \varphi_{\tau_o(g)} s_o(v) = -d_o \varphi_{\tau_o(g)}(v)$$

Sean entonces  $p = g \cdot o$  y  $u', v' \in T_pX_d$ . Podemos escribir  $u' = d_o(\varphi_g(u)), v' =$

$d_o(\varphi_g(v))$ . Luego calculamos

$$\begin{aligned} \langle d_p s_o(u'), d_p s_o(v') \rangle_{s_o(p)} &= \langle d_{\varphi_g(o)} s_o d_o(\varphi_g(u)), d_{\varphi_g(o)} d_o(\varphi_g(v)) \rangle_{s_o(p)} \\ &= \langle -d_o \varphi_{\tau^o(g)} d_o(\varphi_g(u)), -d_o \varphi_{\tau^o(g)} d_o(\varphi_g(v)) \rangle_{s_o(p)} \\ &= \langle d_o \varphi_g(u), d_o \varphi_g(v) \rangle_p = \langle u', v' \rangle_p \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos que  $\varphi_{\tau^o(g)}$  es una isometría.

### 4.3. Planos geodésicos maximales en $X_d$

Vamos a describir planos maximales en  $X_d$ , recordar que estas son subvariedades planas totalmente geodésicas y maximales. Una definición detallada de este concepto se puede ver en 2.0.13.

**Proposición 4.3.1.** *La geodésica por  $o \in X_d$  de velocidad  $v \in T_o X_d$  es la curva  $\alpha(t) = \pi_o(e^{t\theta^o(v)})$ . Además, si  $X \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  entonces la curva  $\gamma(t) = \pi_o(e^{t\pi^o(X)})$  es geodésica si y solo si  $X \in \mathfrak{p}^o$ .*

La proposición 4.3.1 nos permite entender las geodésicas de  $X_d$ . Sin embargo, la probaremos recién en 5.2.1. Consideramos  $X \in \mathfrak{p}^o$ . Esta es una matriz  $o$ -autoadjunta y por lo tanto se diagonaliza en una base  $o$ -ortonormal que llamaremos  $\varepsilon$ . Como  $X$  se diagonaliza en  $\varepsilon$  entonces  $e^{tX}$  también.

Si denotamos por  $\lambda_X(u)$  al valor propio de  $X$  en  $u \in \varepsilon$ , tenemos que, para todos  $v, w \in \varepsilon$

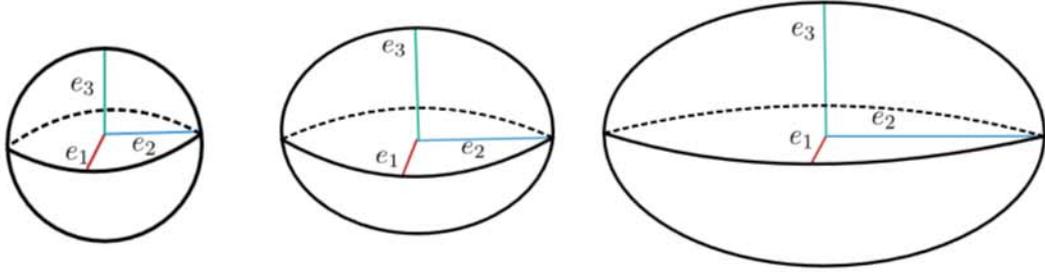
$$\pi_o(e^{tX})(v, w) = o(e^{-tX}v, e^{-tX}w) = e^{-t(\lambda_X(v) + \lambda_X(w))} o(v, w).$$

Esto nos da intuición de qué son las geodésicas por  $o \in X_d$ : son productos internos para los cuales  $\varepsilon$  es ortogonal pero la norma de cada elemento de  $\varepsilon$  cambia con una velocidad distinta.

**Ejemplo 4.3.2.** Consideremos el proyectivizado del producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$  denotado por  $o_e \in X_3$ . Consideremos también la base canónica de  $\{e_1, e_2, e_3\}$  y la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para  $o_e$  los tres elementos de la base canónica miden lo mismo (como estamos proyectivizando solo podemos hablar de cómo se comparan las normas, no de cuánto miden en sí). Sin embargo cuando avanzamos en la geodésica  $\pi_{o_e}(e^{tX})$ , el vector  $e_1$  se hace comparativamente más grande que los otros dos, mientras que  $e_3$  se hace comparativamente más grande que  $e_2$ . Para esto se puede ver la figura 4.1



**Figura 4.1:** Esquema de cómo se ve la esfera unitaria en tres tiempos positivos para la geodésica por  $\pi_{o_e}(e^{tX})$  en  $X_3$  del ejemplo 4.3.2.

Observamos que  $X_d$  es un espacio no compacto y además su grupo de isometrías es  $SL_d(\mathbb{R})$  que es simple. De esto concluimos que es un espacio simétrico de tipo no compacto.

### 4.3.1. Caracterización de los planos maximales

La dimensión de los planos maximales puede variar dependiendo de la variedad Riemanniana en la que estamos trabajando. Sin embargo, en espacios simétricos esto no es así. Esto solo lo podremos ver cuando probemos la fórmula de curvatura en el teorema 5.2.3.

En esta sección vamos a ver que los planos maximales de  $X_d$  se corresponden con subálgebras maximales abelianas de  $\mathfrak{p}^o$ . Esta relación podremos explicarla en detalles cuando estudiemos los espacios simétricos en general en el capítulo siguiente. Sin embargo, esta correspondencia justifica la relevancia del estudio de estas subálgebras.

Observar que las matrices de  $\mathfrak{p}^o$  son todas  $o$ -autoadjuntas, y por lo tanto se diagonalizan en bases  $o$ -ortogonales. No tiene sentido hablar de ortonormalidad porque estamos trabajando con productos internos a menos de homotecia.

**Definición 4.3.3.** Sea  $o \in X_d$  y  $\varepsilon$  un conjunto  $o$ -ortogonal de  $d$  rectas en  $\mathbb{R}^d$ .

A  $\varepsilon$  lo llamamos *base ortogonal proyectivizada* y definimos

$$\mathfrak{a}_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{p}^o : X \text{ es diagonalizable en } \varepsilon\}$$

**Proposición 4.3.4.** *En el contexto de la definición anterior se cumple que  $\pi_o(\exp(\mathfrak{a}_\varepsilon)) = \{p \in X_d : \varepsilon \text{ es } p\text{-ortogonal}\}$*

*Demostración.* Primero observamos que las dimensiones de ambos espacios coinciden.  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  tiene dimensión  $d - 1$ , ya que podemos elegir los valores propios de  $d - 1$  vectores de  $\varepsilon$  y el último queda condicionado por el hecho de que todos los elementos de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  tienen traza 0.

Por otro lado si  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$  los productos internos que dejan  $\varepsilon$  ortogonal son de la forma  $p = a_1 du_1^2 + \dots + a_d du_d^2$ . Como estamos proyectivizando tenemos  $d - 1$  elecciones posibles.

Como ambos conjuntos tienen la misma dimensión, con probar una inclusión es suficiente. Sea  $p \in \pi_o(\exp(\mathfrak{a}_\varepsilon))$ . Entonces  $p(v, w) = o(e^X v, e^X w)$  con  $X \in \mathfrak{a}_\varepsilon$ . Como  $X$  es diagonalizable en  $\varepsilon$  entonces  $e^X$  también lo es, luego si  $v \neq w \in \varepsilon$  se cumple que

$$o(e^X v, e^X w) = \mu \lambda o(v, w) = 0.$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema que describe los planos maximales, aunque la maximalidad la probaremos recién en el capítulo siguiente.

**Teorema 4.3.5.** *La subvariedad  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_\varepsilon})$  es totalmente geodésica e isométrica a  $(\mathfrak{a}_\varepsilon, \kappa|_{\mathfrak{a}_\varepsilon})$ .*

*Demostración.* Sea  $f : \mathfrak{a}_\varepsilon \rightarrow X_d$  el mapa dado por  $f(X) = \pi_o(e^X)$ . Vamos a mostrar que esto es una isometría entre  $(\mathfrak{a}_\varepsilon, \kappa|_{\mathfrak{a}_\varepsilon})$  y su imagen y que su imagen es totalmente geodésica.

Tomemos  $X, Y \in \mathfrak{a}_\varepsilon$ , y denotamos  $p = e^X \cdot o$ . Luego,

$$\begin{aligned} d_X f(Y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(X + tY) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_o(e^{X+tY}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_o(e^X e^{tY}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_p(e^{tY}) = \pi^p(Y) \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos que  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  es abeliana (y por lo tanto podemos separar la exponencial). Esto implica que la subvariedad es totalmente geodésica, ya que

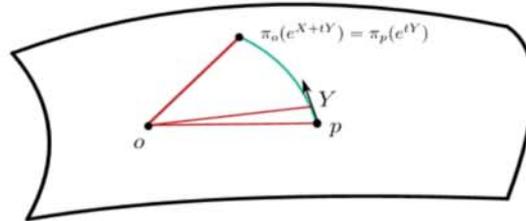
$$\pi_o(e^{X+tY}) = \pi_p(e^{tY})$$

y por lo tanto la geodésica por  $p$  con velocidad  $Y$  (abusando de la forma de Maurer-Cartan) está en  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_\varepsilon})$  (ver figura 4.2).

Por hipótesis tenemos que  $Y$  es diagonalizable en  $\varepsilon$  y por la proposición anterior sabemos que  $\varepsilon$  es  $p$  ortogonal, esto implica que  $Y$  es simétrica respecto a  $p$  o, lo que es lo mismo, que  $Y \in \mathfrak{p}^p$ . En particular tenemos que  $\theta^{e^X \cdot o}(\pi^p(Y)) = Y$ . Ahora estamos en condiciones de calcular el pullback de la métrica y ver que  $f$  es una isometría.

$$\begin{aligned} \langle d_X(f(Y)), d_X(f(Z)) \rangle_p &= \langle \pi^p(Y), \pi^p(Z) \rangle_p \\ &= \kappa(\theta^p(\pi^p(Y)), \theta^p(\pi^p(Z))) = \kappa(X, Y) \end{aligned}$$

como queríamos probar. □



**Figura 4.2:** Esquema de la idea de la demostración del teorema 4.3.5.

Cuando veamos la fórmula de la curvatura en 5.2.3 vamos a ver que el par  $(\mathfrak{a}_\varepsilon, \kappa_\varepsilon)$ , y por lo tanto  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_\varepsilon})$ , son isométricos a  $\mathbb{R}^{d-1}$ . En realidad se cumple un resultado más fuerte: es cierto que  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_\varepsilon})$  además de ser plana y totalmente geodésica, es un plano maximal. Además, todo plano maximal que pasa por  $o$  se realiza como un  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}_\varepsilon})$  para alguna base ortogonal de  $d$  rectas  $\varepsilon$ . Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

**Proposición 4.3.6.** *Toda plano maximal por  $o$  es de la forma  $\pi_o(\mathfrak{a}_\varepsilon)$  para alguna base  $o$ -ortogonal  $\varepsilon$*

**Corolario 4.3.7.** *Toda plano maximal de  $X_d$  tiene dimensión  $d - 1$*

Vamos a ver que en espacios simétricos en general todos los planos maximales tienen la misma dimensión.

**Corolario 4.3.8.** *Dados dos planos maximales  $\mathcal{A} = \pi_o(e^{a_\varepsilon})$  y  $\mathcal{B} = \pi_o(e^{a_{\varepsilon'}})$  existe un elemento  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $g \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B}$ .*

*Demostración.* Como  $K^o$  actúa transitivamente en las bases  $o$ -ortogonales tenemos que existe un elemento  $k \in K^o$  tal que  $k\varepsilon = \varepsilon'$ . Si  $A \in \mathfrak{a}_\varepsilon$  entonces  $kAk^{-1} \in \mathfrak{a}_{\varepsilon'}$ , pues  $kAk^{-1}$  es diagonalizable en  $\varepsilon'$ . Esto implica que  $ke^Ak^{-1} \in e^{a_{\varepsilon'}}$ , y este mapa es invertible. Como  $k \in K^o$ ,  $k^{-1} \cdot o = o$  y por lo tanto  $ke^A \cdot o \in \mathcal{B}$ . Como el mapa es invertible, tenemos que  $k\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .  $\square$

Como consecuencia de esto tenemos que  $SL_d(\mathbb{R})$  actúa transitivo en el espacio de planos maximales. En lo que sigue hacemos un estudio de lo que ocurre para las geodésicas.

### 4.3.2. Raíces

Sabemos que en cualquier variedad geodésicamente completa y simplemente conexa de curvatura no positiva, dados dos puntos  $o$  y  $p$  existe una única geodésica completa que los contiene. En nuestro contexto es de interés preguntarse lo mismo pero para planos maximales: ¿será que existe un único plano maximal que contiene a  $o$  y a  $p$ ? Como los planos maximales son por definición totalmente geodésicos, esta pregunta es equivalente a preguntarse si existe un único plano maximal que contiene a la geodésica que pasa por  $o$  y  $p$ .

Reformulamos entonces esta pregunta: dado un punto y un vector tangente, ¿existe un único plano maximal que contiene a la geodésica con esa velocidad? Lo desarrollado en la sección 4.3 nos da una forma de responder a esta pregunta.

A partir de esta sección en un abuso de notación muchas veces nos referimos a los elementos de  $\mathfrak{p}^o$  como vectores de  $T_oX_d$ , omitiendo la forma de Maurer-Cartan.

**Proposición 4.3.9.** *Si todos los valores propios de  $X \in \mathfrak{p}^o$  son distintos entonces hay un único plano maximal que contiene a la geodésica  $t \mapsto \pi_o(e^{tX})$ .*

*Demostración.* De la sección anterior tenemos que si  $\mathcal{A} \subseteq X_d$  es un plano maximal entonces  $T_o\mathcal{A}$  se corresponde con elegir una base  $o$ -ortogonal proyectivizada  $\varepsilon$  y considerar todos las matrices que se diagonalizan en esa base.

Como  $X$  es  $o$ -autoadjunta se diagonaliza en una base  $o$ -ortogonal  $\mathcal{B}$ . Además, como todos los subespacios propios tienen dimensión 1, se cumple que esta base es única a menos de cambiar vectores por múltiplos. Luego la base ortogonal proyectivizada determinada por  $\mathcal{B}$  es única y, si la llamamos  $\varepsilon$ , el único plano maximal que pasa por  $o$  con dirección  $X$  es  $e^{\mathfrak{a}\varepsilon}$ .  $\square$

Esta demostración es importante porque nos da la intuición de qué pasa en el caso de que los valores propios no sean todos distintos. Ilustramos esto con un ejemplo.

**Ejemplo 4.3.10.** Sea  $o$  el proyectivizado del producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $X \in \mathfrak{p}^o$  y si  $\varepsilon$  es la descomposición canónica de  $\mathbb{R}^d$  en rectas, entonces  $X \in \mathfrak{a}_\varepsilon$ .

Sin embargo  $\varepsilon$  no es la única base ortogonal que diagonaliza a  $X$ . Si  $e_1 = (1 : 0 : 0)$  y  $e_2 = (0 : 1 : 0)$  son las direcciones en  $\varepsilon$  que corresponden al subespacio propio del 2, entonces cualquier rotación de  $e_1$  y  $e_2$  nos va a dar otra base ortogonal y por lo tanto otro plano maximal que contiene a la geodésica que tiene a  $X$  como vector tangente en  $o$ . Luego, podemos pensar que en  $X_3$  tenemos un círculo de planos maximales que contienen a la geodésica  $t \mapsto \pi_o(e^{tX})$ .

Ahora vamos a fijar un plano maximal por un punto  $o$  y usarlo para estudiar la geometría de  $X_d$ . Esto es equivalente a elegir una base  $o$ -ortogonal proyectivizada  $\varepsilon$  y su álgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  (a partir de ahora la llamaremos  $\mathfrak{a}$ ). Vamos a ver qué elementos de  $\mathfrak{a}$  están únicamente en esa álgebra abeliana maximal y cuáles no.

Consideramos, para cada  $\ell \in \varepsilon$  la transformación lineal  $\lambda_\ell : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$  que le asigna a cada matriz  $X \in \mathfrak{a}$  el valor propio de  $X$  asociado al subespacio  $\ell$ . Esto está bien definido porque las matrices son simultáneamente diagonalizables.

**Definición 4.3.11.** Sean  $\ell \neq u \in \varepsilon$  y  $\alpha_{\ell,u} = \lambda_\ell - \lambda_u \in \mathfrak{a}^*$ . Al conjunto de transformaciones lineales

$$\Sigma = \{\alpha_{\ell,u} : \ell, u \in \varepsilon\}$$

lo llamamos *sistema de raíces de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$* .

Lo primero a observar es que este es un conjunto finito de funcionales lineales. Además, los núcleos de elementos de  $\Sigma$  son un conjunto finito de hiperplanos de  $\mathfrak{a}$ .

**Definición 4.3.12.** A las clausuras de las componentes conexas de  $\mathfrak{a} - \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \ker \alpha$  las llamamos *cámaras de Weyl*.

La mayoría de los resultados con los que vamos a trabajar dependen de elegir una cámara de Weyl. No hay una forma canónica de hacer esto. Cuando elegimos una cámara de Weyl nos referimos a ella como  $\mathfrak{a}^+$ .

**Proposición 4.3.13.** *Elegir una cámara de Weyl es equivalente a elegir un orden total de  $\varepsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{a}^+$  una cámara de Weyl, entonces todo  $\alpha \in \Sigma$  cumple que o bien  $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \geq 0$  o bien  $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \leq 0$ .

Dados dos elementos  $\ell, u \in \varepsilon$ , decimos que  $\ell > u$  si  $\alpha_{\ell, u}|_{\mathfrak{a}^+} \geq 0$ . Como  $\alpha_{\ell, u} = -\alpha_{u, \ell}$  todos los elementos están relacionados. Además, si  $\ell, u, v$  cumplen que  $\ell > u > v$  entonces  $\alpha_{\ell, v} = \alpha_{\ell, u} + \alpha_{u, v}$  es positivo en  $\mathfrak{a}^+$ , por lo que efectivamente esta relación es un orden total.

Supongamos que  $\{u_1, \dots, u_d\}$  determina un orden en  $\varepsilon$ . Vamos a ver qué condiciones se necesitan para que  $A$  pertenezca a una cámara con ese orden.

Para eso necesitamos que  $\alpha_{u_i, u_j}(A) = \lambda_{u_i}(A) - \lambda_{u_j}(A) \geq 0$  para todo  $i > j$ . Esto es equivalente a que los valores propios de la matriz  $A$  estén ordenados de mayor a menor (es decir que el valor propio más grande corresponda a  $u_1$ , el siguiente a  $u_2$ , etc).  $\square$

### 4.3.3. Raíces simples

A partir de ahora vamos a fijar un elemento  $o \in X_d$ , un plano maximal por  $o$  con álgebra  $\mathfrak{a}$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ . Estas elecciones son equivalentes a elegir una descomposición **ordenada** de  $\mathbb{R}^d$  en  $d$  rectas  $o$ -ortogonales que denotamos  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$ .

**Definición 4.3.14.** Dadas las elecciones explicadas anteriormente, decimos que una raíz  $\alpha$  es *positiva* si  $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \geq 0$ . Al conjunto de raíces positivas lo denotamos por  $\Sigma^+$

Decimos que una raíz positiva es *simple* si es de la forma  $\alpha_{u_i, u_{i+1}}$ . Es decir si es diferencia de valores propios de elementos consecutivos. Al conjunto de raíces simples lo denotamos por  $\Pi$ .

Es claro que hay  $d - 1$  raíces simples. A la raíz  $\alpha_{u_i, u_{i+1}}$  la denotamos simplemente  $\alpha_i$ . En realidad podemos caracterizar las raíces simples de una forma más intrínseca, sin depender del caso de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$ . Lo ilustramos con la siguiente propiedad.

**Proposición 4.3.15.** *El conjunto de raíces simples es el único conjunto más chico de raíces positivas tales que, para toda  $\alpha \in \Sigma^+$  se cumple que  $\ker \alpha \cap \mathfrak{a}^+$  se puede escribir como intersección de núcleos de raíces positivas.*

*Demostración.* Si  $\alpha \in \Sigma^+$  entonces  $\alpha = \alpha_{u_n, u_m}$  con  $n < m$ . Si  $A \in \mathfrak{a}^+ \cap \ker \alpha$  entonces  $\lambda_{u_n}(A) = \lambda_{u_m}(A)$ , recordando que estos son los valores propios asociados a los subespacios  $u_n$  y  $u_m$ . Sin embargo, el hecho de que  $A \in \mathfrak{a}^+$  implica que

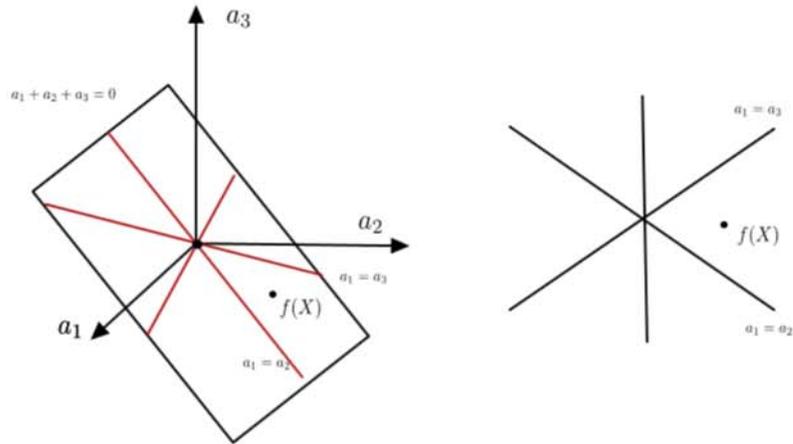
$$\lambda_{u_n}(A) \geq \lambda_{u_{n+1}}(A) \geq \dots \geq \lambda_{u_{m-1}}(A) \geq \lambda_{u_m}(A),$$

lo que implica que todos estos valores propios son iguales, pero esto implica que  $A \in \bigcap_{i \in \{n, \dots, m-1\}} \ker \alpha_i$ .  $\square$

Ahora vamos a estudiar un poco más el espacio  $\mathfrak{a}$ . Como consisten en matrices diagonalizables en una base  $\varepsilon$  podemos definir un mapa  $f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}^d$  dado  $f(A) = (a_1, \dots, a_d)$  donde se cumple que  $\lambda_{u_i}(A) = a_i$ . Es claro que este mapa es inyectivo. Como todas las matrices de  $sl_d(\mathbb{R})$  tienen traza 0, es un isomorfismo entre  $\mathfrak{a}$  y el hiperplano  $a_1 + \dots + a_d = 0$ . En este contexto podemos escribir las raíces simples como

$$\alpha_i(A) = a_i - a_{i+1}.$$

**Ejemplo 4.3.16.** Consideremos el proyectivizado del producto interno usual en  $X_3$ , que denotamos por  $o_e$ . También consideramos la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  y la subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a}$  compuesta por las matrices diagonales de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ . Mediante el mapa  $f$  identificamos esta subálgebra con el



**Figura 4.3:** El sistema de raíces de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$

plano de  $\mathbb{R}^3$  dado por la ecuación  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ . La matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

está en el interior de la cámara de Weyl correspondiente al orden  $e_2 > e_1 > e_3$ . Observar que esta cámara es una de las dos que tiene como bordes las rectas  $a_1 = a_3$  y  $a_1 = a_2$ , que son los núcleos de las raíces  $\alpha_{e_2, e_1}$  y  $\alpha_{e_1, e_3}$ . Estas son las raíces simples para la elección de esta cámara de Weyl. Un esquema de esto se puede ver en la figura 4.3.

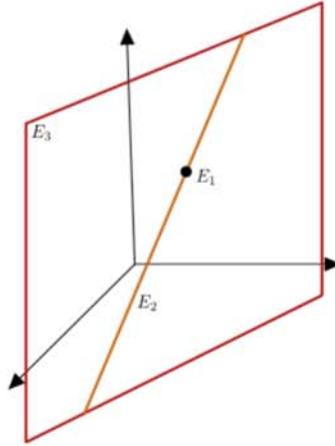
## 4.4. Banderas y subgrupos parabólicos

Se puede ver que  $X_2$  es isométrico al plano hiperbólico, observando que podemos identificar  $\mathbb{H}^2$  con  $PSL_2(\mathbb{R})/PSO(2)$ . La proposición 4.3.9 nos da un indicio de por qué  $X_d$  (para  $d \geq 3$ ) y el plano hiperbólico tienen una geometría distinta. En  $X_d$  no todas las geodésicas se ven iguales, hay algunas por las que pasa un único plano maximal y algunas por los que pasan muchos. En  $\mathbb{H}^d$  no tenemos ese problema porque, al tener curvatura estrictamente negativa, los planos maximales tienen dimensión 1 y por lo tanto son las geodésicas.

Si fuéramos a estudiar el borde visual encontraríamos que la acción del grupo de isometrías allí no es transitiva. En esta sección vamos a estudiar otro tipo de borde, y vamos a definir una familia de subgrupos de  $SL_d(\mathbb{R})$  llamados “subgrupos parabólicos”.

Nuevamente fijamos una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{p}^o$  que llamamos  $\mathfrak{a}$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ , correspondientes a una base proyectivizada  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$ .

#### 4.4.1. Banderas



**Figura 4.4:** Ejemplo de una bandera en  $\mathbb{R}^4$  vista en coordenadas afines.

**Definición 4.4.1.** Una *bandera completa* de  $\mathbb{R}^d$  es una colección de  $d - 1$  subespacios

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_{d-1}\}$$

tales que  $\dim(E_i) = i$  y  $E_i \subseteq E_{i+1}$ . Al espacio de banderas completas lo denotamos por  $\mathcal{F}$ .

Como  $SL_d(\mathbb{R})$  actúa transitivamente por multiplicación a izquierda en el espacio de bases proyectivas, es claro que actúa transitivamente en el conjunto de banderas. Vamos a estudiar entonces el estabilizador de una bandera para poder darle una estructura de cociente  $\mathcal{F} \simeq G/P$ .

**Definición 4.4.2.** El *subgrupo de Borel* (también llamado parabólico minimal) es el subgrupo de  $P$  de  $SL_d(\mathbb{R})$  compuesto por las matrices triangulares superiores visto en la base ordenada  $\varepsilon$ .

Si  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$  entonces  $P$  es el estabilizador de la bandera  $F = \{(u_1 \oplus \dots \oplus u_i)_{i=1}^{d-1}\}$ . Esto implica que podemos identificar la bandera  $gF$  con el elemento  $gP$  de  $G/P$ .

También observamos que, mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, las banderas completas están en correspondencia con bases  $\mathfrak{o}$ -ortogonales proyectivizadas ordenadas.

#### 4.4.2. Banderas y raíces

Vamos a dar una interpretación intrínseca del subgrupo  $P$ , que nos servirá a la hora de generalizar la teoría. Antes de eso vamos a dar una caracterización alternativa de las raíces.

**Proposición 4.4.3.** *Un funcional  $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$  es una raíz si y solo si*

$$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_\alpha = \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : [A, T] = \alpha(A)T \text{ para todo } A \text{ en } \mathfrak{a}\}$$

*es no trivial.*

*Demostración.* Como  $\mathfrak{a}$  es abeliana y las matrices simétricas que conmutan se diagonalizan en una misma base, sin pérdida de generalidad asumimos que  $\mathfrak{a}$  está formado por matrices diagonales (siempre se puede trabajar en una base donde las matrices de  $\mathfrak{a}$  se diagonalizan). Supongamos que  $[A, T] = \alpha(A)T$ . Vamos a computar  $AT$  y  $TA$  para  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  y  $T = (t_{ij})$ . Se tiene que

$$AT = (a_i t_{ij})$$

$$TA = (a_j t_{ij})$$

Luego tenemos que  $AT - TA = ((a_i - a_j)t_{ij})$ . Esto implica que si  $[A, T] = \alpha(A)T$  entonces  $\alpha$  tiene que ser una raíz de la forma  $\alpha_{m,n}$  para algún valor de  $m$  y  $n$ .

Recíprocamente, sean  $m, n$  dos naturales entre 1 y  $d$  y consideremos  $T = (\delta_{m,n}(i, j))_{i,j}$ . Si  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_d) \in \mathfrak{a}$  tenemos que

$$AT - TA = ((a_m - a_n)\delta_{m,n}(i, j))_{i,j} = (a_m - a_n)T = \alpha_{m,n}(A)T,$$

por lo que  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_{\alpha_{m,n}}$  es no trivial.  $\square$

De esta prueba tenemos que  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_{\alpha_{m,n}}$  es un subespacio de dimensión 1 generado por la matriz  $(\delta_{m,n}(i, j))_{i,j}$ , que es la matriz que vale cero en toda entrada salvo en la entrada  $(m, n)$ .

Si denotamos por  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_0 = \{T \in \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) : [A, T] = 0\}$  tenemos la siguiente descomposición de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_\alpha.$$

Observar que, como  $\mathfrak{a}$  era maximal en  $\mathfrak{p}^o$ , tenemos que  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_0 \cap \mathfrak{p}^o = \mathfrak{a}$ .

**Ejemplo 4.4.4.** Supongamos que  $\mathfrak{a}$  son las matrices diagonales de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ . Si  $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  entonces la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cumple que

$$[A, T] = \begin{pmatrix} 0 & a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a_1 - a_2)T$$

**Definición 4.4.5.** Definimos el *radical unipotente* como

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})_\alpha.$$

Este es el subespacio de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  de matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal respecto a  $\varepsilon$ . También denotamos por  $M \subseteq K^o$  al centralizador de  $\exp \mathfrak{a}$  en  $K^o$ .

**Proposición 4.4.6.**  $M$  es el conjunto de matrices diagonalizables en la base  $\varepsilon$  con valores propios 1 y  $-1$ .

*Demostración.* A menos de un cambio de base asumimos que las matrices de  $\exp \mathfrak{a}$  se diagonalizan en la base canónica. Dado  $g \in M$  tenemos que para todo  $a \in \exp(\mathfrak{a})$  se cumple que  $gag^{-1} = a$ . Esto implica que  $g$  debe preservar los subespacios propios de las matrices diagonales y por lo tanto  $g$  tiene que ser diagonal. Pero  $g$  tiene que pertenecer a  $K^o$  y por lo tanto, como estamos asumiendo que trabajamos en la base canónica,  $g \in SO(d)$ . La proposición se deduce de que las matrices diagonales de  $SO(d)$  son las de valores propios 1 y  $-1$ .  $\square$

Con todo lo visto en esta sección deducimos la siguiente proposición.

**Proposición 4.4.7.** *El grupo  $P$  (estabilizador de una bandera) se puede escribir como  $P = M \exp(\mathfrak{a})N$  donde  $M$  es el centralizador de  $\exp(\mathfrak{a})$  y  $N = \exp \mathfrak{n}^+$ .*

*Demostración.* Una vez más asumimos que estamos trabajando con la base canónica. Entonces  $\exp \mathfrak{a}$  son matrices diagonales con entradas positivas,  $N$  son las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal y  $M$  matrices diagonales con entradas 1 y  $-1$ . Una cuenta directa nos dice que podemos escribir cualquier matriz triangular superior como producto de estas tres matrices.  $\square$

## 4.5. El borde de Furstenberg

Ahora vamos a definir el borde que vamos a utilizar. Para poder dar una descripción explícita de este borde necesitamos primero estimar la distancia entre dos puntos  $o$  y  $g \cdot o \in X_d$ . Para eso vamos a usar una versión del teorema de descomposición de valores singulares (en el capítulo 5 vamos a ver una versión más general). Para ser coherentes con la bibliografía de álgebras de Lie a partir de ahora nos referimos a esta descomposición como “descomposición de Cartan”.

Esta sección es fundamental ya que da claridad sobre cómo podemos aplicar lo visto en el capítulo 3 para el análisis de la geometría de  $X_d$ .

### 4.5.1. Valores singulares

Recordamos del capítulo 3 que, dada una matriz  $g \in SL_d(\mathbb{R})$ , los valores singulares son las semilongitudes de los ejes del elipsoide que es imagen de la esfera  $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ . Siempre y cuando tengamos una norma esta definición tendrá sentido.

**Definición 4.5.1.** Sea  $o \in X_d$  y  $g \in SL_d(\mathbb{R})$ , definimos el  $i$ -ésimo valor singular respecto a  $o$  como

$$\sigma_i^o(g) = \max_{\dim U=i} \min_{x \in U \setminus \{0\}} \frac{\|gx\|_o}{\|x\|_o}$$

Siguiendo la misma prueba que el teorema clásico se puede probar la siguiente generalización de la descomposición en valores singulares (ver por ejemplo [29]).

**Teorema 4.5.2** (Descomposición de Cartan). *Existe una función  $a : SL_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{a}^+$  tal que para todo  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$  existen  $k_g, l_g \in K^o$  tales que*

$$g = k_g \exp(a(g))l_g$$

$$\text{con } a(g) = \text{diag}(\log(\sigma_1^o(g)), \log(\sigma_2^o(g)), \dots, \log(\sigma_d^o(g))).$$

Este resultado nos permite calcular distancias en  $X_d$ .

**Proposición 4.5.3.** *Para todo  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$  se cumple que*

$$d_{X_d}(o, g \cdot o) = \sqrt{\sum_{i=1}^d \log(\sigma_i^o(g))^2}.$$

*Demostración.* Por el teorema anterior podemos escribir  $g = k_g \exp(a(g))l_g$ . Luego tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} d_{X_d}(o, g \cdot o) &= d_{X_d}(o, k_g \exp(a(g))l_g \cdot o) = d_{X_d}(k_g \cdot o, k_g \exp(a(g))l_g) \\ &= d_{X_d}(o, \exp(a(g))l_g \cdot o) = d_{X_d}(o, \exp(a(g)) \cdot o). \end{aligned}$$

donde usamos que  $k_g$  y  $l_g$  fijan  $o$  y que la métrica es invariante. Por el teorema 4.3.5 sabemos que  $\exp(\mathfrak{a})$  es isométrico a  $\mathfrak{a}$  con la métrica de la forma de Killing  $\kappa$ . Luego

$$d_{X_d}(o, \exp(a(g))) = \sqrt{\kappa(a(g), a(g))} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \log(\sigma_i^o(g))^2}$$

como queríamos demostrar. □

El siguiente lema, si bien es técnico, nos va a permitir encontrar estimativas para distancias entre puntos.

**Lema 4.5.4.** *Sea  $\varphi \in \mathfrak{a}^*$  tal que  $\varphi|_{\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}} > 0$ . Entonces existe  $c > 1$  tal que para todo  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  se cumple que*

$$\frac{1}{c}\varphi(a(g)) \leq d_{X_d}(o, g \cdot o) \leq c\varphi(a(g))$$

*Demostración.* Observar que  $\mathfrak{a}^+$  es cerrado y  $\ker \varphi \cap \mathfrak{a}^+ = \{0\}$  por hipótesis. Luego, el mapa

$$a \mapsto \frac{\|a\|_o}{\varphi(a)},$$

al ser invariante por multiplicación por escalares, está acotado por arriba y por abajo en  $\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}$ . Esto implica que existe  $c > 1$  tal que

$$\frac{1}{c}\varphi(a) \leq \|a\|_o \leq c\varphi(a)$$

como queríamos demostrar.  $\square$

### 4.5.2. Planos maximales parametrizados

Ahora vamos a definir planos maximales parametrizados. Estas definiciones deben compararse a las del borde visual para espacios hiperbólicos: en vez de considerar los rayos a menos de estar a distancia acotada consideramos los planos a menos de una relación de equivalencia adecuada. Toda esta construcción depende de la elección de  $\mathfrak{a}$ , una subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{p}^o$  y una cámara de Weyl de  $\mathfrak{a}$  denotada por  $\mathfrak{a}^+$ , lo que se corresponde con elegir una base proyectivizada ordenada  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$ . En el plano hiperbólico esto corresponde con la elección de una geodésica por  $o$  y un tiempo pasado o futuro.

Una consecuencia del corolario 4.3.8 es que para todo plano maximal  $\mathcal{B}$  existe  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $\mathcal{B} = g \exp(\mathfrak{a})$ .

**Definición 4.5.5.** Un *plano maximal parametrizado* es un mapa de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{a} &\rightarrow X_d \\ A &\mapsto g \exp A \cdot o. \end{aligned}$$

También denotamos por  $f_0$  al plano maximal parametrizado

$$A \mapsto \exp A \cdot o.$$

Observar que todo plano maximal se puede parametrizar.

**Definición 4.5.6.** Dos planos maximales parametrizados  $f, g$  son equivalentes si la función

$$A \mapsto d_{X_d}(f(A), g(A))$$

es acotada en  $\mathfrak{a}^+$ . Definimos entonces el *borde de Furstenberg* como el espacio de planos maximales parametrizados cocientado por esta relación de equivalencia. Al borde de Furstenberg lo denotamos por  $\mathcal{F}$ .

Observar que  $SL_d(\mathbb{R})$  actúa en el borde de Furstenberg mediante el mapa  $[f] \mapsto [gf]$ . Nuestro objetivo ahora es probar el siguiente teorema, que nos permitirá darle una topología al borde mediante esta identificación.

**Teorema 4.5.7.** *El borde de Furstenberg se identifica equivariantemente con el cociente  $G/P$ .*

*Demostración.* Vamos a ver que  $f_0$  es equivalente a  $gf_0$  si y solo si  $g \in P$ . Esto implicará que podemos identificar cada clase de equivalencia con un elemento de  $G/P$  mediante la identificación

$$gP \mapsto gf_0.$$

Para eso consideremos  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  y veamos qué condiciones se tienen que cumplir para que la distancia

$$d_{X_d}(g \exp A \cdot o, \exp A \cdot o) = d_{X_d}(\exp(-A)g \exp A \cdot o, o) \quad (4.5)$$

esté acotada para  $A \in \mathfrak{a}^+$ . Dado  $A \in \mathfrak{a}^+$  podemos suponer, a menos de un cambio de base, que  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  con  $a_i \geq a_{i+1}$ . Además para todo  $t > 0$  se cumple que  $tA \in \mathfrak{a}^+$ . Luego, si  $g = (g_{ij})$  entonces

$$\exp(-tA)g \exp(tA) = (e^{-ta_i} g_{ij} e^{ta_j}) = (e^{t(a_j - a_i)} g_{ij}).$$

Si alguno de los coeficientes de  $\exp(-tA)g \exp(tA)$  se va a infinito con  $t$  entonces la distancia (4.5) no estará acotada. Esto implica que  $g_{ij} = 0$  para todo  $j > i$ , es decir que  $g$  deberá ser triangular superior en la base correspondiente a  $\mathfrak{a}^+$ , es decir que  $g \in P$ .  $\square$

Este teorema nos permite identificar el borde de Furstenberg con las banderas completas, ya que ambos espacios se identifican con  $G/P$ . Vamos a decir explícitamente quién es esta biyección: identificamos al plano  $f_0$  con la bandera  $F_0 = \{u_1 \oplus \dots \oplus u_i\}_{i=1}^{d-1}$ . Luego identificamos el plano  $g \cdot f_0$  con la bandera  $gF_0$ .

Observar que existe un elemento  $u_0 \in SL_d(\mathbb{R})$  que preserva la subálgebra  $\mathfrak{a}$  pero intercambia  $\mathfrak{a}^+$  con  $-\mathfrak{a}^+$ : si  $\mathfrak{a}^+$  se identifica con la base ordenada

proyectivizada  $\{u_1, \dots, u_d\}$  este es el elemento que transforma esta base en  $\{u_d, \dots, u_1\}$ .

**Definición 4.5.8.** Definimos el *plano maximal opuesto a*  $f(A) = g \exp A \cdot o$  como el plano  $f_2(A) = gu_0 \exp A \cdot o$ .

**Definición 4.5.9.** Dado un plano maximal parametrizado  $f$  denotamos por  $Z(f) \in \mathcal{F}$  a la bandera completa que representa a su punto en el borde y por  $\check{Z}(f)$  a la bandera completa del plano maximal opuesto a él, es decir que si  $f(A) = g \exp(A) \cdot o$  entonces  $\check{Z}(f)$  es la clase de equivalencia del plano parametrizado

$$A \mapsto gu_0 \exp(A) \cdot o.$$

A estos puntos en el borde los llamamos *punto límite* de  $f$  y *punto límite opuesto* de  $f$  respectivamente.

**Proposición 4.5.10.** Dado un punto  $p \in X_d$  y una bandera completa  $F$ , hay un único plano maximal que admite una parametrización  $f$  tal que  $f(0) = p$  y  $Z(f) = F$ .

*Demostración.* Sea  $F = \{F_i\}$ . Un plano maximal parametrizado  $f$  por  $p$  es un mapa de la forma

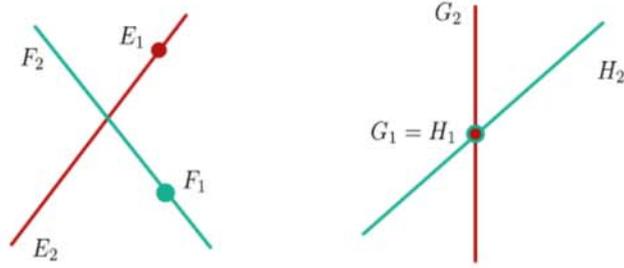
$$f(A) = g \exp(A)$$

con  $g \cdot o = p$ . Para que se cumpla  $Z(f) = F$ , para cada  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  se debe cumplir que  $g(u_1 \oplus \dots \oplus u_i) = F_i$ .

Por el teorema de Gram-Schmidt existe una única base ordenada  $p$ -ortogonal  $\{v_1, \dots, v_d\}$  tal que  $F_i = (v_1 \oplus \dots \oplus v_i)$ . Como por la proposición 4.3.6 sabemos que un plano maximal por  $p$  se corresponde con la elección de una base  $p$ -ortogonal, tenemos que el correspondiente a  $\{v_1, \dots, v_d\}$  es el único que cumple con lo requerido.  $\square$

**Definición 4.5.11.** Decimos que dos banderas  $E = \{E_i\}$  y  $F = \{F_i\}$  están en posición general si para todo  $i$  entre 1 y  $d-1$  se cumple que  $E_i \cap F_{d-i} = \{0\}$ . Denotamos por  $\mathcal{F}^{(2)}$  al conjunto de pares ordenados de banderas en posición general.

Como ser transversal es una propiedad abierta y densa que se preserva por la acción de  $SL_d(\mathbb{R})$ , el conjunto de pares de banderas en posición general es la única órbita abierta de este grupo en  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ . Un ejemplo de banderas en posición general se puede ver en la figura 4.5



**Figura 4.5:** Dibujamos pares de banderas de  $\mathbb{R}^3$  en coordenadas afines. Las banderas  $E$  y  $F$  están en posición general, mientras que  $G$  y  $H$  no porque  $H_2$  contiene a  $G_1$ .

**Proposición 4.5.12.** *Dadas dos banderas  $E$  y  $F$  en posición general, existe un único plano maximal que admite una parametrización  $f$  tal que  $Z(f) = E$  y  $\check{Z}(f) = F$ .*

*Demcstración* Como  $E_i \cap F_{d-1} = \{0\}$  tenemos que  $E^{i+1} \cap F^{d-i}$  tiene dimensión 1. Definamos entonces, para  $i > 1$ ,  $v_i = E_i \cap F_{d-i-1}$ , y  $v_1 = E_1$ . Si  $i > j$  entonces  $v_i \subseteq E_i$  y  $v_j \subseteq F_{d-j-1}$ , y como  $E_i \cap F_{d-j-1} = \{0\}$  entonces  $v_i \cap v_j = \{0\}$ . Esto implica que  $\{v_1, \dots, v_d\}$  es una base proyectivizada. Observar que  $(v_1 \oplus \dots \oplus v_i) = E_i$ ,  $(v_d \oplus \dots \oplus v_{d-i}) = F_{i+1}$  y que esta es la única base que cumple esto.

Consideremos entonces un elemento  $g$  de  $SL_d(\mathbb{R})$  tal que  $gu_i = v_i$ . Tenemos entonces que el plano maximal parametrizado  $f = gf_0$  cumple que  $Z(f) = E$  y  $\check{Z}(f) = F$ .

□

### 4.5.3. Banderas parciales y conjuntos paralelos

En la sección anterior vimos, de manera análoga al plano hiperbólico, un borde al infinito. Ahora vamos a ver una forma de agrupar ciertos planos maximales que tienen “banderas parecidas”. Este fenómeno no se puede apreciar en espacios como el del plano hiperbólico, y será de vital importancia a la hora de generalizar el lema de Morse para  $SL_d(\mathbb{R})$ ,  $d > 2$ .

**Definición 4.5.13.** Definimos la *involución de posición* como el mapa  $i : \mathfrak{a}^+ \rightarrow \mathfrak{a}^+$  dado por tal que

$$(a_1, \dots, a_d) \mapsto (-a_d, \dots, -a_1).$$

Observar que  $i = -u_0$ . Además si  $\alpha_p$  es una raíz simple entonces

$$\alpha_p(a_1, \dots, a_d) = a_i - a_{i+1} \text{ y}$$

$$\alpha_p \circ i(a_1, \dots, a_d) = \alpha_p(-a_d, \dots, -a_1) = a_{d-p} - a_{d-p+1} = \alpha_{d-p}.$$

Luego, si  $\theta \subseteq \Pi$  es un conjunto de raíces simples definimos

$$i\theta = \{\alpha \circ i : \alpha \in \theta\},$$

que es otro conjunto de raíces simples.

**Definición 4.5.14.** Una *bandera parcial* de  $\mathbb{R}^d$  es una colección de subespacios

$$\{F_i : i \in I\},$$

donde  $I \subseteq \{1, \dots, d-1\}$  y se cumple que  $\dim(F_i) = i$  y que  $F_i \subset F_j$  para todo  $i < j$ .

Se llaman banderas parciales porque esta vez no requerimos que haya un subespacio de cada dimensión. Nos va a ser de utilidad indexar las dimensiones de espacios que consideramos en términos de las raíces simples, lo que motiva las siguientes definiciones.

**Definición 4.5.15.** Sea  $\theta \subseteq \Pi$  un subconjunto de raíces simples. Definimos el conjunto de *banderas parciales indexadas en  $\theta$*  como el conjunto de banderas parciales de la forma

$$\{E_i : \alpha_i \in \theta\}$$

y lo denotamos  $\mathcal{F}_\theta$ .

También definimos al conjunto de *banderas parciales opuestas a  $\theta$*  como el conjunto de banderas parciales de la forma

$$\{E_{d-i} : \alpha_{d-i} \in \theta\}$$

y lo denotamos  $\mathcal{F}_{i\theta}$ .

Con estas definiciones tenemos naturalmente definido un mapa

$$\text{proy}_\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_\theta$$

que consiste en agarrar una bandera completa y olvidar los subespacios

no indexados en  $\theta$ . Además podemos definir los mapas  $Z_\theta = \text{proy}_\theta \circ Z$  y  $\check{Z}_\theta = \text{proy}_{i\theta} \circ \check{Z}$ .

**Definición 4.5.16.** Definimos el conjunto de *banderas parciales* en posición general como la imagen del mapa  $(\text{proy}_\theta, \text{proy}_{i\theta}) : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow \mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_{i\theta}$  y lo denotamos  $\mathcal{F}_\theta^{(2)}$ .

Observar que si tenemos una bandera indexada en  $\theta$  y una indexada en  $i\theta$ , entonces tiene sentido hablar de transversalidad entre ellas.

**Definición 4.5.17.** Sea  $\theta \subseteq \Pi$  un subconjunto de raíces simples.

- Dado  $E \in \mathcal{F}_\theta$  y  $p \in X_d$  definimos *el cono de Weyl*

$$V(p, E) = \bigcup_f f(\mathfrak{a}^+)$$

donde la unión se toma entre todos los planos maximales parametrizados con  $f(0) = p$  y  $Z_\theta(f) = E$

- Dados  $(E, F) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  definimos *el conjunto paralelo*

$$P(F, E) = \bigcup_f f(\mathfrak{a})$$

donde la unión se toma sobre todos los planos maximales parametrizados con  $Z_\theta(f) = E$  y  $\check{Z}_\theta(f) = F$ .

El cono de Weyl es una generalización del concepto de rayo geodésico, mientras que el conjunto paralelo es una generalización de una geodésica completa.  $E$  y  $F$  serían los fines de la geodésica.

## 4.6. El lema de Morse para $SL_d(\mathbb{R})$

La idea ahora es ver cómo el borde de Furstenberg ayuda a estudiar la geometría de  $X_d$ . Queremos ver qué nos dice todo lo estudiado a nivel de álgebras de Lie (y plano tangente) sobre el espacio en cuestión. Comenzamos entonces con el análisis de los planos maximales. Aquí nos será de utilidad recordar la terminología del capítulo 3. Nuevamente fijamos una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{p}^\circ$  que denotamos  $\mathfrak{a}$ , una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  y una base ortogonal proyectivizada  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$ .

### 4.6.1. Definiciones previas

Consideramos  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$ . Ya vimos que un plano maximal por  $o$  y  $g \cdot o$  es equivalente a elegir una base que sea simultáneamente  $o$  y  $g \cdot o$  ortogonal. La geometría del espacio nos dice que esto se puede hacer porque el espacio es geodésicamente completo (ver 2.0.3) y toda geodésica está contenida en un plano maximal. Sin embargo vamos a dar una descripción explícita de estos planos maximales.

**Proposición 4.6.1.** *Dado  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$  y  $g = k_g \exp a(g) l_g$  su descomposición de Cartan (que depende de  $\mathfrak{a}^+$ ). Entonces*

$$k_g \varepsilon = \{k_g u_1, \dots, k_g u_d\}$$

*es una base ortogonal proyectivizada de  $o$  y  $g \cdot o$ .*

*Demostración.* Es claro que la base es  $o$ -ortogonal ya que  $k_g \in K^o$  preserva el producto interno. Para ver que es  $g \cdot o$ -ortogonal consideramos  $u_i \neq u_j$ :

$$\begin{aligned} \langle k_g u_1, k_g u_2 \rangle_{g \cdot o} &= \langle l_g^{-1} \exp(-a(g)) u_i, l_g^{-1} \exp(-a(g)) u_j \rangle_o \\ &= \langle \exp(-a(g)) u_i, \exp(-a(g)) u_j \rangle_o = 0 \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que  $l_g \in K^o$  y en la tercera igualdad usamos que  $\exp a(g)$  tiene a  $u_i$  y a  $u_j$  de subespacios propios.  $\square$

Esto nos da un indicio de cómo describir todos los planos maximales por  $o$  y  $g \cdot o$ . Recordamos que, si vemos a  $\exp a(g)$  en la base  $\varepsilon$  tenemos que  $\exp a(g) = \text{diag}(e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_d})$  con  $a_1 \geq \dots \geq a_d$ . Luego, la elección de  $k_g$  es única a menos de reelegir la base ortogonal en subespacios propios de dimensión mayor a 1. Más formalmente, definamos

$$\theta = \{\alpha_p \in \Pi : a_p > a_{p+1}\}$$

y consideremos  $K^o(\theta)$  el subgrupo de  $K^o$  que preserva los subespacios propios de  $\exp a(g)$ , entonces el conjunto de planos maximales por  $o$  y  $g \cdot o$  es la  $K^o(\theta)$  órbita del plano  $k_g \exp(\mathfrak{a}) \cdot o$ . Alternativamente podemos pensar a estos planos maximales como la imagen de todos los planos maximales parametrizados  $f$  tales que  $f(0) = o$  y  $g \cdot o \in f(\mathfrak{a}^+)$ . Observar que son todos los planos maximales parametrizados tales que

$$Z_\theta(f) = \{(u_1 \oplus \dots \oplus u_p) : \alpha_p \in \theta\}.$$

Esto nos da la pauta de que la “cantidad” de planos maximales que contienen a la geodésica depende de la posición de su velocidad en la cámara de Weyl. Esto implica el siguiente corolario.

**Corolario 4.6.2.**  $X_d$  con  $d \geq 3$  no es un espacio isotrópico.

*Demostración.* En  $T_oX_d$  hay geodésicas que están en un único plano maximal y geodésicas que están en varios. Como esta propiedad es un invariante isométrico, el estabilizador de  $o$  no puede actuar transitivamente en el tangente unitario.  $\square$

La definición que vamos a dar ahora la motiva la proposición 4.5.3. Esta proposición nos dice cuál es la distancia entre nuestro punto favorito  $o$  y un punto genérico  $g \cdot o$ . Si queremos la distancia entre dos puntos cualesquiera  $g \cdot o$  y  $h \cdot o$  una buena idea es trasladarlos para que uno de ellos coincida con  $o$  (por ejemplo  $g \cdot o$ ). Vamos a formalizar eso.

**Definición 4.6.3.** Definimos el mapa  $\underline{a} : X_d \times X_d \rightarrow \mathfrak{a}^+$  como

$$\underline{a}(g \cdot o, h \cdot o) = a(g^{-1}h)$$

**Proposición 4.6.4.** El mapa  $\underline{a}$  está bien definido. Además es invariante por la acción diagonal de  $PSL_d(\mathbb{R})$  y se cumple que, para todos  $p, q \in X_d$ ,  $d_{X_d}(p, q) = \|\underline{a}(p, q)\|_o$ .

*Demostración.* Supongamos que  $g \cdot o = g' \cdot o$ , y que  $h \cdot o = h' \cdot o$ . Esto implica que  $g'^{-1}g = k_g \in K_o$  y  $h'^{-1}h = k_h \in K_o$ , o lo que es lo mismo que  $g = g'k_g$  y  $h = h'k_h$ . Luego

$$\underline{a}(g \cdot o, h \cdot o) = \underline{a}(g'k_g \cdot o, h'k_h \cdot o) = a(k_g^{-1}(g')^{-1}h'k_h) = a((g')^{-1}h') = \underline{a}(g' \cdot o, h' \cdot o)$$

donde la tercera igualdad se cumple porque  $k_g^{-1}$  y  $k_h$  están en  $K_o$ . La segunda propiedad es trivial y el cálculo de la distancia se deduce de la proposición 4.5.3.  $\square$

**Proposición 4.6.5.** Sean  $p, q \in X_d$ . Entonces se cumple que  $\underline{a}(q, p) = i\underline{a}(p, q)$ .

*Demostración.* Sean  $g, h \in SL_d(\mathbb{R})$  tales que  $p = g \cdot o$  y  $q = h \cdot o$ . Entonces  $\underline{a}(p, q) = a(g^{-1}h)$ . Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  son los valores singulares de  $g^{-1}h$  entonces los valores singulares de  $h^{-1}g$  son  $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_d^{-1}$  (ver 3.2.2). Luego tenemos que

$$\underline{a}(q, p) = a(h^{-1}g) = (-\log \sigma_d, \dots, -\log \sigma_1) = ia(g^{-1}h) = i\underline{a}(p, q).$$

□

Si  $(p, q) = (g \cdot o, h \cdot o)$  consideramos el conjunto

$$\theta(p, q) = \{\alpha \in \Pi : \alpha(\underline{a}(p, q)) \neq 0\}.$$

De la proposición 4.6.5 deducimos que  $\theta(q, p) = i\theta(p, q)$ . Si recordamos la terminología del capítulo 3 y en particular la definición 3.2.4, la condición de que  $\alpha(\underline{a}(p, q)) \neq 0$  implica que la matriz  $g^{-1}h$  tiene saltos en sus valores singulares indexados en las raíces simples (recordar que estas son diferencias entre valores propios consecutivos). Luego, si  $\alpha = \alpha_p$  tenemos que el subespacio  $U_\alpha^o(g^{-1}h) = U_p^o(g^{-1}h)$  está bien definido (observar la dependencia del punto base, ya que los valores singulares dependen de él). Remarcamos el cambio de notación, poniendo  $\alpha$  como subíndice en vez del número. Por todo esto tiene sentido considerar la bandera parcial

$$U(p, q) = gU^o(p, q) = \{gU_\alpha^o(g^{-1}h)\}_{\alpha \in \theta(p, q)}. \quad (4.6)$$

También definimos

$$S(p, q) = hS^o(p, q) = \{hS_\alpha^o(g^{-1}h)\}_{\alpha \in \theta(p, q)} = \{hU_{i\alpha}^o(h^{-1}g)\}_{\alpha \in \theta(x, y)}, \quad (4.7)$$

donde  $i\alpha = \alpha \circ i$ . A veces vamos a querer referirnos a una sub bandera de estas banderas parciales, si  $\theta \subseteq \theta(p, q)$  entonces

$$U(p, q)^\theta = \{gU_\alpha^o(g^{-1}h)\}_{\alpha \in \theta}. \quad (4.8)$$

y lo análogo se define para  $S(p, q)$ .

**Proposición 4.6.6.** *Si  $f$  es un plano maximal parametrizado tal que  $f(0) = p$  y  $q \in f(\mathfrak{a}^+)$  entonces  $Z(f)^\theta = U(p, q)^\theta$ .*

*Demostración.* Sean  $q = h \cdot o$  y  $p = g \cdot o$ . Un plano maximal parametrizado con  $f(0) = p$  debe ser de la forma  $f(A) = gk \exp(A) \cdot o$ , con  $k \in K^o$ . Si  $q = f(A_q)$

entonces

$$h \cdot o = gk \exp(A_q) \cdot o,$$

lo que a su vez implica que  $h = gk \exp(A_q)l$ , con  $l \in K^o$  o lo que es lo mismo  $g^{-1}h = k \exp(A_q)l$ . Si  $\alpha_i \in \theta(p, q)$ , tenemos que  $U_{\alpha_i}^o(g^{-1}h)$  es el subespacio generado por los primeros  $i$  columnas de  $k$ . Si recordamos que  $\{u_1, \dots, u_d\}$  es la base  $o$ -ortogonal elegida al principio tenemos que  $\{ku_1, \dots, ku_d\}$  es una base  $g^{-1}h$ -ortogonal.

Luego  $\{gku_1, \dots, gku_d\}$  es una base  $p$  y  $q$ -ortogonal y la proposición se concluye como consecuencia de la discusión después de 4.6.1.  $\square$

**Definición 4.6.7.** Dado  $\theta \subseteq \theta(p, q)$  definimos el *cono de Weyl de tipo  $\theta$  desde  $p$  hasta  $q$*  como

$$V_\theta(p, q) = \bigcup_f f(\mathfrak{a}^+)$$

donde la unión se toma sobre todos los flats tales que  $f(0) = p$  y  $Z_\theta(f) = U(p, q)^\theta$ .

**Definición 4.6.8.** Al *diamante de tipo  $\theta$  entre  $p$  e  $q$*  lo definimos como

$$\diamond_\theta(p, q) = V_\theta(p, q) \cap V_{i\theta}(q, p)$$

**Proposición 4.6.9.** El conjunto  $\diamond_\theta(p, q)$  está contenido en el conjunto paralelo  $P(U(p, q)^\theta, S(p, q)^{i\theta})$ .

Esta proposición se deduce de 4.6.6.

## 4.6.2. Distancias a los conjuntos paralelos

Dado un punto  $o$  y dos banderas parciales en posición general  $E$  y  $F$ , vamos a comparar la distancia de  $o$  al conjunto paralelo  $P(E, F)$  con el ángulo que forman los subespacios de las banderas.

**Definición 4.6.10.** Dado  $o \in X_d$ , denotamos por  $\|\cdot\|_o$  la norma inducida en  $\mathbb{R}^d$ . Definimos el ángulo entre  $P, Q$ , dos subespacios de  $RR^d$  respecto a  $o$  como

$$\angle_o(P, Q) = \min_{v \in P^\times} \min_{w \in Q^\times} \angle_o(v, w) = \min_{v \in P^\times} \min_{w \in Q^\times} \frac{o(v, w)}{\|v\|_o \|w\|_o}.$$

Observar que el ángulo no depende de la clase de homotecia de  $o$ , y por lo tanto está bien definido. El teorema que sigue nos dice que la distancia entre

un punto y un conjunto paralelo es comparable con el logaritmo de los senos ángulos que forman las banderas parciales que determinan dicho conjunto.

**Teorema 4.6.11.** *Dado  $\theta \subseteq \Pi$  existen  $c > 1$  y  $c' > 0$  tales que, para todo  $(E, F) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  se cumple que*

$$\frac{-1}{c} \log \sin \min_{\alpha_p \in \theta} \angle_o(E_p, F_{d-p}) \leq d_{X_d}(o, P(E, F)) \leq c' - c \log \sin \min_{\alpha_p \in \theta} \angle(E_p, F_{d-p})$$

*Demostración.* Consideramos una base  $o$ -ortogonal  $\varepsilon = \{u_1, \dots, u_d\}$  tal que

$$F_{d-p} = u_{d-p} \oplus \dots \oplus u_d$$

para todo  $\alpha_p \in \theta$ . Esto lo podemos hacer aplicando Gram-Schmidt y completando la base eligiendo vectores ortogonales. Luego definimos por  $G_\varepsilon(E, F)$  al conjunto de elementos  $g \in SL_d(\mathbb{R})$  tales que para todo  $\alpha_p \in \theta$  se tiene que

$$\begin{aligned} E_p &= g(u_1 \oplus \dots \oplus u_p) \\ F_{d-p} &= gF_{d-p} \end{aligned}$$

observar que este conjunto siempre es no vacío porque  $SL_d(\mathbb{R})$  actúa transitivamente en el conjunto de pares de banderas en posición general (ver 4.5.12). Esto nos permite definir al conjunto paralelo como la “órbita” de un punto:

$$P(F, E) = \{g \cdot o : g \in G_\varepsilon(E, F)\}.$$

Ahora que tenemos planteado el conjunto paralelo como la órbita de un subconjunto de  $SL_d(\mathbb{R})$  vamos a relacionar los ángulos entre  $E_p$  y  $F_{d-p}$  con los valores singulares. Para eso observamos que si  $v \in E_p$ ,  $w \in F_{d-p}$  y  $\hat{v}$  es la proyección de  $v$  en la dirección de  $w$ . Para no sobrecargar la notación omitimos la  $o$  en las normas y los ángulos. Entonces (asumiendo que todos los ángulos y normas se toman en función de  $o$ ),

$$\sin \angle(v, w) = \frac{\|v - \hat{v}\|}{\|\hat{v}\|} \geq \frac{\sigma_d^o(g) \|g^{-1}v - g^{-1}\hat{v}\|}{\sigma_1^o(g) \|g^{-1}\hat{v}\|} \geq \frac{\sigma_d^o(g)}{\sigma_1^o(g)}$$

donde la segunda desigualdad se cumple porque  $g^{-1}v$  y  $g^{-1}w$  son ortogonales (por como definimos  $E_p$  y  $F_{d-p}$ ) y  $\hat{v}$  es colineal a  $w$ . Inviertiendo y tomando

logaritmo obtenemos que

$$-\log \sin \angle(v, w) \leq \log(\sigma_1^o(g)) - \log(\sigma_d^o(g))$$

y por el lema 4.5.4 (para  $\varphi(a) = a_1 - a_d$ ) y tomando el mínimo entre los posibles  $v$  y  $w$  concluimos la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad basta con encontrar un  $g \in G_\varepsilon(E, F)$  que nos permita estimar bien. Entonces numeramos el conjunto  $\{0, d\} \cup \{p : \alpha_p \in \theta\}$  como  $0 = p_0 < p_1 \dots < p_k = d$  y definimos los siguientes conjuntos

$$H_i^0 = u_{p_{i-1}+1} \oplus \dots \oplus u_{p_i}$$

$$H_i = E_{p_i} \cap F_{d-p_{i-1}}$$

Observamos que para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  se tiene que

$$\dim H_i^0 = \dim H_i.$$

En este contexto se tiene que si  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$  cumple que  $g(H_i^0) = H_i$  entonces  $g \in G_\varepsilon(E, F)$ .

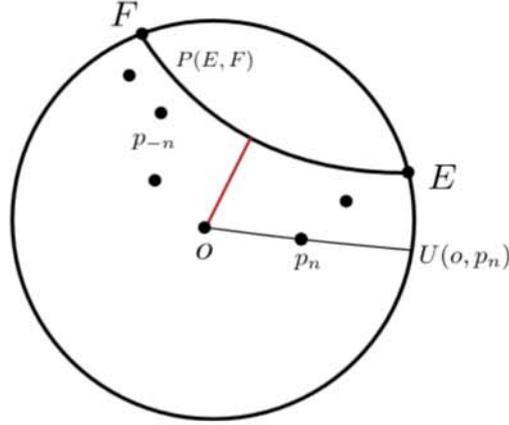
Tomamos entonces como  $g$  el único elemento de  $PSL_d(\mathbb{R})$  tal que la restricción de  $g^{-1}$  en  $H_i$  coincide con la proyección ortogonal en  $H_i^0$ . Observar que  $(H_i^0)^\perp = u_0 \oplus \dots \oplus u_{p_{i-1}-1} \oplus u_{p_{i+1}+1} \dots \oplus u_d$ . Por un lado  $E_{p_i} \cap u_{p_{i+1}+1} \dots \oplus u_d = \{0\}$  porque  $E$  y  $F$  están en posición general. Por otro lado  $F_{d-p_{i-1}} \cap u_0 \oplus \dots \oplus u_{p_{i-1}-1} = \{0\}$  por como definimos los  $u_i$ . Esto implica que la proyección está bien definida.

Ahora, dado un vector  $v \in \mathbb{R}^d$  escribimos  $v = v_1 + \dots + v_k$  con  $v_i \in H_i^0$ . Observar que  $gv_i$  es el vector en  $H_i$  tal que cuando lo proyectamos ortogonalmente en  $H_i^0$  nos da  $v_i$ , luego tenemos que  $\|v_i\|_o = \|gv_i\|_o \sin \angle(gv_i, (H_i^0)^\perp)$  y usando esto tenemos las siguientes desigualdades (omitiendo nuevamente el subíndice  $o$ )

$$\|gv\| \leq \sum_{i=1}^k \|gv_i\| = \sum_{i=1}^k \frac{\|v_i\|}{\sin \angle(gv_i, (H_i^0)^\perp)}.$$

Como la descomposición era ortogonal se tiene que  $\|v_i\|_o \leq \|v\|_o$ , por lo que nos queda acotar el ángulo por arriba para terminar de concluir.

$$\angle(gv_i, (H_i^0)^\perp) \geq \angle(H_i \oplus \dots \oplus H_d, H_{i+1}^0 \oplus \dots \oplus H_d^0) = \angle(E_{p_i}, F_{d-p_i})$$



**Figura 4.6:** Un esquema de cómo se ven en  $\mathbb{H}^2$  los conceptos necesarios para enunciar y demostrar el lema de Morse para  $SL_d(\mathbb{R})$ . La distancia entre  $o$  y  $P(E, F)$  es comparable al ángulo que forman esas bandera. Cuánto más chico es el ángulo, más cerca están los puntos del borde y la geodésica queda más lejos de  $o$ .

Combinando ambas cosas y tomando el más chico de los ángulos tenemos que

$$|g|_o \leq \frac{d}{\sin \min_{\alpha_p \in \theta} \angle(E_p, F_{d-p})}. \quad (4.9)$$

Observar que por el lema 4.5.4 tenemos que  $\log \sigma_1^o(g) = \log |g|_o$  es comparable con  $d_{X_d}(o, g \cdot o)$ , y, por lo tanto, tomando logaritmo en la desigualdad 4.9 concluimos la prueba del teorema.  $\square$

La idea entonces es utilizar estas estimativas para localizar cuasi-geodésicas. Esta vez vamos a trabajar con cuasigeodésicas discretas.

**Definición 4.6.12.** Sean  $\mu, c > 0$  e  $I$  un intervalo (posiblemente infinito) de  $\mathbb{Z}$ . Una  $(\mu, c)$ -cuasigeodésica es una sucesión  $\{p_n\}_{n \in I}$  tal que para todo  $n, m \in I$  se tiene que

$$\frac{1}{\mu} n - m \leq d_{X_d}(p_n, p_m) \leq \mu n - m + c.$$

Si  $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{a}^+$  es un cono cerrado, decimos que la cuasigeodésica es  $\mathcal{C}$ -regular si para todo  $n < m$  en  $I$  se tiene que  $\underline{a}(p_n, p_m) \in \mathcal{C}$ .

Como  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Z}$  son cuasi isométricos no perdemos generalidad al considerar sucesiones en vez de curvas.

Intuitivamente la condición de que sea  $\mathcal{C}$ -regular busca restringir, en cierto sentido, el cambio de dirección de la geodésica.

**Teorema 4.6.13** (Lema de Morse de Kapovich-Leeb-Porti para  $SL_d(\mathbb{R})$ ). Sean  $\mu, c > 0$  y  $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{a}^+$  un cono cerrado. Definimos

$$\theta_{\mathcal{C}} = \{\alpha \in \Pi : \ker \alpha \cap \mathcal{C} = \{0\}\}.$$

Entonces existe un  $C > 0$  (solo dependiendo del cono y de las constantes) tal que si  $\{p_n\}_{n \in I}$  es una  $(\mu, c)$ -cuasigeodésica  $\mathcal{C}$ -regular, entonces

- Si  $I$  es finito entonces  $\{p_n\}$  está contenido en un  $C$ -entorno del diamante

$$\diamond_{\theta_{\mathcal{C}}}(p_{\min I}, p_{\max I})$$

- Si  $I = \mathbb{N}$  entonces existe  $F \in \mathcal{F}_{\theta_{\mathcal{C}}}$  tal que  $\{p_n\}$  está contenido en un  $C$ -entorno del cono de Weyl  $V(p_{\min I}, F)$
- Si  $I = \mathbb{Z}$  entonces existen  $(E, F) \in \mathcal{F}_{\theta_{\mathcal{C}}}^{(2)}$  tal que  $\{p_n\}$  está en un  $C$ -entorno de  $P(E, F)$ .

*Demostración.* Para exponer las ideas vamos a probar solo el caso en que  $I = \mathbb{Z}$ . El resto se puede ver en [5]. En primer lugar asumimos sin pérdida de generalidad que  $p_0 = o$ . Esto se puede hacer porque el espacio es homogéneo. Tomamos entonces una sucesión  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que  $h_n \cdot o = p_n$ . Gracias a que  $\{p_n\}$  es una cuasigeodésica tenemos que

$$\|a(h_{n+1}^{-1}h_n)\|_o = \|\underline{a}(h_n \cdot o, h_{n+1} \cdot o)\|_o = d_{X_a}(p_n, p_{n+1}) \leq \mu + c, \quad (4.10)$$

y lo mismo se cumple para  $\|a(h_n^{-1}h_{n+1})\|_o$ . Si definimos  $g_n = h_{n+1}^{-1}h_n$  esto implica que la sucesión  $\{g_n\}$  está en un subconjunto compacto de  $SL_d(\mathbb{R})$ . Además, si  $m \geq n$  entonces

$$a(g_m \cdots g_n) = a(h_{m+1}^{-1}h_n) = \underline{a}(p_{m+1}, p_n).$$

Por un lado se cumple que, como  $\underline{a}(p_n, p_{m+1}) \in \mathcal{C}$ , tenemos que  $\underline{a}(p_{m+1}, p_n) \in i\mathcal{C}$ . Por otro lado, si  $\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}$ , como la sucesión es  $\mathcal{C}$ -regular tenemos que  $\ker \alpha \cap \mathcal{C} = \{0\}$ , pero esto implica que  $\ker i\alpha \cap i\mathcal{C} = \{0\}$  (ver proposición 4.6.5). Como el cono es cerrado, existe  $\delta > 0$  tal que si  $a \in i\mathcal{C}$  y  $\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}$  entonces

$$i\alpha(a) > \delta \|a\|_o.$$

La idea entonces es plantear estas relaciones en términos de lo analizado en el capítulo 3, en particular la sección 3.4. Es decir que queremos expresar la condición de  $\mathcal{C}$ -regularidad como una condición de dominación de matrices. Para eso planteamos la siguiente cadena de desigualdades:

$$i\alpha(a(g_m \dots g_n)) = i\alpha(\underline{a}(p_{m+1}, p_n)) > \delta \|a(p_{m+1}, p_n)\|_o > (\delta/\mu)|n - m| - \delta c, \quad (4.11)$$

donde en la última desigualdad usamos la definición de cuasigeodésica. Si  $g \in PSL_d(\mathbb{R})$  y  $a(g) = (a_1, \dots, a_d)$  entonces  $i(a(g)) = (-a_d, \dots, -a_1)$ . Luego, si  $\alpha = \alpha_p$  entonces

$$i\alpha(g) = \alpha \circ i(g) = \alpha_p((-a_d, \dots, -a_1)) = -a_{d-p+1} + a_{d-p}$$

y la ecuación (4.11) la podemos escribir como

$$\log(\sigma_{d-p}(g_m \dots g_n)) - \log(\sigma_{d-p+1}(g_m \dots g_n)) > (\delta/\mu)|n - m| - \delta c.$$

Tomando exponencial e invirtiendo tenemos que

$$\frac{\sigma_{d-p+1}(g_m \dots g_n)}{\sigma_{d-p}(g_m \dots g_n)} < e^{-(\delta/\mu)|n-m|} e^{\delta c}.$$

Esta relación y la ecuación (4.10), que implica que  $\|g_n\| < \mu + c$ , nos dice que

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}(\mu + c, d - p, \delta/\mu, e^{-c\delta}, \mathbb{Z}),$$

(recordar la definición de este conjunto al comienzo de la sección 3.4). Recordar de la proposición 4.6.6 que si  $f$  es un plano maximal parametrizado con  $f(0) = o$  y  $p_{m+1}$  en la imagen de  $\mathfrak{a}^+$  entonces  $Z_\theta(f) = U(o, p_{m+1})^{\theta(o, p_m)}$ . Además, la condición de  $\mathcal{C}$ -regularidad nos dice que  $\mathcal{C} \subseteq \theta(o, p_{m+1})$ , por lo que la bandera  $U(o, x_{m+1})^{\theta_{\mathcal{C}}}$  está bien definida. Ahora podemos decir explícitamente quién es esta bandera:

$$U(o, p_{m+1})^{\theta_{\mathcal{C}}} = \{U_\alpha^o(h_{m+1})\}_{\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}} = \{U_\alpha^o(g_0^{-1} \dots g_m^{-1})\}_{\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}} = \{S_{i\alpha}^o(g_m \dots g_0)\}_{\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}}.$$

y para  $m < 0$

$$U(o, p_m)^{i\theta_{\mathcal{C}}} = \{U_{i\alpha}^o(h_m)\}_{\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}} = \{U_{i\alpha}^o(g_0 \dots g_m)\}_{\alpha \in \theta_{\mathcal{C}}}.$$

Tomemos  $\ell_1$  suficientemente grande para que valga el lema 3.4.4 en cada espacio  $\mathcal{D}(\mu + c, \delta/\mu, e^{-c\delta}, d - p, \mathbb{Z})$  con  $\alpha_p \in \theta_{\mathcal{C}}$ . Este lema nos dice que existe un  $\delta_0$  tal que, si  $m, -n \in \mathbb{Z}$  y  $m, n \geq \ell_1$  entonces

$$\angle_o(U(o, p_m)^{\theta_{\mathcal{C}}}, U(o, p_{-n})^{i\theta_{\mathcal{C}}}) > \delta_0.$$

Definimos entonces

$$F = E^{cu}(\{g_i\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(o, p_{-n})^{i\theta_{\mathcal{C}}}$$

$$E = E^{cs}(\{g_i\}) = \lim_{m \rightarrow \infty} U(o, p_m)^{i\mathcal{C}}.$$

Por la continuidad de los ángulos en los subespacios (y por lo tanto en las banderas, ya que se define como el mínimo en cada subespacio), tenemos que

$$\angle_o(E, F) \geq \delta_0.$$

Esto por el teorema 4.6.11 implica que

$$d(o, P(E, F)) \leq c'_2 - c_2 \log \sin \angle_o(E, F) \leq c'_2 - c_2 \log \sin \delta_0. \quad (4.12)$$

Esta cota solo depende de las constantes  $\mu, c$ , el cono  $\mathcal{C}$  y el punto  $o$ . Nuestro objetivo es encontrar entonces una cota como la de la ecuación (4.12) para todos los puntos de la sucesión.

Por la proposición 3.4.3, se cumple que  $E^{cu} \oplus E^{cs}$  es una descomposición dominada para el cociclo asociado al shift, y en particular es invariante (ver definición 3.3.4)., Esto quiere decir que si  $k > 0$  entonces

$$h_k^{-1}F = g_k \dots g_0 E^{cu}(\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}) = E^{cu}(\{g_{i-k}\}_{i \in \mathbb{Z}})$$

y

$$h_k^{-1}E = g_k \dots g_0 E^{cs}(\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}) = E^{cs}(\{g_{i-k}\}_{i \in \mathbb{Z}}).$$

Esto implica, por el lema 3.4.4, que el ángulo  $\angle_o(h_k^{-1}F, h_k^{-1}E) > \delta$  y por lo

tanto tenemos que

$$d(p_k, P(E, F)) = d(h_k \cdot o, P(E, F)) = d(o, P(h_k^{-1}F, h_k^{-1}E)) < C,$$

donde en la segunda igualdad usamos nuevamente el teorema [4.6.11](#). Esto implica que la cuasigeodésica está en un  $C$ -entorno del conjunto paralelo  $P(E, F)$ .

□

# Capítulo 5

## Espacios simétricos de tipo no compacto

La idea de este capítulo es generalizar los conceptos vistos en  $X_d$  a espacios simétricos de tipo no compacto. También vamos a demostrar el lema de Morse para estos espacios. En la mayoría de definiciones y propiedades el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  se comporta como un ejemplo, por eso se realizará una comparación constante con el capítulo anterior.

### 5.1. Grupo de isometrías de un espacio simétrico

Vamos a usar la gran cantidad de isometrías que tiene un espacio simétrico para poder abstraernos de la geometría Riemanniana y así estudiar estos espacios usando técnicas de grupos y álgebras de Lie, para eso vamos a trabajar para relacionar conceptos pertenecientes a ambas áreas. Consideramos un espacio simétrico  $S$ . En cada punto  $o \in S$  tenemos una simetría central  $s_o : S \rightarrow S$  y sabemos por el teorema 1.2.7 que  $Isom_0(S)$  es un grupo de Lie. A partir de ahora nos referimos a este grupo solo por  $G$ . Esto nos permite definir para cada punto un morfismo involutivo de  $G$  dado por

$$\begin{aligned}\tau_o : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto s_o g s_o\end{aligned}$$

La idea de esta sección es entender cómo este morfismo involutivo nos puede ayudar a describir la geometría del espacio  $S$ .

**Proposición 5.1.1.** *Los conjuntos  $Stab_o(G) = \{g \in G : g \cdot o = o\}$  y  $Fix(\tau_o) = \{g \in G : s_o g s_o = g\}$  tienen la misma componente conexa de la identidad.*

*Demostración.* Vamos a probar las dos inclusiones.

**1:**  $Stab_o(G) \subseteq Fix(\tau_o)$  Si  $k \in Stab_o(G)$  entonces  $k \cdot o = s_o k s_o \cdot o = o$ . Además ambas funciones tienen el mismo diferencial en  $o$  (ya que el diferencial de la simetría es  $-id$ ). Por lo tanto coinciden en un abierto y cerrado de  $S$  y por lo tanto coinciden en  $S$ .

**2:** Si  $k$  está en la componente conexa de la identidad de  $Fix(\tau_o)$  entonces  $k \in Stab_o(G)$

Como  $s_o k s_o = k$  entonces se cumple que  $s_o k \cdot o = k s_o \cdot o = k \cdot o$ . Luego,  $k \cdot o$  es fijo por  $s_o$ . Sin embargo, cerca de  $o$ , el punto es el único fijo de  $s_o$  (por definición de la simetría).

Consideremos entonces  $k_t$  un camino de isometrías tales que  $k_0 = id$ ,  $k_1 = k$  y  $s_o k_t \cdot o = o$ . Por lo mencionado en el párrafo anterior, el conjunto de tiempos para los cuales  $k_t \cdot o = o$  es abierto y cerrado en  $[0, 1]$ , lo que concluye la afirmación. □

Consideremos ahora  $\sigma^o = d_{id}\tau_o$ . Observar que es un morfismo involutivo del álgebra de Lie de  $G$  (que a partir de ahora denotaremos  $\mathfrak{g}$ ) y por lo tanto descompone  $\mathfrak{g}$  en los dos subespacios propios:

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^o &= \{x \in \mathfrak{g} : \sigma^o(x) = x\} \\ \mathfrak{p}^o &= \{x \in \mathfrak{g} : \sigma^o(x) = -x\}.\end{aligned}$$

Realizando los mismo razonamientos que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  (ver proposición 4.1.7) obtenemos las siguientes relaciones:

1.  $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{p}^o] \subseteq \mathfrak{p}^o$
2.  $[\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o] \subseteq \mathfrak{k}^o$
3.  $[\mathfrak{k}^o, \mathfrak{k}^o] \subseteq \mathfrak{k}^o$

Se tiene que  $\mathfrak{k}^o$  es una subálgebra y, por la proposición 5.1.1, su grupo de Lie es la componente conexa de la identidad de  $Stab_o(G)$  que a partir de ahora denotaremos  $K^o$ .

Al igual que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  podemos considerar el mapa  $\pi_o(g)$  (la acción por  $g$ ) y su diferencial en la identidad  $\pi^o$ , y obtener coordenadas de  $T_oS$

**Definición 5.1.2.** Como  $\ker \pi^o = \mathfrak{k}^o$  sabemos que  $\pi^o|_{\mathfrak{p}^o}$  es un isomorfismo. A su inversa

$$\theta^o : T_oS \rightarrow \mathfrak{p}^o$$

la llamamos *forma de Maurer-Cartan*.

Acá es importante remarcar el paralelismo entre el capítulo 4 y este: obtuvimos herramientas similares a las de  $SL_d(\mathbb{R})$  para trabajar, la diferencia es que en  $SL_d(\mathbb{R})$  partimos de la involución para obtener la simetría y acá partimos de la simetría para obtener la involución. Al igual que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  tenemos el siguiente diagrama que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_g} & G \\ \pi_o \downarrow & & \downarrow \pi_{g \cdot o} \\ S & \xrightarrow{\varphi_g} & S \end{array} \quad (5.1)$$

y derivando tenemos también

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \\ \pi^o \downarrow & & \downarrow \pi^{g \cdot o} \\ T_oS & \xrightarrow{d_o\varphi_g} & T_{g \cdot o}S \end{array} \quad (5.2)$$

**Definición 5.1.3.** Si  $\sigma \in End(\mathfrak{g})$  es una involución tal que  $\kappa^\sigma(X, Y) = -\kappa(X, \sigma(Y))$  es definida positiva entonces decimos que es una *involución de Cartan*.

Se puede probar (ver [14]) que toda álgebra de Lie semisimple tiene una involución de Cartan, y esto permite construir ejemplos de espacios simétricos como cocientes de grupos de Lie semisimples.

## 5.2. Relación entre la geometría de un espacio simétrico y su grupo de isometrías

En esta sección expresamos las geodésicas y el tensor de curvatura de la variedad  $S$  en términos del lenguaje de álgebras de Lie. Esto nos permitirá expresar muchos conceptos geométricos en términos de subgrupos y subálgebras de  $G$  y  $\mathfrak{g}$ . Los resultados demostrados aquí ya fueron usados ampliamente en la sección 4.3, en particular para la proposición 4.3.1. Para la realización de esta sección nos basamos fundamentalmente en [25].

### 5.2.1. Geodésicas de $S$

Vamos a ver que las geodésicas del espacio se pueden describir como la acción de un subgrupo a un parámetro.

**Proposición 5.2.1.** *Toda geodésica por  $o$  es de la forma  $t \mapsto \pi_o(e^{tX})$  con  $X \in \mathfrak{p}^o$ . Además, si  $X \in \mathfrak{g}$  entonces la curva  $\gamma(t) = \pi_o(e^{t\pi^o(X)})$  es geodésica si y solo si  $X \in \mathfrak{p}^o$ .*

*Demostración.* Sea  $t \mapsto \alpha(t)$  una geodésica por  $o$ , denotamos  $s_t = s_{\alpha(t)}$ . Observaremos que, dados dos tiempos  $v, u$ , se cumple que  $s_u(\alpha(u+v)) = \alpha(u-v)$ . Si definimos la función  $g_t = s_{t/2}s_o$  entonces vamos a ver que verifica

1.  $\alpha(t) = g_t \cdot o$
2. Es un subgrupo a un parámetro de  $G$

La primera afirmación es clara, para ver la segunda tenemos que probar que  $g_u g_v = g_{u+v} = s_{(u+v)/2} s_o$ . Para eso basta probar que  $s_{u/2} s_o s_{v/2} = s_{(u+v)/2}$ . Observar que ambas isometrías fijan el punto  $\alpha((u+v)/2)$ , por lo que basta ver que tienen el mismo diferencial en  $\alpha((u+v)/2)$ . Por simplicidad omitimos el denominador 2 de la cuenta.

$$\begin{aligned} d_{\alpha(u+v)} s_u s_o s_v &= d_{s_o s_v(\alpha(u+v))} s_u d_{s_v(\alpha(u+v))} s_o d_{\alpha(u+v)} s_v = \\ &= d_{\alpha(u-v)} s_u d_{\alpha(v-u)} s_o d_{\alpha(u+v)} s_v = -id \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se cumple porque las simetrías preservan las geodésicas revirtiendo orientación y revertimos orientación tres veces.

Como  $g_t$  es un subgrupo a un parámetro existe  $X \in \mathfrak{g}$  tal que  $g_t = e^{tX}$ . Además se cumple que

$$\tau^\circ(g_t) = s_o g_t s_o = s_o s_{t/2} s_o s_o = s_o s_{t/2} = s_{-t/2} s_o = g_{-t} = e^{-tX}.$$

Derivando obtenemos que  $\sigma^\circ(X) = -X$  y por lo tanto  $X \in \mathfrak{p}^\circ$ . Como además se cumple que  $\alpha(t) = e^{tX} \cdot o$  tenemos lo buscado.  $\square$

El siguiente lema será de utilidad en la sección siguiente. Nos da una relación entre el corchete y la métrica Riemanniana.

**Lema 5.2.2** (*ad $_{\mathfrak{k}}$ -asociatividad de la métrica.*). Sean  $X \in \mathfrak{k}^\circ$  e  $Y, Z \in \mathfrak{p}^\circ$ . Entonces  $(\pi^\circ([Y, X], \pi^\circ(Z)))_o = (\pi^\circ(Y), \pi^\circ([X, Z]))_o$ .

*Demostración.* Como la curva de isometrías  $e^{tX}$  fija el punto  $o$  tenemos la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d_o \varphi_{e^{tX}} \pi^\circ(Y), d_o \varphi_{e^{tX}} \pi^\circ(Z)) \\ &= \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_o \varphi_{e^{tX}} \pi^\circ(Y), \pi^\circ(Z) \right)_o + \left( \pi^\circ(Y), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_o \varphi_{e^{tX}} \pi^\circ(Z) \right)_o \\ &= (\pi^\circ([X, Y]), \pi^\circ(Z))_o + (\pi^\circ(Y), \pi^\circ([X, Z]))_o \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

### 5.2.2. El tensor de curvatura

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema (para revisar los conceptos de curvatura y conexión ver 1.1):

**Teorema 5.2.3** (Fórmula de curvatura para un espacio simétrico). Sea  $S$  un espacio globalmente simétrico,  $o \in S$  y  $X, Y, Z \in \mathfrak{p}^\circ$ , entonces

$$R(\pi^\circ(X), \pi^\circ(Y))\pi^\circ(Z) = -\pi^\circ([[X, Y], Z]).$$

Esta fórmula entre otras cosas nos permitirá estudiar los planos maximales, y abstraernos de los conceptos de geometría Riemanniana.

**Lema 5.2.4.**  $R'(\pi^\circ X, \pi^\circ Y)\pi^\circ Z = -\pi^\circ ([[X, Y], Z])$  es un tensor.

*Demostración.* Usando el hecho de que  $[\mathfrak{p}^o, \mathfrak{p}^o] \subseteq \mathfrak{k}^o$ , el lema 5.2.2 y las propiedades que definen al corchete se puede verificar que  $(R_2(\pi^o X, \pi^o Y)\pi^o Z, \pi^o T)_o = (X, Y, Z, T)$  cumple las condiciones algebraicas de un tensor (ver [7], proposición 2.5).  $\square$

**Definición 5.2.5.** Si  $G$  es un grupo de Lie,  $M$  es una variedad diferenciable y  $G$  actúa en  $M$  de forma diferenciable, entonces cada elemento  $\pi^p(X) \in \mathfrak{g}$  induce un campo  $\bar{X}$  en  $M$  definido por  $\bar{X}(p) = \pi^p(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} \cdot p$ .

**Proposición 5.2.6.** El mapa  $\pi^p$  es un antimorfismo de álgebras de Lie, es decir que

$$[\pi^p(X), \pi^p(Y)] = -\pi^p([X, Y])$$

*Demostración.* Si  $\varphi_t$  es el flujo inducido por  $\bar{X}$  y  $\psi_t$  es el flujo inducido por  $\bar{Y}$  entonces por la definición de corchete de Lie (ver 1.1.1) se cumple que

$$[\bar{X}, \bar{Y}](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\varphi_t(p)} \varphi_{-t}(\bar{Y}_{\varphi_t(p)}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_{-t}(\psi_s(\varphi_t(p))).$$

Observamos que el flujo inducido por  $\bar{X}$  es  $e^{tX} \cdot p$  y el flujo inducido por  $\bar{Y}$  es  $e^{tY} \cdot p$ . Luego

$$\begin{aligned} [\pi^p(X), \pi^p(Y)] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{-tX} e^{sY} e^{tX} \cdot p \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{e^{-tX}} Y \cdot p = -\pi^p([X, Y]) \end{aligned}$$

$\square$

Para lo siguiente nos conviene recordar las propiedades que definen la conexión de Levi-Civita. Sean  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  campos diferenciables. Entonces

1.  $\bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) = (\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}) + (\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}} \bar{Z})$
2.  $\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_{\bar{Y}} \bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}]$

**Definición 5.2.7.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $\bar{X}$  un campo en  $M$ . Decimos que  $\bar{X}$  es de Killing si su flujo asociado es por isometrías.

**Proposición 5.2.8.** Sea  $\bar{X}$  un campo de Killing de  $M$ , entonces para cualquier par de campos  $\bar{Y}, \bar{Z}$  en  $M$  se tiene

1.  $\bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) = ([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) + (\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}} \bar{Z})$

$$2. (\nabla_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z}) + (\bar{Y}, \nabla_{\bar{Z}} \bar{X}) = 0.$$

En particular, si  $X$  es de Killing entonces para todo campo  $\bar{Y}$  se tiene que  $(\nabla_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Y}) = 0$ .

*Demostración.* Primero probamos la primera ecuación. Consideramos el flujo  $\varphi_t$  de  $\bar{X}$ , que por definición es de isometrías de  $M$ . Tenemos entonces, para campos arbitrario  $\bar{Y}, \bar{Z}$  que

$$\begin{aligned} (\bar{X}, (\bar{Y}, \bar{Z}))_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\bar{Y}(\varphi_t p), \bar{Z}(\varphi_t p))_{\varphi_t p} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d_{\varphi_t(p)} \varphi_{-t}(\bar{Y}(\varphi_t p)), d_{\varphi_t p} \varphi_{-t}(\bar{Z}(\varphi_t p)))_p \quad (\varphi_t \text{ es una isometría}) \\ &= \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\varphi_t(p)} \varphi_{-t}(\bar{Y}(\varphi_t p)), \bar{Z}(p) \right)_p \\ &\quad + \left( \bar{Y}(p), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\varphi_t p} \varphi_{-t}(\bar{Z}(\varphi_t p)) \right)_p \quad (\text{Regla de Leibnitz}) \\ &= ([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) + (\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por la definición de corchete de Lie de campos. El segundo ítem se demuestra en la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z}) + (\bar{Y}, \nabla_{\bar{Z}} \bar{X}) \\ &= (\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}) - ([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) \\ &\quad + (\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}} \bar{Z}) - (\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]) \quad (\text{Prop. 1 de Levi-Civita}) \\ &= \bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) - ([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) + (\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]) \quad (\text{Prop. 2 de Levi -Civita}) \end{aligned}$$

y la última línea se anula por el primer ítem de esta proposición. □

*Demostración de la fórmula del tensor de curvatura.* Por el lema 5.2.4, nos basta probar que las curvaturas seccionales de ambos tensores coinciden. Observar que los campos  $\bar{X}(p) = \pi^p(X)$ ,  $\bar{Y}(p)$  y  $\bar{Z}(p)$  definidos igual son de

Killing. El campo  $\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}$  se anula en  $o$ :

$$\begin{aligned}
2(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) &= (\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Z}}\bar{Y}) && (\bar{Y} \text{ es de Killing}) \\
&= \bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) - (\bar{Y}, \nabla_{\bar{X}}\bar{Z}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Z}}\bar{Y}) && (\text{Prop. 2 de la conexi3n}) \\
&= \bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) + (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z}, \bar{X}) - (\bar{X}, \nabla_{\bar{Z}}\bar{Y}) && (\bar{Z} \text{ es de Killing}) \\
&= \bar{X}(\bar{Y}, \bar{Z}) + (\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}]) && (\text{Prop. 1 de la conexi3n}) \\
&= ([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) + (\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]) + (\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}]). && (\bar{X} \text{ de Killing})
\end{aligned}$$

Observar que, como  $[X, Y] \subseteq \mathfrak{k}^o$  se tiene que  $\pi^o[X, Y] = -[\pi^o(X), \pi^o(Y)] = 0$ , lo mismo se cumple para los otros corchetes, por lo que los tres t3rminos valen 0. Como  $\bar{Z}$  era arbitrario, concluimos lo deseado. Por el lema 5.2.4 y la caracterizaci3n del tensor de curvatura de [7] nos basta probar que

$$R((\bar{X}, \bar{Y}), \bar{X}, \bar{Y}) = -\left(\pi^o([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{X}), \pi^o(\bar{Y})\right)_o$$

Por definici3n

$$(R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{X}, \bar{Y}) = (\nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y})_o - (\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y})_o - (\nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y})_o$$

y computamos cada t3rmino. Observar que, como  $[X, Y] \subseteq \mathfrak{k}^o$  se tiene que  $\pi^o[X, Y] = -[\pi^o(X), \pi^o(Y)] = 0$ , por lo que el tercer t3rmino se anula. Ahora vamos a calcular los dos primeros t3rminos. **C3lculo del primer t3rmino:**

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y})_o &= \bar{X}(\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y}) - (\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, \nabla_{\bar{X}}\bar{Y}) && (\text{Prop.1 de Levi-Civita}) \\
&= \bar{X}(\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y}) && (\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}(o) = 0) \\
&= 0 && (\text{Cuenta hecha al principio de la demostraci3n})
\end{aligned}$$

**Cálculo del segundo término:**

$$\begin{aligned}
-(\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y}) &= -\bar{Y}(\nabla_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y}) + (\nabla_{\bar{X}}\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}\bar{Y})_o \quad (\text{Prop.1 de Levi-Civita}) \\
&= -\bar{Y}(\nabla_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y}) \quad (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Y}(o) = 0) \\
&= -\bar{Y}(\bar{X}(\bar{X}, \bar{Y})) \quad (\text{Prop. de Levi-Civita y } \bar{Y} \text{ de Killing}) \\
&= -\bar{Y}((\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}])) \quad (\bar{X} \text{ de Killing}) \\
&= -([\bar{Y}, \bar{X}], [\bar{X}, \bar{Y}])_o - (\bar{X}, [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]])_o \quad (\bar{Y} \text{ de Killing}) \\
&= -(\bar{X}, [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]])_o \quad ([X, Y] \in \mathfrak{k}^o) \\
&= -([\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{X}]], \bar{Y})_o \\
&\quad ([X, Y] \in \mathfrak{k}^o \text{ y } (\cdot, \cdot) \text{ es } ad_{\mathfrak{k}^o} - \text{asociativa}) \\
&= -(\pi^o([[X, Y], X]), \pi^o(Y))
\end{aligned}$$

Lo que termina de probar la proposición.  $\square$

A partir de ahora asumimos que  $S$  es de tipo no compacto. También fijamos  $o \in S$  y  $\mathfrak{a}$  una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{p}^o$

**Teorema 5.2.9.** *Sea  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^o$  una subálgebra abeliana. Entonces  $f : \mathfrak{a} \rightarrow S$  definida por  $f(A) = \pi_o(e^A)$  es una subvariedad plana totalmente geodésica. Además, si  $\mathfrak{a}$  es maximal en  $\mathfrak{p}^o$  entonces  $f(\mathfrak{a})$  es maximal como subvariedad plana totalmente geodésica.*

*Demostración.* El hecho de que es totalmente geodésica y que el mapa es una isometría sigue los pasos de la demostración del teorema 4.3.5.

Si  $X, Y \in \mathfrak{p}^o$  entonces por el teorema 5.2.3 se cumple que  $K(\mathbb{R}\pi^o X, \mathbb{R}\pi^o Y) = 0$  si y solo si  $(\pi^o([[X, Y], X]), \pi^o Y) = 0$ . Se puede demostrar (ver [20]) que  $(\pi^o([[X, Y], X]), \pi^o Y) = \lambda \kappa([X, Y], [X, Y])$ , con  $\lambda \neq 0$ . Como la forma de Killing es no degenerada entonces esto solo ocurre si  $[X, Y] = 0$ .  $\square$

**Proposición 5.2.10.** *Si  $S$  es de tipo no compacto entonces el mapa  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  determinado por*

$$\sigma(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_o e^{tX} s_o$$

*es una involución de Cartan.*

La prueba de esta proposición se puede ver en [25].

### 5.3. Sistema de raíces

Sea  $\mathfrak{g}$ , como siempre, el álgebra de Lie de  $G = Isom_0(S)$  y  $\kappa$  su forma de Killing. A partir de ahora vamos a asumir siempre que  $S$  es de tipo no compacto. La idea es generalizar el sistema de raíces estudiado en el capítulo 4 para  $\mathfrak{g}$ . Recordamos de la definición 4.3.11 que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  podíamos identificar las raíces como diferencias de valores propios de matrices simétricas. Sin embargo en la proposición 4.4.3 vimos que las podíamos pensar como funcionales que calculan valores propios de la representación adjunta. Es con esta idea en mente con la que vamos a trabajar.

Como en esta sección trabajaremos fundamentalmente en el álgebra, denotamos  $\mathfrak{p}^\sigma$  simplemente como  $\mathfrak{p}$ .

**Proposición 5.3.1.** *Si  $X \in \mathfrak{p}$  entonces  $ad_X$  es auto adjunta respecto al producto interno  $\kappa^\sigma$ .*

*Demostración.* Si  $Y, Z \in \mathfrak{p}^\sigma$  entonces

$$\begin{aligned} \kappa^\sigma(ad_X Y, Z) &= -\kappa(ad_X Y, \sigma(Z)) = -\kappa([X, Y], \sigma(Z)) \\ &= \kappa(Y, [X, \sigma(Z)]) = -\kappa(Y, \sigma([X, Z])) = \kappa^\sigma(Y, ad_X Z). \end{aligned}$$

donde usamos que  $\kappa$  es  $ad_{\mathfrak{g}}$  asociativa (ver 1.2.23) y que  $\sigma(X) = -X$ .  $\square$

Fijemos entonces una subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ . Como  $[A, B] = 0$  para todos  $A, B \in \mathfrak{a}$  se tiene que  $ad_A$  como operador conmuta con  $ad_B$  y por lo tanto todos los adjuntos son simultáneamente diagonalizables. Si  $v$  es un vector propio de  $ad_a$  entonces

$$a \mapsto \text{valor propio de } v \text{ para } ad_a$$

es un funcional lineal de  $\mathfrak{a}$ . A los funcionales no nulos que tienen esta forma los llamamos *raíces* y al conjunto de raíces lo denotamos por  $\Sigma$ .

Si definimos, para cada raíz  $\alpha \in \Sigma$ ,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [A, X] = \alpha(A)X \text{ para todo } A \text{ en } \mathfrak{a}\}$$

tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 5.3.2.** *Se tiene que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

*Además se cumple que  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ .*

*Demostración.* Esta proposición se deduce del hecho de que, dado  $A \in \mathfrak{a}$ , el operador  $ad_A$  es diagonalizable. Además, si  $X$  es un vector no nulo en  $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta$  entonces para todo  $A \in \mathfrak{a}$  se cumple que  $[A, X] = \alpha(A)X = \beta(A)X$ . Como  $X \neq 0$  esto implica que  $\alpha(A) = \beta(A)$  por lo que la suma es directa.

Para la segunda parte de la proposición consideremos  $X \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$ . Por definición de  $\mathfrak{g}_0$  si  $A$  está en  $\mathfrak{a}$  entonces  $[A, X] = 0$ . Por la maximalidad de  $\mathfrak{a}$  esto implica que  $X \in \mathfrak{a}$ .  $\square$

**Proposición 5.3.3.** *Se cumple que*

1.  $\Sigma$  es finito y genera  $\mathfrak{a}^*$
2.  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
3.  $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$

*Demostración.* Demostramos cada parte por separado.

1. La finitud es consecuencia de la proposición anterior. Vamos a demostrar que para todo  $A \in \mathfrak{a}$  existe  $\alpha \in \Sigma$  tal que  $\alpha(A) \neq 0$ . Supongamos por absurdo que existe un  $A \in \mathfrak{a}$  tal que  $\alpha(A) = 0$  para todo  $\alpha \in \Sigma$ . Sea  $X \in \mathfrak{g}$ , por la proposición anterior tenemos que

$$X = X_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$$

con  $X_i \in \mathfrak{g}_i$ . Esto implica que

$$[A, X] = [A, X_0] + \sum_{\alpha \in \Sigma} [A, X_\alpha] = 0$$

por lo que  $A$  conmuta con todos los elementos de  $\mathfrak{g}$  y se contradice la hipótesis de que  $\mathfrak{g}$  es semisimple (ver la caracterización de álgebras semisimples enunciada en [1.2.22](#)).

2. Sea  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ . Por la identidad de Jacobi tenemos que

$$[A, [X_\alpha, X_\beta]] = [[A, X_\alpha], X_\beta] - [[A, X_\beta], X_\alpha] = (\alpha(A) + \beta(A))[X_\alpha, X_\beta]$$

donde en la segunda igualdad usamos la identidad de Jacobi y en la tercera la bilinearidad del corchete.

3. Sea  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $A \in \mathfrak{a}$ . Como  $A \in \mathfrak{p}$  Tenemos que

$$[A, \sigma(X_\alpha)] = -\sigma([A, X_\alpha]) = -\alpha(A)\sigma(X_\alpha).$$

La igualdad viene de que  $\sigma$  es una involución.

□

En [2] se puede encontrar una prueba del siguiente lema, que es una mejora del ítem 2 de la proposición 5.3.3

**Lema 5.3.4.** Sean  $\alpha, \beta \in \Sigma$  tales que  $\alpha + \beta \in \Sigma$ . Entonces  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

**Lema 5.3.5.** Sean  $\alpha, \beta \in \Sigma$  raíces tales que  $\alpha + \beta \neq 0$ . Entonces  $\mathfrak{g}_\alpha$  es ortogonal a  $\mathfrak{g}_\beta$  respecto a la forma de Killing.

*Demostración.* Tenemos que probar que si  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$  entonces  $K(X_\alpha, X_\beta) = 0$ . Como  $\alpha + \beta \neq 0$  existe un  $A \in \mathfrak{a}$  tal que  $\alpha(A) + \beta(A) \neq 0$ . Entonces tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\alpha(A)\kappa(X_\alpha, X_\beta) = \kappa([A, X_\alpha], X_\beta) = -\kappa([A, X_\beta], X_\alpha) = -\beta(A)\kappa(X_\alpha, X_\beta),$$

donde en la segunda igualdad usamos que la forma de Killing es *ad*-asociativa. Esto implica que  $(\alpha(A) + \beta(A))\kappa(X_\alpha, X_\beta) = 0$ , lo que a su vez implica que  $\kappa(X_\alpha, X_\beta) = 0$ . □

**Corolario 5.3.6.** Sea  $\alpha \in \Sigma$ . Entonces  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  está en  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha$ . Como  $X \in \mathfrak{k}$  se cumple que  $X = \sigma(X)$ , pero esto a su vez implica que  $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , por lo que tenemos que  $X = 0$ . □

Al igual que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  tenemos la siguiente definición.

**Definición 5.3.7.** Las cámaras de Weyl de  $\mathfrak{a}$  se definen como las clausuras de las componentes conexas de

$$\mathfrak{a} - \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \ker \alpha.$$

### 5.3.1. Geometría en las raíces

La idea es relacionar las raíces con la geometría del espacio simétrico. Recordamos que si  $\mathfrak{a}$  es una subálgebra maximal de  $\mathfrak{p}$ , entonces la acción del grupo  $e^{\mathfrak{a}}$  preserva al plano geodésico  $\pi_o(e^{\mathfrak{a}})$ . Al igual que en el capítulo 4, vamos a estudiar qué planos maximales contienen al punto  $o$  y a otro punto  $g \cdot o$ . Primero utilizamos lo visto en la sección anterior para encontrar planos maximales por  $e^X \cdot o$  con  $X \in \mathfrak{p}$ .

En un abuso de notación, muchas veces omitimos la forma de Maurer-Cartan y nos referimos al plano tangente  $T_o S$  directamente como  $\mathfrak{p}$ .

**Lema 5.3.8.** *Si  $A \in \mathfrak{a}$  está en el interior de una cámara de Weyl y  $X \in \mathfrak{g}$  cumple que  $[A, X] = 0$  entonces  $X \in \mathfrak{g}_0$*

*Demostración.* Como  $X$  cumple que  $[A, X] = 0$  entonces se cumple que  $X$  es un vector propio de  $ad_A$  con valor propio 0. Pero como para todo  $\alpha \in \Sigma$  se cumple que  $\alpha(A) \neq 0$  entonces  $X$  no puede pertenecer a ningún  $\mathfrak{g}_\alpha$ , por lo que debe pertenecer a  $\mathfrak{g}_0$ .  $\square$

**Corolario 5.3.9.** *Sean  $X \in \mathfrak{p}$  y  $A$  en el interior de una cámara de Weyl tales que  $[A, X] = 0$ . Entonces el único plano maximal que contiene a  $o$  y  $e^X \cdot o$  es  $e^{\mathfrak{a}} \cdot o$ .*

*Demostración.* Si tenemos que  $X \in \mathfrak{p}$  cumple que  $[X, A] = 0$  entonces  $X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$ , luego  $\mathfrak{a}$  es la única álgebra abeliana maximal que contiene a  $A$ .  $\square$

La idea ahora es estudiar qué pasa con las direcciones que no están en el interior de una cámara. ¿Será que pueden pertenecer a una única álgebra abeliana maximal? La intuición de  $SL_d(\mathbb{R})$  nos dice que esto no es así, pero para demostrarlo debemos introducir algunos objetos.

**Definición 5.3.10.** Definimos el *normalizador* de  $\mathfrak{a}$  como el subgrupo

$$N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : Ad_k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$$

y el *centralizador* de  $\mathfrak{a}$  como

$$Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \text{para todo } a \in \mathfrak{a} \text{ } Ad_k(a) = a\}$$

**Proposición 5.3.11.** *Se cumplen las siguientes propiedades*

1.  $Z_K(\mathfrak{a}) \triangleleft N_K(\mathfrak{a})$
2. Ambos son subgrupos de Lie y sus álgebras coinciden.
3.  $N_k(\mathfrak{a})$  preserva el sistema de raíces de  $\mathfrak{a}$ .

*Demostración.* Vamos a probar los items 2 y 3. El primero es estándar en teoría de grupos.

2. Tenemos que  $Lie(N_k(\mathfrak{a})) = \{U \in \mathfrak{k} : [\mathfrak{a}, U] \subseteq \mathfrak{a}\}$ . Vamos a ver que si  $U$  cumple esta condición en realidad se cumple que  $[A, U] = 0$  para todo  $A \in \mathfrak{a}$ .

Descomponemos  $U = U_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} U_\alpha$  como en la proposición 5.3.2. Observar que, dado  $A \in \mathfrak{a}$ , se cumple que

$$[A, U] = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(A)U_\alpha.$$

Por otro lado, por como definimos  $U$  tenemos que  $[A, U] \in \mathfrak{g}_0$ . Como la suma de la proposición 5.3.2 es directa tenemos que  $[A, U] = 0$ .

3. Si  $\alpha \in \Sigma$ ,  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $k \in N_K(\mathfrak{a})$  entonces para todo  $A$  en  $\mathfrak{a}$  se cumple que

$$\begin{aligned} [A, Ad_k(X)] &= Ad_k([Ad_{k^{-1}}(A), X]) = Ad_k(\alpha(Ad_{k^{-1}}(A))X) \\ &= \alpha(Ad_{k^{-1}}(A))Ad_k(X) \end{aligned}$$

Esto implica que  $\alpha \circ Ad_{k^{-1}}$  es una raíz.

□

**Definición 5.3.12.** Definimos el *grupo de Weyl* como el cociente

$$\mathcal{W} = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}).$$

Como ambos son subgrupos compactos con la misma álgebra de Lie, entonces este grupo es finito. Ahora vamos a usar las raíces para estudiar qué

planos maximales por  $o$  contienen a una dirección  $A \in \mathfrak{a}$ . Un análisis del grupo de Weyl se puede encontrar en [18].

Se puede probar que  $\mathcal{W}$  está generado por las reflexiones respecto a los subespacios  $\{\ker \alpha : \alpha \in \Sigma\}$ . Respecto a este generador, existe un único elemento más largo en  $W$ , que denotamos por  $u_0 : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ . Se puede probar además que  $u_0(\mathfrak{a}^+) = -\mathfrak{a}^+$ .

**Definición 5.3.13.** Definimos la *involución de oposición* como el mapa  $i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$  como el mapa  $i = -u_0$ . Observar que esta involución fija  $\mathfrak{a}^+$ .

En el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  se cumple que  $i$  es el mapa que consiste en revertir el orden de los valores singulares y tomar su opuesto.

**Teorema 5.3.14.** *Sea  $A \in \mathfrak{a}$  tal que existe  $\alpha \in \Sigma$  con  $A \in \ker \alpha$ . Entonces existe una familia indexada a un parámetro de planos maximales que contienen a la geodésica de dirección  $A$ .*

*Demostración.* Recordamos de la proposición 5.3.3 que si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  entonces  $\sigma(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . De nuevo por la misma proposición tenemos que  $X + \sigma(X)$  conmuta con  $A$  y también pertenece a  $\mathfrak{k}$  (pues es simétrico respecto a  $\sigma$ ). Esto implica que el grupo a un parámetro  $t \mapsto e^{t(X+\sigma(X))}$  fija a  $A$  por la acción adjunta. Vamos a ver que este subgrupo de un parámetro interseca trivialmente a  $N_K(\mathfrak{a})$ , para lo cual estudiamos el álgebra de Lie de dicho subgrupo.

Tomemos entonces un  $B \in \mathfrak{a}$  tal que  $B \notin \ker \alpha$  (que siempre existe pues  $\alpha$  es una raíz). Entonces tenemos que

$$[B, X + \sigma(X)] = \alpha(B)X - \alpha(B)\sigma(X) = \alpha(B)(X - \sigma(X)) \neq 0$$

donde la última desigualdad se cumple porque del corolario 5.3.6 se tiene que  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$ . Esto implica que  $X + \sigma(X)$  no conmuta con  $B$  y por lo tanto los  $t$  que cumplen que

$$Ad_{e^{t(X+\sigma(X))}} B \in \mathfrak{a}$$

forman un conjunto discreto.

Finalmente,  $Ad_{e^{t(X+\sigma(X))}} \mathfrak{a}$  forman un subgrupo a un parámetro de álgebras abelianas maximales de  $\mathfrak{p}$  que contienen a  $A$ , y cada una de ellas determina un plano maximal que contiene a la geodésica de dirección  $A$ .

□

Ahora vamos a ver algunos resultados generales de raíces que nos permitirán extender algunas definiciones vistas en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$ . Para eso fijamos una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  en el álgebra  $\mathfrak{a}$ .

**Definición 5.3.15.** Definimos el *conjunto de raíces positivas* como  $\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} \geq 0\}$ .

**Teorema 5.3.16.** *Existe un conjunto  $\Pi \subseteq \Sigma^+$  tal que*

1.  $\Pi$  genera a  $\mathfrak{a}^*$ .
2. Todo elemento de  $\Sigma^+$  es combinación lineal no negativa de elementos de  $\Pi$ .

*A estas las llamamos raíces simples.*

## 5.4. Subgrupos parabólicos y el borde de Furstenberg

Vamos a construir el borde de Furstenberg en el contexto abstracto. Para eso vamos a definir el subgrupo parabólico minimal que cumplirá el rol del subgrupo de matrices triangulares superiores en  $SL_d(\mathbb{R})$ . Dado un punto  $o \in S$  fijamos entonces una subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}^o$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ . Como estas elecciones estarán fijas, nos referimos a  $\mathfrak{p}^o$  simplemente como  $\mathfrak{p}$ . En esta sección vamos a hacer un cambio de notación: denotamos por  $M$  al centralizador de  $\exp \mathfrak{a}$  en  $K$  y  $N = \exp \mathfrak{n}^+$  con  $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ . También denotamos por  $\mathfrak{m}$  al álgebra de Lie de  $M$ .

**Proposición 5.4.1.** *Se cumple que  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ .*

*Demostración.* Claramente la suma es directa porque  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{m} \in \mathfrak{k}$ . Observar que si  $X \in \mathfrak{m}$  entonces para todo  $A \in \mathfrak{a}$  se cumple que  $Ad_{e^{tX}}(A) = A$ , lo que implica que  $[A, X] = 0$  por lo que  $X \in \mathfrak{g}_0$ . Análogamente, si  $X \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$  entonces se cumple  $[A, X] = 0$ , y por lo tanto  $Ad_{e^{tX}}A = A$  lo que a su vez implica que  $X \in \mathfrak{m}$ .  $\square$

### 5.4.1. Subgrupos parabólicos

**Definición 5.4.2.** Al grupo  $P_\Pi = M \exp(\mathfrak{a})N$  lo llamamos *subgrupo parabólico minimal*.

Su álgebra de Lie es  $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ . En la literatura muchas veces se lo denota por  $\mathfrak{b}$ .

**Definición 5.4.3.** Dado  $\theta \subseteq \Pi$  un subconjunto de raíces simples, *el subgrupo parabólico estándar asociado a  $\theta$*  es el subgrupo de  $G$  que tiene como álgebra

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

donde  $\langle \Pi - \theta \rangle$  es el conjunto de raíces positivas generada por los elementos de  $\Pi - \theta$ . A este subgrupo lo denotamos por  $P_\theta$ . Decimos que un subgrupo es *parabólico* si es conjugado a algún  $P_\theta$ .

**Definición 5.4.4.** Dado  $\theta \subseteq \Pi$  definimos *el subgrupo parabólico estándar opuesto asociado a  $\theta$*  como el subgrupo de  $G$  que tiene como álgebra

$$\check{\mathfrak{p}}_\theta = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

y lo denotamos por  $\check{P}_\theta$ .

El álgebra  $\mathfrak{p}_\theta \cap \check{\mathfrak{p}}_\theta$  es

$$\mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta \rangle} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}).$$

Observar que esta es una subálgebra que además es invariante por la involución de Cartan.

Decimos que dos subgrupos parabólicos  $P, P'$  son *opuestos* si existen  $g \in G$  y  $\theta \subseteq \Pi$  tales que  $(gPg^{-1}, gP'g^{-1}) = (P_\theta, \check{P}_\theta)$ .

**Proposición 5.4.5.** *Se cumple que  $\check{P}_\theta$  es conjugado a  $P_{i\theta}$  donde  $i\theta = \{\alpha \circ i : \alpha \in \theta\}$ .*

*Demostración.* Consideremos el mapa  $u_0$  con el cual definimos la involución de oposición. Como es el único elemento más largo entonces  $u_0 = u_0^{-1}$ . Si  $A \in \mathfrak{a}$  entonces  $u_0(A) = -\iota(A)$ . Observar que si  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Sigma^+$  y  $A \in \mathfrak{a}$  entonces

$$[A, Ad_{u_0}(X_\alpha)] = Ad_{u_0}([Ad_{u_0}(A), X_\alpha]) = -Ad_{u_0}([\iota(A), X_\alpha]) = -\alpha(\iota(A))Ad_{u_0}(X_\alpha).$$

Esto implica que  $Ad_{u_0}(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha \circ i}$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

## 5.4.2. Caracterización de los subgrupos parabólicos

Consideramos  $\partial_\infty S$  el borde visual del espacio simétrico  $S$ . Recordamos que las isometrías de  $S$  actúan como homeomorfismos de  $\partial_\infty S$  ya que mandan geodésicas en geodésicas, preservan distancias y son invertibles. A diferencia de los espacios hiperbólicos la acción de  $G$  no es transitiva en el borde visual, sin embargo, tiene sentido preguntarse qué elementos de  $G$  estabilizan un punto en infinito.

**Teorema 5.4.6.** *Un subgrupo  $P$  es parabólico si y sólo si existe un punto  $\eta \in \partial_\infty S$  tal que  $P = G_\eta = \{g \in G : g \cdot \eta = \eta\}$*

Para probar este teorema vamos a ver algunas propiedades sobre el grupo  $G_\eta$  para un  $\eta$  dado. Para eso consideramos el rayo geodésico basado en  $o \in S$  (sobre el cual hicimos la descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ) con dirección  $\eta$  y el vector  $X \in \mathfrak{p}$  tangente a esa geodésica.

**Lema 5.4.7.** *En las condiciones del párrafo anterior, se tiene que*

$$G_\eta = \{g \in G : \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tX} g e^{tX} \text{ existe}\}.$$

*Demostración.* Supongamos primero que el límite existe y sea  $\gamma_X$  la geodésica con dirección  $X$ . Se tiene que

$$d(\gamma_X(t), g\gamma_X(t)) = d(e^{tX} \cdot o, g e^{tX} \cdot o) = d(o, e^{-tX} g e^{tX} \cdot o)$$

que permanece acotado porque el límite existe. Luego,  $g\gamma_X$  y  $\gamma_X$  representan el mismo punto en infinito.

Recíprocamente supongamos que  $g \in G_\eta$ . Esto implica que  $d(e^{-tX} g e^{tX} \cdot o, o)$  está acotada por arriba. Por la convexidad de la función distancia un resultado en [14] nos dice que esto implica que existe una sucesión  $s_n \rightarrow \infty$  tal que  $e^{-s_n X} g e^{s_n X} \rightarrow g_0 \in G$ .

Vamos a usar este límite para probar que el  $\lim_{t \rightarrow \infty} Ad(e^{tX} g e^{-tX}) \in GL(\mathfrak{g})$  existe, al ser  $Ad$  inyectiva (pues  $G$  es semisimple) y al tener una subsucesión convergente esto implicará que el límite buscado existe.

Para eso observamos que  $Ad_{e^{-s_n X} g e^{s_n X}} = e^{-s_n ad_X} g e^{s_n ad_X}$ . Recordamos además de la proposición 5.3.1 que  $ad_X$  es autoadjunta para el producto interno  $\kappa^\sigma$  y por lo tanto se diagonaliza en una base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_d\}$ . Sea  $\lambda_i$

el valor propio de  $ad_X$  asociado a  $u_i$ , tenemos que

$$(e^{-s_n ad_X} g e^{s_n ad_X})_{ij} = (e^{s_n(\lambda_i - \lambda_j)})_{ij}$$

y como el límite existe para  $s_n \rightarrow +\infty$  tenemos que  $\lambda_i > \lambda_j$  cuando  $(Ad_g)_{ij} \neq 0$ . Sin embargo, esto implica que el límite existe cambiando  $s_n$  por cualquier otra sucesión  $t_n$ , lo que termina de demostrar la proposición.  $\square$

Claramente  $G_\eta$  es un subgrupo cerrado de  $G$  y por lo tanto es un subgrupo de Lie. La idea para probar el teorema 5.4.6 es probar que  $\mathfrak{g}_\eta$ , su álgebra de Lie, coincide con  $Ad_g(\mathfrak{p}_\Pi)$  para algún  $g \in G$ . Para estudiar quién es  $\mathfrak{g}_\eta$  tenemos un resultado análogo al anterior a nivel de álgebra.

**Proposición 5.4.8.** *Sea  $X \in \mathfrak{p}$  y  $\eta$  la geodésica por  $o$  con dirección  $X$ . Entonces  $Y \in \mathfrak{g}_\eta$  si y solo si el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} Ad_{e^{-tX}} Y$  existe.*

*Demostración.* En primer lugar observamos que el mapa  $g \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tX} g e^{tX}$  es un homomorfismo continuo y por lo tanto es suave, el resultado entonces se deduce de derivar el resultado anterior.  $\square$

Ahora si estamos en condiciones de demostrar el teorema.

*Demostración del teorema 5.4.6.* La idea de la prueba es la siguiente: vamos a expresar el álgebra de Lie de  $G_\eta$  en función del sistema de raíces y ver que es de la misma forma que la expuesta en la definición 5.4.3. Tomemos entonces un  $X \in \mathfrak{p}$  tal que la geodésica por  $o$  que apunta a  $\eta$  es  $\gamma(t) = e^{tX} \cdot o$ . Sabemos que  $X$  está dentro de un álgebra abeliana maximal  $\mathfrak{b}$ . Tomemos la descomposición en raíces de  $\mathfrak{g}$  asociada a  $\mathfrak{b}$ , es decir que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{b}}} \mathfrak{g}_\alpha$$

Sabemos que si  $Y \in \mathfrak{g}_\eta$  entonces  $Ad_{e^{-tX}} Y$  permanece acotado para todo  $t > 0$ . Si descomponemos  $Y = \sum Y_\alpha$  con  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  tenemos, por propiedades de álgebras de Lie (ver [18]), que

$$Ad_{e^{-tX}} Y_\alpha = \exp(-t[X, Y_\alpha]) = \exp(-t\alpha(X)Y_\alpha)$$

y el límite existe solo si  $-\alpha(X) \leq 0$ . Definimos entonces  $\theta_{\mathfrak{b}} = \{\alpha \in \Pi_{\mathfrak{b}} \text{ tal que } \alpha(X) = 0\}$ . Esto implica que el grupo que tiene de álgebra  $\mathfrak{g}_\eta$  es el subgrupo

parabólico de tipo  $\theta_{\mathfrak{b}}$  según el sistema de raíces para el álgebra maximal  $\mathfrak{b}$ . Como la acción adjunta es transitiva en las subálgebras abelianas de  $\mathfrak{p}$  (ver [2], donde se habla de álgebras de Cartan), y la acción adjunta lleva el sistema de raíces de un álgebra a la otra, tenemos lo buscado.  $\square$

De la demostración del teorema deducimos lo siguiente.

**Corolario 5.4.9.** *Sea  $A \in \mathfrak{a}^+$  y sea  $\theta = \{\alpha \in \Pi : \alpha(A) = 0\}$ . Sea  $\eta$  la geodésica por  $o$  con dirección  $A$ . Entonces  $G_\eta = P_\theta$ .*

### 5.4.3. El borde de Furstenberg y conjuntos paralelos

**Definición 5.4.10.** Un *plano maximal parametrizado* es un mapa  $f : \mathfrak{a} \rightarrow S$  de la forma  $f(A) = g \exp(A) \cdot o$  para algún  $g \in G$ .

Usando que todas las subálgebras abelianas maximales de  $\mathfrak{p}$  son conjugadas (ver [18], cuando se hace la teoría de subálgebras de Cartan) se puede ver que todo plano maximal admite una parametrización.

**Definición 5.4.11.** Dos planos maximales parametrizados son *equivalentes* si la función

$$A \mapsto d_S(f(A), g(A))$$

está acotada en  $\mathfrak{a}^+$ .

Al igual que en el capítulo anterior definimos el *borde de Furstenberg* como el cociente de los planos maximales parametrizados por la relación de equivalencia y lo denotamos por  $\mathcal{F}$ .

**Proposición 5.4.12.** *Tenemos una identificación equivariante entre  $\mathcal{F}$  y  $G/P_\Pi$ .*

*Demostración.* Sea  $f_0(A) = \exp(A) \cdot o$  y sea  $[f_0]$  su clase de equivalencia en  $\mathcal{F}$ . El mapa está dado por

$$[gf_0] \mapsto gP_\Pi.$$

Para probar la proposición basta ver que el mapa está bien definido, o lo que es lo mismo que  $[f_0] = [gf_0]$  si y solo si  $g \in P_\Pi$ . Observar que, dado  $A \in \mathfrak{a}^+$ , se debe cumplir que

$$d_S(g \exp(tA) \cdot o, \exp(tA) \cdot o) = d_S(\exp(-tA)g \exp(tA) \cdot o, o).$$

Observar que  $g$  estabiliza el punto de  $\partial_\infty S$  de la geodésica por  $A$ , y por el teorema 5.4.6 tenemos que es parabólico. El hecho de que sea un elemento de  $P_\Pi$  es porque tiene que estabilizar todas las geodésicas de todas las direcciones de la cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  y del corolario 5.4.9.  $\square$

En un abuso de notación en general nos referimos a elementos del borde de Furstenberg como coclases de  $G/P_\Pi$ . Dado un plano maximal parametrizado  $f$ , definimos  $Z(f) = [f]$  y denotamos por  $\check{Z}(f) = Z(f \circ i)$ .

**Definición 5.4.13.** Definimos el conjunto de *banderas en posición general* como la imagen del mapa

$$f \mapsto (Z(f), \check{Z}(f))$$

y lo denotamos por  $\mathcal{F}^{(2)}$ .

Esta es la  $G$ -órbita del punto  $(P_\Pi, \check{P}_\Pi)$ . En [27] se prueba que esta es la única órbita abierta. En [13] tenemos una prueba de la siguiente proposición, cuya versión análoga en  $SL_d(\mathbb{R})$  fue demostrada en las proposiciones 4.5.10 y 4.5.12.

**Proposición 5.4.14.**

1. El par  $(p, x) \in S \times \mathcal{F}$  determina un único plano maximal parametrizado con  $f(0) = p$  y  $Z(f) = x$
2. Un punto  $(x, y) \in \mathcal{F}^{(2)}$  determina un único plano maximal que admite una parametrización  $f_{xy}$  con  $\check{Z}(f_{xy}) = x$  y  $Z(f_{xy}) = y$ .

Si  $\theta \subseteq \Pi$  es un subconjunto de raíces simples definimos al cociente  $G/P_\theta$  como el *conjunto de banderas parciales indexadas en  $\theta$* . Podemos definir una proyección

$$\begin{aligned} \text{proy}_\theta : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}_\theta \\ gP_\Pi &\mapsto gP_\theta \end{aligned}$$

Y también definimos

$$\begin{aligned} \text{proy}_{i\theta} : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}_{i\theta} \\ gP_\Pi &\mapsto g\check{P}_\theta. \end{aligned}$$

Observar que  $\text{proy}_{i\theta} = \text{proy}_\theta \circ i$ . A veces nos referimos a estas proyecciones como  $x \mapsto x^\theta$  y  $y \mapsto y^{i\theta}$  respectivamente. Definimos el conjunto de *banderas parciales en posición general indexadas en  $\theta$*  como la imagen del mapa  $(\text{proy}_\theta, \text{proy}_{i\theta}) : \mathcal{F}^{(2)} \rightarrow \mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_{i\theta}$  y lo denotamos  $\mathcal{F}_\theta^{(2)}$ .

**Definición 5.4.15.** Dado un subconjunto de raíces simples  $\theta \subseteq \Pi$  y un par de banderas en posición general  $(x, y) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  definimos el *conjunto paralelo*  $P(x, y)$  de  $x$  a  $y$  como

$$\bigcup_f f(\mathfrak{a})$$

donde la unión se toma sobre todos los planos maximales parametrizados  $f$  con  $Z(f)^\theta = x$  y  $\check{Z}(f)^\theta = y$ .

**Proposición 5.4.16.** Sean  $(x, y) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  y  $p \in P(x, y)$ . Entonces si denotamos por  $L(x, y)$  al estabilizador en  $G$  de  $(x, y) \in \mathcal{F}^{(2)}$  entonces  $P(x, y) = L(x, y) \cdot p$ .

*Demostración.* Como por definición la órbita de  $G$  es transitiva en  $\mathcal{F}_\theta^{(2)}$  podemos asumir que  $(x, y) = (P_\theta, \check{P}_\theta)$ . Bajo esta suposición la imagen de  $f_0$  está contenida en  $P(x, y)$ , y por lo tanto  $o \in P(x, y)$ . Sea  $q \in P(x, y)$ , y sea  $f$  un plano maximal parametrizado que contiene a  $q$  tal que  $Z(f)^\theta = x$  y  $\check{Z}(f)^\theta = y$ . Sea  $g \in G$  tal que  $gf_0 = f$ . Claramente  $g \in P_\theta$  y además  $g \in \check{P}_\theta$ , ya que tanto  $Z(f)^\theta = Z(f_0)^\theta = P_\theta$  y lo mismo se cumple para  $\check{Z}(f)^\theta$ . Esto implica que  $g \in L(x, y)$ . Ahora consideremos  $q_0$  como el elemento de  $f_0$  tal que  $g \cdot q_0 = q$ , y sea  $a \in \exp \mathfrak{a}$  tal que  $a \cdot o = q_0$ . Como  $\exp \mathfrak{a}$  está tanto en  $P_\theta$  como en  $\check{P}_\theta$  concluimos la prueba.  $\square$

## 5.5. Representaciones de grupos de Lie

Con la idea en mente de usar la versión menos general del lema de Morse vamos a encontrar una forma de encajar un espacio simétrico  $S$  de tipo no compacto con grupo de isometrías  $G$  en un espacio  $X_d$  para algún  $d$ . Observar que la construcción que hicimos en el capítulo 4 en ningún momento dependió de estar en  $\mathbb{R}^d$ , por eso tiene sentido trabajar con espacios vectoriales abstractos. Si  $V$  es un espacio vectorial denotamos por  $X_V$  al espacio simétrico de  $SL(V)$ , observar que es isométrico a  $X_{\dim V}$ .

Nuevamente fijamos un álgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}^o$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ . Comenzamos enunciando otra generalización del teorema de descomposición en valores singulares. Su demostración se puede ver en [18].

**Teorema 5.5.1** (Descomposición de Cartan). *Existe un mapa  $a : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$  tal que todo elemento de  $g$  se escribe como*

$$g = k_g \exp a(g)l_g$$

con  $k_g, l_g \in K^o$ .

Realizando una cuenta análoga a la de la proposición 4.5.3 tenemos lo siguiente:

**Proposición 5.5.2.** *Se cumple que*

$$d_S(o, g \cdot o) = \|a(g)\|_o,$$

donde  $\|\cdot\|_o$  es la norma respecto a la forma de Killing restringida a  $\mathfrak{p}^o \times \mathfrak{p}^o$ .

**Definición 5.5.3.** Decimos que un mapa  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  es una *representación* si es un morfismo de grupos que además es suave. Decimos que es *irreducible* si los únicos subespacios  $\Lambda(G)$ -invariantes de  $V$  son los triviales ( $V$  y  $\{0\}$ ).

Como las representaciones son suaves tiene sentido derivarlas y considerar la representación de álgebras  $\phi_\Lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$  definida por

$$\phi_\Lambda(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Lambda(e^{tX})v.$$

Una cuenta muestra que este es un morfismo de álgebras de Lie y por lo tanto lleva subálgebras abelianas en subálgebras abelianas. Sabemos que las subálgebras abelianas de  $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R})$  son matrices simultáneamente diagonalizables, por lo que tiene sentido considerar los subespacios propios en  $V$ .

**Definición 5.5.4.** Sea  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  una representación. Decimos que  $\chi \in \mathfrak{a}^*$  es un *peso restringido* de  $\Lambda$  si el subespacio

$$V_\chi = \{v \in V : \phi_\Lambda(A)v = \chi(A)v \text{ para todo } A \in \mathfrak{a}\}$$

es no nulo.

Este concepto es similar al de las raíces. De hecho es una generalización si pensamos a las raíces como los pesos de la representación adjunta. Vamos a

ver otra forma en la que estos dos conceptos se relacionan. Podemos definir un orden parcial en los pesos:

**Definición 5.5.5.** Sean  $\chi, \psi$  pesos restringidos. Decimos que  $\chi \geq \psi$  si  $\chi - \psi$  es positivo en  $\mathfrak{a}^+$ . Decimos que un peso es *dominante* si es maximal respecto a este orden.

Un teorema de Tits (ver por ejemplo [11]) nos dice que existe un único peso dominante para una representación irreducible  $\Lambda$ . A este peso lo llamamos  $\chi_\Lambda$ .

**Proposición 5.5.6.** Sea  $\chi$  un peso restringido y  $v \in V_\chi$ . Entonces para todo  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Sigma$  se cumple que, o bien  $\phi_\Lambda(X)v$  es un vector propio de  $\phi_\Lambda(\mathfrak{a})$  con valor propio  $\chi + \alpha$ , o bien es nulo.

*Demostración.* Sea  $A \in \mathfrak{a}$ . Por un lado tenemos que  $\phi_\Lambda([A, X])v = \alpha(A)\phi_\Lambda(X)v$ . Por otro lado tenemos que

$$\phi_\Lambda([A, X])v = \phi_\Lambda(A)\phi_\Lambda(X)v - \phi_\Lambda(X)\phi_\Lambda(A)v = \phi_\Lambda(A)\phi_\Lambda(X)v - \chi(A)\phi_\Lambda(X)v.$$

Combinando las dos igualdades tenemos que

$$\phi_\Lambda(A)\phi_\Lambda(X)v = (\alpha(A) + \chi(A))\phi_\Lambda(X)v$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 5.5.7.** Sea  $\beta \in \Sigma^+$  y  $v \in V_{\chi_\Lambda}$ . Entonces para todo  $X \in \mathfrak{g}_\beta$  se cumple que  $\phi_\Lambda(X)v = 0$ .

*Demostración.* Esto se deduce de que  $\chi_\Lambda + \beta$  no puede ser un peso porque de lo contrario sería más grande que  $\chi_\Lambda$ .  $\square$

**Proposición 5.5.8.** Todo peso distinto del dominante es de la forma

$$\chi_\Lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha,$$

con  $k_\alpha \geq 0$ . Además los  $k_\alpha$  son enteros y no se anulan simultáneamente en  $\theta_\Lambda$ .

*Demostración.* Del lema 5.5.6 sabemos que, dado  $\alpha \in \Pi$ , si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  entonces  $\phi_\Lambda(X)V_\chi \subseteq V_{\chi+\alpha}$ . Observar que el subespacio generado por elementos de la forma

$$\left( \prod_{\alpha \in \Pi} \phi_\Lambda(X_{-\alpha})^{k_\alpha} \right) V_{\chi_\Lambda} \tag{5.3}$$

es invariante.

Efectivamente, como el sistema de raíces descompone el espacio nos basta ver que el espacio generado por estos vectores es invariante por  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ . Como toda raíz es suma de múltiplos de raíces simples asumimos que existen  $\beta$  y  $\gamma \in \Pi$  tales que  $\alpha = \beta + \gamma$ . Por el lema 5.3.4 tenemos que existen  $Y_\beta, Y_\gamma$  tales que  $Y_\alpha = [Y_\beta, Y_\gamma]$ . Observar entonces que  $\phi_\Lambda(Y_\alpha) = \phi_\Lambda(Y_\beta)\phi_\Lambda(Y_\gamma) - \phi_\Lambda(Y_\gamma)\phi_\Lambda(Y_\beta)$  y esta transformación deja invariante al espacio generado por elementos que tienen la forma de la ecuación (5.3).

Como la representación es irreducible este espacio tiene que ser  $V$ . Observar que por la proposición 5.5.6 los subespacios con la forma de la ecuación 5.3 son subespacios propios de valor propio  $\chi_\Lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$ .  $\square$

Inspirados en esto definimos  $\theta_\Lambda \subset \Pi$  como el conjunto de raíces simples tales que  $\chi_\Lambda - \alpha$  es un peso de  $\Lambda$ . Vamos a ver por qué ese conjunto es importante.

**Proposición 5.5.9.** *Sea  $\theta_\Lambda$  el subconjunto de raíces definido arriba. Entonces  $\mathfrak{p}_{\theta_\Lambda}$  es la subálgebra más grande que deja a  $V_{\chi_\Lambda}$  invariante.*

*Demostración.* Por definición tenemos que

$$\mathfrak{p}_{\theta_\Lambda} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

El resultado entonces se deduce del corolario 5.5.8. Una subálgebra más grande que  $\mathfrak{p}_{\theta_\Lambda}$  deberá contener un elemento de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  con  $\alpha \in \theta_\Lambda$ , y si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  entonces  $\phi_\Lambda(X)V_{\Lambda_X}$  no pertenecerá a  $V_{\Lambda_X}$ .  $\square$

**Corolario 5.5.10.** *El subgrupo parabólico más grande que estabiliza  $V_{\chi_\Lambda}$  es  $P_{\theta_\Lambda}$ .*

### 5.5.1. Encaje de $S$ en el espacio simétrico $X_d$

Un teorema demostrado en la sección 6.8 de [3] nos dice lo siguiente:

**Teorema 5.5.11.** *Sea  $o \in S$  y  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$  una representación inyectiva. Entonces existe un producto interno  $\Lambda o \in X_V$  tal que  $\phi(\mathfrak{p}^o) \subseteq \mathfrak{p}^{\Lambda o}$  y  $\phi(\mathfrak{k}^o) \subseteq \mathfrak{k}^{\Lambda o}$*

Si la representación viene de una representación  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  esto implica que  $\Lambda o$  es un producto interno invariante por  $\Lambda K^o$  y además  $\Lambda \exp \mathfrak{a}$  es  $\Lambda o$  autoadjunto. Podemos relacionar la norma respecto a ese producto interno con el peso más grande.

**Corolario 5.5.12.** *Si existe una representación inyectiva  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  entonces existe un encaje totalmente geodésico entre  $S$  y  $X_V$ .*

*Demostración.* Definimos el mapa como  $g \cdot o \mapsto \Lambda g \cdot (\Lambda o)$ . Observar que este mapa está bien definido pues  $\Lambda o$  es  $\Lambda K$  invariante. La inyectividad de la representación nos dice que es un encaje. Observar que  $T_{\Lambda o} \Lambda S$  se identifica con  $\phi_\Lambda|_{\mathfrak{p}^o} : \mathfrak{p}^o \rightarrow \mathfrak{p}^{\Lambda o}$ . Como la imagen de un morfismo es una subálgebra, un resultado de [14] (ver sistema de triplas) nos dice que es totalmente geodésico.  $\square$

**Proposición 5.5.13.** *Sea  $\Lambda$  una representación inyectiva. Si  $\|\cdot\|$  es la norma respecto al producto interno  $\Lambda o$  entonces*

$$\log \|\Lambda g\| = \chi_\Lambda(a(g)).$$

*Demostración.* Si  $k_g \exp(a(g))l_g$  es la descomposición de Cartan de  $g$  entonces, como el producto interno es invariante por  $\Lambda K^o$  tenemos que  $\log \|\Lambda g\| = \log \|\Lambda \exp(a(g))\|$ . Además, como  $\Lambda \exp(a(g))$  es  $o$ -autoadjunto entonces su norma es el valor propio más grande.

Por otro lado tenemos que  $\Lambda(\exp a(g)) = \exp(\phi_\Lambda(a(g)))$ , por lo que  $\|\Lambda g\|$  es la exponencial del valor propio más grande de  $\phi_\Lambda(a(g))$ . Como  $a(g) \in \mathfrak{a}^+$  por la proposición 5.5.8 tenemos que el valor propio más grande es  $\chi_\Lambda(a(g))$ .  $\square$

**Proposición 5.5.14.** *Si denotamos por  $\ell = \dim V_{\chi_\Lambda}$  entonces para cada  $g \in G$  se tiene que existe  $\beta \in \theta_\Lambda$  tal que*

$$\alpha_\ell(a(\Lambda g)) = a_\ell(\Lambda g) - a_{\ell+1}(\Lambda g) = \beta(a(g)).$$

*Demostración.* Observar que, por un argumento análogo a la prueba de la proposición 5.5.13, y por el hecho de que  $\dim V_{\Lambda \chi} = \ell$  se tiene que

$$a_1(\Lambda g) = \dots = a_\ell(\Lambda g) = \chi_\Lambda(a(g)).$$

$a_{\ell+1}(\Lambda g)$  es uno de los pesos siguientes más bajos en el orden parcial, y observar que los siguientes son de la forma  $\chi - \beta$  con  $\beta$  raíz. (ver proposición 5.5.8). Observar que  $\beta$  debe estar en  $\theta_\Lambda$  porque  $\chi - \beta$  es un peso. Luego tenemos que

$$a_\ell(\Lambda g) - a_{\ell+1}(\Lambda g) = \beta(a(g)).$$

□

### 5.5.2. Representaciones de Tits y de Plücker

Vamos a definir dos tipos de representaciones que serán centrales a la hora de generalizar el lema de Morse. La representación de Tits nos permite relacionar los elementos de  $G$  con los ángulos de los conjuntos paralelos, y la representación de Plücker nos va a dar un encaje de  $S$  en  $X_V$  con buenas propiedades de borde.

**Proposición 5.5.15.** *Sea  $\theta \subseteq \Pi$ . Existe una representación irreducible e inyectiva  $\Lambda : G \rightarrow PSL(V)$  y una recta  $u \in V$  tales que*

$$P_\theta = \{g \in G : \Lambda g(u) = u\}.$$

*Demostración.* Sea  $Ad : G \rightarrow SL(\mathfrak{g})$ . Vamos a ver que  $Ad(P_\theta)$  es el estabilizador de  $\mathfrak{p}_\theta$ . Para eso trabajamos a nivel de álgebra, es decir que tenemos que encontrar la subálgebra más grande  $\mathfrak{h}$  tal que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_\theta] \subseteq \mathfrak{p}_\theta$ . Observar que se cumple que  $[\mathfrak{p}_\theta, \mathfrak{p}_\theta] \subseteq \mathfrak{p}_\theta$ . Vamos a probar que no hay más elementos en  $\mathfrak{h}$ .

Supongamos que  $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{h}$  con  $\alpha \notin \langle \Pi - \theta \rangle$ . Tenemos que, dado  $A \in \mathfrak{a}$ ,  $[X, A] = -\alpha(A)X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , lo que es absurdo.

Si  $u_1, \dots, u_k$  es una base de  $\mathfrak{p}_\theta$  y consideramos la representación  $\wedge^k Ad : G \rightarrow SL(\wedge^k V)$  dada por

$$\wedge^k g(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = Ad_g v_1 \wedge \dots \wedge Ad_g v_k$$

entonces  $P_\theta = Stab(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)$ .

El hecho de que es inyectiva se deduce de que la representación adjunta lo es, y también lo es el encaje de Plücker (ver 3.2.16). Si la representación resultante no resulta irreducible, consideramos la restricción de  $\wedge^k$  a la  $G$  órbita de  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ . □

**Definición 5.5.16.** Sea  $\theta \subseteq \Pi$ . A la representación definida en la proposición 5.5.15 la llamamos *representación de Plücker* asociada a  $\theta$ .

**Proposición 5.5.17.** *Sea  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  una representación inyectiva e irreducible. Sea  $\ell = \dim V_{\chi_\Lambda}$ . Existe un mapa continuo, equivariante e inyectivo*

$$(\xi_\Lambda, \xi_\Lambda^*) : \mathcal{F}_{\theta_\Lambda}^{(2)} \rightarrow \mathcal{F}_{\{\alpha_\ell\}}^{(2)}$$

*Demostración.* Vamos a definir la imagen de  $(x, y) = (P_\theta, \check{P}_\theta)$ , y el resto las definimos para que se cumpla la relación de equivariancia. Decir quién es  $(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda y)$  es simplemente dar un par de subespacios  $E, F \in SL(V)$  tales que  $\dim E = \ell$ ,  $\dim F = \dim V - \ell$ , que  $E \cap F = \emptyset$  y además que los subespacios sean invariantes por la acción de parabólicos conjugados.

Observar que  $V_{\chi_\Lambda}$  es  $P_{\theta_\Lambda}$  invariante, y además el producto interno  $\Lambda o$  en  $V$  es  $\Lambda K^o$  invariante y los elementos de  $\Lambda \exp \mathfrak{a}$  son autoadjuntos. Definimos  $W_{\chi_\Lambda}$  como el complemento ortogonal respecto a  $\Lambda o$ . Una cuenta análoga a la hecha en 5.5.9 muestra que este espacio es  $\check{P}_\theta$  invariante. En general definimos el mapa

$$(\xi_\Lambda(gx_0), \xi_\Lambda^*(gy_0)) \mapsto (\Lambda gV_{\chi_\Lambda}, \Lambda gW_{\chi_\Lambda})$$

que es inyectivo por 5.5.9. □

El corolario 5.5.20 nos permitirá usar este mapa para estimar la distancia en  $S$  al conjunto paralelo, como hicimos en el caso de  $X_d$ .

**Lema 5.5.18.** *Si  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  es una representación irreducible, inyectiva con  $V$  de dimensión finita y  $(x, y) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  entonces  $\Lambda P(x, y) \subseteq P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)$ .*

*Demostración.* Si  $f = g \exp \mathfrak{a} \cdot o$  es un plano maximal parametrizado con  $Z(f) = x$ ,  $\check{Z}(f) = y$  entonces, por definición,  $\Lambda f = \Lambda g \exp(\phi_\Lambda(\mathfrak{a})) \cdot \Lambda o$  está en un plano maximal  $f'$  que cumple que  $Z(f') = \xi_\Lambda(x)$ ,  $\check{Z}(f') = \xi_\Lambda^*(y)$ . Esto se cumple por la equivarianza de los mapas  $\xi_\Lambda, \xi_\Lambda^*$ . □

**Proposición 5.5.19.** *Sea  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  una representación irreducible, con  $V$  de dimensión finita. Entonces existen constantes  $\delta > 0$  tal que si  $(x, y) \in \mathcal{F}_{\theta_\Lambda}^{(2)}$  y  $p \in P(x, y)$  entonces*

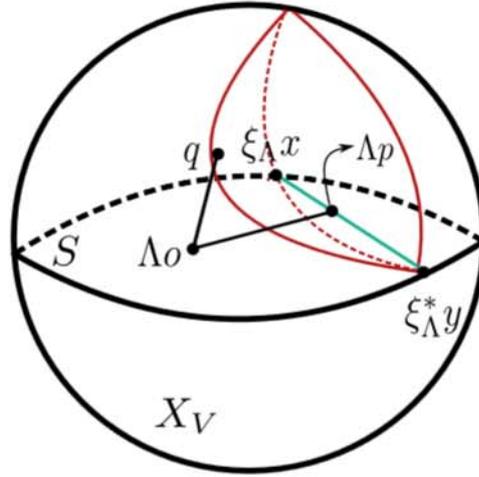
$$\angle \left( D_p \Lambda((T_p P(x, y))^\perp), T_{\Lambda p} P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y) \right) > \delta,$$

con  $\angle$  el ángulo en  $T_{\Lambda p} X_V$ .

**Corolario 5.5.20.** *Si  $\Lambda : G \rightarrow PSL(V)$  es una representación de dimensión finita e irreducible entonces existe  $c > 0$  tal que si  $o \in S$  y  $(x, y) \in \mathcal{F}_{\theta_\Lambda}^{(2)}$ , entonces*

$$\frac{1}{c} d_{X_V}(\Lambda o, P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)) \leq d_S(o, P(x, y)) \leq c d_{X_V}(\Lambda o, P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)).$$

Antes de demostrar la proposición vamos a probar el corolario.



**Figura 5.1:** Un esquema del encaje de  $S$  en  $X_V$ . Cuando encajamos el borde puede que el conjunto paralelo quede mucho más grande, y el punto más cercano a  $\Lambda o$  de  $P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)$  esté mucho más cerca que  $\Lambda p$ . Sin embargo, la cota del ángulo basado en  $\Lambda p$  nos dice que esto no es así.

*Demcstración* Como estamos trabajando con espacios simétricos de tipo no compacto sabemos que  $S$  tiene curvatura negativa. Luego, como la función distancia es convexa y el conjunto paralelo es totalmente geodésico, entonces la distancia entre  $o$  y  $P(x, y)$  se alcanza en un único punto  $p \in P(x, y)$ . A su vez, el segmento geodésico  $\sigma : I \rightarrow X$  que une  $p$  con  $o$  es ortogonal a  $P(x, y)$ , es decir que  $\dot{\sigma}(0) \in T_p P(x, y)^\perp$ . La distancia entre  $\Lambda o$  y  $P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)$  también se alcanza en un punto  $q$  que cumple que la geodésica de  $q$  a  $\Lambda o$  es perpendicular a  $P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)$ .

Como  $\Lambda S$  es totalmente geodésico en  $X_V$  podemos estimar el ángulo del vértice  $\Lambda p$  en el triángulo  $\{\Lambda o, \Lambda p, q\}$ . Por la proposición anterior sabemos que este ángulo está acotado por una distancia  $\delta > 0$ , independiente de  $o$  y de  $(x, y)$ . Por un teorema cuya prueba se puede encontrar en el capítulo 1 del apéndice de [6] sabemos que  $S$  es  $CAT(0)$ . Sea  $\{\bar{o}, \bar{p}, \bar{q}\}$  un triángulo euclideo de comparación, es decir, un triángulo euclideo tal que cada lado mide lo mismo que el del triángulo de vértices  $\Lambda o, \Lambda p, q$ . Por el teorema 1.7 de [6] sabemos que el ángulo basado en  $\bar{p}$  es mayor a  $\delta$ , y sabemos que el ángulo basado en  $\bar{q}$  es mayor a  $\pi/2$ . Por un argumento de geometría euclídea podemos comparar con una cota uniforme la diferencia entre los lados  $|\bar{o}, \bar{p}|$  y  $|\bar{o}, \bar{q}|$ , lo que termina de probar el corolario. Para un esquema de lo que está pasando ver 5.1.  $\square$

Ahora vamos a probar la proposición.

*Demostración de la proposición 5.5.19.* Sea  $p \in P(x, y)$ . Recordamos que  $P(x, y) = L(x, y) \cdot p$ , donde  $L(x, y)$  es el estabilizador en  $G$  de  $(x, y) \in \mathcal{F}_{\theta_\Lambda}^{(2)}$ . Denotamos por  $\mathfrak{l}$  al álgebra de Lie de  $L(x, y)$ . Denotamos por  $L(\xi_\Lambda, \xi_\Lambda^*)$  al estabilizador de  $(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)$  y  $\mathfrak{l}'$  su álgebra de Lie.

Consideremos  $\mathfrak{l}^\perp$  al complemento ortogonal de  $\mathfrak{l}$  respecto a la forma de Killing. Vamos a probar que

$$\phi_\Lambda(\mathfrak{l}^\perp) \cap \mathfrak{l}' = \{0\} \quad (5.4)$$

lo que implicará la proposición ya que, si  $p \in P(x, y)$ , entonces  $T_p P(x, y)$  es naturalmente isomorfo (mediante la forma de Maurer Cartan) a  $\mathfrak{p}^p \cap \mathfrak{l}$  y su ortogonal en  $T_p S$  es  $\mathfrak{p}^p \cap \mathfrak{l}^\perp$ . Como  $\phi_\Lambda(\mathfrak{p}^p) \subseteq \mathfrak{p}^{\Lambda o}$  y el ángulo se toma como el mínimo de los posibles ángulos entre subespacios tenemos que

$$\angle(\phi_\Lambda(\mathfrak{p}^p \cap \mathfrak{l}^\perp), \mathfrak{p}^{\Lambda p} \cap \mathfrak{l}') \geq \angle(\mathfrak{p}^{\Lambda p} \cap \phi_\Lambda(\mathfrak{l}^\perp), \mathfrak{p}^{\Lambda p} \cap \mathfrak{l}').$$

Observar que la imagen del diferencial del encaje en  $D_p \Lambda$  se identifica mediante la forma de Maurer Cartan con  $\phi_\Lambda(\mathfrak{p}^p)$  y por lo tanto el ángulo de la izquierda es el que queremos acotar. Por otro lado, tenemos que

$$\angle(\mathfrak{p}^{\Lambda p} \cap \phi_\Lambda(\mathfrak{l}^\perp), \mathfrak{p}^{\Lambda p} \cap \mathfrak{l}') \geq \angle(\phi_\Lambda(\mathfrak{l}^\perp), \mathfrak{l}')$$

nuevamente porque estamos considerando el mínimo sobre un conjunto más chico. La ecuación 5.4 nos dice que este ángulo no es cero. Además esta cota no depende de  $p$ , sólo del álgebra  $\mathfrak{l}'$  y del ortogonal de  $\mathfrak{l}$ .

Observar que  $L(x, y)$  es conjugado a  $L(P_{\theta_\Lambda}, \check{P}_{\theta_\Lambda})$ . Como la acción adjunta preserva la forma de Killing no perdemos generalidad en asumir que el estabilizador de  $(x, y) = (P_{\theta_\Lambda}, \check{P}_{\theta_\Lambda})$ . El conjunto paralelo  $P(x, y)$  es la órbita  $L_{\theta_\Lambda} \cdot o$  para  $L_{\theta_\Lambda} = P_{\theta_\Lambda} \cap \check{P}_{\theta_\Lambda}$ .

Vamos a ver que vale la ecuación (5.4). Dadas dos raíces  $\alpha$  y  $\beta \in \Sigma$ , tal que  $\alpha \neq \pm\beta$ , los espacios  $\mathfrak{g}_\alpha$  y  $\mathfrak{g}_\beta$  son ortogonales respecto a la forma de Killing (ver lema 5.3.5). Si denotamos  $\mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$  entonces tenemos una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}.$$

ortogonal respecto a la forma de Killing. Además, por la proposición 5.3.3 esta descomposición es invariante respecto a la involución de Cartan.

Observar que, dado  $\alpha \in \Sigma$ , si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  entonces  $\sigma(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Luego  $X - \sigma(X) \in \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}$  y además  $\sigma(X - \sigma(X)) = \sigma(X) - X$ , por lo que  $X - \sigma(X) \in \mathfrak{p}^o \cap \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}$  y por lo tanto este espacio es no nulo. Omitiendo la forma de Maurer-Cartan esto induce una descomposición del espacio tangente

$$T_oS = \mathfrak{p}^o = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{p}^o \cap \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}},$$

que es  $\kappa$  ortogonal y además los sumandos no son nulos. Además, como  $L_{\theta_\Lambda} = P_{\theta_\Lambda} \cap \check{P}_{\theta_\Lambda}$ , el álgebra de Lie de  $L_{\theta_\Lambda}$  es

$$\mathfrak{l}_{\theta_\Lambda} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle} \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}$$

y por lo tanto

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_{\theta_\Lambda} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+ - \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle} \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}.$$

Esto nos da una expresión explícita para  $\mathfrak{l}_{\theta_\Lambda}^\perp$ , ya que

$$\mathfrak{l}_{\theta_\Lambda}^\perp = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+ - \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle} \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}.$$

Si denotamos por  $\ell = \dim V_{\chi_\Lambda}$  notar que  $\mathfrak{l}'$  es el álgebra de Lie del estabilizador de  $(V_{\chi_\Lambda}, W_{\chi_\Lambda}) \in \mathcal{F}_{\{\alpha_\ell\}}^{(2)}$  (recordar la definición del mapa equivariante en 5.5.17). Tomemos entonces  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{p}^{\Lambda_0}$  en  $\mathfrak{sl}(V)$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$  de tal forma que  $\mathfrak{p}_{\{\alpha_\ell\}}$  sea el álgebra de Lie del subgrupo parabólico que estabiliza  $V_{\chi_\Lambda}$  y  $\check{\mathfrak{p}}_{\{\alpha_\ell\}}$  sea el álgebra de Lie del subgrupo parabólico que estabiliza  $W_{\chi_\Lambda}$ . Luego el teorema se concluye con el siguiente lema, cuya prueba se puede encontrar en [5].

**Lema 5.5.21.** *El subespacio  $\phi_\Lambda \left( \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+ - \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha} \right)$  tiene intersección trivial con  $\mathfrak{p}_{\{\alpha_\ell\}}$*

*Demostración.* Recordar que

$$\mathfrak{p}_{\{\alpha_\ell\}} = \mathfrak{a}_\varepsilon \oplus \bigoplus_{\beta \in \Sigma_V^+} \mathfrak{sl}(V)_\beta \oplus \bigoplus_{\beta \in \langle \Pi_V - \{\alpha_\ell\} \rangle} \mathfrak{sl}(V)_{-\beta}$$

para la elección de una subálgebra abeliana  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  y una cámara de Weyl  $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$ , donde  $\Sigma_V^+$  y  $\Pi_V$  son las raíces positivas y simples para esta cámara respectivamente.

Consideremos  $\alpha \in \Sigma^+ - \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle$  y  $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Si  $v \in V_{\chi_\Lambda}$  entonces  $\phi_\Lambda(X)v \neq 0$  (por proposición 5.5.9). Esto implica que

$$\phi_\Lambda(X) \notin \mathfrak{p}_{\{\alpha_\ell\}},$$

ya que, por como se tomó  $\alpha$ ,  $\phi(X)v$  está en el estabilizador de otro peso y  $\mathfrak{p}_{\{\alpha_\ell\}}$  es el estabilizador de  $V_{\Lambda_\chi}$ . Sean  $\{\gamma_i\}_1^k \subseteq \Sigma^+ - \langle \Pi - \theta_\Lambda \rangle$  y sea  $X_{\gamma_i} \in \mathfrak{g}_{-\gamma_i}$  elementos no nulos. Observamos que  $\phi_\Lambda(X_{\gamma_i})v$  son vectores propios de  $\mathfrak{a}$  de valores propios  $\chi - \gamma_i$ . Esto implica que

$$\phi_\Lambda(X_{\gamma_1} + \dots + X_{\gamma_k})v = \phi_\Lambda(X_{\gamma_1})v + \dots + \phi_\Lambda(X_{\gamma_k})v \neq 0$$

y además no está en  $V_{\chi_\Lambda}$ , lo que termina de probar el lema y por lo tanto la proposición. □

□

### 5.5.3. Producto de Gromov

A partir de la forma dual a la de Killing en  $\mathfrak{a}^*$  podemos definir para  $\phi, \psi \in \mathfrak{a}^*$  el mapa

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{2(\phi, \psi)}{(\psi, \psi)}.$$

Este mapa tiene un rol importante en el estudio de álgebras (y por lo tanto grupos) de Lie semisimples. Sin embargo, un análisis exhaustivo escapa del enfoque de este trabajo.

Dada una raíz simple  $\alpha$ , se puede probar (ver capítulo 5 de [18]) existe un único elemento  $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}^*$  tal que para todo  $\beta \in \Pi$  se cumple que  $\langle \omega_\alpha, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ . Observar que, como las raíces simples generan a  $\mathfrak{a}^*$ , para todo  $\chi \in \mathfrak{a}^*$  se cumple que

$$\chi = \sum_{\alpha \in \Pi} \langle \chi, \alpha \rangle \omega_\alpha.$$

Al funcional  $\omega_\alpha$  lo llamamos *peso fundamental de asociado a  $\alpha$* .

En [16] se encuentra una prueba el siguiente teorema.

**Teorema 5.5.22 (Tits).** *Para cada  $\alpha \in \Pi$  existe una representación irreducible y de dimensión finita  $\Lambda_\alpha : G \rightarrow SL(V_\alpha)$  tal que  $\chi_{\Lambda_\alpha}$  es un múltiplo del peso fundamental  $\omega_\alpha$  y tal que  $\dim V_{\chi_{\Lambda_\alpha}} = 1$ .*

Si bien esta representación no es única, podemos fijar una para cada  $\alpha \in \Pi$ . Dado  $\theta \subseteq \Pi$  denotamos por

$$\mathfrak{a}_\theta = \bigcap_{\alpha \in \Pi - \theta} \ker \alpha.$$

Recordemos que  $L_\theta = P_\theta \cap \check{P}_\theta$  tiene como álgebra de Lie

$$\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \theta \rangle} \mathfrak{g}_{\{\alpha, -\alpha\}}.$$

Observar que si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  con  $\alpha \in \Pi - \theta$  (para  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  es análogo) y  $A \in \mathfrak{a}_\theta$  entonces  $[A, X] = \alpha(A)X = 0$  y lo mismo se cumple para  $X \in \mathfrak{g}_0$ . Luego  $A$  conmuta con todos los elementos de  $\mathfrak{l}_\theta$ , en términos de álgebras de Lie esto significa que  $\mathfrak{a}_\theta$  está en el centro del grupo  $\mathfrak{l}_\theta$ .

Por un argumento de dimensionalidad, los elementos  $\{\omega_\alpha|_{\mathfrak{a}_\theta}\}_{\alpha \in \theta}$  forman una base de  $\mathfrak{a}_\theta^*$ .

**Definición 5.5.23.** Dado  $o \in S$  definimos el *producto de Gromov basado en  $o$*  como el mapa

$$(\cdot|\cdot)_o : \mathcal{F}_\theta^{(2)} \rightarrow \mathfrak{a}_\theta$$

donde  $(x|y)_o \in \mathfrak{a}_\theta$  es el único vector que cumple

$$\omega_\alpha((x|y)_o) = -\log \sin \angle_{\Lambda_\alpha o}(\xi_{\Lambda_\alpha} x, \xi_{\Lambda_\alpha}^* y) = -\log \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\|_{\Lambda_\alpha o} \|v\|_{\Lambda_\alpha o}}.$$

donde  $\varphi$  es un funcional que cumple que  $\ker \varphi = \xi_{\Lambda_\alpha}^* y$  y  $v$  es cualquier vector para el que  $\varphi$  no se anula. Observar que

$$\max_{\alpha \in \theta} \omega_\alpha((x|y)_o) = -\log \min_{\alpha \in \theta} \sin \angle_{\Lambda_\alpha o}(\xi_{\Lambda_\alpha} x, \xi_{\Lambda_\alpha}^* y).$$

El producto de Gromov lleva la cuenta de los ángulos que forman los puntos de las banderas parciales al enviarlos por cada representación fundamental. En cierto sentido generaliza al producto de Gromov en espacios hiperbólicos, que mide el ángulo “visto desde un punto” que forman dos elementos del borde.

**Proposición 5.5.24.** Sea  $\Lambda : G \rightarrow PSL(V)$  una representación irreducible de dimensión finita con  $\dim V_{\chi_\Lambda} = 1$ . Si  $(x, y) \in \mathcal{F}_{\theta_\Lambda}^{(2)}$  entonces identificando

$\mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}}$  con  $\mathbb{R}$  tenemos

$$(\xi_\Lambda x | \xi_\Lambda^* y)_{\Lambda o} = \chi_\Lambda((x|y)_o) = \sum_{\alpha \in \theta} \langle \chi_\Lambda, \alpha \rangle \omega_\alpha((x|y)_o).$$

Para la representación de Plücker  $(\xi_\Lambda x | \xi_\Lambda^* y)_{\Lambda o}$  es el ángulo entre las banderas visto desde  $\Lambda o$ . Para probar dicha proposición se puede utilizar el cociclo definido en la sección 4 de [24], junto con los lemas 6.1 y 6.2 de [23].

**Proposición 5.5.25.** *Dado  $\theta \subseteq \Pi$  existen  $c > 1$  y  $c' > 0$  (solo dependiendo del grupo  $G$ ) tales que para todo  $(x, y) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)}$  se tiene que*

$$\frac{1}{c} \|(x|y)_o\| \leq d_S(o, P(x, y)) \leq c \|(x|y)_o\| + c'.$$

*Demostración.* Vamos a probar la segunda desigualdad. La primera sale de forma análoga usando los mismos resultados. Sea  $\Lambda : G \rightarrow PSL(V)$  la representación de Plücker de  $G$  asociada al conjunto  $\theta$ . Como es inyectiva el corolario 5.5.20 nos dice que

$$d_S(o, P(x, y)) \leq c_0 d_{X_V}(\Lambda o, P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)).$$

Observar que por definición de la representación de Plücker se tiene que  $\xi_\Lambda x \in \mathbb{P}(V)$  y que  $\xi_\Lambda^* y \in \mathcal{G}_{k-1}(V)$ . Luego el teorema 4.6.11 dice que

$$d_{X_V}(\Lambda o, P(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y)) \leq -\log \sin \angle_{\Lambda o}(\xi_\Lambda x, \xi_\Lambda^* y) + c'.$$

Finalmente, tenemos que

$$(\xi_\Lambda x | \xi_\Lambda^* y)_{\Lambda o} = \sum_{\alpha \in \theta} \langle \chi_\Lambda, \alpha \rangle \omega_\alpha((x|y)_o).$$

Observar que esta cantidad es comparable con  $\|(x|y)_o\|$  lo que termina de probar el resultado.  $\square$

**Proposición 5.5.26.** *Sea  $C > 0$ . Entonces el conjunto  $\{(x, y) \in \mathcal{F}_\theta^{(2)} : \|(x|y)_o\| \leq C\}$  es compacto.*

*Demostración.* Supongamos que existe una sucesión de banderas  $(x_n, y_n)$  sin subsucesión convergente. Podemos asumir que  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \mathcal{F}_\theta \times \mathcal{F}_{i\theta}$ . Observar que, como  $(\xi_\Lambda, \xi_\Lambda^*)$  son homeomorfismos trasversos sobre su imagen, a menos de tomar subsucesión se tiene que  $(\xi_\Lambda x_n, \xi_\Lambda^* y_n)$  tienden a un par de

banderas que no están en posición general. Esto implica que la recta  $\xi_\Lambda x_n$  se acerca al hiperplano  $\xi_\Lambda^* y_n$ , pero como  $(\xi_\Lambda x_n | \xi_\Lambda^* y_n)_{\Lambda o} = -\log \sin \angle(\xi_\Lambda x_n, \xi_\Lambda^* y_n)$  tenemos que  $\|(\xi_\Lambda x_n | \xi_\Lambda^* y_n)_{\Lambda o}\| \rightarrow +\infty$ . Como esta cantidad es comparable con  $\|(x_n | y_n)_o\|$  tenemos que  $\lim \|(x_n | y_n)_o\| = +\infty$ .  $\square$

## 5.6. Generalización del Lema de Morse

Vamos a definir los conceptos análogos a los de la sección 4.6 y así concluiremos la generalización del lema de Morse. Nuevamente trabajamos con la elección de  $\mathfrak{a}$ , una subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{p}^o$ , y  $\mathfrak{a}^+$  una cámara de Weyl. Si  $\Lambda$  es la representación de Plücker (recordar que es inyectiva).

**Definición 5.6.1.** Definimos el mapa  $\underline{a} : S \rightarrow \mathfrak{a}^+$  dado por

$$\underline{a}(g \cdot o, h \cdot o) = a(g^{-1}h).$$

La demostración de que está bien definido es análoga al caso de  $SL_d(\mathbb{R})$ . Si consideramos

$$\theta(p, q) = \{\alpha \in \Pi : \alpha(\underline{a}(p, q)) \neq 0\}.$$

Podemos definir  $U(p, q) = Z(f)^{\theta(p, q)}$ , donde  $f$  es un plano maximal tal que  $f(0) = p$  y  $q \in f(\mathfrak{a}^+)$ . Observar que esto no depende del plano que se elija.

**Proposición 5.6.2.** Sea  $\theta \subseteq \theta(p, q)$ , y sea  $\Lambda$  la representación de Plücker para  $\theta$ . Se cumple que  $\xi_\Lambda(U(p, q)^\theta) = U(\Lambda p, \Lambda q)^{\{\alpha_1\}}$ .

*Demostración.* Sean  $g, h \in G$  tales que  $p = g \cdot o$  y  $q = h \cdot o$ . Observar que por la proposición 5.5.14 se cumple que  $\alpha_1(\underline{a}(\Lambda p, \Lambda q)) = \beta(a((g^{-1}h)))$  para algún  $\beta \in \theta(p, q)$  y este valor es positivo porque  $a(g^{-1}h) \in \mathfrak{a}^+$ .

La proposición 5.5.13 nos dice que  $U(\Lambda \exp a(g^{-1}h))^{\{\alpha_1\}}$  debe contener a  $V_{\chi_\Lambda}$ , y el hecho de que  $\alpha_1(\Lambda a(g^{-1}h))$  es estrictamente positivo nos dice que en realidad  $U(\Lambda \exp a(g^{-1}h))^{\{\alpha_1\}} = V_{\chi_\Lambda}$ . Luego, si  $g^{-1}h = k \exp a(g^{-1}h)l$  con  $k, l \in K^o$  entonces a partir de la ecuación (4.6) tenemos que

$$U(\Lambda p, \Lambda q)^{\{\alpha_1\}} = \Lambda g U_{\alpha_1}(\Lambda g^{-1}h) = \Lambda(gk) U_{\alpha_1}(\Lambda \exp a(g^{-1}h)) = \Lambda(gk) V_{\chi_\Lambda}.$$

Por otro lado observamos que el plano maximal  $f(A) = gk \exp A \cdot o$  cumple que  $f(0) = p$  y  $f(a(g^{-1}h)) = q$ , lo que implica que  $U(p, q)^\theta = Z(f)^\theta = gkP_\theta$ .

Por definición tenemos que  $\xi_\Lambda(Z(f)^\theta) = \Lambda g \Lambda k V_{\chi_\Lambda}$ , lo que termina de probar la proposición. □

Intuitivamente, la acción de  $\Lambda$  en  $S$  manda la geodésica que conecta  $p$  con  $q$  en la que conecta  $\Lambda p$  con  $\Lambda q$ , y esta geodésica termina en la bandera parcial  $\xi_\Lambda(U(p, q)^\theta)$ .

**Definición 5.6.3.** Dados  $p, q \in S$  y  $\theta \subseteq \theta(p, q)$  definimos el *cono de Weyl*  $V_\theta(p, q)$  como

$$\bigcup_f f(\mathfrak{a}^+),$$

donde la unión está indexada en todos los planos parametrizados  $f$  con  $f(0) = p$  y  $Z(f)^\theta = U(p, q)^\theta$ .

**Definición 5.6.4.** Dados  $p \in S$  y  $x \in \mathcal{F}_\theta$  definimos el *cono de Weyl*  $V(p, x)$  como

$$\bigcup_f f(\mathfrak{a}^+)$$

donde la unión se toma entre todos los planos maximales parametrizados  $f$  con  $f(0) = p$  y  $Z(f)^\theta = x$ .

**Definición 5.6.5.** Dados  $p, q \in S$  y  $\theta \subseteq \theta(p, q)$  definimos el  $\theta$ -diamante entre  $p$  y  $q$  como el conjunto

$$\diamond_\theta(p, q) = V_\theta(p, q) \cap V_{i\theta}(q, p).$$

Al igual que en el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$ , dado un cono cerrado  $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{a}^+$  definimos el conjunto

$$\theta_{\mathcal{C}} = \left\{ \alpha \in \Pi : \ker \alpha \cap \mathcal{C} = \{0\} \right\}.$$

**Definición 5.6.6.** Decimos que una cuasi geodésica  $\{p_n\}_{n \in I} \subseteq S$  es  $\mathcal{C}$ -regular si para todo  $n < m \in I$  se tiene que

$$\underline{a}(p_n, p_m) \in \mathcal{C}.$$

**Teorema 5.6.7** (Lema de Morse de Kapovich-Leeb-Porti). Sean  $\mu, c > 0$  y  $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{a}^+$  un cono cerrado. Entonces existe un  $C > 0$  (solo dependiendo del cono y de las constantes) tal que si  $\{p_n\}_{n \in I}$  es una  $(\mu, c)$ -cuasigeodésica  $\mathcal{C}$  regular, entonces

- Si  $I$  es finito entonces  $\{p_n\}$  está contenido en un  $C$ -entorno del diamante

$$\diamond_{\theta_{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}_{\min I}, \mathcal{P}_{\max I})$$

- Si  $I = \mathbb{N}$  entonces existe  $x \in \mathcal{F}_{\theta_{\mathcal{C}}}$  tal que  $\{p_n\}$  está contenido en un  $C$ -entorno del cono de Weyl  $V(\mathcal{P}_{\min I}, x)$
- Si  $I = \mathbb{Z}$  entonces existen  $(x, y) \in \mathcal{F}_{\theta_{\mathcal{C}}}^{(2)}$  tal que  $\{p_n\}$  está contenido en un  $C$ -entorno de  $P(x, y)$ .

*Demostración.* Nuevamente probamos solo el caso en que  $I = \mathbb{Z}$ . Consideramos una representación de Plücker asociada a  $\theta_{\mathcal{C}}$  denotada por  $\Lambda : G \rightarrow SL(V)$  y consideramos el mapa asociado al espacio simétrico, que con un abuso de notación denotamos con el mismo símbolo  $\Lambda : S \rightarrow X_V$ . Recordar que este encaje es totalmente geodésico, y por lo tanto se tiene que la sucesión  $\{\Lambda p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una  $(\mu', C')$ -cuasi geodésica. Como la representación está fijada para un grupo  $G$ , las constantes  $\mu'$  y  $C'$  dependen sólo de dicho grupo, las constantes  $\mu$  y  $c$  y el cono  $\mathcal{C}$ . Observar también que  $\phi_{\Lambda}(\mathcal{C})$  no intersecta a  $\ker \alpha_1$  (ver demostración de 5.6.2), por lo que la sucesión  $\{\Lambda p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es  $\{\alpha_1\}$ -regular.

Aplicando el lema de Morse para  $SL_d(\mathbb{R})$  obtenemos que existe  $C > 0$  (solo dependiendo de  $G$ , el cono y las constantes) tal que  $\{\Lambda p_n\}$  está en un  $C$ -entorno de un conjunto paralelo  $P(E, F)$ . Si mostramos que  $E$  y  $F$  están en la imagen de  $(\xi_{\Lambda}, \xi_{\Lambda}^*)$  el corolario 5.5.20 va a mostrar lo requerido. Para cada  $n > 0$ , llamemos  $x_n = U(o, p_n)^{\theta_{\mathcal{C}}}$ ,  $y_n = U(o, p_{-n})^{\theta_{\mathcal{C}}}$ .

Observamos que, por la proposición 5.6.2  $\xi_{\Lambda}(x_n) = U(\Lambda o, \Lambda p_n)^{\{\alpha_1\}}$  y lo análogo se cumple para  $y_n$ . Esto implica, teniendo en cuenta la prueba del teorema 4.6.13, que  $\xi_{\Lambda} x_n \rightarrow E$  y que  $\xi_{\Lambda}^* y_n \rightarrow F$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Por la proposición 5.5.25 tenemos que  $\|(x_n | y_{-n})\|_o$  es comparable con  $d_S(o, P(x_n, y_n))$ , que a su vez es comparable con  $d_{X_V}(\Lambda o, P(\xi_{\Lambda} x_n, \xi_{\Lambda}^* y_n))$ , que está uniformemente acotado como se puede apreciar en la prueba del lema de Morse para el caso de  $SL_d(\mathbb{R})$  (ver 4.6.13).

La discusión anterior junto con la proposición 5.5.26 nos dice que  $(x_n, y_n)$  está en un subconjunto compacto de  $\mathcal{F}_{\theta}^{(2)}$ , lo que nos dice que efectivamente  $(E, F)$  está en la imagen de  $(\xi_{\Lambda}, \xi_{\Lambda}^*)$ .

□

# Bibliografía

- [1] N. Bergeron et A. Guilloux. “Introduction aux surfaces de Riemann”. fr. En: (). URL: [http://www.math.jussieu.fr/~bergeron/Enseignement\\_files/SurfaceDeRiemann.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf).
- [2] Yves Benoist. “Réseaux des groupes de Lie”. En: *Cours de M 2* (2008).
- [3] Yves Benoist y Jean-François Quint. “Random walks on reductive groups”. En: *Random Walks on Reductive Groups*. Springer, 2016, págs. 153-167.
- [4] Jairo Bochi y Nicolas Gourmelon. “Some characterizations of domination”. En: *Mathematische Zeitschrift* 263.1 (2009), págs. 221-231.
- [5] Jairo Bochi, Rafael Potrie y Andrés Sambarino. “Anosov representations and dominated splittings”. En: *Journal of the European Mathematical Society* 21.11 (2019), págs. 3343-3414.
- [6] Martin R Bridson y André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Vol. 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] Manfredo Perdigô do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Inf. téc. 1988.
- [8] Élie Cartan. “Sur une classe remarquable d’espaces de Riemann”. fr. En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 54 (1926), págs. 214-264. DOI: [10.24033/bsmf.1105](https://doi.org/10.24033/bsmf.1105). URL: <http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.1105/>.
- [9] Fritz Colonius y Wolfgang Kliemann. *Dynamical systems and linear algebra*. Vol. 158. American Mathematical Society, 2014.
- [10] Olivier Darrigol. “The mystery of Riemann’s curvature”. En: *Historia mathematica* 42.1 (2015), págs. 47-83.
- [11] William Fulton y Joe Harris. *Representation theory: a first course*. Vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.

- [12] Étienne Ghys. “Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov”. En: *Progr. Math.* 83 (1990).
- [13] Yves Guivarc’h, Lizhen Ji y John C Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*. Vol. 156. Springer Science & Business Media, 1998.
- [14] Sigurdur Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces*. Vol. 341. American Mathematical Soc., 2001.
- [15] Morris W Hirsch. *Differential topology*. Vol. 33. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] James E Humphreys. *Linear algebraic groups*. Vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] Michael Kapovich, Bernhard Leeb y Joan Porti. “A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings”. En: *Geometry & Topology* 22.7 (2018), págs. 3827-3923.
- [18] Anthony W Knapp y AW Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Vol. 140. Springer, 1996.
- [19] François Labourie. “Anosov flows, surface groups and curves in projective space”. En: *arXiv preprint math/0401230* (2004).
- [20] Julien Maubon. “Riemannian symmetric spaces of the non-compact type: differential geometry”. En: *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités* (2004).
- [21] Sumner B Myers y Norman Earl Steenrod. “The group of isometries of a Riemannian manifold”. En: *Annals of Mathematics* (1939), págs. 400-416.
- [22] Paul-Émile Paradan. “Symmetric spaces of the non-compact type: Lie groups”. En: *Séminaires et congrès*. 18. 2009, págs. 39-76.
- [23] J-F Quint. “Mesures de Patterson—Sullivan en rang supérieur”. En: *Geometric & Functional Analysis GFA* 12.4 (2002), págs. 776-809.
- [24] Andres Sambarino. “Hyperconvex representations and exponential growth”. En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 34.3 (2014), págs. 986-1010.
- [25] Andrés Sambarino. “Introducción a los simétricos”. Tesis doct. 2020-2021.

- [26] Martín Sambarino. “A (short) survey on dominated splittings”. En: *Mathematical congress of the Americas*. Vol. 656. Providence: Contemp. Math. 656, Amer. Math. Soc. 2016, págs. 149-183.
- [27] Florian Stecker. “Domains of discontinuity of Anosov representations in flag manifolds and oriented flag manifolds”. Tesis doct. 2019.
- [28] John Stillwell. *Geometry of surfaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [29] Gilbert Strang y col. *Introduction to linear algebra*. Vol. 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.
- [30] Yung-Chow Wong. “Differential geometry of Grassmanian Manifolds”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 57.3 (1967), págs. 589-594. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.57.3.589](https://doi.org/10.1073/pnas.57.3.589). eprint: <https://www.pnas.org/content/57/3/589.full.pdf>. URL: <https://www.pnas.org/content/57/3/589>.