FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

La asignación de apartamentos en cooperativas de vivienda: un enfoque desde el diseño de mercados

Joaquín Manuel Paleo Arrarte

Programa de Maestría en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República.

Montevideo - Uruguay

Agosto de 2021

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

La asignación de apartamentos en cooperativas de vivienda: un enfoque desde el diseño de mercados

Joaquín Manuel Paleo Arrarte

Tesis de Maestría presentada al Programa de Maestría en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, como parte de los requisitos para la obtención del título de Magíster en Economía.

Director de tesis:
Prof. Juan S. Pereyra

Directora académica:
Prof. Cecilia Parada

Montevideo - Uruguay
Agosto de 2021

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Prof. Federico Echenique

Prof. Héctor Cancela

Prof. Leandro Zipitría

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor, Juan Pereyra, por su apoyo a lo largo de todo el proceso de realización de este trabajo, y por sus sugerencias que contribuyeron a mejorar este documento. Al cuerpo docente del Seminario de Investigación y Tesis, Cecilia Parada y Rodrigo Ceni, por sus enriquecedores aportes durante el seminario, así como también a los estudiantes participantes del mismo, por todos sus comentarios. A mis amigas y amigos, por su ayuda (directa e indirecta) sin la cual este camino hubiera sido considerablemente más difícil. Por último, a mi familia, Alfredo, Laura y Camila, por su apoyo constante.

Resumen

En este trabajo se estudian las propiedades de un mecanismo de asignación llamado MTAV propuesto por Prino et al. (2016) y utilizado actualmente por cooperativas de vivienda en Uruguay para asignar viviendas a familias. Se encuentra que este es eficiente ex-post y cumple con el *equal treatment of equals*, pero no es un mecanismo *strategyproof*. Adicionalmente, se formaliza desde la teoría de la elección social una noción de equidad ex-post que el MTAV cumple por construcción, y se lo describe como el mecanismo que maximiza lexicográficamente el par ordenado de funciones de bienestar social *Rawlsiana* y Utilitarista. Finalmente, con una aplicación empírica se comparan las asignaciones obtenidas por el MTAV con las que se podrían obtener utilizando otros mecanismos comunes en la literatura. Se encuentra evidencia a favor del uso del MTAV para conseguir los objetivos de equidad y eficiencia ex-post planteados por las cooperativas.

JEL Classification: C78, D63.

Palabras clave: matching, problema de asignación, equidad, eficiencia, bienestar social Rawlsiano, bienestar social Utilitarista, maximización del bienestar social.

Abstract

We study the properties of an assignment mechanism called MTAV proposed by Prino et al. (2016) and currently used by housing cooperatives in Uruguay to assign houses to families. We find that it is ex-post efficient and it satisfies the equal treatment of equals criteria, but it is not a strategyproof mechanism. Additionally, we formalize a notion of ex-post fairness with insight from the social choice theory literature, and we describe this mechanism as one that lexicographically maximizes the ordered pair of Rawlsian and Utilitarian social welfare functions. We conclude with an empirical application in which we compare the assignments of the MTAV with those that we could have obtained using other mechanisms common in the literature. We find evidence in favour of using the MTAV to achieve the specific ex-post fairness and efficiency objectives of the housing cooperatives.

JEL Classification: C78, D63.

Palabras clave: matching, assignment problem, fairness, efficiency, Rawlsian social welfare, Utilitarian social welfare, social welfare maximization.

Índice

1. Introducción **1**

2. Literatura relacionada **3**

3. El modelo **6**

3.1. *House allocation problem* 7

3.2. Propiedades 8

4. Mecanismos **9**

4.1. *Serial Dictator* (SD) y *Random Serial Dictator* (RSD) 10

4.2. *Probabilistic Serial* (PS) 10

4.3. MTAV 10

5. Análisis del MTAV **13**

6. MTAV, MTAV *alt* y la Teoría de la Elección Social **16**

7. Aplicación empírica **20**

8. Comentarios finales **24**

9. Anexo **24**

1. Introducción

La decisión sobre cómo asignar un conjunto de objetos a un conjunto de agentes es un problema central en economía. Usualmente, el mecanismo que se utiliza para esto son los precios competitivos de dichos objetos: cuando un objeto es sobredemandado su precio aumenta hasta igualar oferta y demanda. Sin embargo, existen mercados en donde no existen estos precios, como en el problema de asignación de niños a escuelas públicas (Abdulkadiroğlu y Sönmez, 2003), o en donde no está permitido que existan, como los problemas de intercambio de riñones (Roth et al. 2004). En estos casos, resulta necesario definir nuevos mecanismos para realizar esta asignación.

La asignación de casas a familias en una cooperativa de vivienda es un problema en el que los precios no pueden utilizarse. Estas cooperativas son una forma alternativa de organización de la propiedad en donde tanto el terreno como lo que allí se construye son propiedad común de todos los socios cooperativistas. Una vez culminada la construcción, las familias tienen que decidir cómo asignar las casas. Distintos motivos hacen que la asignación no pueda coordinarse a través de los precios. Por ejemplo, las transferencias entre cooperativistas no están permitidas.[1] Por lo tanto, se tienen todos los elementos de un problema de asignación sin transferencias: Un conjunto de familias, cada una de las cuales tiene que ser asignada a una casa, estas familias tienen preferencias heterogéneas sobre las casas, y las transferencias no pueden utilizarse. La solución del problema viene dada por un mecanismo centralizado que asigna las casas a partir de las preferencias de las familias.

En este trabajo se estudia el problema anterior, haciendo énfasis en propiedades de equidad poco estudiadas en la literatura. Además, se analiza el mecanismo actualmente utilizado, el cual se diseñó con la preocupación de mejorar la equidad de la asignación final. Los resultados muestran que el mecanismo actual es eficiente, pero puede ser manipulado por las familias. El análisis empírico de las cooperativas para las que se tienen datos muestra que, a pesar de las restricciones de equidad impuestas, el mecanismo utilizado presenta niveles de bienestar global comparables con otros mecanismos estudiados en la literatura.

Históricamente, el proceso de asignación de casas en cooperativas de vivienda en Uruguay consistía en realizar un sorteo sin tener en cuenta las preferencias de las familias. Sin embargo, este mecanismo se encuentra sujeto a problemas relacionados con la potencial falta de eficiencia en la asignación final, y esta falta de eficiencia tiene como consecuencia directa una pérdida de bienestar para las familias. A modo de ejemplo, consideremos un problema de asignación de tres familias, tres viviendas, y en donde las preferencias son heterogéneas (en particular, todas las familias tienen a una vivienda distinta como su más preferida)[2] :

[1] Por este motivo no puede utilizarse una subasta.

[2] Cada columna $\succeq_i$ representa las preferencias ordinales de la familia i sobre las distintas viviendas h_1,

$\succeq_1$	$\succeq_2$	$\succeq_3$
h_1	h_2	h_3
h_2	h_3	h_1
h_3	h_1	h_2

Claramente, la solución óptima respecto a estas preferencias, en el sentido de asignar las viviendas a aquellas familias que más las prefieran, consiste en asignarle a cada familia su vivienda preferida, de forma tal que a la familia 1 se le asigna h_1, a la familia 2 h_2 y a la familia 3 h_3. Sin embargo, de utilizar como mecanismo un sorteo simple sobre todas las posibles asignaciones, existe la misma probabilidad de que a todas las familias se les asigne su peor opción.

Motivados por este problema, Prino et al. (2016) desarrollan el mecanismo llamado MTAV (*Mejor Tecnología de Asignación de Viviendas*) que permite obtener una asignación final teniendo en cuenta las preferencias reportadas por las familias. Este mecanismo ha sido utilizado por varias cooperativas en los últimos años. Adicionalmente, incorpora explícitamente una preocupación sostenida por las cooperativas relacionada con la equidad en la distribución final de la asignación. Esta propiedad consiste en mejorar la situación de la familia que se encuentra en la peor posición (criterio maximin), y puede ser interpretada bajo la teoría de la elección social, en donde se busca maximizar una función de bienestar social (FBS) particular que se encuentra relacionada con el principio de diferencia presentado en Rawls (1971)[3].

Sin embargo, poco se conoce sobre las propiedades que tiene este nuevo mecanismo desde la óptica de la teoría económica, las cuales generalmente se dividen en tres dimensiones: i) eficiencia, ii) compatibilidad de incentivos, y iii) equidad. El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades de dicho mecanismo y compararlo con otros usualmente utilizados en la literatura, así como ilustrar con datos de preferencias de cooperativas las diferencias que se obtendrían de aplicar mecanismos alternativos. La distinción entre asignaciones determinísticas y aleatorias (siendo esta última una distribución de probabilidad sobre asignaciones determinísticas) nos permite pensar en estas dimensiones bajo dos miradas diferentes: ex-ante, cuando las propiedades se definen respecto a la asignación aleatoria, y ex-post, cuando se hace respecto a la asignación determinística. Si bien haremos referencia a algunas propiedades en términos ex-ante, nos enfocaremos en propiedades ex-post debido a la particularidad de este problema, en el cual las cooperativas tienen una especial preocupación por propiedades

h_2 y h_3.

[3]"Las desigualdades sociales y económicas deben satisfacer dos condiciones: (a) deben estar vinculadas a posiciones abiertas a todos, bajo la justa condición de igualdad de oportunidades ; y (b), *deben ser de mayor beneficio para los miembros mas desventajados de la sociedad*" (Rawls, 1993 pág. 6, traducción personal, énfasis añadido)

definidas sobre la asignación final.

Encontramos que el MTAV cumple con las propiedades de eficiencia ex-post (eficiencia de Pareto) y equidad ex-ante (en el sentido de *equal treatment of equals*), pero no cumple con la compatibilidad de incentivos (en el sentido de *strategyproofness*). A su vez, formalizamos el criterio de equidad ex-post impuesto por este mecanismo en términos de la teoría de la elección social. Definamos a la FBS *Rawlsiana* como la utilidad de la familia que se encuentra en la peor situación, y a la FBS Utilitarista como la suma de las utilidades de todas las familias de una cooperativa. Bajo algunos supuestos sobre las funciones de utilidad de las familias, el MTAV es un mecanismo cuya asignación final siempre maximiza la FBS Rawlsiana (cumple con el criterio maximin), y maximiza la FBS Utilitarista sujeto a la restricción de cumplir con el criterio maximin[4].

Por último, dados los objetivos respecto a asignación final de los cooperativistas, se encuentra evidencia a favor del uso del MTAV en lugar de otros mecanismos alternativos para cumplirlos. La ilustración empírica muestra cómo este nuevo mecanismo mejora notoriamente la situación de la familia que se encuentra en la peor situación y genera una distribución final más igualitaria en comparación con mecanismos alternativos. A su vez, este también logra asignar a una mayor cantidad de familias una vivienda que se encuentra cerca de su primera opción.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección 2 se explora la literatura relacionada con este problema, en la sección 3 se presenta el modelo y se definen las principales propiedades a estudiar, en la sección 4 se describe en detalle el MTAV así como otros mecanismos utilizados comúnmente para resolver este problema, en la sección 5 se presenta el análisis de las distintas propiedades del MTAV, en la sección 6 se realiza una reinterpretación de este mecanismo desde la teoría de la elección social, en la sección 7 se realiza una aplicación empírica donde se ilustra y compara el comportamiento de los distintos mecanismos y en la sección 8 se concluye con los comentarios finales.

2. Literatura relacionada

Un problema de asignación consiste en un conjunto de agentes, un conjunto de objetos (no necesariamente de la misma dimensión) y un perfil de preferencias de los agentes sobre los objetos. El objetivo es encontrar una regla mediante la cual asignar los objetos a los agentes, es decir, encontrar un mecanismo de asignación. La relación directa de esta literatura con la resolución de problemas empíricos se ve reflejada en la sucesiva aparición de distintos

[4]Dicho de otra forma, el MTAV garantiza que la asignación final maximiza lexicográficamente el par ordenado de funciones de bienestar social *Rawlsiana* y Utilitarista (ver Sección 6).

modelos y mecanismos que intentan capturar diferentes aspectos de los mismos[5].

El problema abordado en este trabajo es un caso particular dentro de esta literatura, conocido como el *house allocation problem*. Este consiste en asignar n objetos a un conjunto de n agentes, de forma que a cada agente se le asigne exactamente un objeto. La interpretación será de un conjunto de familias que tienen que decidir cómo asignar un conjunto de viviendas que son propiedad común. A su vez, este trabajo se inscribe en un subconjunto de problemas de asignación para los que se busca un mecanismo ordinal; esto es, un mecanismo que requiere elicitar exclusivamente las preferencias ordinales de los agentes (no es necesario saber "que tanto más" prefieren un objeto a otro, sino solamente el orden), y exigiremos que estas preferencias sobre las viviendas sean estrictas y completas.

Una de las primeras soluciones para este problema consiste en el mecanismo denominado *Serial Dictator*, un algoritmo donde, en función de un orden de prioridad, los agentes eligen uno a uno su objeto más preferido de acuerdo a sus preferencias. Si bien la asignación resultante de este mecanismo es eficiente, imponer un orden de prioridad arbitrario puede no resultar conveniente. Para sortear este problema, una extensión natural es el *Random Serial Dictator* (Abdulkadiroğlu y Sönmez, 1998), que consiste en obtener una asignación de la misma forma que con el procedimiento anterior, pero aleatorizando el orden de prioridad. A diferencia del mecanismo anterior, este tiene como resultado una asignación aleatoria; es decir, genera una distribución de probabilidad sobre asignaciones determinísticas. El teorema de Birkhoff-von Neumann nos garantiza que toda asignación aleatoria se puede descomponer en una combinación convexa de asignaciones deterministicas, y por lo tanto todo mecanismo que resulte en una asignación aleatoria es implementable (Birkhoff, 1946; Budish et al. 2012).

El trabajo seminal de Bogomolnaia y Moulin (2001) presenta, para mecanismos ordinales, una nueva definición de eficiencia respecto a las asignaciones aleatorias denominada eficiencia ordinal. Una asignación aleatoria cumple con esta propiedad si no existe otra asignación que la domine estocásticamente. Esto quiere decir que no existe otra asignación tal que cada agente tenga una mayor o igual probabilidad de conseguir el objeto j o uno que sea más preferido de acuerdo con sus preferencias, para todo j. También proponen un nuevo algoritmo, el *Serial Probabilistic*, que ocupa un rol central entre aquellos que cumplen con dicha propiedad. Intuitivamente, este mecanismo consiste en que los agentes "coman" de su objeto preferido a una velocidad constante e igual para todos, y una vez que se agota el objeto del cual esta comiendo, pasar al siguiente de acuerdo a sus preferencias. El resultado es una asignación aleatoria, donde la probabilidad de que al agente i se le asigne el objeto j

[5]Ver por ejemplo Chen y Sönmez (2002) para el caso donde algunos objetos son propiedad de algunos agentes, Budish (2011) para el caso donde estos agentes demandan más de un objeto, o Bei et al. (2021) donde el conjunto de objetos puede contener objetos divisibles e indivisibles, entre otros.

es igual a la masa que "comió" de dicho objeto.

Por otro lado, una solución alternativa estudiada en la literatura para encontrar una asignación eficiente respecto al perfil de preferencias viene dada por Hylland y Zeckhauser (1979). Esta consiste en utilizar un pseudo-mercado: los agentes reciben una dotación inicial de dinero ficticio y participan en un mercado donde compran fracciones de los distintos objetos a precios competitivos, y estas fracciones son interpretadas nuevamente como la probabilidad con la que obtienen los distintos objetos. Si bien este mecanismo también resulta en una asignación que cumple con la propiedad de eficiencia ordinal, requiere elicitar las preferencias cardinales de los agentes.

Prino et al. (2016) proponen el mecanismo a estudiar en este trabajo, el MTAV. Estos autores realizan una comparación entre este nuevo método y el que se utilizaba anteriormente (un sorteo simple) mostrando de forma clara las ganancias de eficiencia de su propuesta. La intuición detrás de este mecanismo es la siguiente: en primer lugar, buscar las asignaciones donde la familia que se encuentra peor, se encuentra lo mejor posible, y en segundo lugar, dada esa cota inferior para la satisfacción de la familia que se encuentra en el peor lugar, maximizar la satisfacción global de la cooperativa dadas las preferencias reportadas. También definen un mecanismo alternativo que consiste en intercambiar el orden en el cual se resuelve el problema, es decir: primero maximizar la satisfacción global, y dentro de las asignaciones que cumplen este criterio, encontrar aquella en la cual la familia en la peor posición se encuentre lo mejor posible. Sin embargo, al ser diseñado como la resolución de un problema de optimización, no se estudian los posibles comportamientos estratégicos de los agentes al enfrentarse con este mecanismo, así como también se desconocen otras propiedades estudiadas por la teoría económica. La principal contribución de este trabajo es realizar este análisis.

Usualmente, el estudio teórico de estos mecanismos consiste en el análisis de las propiedades que cumplen los mismos desde la óptica de la teoría de juegos (ver por ejemplo Roth, 1982). Un mecanismo induce a los agentes a un juego de revelación, donde, en este caso, su espacio de estrategias consiste en todos los posibles órdenes sobre el conjunto de viviendas. En este sentido, las dimensiones relevantes son la eficiencia, la compatibilidad de incentivos y la equidad. Dentro de la eficiencia, la principal propiedad ex-post consiste en la eficiencia de Pareto: en este contexto, esto implica que no exista la posibilidad de mejorar la asignación obtenida por una familia sin empeorar la asignación de otra. La compatibilidad de incentivos refiere, en términos generales, a la capacidad que tiene un mecanismo de inducir a los agentes a revelar información que es privada. Dentro de esta dimensión, la propiedad de *strategy-proofness* implica que para cada familia presentar sus preferencias reales sobre las viviendas es una estrategia débilmente dominante, es decir, que no existe la posibilidad de obtener una mejor vivienda reportando preferencias distintas a las verdaderas. Respecto a la equidad, Basteck (2018) plantea que si esta es entendida como un criterio de igualdad sobre la asignación final, entonces el hecho de que en este tipo de problema los objetos a asignar sean indivisibles tiene como consecuencia directa que toda asignación pueda considerarse injusta ex-post. Por esto, la literatura económica tiende a analizar esta dimensión en términos ex-ante, buscando la equidad respecto a las probabilidades sobre los objetos (loterías) a las que se enfrentan los distintos agentes. En este sentido, un requerimiento mínimo de equidad es el *equal treatment of equals*, que consiste en que todos los agentes con las mismas preferencias sean asignados exactamente la misma lotería.

Adicionalmente, el problema de encontrar un mecanismo para resolver el problema de asignación se puede reinterpretar en términos de la teoría de la elección social, formalizada en Arrow (1951). Se busca encontrar una función de elección social, es decir, una función que relacione las preferencias individuales de los agentes con una preferencia social sobre las distintas alternativas[6]. Sin embargo, al no permitir comparaciones interpersonales, algunas consideraciones de equidad que se podrían considerar relevantes quedan exluídas de este tipo de análisis (Hammond, 1976). Por ejemplo, es claro que sin permitir las comparaciones interpersonales, es imposible definir al agente que se encuentra en la peor situación, por lo que es imposible de aplicar un criterio como el maximin. Permitiendo la posibilidad de realizar estas comparaciones, un abordaje común consiste en el uso de funciones de bienestar social (d'Aspremont y Gevers, 2002). Boudreau y Knoblauch (2017) toman este camino y estudian el *marriege market*, un problema relacionado que consiste en encontrar una asignación entre dos conjuntos disjuntos de agentes. Presentan una serie de algoritmos que realizan esta asignación maximizando una función de bienestar social específica, así como otros que maximizan lexicográficamente un par ordenado de funciones de bienestar. Para este trabajo es de especial interés el caso en donde toman las funciones de bienestar *Rawlsiana* y Utilitarista para realizar esta maximización.

3. El modelo

En esta sección definimos formalmente el *house allocation problem* e introducimos la notación necesaria para analizar el MTAV. Finalmente, definimos las distintas propiedades a estudiar relacionadas con la eficiencia, equidad y compatibilidad de incentivos.

[6] En este contexto, las alternativas son las distintas asignaciones posibles.

3.1. *House allocation problem*

Un ***house allocation problem*** se encuentra definido por una tupla (N, H, $\succeq$), donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de familias, $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$ es el conjunto de viviendas donde $|N| = |H|$, y $\succeq = \{\succeq_i\}_{i \in N}$ es un perfil de preferencias completas y estrictas de las familias sobre las viviendas.

Llamemos **matriz de preferencias** a la matriz $P = (p_{ij})_{i \in N, j \in H}$ en donde $p_{ij} \in \{1, 2, .., n\}$, y $p_{ij} \neq p_{ik} \quad \forall j \neq k$, de forma que $p_{ij} < p_{ik} \iff h_j \succeq_i h_k$.

Esta matriz refleja el órden de las preferencias de cada familia, donde las familias se encuentran representadas en las filas, y las viviendas en las columnas. Para una familia determinada (supongamos la familia 1), cuanto menor sea el valor de la entrada p_{1j}, más arriba se encuentra esa vivienda en su órden de preferencias.

A modo de ejemplo, el perfil de preferencias $h_1 \succeq_1 h_2 \succeq_1 h_3$, $h_2 \succeq_2 h_3 \succeq_2 h_1$, $h_3 \succeq_3 h_1 \succeq_3 h_2$ se representa por la siguiente matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A su vez, dada una matriz P, las preferencias de la familia i se encuentran representadas por p_i, siendo este vector igual a la fila i de la matriz P. De esta forma, continuando con el ejemplo anterior, las preferencias de la familia 1 se encuentran representadas por el vector $p_1 = (1, 2, 3)$

Un ***matching*** (o asignación determinística) es una matriz $X = (x_{ij})_{i \in N, j \in H}$ en donde se cumple que

- $\sum_{j \in H} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$,
- $\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in H$,
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$

Esta representación de *matchings* como matrices tiene una interpretación sencilla: aquellas entradas x_{ij} iguales a 1 nos indican que a la familia i se le asigna la vivienda j, mientras que un 0 nos indica lo contrario. Como por definición exijimos que las entradas de cada fila y de cada columna sumen 1, esta matriz establece una relación en donde a cada familia se le asigna una y sólo una vivienda.

Una **asignación aleatoria** es una matriz $X = (x_{ij})_{i \in N, j \in H}$ en donde se cumple que

- $\sum_{j \in H} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N$,

- $\sum_{i \in N} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in H$,
- $x_{ij} \in [0, 1]$

A cada vector fila de la matriz que representa a una asignación aleatoria se la denomina como la **lotería** de la familia i y lo representaremos por x_i. Este se interpreta como la probabilidad que tiene la familia i de obtener cada una de las viviendas.

A modo de ejemplo, un *matching* donde a la familia 1 se le asigna h_1, a la familia 2 h_2 y a la familia 3 h_3 se representa de la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que una asignación aleatoria donde la familia 1 recibe h_1 o h_2 con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una, la familia 2 recibe h_1 o h_3 con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una y la familia 3 recibe h_2 o h_3 con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una se representa de la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Un **mecanismo** es una función ϕ que mapea perfiles de preferencias con matchings. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los perfiles de preferencias y $\mathcal{X}$ el conjunto de todos los matchings posibles, $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$.

3.2. Propiedades

La relación de preferencias sobre las viviendas se extiende de forma natural sobre los matchings, de forma que $X \succeq_i X'$ si y solo si la familia i prefiere débilmente la vivienda que le es asignada en X por sobre la de X'.

Definición 1. Decimos que un matching X domina a otro X' en el sentido de Pareto si $X \succeq_i X'$ para todo i, y esta relación es estricta para algún i. Un matching es Pareto-óptimo si no existe ningún otro matching que lo domine en el sentido de Pareto.

En este contexto, esto quiere decir que no se le puede asignar a una familia una vivienda que prefiera por sobre la que ya se le asignó sin perjudicar a otra. Decimos que un mecanismo es **eficiente ex-post** si resulta con probabilidad 1 en un matching que es Pareto-óptimo.

Llamemos $\phi_i(\succeq)$ a la vivienda que recibe la familia i con el mecanismo ϕ para un *house allocation problem* $(N, H, \succeq)$.

Definición 2. Decimos que un mecanismo es ***strategy-proof*** si para cada $\succeq \in \mathcal{P}$, $i \in N$ y $\succeq_i'$ se cumple que:

$$\phi_i(\succeq) \succeq_i \phi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$$

es decir, dado un perfil de preferencias $\succeq$, para todos los agentes es al menos tan bueno revelar sus preferencias verdaderas ($\succeq_i$) a mentir ($\succeq_i'$).

Definición 3. Decimos que un mecanismo cumple con el ***equal treatment of equals*** siempre que:

$$p_i = p_{i'} \implies x_i = x_{i'} \quad \forall i, i' \in N$$

Este es un requerimiento mínimo de equidad en términos ex-ante, e implica que las familias con preferencias idénticas reciban siempre las mismas loterías.

Para la siguiente definición de eficiencia ex-ante es necesario poder comparar distintas loterías, para lo cual usaremos la relación de dominancia estocástica de primer órden. Reenumerando los objetos desde el más preferido al menos preferido de acuerdo con las preferencias de la familia i, de forma que $h_1 \succeq_i h_2 \succeq_i ... \succeq_i h_n$, y llamando a la probabilidad de que la familia i obtenga la vivienda h_j como x_{ij}, definimos a la relación de dominancia estocástica $(SD(\succeq_i))$ entre dos loterías x_i y x_i' como:

$$x_i SD(\succeq_i) x_i' \iff \sum_{j=1}^{t} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^{t} x_{ij}' \quad \text{para} \quad t = 1, 2, ..., n.$$

Esto quiere decir que la probabilidad que la familia i obtenga su objeto preferido con la lotería x_i es mayor o igual que con la lotería x_i', la probabilidad que obtenga su objeto preferido o su segundo preferido con x_i es mayor o igual que con x_i', y así sucesivamente.

Definición 4. Decimos que una asignación aleatoria X domina estocásticamente a X' para $\succeq \in \mathcal{P}$, si:

$$x_i SD(\succeq_i) x_i' \quad \forall i \in N \quad \text{y} \quad X \neq X'$$

Decimos que una asignación aleatoria X cumple con el criterio de **eficiencia ordinal** si no existe ninguna otra asignación X' que la domine estocásticamente.

4. Mecanismos

En esta sección describimos los mecanismos utilizados en este trabajo. En primer lugar, introducimos el RSD y el SP, los dos mecanismos con los cuales se comparará el rendimiento del MTAV en la aplicación empírica. En segundo lugar, detallamos el funcionamiento del MTAV, a la vez que realizamos una descripción alternativa del mismo e ilustramos su funcionamiento con un ejemplo.

4.1. *Serial Dictator* (SD) y *Random Serial Dictator* (RSD)

El *Serial Dictator* (SD) es un mecanismo que consiste en establecer un órden de prioridad para los agentes, y en función de este orden permitir que elijan uno a uno su objeto preferido del conjunto de objetos que aún se encuentran disponibles. El *Random Serial Dictator* (RSD), consiste en tomar un órden de prioridad aleatoriamente de una distribución uniforme (de forma que cada órden tiene probabilidad $\frac{1}{n!}$ de ser seleccionado), y el matching se obtiene ejecutando el SD respecto a este órden.

4.2. *Probabilistic Serial* (PS)

Bogomolnaia y Moulin (2001) proponen pensar a los objetos como una masa infinitamente divisible la cual tiene que ser asignada entre los n agentes. Así, asignarle una fracción x_{ij} del objeto j al agente i significa que al agente i se le asigna el objeto j con probabilidad x_{ij}. Para implementar una asignación, desarrollan una serie de algoritmos basados en una función que determina una tasa instantánea de consumo sobre los objetos (es decir, sobre sus masas de probabilidad), de forma que $w_i(t)$ es una función que indica la velocidad a la cual el agente i puede consumir en el momento t. Esta función es no negativa y el total que puede consumir entre $t = 0$ y $t = 1$ es 1:

$$\int_0^1 w_i(t)dt = 1$$

Dado un perfil de funciones $w = \{w_i\}_{i \in N}$ y un perfil de preferencias $\succeq$, el algoritmo propuesto permite que cada agente consuma de su objeto preferido de aquellos disponibles a la velocidad especificada en t por $w_i(t)$. El *Probabilistic Serial* (PS) es el mecanismo que surge del perfil de funciones de consumo idénticas y uniforme: $w_i(t) = 1 \quad \forall i \in N, \forall t, 0 \leq t \leq 1$.

Respecto a sus propiedades, si bien tanto el RSD como el PS son eficientes ex-post y cumplen con el *equal treatment of equals*, el PS es eficiente ex-ante mientras que el RSD no, y el RSD es *strategyproof* mientras que el PS no (Bogomolnaia y Moulin, 2001).

4.3. MTAV

El principal mecanismo propuesto por Prino et al. (2016), el MTAV, consiste en la resolución del siguiente problema en dos etapas:

Primera etapa:

$$\begin{aligned} S &= \min z \\ \text{s.a} \quad z &\geq \sum_{j\in H} p_{ij}x_{ij}, \quad \forall i \in N, \\ \sum_{j\in H} x_{ij} &= 1 \quad \forall i \in N, \\ \sum_{i\in N} x_{ij} &= 1 \quad \forall j \in H, \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, \quad z \in R \end{aligned}$$

Segunda etapa:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j\in H, i\in N} p_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} \quad &\sum_{j\in H} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N, \\ &\sum_{i\in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in H, \\ &\sum_{j\in H} p_{ij}x_{ij} \leq S, \quad \forall i \in N, \\ &x_{ij} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Como último paso, de existir más de una solución para este problema, el algoritmo implementa una de ellas al azar. A su vez, también definen otro mecanismo alternativo (al que llamaremos MTAV alternativo) que resulta de invertir el órden en el cual se realizan estas dos etapas [7].

Una idea intuitiva de lo que realiza este programa es la siguiente: en una primera etapa, se encuentran las asignaciones en las cuales la familia que se encuentra en la peor situación se encuentra lo mejor posible, en el sentido de recibir una vivienda que ocupe el mejor lugar posible dentro de sus preferencias. En la segunda, dentro de aquellas asignaciones que cumplen con la restricción anterior, se busca aquella que maximice la satisfacción global de la cooperativa, en el sentido de asignar conjuntamente a cada familia una vivienda que se encuentre en el mejor lugar posible dentro de sus preferencias.

Para ilustrar el funcionamiento de este mecanismo mediante un ejemplo, resulta útil realizar la siguiente descripción alternativa:

[7] Inicialmente, el mecanismo sugerido por Prino et al. (2016) era esta formulación alternativa, pero luego de consultas con familias pertenecientes a cooperativas se decidió invertir este orden (Prino et al. 2016, p. 6).

Sea $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_l\}$ el conjunto de todos los matchings posibles.

Definición 5: Sean M_1 y M_2 matrices de igual dimensión, $M_1 \odot M_2$ es la matriz que resulta de multiplicar elemento a elemento M_1 y M_2.

Definición 6: Sea M una matriz:

- max(M) es el máximo elemento de M,
- sum(M) es la suma de todos los elementos de M.

Un algoritmo equivalente al MTAV es el siguiente:

Dada una matriz de preferencias P realizar los siguientes pasos:

1. Para cada $X_l \in \mathcal{X}$, calcular $X_l \odot P$.
2. Calcular $max_l(X_l \odot P)$.
3. Seleccionar los matchings X_l que minimizan $\max(X_l \odot P)$.
4. Sean $X_1, X_2, ..., X_k$ los matchings que cumplen el paso 3, seleccionar aquellos que minimizan $\text{sum}(X_k \odot P)$.
5. Si existe más de una asignación que cumpla con 4, el outcome del mecanismo es una lotería sobre las matrices que cumplen dicho paso.

En el primer paso, los elementos distintos de cero de las matrices $X_l \odot P$ nos indican el lugar que ocupa en las preferencias de las familias la vivienda asignada bajo los distintos matchings X_l. En el paso 2, para cada uno de estos matchings, se calcula el máximo elemento, el cual indica el lugar que ocupa la vivienda recibida por la familia que recibe la vivienda que se encuentra más abajo en sus preferencias. En el paso 3 se seleccionan aquellos matchings que minimicen este máximo, de forma que la familia que reciba la vivienda menos preferida de acuerdo con sus preferencias se encuentre en la mejor situación posible. Por último, en el paso 4 se seleccionan aquellos matchings que, dentro de los que pasan el paso 3, minimizan $\text{sum}(X_k \odot P)$, de forma de asignarle a cada familia, de forma conjunta, una vivienda que se encuentre lo más arriba posible en sus preferencias. Es fácil notar que el paso 2 es equivalente a la primera etapa realizada por el MTAV, mientras que los pasos 3 y 4 son equivalentes a resolver la segunda etapa.

Ejemplo 1: Consideremos el siguiente caso para $n = 3$. En este escenario, el conjunto de todas las asignaciones posibles ($\mathcal{X}$) consiste en las seis matrices permutación de dimensión 3x3:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos el siguiente perfil de preferencias, que se puede representar con la siguiente matriz P_1:

$\succeq_1$	$\succeq_2$	$\succeq_3$
h_1	h_2	h_2
h_2	h_1	h_3
h_3	h_3	h_1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para visualizar el mecanismo, realicemos los pasos detallados anteriormente para la asignación X_1:

$$X_1 \odot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 2: $\max(X_1 \odot P) = 2$

Paso 4: $\text{sum}(X_1 \odot P) = 2 + 1 + 1 = 4$

Los resultados de estos pasos se muestran en la siguiente tabla para todos los matchings posibles:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Paso 2	$\underline{2}$	3	$\underline{2}$	3	3	3
Paso 4	$\underline{4}$	5	6	7	6	8

de donde vemos que tanto X_1 como X_3 pasan la primera etapa del proceso de optimización ya que ambos tienen un valor de 2 en el segundo paso, y el matching elegido entre estos dos es X_1 ya que es el que maximiza la satisfacción global dado que minimiza $\text{sum}(X_1 \odot P)$.

5. Análisis del MTAV

En esta sección analizamos el MTAV respecto a las propiedades definidas anteriormente. Encontramos que este es eficiente ex-post y cumple con el *equal treatment of equals*, pero no es un mecanismo *strategyproof*.

Llamando $\mathcal{X}^o$ al conjunto de matchings que son solución del problema de optimización que resuelve el MTAV, y recordando que $\mathcal{X}$ es el conjunto de todos los matchings posibles y $S = min_{X \in \mathcal{X}}\{max\{\sum_j p_{1j}x_{1j}, ..., \sum_j p_{nj}x_{nj}\}\}$[8], definamos los siguientes conjuntos $\mathcal{X}^1$ y $\mathcal{X}^2$:

$\mathcal{X}^1 = \{X \in \mathcal{X} : max\{\sum_j p_{1j}x_{1j}, ..., \sum_j p_{nj}x_{nj}\} > S\}$, es decir, los matchings que no pasan la primera etapa del MTAV.

$\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^o)$, es decir, los matchings que pasan la primera pero no la segunda etapa del MTAV.

Proposición 1. **ϕ_{MTAV} es eficiente ex-post.**

Demostración. Sea X^* a la asignación implementada por ϕ_{MTAV} ($X^* \in \mathcal{X}^o$), supongamos que existe otro matching X' que domina en sentido de Pareto a X^*. En términos de los elementos de las matrices P, X^* y X', esto quiere decir que:

$$\sum_{j \in H} p_{ij}x'_{ij} \leq \sum_{j \in H} p_{ij}x^*_{ij} \quad \forall i \in N \tag{1a}$$

$$y \quad \sum_{j \in H} p_{ij}x'_{ij} < \sum_{j \in H} p_{ij}x^*_{ij} \quad \text{para algún} \quad i \in N \tag{1b}$$

Existen entonces tres casos posibles: i) $X' \in \mathcal{X}^o$, ii) $X' \in \mathcal{X}^1$ o iii) $X' \in \mathcal{X}^2$.

i) Si $X' \in \mathcal{X}^o$, como $X^* \in \mathcal{X}^o$, sabemos que $\sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x'_{ij} = \sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x^*_{ij}$. Si X' domina en sentido de pareto a X^*, esto quiere decir que se cumplen (1a) y (1b), lo que significa que $\sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x'_{ij} < \sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x^*_{ij}$, lo cual es una contradicción.

ii) Si $X' \in \mathcal{X}^1$, sabemos que $max_i(\sum_j p_{ij}x'_{ij}) > S$ y que $max_i(\sum_j p_{ij}x^*_{ij}) \leq S$. Por lo tanto, para la familia i para la cual $\sum_j p_{ij}x'_{ij} = max_i(\sum_j p_{ij}x'_{ij})$ tenemos que $\sum_{j \in H} p_{ij}x'_{ij} > \sum_{j \in H} p_{ij}x^*_{ij}$, lo que contradice la desigualdad (1a).

iii) Si $X' \in \mathcal{X}^2$, sabemos que $\sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x'_{ij} > \sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x^*_{ij}$, lo que contradice ambas desigualdades, ya que si fueran ciertas tendríamos que $\sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x'_{ij} < \sum_{j \in H, i \in N} p_{ij}x^*_{ij}$.

Por lo tanto, $\nexists$ X' que domine en sentido de Pareto a X^*, por lo que todo $X^* \in \mathcal{X}^o$ es Pareto-eficiente, y como el MTAV es una lotería sobre $\mathcal{X}^o$, es un mecanismo que resulta con probabilidad 1 en un matching Pareto-óptimo. □

[8] Es decir, S es el lugar que ocupa en las preferencias de la familia i la vivienda que le es asignada, donde la familia i es aquella que recibe la vivienda que se encuentra peor ubicada en sus preferencias, en relación al resto de las familias de la misma cooperativa.

Esto quiere decir que, para cualquier asignación que resulte de utilizar el MTAV, no es posible mejorar la situación de alguna de las familias sin empeorar la situación de otra. Ahora, veremos un ejemplo donde resulta claro que bajo el MTAV las familias pueden tener incentivos a reportar preferencias distintas a las verdaderas.

Proposición 2. ϕ_{MTAV} **no es strategy-proof**.

Demostración.

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos 5 familias cuyas preferencias sobre las viviendas se encuentran representadas por la matriz P_2. El matching que resulta de utilizar el mecanismo MTAV es X_{MTAV}:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X_{MTAV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, consideremos los incentivos que tiene la familia 3 bajo este mecanismo. Si revela sus preferencias verdaderas obtiene h_5, la cual se ubica en el segundo lugar dentro de sus preferencias. Sin embargo, veamos que sucede si en vez de reportar honestamente sus preferencias de acuerdo con P_2, decide intercambiar los lugares que ocupan h_4 y h_5, reportando P_2' de la siguiente forma:

$$P_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X_{MTAV}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bajo esta nueva matriz de preferencias, ahora el MTAV le asigna h_5 a la familia 5, dado que es la única que no la ubica en el quinto lugar de sus preferencias, y luego, el mecanismo le asigna a cada una de las familias restantes su primera opción, como se muestra en el matching X_{MTAV}'. Bajo P_2' la familia 3 recibe h_3 en vez de h_5, y como tenemos que $h_3 \succ_3 h_5$, el MTAV no es *strategyproof*. $\square$

Por lo tanto, utilizando el MTAV existen situaciones en las cuales alguna familia podría conseguir una mejor asignación reportando preferencias falsas. Por último, con la siguiente proposición veremos que el MTAV asigna la misma probabilidad de obtener las distintas viviendas a familias con idénticas preferencias.

Proposición 3. ϕ_{MTAV} **cumple con el *equal treatment of equals*.**

Demostración. Dadas dos familias, 1 y 2, tales que $p_1 = p_2$, consideremos un matching cualquiera que sea solución del problema de optimización MTAV (es decir, que $X \in \mathcal{X}^o$). Llamemos X' a otro matching que resulta de intercambiar la asignación en X de la familia 1 con la de la familia 2. Como $p_1 = p_2$, esto tiene como consecuencia que tanto $max_j(\sum_i p_{ij}x_{ij}) = max_j(\sum_i p_{ij}x'_{ij})$, y $\sum\sum p_{ij}x_{ij} = \sum\sum p_{ij}x'_{ij}$, por lo que X' también es solución al problema de optimización ($X' \in \mathcal{X}^o$). Continuando con el razonamiento, podemos ver que para cada $X \in \mathcal{X}^o$ en donde a la familia 1 se le asigna h_j, existe $X' \in \mathcal{X}^o$ en donde a la familia 2 se le asigna h_j, y por lo tanto la cantidad de asignaciones en las cuales la familia 1 recibe h_j es igual a la cantidad de asignaciones en donde a la familia 2 recibe esta vivienda, para todo $h_j \in H$. Por último, como las loterías surgen de aleatorizar sobre el conjunto $\mathcal{X}^o$ donde cada elemento tiene igual probabilidad de ser seleccionado, y la cantidad de asignaciones dentro de $\mathcal{X}^o$ donde la familia 1 y 2 reciben h_j es la misma, tenemos que $x_1 = x_2$. $\square$

6. MTAV, MTAV *alt* y la Teoría de la Elección Social

En la sección anterior, analizamos el mecanismo MTAV a través de un conjunto de propiedades estándar de la literatura económica. Sin embargo, en este problema particular, las cooperativas tienen preocupaciones sobre la asignación final de las viviendas que no son capturadas por este tipo de propiedades. A su vez, hasta este momento, hemos interpretado a $\sum\sum x_{ij}p_{ij}$ como la "satisfacción global" de una cooperativa, entendiendo esto como una medida del bienestar global de la misma. Prino et al. (2016) plantean al MTAV como un mecanismo que maximiza el bienestar global dentro de aquellos que mejoran la situación de la familia más desfavorecida. En la medida que este mecanismo únicamente elicita las preferencias ordinales de las familias, cabe preguntarse si esto es así para cualquier representación cardinal de las mismas. El objetivo de esta sección es formalizar estas ideas desde el punto de vista de la teoría de la elección social y explicitar la conexión entre el MTAV y algunos elementos de esta literatura. También mostramos los supuestos implícitos en el abordaje de Prino et al. (2016) a la hora de definir el bienestar de una cooperativa. Finalmente, analizamos las consecuencias de invertir el orden de las etapas del MTAV y utilizar el MTAV alternativo para encontrar una asignación. Para esto, es necesario introducir notación adicional.

Dado un perfil de preferencias $\succeq$, llamemos $r_i(X)$ al ranking que ocupa la vivienda asignada al agente i en el matching X bajo $\succeq$ representadas por la matriz de preferencias P, esto es, $r_i(X) = \sum_j x_{ij}p_{ij}$.

La función de utilidad de la familia i, $u_i(X)$, es una función $u_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $u_i(X) \geq u_i(X') \iff X \succeq_i X'$. Por lo tanto, esta es una representación cardinal de $\succeq_i$

Dado un *house allocation problem* (N, H, $\succeq$), una función de bienestar social (FBS) es una función $f : \mathcal{P}\mathrm{x}\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando $\succeq$ se encuentre dado, hablaremos de $f(X)$ en vez de $f(\succeq, X)$.

Definición 7. La FBS ***Rawlsiana*** está definida como $f_R(X) = min_i\{u_i(X)\}$.

Esta función captura la idea de Rawls de tener como objetivo de bienestar global el bienestar de la familia que se encuentre en la peor situación. Diremos que un matching X cumple con el criterio maximin si pertenece al conjunto $argmax_X f_R(X)$, es decir, maximiza la utilidad de la familia que se encuentra en la peor situación.

Definición 8. La FBS ***Utilitarista*** está definida como $f_U(X) = \sum_i u_i(X)$.

Según esta función, el bienestar global de de una cooperativa se encuentra dado por la suma de las utilidades de todas las familias. Diremos que un matching X es utilitarista si pertenece al conjunto $argmax_X f_U(X)$, es decir, maximiza la suma de las utilidades de todas las familias.

Definición 9. Un matching X **maximiza lexicográficamente** un par ordenado de funciones de bienestar (f, g) si $f(X) > f(X')$, o simultáneamente $f(X) = f(X')$ y $g(X) \geq g(X')$, para todo $X' \in \mathcal{X}$.[9]

El objetivo del siguiente ejemplo es mostrar cómo para algunas funciones de utilidad el MTAV puede no maximizar el bienestar agregado de una cooperativa dentro de aquellas asignaciones que cumplen con el criterio maximin, definido este bienestar como $f_U(X)$. Concluiremos comentando qué tipo de funciones de utilidad garantizan que el MTAV maximiza lexicográficamente (f_R, f_U).

Observación 1. Una primera observación es que si $u_i(X) = -r_i(X) \quad \forall i \in N$, entonces el MTAV maximiza $f_R(X)$. Esto también es cierto, por ejemplo, cuando las funciones de utilidad cumplen que $u_i(r_i(X)) = u_j(r_j(X)) \iff r_i(X) = r_j(X) \quad \forall i, j \in N$, caso en el que nos concentraremos ahora [10].

Ejemplo 3. Consideremos el siguiente ejemplo donde $n = 5$, y donde las preferencias se encuentran representadas por la matriz P_3, y las funciones de utilidad de las familias son u_i $\forall i \in N$:

[9]Esta definición es una adaptación para el *house allocation problem* de Boudreau y Knoblauch (2017), quienes estudian este problema para *marriage markets*.

[10]Es decir, todas las familias tienen la misma utilidad por las viviendas que ocupan el mismo lugar en sus respectivas preferencias. En términos más generales, el MTAV maximiza $f_R(X)$ siempre y cuando para la familia i para la cual $r_i(X) = max_i r_i(X)$, $u_i(X) \leq u_j(X) \quad \forall j \in N$.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad u_i(X) = \begin{cases} 10 & \text{si } r_i(X) = 1 \\ 9 & \text{si } r_i(X) = 2 \\ 2 & \text{si } r_i(X) = 3 \\ 1 & \text{si } r_i(X) = 4 \\ 0 & \text{si } r_i(X) = 5 \end{cases}$$

Veamos dos matchings, ambos soluciones del MTAV:

$$X^1_{MTAV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X^2_{MTAV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que:

$$\max_i r_i(X^1_{MTAV}) = \max_i r_i(X^2_{MTAV}) = 4$$
$$\sum_i r_i(X^1_{MTAV}) = \sum_i r_i(X^2_{MTAV}) = 10$$

dado que ambos son solución del MTAV, pero tenemos que:

$$f_U(X^1_{MTAV}) = \sum_i u^3_i(X^1_{MTAV}) = 33 < 39 = \sum_i u^3_i(X^2_{MTAV}) = f_U(X^2_{MTAV})$$

Por lo que bajo estas funciones de utilidad, dada la observación 1, el MTAV siempre maximiza $f_R(X)$, pero puede resultar en una asignación que, condicional en eso, como sucede con X^1_{MTAV}, no maximiza $f_U(X)$, y por lo tanto no maximiza el bienestar agregado de las familias. La intuición de este resultado se relaciona con la intensidad de las preferencias representadas por $u^3_i(X)$: el valor marginal de pasar de $r_i(X) = 2$ a $r_i(X) = 1$ es menor que el de pasar de $r_i(X) = 3$ a $r_i(X) = 2$ para todas las familias, por lo que una asignación como X^2_{MTAV}, en la cual, partiendo de X^1_{MTAV}, se intercambian las viviendas entre las familias 1 y 4 de forma que ahora en vez de recibir su primera y tercera opción respectivamente, ambas reciben su segunda opción, puede significar un nivel de bienestar mayor de acuerdo con $f_U(X)$. Veremos que para que el MTAV garantice un matching que maximiza $f_U(X)$ dentro de los que maximizan $f_R(X)$ es suficiente que este valor marginal sea constante en $r_i(X)$ [11].

[11] Es decir, que $u_i(X)$ sea lineal en $r_i(X)$.

Para esto, definamos la siguiente función de utilidad:

$$u_i^*(X) = \alpha - \beta r_i(X) \quad \forall i \in N, X \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

Bajo este tipo de funciones de utilidad, es posible realizar una interpretación equivalente del MTAV, como el mecanismo que maximiza lexicográficamente el par ordenado de funciones de bienestar social Rawlsiana y Utilitaria.

Proposición 4. Bajo u_i^*, el mecanismo MTAV siempre resulta en un matching que maximiza lexicograficamente (f_R, f_U), mientras que el MTAV alternativo siempre resulta en un matching que maximiza lexicograficamente (f_U, f_R).

La demostración para el MTAV es trivial luego de las siguientes observaciones, y la del MTAV alternativo es análoga: dado que la primera etapa del MTAV restringe el conjunto de soluciones del problema a aquellos matchings $X \in argmin_X\{max_X r_i(X)\}$, se garantiza que la solución $X_{MTAV} \in argmax_X f_R(X)$. A su vez, la función objetivo de la segunda etapa se puede reescribir de la siguiente forma para el caso donde $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, de forma que $u_i(X) = -r_i(X)$:

$$min \sum_{j \in H, i \in N} p_{ij} x_{ij} = min \sum_i r_i(X) = min \sum_i -u_i(X) = max \sum_i u_i(X)$$

Como el conjunto $argmax_x f(x)$ es igual a $argmax_x\{af(x) + c\}$ para a una constante positiva y c una constante cualquiera, tenemos que $argmax_X \sum_i u_i(X)$ es igual a $argmax_X \sum_i u_i^*(X)$, y por lo tanto, bajo u_i^*, el matching que resulta del MTAV maximiza $f_U(X)$ dentro del conjunto $argmax_X f_R(X)$, es decir que maximiza lexicográficamente (f_R, f_U). $\square$

Por último, el objetivo del siguiente ejemplo es ilustrar las consecuencias que tiene utilizar el MTAV alternativo en lugar del MTAV (es decir, invertir el órden en el que se realizan las etapas del proceso de optimización) para encontrar una asignación.

Ejemplo 2 (continuación). Retomando el ejemplo 2, tenemos 5 familias cuyas preferencias sobre las viviendas se encuentran representadas por la matriz P_2:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En este caso, las asignaciones que se obtienen utilizando el MTAV (X_{MTAV}) y el MTAV alternativo (X_{ALT}) vienen dadas por:

$$X_{MTAV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_{ALT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que:

$$X_{MTAV} \odot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_{ALT} \odot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es claro que ambas asignaciones son Pareto eficientes, dado que no es posible realizar intercambios de viviendas entre las familias de forma que alguna obtenga una mejor asignación sin empeorar a otra. Por otro lado, suponiendo que $u_i(X) = -r_i(X) \quad \forall i \in N$, observamos que:

	$f_R(X)$	$f_U(X)$
$X = X_{MTAV}$	-2	-8
$X = X_{ALT}$	-3	-7

Con estos resultados, se pone de manifiesto la tensión que puede existir en estos mecanismos entre mejorar la situación de aquella familia más desfavorecida, en el sentido de maximizar f_R, y la satisfacción global, en el sentido de maximizar f_U. Resulta claro que el MTAV prioriza mejorar la asignación de quien se encuentra en la peor situación, ya que encuentra como solución una asignación en donde $f_U(X_{MTAV})$ es menor al valor de $f_U(X_{ALT})$, a cambio de un mayor valor de $f_R(X_{MTAV})$.

Por otro lado, si se buscara ser menos restrictivo respecto a la definición de bienestar global utilizada, una primera alternativa al MTAV sería el siguiente mecanismo. En una primera etapa, encontrar todos los matchings que cumplen con el criterio maximin, y en una segunda, seleccionar de este conjunto a aquellos que son Pareto-óptimos[12].

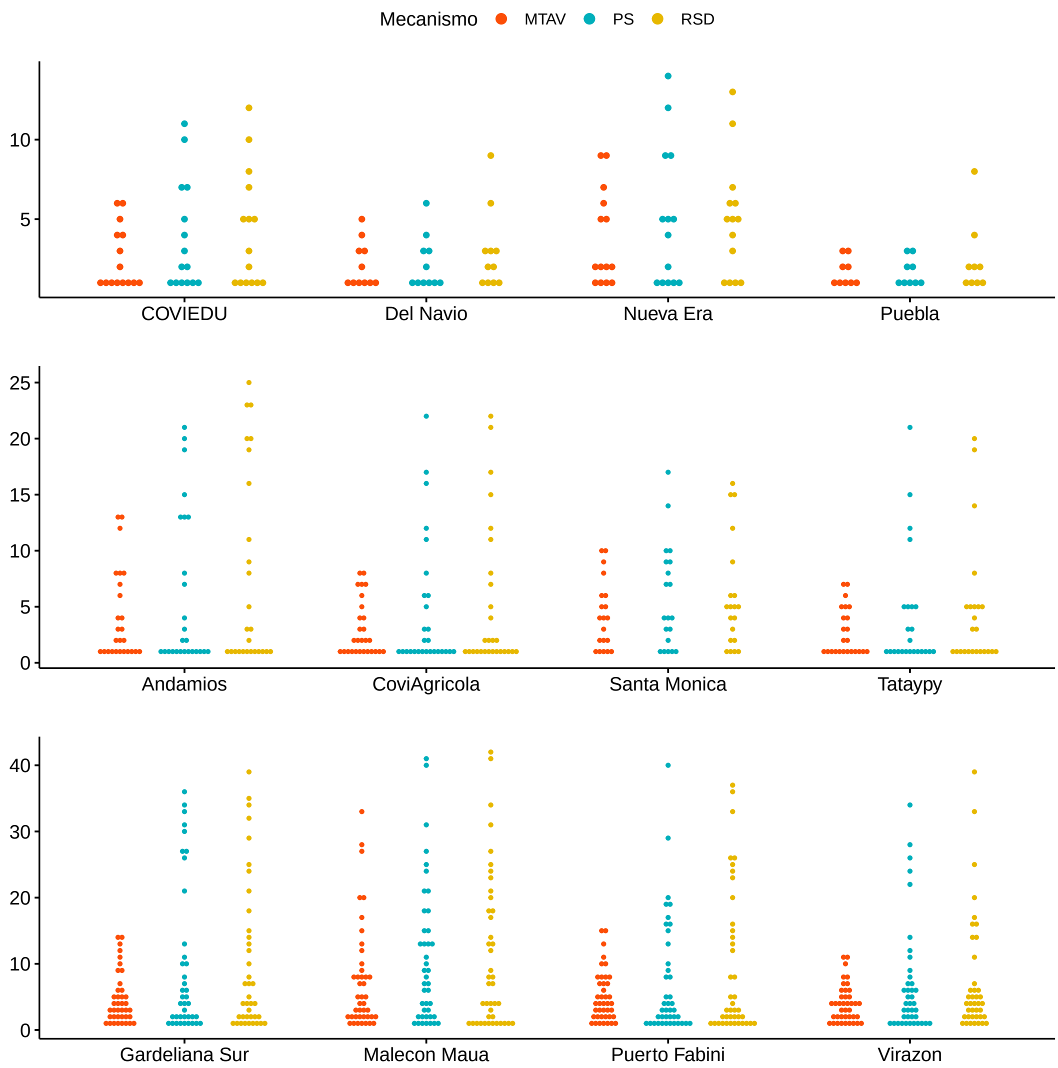
7. Aplicación empírica

En esta sección se utilizan datos de las preferencias de las cooperativas que han utilizado el mecanismo MTAV hasta el momento, y se comparan las asignaciones obtenidas bajo este

[12] Ver la continuación del ejemplo 3 en el Anexo donde se muestra que, utilizando el MTAV, hay matchings que no pasan la segunda etapa, pero son Pareto-óptimos y cumplen con el criterio maximin.

mecanismo con las que se hubieran obtenido de utilizar el RSD y el PS. Esto implica, por un lado, asumir que las preferencias reportadas por las familias son las verdaderas. Por otro, el hecho que el RSD y el PS producen asignaciones aleatorias obliga a considerar una realización de las mismas para realizar la comparación en términos de las asignaciones finales[13].

Figura 1: Resultados de las asignaciones bajo los distintos mecanismos



Nota: Las figuras representan las asignaciones bajo los distintos mecanismos para las distintas cooperativas. Cada punto representa a una de las familias dentro de la cooperativa, en el eje vertical esta representado el lugar que ocupa la vivienda asignada en sus preferencias. Cuanto más cerca del 1 se encuentre esa asignación, mejor será esa asignación para esa familia

[13] Si bien esto es una limitación del trabajo, el hecho que los resultados, en términos cualitativos, sean similares para todas las cooperativas, y estos se mantengan considerando realizaciones alternativas, como se muestra en las Figuras 2 y 3 del Anexo, sugiere que estos resultados no responden exclusivamente a la realización considerada para el análisis.

En la Figura 1 se muestra, para cada cooperativa, el lugar que ocupa en las preferencias de cada familia la asignación resultante bajo cada uno de estos distintos mecanismos, mientras que en la Figura 4[14] se detalla este mismo resultado para cada familia de cada cooperativa. En este sentido, cuanto más bajo sea el valor de esta variable, mejor es la asignación obtenida por esa familia según sus preferencias (con un mínimo posible de 1). Se observa que, para todas las cooperativas consideradas, el MTAV genera asignaciones en las cuales la distribución de esta variable se encuentra más concentrada en valores cercanos al 1, y por lo tanto más familias son asignadas a viviendas cercanas a su opción más preferida, mientras que utilizando el PS y el RSD se obtienen asignaciones similares entre sí.

Cuadro 1: Estadisticas de las asignaciones bajo los distintos mecanismos

		$max_i \sum_j p_{ij}x_{ij}$			$\sum\sum p_{ij}x_{ij}$			$sd\ (\sum_j p_{ij}x_{ij})$		
	# familias	MTAV	RSD	PS	MTAV	RSD	SP	MTAV	RSD	PS
(a) Cooperativa										
Andamios	26	13	25	21	106	199	153	4.00	8.72	6.91
CoviAgricola	28	8	22	22	84	144	128	2.48	6.52	5.81
COVIEDU	15	6	12	11	38	63	57	1.96	3.65	3.45
Del Navio	11	5	9	6	23	32	24	1.45	2.51	1.66
Gardeliana Sur	39	14	39	36	185	395	384	3.91	11.37	11.49
Malecon Maua	42	33	42	41	316	471	456	8.01	11.70	10.58
Nueva Era	14	9	13	14	53	69	70	2.99	3.67	4.40
Puebla	9	3	8	3	15	22	15	0.87	2.30	0.87
Puerto Fabini	41	15	37	40	207	386	297	3.84	11.02	8.78
Santa Monica	20	10	16	17	85	118	116	3.08	4.92	4.65
Tataypy	24	7	20	21	65	108	100	2.12	5.54	5.31
Virazon	40	11	39	34	159	301	279	2.82	8.90	8.38

Nota: Elaboración propia con las preferencias reportadas por las familias.

En el Cuadro 1 se muestra, para cada cooperativa, tres variables relevantes para este análisis: la posición que ocupa en las preferencias la vivienda asignada a la familia que se encuentra en la peor situación ($max_i \sum_j p_{ij}x_{ij}$), la suma para todas las familias del lugar que ocupa en las preferencias de cada familia la vivienda asignada ($\sum\sum x_{ij}p_{ij}$), y el desvío estándar de $\sum_j p_{ij}x_{ij}$ como una aproximación a la desigualdad en la distribución final. En este cuadro vemos que, como era esperable, el MTAV consigue mejores resultados en cuanto a la asignación de la familia que se encuentra en la peor posición, pero esto no parece perjudicar el bienestar global (definido este como $\sum\sum p_{ij}x_{ij}$), ya que en esta variable también alcanza mejores resultados que el RSD y el PS. Por último, la restricción

[14] Incluída en el Anexo.

que impone el MTAV sobre la satisfacción mínima también tiene como consecuencia que la dispersión en la variable $\sum_j p_{ij}x_{ij}$ sea menor bajo este mecanismo en comparación con los otros dos, por lo que este también resulta en una distribución menos desigual.

En el Cuadro 2 se muestra, para el total de las cooperativas, el lugar que ocupa en las preferencias de las familias la vivienda que les fue asignada bajo los distintos mecanismos. En el Panel (a) vemos que si bien hay más familias que obtienen su primera opción utilizando el RSD o el PS, si consideramos a aquellas familias que obtienen su primera o segunda opción el desempeño del MTAV pasa a ser mejor, siendo 142 familias las que alcanzan alguno de estos dos resultados, contra 133 con el RSD y 141 con el PS. A su vez, la cantidad de familias que reciben su 5ta opción o peor también es menor con el MTAV que con los otros mecanismos. Pasando al Panel (b), donde ahora vemos el lugar relativo que ocupa la vivienda asignada (el primer quintil se corresponde con las viviendas que ocupan un lugar dentro del 20 % inferior de acuerdo a las preferencias de las familias, hasta llegar al 5to quintil que se corresponde con las viviendas que pertenecen al 20 % superior[15]), la performance del MTAV es claramente superior, asignandole a 228 familias una vivienda que se encuentra en el 20 % superior de acuerdo a sus preferencias, y no asignandole a ninguna una vivienda que se encuentra en el 20 % inferior.

Cuadro 2: Análisis para la totalidad de las cooperativas. Cantidad de familias según lugar que ocupa la asignación en sus prefrencias reportadas.

	Cantidad de familias				Cantidad de familias		
	MTAV	RSD	PS		MTAV	RSD	PS
(a) Lugar absoluto				*(b) Lugar relativo*			
1er lugar	94	100	107	5to quintil	228	184	193
2do lugar	48	33	34	4to quintil	61	53	55
3er lugar	30	20	23	3er quintil	15	29	28
4to lugar	31	21	19	2do quintil	5	22	21
5to o mas	106	135	126	1er quintil	0	21	12
Último lugar	0	1	2				

Nota: Elaboración propia con las preferencias reportadas por las familias.

[15] Por ejemplo, en una cooperativa con 10 viviendas y una familia i cuyas preferencias son representadas por $2 \succeq_i 1 \succeq_i 4 \succeq_i 3 \succeq_i 10 \succeq_i 7 \succeq_i 8 \succeq_i 9 \succeq_i 5 \succeq_i 6$, el 1er quintil se corresponde con las viviendas {6;5} y así sucesivamente hasta el 5to quintil, que se corresponde con {1;2}

8. Comentarios finales

En este trabajo se analizaron las propiedades del MTAV, un mecanismo utilizado para asignar familias a viviendas dentro de una cooperativa. Se mostró que este mecanismo es eficiente ex-post y cumple con el *equal treatment of equals*, pero no es un mecanismo a prueba de comportamientos estratégicos por parte de las familias. A su vez, se formalizó un criterio de equidad ex-post que este mecanismo cumple por construcción: bajo algunos supuestos sobre las utilidades de las familias, el MTAV garantiza que la asignación resultante maximiza lexicograficamente el par ordenado de funciones de bienestar Rawlsiana y Utilitarista, y por lo tanto garantiza el criterio maximin, propiedad que no es compartida por el RSD y el PS. Una alternativa al MTAV menos restrictiva en cuanto a la definición de bienestar global es un mecanismo aleatorio que, dentro de los matchings que cumplen con el criterio maximin, selecciona a todos aquellos que sean Pareto-óptimos.

Por otro lado, la aplicación empírica mostró resultados positivos para el MTAV por sobre estos otros mecanismos dados los objetivos específicos de las cooperativas, incluso respecto al bienestar global alcanzado a pesar de imponer el criterio maximin sobre la asignación final. De esta aplicación surgen nuevas preguntas de carácter empírico: si bien el MTAV no es *strategyproof*, cabe preguntarse, al igual que Budish (2012), cómo se compara el costo de esta posible manipulación con la pérdida de bienestar social que supondría utilizar un mecanismo que sí cumple con esta propiedad, como el RSD.

Por último, algunas propiedades que podrían ser relevantes en términos ex-ante no fueron abordadas en este trabajo. Dentro de ellas, sería interesante a futuro explorar si el MTAV cumple con el concepto de eficiencia ordinal y con una formulación del criterio maximin definida para asignaciones aleatorias (Bogomolnaia, 2015).

9. Anexo

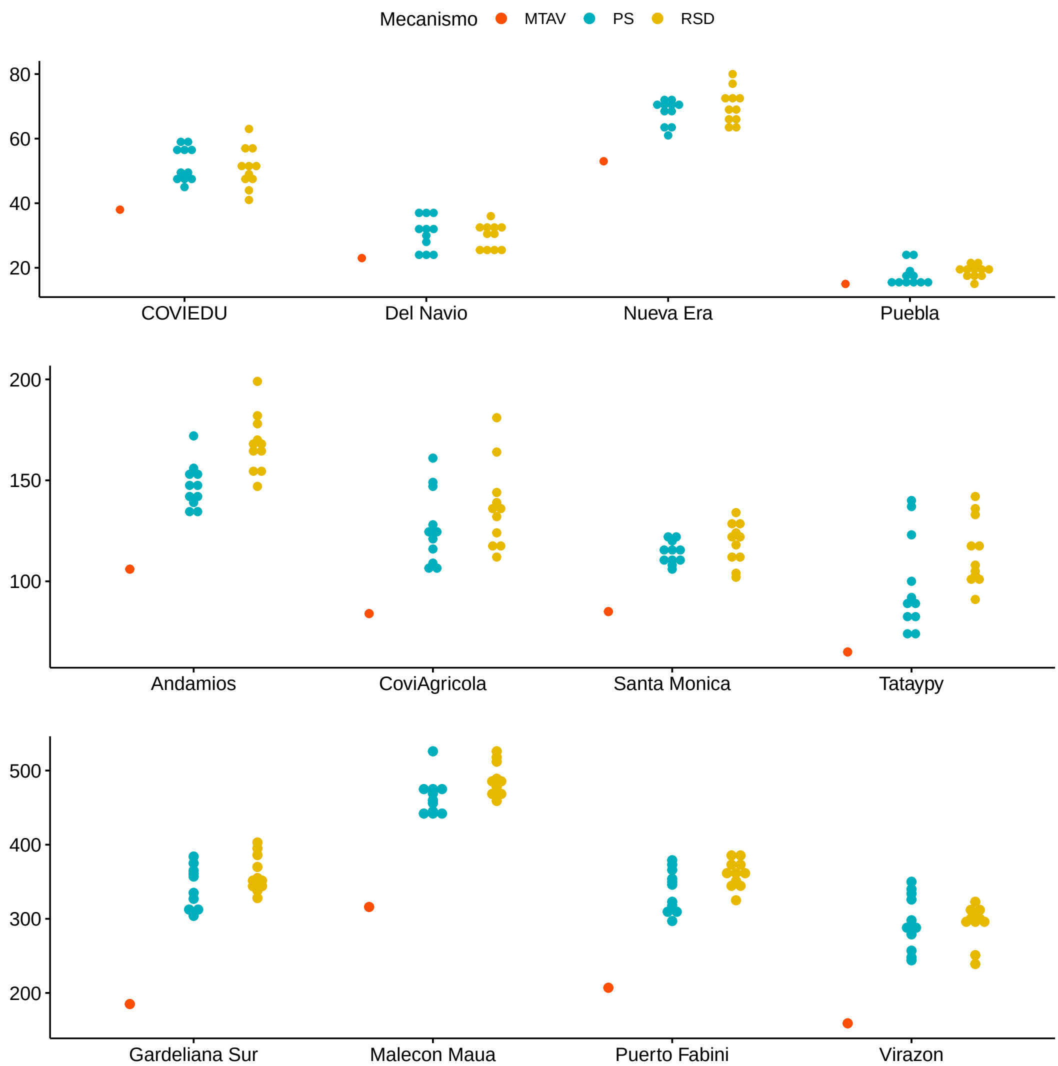
El objetivo de este ejemplo es mostrar que el MTAV no selecciona a todos los matchings que cumplen con el criterio maximin y son Pareto-óptimos.

Ejemplo 3 (continuación). Consideremos el siguiente ejemplo donde las preferencias se encuentran representadas por la matriz P_3, y el matching X, que no es solución del MTAV:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que cumple con el criterio maximin, dado que $\text{máx}_i\, r_i(X) = 4$, pero no pasa la segunda etapa del MTAV, dado que $\sum_i r_i(X) = 12$.[16] Sin embargo, el matching X sí es Pareto-óptimo. Esto quiere decir que la segunda etapa del MTAV tiene como consecuencia que matchings que cumplen con el criterio maximin y son eficientes no son seleccionados.

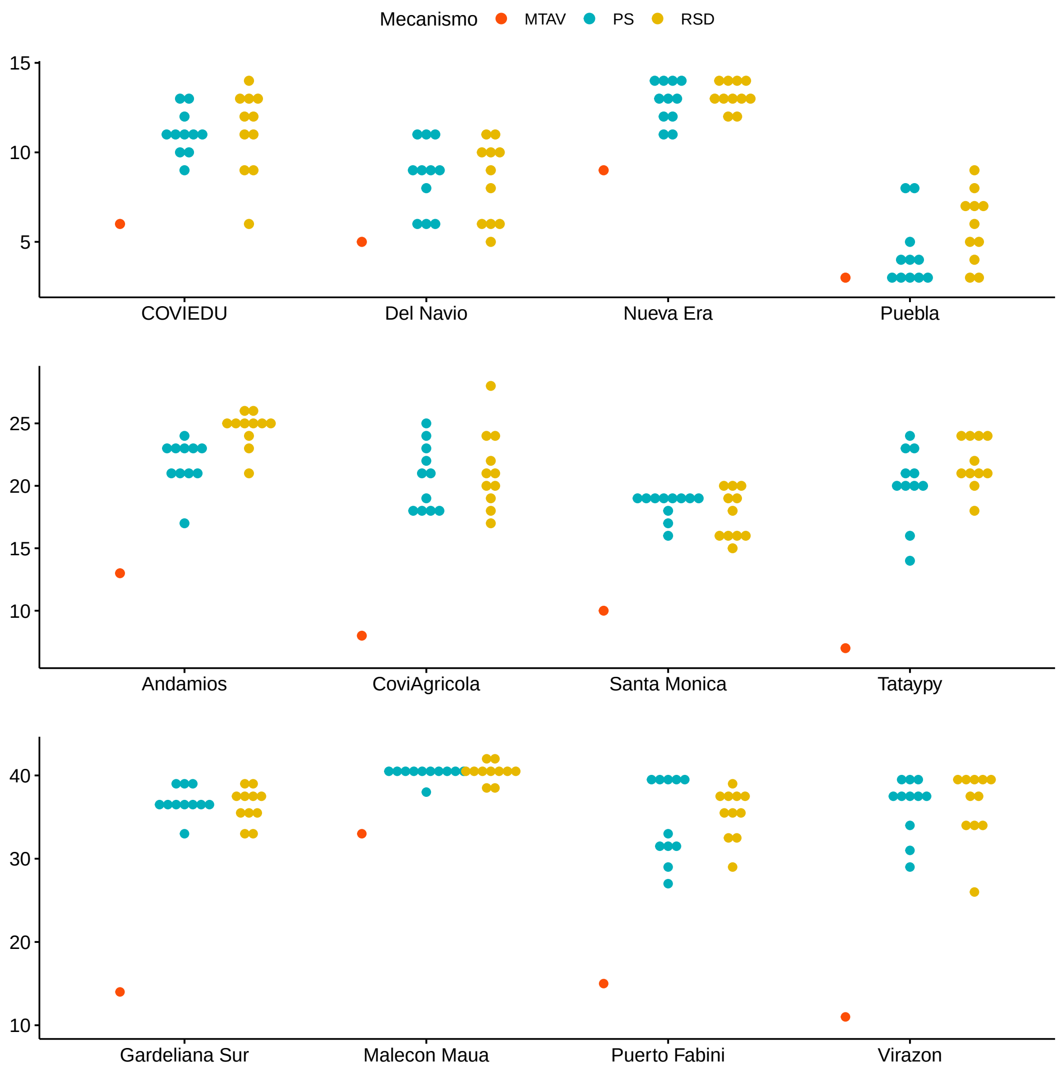
Figura 2: Resultados de $\sum\sum x_{ij}p_{ij}$ para cada cooperativa.



Nota: Cada punto representa el valor de $\sum\sum x_{ij}p_{ij}$ para la correspondiente cooperativa utilizando un mecanismo particular. Para PS y RSD, se muestran los resultados para 10 realizaciones; en el caso del MTAV, cualquier asignación que resulte de ese mecanismo tiene el mismo resultado de $\sum\sum x_{ij}p_{ij}$

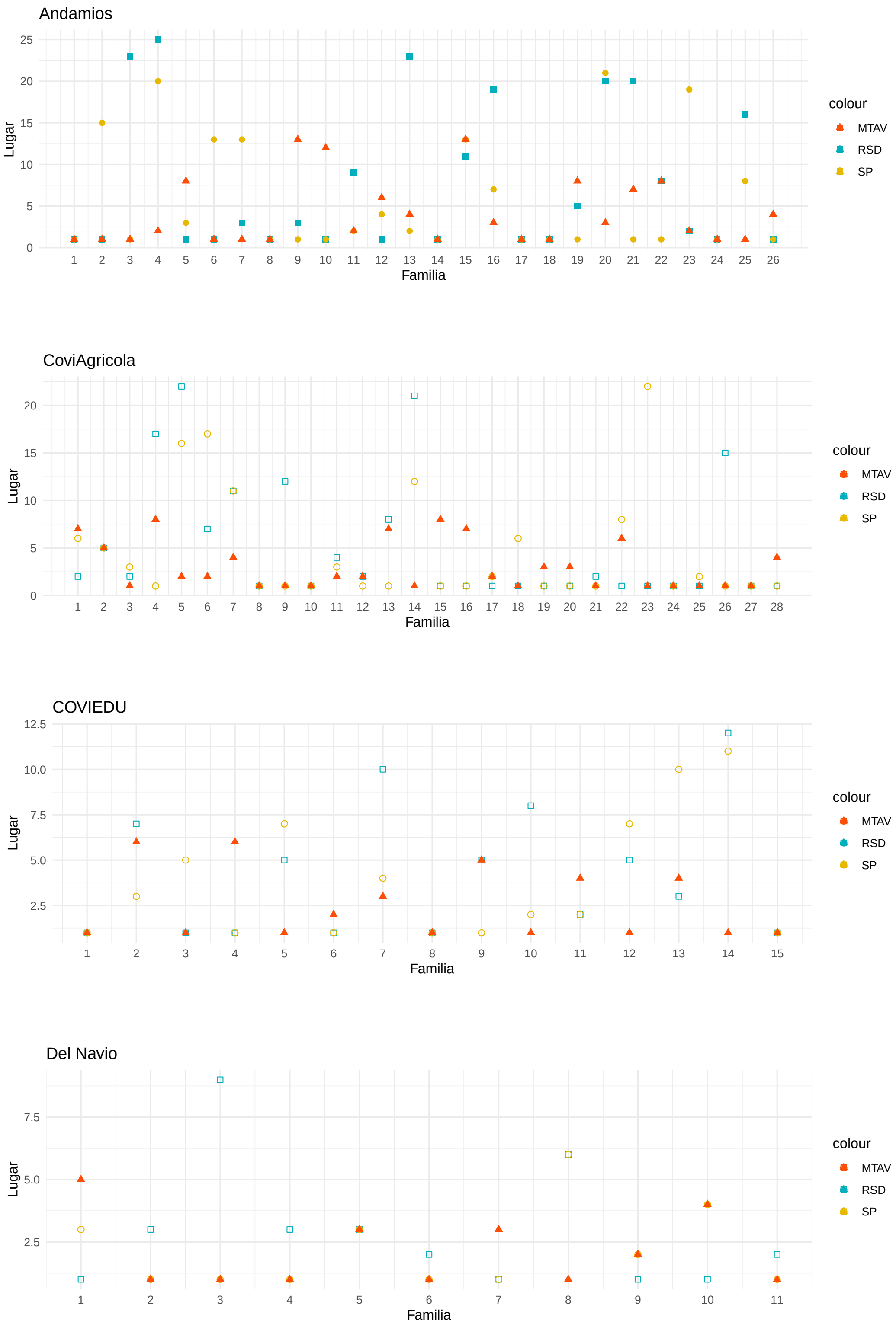
[16] Recordar del ejemplo inicial que, para los matchings que son solución del MTAV, este valor es 10.

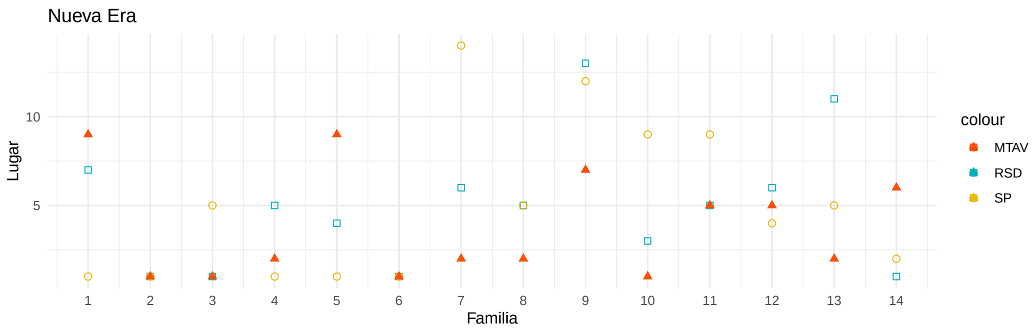
Figura 3: Resultados de $max_i \sum_j p_{ij}x_{ij}$ para cada cooperativa.

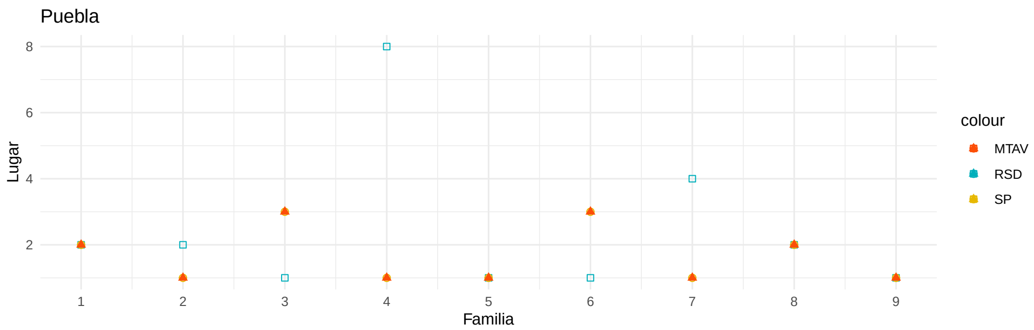


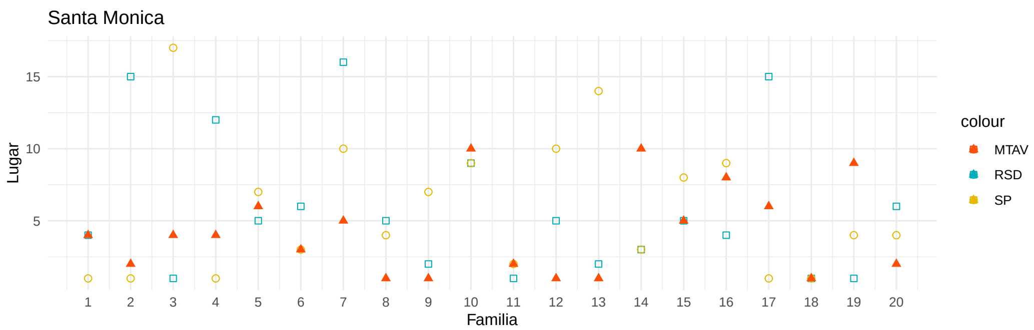
Nota: Cada punto representa el valor de $max_i \sum_j p_{ij}x_{ij}$ para la correspondiente cooperativa utilizando un mecanismo particular. Para PS y RSD, se muestran los resultados para 10 realizaciones; en el caso del MTAV, cualquier asignación que resulte de ese mecanismo tiene el mismo resultado de $max_i \sum_j p_{ij}x_{ij}$

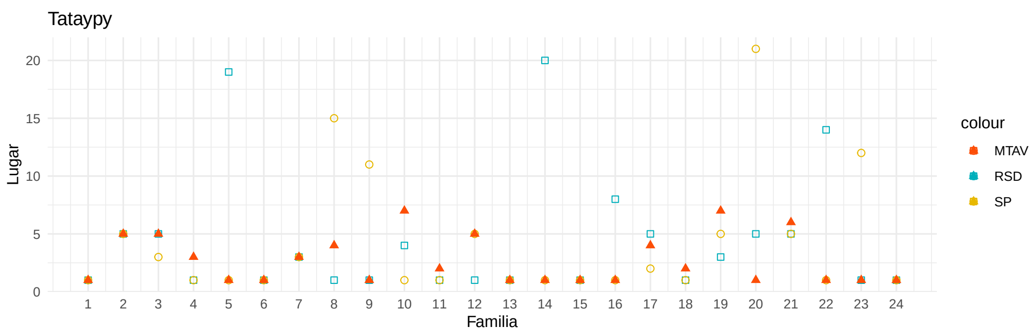
Figura 4: Resultados de las asignaciones para cada cooperativa bajo los distintos mecanismos

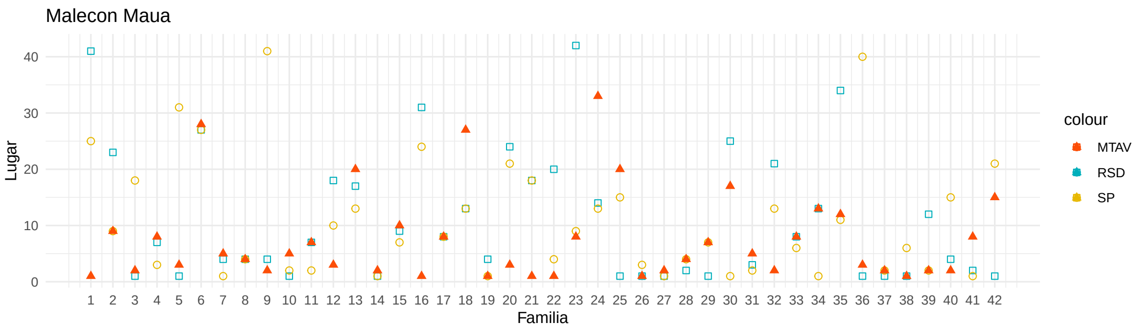


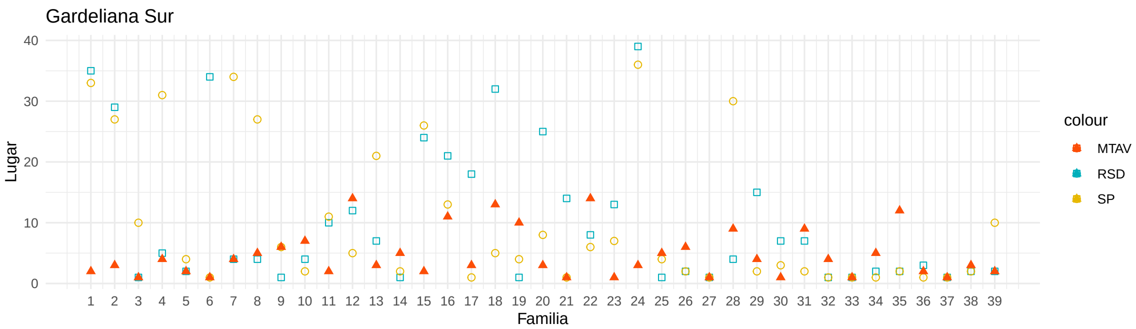

Nueva Era
Lugar
10
5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
Familia
colour
MTAV
RSD
SP

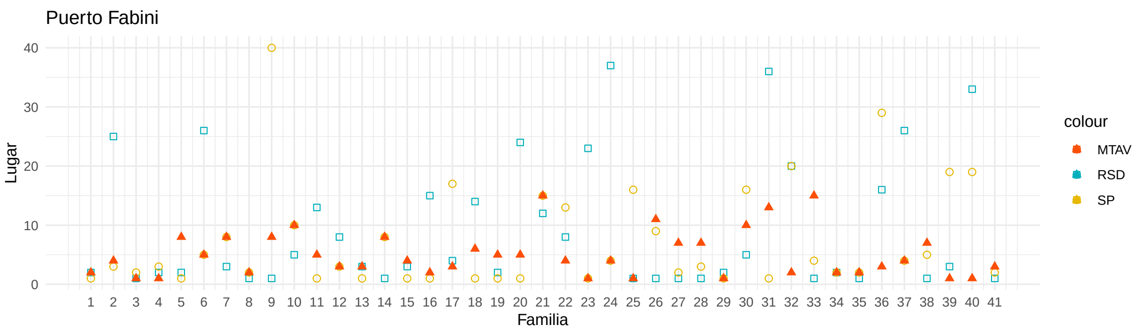

Puebla
Lugar
8
6
4
2
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Familia
colour
MTAV
RSD
SP

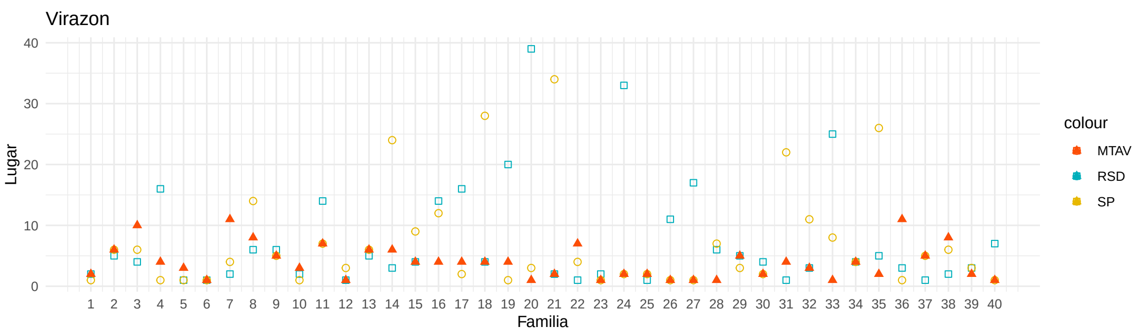

Santa Monica
Lugar
15
10
5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Familia
colour
MTAV
RSD
SP


Tataypy
Lugar
20
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
Familia
colour
MTAV
RSD
SP


Malecon Maua
Lugar
Familia
colour
MTAV
RSD
SP


Gardeliana Sur
Lugar
Familia
colour
MTAV
RSD
SP


Puerto Fabini
Lugar
Familia
colour
MTAV
RSD
SP


Virazon
Lugar
Familia
colour
MTAV
RSD
SP

Referencias

Abdulkadiroğlu, A. & Sönmez, T. (1998). Random Serial Dictatorship and the Core from Random Endowments in House Allocation Problems. *Econometrica*, *66*(3), 689-701. http://www.jstor.org/stable/2998580

Abdulkadiroğlu, A. & Sönmez, T. (2003). School Choice: A Mechanism Design Approach. *American Economic Review*, *93*(3), 729-747.

Arrow, K. J. (1951). *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press. http://www.jstor.org/stable/j.ctt1nqb90

Basteck, C. (2018). Fair solutions to the random assignment problem. *Journal of Mathematical Economics*, *79*, 163-172. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2018.02.006

Bei, X., Liu, S., Lu, X. & Wang, H. (2021). Maximin fairness with mixed divisible and indivisible goods. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, *35*(2), 34. https://doi.org/10.1007/s10458-021-09517-7

Birkhoff, G. (1946). Three observations on linear algebra. *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.*, *5*, 147-151.

Bogomolnaia, A. (2015). Random assignment: Redefining the serial rule. *Journal of Economic Theory*, *158*, 308-318. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jet.2015.04.008

Bogomolnaia, A. & Moulin, H. (2001). A New Solution to the Random Assignment Problem. *Journal of Economic Theory*, *100*(2), 295-328.

Boudreau, J. W. & Knoblauch, V. (2017). A marriage matching mechanism menagerie. *Operations Research Letters*, *45*(1), 68-71. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.12.001

Budish, E. (2011). The Combinatorial Assignment Problem: Approximate Competitive Equilibrium from Equal Incomes. *Journal of Political Economy*, *116*(6).

Budish, E. (2012). Matching "versus"Mechanism Design. *SIGecom Exch.*, *11*(2), 4-15. https://doi.org/10.1145/2509002.2509005

Budish, E., Che, Y.-k., Kojima, F. & Milgrom, P. (2012). Designing Random Allocation Mechanisms: Theory and Applications. *American Economic Review*.

Chen, Y. & Sönmez, T. (2002). Improving Efficiency of On-Campus Housing: An Experimental Study. *American Economic Review*, *92*(5), 1669-1686. https://doi.org/10.1257/000282802762024728

d'Aspremont, C. & Gevers, L. (2002). Chapter 10 Social welfare functionals and interpersonal comparability. *Handbook of Social Choice and Welfare* (pp. 459-541). Elsevier. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1574-0110(02)80014-5

Hammond, P. J. (1976). Equity, Arrow's Conditions, and Rawls' Difference Principle. *Econometrica*, *44*(4), 793-804. http://www.jstor.org/stable/1913445

Hylland, A. & Zeckhauser, R. (1979). The Efficient Allocation of Individuals to Positions. *Journal of Political Economy*, *87*(2), 293-314. http://www.jstor.org/stable/1832088

Prino, M., Sánchez, E. & Cancela, H. (2016). Optimal distribution of habitational units in a cooperative: A mathematical application to optimize satisfaction. *2016 XLII Latin American Computing Conference (CLEI)*, 1-7.

Rawls, J. (1971). *A Theory of Justice*. Harvard University Press. http://www.jstor.org/stable/j.ctvjf9z6v

Rawls, J. (1993). *Political Liberalism*. Columbia University Press.

Roth, A. E. (1982). The Economics of Matching: Stability and Incentives. *Mathematics of Operations Research*, *7*(4), 617-628. https://doi.org/10.1287/moor.7.4.617

Roth, A. E., Sönmez, T. & Ünver, M. U. (2004). Kidney Exchange. *The Quarterly Journal of Economics*, *119*(2), 457-488.